Maximaを使った流体力学基礎演習ノート

溝口純敏
http://www.mzplactice.com/

平成 24 年 6 月 5 日　初版
平成 25 年 2 月 17 日　第一回改訂
平成 25 年 12 月 17 日　第二回改訂
平成 26 年 11 月 15 日　第三回改訂
平成 30 年 1 月 10 日　第四回改訂
平成 30 年 10 月 10 日　第五回改訂

目 次

第 1 章 はじめに **11**

1.1 主な記号 13

第 2 章 基礎方程式 **14**

2.1 流体の特性 14

2.1.1 流体の力学的平衡 14

2.1.2 気体の特性 14

2.1.3 表面張力 16

2.2 質量保存の方程式 18

2.3 運動方程式 19

2.4 流体要素表面に作用する力 19

2.5 流体要素表面に作用する応力と流体速度勾配との関係 21

2.6 Navier-Stokes の式 23

2.7 Euler の運動方程式 25

2.7.1 Euler の運動方程式 (回転動座標系) 27

2.8 Bernoulli の定理 29

2.8.1 Bernoulli の定理 (回転動座標系) 31

2.8.2 気体に対する Bernoulli の定理 32

2.9 速度ポッテンシャル 32

2.10 質量保存の方程式 (ベクトル) 35

2.11 Euler の運動方程式 (ベクトル) 36

2.12 物体に作用する力 37

第 3 章 静止流体 **38**

3.1 流体の力学的平衡 38

3.1.1 マノメータ 38

3.1.2 ゲートに作用する力 39

3.1.3 水タンクの底の球 40

3.1.4 箱形浮体の安定性 41

3.2 動座標系 43

3.2.1 直線加速中のタンクの水面 43

3.2.2 回転する水の水面 43

3.2.3 回転する U 字管の水位 44

3.3 気体の特性 44

3.3.1 大気の圧力と高度の関係（温度一定） 44

3.3.2 大気の圧力と高度の関係（対流圏） 45

第 4 章 Bernoulli の定理 **46**

4.1 タンクの穴からの噴出 46

4.1.1 Torricelli の定理 46

4.1.2 くびれ係数 46

4.1.3 円管より鉛直落下する水 47

4.1.4 円管より斜め上方へ放出した水 47

4.1.5 側壁の穴からの噴出（液面積影響） 48
4.1.6 側壁の穴からの噴出水の到達距離 49
4.1.7 柱状タンクの下端からの流出（液位と時間） 50
4.1.8 半球タンクの下端からの流出（液位と時間） 51
4.1.9 水時計 52
4.1.10 下部開口部でつながった二つのタンクの液面変化 53
4.1.11 容器につめた気体が小さな穴から噴出 54
4.2 管路 55
4.2.1 ベンチュリ管 (Venturi tube) 55
4.2.2 断面積が不連続に急拡大・縮小する管路の損失 56
4.2.3 円管摩擦損失 57
4.2.4 貯水池を結ぶ分岐管路 58
4.2.5 管路網の計算 60
4.2.6 管路網の計算 (収束計算) 61
4.3 管内非定常流れ 63
4.3.1 一様な太さの管内非定常流れ 63
4.3.2 断面積がゆるやかに変化する管内非定常流れ 63
4.3.3 タンク側壁につけた水平で一様な太さの管内非定常流れ 64
4.3.4 管路内の水撃現象 65
4.3.5 一様な太さの U 字管の液体振動 69
4.3.6 断面積がゆるやかに変化する U 字管の液体振動 70
4.4 回転動座標系 71
4.4.1 回転する円管 (遠心ポンプの原理) 71
4.5 せき 72
4.5.1 三角せき 72
4.5.2 もぐりせき 72
4.6 開水路 73
4.6.1 ベルヌイの定理（開水路） 73
4.6.2 一様・定常流 73
4.6.3 流れのエネルギー 74
4.6.4 流れの運動量 75
4.6.5 ゆるやかに水位が変化する流れ 76
4.6.6 跳水現象 77
4.6.7 開水路水の過渡現象（ダムの崩壊モデル） 78
4.6.8 円形開水路の経済的な形状 80
4.6.9 台形開水路の経済的な形状 81
4.7 漏洩 82
4.7.1 容器内圧力変化 82
4.7.2 分子流 83
4.7.3 粘性流 86
4.7.4 Knudsen の半理論式 88

第 5 章 2 次元完全流体 **89**
5.1 複素解析 89
5.1.1 2 次元速度ポッテンシャルと流れ関数 89
5.1.2 複素演算 91
5.1.3 複素関数の微分 92
5.1.4 Cauchy-Rieman の微分方程式の複素表示 93
5.1.5 Cauchy の積分定理 94
5.1.6 Cauchy の積分公式 95

5.1.7 留数定理 . . . 96
5.1.8 一様な流れ . . . 97
5.1.9 わき出し . . . 97
5.1.10 二重わき出し . . . 99
5.1.11 渦糸 . . . 100
5.1.12 写像：角を曲がる流れ . . . 101
5.1.13 写像：平板・楕円変換 (Joukowski 変換) . . . 103
5.1.14 写像：折れ曲がり直線 (Schwarz-Christoffel の公式) . . . 105
5.1.15 対数速度による多角形内外へ写像 . . . 108
5.1.16 円定理 . . . 110
5.1.17 Blasius の定理 . . . 110
5.1.18 Lagally の定理 . . . 112
5.2 数値解析 . . . 115
5.2.1 2 次元差分法 (流れ関数) . . . 115
5.3 二次元完全流体の簡単な例 . . . 117
5.3.1 特異点に作用する力 (Blasius の定理の例) . . . 117
5.3.2 一様流中のわき出し . . . 119
5.3.3 一様流中のわき出しと吸い込み . . . 121
5.3.4 一様流中の円柱まわりの流れ . . . 122
5.3.5 一様流中の楕円柱まわりの流れ・作用力・運動エネルギー (Joukowski 変換) . . . 125
5.3.6 運動する楕円柱まわりの流体運動エネルギー (楕円座標変換) . . . 130
5.3.7 平板をすぎる流れ (Joukowski 変換) . . . 134
5.3.8 円柱の外に置いたわき出し . . . 136
5.3.9 円柱の外に置いた二重わき出し . . . 138
5.3.10 一様流中に置かれた二つの円柱に作用する相互力 . . . 141
5.3.11 写像：コ型の流路 . . . 144
5.3.12 写像：平行流路 . . . 146
5.3.13 自由流線：平面壁のスリットから出る噴流 . . . 147
5.3.14 自由流線：Borda の吹き出し口 . . . 150
5.3.15 自由流線：死水をともなう流れに垂直な平板 . . . 152
5.3.16 自由流線：平板に垂直にぶつかるジェット . . . 156
5.3.17 二つの渦糸の運動 . . . 159
5.3.18 直交する壁に置いた渦の動き . . . 160
5.3.19 円柱の外に置いた渦糸の運動 . . . 162
5.3.20 一様流中に置いた円柱の背後の渦対 . . . 164
5.3.21 渦列 . . . 167
5.3.22 Karman 渦列 . . . 171

第 6 章 3 次元完全流体 176

6.1 軸対称の流れ . . . 176
6.1.1 速度ポッテンシャルの極座標表示 . . . 176
6.1.2 速度ポッテンシャルの円柱座標表示 . . . 179
6.1.3 流れ関数の極座標・円柱座標表示 . . . 181
6.1.4 軸対称流れの一般解（極座標表示） . . . 183
6.1.5 軸対称流れの一般解（円柱座標表示） . . . 187
6.1.6 一様な流れ . . . 189
6.1.7 わき出し . . . 190
6.1.8 一様なわき出し分布 . . . 191
6.1.9 二重わき出し . . . 192
6.1.10 Kervin の球定理 (速度ポッテンシャル) . . . 194

6.1.11 Weiss の球定理 (速度ポッテンシャル) 195
6.1.12 Bulter の球定理 (流れ関数) 196
6.1.13 外部に特異点がある物体に作用する力 197
6.1.14 複素変換による流れ関数と流速の関係式 198
6.2 軸対称の流れの簡単な例 200
6.2.1 一様流中の半無限物体（わき出しによる） 200
6.2.2 一定速度で動く球 204
6.2.3 一定速度で動く球 (複素変換) 205
6.2.4 一様流中の球（球定理による） 207
6.2.5 一様流中の球（二重わき出しによる） 208
6.2.6 球の外部にわき出しがある流れ 211
6.2.7 球の外部に二重わき出しがある流れ 216
6.2.8 一定速度で向かいあう２つの球の相互干渉 221
6.2.9 一定速度で平行して動く２つの球の相互干渉 225
6.2.10 回転楕円体 (複素変換) 228
6.2.11 楕円体 231
6.2.12 液中での大きい気泡の運動 254

第 7 章 揚力 255
7.1 ２次元翼 255
7.1.1 Kutta-Joukowski の定理 255
7.1.2 二次元翼に作用する揚力 (写像関数を用いた) 257
7.1.3 二次元平板翼 260
7.1.4 キャンバー・翼厚を有する二次元翼 (Joukowski 変換) 263
7.1.5 薄翼理論 (フーリエ変換) 270
7.1.6 平板翼・円弧翼・フラップの揚力特性 (薄翼理論を用いた) 274
7.1.7 離散渦法による薄翼特性 277
7.1.8 薄翼理論 (積分方程式) 279
7.1.9 一様でない流れの中の翼 282
7.1.10 翼列 284
7.1.11 二次元翼の非定常運動 (Theodorsen の方法) 287
7.2 ３次元翼 296
7.2.1 わき出しと渦度による誘導速度 296
7.2.2 揚力線理論 (フーリエ変換) 298
7.2.3 揚力面理論の定式化 301
7.2.4 揚力線理論 (プラントルの積分方程式) 305
7.2.5 翼が地面に及ぼす力 310
7.3 プロペラ 312
7.3.1 運動量理論 312
7.3.2 プロペラ翼素理論 315
7.3.3 プロペラと船体との干渉 318
7.4 細長体 320
7.4.1 細長体近似 320
7.4.2 縦方向の流れ 321
7.4.3 細長体に作用する横力 324
7.4.4 細長い三角翼 327

第 8 章　粘性流体　328

8.1 Navier-Stokes の式等まとめ . . . 328
8.1.1 Navier-Stokes の式等 (x-y-z 座標系) . . . 328
8.1.2 Navier-Stokes の式等 (円柱座標系) . . . 330
8.1.3 Navier-Stokes の式等 (極座標系) . . . 333
8.1.4 渦度方程式 (x-y-z 座標系) . . . 337
8.1.5 渦度方程式 (円柱座標系) . . . 340
8.1.6 渦度方程式 (極座標系) . . . 343
8.2 定常な一方向の流れ . . . 346
8.2.1 二枚の平板間の流れ (Couette Flow) . . . 346
8.2.2 円管内流れ (Hagen-Poiseuille Theory) . . . 348
8.2.3 傾斜した板の上の流体層 . . . 350
8.2.4 二重円管間の流れ . . . 352
8.2.5 楕円管内の流れ . . . 353
8.2.6 矩形管内の流れ . . . 355
8.2.7 回転する 2 円筒の中の流れ . . . 358
8.3 流れ関数を使った厳密解 . . . 360
8.3.1 細い管の先から流出するジェット . . . 360
8.3.2 二次元よどみ点 . . . 366
8.3.3 三次元よどみ点 . . . 371
8.3.4 二次元拡大縮小平面流路 . . . 375
8.3.5 回転円盤による流れ . . . 379
8.4 レイノルズ数の小さい流れ . . . 383
8.4.1 潤滑の理論 . . . 383
8.4.2 三次元軸対称の Stokes 流れ . . . 387
8.4.3 遅い一様流の中にある球のまわりの流れ . . . 390
8.4.4 遅い一様流中の球形の液滴 . . . 393
8.5 レイノルズ数の大きい流れ . . . 396
8.5.1 境界層の方程式 . . . 396
8.5.2 柱状体の境界層の方程式 . . . 399
8.5.3 平板上の境界層 . . . 401
8.5.4 オリフィスからの二次元ジェット . . . 405
8.5.5 二次元物体後方の流れ . . . 409
8.5.6 二次元くさび形の外部流れ (外部流速：$U = x^m U_0$) . . . 413
8.5.7 斜航円柱まわりの粘性流 . . . 417
8.5.8 境界層の運動量方程式 . . . 430
8.5.9 運動量方程式の近似解法 . . . 433
8.5.10 運動量方程式の近似解法を用いた解析例（よどみ点、平板、円柱） . . . 439
8.5.11 運動量方程式の近似解法を用いた解析例（楕円、翼形状） . . . 445
8.6 振動境界層 . . . 453
8.6.1 振動平板による流れ . . . 453
8.6.2 平行平板内での振動平板による流れ . . . 455
8.6.3 自由表面を有する振動平板による流れ . . . 457
8.6.4 平行平板内での変動圧力勾配による流れ . . . 459
8.6.5 円管内での変動圧力勾配による流れ . . . 462
8.6.6 振動する円柱に作用する減衰力 . . . 466
8.6.7 振動する円柱に生じる定常流 . . . 469
8.7 非定常な一方向の流れ . . . 473
8.7.1 速度不連続な流れと静止流体中突然動き出した平板 . . . 473

8.7.2 静止流体中突然動き出した平板と静止平板の間の流体流れ . . . 476
8.7.3 円管内の出発流 . . . 478
8.7.4 二平板内の出発流 . . . 482
8.7.5 円筒内静止流体で突然回転した円筒の流れ . . . 484
8.7.6 渦糸の減衰 . . . 488
8.7.7 自由表面に力が作用したときの流れ . . . 491
8.7.8 突然動き出した円柱まわりの粘性流れ . . . 493
8.8 渦度のある三次元軸対称流れ . . . 500
8.8.1 渦度表記の Euler の運動方程式 . . . 500
8.8.2 旋回流を有する定常軸対称流 . . . 504
8.8.3 管内の旋回流の断面積変化による影響 . . . 509
8.8.4 外側の流速変化が渦の旋回流に及ぼす影響 . . . 515
8.9 地球の自転の影響 . . . 517
8.9.1 地球の自転を考慮した海表面近くの流れ . . . 517
8.9.2 地球の自転を考慮した地面近くの大気の流れ . . . 521
8.10 粘性流数値解析 . . . 524
8.10.1 渦度方程式を用いた二次元粘性流数値解析 . . . 524

第 9 章 表面波 530

9.1 自由表面条件 . . . 530
9.1.1 三次元自由表面条件 . . . 530
9.1.2 一様流のある自由表面条件 . . . 531
9.2 二次元微小振幅進行波 . . . 533
9.2.1 微小振幅波の速度ポテンシャル . . . 533
9.2.2 位相速度 . . . 536
9.2.3 粒子運動 . . . 537
9.2.4 圧力変動 . . . 538
9.2.5 波のエネルギー . . . 539
9.2.6 群速度 . . . 540
9.2.7 エネルギー速度 . . . 542
9.2.8 表面張力 . . . 545
9.3 二次元波の簡単な例 . . . 547
9.3.1 表面撹乱による二次元波の伝搬 . . . 547
9.3.2 前進速度のある船の波と抵抗 . . . 552
9.3.3 前進速度のある没水二次元円柱による波 . . . 555
9.3.4 周期的に変動するわき出し強さによる二次元波 . . . 561
9.3.5 周期的に変動する二重わき出し強さによる二次元波 . . . 569
9.3.6 二次元水中翼の水面影響 . . . 577
9.4 三次元微小振幅波 . . . 587
9.4.1 三次元微小振幅波（xyz 座標） . . . 587
9.4.2 三次元微小振幅波（一様流） . . . 591
9.4.3 三次元微小振幅波（円柱座標） . . . 596
9.5 三次元波の簡単な例 . . . 599
9.5.1 表面撹乱による軸対称波の伝搬 . . . 599
9.5.2 船が起こす波紋 . . . 605
9.5.3 前進速度のあるわき出しによる三次元波と造波抵抗 . . . 608
9.5.4 周期的に変動するわき出し強さによる三次元波 . . . 620
9.6 定常波 . . . 627
9.6.1 二次元定常波 . . . 627
9.6.2 V 字断面水路の定常波 . . . 629

9.6.3　直方体タンク内の定常波 634
9.6.4　鉛直円筒タンク内の定常波 636
9.6.5　水平円筒タンクの液固有円周波数 640
9.6.6　球形タンクの液固有円周波数 641
9.7　着水衝撃 642
9.7.1　二次元着水衝撃 (Karman の理論) 642
9.7.2　二次元着水衝撃 (Wagnern の理論) 644
9.7.3　二次元着水衝撃の数値シミュレーション 647

付 録 A 数学公式 653
A.1　時間微分 653
A.2　Gauss の定理 653
A.3　Green の定理 654
A.4　Transport Theorem 655
A.5　渦無し流れの運動エネルギー 655
A.6　Parseval の等式 656
A.7　Riemann-Lebesgue の定理 657
A.8　非常に多くの正弦波を積分範囲内に有する積分法 (Kelvin の方法) 658
A.9　数学公式 659
A.9.1　Hunkel 関数 659
A.9.2　Hunkel の漸近級数初項 659
A.9.3　第一種 Bessel 関数の積分表示 659
A.9.4　Hunkel 関数の積分表示 (Heine の積分表示) 659
A.9.5　Lipschitz の積分公式 659
A.9.6　$\frac{b}{a^2+b^2}$ の積分表示 659
A.9.7　$\frac{a}{a^2+b^2}$ の積分表示 659

付 録 B 座標変換 660
B.1　円柱座標系への変換 660
B.1.1　gradient 661
B.1.2　divergence 661
B.1.3　∇^2 662
B.1.4　rotation 662
B.1.5　Navier-Stokes の式 663
B.2　極座標系への変換 669
B.2.1　gradient(∇) 670
B.2.2　divergence 671
B.2.3　∇^2 671
B.2.4　rotation 672
B.2.5　Navier-Stokes の式 673
B.3　直交曲線座標系への座標変換 680

付 録 C Maxima によるベクトルとテンソル演算 686
C.1　ベクトルの表現 686
C.2　ベクトルの演算 686
C.2.1　和 686
C.2.2　係数の積 686
C.2.3　ベクトル各要素同士の積 686
C.2.4　内積（スカラー積） 686
C.2.5　内積（スカラー積）の分配法則 687

C.2.6　外積（ベクトル積） . . . 687
C.2.7　外積（ベクトル積）の分配法則 . . . 687
C.2.8　スカラー３重積 . . . 687
C.2.9　ベクトル３重積 . . . 688
C.2.10 ベクトルの座標変換 . . . 688
C.3　ベクトルの微分 . . . 689
C.3.1　微分 . . . 689
C.3.2　gradient（傾き） . . . 689
C.3.3　divergence（発散） . . . 689
C.3.4　rotation（回転） . . . 690
C.3.5　depends 関数を使った微分 . . . 690
C.3.6　div(grad　)),div(curl(　)),
curl(grad(　)),curl(curl(　)) . . . 690
C.3.7　∇ を使った演算 . . . 691
C.4　テンソル . . . 695
C.4.1　テンソルの演算 . . . 695
C.4.2　テンソルの行列式 . . . 695
C.4.3　二階テンソルの座標変換 . . . 695
C.4.4　テンソルの不変量 . . . 696
C.4.5　主応力 . . . 697

付 録 D よく使う Maxima の関数　699

D.1　wxMaxima を使用した演習の進め方 . . . 699
D.2　宣言文 . . . 699
D.3　数式操作 . . . 700
D.4　行列 . . . 703
D.5　微分・積分 . . . 704
D.6　複素数 . . . 707
D.7　極限・級数 . . . 708
D.8　プログラム . . . 709
D.9　その他 . . . 709
D.10 グラフ作成 . . . 710

第1章　はじめに

最近は、インターネットや電子辞書・電子書籍で多くの知識を容易に得ることができ、音声認識システムで、話したことを文章化できたり、翻訳できます。そして、これらが可能な携帯情報端末が一般に使用される時代となっています。また、人工知能の発展は目を見張るものがあり、将棋や囲碁の分野ではプロ棋士を負かすほどになっています。数式処理システムでは因数分解、微分、積分、微分方程式など、多くの数式処理がパーソナルコンピューターで容易に可能になっています。フリーの数式処理ソフト：Maxima も公開され、多くの人がこれを使用していると思われます。このようなすばらしいシステムが多く存在する時代では、これらを使いこなし、各人が求める深い知恵を得る活動に多くの時間を割くことがよいと思います。そこで著者は数式処理システムを使って、多くの例題を解き、問題の本質を学ぶことが大切と考え、既に、物理数学、力学などについて、多くの例題を Maxima で解いています。

ここでは流体力学の種々の基礎的例題について、演習ノートとしてまとめました。詳細な解説は一切行っていません。この内容は簡単な説明と入力、出力のみをまとめたものです。解説については、世の中にすばらしい解説書が多くあるので、それを参考にしていただきたい。

1) **Maxima を使った効率的な問題解決：**問題解決能力を高めるには、できる限り多くのよい問題を解くことを経験し、現象を理解するとともに、問題解決のプロセスを理解することが重要と言われています [35)]。昔に比べ、多くのことが明らかになり、分野も広がっている世の中で、全てを深く、手計算で多くの問題を経験することは現実的ではありません。ここに Maxima を活用して、多くの例題を効率よく解き、理解を深め、経験を積むことができます。例えば、運動方程式の導出やその円柱座標系や極座標系への変換では、全て手計算では気が遠くなるような作業であり、間違いがないか、何回もチェックしながら進めなくてはいけない。しかし、Maxima などの数式処理システムを用いれば、基本的な考え方をプログラムするだけで、後の大変な式の展開は計算機が実行してくれます。ここでは問題解決のプロセスを明らかにすることが要求され、効率よく問題解決能力を高める訓練が行えると思います。

2) **流体力学の基本の理解：**近年、数値流体力学の進歩が目覚ましく、多分野で大きな成果をあげています。数値流体力学では基礎方程式を使用しているため、多くの分野・形状に活用できます。また、パソコンでも限度はあるものの任意形状まわりの流場を求めることができます。しかし、いわば数値実験であり、その特性を包括的に知ることはできない。解析的な流体力学を学ぶ意義は、流体力学の基本の理解であり、数値流体力学に対して、多くの例題で得られた知識、問題解決能力で、数値解析結果の大まかな性質を予測でき、計算結果の評価、問題解決に大きな助けとなることと思います。

3) **定性的性能把握：**数値流体力学の数値解析結果から、物体のまわりの流場や物体に作用する力なども得られますが、数値実験であり、その条件のみの結果であり、･･の流速に比例するや･･の距離の？乗に比例するなどの定性的性能は得られません。解析的な流体力学では、解けている例題は限られているものの、流体の特性が包括的に得られるため、これらの知識を持っていれば、設計にも活用でき、全体の性能を予測できます。

4) **粘性流体をまとめるにあたり：**数値解析で、任意物体周りの粘性流が高精度で得られるようになり、粘性流の解析解を学ぶ意義が薄れてきていると思われます。しかし、解析解の例題で、種々の粘性流の特徴を理解することができると考え、粘性流体の章をまとめました。ここでは非圧縮性の層流のみを扱い、流れに特徴があるものを中心にまとめました。

本ノートは wxMaxima 13.04.2(Maxima-5.31.2) を使用してまとめました。これは会話形式で処理を実行でき、数式出力結果を Tex 出力・コピーができるとともに、グラフも出力･コピーできるので、大変便利です。また、これらを有効活用できる文書作成ソフト：$\LaTeX\,2_{\varepsilon}$ を使用し、本ノートをまとめました。

以下では Maxima の入力部分を枠で囲って表し、出力結果をその後に数式で示しています。また、小文字は関数、変数を、大文字は定数を表すのに統一して使っています。Maxima の微分の出力で、例えば本来、$\frac{\partial}{\partial x}$ と記述

されるべきが、$\frac{d}{dx}$ と出力されます。ここでは Maxima の出力通りに記述しているので誤解の無いように願います。また、Maxima のプログラムに統一性を欠いたり、例題の選定・記述などで不十分なところもありますが、まずは、まとめた結果を早期に公表し、皆様に供することとしたので、ご容赦願います。

本ノートをまとめるにあたり、参考文献に掲げた多くの著書を参考にしました。これらの著書をまとめられた著者に感謝します。また、これをまとめるのに活用した Maxima および $\LaTeX\,2_\varepsilon$ の開発や普及に携わられた方々に感謝します。

平成 25 年 2 月　第一回改訂　揚力問題の充実 平成 24 年 6 月 5 日　初版では、「第 7 章　翼」としてまとめていたが、これに、離散渦法による薄翼特性、プロペラ、細長体を追加し、「第 7 章　揚力」としてまとめた。

平成 25 年 12 月　第二回改訂 「第 8 章　粘性流体」、「付録 B　座標変換」で「変形速度テンソル」の節を追加した。また、全般で読みやすいように一部変更した。

平成 26 年 10 月　第三回改訂 「第 9 章　表面波」、「第四章　Bernoulli の定理」の 4.3 管内非定常流れで「管内の水撃現象」、4.6 開水路で「開水路の過渡現象 (ダムの崩壊モデル）」を追加した。また、「付録 A　数学公式」で「第 9 章　表面波」で必要な公式を追加した。

平成 30 年 1 月　第四回改訂 「2.10 質量保存の方程式 (ベクトル)」、「2.11 Euler の運動方程式 (ベクトル)」、「2.12 物体に作用する力」、「4.7 漏洩 」、「6.2.11 楕円体 」、「B.3 直交曲線座標系への座標変換 」、「C.3.7 ∇を使った演算 」 を追加した。

平成 30 年 10 月　第五回改訂 「7.1.8 薄翼理論 (積分方程式)」、「7.1.11 二次元翼の非定常運動 (Theodorsen の方法)」、「7.2.3 揚力面理論の定式化」、「7.2.4 揚力線理論 (プラントルの積分方程式) 」を追加した。

1.1 主な記号

x, y, z	: 座標
$\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z}$	: xyz 座標の単位ベクトル
$\overrightarrow{V}$	: 流速のベクトル表示
u, v, w	: 流速の xyz 座標コンポネント
$\omega_x, \omega_y, \omega_z$	: 渦度の xyz 座標コンポネント
r, θ, z	: 円柱座標
$\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z}$	: 円柱座標の単位ベクトル
v_r, v_θ, v_z	: 流速の円柱座標コンポネント
$\omega_r, \omega_\theta, \omega_z$	: 渦度の円柱座標コンポネント
θ, ϕ, r	: 極座標
$\overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_\phi}, \overrightarrow{e_r}$	: 極柱座標の単位ベクトル
v_θ, v_ϕ, v_r	: 流速の極柱座標コンポネント
ρ	: 密度
μ	: 粘性係数
ν	: 動粘性係数
g	: 重力加速度
p	: 圧力
Φ	: 速度ポテンシャル
Ψ	: 流れ関数
m	: わき出しの強さ
Γ	: 渦循環強さ
$\overrightarrow{F}$	: 物体力
$\overrightarrow{P}$	: 流体要素表面に作用する力
T	: 運動エネルギー
$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}$	: 流体要素表面に作用する応力マトリックス
$\sigma_{x1}, \sigma_{y1}, \sigma_{z1}$	: 流体要素表面に作用する応力で圧力 : p を除いた応力
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	: 応力マトリックスの主応力
$\begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{pmatrix}$	: 変形速度テンソル
e_1, e_2, e_3	: 変形速度テンソルの主方向

第2章　基礎方程式

2.1　流体の特性

2.1.1　流体の力学的平衡

体積：V の中にある流体に作用する全体積力は、流体密度：ρ、単位質量あたりに作用する体積力：$\overrightarrow{F}$ とすると、

$$\iiint \rho \overrightarrow{F} dV$$

ここで、ρ、$\overrightarrow{F}$ は位置の関数である。体積 : V の境界面 : A に対して、まわりの流体から作用する力は、流体が静止しているときには、

$$-\iint p \overrightarrow{n} dA$$

ここで、p は圧力で位置の関数である。また、$\overrightarrow{n}$ は表面：A の外向き法線である。当然、両者は等しいので、

$$\iiint \rho \overrightarrow{F} dV - \iint p \overrightarrow{n} dA = 0$$

面積分は下記の Gauss の定理から、体積分に変更でき、

$$-\iint p \overrightarrow{n} dA = -\iiint grad(p) dV$$

以上から、

$$\iiint \left(\rho \overrightarrow{F} - grad(p)\right) dV = 0$$

$$\rho \overrightarrow{F} - grad(p) = 0 \tag{2.1.1}$$

静止した非圧縮性の流体では、密度：ρ は一定で、体積力は重力加速度：g のみで、下向きに z 軸をとると、

```
kill(all);
/* 水圧 */
EQ1:\rho*g-diff(p(z),z,1)=0;
atvalue(p(z),z=0,p[0]);
desolve(EQ1,p(z));
```

流体の力学的平衡式は下記となる。

$$g\,\rho - \frac{d}{d\,z}\,\mathrm{p}\,(z) = 0$$

$z = 0$ における流体表面の圧力を p_0 として、これを解くと圧力は下記となる。

$$\mathrm{p}\,(z) = g\,\rho\,z + p_0 \tag{2.1.2}$$

2.1.2　気体の特性

気体の状態式は下記となる。

```
/* 状態式 */
EQST:p*V=m*R/M*T;
```

$$p\,V = \frac{m\,R\,T}{M} = m\,R_M\,T \tag{2.1.3}$$

ここで、圧力：p、 体積：V、気体の質量：m、 気体定数：R、 1 モルの質量：M、温度（絶対温度）：T、気体定数と 1 モルの質量の比：R_M とする。

気体の内部エネルギー：U は熱エネルギー：Q と仕事：W の和となる。

```
/* 内部エネルギー */
INEN:dU=dQ+dW;
INEN1:dU='diff(U,T,1)[V]*dT
  +'diff(U,V,1)[T]*dV;
WK1:dW=-p*dV;
subst([INEN1,WK1],INEN);
HEN1:partfrac(solve(%,dQ),dV)[1];
```

$$dU = dW + dQ$$

温度を dT だけ、体積を dV だけ変化すると、内部エネルギーの変化：dU は、

$$dU = dT\left(\frac{d}{d\,T}\,U\right)_V + dV\left(\frac{d}{d\,V}\,U\right)_T$$

ここで、サフィックス V は体積一定を、T は温度一定条件におけることを示す。圧力：p で体積が dV 変化すると、仕事は、

$$dW = -p\,dV$$

$$dQ = dU - dW$$

であるから、上記を内部エネルギーの式、仕事の式を代入し、熱エネルギー変化は、

$$dQ = dT\left(\frac{d}{d\,T}\,U\right)_V + dV\left(\left(\frac{d}{d\,V}\,U\right)_T + p\right) \tag{2.1.4}$$

体積を変えないで温度を変化させると、

```
/* 定積＋温度変化 */
HENV1:dQ=m*c[v]*dT;
subst([dV=0],HEN1);
subst([%],HENV1);
HENV2:solve(%,c[v])[1];
HENV3:solve(%,'diff(U,T,1)[V])[1];
```

定積比熱の定義から、

$$dQ = m\, c_v\, dT$$

ここで、定積比熱：c_v とする。(2.1.4) 式で定積であるから、$dV = 0$ として、

$$dQ = dT \left(\frac{d}{d\,T}\,U\right)_V$$

上記の関係から、

$$c_v = \frac{\left(\frac{d}{d\,T}\,U\right)_V}{m}$$

圧力を変えないで温度を変化させると、

```
/* 定圧＋温度変化 */
HENP1:dQ=m*c[p]*dT;
subst([dV='diff(V,T,1)[P]*dT,HENP1],HEN1);
HENP2:solve(%,c[p])[1];
HENP3:['diff(V,T,1)[P]=m*R/M/p,
  'diff(U,V,1)[T]=0];
expand(HENP2-HENV2);
HENP4:subst(HENP3,%);
HENP5:solve(%,R)[1];
```

定圧比熱の定義から、

$$dQ = m\, c_p\, dT$$

ここで、定圧比熱：c_p とする。圧力一定の時の体積変化の温度変化は、

$$dV = \left(\frac{d}{d\,T}\,V\right)_P dT$$

上式を (2.1.4) 式に代入し、整理すると、

$$c_p = \frac{\left(\frac{d}{d\,T}\,U\right)_V + \left(\frac{d}{d\,T}\,V\right)_P \left(\frac{d}{d\,V}\,U\right)_T + p\left(\frac{d}{d\,T}\,V\right)_P}{m}$$

さらに、

$$c_p - c_v = \frac{\left(\frac{d}{d\,T}\,V\right)_P \left(\frac{d}{d\,V}\,U\right)_T}{m} + \frac{p\left(\frac{d}{d\,T}\,V\right)_P}{m}$$

(2.1.3) 式から、

$$\left(\frac{d}{d\,T}\,V\right)_P = \frac{m\,R}{p\,M}$$

希薄な気体（理想気体）では

$$\left(\frac{d}{d\,V}\,U\right)_T = 0$$

上記の関係から下記を得る。

$$c_p - c_v = \frac{R}{M}$$

温度一定の時の気体密度：ρ 変化は、

```
/* 温度一定 */
EQRO:m=\rho*V;
subst(EQRO,EQST);
EQSTT:%/\rho/V;
```

密度と質量、体積の関係式は、

$$m = \rho\, V$$

(2.1.3) 式に代入し、温度一定の時、圧力と密度の関係は、

$$\frac{p}{\rho} = \frac{R\,T}{M} = R_M\,T = Constant \qquad (2.1.5)$$

周囲から熱エネルギーの交換を行わないで、圧力、体積変化を行うとき、断熱変化という。

```
/* 断熱変化 */
subst([dQ=0],HEN1);
solve(%,dV)[1];
subst([HENV3],%);
EQSTA1:subst(HENP3,%);
subst([HENP5],EQST);
EQSTA2:solve(%,V)[1];
EQSTA3:\gamma=c[p]/c[v];
EQSTA4:solve(%,c[p])[1];
EQSTA1/EQSTA2;
EQSTA41:factor(subst([EQSTA4],%));
'integrate(lhs(EQSTA41)/dV,V);
EQSTA42:ev(%,integrate);
'integrate(rhs(EQSTA41)/dT,T);
EQSTA43:ev(%,integrate);
EQSTA421:%e^EQSTA42;
EQSTA431:radcan(%e^EQSTA43);
EQSTA421/EQSTA431=Constant;
EQSTA5:radcan(lhs(%)^(\gamma-1))=Constant;
EQSTA6:solve(EQST,T)[1];
EQSTA7:solve(EQRO,V)[1];
radcan(subst([EQSTA6,EQSTA7],EQSTA5)
  *m*R/M/m^\gamma);
EQSTA8:lhs(%)=Constant;
```

(2.1.4) 式で $dQ = 0$ とし、

$$dV = -\frac{dT\left(\frac{d}{d\,T}\,U\right)_V}{\left(\frac{d}{d\,V}\,U\right)_T + p}$$

前述の下記の関係を代入し、

$$\left(\frac{d}{d\,V}\,U\right)_T = 0, \qquad c_v = \frac{\left(\frac{d}{d\,T}\,U\right)_V}{m}$$

$$dV = -\frac{m\,c_v\,dT}{p}$$

(2.1.3) 式に $c_p - c_v$ の関係式を代入し、

$$V = -\frac{(m\,c_v - m\,c_p)\;T}{p}$$

両式から、

$$\frac{dV}{V} = \frac{m\,c_v\,dT}{(m\,c_v - m\,c_p)\;T} = -\frac{dT}{T\;(\gamma - 1)}$$

ここで、$\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ とし、左辺を積分し、その指数をとると、

$$\int \frac{1}{V}dV = \log{(V)}$$

$$e^{\log(V)} = V$$

右辺を積分し、その指数をとると、

$$-\frac{\int \frac{1}{T} dT}{\gamma - 1} = -\frac{\log(T)}{\gamma - 1}$$

$$e^{-\frac{\log(T)}{\gamma-1}} = \frac{1}{T^{\frac{1}{\gamma-1}}}$$

指数をとった結果の比を求め、積分定数を加味すると、

$$T^{\frac{1}{\gamma-1}}\, V = Constant$$

簡素化して、

$$T\, V^{\gamma-1} = Constant$$

上式から断熱変化のとき、圧力と密度の関係は、

$$\frac{p}{\rho^{\gamma}} = Constant \qquad (2.1.6)$$

2.1.3　表面張力

二つの流体の境界の平衡状態について健闘する。

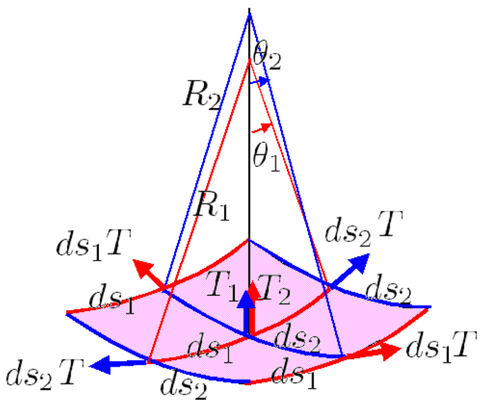


図 2.1.1: 表面張力

```
/* 表面張力 */
SF1:T[1]=2*T*ds[2]*sin(\theta[1]/2);
SF2:T[2]=2*T*ds[1]*sin(\theta[2]/2);
sin(\theta/2)=taylor(sin(\theta/2),\theta,
  0,7);
SF11:subst([sin(\theta[1]/2)=\theta[1]/2],
  SF1);
SF21:subst([sin(\theta[2]/2)=\theta[2]/2],
  SF2);
SF12:subst([\theta[1]=ds[1]/R[1]],SF11);
SF22:subst([\theta[2]=ds[2]/R[2]],SF21);
\Delta*p*ds[1]*ds[2]=rhs(SF12)+rhs(SF22);
SF0:expand(%/ds[1]/ds[2]);
lhs(SF0)=2*(subst([R[1]=R,R[2]=R],
 rhs(SF0)));
```

単位長さあたりの張力：T とし、直角な座標（サフィックス：1,2）について、長さ：ds_1 に作用する張力は長さと直角方向に $ds_1 T$ となる。張力による垂直内向きの力：T_1, T_2 は下記となる。ここで、表面の曲率半径：R_1, R_2、内角：θ_1, θ_2 とする。

$$T_1 = 2\, ds_2 \sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right) T$$

$$T_2 = 2\, ds_1 \sin\left(\frac{\theta_2}{2}\right) T$$

上式に、下記の関係を代入して、

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\theta}{2} - \frac{\theta^3}{48} + \frac{\theta^5}{3840} - \frac{\theta^7}{645120} + ...$$

$$ds_1 = R_1 \theta_1, \quad ds_2 = R_2 \theta_2$$

境界を越えた圧力差は、

$$ds_1\, ds_2\, \Delta\, p = T_1 + T_2 = \frac{ds_1\, ds_2\, T}{R_2} + \frac{ds_1\, ds_2\, T}{R_1}$$

$$\Delta\, p = \frac{T}{R_2} + \frac{T}{R_1} \tag{2.1.7}$$

シャボン玉では、境界面は内と外の両面あるため、

$$\Delta\, p = \frac{4\, T}{R}$$

垂直な壁と接する液体の表面張力について考える。

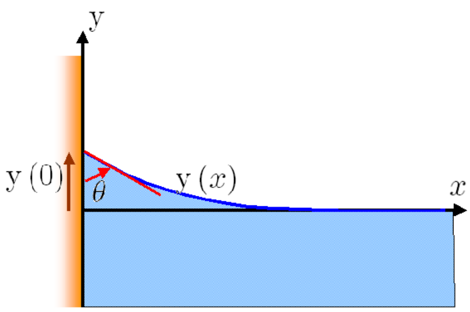


図 2.1.2: 垂直な壁と接する液体の表面

```
R1:[1/R[1]=0,1/R[2]=diff(y(x),x,2)/
  (1+(diff(y(x),x,1))^(2))^(3/2)];
SFH:subst(R1,\rho*g*y(x)=rhs(SF0));
'integrate(lhs(SFH),y(x));
ev(%,integrate);
subst([diff(y(x),x,1)=Y(x),diff(y(x),x,2)
  =diff(Y(x),x,1)],rhs(SFH*dy(x)));
subst([dy(x)=Y(x)*dY(x)/diff(Y(x),x,1)],%);
subst([dY(x)=1],%);
'integrate(%,Y(x));
ev(%,integrate);
integrate(lhs(SFH),y(x))/T=subst([Y(x)
  =diff(y(x),x,1)],%)/T+C;
SFH1:subst([C=1],%);
subst([diff(y(x),x,1)=-cos(\theta)/
  sin(\theta),y(x)=y(0)],%);
trigsimp(%);
SFH2:factor(solve(%,y(0)^2)[1]);
%pi*a^2*h*\rho*g=2*%pi*a*T*cos(\theta);
solve(%,h)[1];
```

上図のように、液体の表面形状を $y(x)$ とすると、曲率半径：R_1, R_2 は下記で表すことができる。

$$\left[\frac{1}{R_1} = 0, \frac{1}{R_2} = \frac{\frac{d^2}{d\,x^2}\,\mathrm{y}\,(x)}{\left(\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{y}\,(x)\right)^2 + 1\right)^{\frac{3}{2}}}\right] \tag{2.1.8}$$

表面張力による圧力差は $\rho g y(x)$ であるから、(2.1.7) 式から、

$$g\,\rho\,\mathrm{y}\,(x) = \frac{\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,\mathrm{y}\,(x)\right)\,T}{\left(\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{y}\,(x)\right)^2 + 1\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{y}\,(x) = \mathrm{Y}\,(x)$ とし、上式の右辺を $dy(x)$ で積分する。その被積分関数は、

$$\frac{\mathrm{dy}\,(x)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{Y}\,(x)\right)\,T}{\left(\mathrm{Y}\,(x)^2 + 1\right)^{\frac{3}{2}}}$$

ここで、

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\,x}\,\mathrm{Y}\,(x) &= \frac{d}{d\,y(x)}\,\mathrm{Y}\,(x) \times \frac{d}{d\,x}\,\mathrm{y}\,(x) \\ &= \frac{d}{d\,y(x)}\,\mathrm{Y}\,(x) \times Y\,(x) \end{aligned}$$

上式から上記被積分関数は、

$$\frac{\mathrm{dY}\,(x)\;\mathrm{Y}\,(x)\;T}{\left(\mathrm{Y}\,(x)^2 + 1\right)^{\frac{3}{2}}}$$

積分すると、

$$\int \frac{\mathrm{Y}\,(x)\;T}{\left(\mathrm{Y}\,(x)^2 + 1\right)^{\frac{3}{2}}} d\mathrm{Y}\,(x) = -\frac{T}{\sqrt{\mathrm{Y}\,(x)^2 + 1}}$$

左辺も $y(x)$ で積分し、

$$\int g\,\rho\,\mathrm{y}\,(x)\,\mathrm{dy}\,(x) = \frac{g\,\rho\,\mathrm{y}\,(x)^2}{2}$$

以上から、

$$\frac{g\,\rho\,\mathrm{y}\,(x)^2}{2\,T} = C - \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{y}\,(x)\right)^2 + 1}}$$

x が無限遠で $y(x) = 0, \frac{d}{d\,x}\,\mathrm{y}\,(x) = 0$ であるから、$C = 1$ となり、

$$\frac{g\,\rho\,\mathrm{y}\,(x)^2}{2\,T} = 1 - \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{y}\,(x)\right)^2 + 1}}$$

$$\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{y}\,(x) = \frac{-\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$$

上記の関係を代入し、接触角：θ が知られているので、壁面の液面高さは、

$$\mathrm{y}\,(0)^2 = -\frac{2\,\left(|\sin(\theta)| - 1\right)\,T}{g\,\rho}$$

半径：a の細い円管の場合、液面高さ：h は下記となる。

$$\pi\,a^2\,g\,h\,\rho = 2\,\pi\,a\cos(\theta)\;T$$

$$h = \frac{2\cos(\theta)\;T}{a\,g\,\rho}$$

2.2　質量保存の方程式

本節から「2.6 Navier-Stokes の式」までを一連のプログラムで記述しているため、変数などの定義などは再記述していない。流体要素に流れ込んだ質量、出た質量の関係を図および下記の式に示す。

```
kill(all);
V:matrix([u],[v],[w]);
depends(u,[x,y,z,t]);
depends(v,[x,y,z,t]);
depends(w,[x,y,z,t]);
depends(\rho,[x,y,z,t]);
depends([x,y,z],t);
CMEQ1:\rho*u*dt*dy*dz-(\rho*u
  +'diff(\rho*u,x,1)*dx)*dt*dy*dz;
CMEQ2:\rho*v*dt*dx*dz-(\rho*v
  +'diff(\rho*v,y,1)*dy)*dt*dx*dz;
CMEQ3:\rho*w*dt*dx*dy-(\rho*w
  +'diff(\rho*w,z,1)*dz)*dt*dx*dy;
CMEQ4:expand(CMEQ1+CMEQ2+CMEQ3);
CMEQ5:(\rho+'diff(\rho,t,1)*dt)*dx*dy*dz
                             -\rho*dx*dy*dz;
CMEQ00:expand((CMEQ5-CMEQ4)/dx/dy/dz/dt)=0;
CMEQ01:ev (%, diff);
```

流速:$\overrightarrow{V}$ を下記のように xyz 座標のベクトルで定義する。

$$\overrightarrow{V} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

密度を ρ、時間を t とすると、x 軸方向に出入りする質量は、

$$dt\,dy\,dz\,\rho\,u - dt\,dy\,dz\left(dx\left(\frac{d}{d\,x}\left(\rho\,u\right)\right)+\rho\,u\right)$$

y 軸方向に出入りする質量は、

$$dt\,dx\,dz\,\rho\,v - dt\,dx\,dz\left(dy\left(\frac{d}{d\,y}\left(\rho\,v\right)\right)+\rho\,v\right)$$

z 軸方向に出入りする質量は、

$$dt\,dx\,dy\,\rho\,w - dt\,dx\,dy\left(dz\left(\frac{d}{d\,z}\left(\rho\,w\right)\right)+\rho\,w\right)$$

流体要素の密度変化は、

$$dx\,dy\,dz\left(dt\left(\frac{d}{d\,t}\rho\right)+\rho\right) - dx\,dy\,dz\,\rho$$

上記から、質量保存の方程式は下記となる。

$$\frac{d}{d\,z}\left(\rho\,w\right)+\frac{d}{d\,y}\left(\rho\,v\right)+\frac{d}{d\,x}\left(\rho\,u\right)+\frac{d}{d\,t}\rho=0 \quad (2.2.1)$$

非圧縮性流体では、下記の関係から、

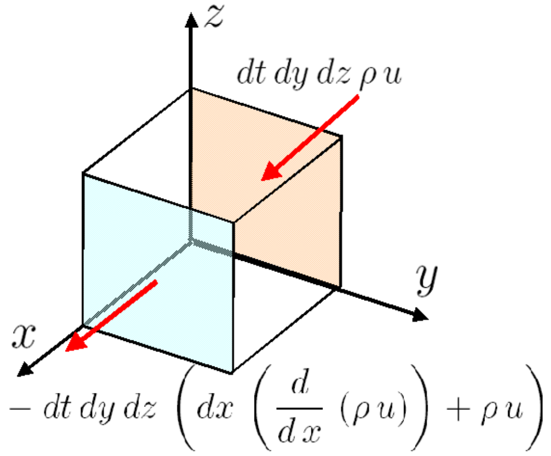


図 2.2.1: 流体要素で x 軸方向に出入りする質量

```
LSUB:['diff(\rho,t,1)=0,'diff(\rho,x,1)=0,
  'diff(\rho,y,1)=0,'diff(\rho,z,1)=0];
CMEQ02:expand(subst(LSUB,CMEQ01)/\rho);
```

$$[\frac{d}{d\,t}\rho=0,\frac{d}{d\,x}\rho=0,\frac{d}{d\,y}\rho=0,\frac{d}{d\,z}\rho=0]$$

非圧縮性流体の質量保存の方程式は下記となる。

$$\frac{d}{d\,z}w+\frac{d}{d\,y}v+\frac{d}{d\,x}u=0 \quad (2.2.2)$$

ベクトル表記すると、

$$div(\overrightarrow{V})=0 \quad (2.2.3)$$

2.3 運動方程式

流体の単位質量に作用する物体力 (body force) を $\overrightarrow{F}$、流体要素表面に作用する力 (surface force) を $\overrightarrow{P}$ とすると、

```
F:matrix([X],[Y],[Z]);
P:matrix([P[x]],[P[y]],[P[z]]);
LSUB1:['diff(x,t,1)=u,'diff(y,t,1)=v,
        'diff(z,t,1)=w];
diff(V,t);
MTEQ0:\rho*subst(LSUB1,%)=F+P;
```

$$\overrightarrow{F} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{P} = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix}$$

加速度項は、速度：$\overrightarrow{V}$ を時間微分して下記を得る。

$$\frac{d}{d\,t}\overrightarrow{V} =$$
$$\begin{pmatrix} \left(\frac{d}{d\,z}\,u\right)\left(\frac{d}{d\,t}\,z\right) + \left(\frac{d}{d\,y}\,u\right)\left(\frac{d}{d\,t}\,y\right) + \left(\frac{d}{d\,x}\,u\right)\left(\frac{d}{d\,t}\,x\right) + \frac{d}{d\,t}\,u \\ \left(\frac{d}{d\,z}\,v\right)\left(\frac{d}{d\,t}\,z\right) + \left(\frac{d}{d\,y}\,v\right)\left(\frac{d}{d\,t}\,y\right) + \left(\frac{d}{d\,x}\,v\right)\left(\frac{d}{d\,t}\,x\right) + \frac{d}{d\,t}\,v \\ \left(\frac{d}{d\,z}\,w\right)\left(\frac{d}{d\,t}\,z\right) + \left(\frac{d}{d\,y}\,w\right)\left(\frac{d}{d\,t}\,y\right) + \left(\frac{d}{d\,x}\,w\right)\left(\frac{d}{d\,t}\,x\right) + \frac{d}{d\,t}\,w \end{pmatrix}$$

ここで、u, v, w を x, y, z, t の関数として depends 関数で定義している。dt 時間後の変位：dx, dy, dz は下記のように表すことができる。

$$dx = u\,dt, dy = v\,dt, dz = w\,dt,$$

上式から、

$$[\frac{d}{d\,t}\,x = u, \frac{d}{d\,t}\,y = v, \frac{d}{d\,t}\,z = w]$$

これを代入し、下記を得る。この微分を Lagrange 微分または物質微分と呼ばれる。

$$\frac{d}{d\,t}\overrightarrow{V} =$$
$$\begin{pmatrix} \rho\left(\left(\frac{d}{d\,z}\,u\right)\,w + \left(\frac{d}{d\,y}\,u\right)\,v + u\,\left(\frac{d}{d\,x}\,u\right) + \frac{d}{d\,t}\,u\right) \\ \rho\left(\left(\frac{d}{d\,z}\,v\right)\,w + v\,\left(\frac{d}{d\,y}\,v\right) + u\,\left(\frac{d}{d\,x}\,v\right) + \frac{d}{d\,t}\,v\right) \\ \rho\left(w\,\left(\frac{d}{d\,z}\,w\right) + v\,\left(\frac{d}{d\,y}\,w\right) + u\,\left(\frac{d}{d\,x}\,w\right) + \frac{d}{d\,t}\,w\right) \end{pmatrix}$$

上記から運動方程式は下記となる。

$$\begin{pmatrix} \rho\left(\left(\frac{d}{d\,z}\,u\right)\,w + \left(\frac{d}{d\,y}\,u\right)\,v + u\,\left(\frac{d}{d\,x}\,u\right) + \frac{d}{d\,t}\,u\right) \\ \rho\left(\left(\frac{d}{d\,z}\,v\right)\,w + v\,\left(\frac{d}{d\,y}\,v\right) + u\,\left(\frac{d}{d\,x}\,v\right) + \frac{d}{d\,t}\,v\right) \\ \rho\left(w\,\left(\frac{d}{d\,z}\,w\right) + v\,\left(\frac{d}{d\,y}\,w\right) + u\,\left(\frac{d}{d\,x}\,w\right) + \frac{d}{d\,t}\,w\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X + P_x \\ Y + P_y \\ Z + P_z \end{pmatrix} \tag{2.3.1}$$

ベクトル表記すると、

$$\rho\left(\frac{d}{d\,t}\,\overrightarrow{V} + (\overrightarrow{V}\cdot grad)\overrightarrow{V}\right) = \overrightarrow{F} + \overrightarrow{P} \tag{2.3.2}$$

2.4 流体要素表面に作用する力

流体要素表面に作用する応力を下図のように定義する。

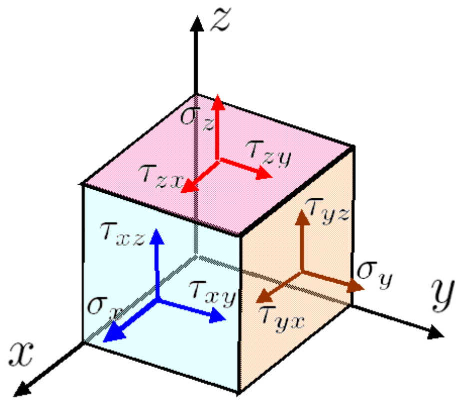


図 2.4.1: 流体要素表面に作用する応力

```
SX11:(\sigma[x]+'diff(\sigma[x],x,1)*dx
  -\sigma[x])*dy*dz;
SX12:(\tau[yx]+'diff(\tau[yx],y,1)*dy
  -\tau[yx])*dz*dx;
SX13:(\tau[zx]+'diff(\tau[zx],z,1)*dz
  -\tau[zx])*dx*dy;
SX2:expand((SX11+SX12+SX13)/dx/dy/dz);
SY11:(\tau[xy]+'diff(\tau[xy],x,1)*dx
  -\tau[xy])*dy*dz;
SY12:(\sigma[y]+'diff(\sigma[y],y,1)*dy
  -\sigma[y])*dz*dx;
SY13:(\tau[zy]+'diff(\tau[zy],z,1)*dz
  -\tau[zy])*dx*dy;
SY2:expand((SY11+SY12+SY13)/dx/dy/dz);
SZ11:(\tau[xz]+'diff(\tau[xz],x,1)*dx
  -\tau[xz])*dy*dz;
SZ12:(\tau[yz]+'diff(\tau[yz],y,1)*dy
  -\tau[yz])*dz*dx;
SZ13:(\sigma[z]+'diff(\sigma[z],z,1)*dz
  -\sigma[z])*dx*dy;
SZ2:expand((SZ11+SZ12+SZ13)/dx/dy/dz);
```

x 軸方向の応力の関係は、xy 平面に対して、

$$\left(-\sigma_x + \left(\frac{d}{d\,x}\,\sigma_x\right)\,dx + \sigma_x\right)\,dy\,dz$$
$$= dx\,dy\,dz\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\sigma_x\right)$$

xz 平面に対して、

$$\left(-\tau_{yx} + \left(\frac{d}{d\,y}\,\tau_{yx}\right)\,dy + \tau_{yx}\right)\,dz\,dx$$
$$= dx\,dy\,dz\,\left(\frac{d}{d\,y}\,\tau_{yx}\right)$$

xy 平面に対して、

$$\left(-\tau_{zx}+\left(\frac{d}{d\,z}\,\tau_{zx}\right)\,dz+\tau_{zx}\right)\,dx\,dy$$
$$=dx\,dy\,dz\,\left(\frac{d}{d\,z}\,\tau_{zx}\right)$$

上記の 3 成分をまとめると x 軸方向の力は下記となる。

$$\frac{d}{d\,z}\,\tau_{zx}+\frac{d}{d\,y}\,\tau_{yx}+\frac{d}{d\,x}\,\sigma_x$$

同様に y 軸方向、z 軸方向の力の関係は下記となる。

$$\frac{d}{d\,z}\,\tau_{zy}+\frac{d}{d\,y}\,\sigma_y+\frac{d}{d\,x}\,\tau_{xy}$$
$$\frac{d}{d\,z}\,\sigma_z+\frac{d}{d\,y}\,\tau_{yz}+\frac{d}{d\,x}\,\tau_{xz}$$

```
LSUB2:['diff(\tau[xy],x,1)=0,
 'diff(\tau[yx],y,1)=0,'diff(\tau[zy],z,1)
 =0,'diff(\tau[yz],y,1)=0,'diff(\tau[zx]
 ,z,1)=0,'diff(\tau[xz],x,1)=0];
TZ11:\tau[xy]*(dy*dz)*dx/2+(\tau[xy]
  +'diff(\tau[xy],x,1)*dx)*(dy*dz)*dx/2;
TZ12:\tau[yx]*(dx*dz)*dy/2+(\tau[yx]
  +'diff(\tau[yx],y,1)*dy)*(dx*dz)*dy/2;
TZ2:expand((TZ11-TZ12)/dx/dy/dz)=0;
TX11:\tau[yz]*(dx*dz)*dy/2+(\tau[yz]
  +'diff(\tau[yz],y,1)*dy)*(dx*dz)*dy/2;
TX12:\tau[zy]*(dx*dy)*dz/2+(\tau[zy]
  +'diff(\tau[zy],z,1)*dz)*(dx*dy)*dz/2;
TX2:expand((TX11-TX12)/dx/dy/dz)=0;
TY11:\tau[zx]*(dx*dy)*dz/2+(\tau[zx]
  +'diff(\tau[zx],z,1)*dz)*(dx*dy)*dz/2;
TY12:\tau[xz]*(dy*dz)*dx/2+(\tau[xz]
  +'diff(\tau[xz],x,1)*dx)*(dy*dz)*dx/2;
TY2:expand((TY11-TY12)/dx/dy/dz)=0;
TZ3:subst(LSUB2,TZ2);
TX3:subst(LSUB2,TX2);
TY3:subst(LSUB2,TY2);
TZ4:-(TZ3-first(lhs(TZ3)));
TX4:-(TX3-first(lhs(TX3)));
TY4:-(TY3-first(lhs(TY3)));
```

yz 平面で z 軸まわりの応力のモーメントの関係は、

$$\frac{\left(\left(\frac{d}{d\,x}\,\tau_{xy}\right)\,dx+\tau_{xy}\right)\,(dy\,dz)\,dx}{2}+\frac{\tau_{xy}\,(dy\,dz)\,dx}{2}$$

xz 平面で z 軸まわりの応力のモーメントの関係は、

$$\frac{\left(\left(\frac{d}{d\,y}\,\tau_{yx}\right)\,dy+\tau_{yx}\right)\,(dx\,dz)\,dy}{2}+\frac{\tau_{yx}\,(dx\,dz)\,dy}{2}$$

上記をまとめ、z 軸まわりの応力のモーメントの関係は下記となる。

$$-\frac{dy\,\left(\frac{d}{d\,y}\,\tau_{yx}\right)}{2}-\tau_{yx}+\frac{dx\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\tau_{xy}\right)}{2}+\tau_{xy}=0$$

高次の項は小さいとして、省略し、

$$\tau_{yx}=\tau_{xy}$$

x 軸まわり、y 軸まわりの応力のモーメントの関係から、同様に下記を得る。

$$\tau_{zy}=\tau_{yz}$$

$$\tau_{xz}=\tau_{zx}$$

```
SX3:subst([TX4,TY4,TZ4],SX2);
SY3:subst([TX4,TY4,TZ4],SY2);
SZ3:subst([TX4,TY4,TZ4],SZ2);
P1:P=matrix([SX3],[SY3],[SZ3]);
MTS:matrix([\sigma[x],\tau[xy],\tau[zx]],
           [\tau[xy],\sigma[y],\tau[yz]],
           [\tau[zx],\tau[yz],\sigma[z]]);

MTSD:matrix([\sigma[x1],\tau[xy],\tau[zx]],
           [\tau[xy],\sigma[y1],\tau[yz]],
           [\tau[zx],\tau[yz],\sigma[z1]]);
MTS=-p*ident(3)+MTSD;
```

流体要素表面に作用する力：$\overrightarrow{P}$ は上記から、下記となる。

$$\begin{pmatrix}P_x\\P_y\\P_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{d}{d\,z}\,\tau_{zx}+\frac{d}{d\,y}\,\tau_{xy}+\frac{d}{d\,x}\,\sigma_x\\\frac{d}{d\,z}\,\tau_{yz}+\frac{d}{d\,y}\,\sigma_y+\frac{d}{d\,x}\,\tau_{xy}\\\frac{d}{d\,x}\,\tau_{zx}+\frac{d}{d\,z}\,\sigma_z+\frac{d}{d\,y}\,\tau_{yz}\end{pmatrix}\tag{2.4.1}$$

ここで流体要素に作用する応力のうち、面に垂直に作用する応力は圧力：p 項があるので、圧力とそれ以外の項で下記のように分ける。そこで応力のマトリックスを下記のように表現できる。

$$\begin{pmatrix}\sigma_x&\tau_{xy}&\tau_{zx}\\\tau_{xy}&\sigma_y&\tau_{yz}\\\tau_{zx}&\tau_{yz}&\sigma_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sigma_{x1}&\tau_{xy}&\tau_{zx}\\\tau_{xy}&\sigma_{y1}&\tau_{yz}\\\tau_{zx}&\tau_{yz}&\sigma_{z1}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-p&0&0\\0&-p&0\\0&0&-p\end{pmatrix}\tag{2.4.2}$$

2.5　流体要素表面に作用する応力と流体速度勾配との関係

```
DV:matrix([du],[dv],[dw]);
VGT:matrix(['diff(u,x,1),'diff(u,y,1),
            'diff(u,z,1)],
           ['diff(v,x,1),'diff(v,y,1),
            'diff(v,z,1)],
           ['diff(w,x,1),'diff(w,y,1),
            'diff(w,z,1)]);
DR:matrix([dx],[dy],[dz]);
EQVGT:DV=VGT.DR;
VGT1:(VGT+transpose(VGT))/2;
VGT2:(VGT-transpose(VGT))/2;
```

流体速度勾配のテンソル D を下記のように表現する。

$$D=\begin{pmatrix}\frac{d}{d\,x}\,u & \frac{d}{d\,y}\,u & \frac{d}{d\,z}\,u\\ \frac{d}{d\,x}\,v & \frac{d}{d\,y}\,v & \frac{d}{d\,z}\,v\\ \frac{d}{d\,x}\,w & \frac{d}{d\,y}\,w & \frac{d}{d\,z}\,w\end{pmatrix}$$

流素速度変化：$\overrightarrow{DV}$ は次式で表現できる。

$$\overrightarrow{DV}=\begin{pmatrix}du\\ dv\\ dw\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{d}{d\,x}\,u & \frac{d}{d\,y}\,u & \frac{d}{d\,z}\,u\\ \frac{d}{d\,x}\,v & \frac{d}{d\,y}\,v & \frac{d}{d\,z}\,v\\ \frac{d}{d\,x}\,w & \frac{d}{d\,y}\,w & \frac{d}{d\,z}\,w\end{pmatrix}\begin{pmatrix}dx\\ dy\\ dz\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}du\\ dv\\ dw\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}dz\,\left(\frac{d}{d\,z}\,u\right)+dy\,\left(\frac{d}{d\,y}\,u\right)+dx\,\left(\frac{d}{d\,x}\,u\right)\\ dz\,\left(\frac{d}{d\,z}\,v\right)+dy\,\left(\frac{d}{d\,y}\,v\right)+dx\,\left(\frac{d}{d\,x}\,v\right)\\ dz\,\left(\frac{d}{d\,z}\,w\right)+dy\,\left(\frac{d}{d\,y}\,w\right)+dx\,\left(\frac{d}{d\,x}\,w\right)\end{pmatrix}$$

流体速度勾配のテンソル D の転置行列を $\overline{D}$ とする。

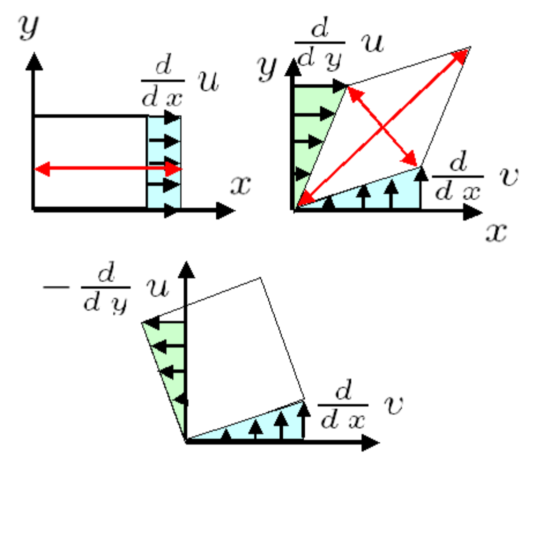


図 2.5.1: 流体の伸び縮みと回転

$$\frac{1}{2}\left(D+\overline{D}\right)=\begin{pmatrix}\frac{d}{d\,x}\,u & \frac{\frac{d}{d\,x}\,v+\frac{d}{d\,y}\,u}{2} & \frac{\frac{d}{d\,x}\,w+\frac{d}{d\,z}\,u}{2}\\ \frac{\frac{d}{d\,x}\,v+\frac{d}{d\,y}\,u}{2} & \frac{d}{d\,y}\,v & \frac{\frac{d}{d\,y}\,w+\frac{d}{d\,z}\,v}{2}\\ \frac{\frac{d}{d\,x}\,w+\frac{d}{d\,z}\,u}{2} & \frac{\frac{d}{d\,y}\,w+\frac{d}{d\,z}\,v}{2} & \frac{d}{d\,z}\,w\end{pmatrix}$$

上図から上式は一様な伸び縮み運動とひしゃげるズレ運動を表現し、

$$\frac{1}{2}\left(D-\overline{D}\right)=\begin{pmatrix}0 & \frac{\frac{d}{d\,y}\,u-\frac{d}{d\,x}\,v}{2} & \frac{\frac{d}{d\,z}\,u-\frac{d}{d\,x}\,w}{2}\\ \frac{\frac{d}{d\,x}\,v-\frac{d}{d\,y}\,u}{2} & 0 & \frac{\frac{d}{d\,z}\,v-\frac{d}{d\,y}\,w}{2}\\ \frac{\frac{d}{d\,x}\,w-\frac{d}{d\,z}\,u}{2} & \frac{\frac{d}{d\,y}\,w-\frac{d}{d\,z}\,v}{2} & 0\end{pmatrix}$$

上図から上式は回転運動を表現している。

```
VGT11:e[11]=VGT1[1][1];
VGT12:e[12]=VGT1[1][2];
VGT13:e[13]=VGT1[1][3];
VGT21:e[21]=VGT1[2][1];
VGT22:e[22]=VGT1[2][2];
VGT23:e[23]=VGT1[2][3];
VGT31:e[31]=VGT1[3][1];
VGT32:e[32]=VGT1[3][2];
VGT33:e[33]=VGT1[3][3];
VGT3:matrix([e[11],e[12],e[13]],[e[21],
  e[22],e[23]],[e[31],e[32],e[33]]);
VGT3S:matrix([e[1],0,0],[0,e[2],0],
  [0,0,e[3]]);
MTS11:matrix([\sigma[1],0,0],[0,\sigma[2]
 ,0],
  [0,0,\sigma[3]]);
```

流体要素表面に作用する応力が流体の伸び縮みに主に関係するとして、下記の変形速度テンソルで表現する。

$$\begin{pmatrix}e_{11} & e_{12} & e_{13}\\ e_{21} & e_{22} & e_{23}\\ e_{31} & e_{32} & e_{33}\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\frac{d}{d\,x}\,u & \frac{\frac{d}{d\,x}\,v+\frac{d}{d\,y}\,u}{2} & \frac{\frac{d}{d\,x}\,w+\frac{d}{d\,z}\,u}{2}\\ \frac{\frac{d}{d\,x}\,v+\frac{d}{d\,y}\,u}{2} & \frac{d}{d\,y}\,v & \frac{\frac{d}{d\,y}\,w+\frac{d}{d\,z}\,v}{2}\\ \frac{\frac{d}{d\,x}\,w+\frac{d}{d\,z}\,u}{2} & \frac{\frac{d}{d\,y}\,w+\frac{d}{d\,z}\,v}{2} & \frac{d}{d\,z}\,w\end{pmatrix}\tag{2.5.1}$$

上記の変形速度テンソルの主方向を選ぶと下記のように変換できる。

$$\begin{pmatrix}e_{11} & e_{12} & e_{13}\\ e_{21} & e_{22} & e_{23}\\ e_{31} & e_{32} & e_{33}\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}e_1 & 0 & 0\\ 0 & e_2 & 0\\ 0 & 0 & e_3\end{pmatrix}$$

応力のマトリックスについても主方向を選ぶと下記のように変換できる。

$$\begin{pmatrix}\sigma_{x1} & \tau_{xy} & \tau_{zx}\\ \tau_{xy} & \sigma_{y1} & \tau_{yz}\\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_{z1}\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}\sigma_1 & 0 & 0\\ 0 & \sigma_2 & 0\\ 0 & 0 & \sigma_3\end{pmatrix}$$

等方性物質では、応力テンソルの主軸と変形速度テンソルの主軸が一致するとして、下記の一次斉次方程式で表現できる。

```
EQS1:\sigma[1]=A*e[1]+B*e[2]+B*e[3];
EQS2:\sigma[2]=A*e[2]+B*e[3]+B*e[1];
EQS3:\sigma[3]=A*e[3]+B*e[1]+B*e[2];
TR1:A=2*\mu+b;
TR2:B=b;
EQS11:partfrac(subst([TR1,TR2],EQS1),b);
EQS21:partfrac(subst([TR1,TR2],EQS2),b);
EQS31:partfrac(subst([TR1,TR2],EQS3),b);
MTS21:b*(e[1]+e[2]+e[3])*ident(3);
MTS22:2*\mu*VGT3S;
MTS3:MTS11=MTS21+MTS22;
MTEQ1:MTSD=b*(e[11]+e[22]+e[33])*ident(3)
  +2*\mu*VGT3;
MTEQ2:subst([VGT11,VGT12,VGT13,VGT21,VGT22,
  VGT23,VGT31,VGT32,VGT33],MTEQ1);
```

$$\sigma_1 = e_3\,B + e_2\,B + e_1\,A$$

$$\sigma_2 = e_3\,B + e_1\,B + e_2\,A$$

$$\sigma_3 = e_2\,B + e_1\,B + e_3\,A$$

係数を下記のように置き換えて、

$$A = 2\,\mu + b \qquad B = b$$

下記の応力テンソルと変形速度の関係式が得られる。

$$\sigma_1 = 2\,e_1\,\mu + (e_3 + e_2 + e_1)\,b$$

$$\sigma_2 = 2\,e_2\,\mu + (e_3 + e_2 + e_1)\,b$$

$$\sigma_3 = 2\,e_3\,\mu + (e_3 + e_2 + e_1)\,b$$

マトリックス表示すると、

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} = (e_3 + e_2 + e_1)\,b \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 2\mu \begin{pmatrix} e_1 & 0 & 0 \\ 0 & e_2 & 0 \\ 0 & 0 & e_3 \end{pmatrix}$$

上記の主応力・変形速度テンソルを基の座標系に戻す。ここで、座標変換してもテンソルの対称軸の和は変わらないこと (C.4.4 節（696 ページ）) から、次式を得る。

$$\begin{pmatrix} \sigma_{x1} & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{y1} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_{z1} \end{pmatrix} = (e_{33} + e_{22} + e_{11})\,b \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 2\mu \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{pmatrix}$$

(2.5.1) 式を用いて、上記の応力テンソルと変形速度との関係は、下記となる。

$$\begin{pmatrix} \sigma_{x1} & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{y1} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_{z1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b\left(\frac{d}{d\,z}\,w + \frac{d}{d\,y}\,v + \frac{d}{d\,x}\,u\right) + 2\,\mu\left(\frac{d}{d\,x}\,u\right) & \mu\left(\frac{d}{d\,x}\,v + \frac{d}{d\,y}\,u\right) & \mu\left(\frac{d}{d\,x}\,w + \frac{d}{d\,z}\,u\right) \\ \mu\left(\frac{d}{d\,x}\,v + \frac{d}{d\,y}\,u\right) & b\left(\frac{d}{d\,z}\,w + \frac{d}{d\,y}\,v + \frac{d}{d\,x}\,u\right) + 2\,\mu\left(\frac{d}{d\,y}\,v\right) & \mu\left(\frac{d}{d\,y}\,w + \frac{d}{d\,z}\,v\right) \\ \mu\left(\frac{d}{d\,x}\,w + \frac{d}{d\,z}\,u\right) & \mu\left(\frac{d}{d\,y}\,w + \frac{d}{d\,z}\,v\right) & b\left(\frac{d}{d\,z}\,w + \frac{d}{d\,y}\,v + \frac{d}{d\,x}\,u\right) + 2\,\mu\left(\frac{d}{d\,z}\,w\right) \end{pmatrix} \tag{2.5.2}$$

2.6 Navier-Stokes の式

流体要素表面に作用する応力の結果を基に運動方程式を求める。

```
LMTEQ21:'diff(lhs(MTEQ2)[1][1],x,1)
  =diff(rhs(MTEQ2)[1][1],x,1);
LMTEQ22:'diff(lhs(MTEQ2)[1][2],y,1)
  =diff(rhs(MTEQ2)[1][2],y,1);
LMTEQ23:'diff(lhs(MTEQ2)[1][3],z,1)
  =diff(rhs(MTEQ2)[1][3],z,1);
LMTEQ24:'diff(lhs(MTEQ2)[2][1],x,1)
  =diff(rhs(MTEQ2)[2][1],x,1);
LMTEQ25:'diff(lhs(MTEQ2)[2][2],y,1)
  =diff(rhs(MTEQ2)[2][2],y,1);
LMTEQ26:'diff(lhs(MTEQ2)[2][3],z,1)
  =diff(rhs(MTEQ2)[2][3],z,1);
LMTEQ27:'diff(lhs(MTEQ2)[3][1],x,1)
  =diff(rhs(MTEQ2)[3][1],x,1);
LMTEQ28:'diff(lhs(MTEQ2)[3][2],y,1)
  =diff(rhs(MTEQ2)[3][2],y,1);
LMTEQ29:'diff(lhs(MTEQ2)[3][3],z,1)
  =diff(rhs(MTEQ2)[3][3],z,1);
```

```
LMTEQ2A:'diff(\sigma[x],x,1)
 ='diff(\sigma[x1],x,1)-diff(p,x,1);
LMTEQ2B:'diff(\sigma[y],y,1)
 ='diff(\sigma[y1],y,1)-diff(p,y,1);
LMTEQ2C:'diff(\sigma[z],z,1)
 ='diff(\sigma[z1],z,1)-diff(p,z,1);
P2:subst([LMTEQ2A,LMTEQ2B,LMTEQ2C],P1);
subst([LMTEQ21,LMTEQ22,LMTEQ23,LMTEQ24,
 LMTEQ25,LMTEQ26,LMTEQ27,LMTEQ28,LMTEQ29]
 ,P2);
MTEQ21:subst([b=-2/3*\mu],%);
MTEQ011:lhs(MTEQ0)=F+rhs(MTEQ21);
```

(2.4.1) 式、(2.4.2) 式から、

$$\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{d\,z}\,\tau_{zx} + \frac{d}{d\,y}\,\tau_{xy} + \frac{d}{d\,x}\,\sigma_{x1} - \frac{d}{d\,x}\,p \\ \frac{d}{d\,z}\,\tau_{yz} + \frac{d}{d\,y}\,\sigma_{y1} + \frac{d}{d\,x}\,\tau_{xy} - \frac{d}{d\,y}\,p \\ \frac{d}{d\,x}\,\tau_{zx} + \frac{d}{d\,z}\,\sigma_{z1} + \frac{d}{d\,y}\,\tau_{yz} - \frac{d}{d\,z}\,p \end{pmatrix}$$

Stokes の関係 [1] から、

$$b = \frac{(-2)\ \mu}{3}$$

上記の関係に、応力テンソルと変形速度の関係を (2.3.1) 式の運動方程式に代入し、下記の Navier-Stokes の式を得る。

$$\begin{pmatrix} \rho\,\left(\left(\frac{d}{d\,z}\,u\right)\,w + \left(\frac{d}{d\,y}\,u\right)\,v + u\,\left(\frac{d}{d\,x}\,u\right) + \frac{d}{d\,t}\,u\right) \\ \rho\,\left(\left(\frac{d}{d\,z}\,v\right)\,w + v\,\left(\frac{d}{d\,y}\,v\right) + u\,\left(\frac{d}{d\,x}\,v\right) + \frac{d}{d\,t}\,v\right) \\ \rho\,\left(w\,\left(\frac{d}{d\,z}\,w\right) + v\,\left(\frac{d}{d\,y}\,w\right) + u\,\left(\frac{d}{d\,x}\,w\right) + \frac{d}{d\,t}\,w\right) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} X - \frac{2\,\mu\,\left(\frac{d^2}{d\,x\,d\,z}\,w+\frac{d^2}{d\,x\,d\,y}\,v+\frac{d^2}{d\,x^2}\,u\right)}{3} + \mu\,\left(\frac{d^2}{d\,x\,d\,z}\,w + \frac{d^2}{d\,z^2}\,u\right) + \mu\,\left(\frac{d^2}{d\,x\,d\,y}\,v + \frac{d^2}{d\,y^2}\,u\right) + 2\,\mu\,\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,u\right) - \frac{d}{d\,x}\,p \\ Y + \mu\,\left(\frac{d^2}{d\,y\,d\,z}\,w + \frac{d^2}{d\,z^2}\,v\right) - \frac{2\,\mu\,\left(\frac{d^2}{d\,y\,d\,z}\,w+\frac{d^2}{d\,y^2}\,v+\frac{d^2}{d\,x\,d\,y}\,u\right)}{3} + 2\,\mu\,\left(\frac{d^2}{d\,y^2}\,v\right) + \mu\,\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,v + \frac{d^2}{d\,x\,d\,y}\,u\right) - \frac{d}{d\,y}\,p \\ Z - \frac{2\,\mu\,\left(\frac{d^2}{d\,z^2}\,w+\frac{d^2}{d\,y\,d\,z}\,v+\frac{d^2}{d\,x\,d\,z}\,u\right)}{3} + 2\,\mu\,\left(\frac{d^2}{d\,z^2}\,w\right) + \mu\,\left(\frac{d^2}{d\,y^2}\,w + \frac{d^2}{d\,y\,d\,z}\,v\right) + \mu\,\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,w + \frac{d^2}{d\,x\,d\,z}\,u\right) - \frac{d}{d\,z}\,p \end{pmatrix} \tag{2.6.1}$$

非圧縮性の流体では、

```
MTEQ3:subst(CMEQ02,MTEQ2);
LMTEQ31:'diff(lhs(MTEQ3)[1][1],x,1)
 =diff(rhs(MTEQ3)[1][1],x,1);
LMTEQ32:'diff(lhs(MTEQ3)[1][2],y,1)
 =diff(rhs(MTEQ3)[1][2],y,1);
LMTEQ33:'diff(lhs(MTEQ3)[1][3],z,1)
 =diff(rhs(MTEQ3)[1][3],z,1);
LMTEQ34:'diff(lhs(MTEQ3)[2][1],x,1)
 =diff(rhs(MTEQ3)[2][1],x,1);
LMTEQ35:'diff(lhs(MTEQ3)[2][2],y,1)
 =diff(rhs(MTEQ3)[2][2],y,1);
```

```
LMTEQ36:'diff(lhs(MTEQ3)[2][3],z,1)
 =diff(rhs(MTEQ3)[2][3],z,1);
LMTEQ37:'diff(lhs(MTEQ3)[3][1],x,1)
 =diff(rhs(MTEQ3)[3][1],x,1);
LMTEQ38:'diff(lhs(MTEQ3)[3][2],y,1)
 =diff(rhs(MTEQ3)[3][2],y,1);
LMTEQ39:'diff(lhs(MTEQ3)[3][3],z,1)
 =diff(rhs(MTEQ3)[3][3],z,1);
 diff(CMEQ02,x,1);
LMTEQ3A:first(lhs(%))=-(lhs(%)
 -first(lhs(%)));
diff(CMEQ02,y,1);
```

[1] 今井　功：流体力学（前編）P.274 [18]

```
LMTEQ3B:first(lhs(%))=-(lhs(%)
 -first(lhs(%)));
diff(CMEQ02,z,1);
LMTEQ3C:last(lhs(%))=-(lhs(%)-last(lhs(%)));
subst([LMTEQ31,LMTEQ32,LMTEQ33,LMTEQ34,
 LMTEQ35,LMTEQ36,LMTEQ37,LMTEQ38,LMTEQ39]
 ,P2);
MTEQ31:partfrac(expand(subst([LMTEQ3A,
 LMTEQ3B,LMTEQ3C],%)),\mu);
MTEQ012:lhs(MTEQ0)=F+rhs(MTEQ31);
```

非圧縮性流体の質量保存 (2.2.2) 式は、

$$\frac{d}{d\,z}\,w+\frac{d}{d\,y}\,v+\frac{d}{d\,x}\,u=0$$

応力テンソルと変形速度テンソルの関係式：(2.5.2) 式に上記質量保存の式を代入し、$b=\frac{(-2)\,\mu}{3}$ とすると、応力テンソルと変形速度テンソルの関係は、

$$\begin{pmatrix}\sigma_{x1} & \tau_{xy} & \tau_{zx}\\ \tau_{xy} & \sigma_{y1} & \tau_{yz}\\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_{z1}\end{pmatrix}=\mu\begin{pmatrix}e_{xx} & e_{xy} & e_{zx}\\ e_{xy} & e_{yy} & e_{yz}\\ e_{zx} & e_{yz} & e_{zz}\end{pmatrix}=\mu\begin{pmatrix}2\,\left(\frac{d}{d\,x}\,u\right) & \left(\frac{d}{d\,x}\,v+\frac{d}{d\,y}\,u\right) & \left(\frac{d}{d\,x}\,w+\frac{d}{d\,z}\,u\right)\\ \left(\frac{d}{d\,x}\,v+\frac{d}{d\,y}\,u\right) & 2\,\left(\frac{d}{d\,y}\,v\right) & \left(\frac{d}{d\,y}\,w+\frac{d}{d\,z}\,v\right)\\ \left(\frac{d}{d\,x}\,w+\frac{d}{d\,z}\,u\right) & \left(\frac{d}{d\,y}\,w+\frac{d}{d\,z}\,v\right) & 2\,\left(\frac{d}{d\,z}\,w\right)\end{pmatrix} \tag{2.6.2}$$

流体要素表面に作用する力：$\overrightarrow{P}$ は、

$$\overrightarrow{P}=\begin{pmatrix}P_x\\ P_y\\ P_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mu\,\left(\frac{d^2}{d\,x\,d\,z}\,w+\frac{d^2}{d\,z^2}\,u\right)+\mu\,\left(\frac{d^2}{d\,x\,d\,y}\,v+\frac{d^2}{d\,y^2}\,u\right)+2\,\mu\,\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,u\right)-\frac{d}{d\,x}\,p\\ \mu\,\left(\frac{d^2}{d\,y\,d\,z}\,w+\frac{d^2}{d\,z^2}\,v\right)+2\,\mu\,\left(\frac{d^2}{d\,y^2}\,v\right)+\mu\,\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,v+\frac{d^2}{d\,x\,d\,y}\,u\right)-\frac{d}{d\,y}\,p\\ 2\,\mu\,\left(\frac{d^2}{d\,z^2}\,w\right)+\mu\,\left(\frac{d^2}{d\,y^2}\,w+\frac{d^2}{d\,y\,d\,z}\,v\right)+\mu\,\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,w+\frac{d^2}{d\,x\,d\,z}\,u\right)-\frac{d}{d\,z}\,p\end{pmatrix}$$

更に、非圧縮性流体の質量保存 (2.2.2) 式を x,y,z で微分し、

$$\frac{d^2}{d\,x\,d\,z}\,w+\frac{d^2}{d\,x\,d\,y}\,v+\frac{d^2}{d\,x^2}\,u=0,\quad \frac{d^2}{d\,y\,d\,z}\,w+\frac{d^2}{d\,y^2}\,v+\frac{d^2}{d\,x\,d\,y}\,u=0$$

$$\frac{d^2}{d\,z^2}\,w+\frac{d^2}{d\,y\,d\,z}\,v+\frac{d^2}{d\,x\,d\,z}\,u=0$$

上式を更に代入すると、非圧縮性の Navier-Stokes の式は、

$$\begin{pmatrix}\rho\,\left(\left(\frac{d}{d\,z}\,u\right)\,w+\left(\frac{d}{d\,y}\,u\right)\,v+u\,\left(\frac{d}{d\,x}\,u\right)+\frac{d}{d\,t}\,u\right)\\ \rho\,\left(\left(\frac{d}{d\,z}\,v\right)\,w+v\,\left(\frac{d}{d\,y}\,v\right)+u\,\left(\frac{d}{d\,x}\,v\right)+\frac{d}{d\,t}\,v\right)\\ \rho\,\left(w\,\left(\frac{d}{d\,z}\,w\right)+v\,\left(\frac{d}{d\,y}\,w\right)+u\,\left(\frac{d}{d\,x}\,w\right)+\frac{d}{d\,t}\,w\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X+\mu\,\left(\frac{d^2}{d\,z^2}\,u+\frac{d^2}{d\,y^2}\,u+\frac{d^2}{d\,x^2}\,u\right)-\frac{d}{d\,x}\,p\\ Y+\mu\,\left(\frac{d^2}{d\,z^2}\,v+\frac{d^2}{d\,y^2}\,v+\frac{d^2}{d\,x^2}\,v\right)-\frac{d}{d\,y}\,p\\ Z+\mu\,\left(\frac{d^2}{d\,z^2}\,w+\frac{d^2}{d\,y^2}\,w+\frac{d^2}{d\,x^2}\,w\right)-\frac{d}{d\,z}\,p\end{pmatrix} \tag{2.6.3}$$

ベクトル表記すると、

$$\rho\left(\frac{d}{d\,t}\,\overrightarrow{V}+(\overrightarrow{V}\cdot grad)\overrightarrow{V}\right)=F-grad(p)+\mu\nabla^2\overrightarrow{V} \tag{2.6.4}$$

また、質量保存の方程式は、

$$\frac{d}{d\,z}\,(\rho\,w)+\frac{d}{d\,y}\,(\rho\,v)+\frac{d}{d\,x}\,(\rho\,u)+\frac{d}{d\,t}\,\rho=0$$

非圧縮性流体の場合の質量保存の方程式は、

$$\frac{d}{d\,z}\,w+\frac{d}{d\,y}\,v+\frac{d}{d\,x}\,u=0$$

2.7 Euler の運動方程式

運動方程式については、既に「2.3 運動方程式」に記述しており、流体の加速度変化は物質微分を用いているが、ここでは運動量の視点から導く。また、物体力は重力加速度：g のみを考慮し、流体要素表面に作用する力は粘性率：$\mu = 0$ の完全流体とするため、圧力項のみが作用するとする。

```
kill(all);
V:matrix([u],[v],[w]);
depends(u,[x,y,z,t]);
depends(v,[x,y,z,t]);
depends(w,[x,y,z,t]);
depends(p,[x,y,z,t]);
depends(\rho,[x,y,z,t]);
depends([x,y,z],t);
F:matrix([0],[0],[-\rho*g]);
P:matrix([-diff(p,x,1)],[-diff(p,y,1)],
  [-diff(p,z,1)]);
MTV:'diff(\rho*V,t,1)*dx*dy*dz*dt;
MTSX11:-((\rho-diff(\rho,x,1)*dx/2)*dy*dz
 *dt)*(u-diff(u,x,1)*dx/2);
MTSX12:+((\rho+diff(\rho,x,1)*dx/2)*dy*dz
 *dt)*(u+diff(u,x,1)*dx/2);
MTSX21:-((\rho-diff(\rho,y,1)*dy/2)*dx*dz
 *dt)*(v-diff(v,y,1)*dy/2);
MTSX22:+((\rho+diff(\rho,y,1)*dy/2)*dx*dz
 *dt)*(v+diff(v,y,1)*dy/2);
MTSX31:-((\rho-diff(\rho,z,1)*dz/2)*dx*dy
 *dt)*(w-diff(w,z,1)*dz/2);
MTSX32:+((\rho+diff(\rho,z,1)*dz/2)*dx*dy
 *dt)*(w+diff(w,z,1)*dz/2);
```

流体速度：$\overrightarrow{V}$、物体力:$\overrightarrow{F}$、流体要素表面に作用する力：$\overrightarrow{P}$ は下記となる。

$$\overrightarrow{V} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g\,\rho \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{P} = \begin{pmatrix} -\frac{d}{d\,x}\,p \\ -\frac{d}{d\,y}\,p \\ -\frac{d}{d\,z}\,p \end{pmatrix}$$

流体要素 $dxdydz$ 内の運動量変化は、

$$dt\,dx\,dy\,dz\,\left(\frac{d}{d\,t}\begin{pmatrix} \rho\,u \\ \rho\,v \\ \rho\,w \end{pmatrix}\right)$$

$dydz$ 後面、前面を通過する質量は、

$$-dt\,dy\,dz\,\left(\rho - \frac{dx\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\rho\right)}{2}\right)\left(u - \frac{dx\,\left(\frac{d}{d\,x}\,u\right)}{2}\right)$$

$$dt\,dy\,dz\,\left(\frac{dx\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\rho\right)}{2} + \rho\right)\left(\frac{dx\,\left(\frac{d}{d\,x}\,u\right)}{2} + u\right)$$

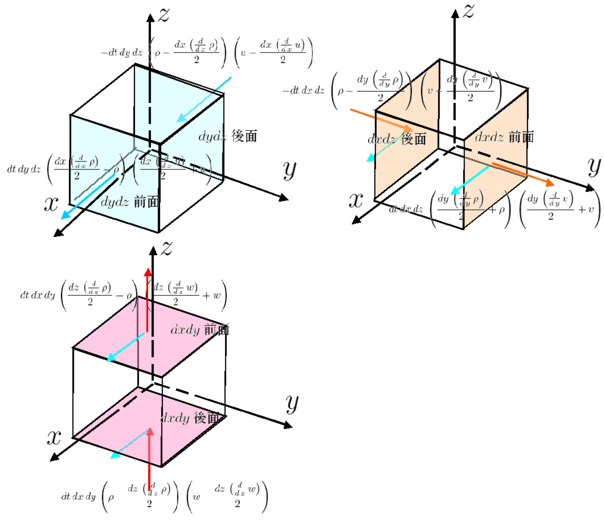


図 2.7.1: 流体要素を通過する質量

$dxdz$ 後面、前面を通過する質量は、

$$-dt\,dx\,dz\,\left(\rho - \frac{dy\,\left(\frac{d}{d\,y}\,\rho\right)}{2}\right)\left(v - \frac{dy\,\left(\frac{d}{d\,y}\,v\right)}{2}\right)$$

$$dt\,dx\,dz\,\left(\frac{dy\,\left(\frac{d}{d\,y}\,\rho\right)}{2} + \rho\right)\left(\frac{dy\,\left(\frac{d}{d\,y}\,v\right)}{2} + v\right)$$

$dxdy$ 後面、前面を通過する質量は、

$$-dt\,dx\,dy\,\left(\rho - \frac{dz\,\left(\frac{d}{d\,z}\,\rho\right)}{2}\right)\left(w - \frac{dz\,\left(\frac{d}{d\,z}\,w\right)}{2}\right)$$

$$dt\,dx\,dy\,\left(\frac{dz\,\left(\frac{d}{d\,z}\,\rho\right)}{2} + \rho\right)\left(\frac{dz\,\left(\frac{d}{d\,z}\,w\right)}{2} + w\right)$$

```
MTSX0:expand(MTSX11+MTSX12+MTSX21+MTSX22
  +MTSX31+MTSX32)=0;
expand(MTSX11*(u-diff(u,x,1)*dx/2)
+MTSX12*(u+diff(u,x,1)*dx/2)
+MTSX21*(u-diff(u,y,1)*dy/2)
+MTSX22*(u+diff(u,y,1)*dy/2)
+MTSX31*(u-diff(u,z,1)*dz/2)
+MTSX32*(u+diff(u,z,1)*dz/2));
expand(%-lhs(MTSX0)*u);
MTSX:subst([dx^3=0,dy^3=0,dz^3=0],%);
MTS:\rho*dx*dy*dz*dt*matrix
([u*diff(u,x,1)+v*diff(u,y,1)
 +w*diff(u,z,1)],
[u*diff(v,x,1)+v*diff(v,y,1)
 +w*diff(v,z,1)],
[u*diff(w,x,1)+v*diff(w,y,1)
 +w*diff(w,z,1)]);
```

```
expand((MTV+MTS)=F*dx*dy*dz*dt+P*dx*dy
 *dz*dt);
EQMT:expand(%/dx/dy/dz/dt);
```

上記の全ての和は、全面を通過する質量で質量保存から零である。

$$dt\,dx\,dy\,dz\,\rho\left(\frac{d}{d\,z}\,w\right)+dt\,dx\,dy\,dz\left(\frac{d}{d\,z}\,\rho\right)\,w+dt\,dx\,dy\,dz\,\rho\left(\frac{d}{d\,y}\,v\right)+dt\,dx\,dy\,dz\left(\frac{d}{d\,y}\,\rho\right)\,v$$
$$+\,dt\,dx\,dy\,dz\,\rho\left(\frac{d}{d\,x}\,u\right)+dt\,dx\,dy\,dz\left(\frac{d}{d\,x}\,\rho\right)\,u=0$$

上記の各面を通過する質量に x 軸方向の速度 u を掛けることにより、流体要素表面を通過して流体要素に流入する流体の x 軸方向の運動量変化は下記となる。高次の項を削除し、上記の質量保存式を考慮すると、

$$\begin{aligned}\iint\rho\overrightarrow{V}v_n dS =&\frac{dt\,dx\,dy\,dz^3\,\left(\frac{d}{d\,z}\,\rho\right)\,\left(\frac{d}{d\,z}\,u\right)\,\left(\frac{d}{d\,z}\,w\right)}{4}+dt\,dx\,dy\,dz\,\rho\,u\left(\frac{d}{d\,z}\,w\right)+dt\,dx\,dy\,dz\,\rho\left(\frac{d}{d\,z}\,u\right)\,w\\
&+dt\,dx\,dy\,dz\left(\frac{d}{d\,z}\,\rho\right)\,u\,w+\frac{dt\,dx\,dy^3\,dz\,\left(\frac{d}{d\,y}\,\rho\right)\,\left(\frac{d}{d\,y}\,u\right)\,\left(\frac{d}{d\,y}\,v\right)}{4}\\
&+dt\,dx\,dy\,dz\,\rho\,u\left(\frac{d}{d\,y}\,v\right)+dt\,dx\,dy\,dz\,\rho\left(\frac{d}{d\,y}\,u\right)\,v+dt\,dx\,dy\,dz\left(\frac{d}{d\,y}\,\rho\right)\,u\,v\\
&+\frac{dt\,dx^3\,dy\,dz\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\rho\right)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,u\right)^2}{4}+2\,dt\,dx\,dy\,dz\,\rho\,u\left(\frac{d}{d\,x}\,u\right)+dt\,dx\,dy\,dz\left(\frac{d}{d\,x}\,\rho\right)\,u^2\\
=&dt\,dx\,dy\,dz\,\rho\left(\frac{d}{d\,z}\,u\right)\,w+dt\,dx\,dy\,dz\,\rho\left(\frac{d}{d\,y}\,u\right)\,v+dt\,dx\,dy\,dz\,\rho\,u\left(\frac{d}{d\,x}\,u\right)\end{aligned}$$

「2.3 運動方程式」の物質微分の結果と同じ結果が得られた。上式を考慮して、運動方程式をまとめると、

$$\begin{pmatrix}\rho\,\left(\frac{d}{d\,z}\,u\right)\,w+\rho\,\left(\frac{d}{d\,y}\,u\right)\,v+\rho\,u\,\left(\frac{d}{d\,x}\,u\right)\\ \rho\,\left(\frac{d}{d\,z}\,v\right)\,w+\rho\,v\,\left(\frac{d}{d\,y}\,v\right)+\rho\,u\,\left(\frac{d}{d\,x}\,v\right)\\ \rho\,w\,\left(\frac{d}{d\,z}\,w\right)+\rho\,v\,\left(\frac{d}{d\,y}\,w\right)+\rho\,u\,\left(\frac{d}{d\,x}\,w\right)\end{pmatrix}+\frac{d}{d\,t}\begin{pmatrix}\rho\,u\\ \rho\,v\\ \rho\,w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{d}{d\,x}\,p\\ -\frac{d}{d\,y}\,p\\ -g\,\rho-\frac{d}{d\,z}\,p\end{pmatrix}\tag{2.7.1}$$

ベクトル表記すると、

$$\rho\left(\frac{d}{d\,t}\,\overrightarrow{V}+(\overrightarrow{V}\cdot grad)\overrightarrow{V}\right)=\overrightarrow{F}-grad(p)\tag{2.7.2}$$

2.7.1 Euler の運動方程式 (回転動座標系)

流体の外側の境界が運動している場合、その境界とともに動く座標系を使用した方が、便利である。座標軸が並進運動する場合には、その加速度により、単位質量が受ける力を見かけの体積力として考慮すればよい。回転運動を伴う場合には、一般的な慣性座標系のベクトル：$\overrightarrow{L_1}$ が微少時間：Δt で P から P' へ移動したとする。$\overrightarrow{\Omega}$ で回転する座標系では、P は回転で Q へ移動し、座標上から見ると Q から P' へ移動したことになる。上記か

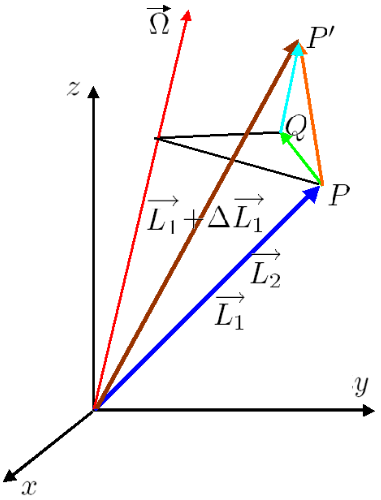


図 2.7.2: 回転動座標系

ら、下記の関係式が得られる。

$$\overrightarrow{PP'} = \Delta\overrightarrow{L_1}, \quad \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{\Omega} \times \overrightarrow{L_2}\Delta t, \quad \overrightarrow{QP'} = \Delta\overrightarrow{L_2}$$

$$\Delta\overrightarrow{L_1} = \Delta\overrightarrow{L_2} + \overrightarrow{\Omega} \times \overrightarrow{L_2}\Delta t$$

$\Delta t \to 0$ とすると、次式となる。

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{L_1} = \frac{d}{dt}\overrightarrow{L_2} + \overrightarrow{\Omega} \times \overrightarrow{L_2}$$

この式を基に、

$$\overrightarrow{V_1} = \frac{d}{dt}\overrightarrow{X_1} = \frac{d}{dt}\overrightarrow{X_2} + \overrightarrow{\Omega} \times \overrightarrow{X_2} \tag{2.7.3}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\overrightarrow{V_1} &= \frac{d}{dt}\overrightarrow{V_2} + \overrightarrow{\Omega} \times \overrightarrow{V_2} \\ &= \frac{d^2}{dt^2}\overrightarrow{X_2} + 2\overrightarrow{\Omega} \times \overrightarrow{V_2} + \frac{d}{dt}\overrightarrow{\Omega} \times \overrightarrow{X_2} \\ &+ \overrightarrow{\Omega} \times (\overrightarrow{\Omega} \times \overrightarrow{X_2})\end{aligned} \tag{2.7.4}$$

回転する座標系での流体の運動方程式は、下記の単位質量あたりの見かけの体積力を加えることでよい。

単位質量あたりの見かけの体積力

$$= -2\overrightarrow{\Omega} \times \overrightarrow{V_2} - \frac{d}{dt}\overrightarrow{\Omega} \times \overrightarrow{X_2} - \overrightarrow{\Omega} \times (\overrightarrow{\Omega} \times \overrightarrow{X_2}) \tag{2.7.5}$$

別の方法で上記を検証する。下図に示すように z 軸が回転する動座標系を考える。

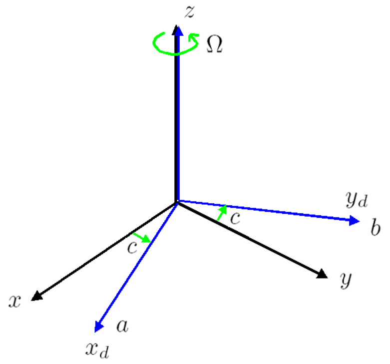


図 2.7.3: z 軸が回転する動座標系

```
kill(all);
load("vect")
depends(a,[t]);
depends(b,[t]);
depends(c,[t]);
depends(x,[t]);
depends(y,[t]);
depends(z,[t]);
VX:X=matrix([x],[y],[z]);
VX1:X1=matrix([a],[b],[z]);
TR:matrix([cos(c),-sin(c),0],
  [sin(c),cos(c),0],[0,0,1]);
TR1:transpose(TR);
XX11:x=a*cos(c)-b*sin(c);
XX12:y=a*sin(c)+b*cos(c);
XX11D:diff(XX11,t,1);
XX12D:diff(XX12,t,1);
XX11DD:diff(XX11,t,2);
XX12DD:diff(XX12,t,2);
V1:matrix([lhs(XX11D)],[lhs(XX12D)],
  [diff(z,t,1)]);
V2:matrix([u],[v],[w])=matrix([diff(a,t,1)
 ], [diff(b,t,1)],[diff(z,t,1)]);
V12:trigrat(expand(TR1.matrix([rhs(XX11D)
 ], [rhs(XX12D)],[diff(z,t,1)])));
subst([diff(a,t,1)=u[d],diff(b,t,1)=v[d],
  diff(c,t,2)='diff(\Omega,t,1)],%);
V121:subst([a=x[d],b=y[d],diff(c,t,1)
  =\Omega,diff(z,t,1)=w[d]],%);
```

慣性系 xyz 軸系と z 軸が角速度 Ω で回転する動座標系の関係は下記である。ここでは Maxima の load(”vect”) を使用する都合上、$x_d = a, y_d = b$ と置く。

$$x = a\cos(c) - b\sin(c)$$

$$y = a\sin(c) + b\cos(c)$$

これを時間微分すると下記となる。ここでは x 軸のみを示す。

$$\frac{d}{d\,t}\,x = -\,a\sin\left(c\right)\,\left(\frac{d}{d\,t}\,c\right) - b\cos\left(c\right)\,\left(\frac{d}{d\,t}\,c\right) - \left(\frac{d}{d\,t}\,b\right)\,\sin\left(c\right) + \left(\frac{d}{d\,t}\,a\right)\,\cos\left(c\right)$$

慣性系 xyz 軸系と z 軸が回転する動座標系に座標変換する変換マトリックスは、

$$\begin{pmatrix} \cos\left(c\right) & \sin\left(c\right) & 0 \\ -\sin\left(c\right) & \cos\left(c\right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

上式の右辺に変換マトリックスをかけ、整理すると、

$$\begin{pmatrix} \frac{d}{d\,t}\,a - b\,\left(\frac{d}{d\,t}\,c\right) \\ a\,\left(\frac{d}{d\,t}\,c\right) + \frac{d}{d\,t}\,b \\ \frac{d}{d\,t}\,z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_d - y_d\,\Omega \\ x_d\,\Omega + v_d \\ w_d \end{pmatrix}$$

```
OM:matrix([0],[0],[diff(c,t,1)]);
V13:rhs(V2)+col(adjoint(transpose(addcol(
 OM,rhs(VX1),matrix([1],[1],[1])))),3);
V12-V13;
AC1:diff(V1,t,1);
AC2:trigrat(expand(TR1.matrix([rhs(XX11DD)
 ],[rhs(XX12DD)],[diff(z,t,2)])));
AC21:diff(rhs(V2),t,1);
AC22:2*col(adjoint(transpose(addcol(OM,
 rhs(V2),matrix([1],[1],[1])))),3);
AC23:col(adjoint(transpose(addcol(
 diff(OM,t,1),rhs(VX1),
 matrix([1],[1],[1])))),3);
AC241:col(adjoint(transpose(addcol(OM,
 rhs(VX1),matrix([1],[1],[1])))),3);
AC24:col(adjoint(transpose(addcol(OM,AC241,
 matrix([1],[1],[1])))),3);
AC20:AC21+AC22+AC23+AC24;
AC2-AC20;
subst([diff(a,t,2)='diff(u[d],t,1),
 diff(b,t,2)='diff(v[d],t,1),
 diff(z,t,2)='diff(w[d],t,1)],AC20);
subst([diff(a,t,1)=u[d],diff(b,t,1)=v[d],
 diff(c,t,2)='diff(\Omega,t,1)],%);
AC201:subst([a=x[d],b=y[d],
 diff(c,t,1)=\Omega],%);
```

時間の 2 階微分は下記となる。ここでは x 軸のみを示す。

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{d\,t^2}\,x = &-\,a\sin\left(c\right)\,\left(\frac{d^2}{d\,t^2}\,c\right) - b\cos\left(c\right)\,\left(\frac{d^2}{d\,t^2}\,c\right) \\ &+ b\sin\left(c\right)\,\left(\frac{d}{d\,t}\,c\right)^2 - a\cos\left(c\right)\,\left(\frac{d}{d\,t}\,c\right)^2 \\ &- 2\,\left(\frac{d}{d\,t}\,a\right)\,\sin\left(c\right)\,\left(\frac{d}{d\,t}\,c\right) \\ &- 2\,\left(\frac{d}{d\,t}\,b\right)\,\cos\left(c\right)\,\left(\frac{d}{d\,t}\,c\right) \\ &- \left(\frac{d^2}{d\,t^2}\,b\right)\,\sin\left(c\right) + \left(\frac{d^2}{d\,t^2}\,a\right)\,\cos\left(c\right)\end{aligned}$$

上式の右辺に変換マトリックスをかけ、整理すると、

$$\begin{pmatrix} -b\,\left(\frac{d^2}{d\,t^2}\,c\right) - a\,\left(\frac{d}{d\,t}\,c\right)^2 - 2\,\left(\frac{d}{d\,t}\,b\right)\,\left(\frac{d}{d\,t}\,c\right) + \frac{d^2}{d\,t^2}\,a \\ a\,\left(\frac{d^2}{d\,t^2}\,c\right) - b\,\left(\frac{d}{d\,t}\,c\right)^2 + 2\,\left(\frac{d}{d\,t}\,a\right)\,\left(\frac{d}{d\,t}\,c\right) + \frac{d^2}{d\,t^2}\,b \\ \frac{d^2}{d\,t^2}\,z \end{pmatrix}$$

以上から、加速度項は下記となる。

$$\begin{pmatrix} -y_d\,\left(\frac{d}{d\,t}\,\Omega\right) - x_d\,\Omega^2 - 2\,v_d\,\Omega + \frac{d}{d\,t}\,u_d \\ x_d\,\left(\frac{d}{d\,t}\,\Omega\right) - y_d\,\Omega^2 + 2\,u_d\,\Omega + \frac{d}{d\,t}\,v_d \\ \frac{d}{d\,t}\,w_d \end{pmatrix} \tag{2.7.6}$$

上記の結果から回転する座標系での流体の運動方程式は、下記の単位質量あたりの見かけの体積力を加えることでよい。また、これはベクトル表記式：(2.7.5) と同じ結果である。

$$\text{単位質量あたりの見かけの体積力} = -\begin{pmatrix} -y_d\,\left(\frac{d}{d\,t}\,\Omega\right) - x_d\,\Omega^2 - 2\,v_d\,\Omega \\ x_d\,\left(\frac{d}{d\,t}\,\Omega\right) - y_d\,\Omega^2 + 2\,u_d\,\Omega \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.7.7}$$

2.8 Bernoulli の定理

「2.7 Euler の運動方程式」で得られた運動方程式 (2.7.1) 式の流体要素表面を通過して要素に流入する流体の運動量変化を表す下記の項に注目する。

$$\begin{pmatrix}\left(\frac{d}{d\,z}\,u\right)\,w+\left(\frac{d}{d\,y}\,u\right)\,v+u\,\left(\frac{d}{d\,x}\,u\right)\\ \left(\frac{d}{d\,z}\,v\right)\,w+v\,\left(\frac{d}{d\,y}\,v\right)+u\,\left(\frac{d}{d\,x}\,v\right)\\ w\,\left(\frac{d}{d\,z}\,w\right)+v\,\left(\frac{d}{d\,y}\,w\right)+u\,\left(\frac{d}{d\,x}\,w\right)\end{pmatrix}$$

```
kill(all);
V:matrix([u],[v],[w]);
depends(u,[x,y,z,t]);
depends(v,[x,y,z,t]);
depends(w,[x,y,z,t]);
depends(p,[x,y,z,t]);
EQMT:matrix([rho*('diff(u,z,1))*w
+rho*('diff(u,y,1))*v+rho*u*('diff(u,x,1))
 ],rho*('diff(v,z,1))*w+rho*v*('diff(v,y,1)
 )+rho*u*('diff(v,x,1))],[rho*w*('diff(w,z,
 1))+rho*v*('diff(w,y,1))+rho*u*('diff(w,
 x,1))]])+'diff(matrix([rho*u],[rho*v],
 [rho*w]),t,1)=matrix([-'diff(p,x,1)],
 [-'diff(p,y,1)],[-g*rho-'diff(p,z,1)]);
MTS0:expand(first(lhs(EQMT))/\rho);
load("vect")
GRV2:grad((u^2+v^2+w^2)/2);
express(%);
ev(%,diff);
GRV21:GRV2=expand(transpose(%));
curl(transpose(V)[1]);
express(%);
ev(%,diff);
transpose(%);
RTV1:V *curl(transpose(V)[1])
=col(adjoint(transpose(addcol(V,%,
matrix([1],[1],[1])))),3);
lhs(GRV21)-lhs(RTV1)=
expand(rhs(GRV21)-rhs(RTV1));
expand(rhs(%)-MTS0);
```

運動方程式は (2.7.1) 式から、

$$\frac{d}{d\,t}\,\begin{pmatrix}\rho\,u\\ \rho\,v\\ \rho\,w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\rho\,\left(\frac{d}{d\,z}\,u\right)\,w-\rho\,\left(\frac{d}{d\,y}\,u\right)\,v-\rho\,u\,\left(\frac{d}{d\,x}\,u\right)-\frac{d}{d\,x}\,p\\ -\rho\,\left(\frac{d}{d\,z}\,v\right)\,w-\rho\,v\,\left(\frac{d}{d\,y}\,v\right)-\rho\,u\,\left(\frac{d}{d\,x}\,v\right)-\frac{d}{d\,y}\,p\\ -\rho\,w\,\left(\frac{d}{d\,z}\,w\right)-\rho\,v\,\left(\frac{d}{d\,y}\,w\right)-\rho\,u\,\left(\frac{d}{d\,x}\,w\right)-g\,\rho-\frac{d}{d\,z}\,p\end{pmatrix}$$

$grad$, $curl$ の下記の関係から、

$$\frac{grad\left(w^2+v^2+u^2\right)}{2}$$
$$=\begin{pmatrix}w\,\left(\frac{d}{d\,x}\,w\right)+v\,\left(\frac{d}{d\,x}\,v\right)+u\,\left(\frac{d}{d\,x}\,u\right)\\ w\,\left(\frac{d}{d\,y}\,w\right)+v\,\left(\frac{d}{d\,y}\,v\right)+u\,\left(\frac{d}{d\,y}\,u\right)\\ w\,\left(\frac{d}{d\,z}\,w\right)+v\,\left(\frac{d}{d\,z}\,v\right)+u\,\left(\frac{d}{d\,z}\,u\right)\end{pmatrix}$$

$$curl\left([u,v,w]\right)=\begin{pmatrix}\frac{d}{d\,y}\,w-\frac{d}{d\,z}\,v\\ \frac{d}{d\,z}\,u-\frac{d}{d\,x}\,w\\ \frac{d}{d\,x}\,v-\frac{d}{d\,y}\,u\end{pmatrix}$$

$$\frac{grad\left(w^2+v^2+u^2\right)}{2}-\begin{pmatrix}u\\ v\\ w\end{pmatrix}\times curl\left([u,v,w]\right)$$
$$=\begin{pmatrix}\left(\frac{d}{d\,z}\,u\right)\,w+\left(\frac{d}{d\,y}\,u\right)\,v+u\,\left(\frac{d}{d\,x}\,u\right)\\ \left(\frac{d}{d\,z}\,v\right)\,w+v\,\left(\frac{d}{d\,y}\,v\right)+u\,\left(\frac{d}{d\,x}\,v\right)\\ w\,\left(\frac{d}{d\,z}\,w\right)+v\,\left(\frac{d}{d\,y}\,w\right)+u\,\left(\frac{d}{d\,x}\,w\right)\end{pmatrix} \tag{2.8.1}$$

流体要素表面を通過して流体要素に流入する流体の運動量変化に基づく上記の項がこのように表現できる。

```
F0:grad(-\rho*g*z);
express(%);
F01:ev(%,diff);
P0:grad(-p);
express(%);
P01:ev(%,diff);
EQMT2:F0+P0-\rho*lhs(GRV21)+\rho*lhs(RTV1)
 =expand(F01+P01-\rho*rhs(GRV21)
 +\rho*rhs(RTV1));
expand(rhs(EQMT1)-rhs(EQMT2));
grad((u^2+v^2+w^2)/2+gz+p/\rho)
 =V *curl(transpose(V)[1]);
(u^2+v^2+w^2)/2+gz+p/\rho=H;
```

右辺項を $grad,\quad curl$ を使って表現し、

$$-grad\,(g\,\rho\,z)-\rho\frac{grad\left(w^2+v^2+u^2\right)}{2}+\rho\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}\times curl\,([u,v,w])-grad\,(p)$$

$$=\begin{pmatrix}-\rho\,\left(\frac{d}{d\,z}\,u\right)\,w-\rho\,\left(\frac{d}{d\,y}\,u\right)\,v-\rho\,u\,\left(\frac{d}{d\,x}\,u\right)-\frac{d}{d\,x}\,p\\-\rho\,\left(\frac{d}{d\,z}\,v\right)\,w-\rho\,v\,\left(\frac{d}{d\,y}\,v\right)-\rho\,u\,\left(\frac{d}{d\,x}\,v\right)-\frac{d}{d\,y}\,p\\-\rho\,w\,\left(\frac{d}{d\,z}\,w\right)-\rho\,v\,\left(\frac{d}{d\,y}\,w\right)-\rho\,u\,\left(\frac{d}{d\,x}\,w\right)-g\,\rho-\frac{d}{d\,z}\,p\end{pmatrix}$$

上記の関係式を用いて、運動方程式をベクトル表記すると下記となる。

$$\frac{d}{d\,t}\,\overrightarrow{V}-\overrightarrow{V}\times curl\overrightarrow{V}=-grad\left(g\,z+\frac{\overrightarrow{V}^2}{2}+\frac{p}{\rho}\right)\tag{2.8.2}$$

上記から、定常状態では、次式の関係を得る。

$$grad\left(\frac{w^2+v^2+u^2}{2}+\frac{p}{\rho}+gz\right)=\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}\times curl\,([u,v,w])\tag{2.8.3}$$

上式で、右辺が零の場合には次式：Bernoulli の定理を得る。

$$\frac{w^2+v^2+u^2}{2}+\frac{p}{\rho}+gz=H\tag{2.8.4}$$

または、

$$\frac{w^2+v^2+u^2}{2}+\int\frac{dp}{\rho}+gz=H$$

(a) 流れの中いたるところで H が一定値をとる場合：

流れの中いたるところで $curl([u,v,w])=0$、即ち渦無し流れの場合はいたるところで H が一定値をとる。また、流体速度：$\overrightarrow{V}$ と $curl([u,v,w])=0$ が平行の場合 eqn:2-7-1) 式の右辺項が零となるため、H が一定値をとる。

(b) 流れの中いたるところで H が変化する場合：

$H=const$ は一つの面を表す。(2.8.3) 式の左辺が $H=const$ の面の垂直ベクトルを表す。即ち、(2.8.3) 式の右辺項が $H=const$ の面上で垂直である。$\overrightarrow{V}$ は流れの面：$H=const$ の面内にあるので、$curl([u,v,w])$ も $H=const$ の面内にあることになる。したがって、一つの流線上では $H=const$ となる。

2.8.1 Bernoulli の定理 (回転動座標系)

回転する装置の中を流体が流れる場合、流れが定常になるように回転座標系を選べば記述が簡単になる。2.7.1「Euler の運動方程式 (回転動座標系)」に示すように、回転する座標系での流体の運動方程式は、(2.7.5) 式に示す単位質量あたりの見かけの体積力を加えることでよい。このことから、定常回転の場合の運動方程式は、上記を考慮し下記となる。

$$\frac{d}{d\,t}\,\vec{V}-\vec{V}\times curl\vec{V}=-\,grad\left(g\,z+\frac{\vec{V}^2}{2}+\frac{p}{\rho}\right)\\ -2\vec{\Omega}\times\vec{V}-\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{X})$$

ところで、2.7.1「Euler の運動方程式 (回転動座標系)」の Maxima 計算過程から、下記の関係がある。

$$\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{X})=-grad\frac{1}{2}\left(\vec{\Omega}\times\vec{X}\right)^2$$

これを上式に代入し、定常回転の場合の運動方程式を整理すると、

$$\frac{d}{d\,t}\,\vec{V}-\vec{V}\times\left(curl\vec{V}+2\vec{\Omega}\right)\\ =-grad\left(g\,z+\frac{\vec{V}^2}{2}+\frac{p}{\rho}-\frac{1}{2}\left(\vec{\Omega}\times\vec{X}\right)^2\right) \tag{2.8.5}$$

```
kill(all);
load("vect")
OM1:matrix([l],[m],[n]);
VX:X=matrix([x],[y],[z]);
OM2:col(adjoint(transpose(addcol(OM1,
 rhs(VX),matrix([1],[1],[1])))),3);
curl(transpose(OM2)[1]);
express(%);
transpose(ev(%,diff));
```

(2.7.3) 式から、この両辺の rotation をとると、

$$curl\left(\vec{V_1}\right)=curl\left(\vec{V_2}\right)+curl\left(\vec{\Omega}\times\vec{X_2}\right) \tag{2.8.6}$$

ここで、V_1 は慣性座標系の速度、V_2 は回転動座標系の速度を表す。右辺第二項について、

$$\vec{\Omega}=\begin{pmatrix}l\\m\\n\end{pmatrix}$$

と置くと、下記の関係を得る。

$$curl\left(\vec{\Omega}\times\vec{X_2}\right)=\begin{pmatrix}2\,l\\2\,m\\2\,n\end{pmatrix}=2\vec{\Omega}$$

以上のことから、$curl\vec{V_2}+2\vec{\Omega}=0$ であれば、慣性系で $curl\vec{V_1}=0$ で渦無し流れとなる。いま、流れが相対的に定常で、$curl\vec{V}+2\vec{\Omega}=0$、即ち $-2\vec{\Omega}$ の渦度がある場合、左辺が零となり、渦無し流れで

$$g\,z+\frac{\vec{V}^2}{2}+\frac{p}{\rho}-\frac{1}{2}\left(\vec{\Omega}\times\vec{X}\right)^2=H \tag{2.8.7}$$

いたるところで H が一定な回転動座標系の Bernoulli の定理を得る。図 2.7.3 に示すように、z 軸が Ω で定常回転する回転動座標系の場合の Bernoulli の定理は下記となる。ここで x_d, y_d は回転動座標系の xy 座標を表す。

$$\frac{V^2}{2}+\frac{p}{\rho}-\frac{\left(y_d^2+x_d^2\right)\,\Omega^2}{2}+gz=H \tag{2.8.8}$$

2.8.2　気体に対する Bernoulli の定理

気体では密度は圧力によって変化するので、

```
kill(all);
EQBP01:p=k*\rho^\gamma;
EQBP02:solve(EQBP01,\rho)[1];
EQBP03:solve(EQBP01,k)[1];
P=integrate(1/rhs(EQBP02),p);
factor(ratsimp(subst([EQBP03],%)));
radcan(%);
EQBP04:factor(%);
c^2='diff(p,\rho,1);
subst([EQBP01],%);
ev(%,diff);
subst([EQBP03],%);
EQBP05:radcan(%);
EQBP06:solve(%,p)[1];
EQBE04:(u^2+v^2+w^2)/2+rhs(EQBP04)=H;
EQBE05:subst([EQBP06],%);
```

Bernoulli の定理として下記を使用する。

$$\int \frac{1}{\rho} dp + gz + \frac{w^2+v^2+u^2}{2} = H$$

ここで気体の場合、重力加速度の影響は通常無視できる。また、気体は理想気体で下記の断熱法則に従うとする。

ここで、定圧比熱と定積比熱の比を γ、比例定数を k とすると圧力：p と密度：ρ の関係は、

$$p = k\,\rho^{\gamma}$$

上式を Bernoulli の定理に代入すると、

$$\int \frac{dp}{\rho} = k^{\frac{1}{\gamma}} \int \frac{1}{p^{\frac{1}{\gamma}}} dp = \frac{k^{\frac{1}{\gamma}}\,p^{1-\frac{1}{\gamma}}}{1-\frac{1}{\gamma}} = \frac{p\,\gamma}{\rho\,(\gamma-1)}$$

上記から、Bernoulli の定理は、

$$\frac{p\,\gamma}{\rho\,(\gamma-1)} + \frac{w^2+v^2+u^2}{2} = H \tag{2.8.9}$$

ここで、音速を c とすると、音速と圧力：p と密度：ρ の関係は、

$$c^2 = \frac{d}{d\,\rho}\,p$$

上記の圧力：p と密度：ρ の関係から、

$$c^2 = \frac{p\,\gamma}{\rho}$$

上式を Bernoulli の定理に代入すると、

$$\frac{c^2}{\gamma-1} + \frac{w^2+v^2+u^2}{2} = H$$

2.9　速度ポテンシャル

```
kill(all);
load("vect");
V:matrix([u],[v],[w]);
depends(u,[x,y,z,t]);
depends(v,[x,y,z,t]);
depends(w,[x,y,z,t]);
depends(p,[x,y,z,t]);
depends(\Phi,[x,y,z,t]);
X:matrix([0],[0],[-\rho*g]);
curl(transpose(V)[1])=0;
express(%);
transpose(lhs(%))=0;
grad(\Phi);
express(%);
PH01:ev(%,diff);
PH02:V=transpose(PH01);
curl(PH01);
express(%);
ev(%,diff);
div(transpose(V)[1])=0;
express(%);
EQC01:ev(%,diff);
div(grad(\Phi))=0;
express(%);
EQC02:ev(%,diff);
```

流体を非圧縮性として流速：$\vec{V}$ とし、

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

下記の渦無し流れとする。

$$curl(\vec{V}) = \nabla \times \vec{V} = \begin{pmatrix} \frac{d}{d\,y}\,w - \frac{d}{d\,z}\,v \\ \frac{d}{d\,z}\,u - \frac{d}{d\,x}\,w \\ \frac{d}{d\,x}\,v - \frac{d}{d\,y}\,u \end{pmatrix} = 0$$

下記のストークスの定理 [1] から、

$$\int_C \vec{V} \cdot d\vec{r} = \iint_S \left(\nabla \times \vec{V}\right) \cdot \vec{n}\,dS$$

渦無し流れ：$\nabla \times \vec{V} = 0$ から、上式の右辺が零となり、

$$\int_C \vec{V} \cdot d\vec{r} = 0 \tag{2.9.1}$$

上式の基準点：O から点：P の線積分を速度ポテンシャル：Φ とすると、

$$\Phi = \int_O^P \vec{V} \cdot d\vec{r} \tag{2.9.2}$$

[1] 溝口純敏：Maxima　を使った物理数学基礎演習ノート、http://www9.plala.or.jp/prac-maxima/ 第 4 章 4.4.11 ストークスの定理

また、二点間 : $(O \rightarrow P)$ の積分経路として二つの C_1, C_2 を考える。積分経路 : C_1 による静電ポテンシャル:Φ は次式となり、C_1-C_2 は閉経路となるため、(2.9.1) 式から零となり、下記のように書き換えることができる。

$$\Phi = \int_{C_1} \overrightarrow{V} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_{C_1-C_2} \overrightarrow{V} \cdot d\overrightarrow{r} + \int_{C_2} \overrightarrow{V} \cdot d\overrightarrow{r}$$
$$=0 + \int_{C_2} \overrightarrow{V} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_{C_2} \overrightarrow{V} \cdot d\overrightarrow{r}$$

上式から、速度ポテンシャル : Φ は積分経路に依存しないことが示された。Φ について、下記の関係がある。

$$d\Phi = \frac{d\Phi}{dx}\, dx + \frac{d\Phi}{dy}\, dy + \frac{d\Phi}{dz}\, dz$$

$$d\overrightarrow{r} = dx\, \overrightarrow{i} + dy\, \overrightarrow{j} + dz\, \overrightarrow{k}$$
$$grad\, \Phi = \frac{d\Phi}{dx}\, \overrightarrow{i} + \frac{d\Phi}{dy}\, \overrightarrow{j} + \frac{d\Phi}{dz}\, \overrightarrow{k}$$

上式から、

$$d\Phi = grad\, \Phi \cdot d\overrightarrow{r} \tag{2.9.3}$$

上式と (2.9.2) 式から、

$$grad\, \Phi \cdot d\overrightarrow{r} = \overrightarrow{V} \cdot d\overrightarrow{r}$$

上式から速度ポテンシャル : Φ と流速 : $\overrightarrow{V}$ との関係式は、

$$\overrightarrow{V} = grad\, \Phi = \begin{pmatrix} \frac{d}{d\,x}\, \Phi \\ \frac{d}{d\,y}\, \Phi \\ \frac{d}{d\,z}\, \Phi \end{pmatrix} \tag{2.9.4}$$

質量保存の方程式は、

$$div(\overrightarrow{V}) = \frac{d}{d\,z}\, w + \frac{d}{d\,y}\, v + \frac{d}{d\,x}\, u = 0$$

上式に (2.9.4) 式を代入すると、

$$div\,(grad\,(\Phi)) = \frac{d^2}{d\,z^2}\, \Phi + \frac{d^2}{d\,y^2}\, \Phi + \frac{d^2}{d\,x^2}\, \Phi = 0 \tag{2.9.5}$$

速度ポテンシャル : Φ の質量保存の方程式は上記となり、速度ポテンシャル : Φ は上記のラプラスの方程式を満足する必要がある。

```
diff(V,t,1)+transpose(V.transpose(
  grad(transpose(V)[1])));
express(%);
ev(%,diff);
grad(-p);
express(%);
P:transpose(ev(%,diff));
diff(rhs(PH02),t,1)+transpose(
  rhs(PH02).transpose(grad(
  transpose(rhs(PH02))[1])))=X+P;
express(%);
EQBE01:ev(%,diff);
grad(rhs(PH02).rhs(PH02)/2+diff(\Phi,t,1));
express(%);
EQBE02:expand(transpose(ev(%,diff)));
lhs(EQBE01)-EQBE02;
grad(rhs(PH02).rhs(PH02)/2+diff(\Phi,t,1)
  +g*z+p/\rho)=0;
express(%);
ev(%,diff);
expand(transpose(lhs(%)))=0;
rhs(PH02).rhs(PH02)/2+diff(\Phi,t,1)+g*z
 +integrate(1/\rho,p)=F(t);
```

加速度項を速度ポテンシャルで書き換え、下記となる。

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{d\,t}\,\overrightarrow{V}+(\overrightarrow{V}\cdot grad)\overrightarrow{V}\\
&=\begin{pmatrix}\left(\frac{d}{d\,z}\,u\right)\,w+\left(\frac{d}{d\,y}\,u\right)\,v+u\,\left(\frac{d}{d\,x}\,u\right)+\frac{d}{d\,t}\,u\\ \left(\frac{d}{d\,z}\,v\right)\,w+v\,\left(\frac{d}{d\,y}\,v\right)+u\,\left(\frac{d}{d\,x}\,v\right)+\frac{d}{d\,t}\,v\\ w\,\left(\frac{d}{d\,z}\,w\right)+v\,\left(\frac{d}{d\,y}\,w\right)+u\,\left(\frac{d}{d\,x}\,w\right)+\frac{d}{d\,t}\,w\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}\left(\frac{d^2}{d\,x\,d\,z}\,\Phi\right)\,\left(\frac{d}{d\,z}\,\Phi\right)+\left(\frac{d^2}{d\,x\,d\,y}\,\Phi\right)\,\left(\frac{d}{d\,y}\,\Phi\right)+\left(\frac{d}{d\,x}\,\Phi\right)\,\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,\Phi\right)+\frac{d^2}{d\,t\,d\,x}\,\Phi\\ \left(\frac{d^2}{d\,y\,d\,z}\,\Phi\right)\,\left(\frac{d}{d\,z}\,\Phi\right)+\left(\frac{d}{d\,y}\,\Phi\right)\,\left(\frac{d^2}{d\,y^2}\,\Phi\right)+\left(\frac{d}{d\,x}\,\Phi\right)\,\left(\frac{d^2}{d\,x\,d\,y}\,\Phi\right)+\frac{d^2}{d\,t\,d\,y}\,\Phi\\ \left(\frac{d}{d\,z}\,\Phi\right)\,\left(\frac{d^2}{d\,z^2}\,\Phi\right)+\left(\frac{d}{d\,y}\,\Phi\right)\,\left(\frac{d^2}{d\,y\,d\,z}\,\Phi\right)+\left(\frac{d}{d\,x}\,\Phi\right)\,\left(\frac{d^2}{d\,x\,d\,z}\,\Phi\right)+\frac{d^2}{d\,t\,d\,z}\,\Phi\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Bernoulli の定理の加速度項 (2.8.1) 式、(29 ページ) で速度ポテンシャルでは、curl $([u,v,w])=0$ であり、この加速度項を速度ポテンシャルで別表記すると下記となる。これを展開すると上記と同じとなる。

$$
=grad\left(\frac{\left(\frac{d}{d\,z}\,\Phi\right)^2+\left(\frac{d}{d\,y}\,\Phi\right)^2+\left(\frac{d}{d\,x}\,\Phi\right)^2}{2}+\frac{d}{d\,t}\,\Phi\right)
$$

上記から Euler の運動方程式は下記となる。

$$
grad\left(g\,z+\frac{p}{\rho}+\frac{\left(\frac{d}{d\,z}\,\Phi\right)^2+\left(\frac{d}{d\,y}\,\Phi\right)^2+\left(\frac{d}{d\,x}\,\Phi\right)^2}{2}+\frac{d}{d\,t}\,\Phi\right)=0
$$

これを積分し、下記の速度ポテンシャルの Bernoulli の定理表記を得る。

$$
g\,z+\frac{p}{\rho}+\frac{\left(\frac{d}{d\,z}\,\Phi\right)^2+\left(\frac{d}{d\,y}\,\Phi\right)^2+\left(\frac{d}{d\,x}\,\Phi\right)^2}{2}+\frac{d}{d\,t}\,\Phi=\mathrm{F}\,(t) \tag{2.9.6}
$$

2.10 質量保存の方程式 (ベクトル)

流体密度を ρ とし、これが時間と位置により変化するとする。ある領域の体積 : V、表面積 : S とする。領域内の質量は次式で得られる。

$$\iiint \rho dV$$

領域の表面積から出入りする質量は、表面積要素:dS、その垂直単位ベクトル : $\overrightarrow{n}$、流速 : $\overrightarrow{q}$ とすると、

$$\iint \rho \overrightarrow{q} \overrightarrow{n} dS$$

領域内の質量の時間 : t 変化は、領域の表面積から出入りする質量に等しいことから、

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint \rho dV = \iint \rho \overrightarrow{q} \overrightarrow{n} dS$$

ガウスの定理 : (A.2.3) 式から

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint \rho dV = \iint \rho \overrightarrow{q} \overrightarrow{n} dS = - \iiint \nabla \left(\rho \overrightarrow{q} \right) dV$$

上式から、

$$\iiint \frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \left(\rho \overrightarrow{q} \right) dV = 0$$

上式のある領域の質量変化が、要素の質量変化に適用でき、

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \left(\rho \overrightarrow{q} \right) = 0$$

上式から、

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \overrightarrow{q} \left(\nabla \rho \right) + \rho \left(\nabla \overrightarrow{q} \right) = 0$$

時間微分 : (A.1.1) 式から全微分に変更でき、(2.2.1) 式と同じ結果が得られた。

$$\frac{d}{d t} \rho + \rho \left(\nabla \overrightarrow{q} \right) = 0 \tag{2.10.1}$$

2.11　Euler の運動方程式 (ベクトル)

ある領域の体積：V、表面積：S、流速：$\overrightarrow{q}$ とすと、領域内の運動量：$\overrightarrow{M}$ は次式で得られる。

$$M = \iiint \overrightarrow{q}\rho dV$$

領域の表面積から出入りする運動量は、表面積要素：dS、その垂直単位ベクトル：$\overrightarrow{n}$ とすると、

$$-\iint \rho\overrightarrow{q}\left(\overrightarrow{q}\,\overrightarrow{n}\right)dS$$

上式から領域内の運動量の変化は、

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint \overrightarrow{q}\rho dV - \iint \rho\overrightarrow{q}\left(\overrightarrow{q}\,\overrightarrow{n}\right)dS$$

ガウスの定理：(A.2.3) 式、時間微分：(A.1.1) 式から、

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\iiint \overrightarrow{q}\rho dV - \iint \rho\overrightarrow{q}\left(\overrightarrow{q}\,\overrightarrow{n}\right)dS \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\iiint \overrightarrow{q}\rho dV \\
&\quad + \iiint \left(\rho\overrightarrow{q}\right)\left(\nabla\overrightarrow{q}\right) + \left(\overrightarrow{q}\nabla\right)\left(\rho\overrightarrow{q}\right)dV \\
&= \iiint \frac{\partial}{\partial t}\left(\overrightarrow{q}\rho\right) + \left(\rho\overrightarrow{q}\right)\left(\nabla\overrightarrow{q}\right) + \left(\overrightarrow{q}\nabla\right)\left(\rho\overrightarrow{q}\right)dV \\
&= \iiint \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{q}\rho\right) + \left(\rho\overrightarrow{q}\right)\left(\nabla\overrightarrow{q}\right)dV \\
&= \iiint \rho\frac{d}{dt}\overrightarrow{q} + \overrightarrow{q}\frac{d}{dt}\rho + \left(\rho\overrightarrow{q}\right)\left(\nabla\overrightarrow{q}\right)dV \\
&= \iiint \rho\frac{d}{dt}\overrightarrow{q} + \overrightarrow{q}\left(\frac{d}{dt}\rho + \rho\left(\nabla\overrightarrow{q}\right)\right)dV
\end{aligned}$$

(2.10.1) 式から体積分内第二項括弧内は零となり、領域内の運動量の変化は、

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint \overrightarrow{q}\rho dV - \iint \rho\overrightarrow{q}\left(\overrightarrow{q}\,\overrightarrow{n}\right)dS = \iiint \rho\frac{d}{dt}\overrightarrow{q}dV \tag{2.11.1}$$

圧力：p により領域に作用する力は、

$$\iint p\overrightarrow{n}dS$$

流体要素に作用する外力：$\overrightarrow{F}$ により領域内の流体に作用する力は、

$$\iiint \overrightarrow{F}dV$$

運動量変化は領域に作用する力を表しており、上記、圧力により領域に作用する力、流体要素に作用する外力と釣り合わねばならないから、

$$\iiint \rho\frac{d}{dt}\overrightarrow{q}dV = \iint p\overrightarrow{n}dS + \iiint \overrightarrow{F}dV$$

ガウスの定理：(A.2.3) 式を右辺第一項に適用すると、

$$\iiint \rho\frac{d}{dt}\overrightarrow{q}dV = -\iiint \nabla p dV + \iiint \overrightarrow{F}dV$$

上式をまとめると、

$$\iiint \rho\frac{d}{dt}\overrightarrow{q} + \nabla p - \overrightarrow{F}dV = 0$$

要素の力に適用すると次式となり、

$$\rho\frac{d}{dt}\overrightarrow{q} = \overrightarrow{F} - \nabla p$$

時間微分：(A.1.1) 式から、(2.7.2) 式と同じ結果が得られた。

$$\rho\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{q} + \rho\overrightarrow{q}\,\nabla\overrightarrow{q} = \overrightarrow{F} - \nabla p \tag{2.11.2}$$

$\overrightarrow{q}\,\nabla\overrightarrow{q}$ について、(C.3.19) 式で $\overrightarrow{A} \to \overrightarrow{q}$ と置くと、

$$\left(\overrightarrow{q}\,\nabla\right)\overrightarrow{q} = \frac{1}{2}\nabla\left(\overrightarrow{q}^2\right) - \overrightarrow{q}\times\left(\nabla\times\overrightarrow{q}\right)$$

上式から、

$$\rho\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{q} + \rho\frac{1}{2}\nabla\left(\overrightarrow{q}^2\right) - \rho\overrightarrow{q}\times\left(\nabla\times\overrightarrow{q}\right) = \overrightarrow{F} - \nabla p$$

いま、F を重力のポテンシャル場とすると、$F = -\rho g = -\rho\nabla\Omega,\ \Omega = gz$ となり、上式は、

$$\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{q} - \overrightarrow{q}\times\left(\nabla\times\overrightarrow{q}\right) = -\frac{1}{2}\nabla\left(\overrightarrow{q}^2\right) - \nabla\Omega - \frac{\nabla p}{\rho} \tag{2.11.3}$$

いま、定常状態とすると $\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{q} = 0$、渦無し流れとすると $\nabla\times\overrightarrow{q} = 0$ となり、左辺は零となる。これから上式は下記となり、Bernoulli の定理：(2.8.4) 式が得られた。

$$\frac{1}{2}q^2 + gz + \frac{p}{\rho} = H \tag{2.11.4}$$

2.12 物体に作用する力

流体中の物体に作用する力を求める。ここで、流体は定常で、渦無し流れとする。このとき物体に作用する力 $\overrightarrow{F}$ は、物体境界 : S_B、$\overrightarrow{n}$ を物体内向きとすると、

$$\overrightarrow{F} = \iint_{S_B} p\overrightarrow{n}\,dS \tag{2.12.1}$$

Bernoulli の定理 : (2.8.4) 式および (2.11.4) 式から、

$$p = H - \frac{1}{2}\rho q^2$$

上式を (2.12.1) 式に代入し、

$$\overrightarrow{F} = -\frac{1}{2}\rho\iint_{S_B} \overrightarrow{q}^2\overrightarrow{n}\,dS \tag{2.12.2}$$

上式に $-2\overrightarrow{q}\,(\overrightarrow{n}\,\overrightarrow{q})$ を加える。ここで、物体上 : S_B では $\overrightarrow{n}\,\overrightarrow{q} = 0$ であるから上式のこれを加えても変化しない。

$$\overrightarrow{F} = -\frac{1}{2}\rho\iint_{S_B} \overrightarrow{q}^2\overrightarrow{n} - 2\overrightarrow{q}\,(\overrightarrow{n}\,\overrightarrow{q})\,dS \tag{2.12.3}$$

上式右辺で、物体から十分離れた境界 : S_C と物体上 : S_B 間の流体にガウスの定理 : (A.2.3) 式を適用すると、

$$\begin{aligned}\iint_{S_B+S_C} &\overrightarrow{q}^2\overrightarrow{n} - 2\overrightarrow{q}\,(\overrightarrow{n}\,\overrightarrow{q})\,dS \\ &= -\iiint_V \nabla\overrightarrow{q}^2 - 2\overrightarrow{q}\,(\nabla\overrightarrow{q}) - 2\,(\overrightarrow{q}\,\nabla)\,\overrightarrow{q}\,dV\end{aligned} \tag{2.12.4}$$

$\overrightarrow{q}^2$ について、(C.3.19) 式で $\overrightarrow{A} \to \overrightarrow{q}$ と置くと、

$$\frac{1}{2}\nabla\left(\overrightarrow{q}^2\right) = \overrightarrow{q}\,\times\,(\nabla\,\times\,\overrightarrow{q}) + (\overrightarrow{q}\,\nabla)\,\overrightarrow{q}$$

(2.12.4) 式に上式を代入し、

$$\begin{aligned}\iint_{S_B+S_C} &\overrightarrow{q}^2\overrightarrow{n} - 2\overrightarrow{q}\,(\overrightarrow{n}\,\overrightarrow{q})\,dS \\ &= -\iiint_V 2\overrightarrow{q}\,\times\,(\nabla\,\times\,\overrightarrow{q}) - 2\overrightarrow{q}\,(\nabla\overrightarrow{q})\,dV\end{aligned}$$

ここで渦無し流れから $\nabla\,\times\,\overrightarrow{q} = 0$、質量保存の方程式で非圧縮で、定常状態とすると、(2.10.1) 式から $\nabla\overrightarrow{q} = 0$ となり、上式の右辺は零となる。以上から上式は、

$$\begin{aligned}\iint_{S_B} &\overrightarrow{q}^2\overrightarrow{n} - 2\overrightarrow{q}\,(\overrightarrow{n}\,\overrightarrow{q})\,dS \\ &= -\iint_{S_C} \overrightarrow{q}^2\overrightarrow{n} - 2\overrightarrow{q}\,(\overrightarrow{n}\,\overrightarrow{q})\,dS\end{aligned} \tag{2.12.5}$$

上式から (2.12.3) 式は、

$$\overrightarrow{F} = \frac{1}{2}\rho\iint_{S_C} \overrightarrow{q}^2\overrightarrow{n} - 2\overrightarrow{q}\,(\overrightarrow{n}\,\overrightarrow{q})\,dS \tag{2.12.6}$$

(2.9.6) 式から速度ポテンシャルの Bernoulli の定理は、

$$p = -\rho\frac{1}{2}\,(\nabla\Phi)^2 - \rho\frac{\partial}{\partial t}\,\Phi + \mathrm{F}\,(t)$$

上式を (2.12.1) 式に代入し、

$$\overrightarrow{F} = -\rho\iint_{S_B} \rho\frac{\partial}{\partial t}\,\Phi + \frac{1}{2}\,(\nabla\Phi)^2\,\overrightarrow{n}\,dS \tag{2.12.7}$$

ガウスの定理 : (A.2.3) 式から、

$$\rho\frac{d}{d\,t}\iint_{S_B+S_C} \Phi\overrightarrow{n}\,dS = \rho\frac{d}{d\,t}\iiint_V \nabla\Phi dV$$

Transport Theorem : (A.4.1) 式から $U_n = \overrightarrow{q}\,\overrightarrow{n}$ として上式は、

$$\begin{aligned}\rho\frac{d}{d\,t}&\iint_{S_B+S_C} \Phi\overrightarrow{n}\,dS \\ &= \rho\iiint_V \nabla\left(\frac{\partial}{\partial t}\Phi\right)dV + \rho\iint_{S_B+S_C} \nabla\Phi\,(\overrightarrow{q}\,\overrightarrow{n})\,dS\end{aligned}$$

上式右辺第一項にガウスの定理 : (A.2.3) 式を適用すると上式は、

$$\begin{aligned}\rho\frac{d}{d\,t}&\iint_{S_B+S_C} \Phi\overrightarrow{n}\,dS \\ &= \rho\iint_{S_B+S_C} \frac{\partial}{\partial t}\Phi\overrightarrow{n} + \nabla\Phi\,(\overrightarrow{q}\,\overrightarrow{n})\,dS\end{aligned}$$

ここで物体から十分離れた境界 : S_C は空間固定の境界とする。この境界 : S_C では $\overrightarrow{q}\,\overrightarrow{n} = 0$ であり、時間微分の項を交換できる。これから上式の境界 : S_B と境界 : S_C、それぞれの式に分けることができ、

$$\begin{aligned}\rho\frac{d}{d\,t}&\iint_{S_B} \Phi\overrightarrow{n}\,dS \\ &= \rho\iint_{S_B} \frac{\partial}{\partial t}\Phi\overrightarrow{n} + \nabla\Phi\,(\overrightarrow{q}\,\overrightarrow{n})\,dS\end{aligned} \tag{2.12.8}$$

(2.12.7) 式と (2.12.8) 式の和をとり、$\overrightarrow{q}\,\overrightarrow{n} = \frac{\partial}{\partial n}\Phi$ として整理すると、

$$\begin{aligned}F = &-\rho\frac{d}{d\,t}\iint_{S_B} \Phi\overrightarrow{n}\,dS \\ &+\rho\iint_{S_B} \frac{\partial}{\partial n}\Phi\nabla\Phi - \frac{1}{2}\,(\nabla\Phi)^2\,\overrightarrow{n}\,dS\end{aligned} \tag{2.12.9}$$

(2.12.5) 式で $\overrightarrow{q}\,\overrightarrow{n} = \frac{\partial}{\partial n}\Phi$ であるから、上式右辺第二項は (2.12.5) 式の左辺 $\times\frac{1}{2}$ と同じであるから、

$$\begin{aligned}F = &-\rho\frac{d}{d\,t}\iint_{S_B} \Phi\overrightarrow{n}\,dS \\ &-\rho\iint_{S_C} \frac{\partial}{\partial n}\Phi\nabla\Phi - \frac{1}{2}\,(\nabla\Phi)^2\,\overrightarrow{n}\,dS\end{aligned} \tag{2.12.10}$$

第3章　静止流体

3.1　流体の力学的平衡

例題 3.1.1　マノメータ

圧力の計測に下記のマノメータが使用される。その校正式を求める。

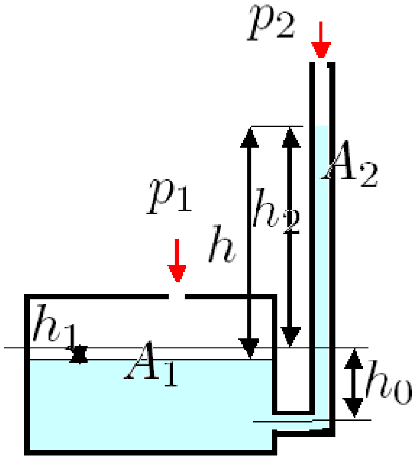


図 3.1.1: マノメータ

```
/* マノメータ */
kill(all);
MA1:p[1]+\rho*g*(h[0]-h[1])
  =p[2]+\rho*g*(h[0]+h[2]);
MA2:h[2]+h[1]=h;
MA3:A[1]*h[1]=A[2]*h[2];
MA11:factor(expand(solve(MA1,p[1])[1]
 -p[2]));
MA31:solve(MA3,h[1]);
factor(-subst([MA31],MA11));
```

タンクの断面積：A_1、計測ガラス管の断面積：A_2、タンク側に圧力：p_1、ガラス管側に圧力：p_2 の圧力をかけたとき、計測前の平衡状態からのタンクの水位変化：$h1$、ガラス管の水位変化：h_2 とする。液体の密度：ρ、平衡位置から計測ガラス管の連結部までの距離：h_0 とすると、連結部の圧力の釣り合い式は、(2.1.2) 式、（14 ページ）から、

$$(h_0 - h_1)\ g\,\rho + p_1 = (h_2 + h_0)\ g\,\rho + p_2$$

水位の関係、

$$h_2 + h_1 = h$$

連続の式は、

$$h_1\,A_1 = h_2\,A_2$$

これらを整理して、計測水柱から圧力差を求める式は下記となる。

$$p_2 - p_1 = -\frac{h_2\ (A_2 + A_1)\ g\,\rho}{A_1}$$

例題 3.1.2 ゲートに作用する力

曲面を持ったゲート：AB に作用する力を求める。

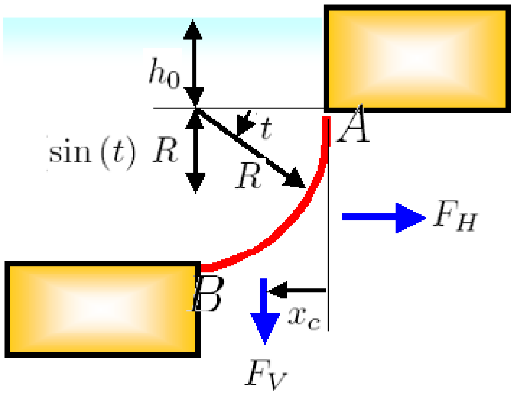


図 3.1.2: ゲートに作用する力

```
/* ゲート */
kill(all);
GTH1:dF[H]=dt*R*cos(t)*\rho*g*(h[0]
  +R*sin(t));
F[H]='integrate(rhs(GTH1)/dt,t,0,%pi/2);
GTH2:factor(ev(%,integrate));
GTV1:dF[V]=dt*R*sin(t)*\rho*g*(h[0]
  +R*sin(t));
F[V]='integrate(rhs(GTV1)/dt,t,0,%pi/2);
GTV2:factor(ev(%,integrate));
GTM1:dM[V]=rhs(GTV1)*(R-R*cos(t));
M[V]='integrate(rhs(GTM1)/dt,t,0,%pi/2);
GTM2:factor(ev(%,integrate));
x[c]=rhs(GTM2)/rhs(GTV2);
```

上図に示すように、水面から h_0 下にある、半径：R のゲートに作用する水平力、上下力、上下力の作用する位置：x_c を求める。角度：t における圧力は、(2.1.2) 式、(14 ページ) から $\rho g(sin(t)R + h_0)$ となり、面：Rdt に作用する。
力の方向を各成分に分解し、水平力：F_H は、

$$
\begin{aligned}
F_H =& g\,\rho\,R \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\ (\sin(t)\ R + h_0)\,dt \\
=& \frac{g\,\rho\,R\ (R + 2\,h_0)}{2}
\end{aligned}
$$

上下力：F_V は

$$
\begin{aligned}
F_V =& g\,\rho\,R \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\ (\sin(t)\ R + h_0)\,dt \\
=& \frac{g\,\rho\,R\ (\pi\,R + 4\,h_0)}{4}
\end{aligned}
$$

A 点中心の上下力のモーメント：M_V は、

$$
\begin{aligned}
M_V &= g\,\rho\,R \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\ (R - \cos(t)\ R)\ (\sin(t)\ R + h_0)\,dt \\
&= \frac{g\,\rho\,R^2\ (3\,\pi\,R - 4\,R + 6\,h_0)}{12}
\end{aligned}
$$

$x_c = M_V/F_V$ から、

$$
x_c = \frac{R\ (3\,\pi\,R - 4\,R + 6\,h_0)}{3\ (\pi\,R + 4\,h_0)}
$$

例題 3.1.3　水タンクの底の球

水深：h の水タンクの底に直径：d の穴が開いている。そこに直径：D の軽い球がはまっている。軽い球が浮いてこない条件を求める。球のタンク内の浮力を計算する

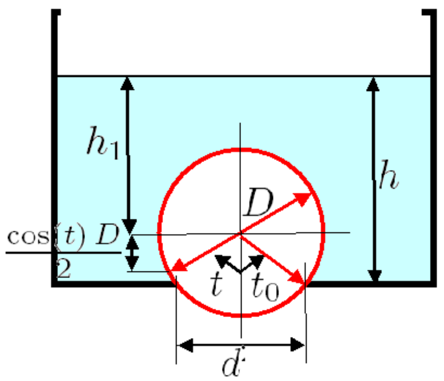


図 3.1.3: 水タンクの底の球

のに、まず、球全体の浮力を計算し、球がタンクからはみ出している部分を差し引くことで求める。計算が簡単になるように、球の中心の水深；h_1 とし、角度：t を図のようにとる。球が底と接している部分の角度を t_0 とする。

角度 t における円周は $\pi D sin(t)$ であるから、微少面積は $\pi D sin(t) \times dtD/2$ となる。角度 t における圧力は、(2.1.2) 式、（14 ページ）から $\rho g\left(\frac{cos(t)\,D}{2}+h_1\right)$ である。球全体の浮力を求めると下記となり、体積に ρg をかけたものである。

$$F_2 = \frac{\pi\, g\, \rho\, D^2 \int_0^{\pi} \cos(t)\sin(t)\left(\frac{\cos(t)\,D}{2}+h_1\right)dt}{2} = \frac{\pi\, g\, \rho\, D^3}{6}$$

同様に t を 0〜t_0 まで積分すると、

$$F_{21} = \frac{\pi\, g\, \rho\, D^2 \int_0^{t_0} \cos(t)\sin(t)\left(\frac{\cos(t)\,D}{2}+h_1\right)dt}{2} = -\frac{\pi\cos(t_0)^3\, g\, \rho\, D^3}{12}+\frac{\pi\, g\, \rho\, D^3}{12}-\frac{\pi\, h_1\cos(t_0)^2\, g\, \rho\, D^2}{4}+\frac{\pi\, h_1\, g\, \rho\, D^2}{4}$$

上記の結果から、球の浮力は

$$F_V = F_2 - F_{21} = \frac{\pi\cos(t_0)^3\, g\, \rho\, D^3}{12}+\frac{\pi\, g\, \rho\, D^3}{12}+\frac{\pi\, h_1\cos(t_0)^2\, g\, \rho\, D^2}{4}-\frac{\pi\, h_1\, g\, \rho\, D^2}{4}$$

ここで、下記の関係式を代入すると、

$$h_1 = h - \frac{\cos(t_0)\;D}{2}, \quad \sin(t_0) = \frac{d}{D}$$

$$F_V = \frac{\pi\, g\, \rho\,\left(2\,D^2\sqrt{D^2-d^2}+d^2\sqrt{D^2-d^2}+2\,D^3-6\,d^2\,h\right)}{24}$$

```
/* 水タンクの底の球 */
kill(all);
assume(t[0]>0);
assume(D>0);
TKA1:dt*D/2*2*%pi*D/2*sin(t);
integrate(%/dt,t,0,%pi);
TKV2:dF[2]=dt*D/2*2*%pi*D/2*sin(t)*\rho*g
  *(h[1]+D/2*cos(t))*cos(t);
F[2]='integrate(rhs(TKV2)/dt,t,0,%pi);
TKF2:expand(ev(%,integrate));
F[21]='integrate(rhs(TKV2)/dt,t,0,t[0]);
TKF21:expand(ev(%,integrate));
TKF3:F[V]=rhs(TKF2)-rhs(TKF21);
H1:h[1]=h-D/2*cos(t[0]);
T1:sin(t[0])=(d/2)/(D/2);
T10:solve(T1,t[0])[1];
subst([H1],TKF3);
ANSTK:factor(subst([T10],%));
rhs(%)=0;
solve(%,h)[1];
h>rhs(%);
```

$F_V = 0$ として、h を求めると、

$$h = \frac{2\,D^3+\sqrt{D^2-d^2}\,\left(2\,D^2+d^2\right)}{6\,d^2}$$

下記が、球が浮いてこない条件となる。

$$h > \frac{2\,D^3+\sqrt{D^2-d^2}\,\left(2\,D^2+d^2\right)}{6\,d^2}$$

例題 3.1.4　箱形浮体の安定性

箱形浮体の安定性について調べる。浮体の幅：B、喫水：d とする。水線面と浮体の中心線の交点を中心に傾斜させると新たに水につかる部分と水から出る部分の浮力増減が無いので、浮力が変化しないで傾斜する。

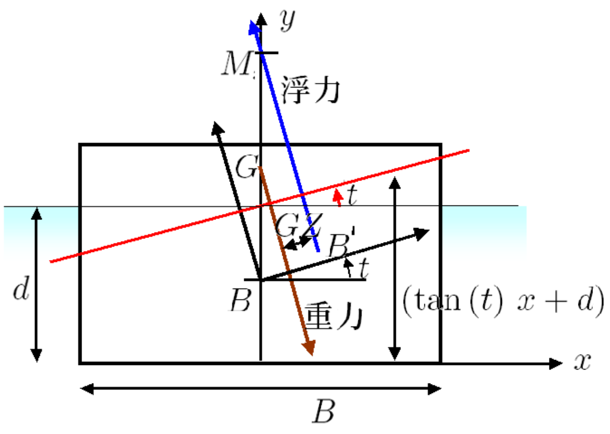


図 3.1.4: 箱形浮体の安定性

```
/* 箱形浮体の安定性 */
kill(all);
BK1:dx*d;
BK11:A[1]=integrate(BK1/dx,x,-B/2,B/2);
integrate(BK1/dx*x,x,-B/2,B/2);
BK12:x[c1]=%/rhs(BK11);
integrate(BK1/dx*(-d/2),x,-B/2,B/2);
BK13:y[c1]=%/rhs(BK11);
BK2:dx*(d+x*tan(t));
A[2]='integrate((BK2/dx),x,-B/2,B/2);
BK21:expand(ev(%,integrate));
M[x]='integrate(BK2/dx*x,x,-B/2,B/2);
expand(ev(%,integrate));
BK22:x[c2]=factor(rhs(%)/rhs(BK21));
M[y]='integrate(BK2/dx*(d+x*tan(t))/2,x,
  -B/2,B/2);
ev(%,integrate);
y[c2]=factor(rhs(%)/rhs(BK21));
BK23:y[c3]=factor(rhs(%)-d/2);
BK3:x[cd]=rhs(BK22)*cos(t)+rhs(BK23)
 *sin(t);
BK4:GZ=rhs(BK3)-BG*sin(t);
rhs(BK4)=0;
trigsimp(solve(%,BG)[1]);
BG<rhs(%);
subst([t=0],%);
```

浮体が傾斜していないときの浮力の中心：B は中心線上で、底面から $d/2$ の位置にある。傾斜したときの水面を図中の赤線で表し、その水面下の面積を求める。x における水面下の高さは $\tan(t)\ x+d$ となり、これを全幅について積分すると下記となる。

$$
\begin{aligned}
A_2 &= \int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} (\tan(t)\ x+d)\,dx \\
&= d\,B
\end{aligned}
$$

同様に、y 軸まわりのモーメント：M_x、傾斜したときの浮心：B' の x 座標：x_{c2} は下記となる。

$$
\begin{aligned}
M_x &= \int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} x\ (\tan(t)\ x+d)\,dx \\
&= \frac{\tan(t)\ B^3}{12}
\end{aligned}
$$

$$
x_{c2} = \frac{\tan(t)\ B^2}{12\,d}
$$

同様に、x 軸まわりのモーメント：M_y、傾斜したときの浮心：B' の y 座標：y_{c2} は下記となる。

$$
M_y = \frac{\int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} (\tan(t)\ x+d)^2 dx}{2}
$$

$$
y_{c2} = \frac{\tan(t)^2\ B^2 + 12\,d^2}{24\,d}
$$

傾斜していないときの浮心：B を新しい座標の中心に選ぶと、B' の y 座標：y_{c3} は、

$$
y_{c3} = \frac{\tan(t)^2\ B^2}{24\,d}
$$

この傾斜した浮体の浮心座標を B を中心に θ だけ傾斜した座標に変換し、その x 座標：X_{cd} は、下記となる。

$$
x_{cd} = \frac{\sin(t)\ \tan(t)^2\ B^2}{24\,d} + \frac{\cos(t)\ \tan(t)\ B^2}{12\,d}
$$

浮体の重力と浮力による復原モーメントのレバー：GZ は、浮心からの重心高さ：BG を考慮し次式となる。

$$
\begin{aligned}
GZ &= -\sin(t)\ BG + x_{cd} \\
&= -\sin(t)\ BG + \frac{\sin(t)\ \tan(t)^2\ B^2}{24\,d} \\
&\quad + \frac{\cos(t)\ \tan(t)\ B^2}{12\,d}
\end{aligned}
$$

復原モーメントのレバー：GZ が零となる BG は、

$$
BG = \frac{\left(\cos(t)^2+1\right)\ B^2}{24\,d\cos(t)^2}
$$

浮体が安定となる条件は下記となる。

$$
BG < \frac{\left(\cos(t)^2+1\right)\ B^2}{24\,d\cos(t)^2}
$$

鉛直近傍：$t \approx 0$ での安定となる条件は下記となる。

$$
BG < \frac{B^2}{12\,d}
$$

この GZ 曲線は下記となる。

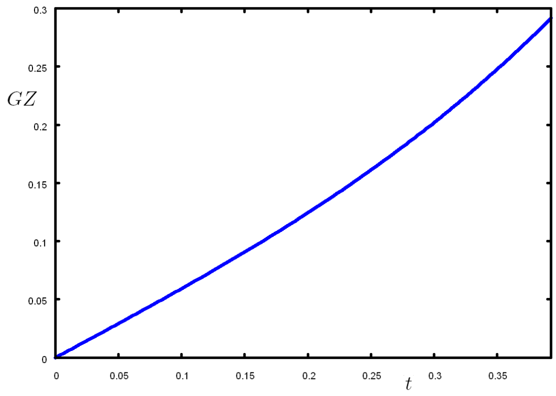


図 3.1.5: GZ 曲線

```
/* 浮体の安定性（GZ 曲線）*/
B:5;
d:1;
BG:1.5;
plot2d(rhs(BK4),[t,0,%pi/8]);
```

```
/* 浮体の安定性（微少傾斜角）*/
DM1:(2/3*B/2)*(B/2*B/2*dt/2)*2;
DI1:dI=DM1/dt;
DM2:dI*dt;
DA1:dV=B*d;
BB1:BBd=DM2/dV;
BM1:BBd=BM*dt;
subst([BB1],%);
solve(%,BM)[1];
subst([DI1,DA1],%);
BG<rhs(%);
```

微小傾斜角での安定性について検討する。新たに水につかる部分の三角形面積は $B/2 \cdot B/2 \cdot dt/2$、中心線からの面積中心までの距離は $2/3 \cdot B/2$ から、新たに水につかる部分と水から出る部分のモーメントは

$$\frac{dt\, B^3}{12}$$

となる。単位幅の慣性モーメント：dI、体積：dV は

$$dI = \frac{B^3}{12} \qquad dV = d\, B$$

ここで傾斜したときの浮心 B' から浮力線が中心線と交わる転をメタセンター：M とする。このとき下記の関係が得られる。

$$BB' = \frac{dt\, dI}{dV} \qquad BB' = dt\, BM \qquad BM = \frac{dI}{dV}$$

以上から、一般的な船舶では、この式を船長方向に積分することにより、浮心：B からメタセンター：M までの距離：BM が得られる。

$$BM = \frac{\int dIdz}{\int dVdz}$$

箱船の場合には上記と同じ下記の式が得られる。

$$BM = \frac{B^2}{12\, d} \qquad BG < \frac{B^2}{12\, d}$$

3.2 動座標系

例題 3.2.1 直線加速中のタンクの水面

水が入ったタンクを一定加速度：α で加速する。このときの液面の傾き：ϕ を求める。

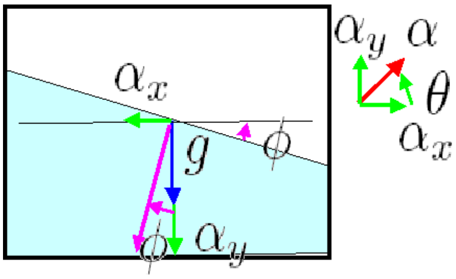


図 3.2.1: 直線加速中のタンクの水面

```
/* 直線加速中のタンクの水面 */
kill(all);
ALX:\alpha[x]=-\alpha*cos(\theta);
ALY:\alpha[y]=-\alpha*sin(\theta);
\phi=atan(rhs(ALX)/(rhs(ALY)-g));
```

単位質量に作用する力は、タンクに与えた加速度と重力が作用する。加速度成分を XY 座標に分けると、

$$\alpha_x = -\alpha\cos(\theta)$$

$$\alpha_y = -\alpha\sin(\theta)$$

図から、液面の傾きは下記となる。

$$\phi = -\arctan\left(\frac{\alpha\cos(\theta)}{-\alpha\sin(\theta)-g}\right)$$

例題 3.2.2 回転する水の水面

鉛直軸まわりを角速度：Ω で液を回転させる。このときの液面の形状を求める。

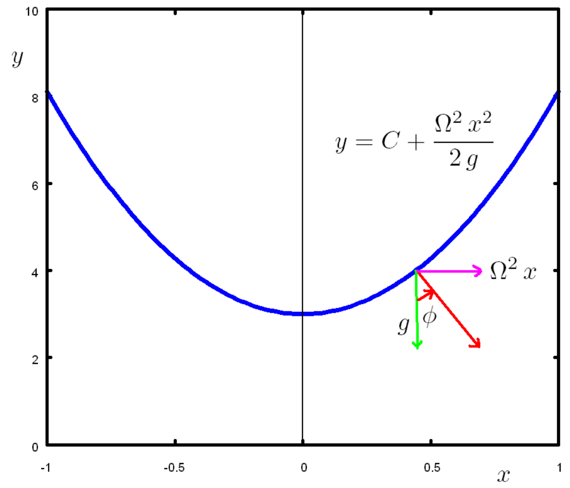


図 3.2.2: 回転する水の水面

```
/* 回転する水の水面 */
kill(all);
ALX:\alpha[x]=x*\Omega^2;
ALY:\alpha[y]=-g;
tan(\phi)=-rhs(ALX)/rhs(ALY);
subst([tan(\phi)=dy/dx],%);
'integrate(denom(rhs(%)),y)
  ='integrate(num(rhs(%)),x)+C;
ev(%,integrate);
expand(solve(%,y)[1]);
EQ1:expand(subst([C=C*g],%));
C:3;
g:9.8;
\Omega:10;
plot2d(rhs(EQ1),[x,-1,1],[y,0,10]);
```

(2.7.6) 式、(28 ページ) から単位質量あたりの見かけの体積力は下記となる。

$$\alpha_x = \Omega^2 x \qquad \alpha_y = -g$$

見かけの体積力の合力の傾き:ϕ は下記となる。$tan(\phi) = dy/dx$ から、

$$\tan(\phi) = \frac{dy}{dx} = \frac{\Omega^2 x}{g}$$

これを積分すると、

$$g\,y = C + \Omega^2\int x dx$$

以上から液面の形状は

$$y = C + \frac{\Omega^2 x^2}{2\,g}$$

例題 3.2.3　回転する U 字管の水位

下図のように U 字管の端：1 を鉛直軸まわりに角速度：Ω で U 字管を回転させる。このときの U 字管の液面差を求める。

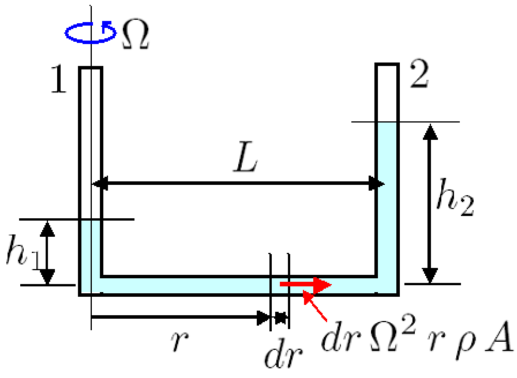


図 3.2.3: 回転する U 字管の水位

```
/* 回転する U 字管の水位 */
kill(all);
load("vect")
depends(p,[r]);
EQR1:diff(p,r,1)*dr*A=\rho*A*dr*r*\Omega^2;
EQR1/dr/A;
'integrate(1,p)='integrate(rhs(%),r,0,L);
EQP1:ev(%,integrate);
EQP2:\rho*g*h[1]+rhs(%)=\rho*g*h[2];
expand(%/\rho/g);
expand(%-h[1]);
```

(2.7.6) 式、(28 ページ) の単位質量あたりの見かけの体積力から、微小幅：dr に作用する力は下記となる。

$$dr\left(\frac{d}{d\,r}\,p\right)\,A = dr\,\Omega^2\,r\,\rho\,A$$

整理すると、

$$\frac{d}{d\,r}\,p = \Omega^2\,r\,\rho$$

積分すると、回転によって生じる圧力差は、

$$p = \Omega^2\int_0^L r dr\,\rho = \frac{\Omega^2\,\rho\,L^2}{2}$$

U 字管の端：2 の下端の位置の圧力は、

$$\frac{\Omega^2\,\rho\,L^2}{2} + h_1\,g\,\rho = h_2\,g\,\rho$$

U 字管の液面差は、

$$h_2 - h_1 = \frac{\Omega^2\,L^2}{2\,g}$$

3.3　気体の特性

例題 3.3.1　大気の圧力と高度の関係（温度一定）

大気の温度が変わらないとして、大気の圧力：$p(z)$ と高度：z の関係を求める。

```
/* 大気圧と高度の関係 (1) */
p(z)/\rho=p[0]/\rho[0];
RH1:solve(%,\rho)[1];
EQRH1:diff(p(z),z,1)=-\rho*g;
EQRH2:subst([RH1],%);
atvalue(p(z),z=0,p[0]);
desolve(EQRH2,p(z));
```

気体の状態式から、温度一定の場合、(2.1.5) 式、（15 ページ）から、圧力：$p(z)$ と密度：ρ の関係は次式となる。ここで地表：$z = 0$ の圧力：p_0 と密度：ρ_0 とする。

$$\frac{\mathrm{p}\,(z)}{\rho} = \frac{p_0}{\rho_0} \qquad \rho = \frac{\rho_0}{p_0}\,p(z)$$

流体の力学的平衡の (2.1.1) 式、（14 ページ）に上式を代入して ρ を消去し、下記の微分方程式を得る。

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\,z}\,\mathrm{p}\,(z) &= -g\,\rho\\ &= -\frac{\rho_0\,g\,\mathrm{p}\,(z)}{p_0}\end{aligned}$$

上式を初期条件：地表 $z = 0$、圧力：p_0 で解くと、

$$\mathrm{p}\,(z) = p_0\,e^{-\frac{\rho_0\,g\,z}{p_0}}$$

例題 3.3.2　大気の圧力と高度の関係（対流圏）

対流圏では高度に比例して温度が低下していく。このときの大気の圧力：$p(z)$ と高度：z の関係を求める。

```
/* 大気圧と高度の関係（2）*/
TH2:T=T[0]-a*z;
p(z)/\rho=R[M]*T;
solve(%,\rho)[1];
RHT2:subst([TH2],%);
EQRHT2:subst([RHT2],EQRH1);
desolve(EQRHT2,p(z));
ANSRHT1:integrate(1/p(z),p(z));
ANSRHT2:integrate(rhs(EQRHT2)/p(z),z);
ANSRHT3:%e^ANSRHT1=radcan(%e^ANSRHT2)+C;
subst([p(z)=p[0]],%);
subst([z=0],%);
solve(%,C)[1];
subst([%],ANSRHT3);
```

対流圏での高度と温度（絶対温度）: T の関係は次式となる。ここで、地表の温度：T_0、比例係数：a とする。

$$T = T_0 - a\,z$$

気体の状態式から、(2.1.5) 式、（15 ページ）から、圧力と密度の関係は次式となる。ここで R_M は気体定数と 1 モルの質量の比を表す。

$$\frac{\mathrm{p}(z)}{\rho} = R_M\,T$$

上式から、

$$\rho = \frac{\mathrm{p}(z)}{(T_0 - a\,z)\;R_M}$$

流体の力学的平衡の (2.1.1) 式、（14 ページ）に上式を代入して下記の微分方程式を得る。

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\,z}\,\mathrm{p}(z) &= -\rho g\\ &= -\frac{g\,\mathrm{p}(z)}{(T_0 - a\,z)\;R_M}\end{aligned}$$

desolve 関数では解けなかったので、上式を下記のように変形し、

$$\frac{1}{p(z)}\,dp(z) = -\frac{g\,dz}{(T_0 - a\,z)\;R_M}$$

左辺を積分すると、

$$\int \frac{1}{\mathrm{p}(z)}d\mathrm{p}(z) = \log(\mathrm{p}(z))$$

右辺を積分すると、

$$-\frac{g\int \frac{1}{T_0 - a\,z}dz}{R_M} = \frac{g\log(T_0 - a\,z)}{a\,R_M}$$

上両式の指数を取り、積分定数を考慮すると、

$$\mathrm{p}(z) = C + (T_0 - a\,z)^{\frac{g}{a\,R_M}}$$

初期条件：地表：$z = 0$ で圧力：p_0 のもとで、積分定数：C を求めると、大気の圧力と高度の関係式は、

$$\mathrm{p}(z) = (T_0 - a\,z)^{\frac{g}{a\,R_M}} - T_0^{\frac{g}{a\,R_M}} + p_0$$

第4章　Bernoulliの定理

4.1　タンクの穴からの噴出

例題 4.1.1　Torricelli の定理

タンクの液体が側壁の穴から噴出する流速を求める。

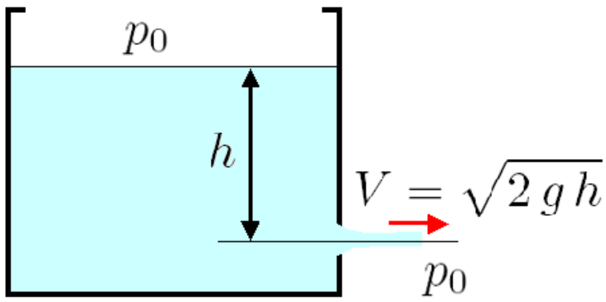


図 4.1.1: Torricelli の定理

```
/* トリチェリ (Torricelli) の定理 */
kill(all);
EQB2:p[0]/\rho+g*h=V^2/2+p[0]/\rho;
V1:rootscontract(solve(%,V)[2]);
```

大気圧 : p_0、穴から液面までの高さ : h、重力加速度 : g、穴から液体が噴出し定常になった流速 : V とする。ここで、タンクの液面は十分広く、液体が流出することによる液面高さの変化は小さいとする。液面の位置および噴流が定常になった位置で Bernoulli の定理 : (2.8.4) 式、(30 ページ) を適用する。液面では流速は零である。また、噴流位置での圧力は外界圧力 : P_0 に等しくなる。以上のことから式にまとめると下記となる。

$$\frac{p_0}{\rho} + g\,h = \frac{V^2}{2} + \frac{p_0}{\rho}$$

上式から流速を求めると、

$$V = \sqrt{2\,g\,h} \tag{4.1.1}$$

例題 4.1.2　くびれ係数

タンクの液体が側壁の穴から噴出する流れにおいて、噴流が徐々に絞られ定常になった位置での噴流の断面積と穴の面積の比 : くびれ係数 α を求める。

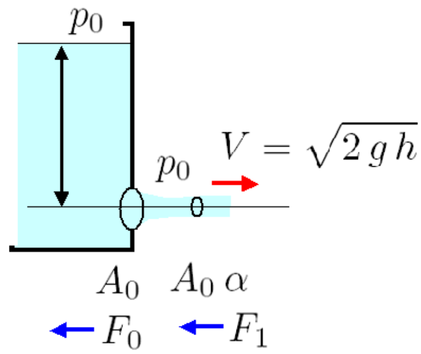


図 4.1.2: くびれ係数

```
/* くびれ係数 */
Q1:Q=A[0]*\alpha*rhs(V1);
MAS:M=\rho*rhs(Q1)*dt;
MOM:F[1]*dt=rhs(MAS)*rhs(V1);
F1:solve(MOM,F[1])[1];
F0:F[0]=A[0]*(\rho*g*h);
EQF:rhs(F1)=rhs(F0);
solve(EQF,\alpha)[1];
```

噴流の流量は流速 × 断面積から Torricelli の定理を使って下記となる。ここで穴の断面積 : A_0、流量 : Q、大気圧 : p_0、穴から液面までの高さ : h、重力加速度 : g とする。また、時間 : dt 間に流れる質量 : M は、

$$Q = A_0\,\alpha\,\sqrt{2\,g\,h} \qquad M = A_0\,\alpha\,dt\,\sqrt{2\,g\,h}\,\rho$$

噴流によりタンクに作用する反力 : F_1 は運動量変化から、一方、タンクでは穴の部分で圧力が作用しないので、その分の力 : F_0 で押されるので、

$$F_1\,dt = 2\,A_0\,\alpha\,dt\,g\,h\,\rho \qquad F_0 = A_0\,g\,h\,\rho$$

上記の両力 : F_0、F_1 は等しいとして、くびれ係数 α は、

$$\alpha = \frac{1}{2}$$

観測結果から、平面壁の円穴のくびれ係数 $\alpha \approx 0.6$ である。

例題 4.1.3　円管より鉛直落下する水

出口が鉛直下方に向いた円管から鉛直落下する水の落下速度などを求める。

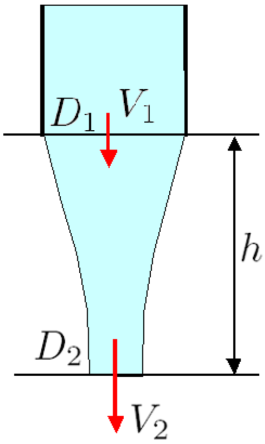


図 4.1.3: 円管より鉛直落下する水

```
/* 円管より鉛直落下する水 */
kill(all);
EQB1:p[0]/\rho+V[1]^2/2+g*h=V[2]^2/2
  +p[0]/\rho;
ANS1:solve(%,V[2])[2];
EQC1:V[1]*%pi*D[1]^2/4=V[2]*%pi*D[2]^2/4;
subst([ANS1],%);
solve(%,D[2])[2];
```

円管出口の直径 : D_1、流速 : V_1 とする。出口より下方 : h における水の流速 : V_2、直径 : D_2 とする。円管出口および出口より下方 : h の位置で Bernoulli の定理 : (2.8.4) 式、(30 ページ) を適用する。

$$\frac{p_0}{\rho}+g\,h+\frac{V_1^2}{2}=\frac{p_0}{\rho}+\frac{V_2^2}{2}$$

出口より下方 : h における水の流速は、

$$V_2=\sqrt{2\,g\,h+V_1^2}$$

円管出口および出口より下方 : h の位置で流量が等しいとして、

$$\frac{\pi\,D_1^2\,V_1}{4}=\frac{\pi\,D_2^2\,V_2}{4}$$

出口より下方 : h における水の流速を上式に代入し、出口より下方 : h の直径は、

$$D_2=\frac{D_1\,\sqrt{V_1}}{\left(2\,g\,h+V_1^2\right)^{\frac{1}{4}}}$$

例題 4.1.4　円管より斜め上方へ放出した水

円管より斜め上方へ放出した水の最高高さなどを求める。

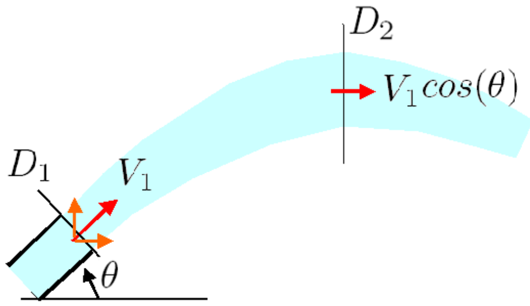


図 4.1.4: 円管より鉛直落下する水

```
/* 円管より斜め上方へ放出した水 */
kill(all);
EQB1:p[0]/\rho+V[1]^2/2
  =(V[1]*cos(\theta))^2/2+p[0]/\rho+g*h;
ANS1:factor(solve(%,h)[1]);
EQC1:V[1]*%pi*D[1]^2/4=(V[1]*cos(\theta))
  *%pi*D[2]^2/4;
solve(%,D[2])[2];
```

円管出口の直径 : D_1、流速 : V_1 とする。水平より角度 : θ で斜め上方へ水を放出する。放出した水の最高高さ : h では、水の流速 : V_2 は初期流速 : V_1 の $cos(\theta)$ で水平方向である。最高高さでの水の直径 : D_2 とする。円管出口および最高高さで Bernoulli の定理 : (2.8.4) 式、(30 ページ) を適用する。

$$\frac{p_0}{\rho}+\frac{V_1^2}{2}=\frac{V_1^2\cos\left(\theta\right)^2}{2}+\frac{p_0}{\rho}+g\,h$$

上式から放出した水の最高高さ : h を求めると、

$$h=-\frac{V_1^2\,\left(\cos\left(\theta\right)-1\right)\,\left(\cos\left(\theta\right)+1\right)}{2\,g}$$

円管出口および最高高さで流量が等しいとして、

$$\frac{\pi\,D_1^2\,V_1}{4}=\frac{\pi\,V_1\,D_2^2\cos\left(\theta\right)}{4}$$

上式から最高高さでの水の直径 : D_2 は、

$$D_2=D_1\,\sqrt{\frac{1}{\cos\left(\theta\right)}}$$

例題 4.1.5 側壁の穴からの噴出（液面積影響）

Torricelli の定理では液面が十分広いと仮定した。ここでは液面積の噴出流速への影響について調べる。

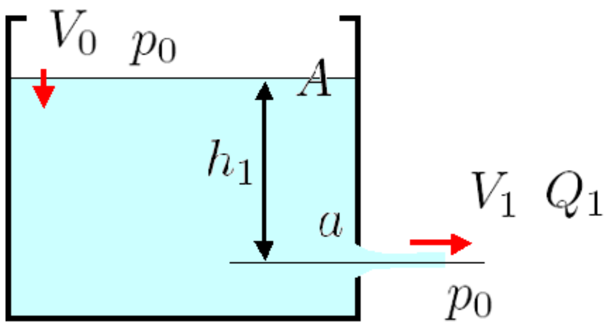


図 4.1.5: 側壁の穴からの噴出（液面積影響）

```
kill(all);
/* 液面積影響 */
EQB1:p[0]/\rho+g*h[1]+V[0]^2/2=V[1]^2/2
  +p[0]/\rho;
EQC1:V[0]*A=V[1]*a*\alpha;
solve(%,V[0])[1];
subst([%],EQB1);
ANS1:rootscontract(solve(%,V[1])[2]);
Q[1]=a*\alpha*rhs(ANS1);
ANS10:rootscontract(limit(rhs(ANS1),A,inf)
 );
Q[1]=a*\alpha*rhs(ANS10);
h[1]:0.5;
g:1;
a:1;
\alpha:0.6;
plot2d(rhs(ANS1),[A,1,10]);
```

大気圧：p_0、穴から液面までの高さ：h_1、重力加速度：g、液面の面積：A、穴の面積：a、くびれ係数：α、液面の下降速度：V_0、穴から液体が噴出し定常になった流速：V_1、流量：Q_1 とする。液面の位置および噴流が定常になった位置で Bernoulli の定理：(2.8.4) 式、(30 ページ) を適用する。

$$\frac{p_0}{\rho}+h_1\,g+\frac{V_0^2}{2}=\frac{p_0}{\rho}+\frac{V_1^2}{2}$$

両点における流量は等しく、

$$V_0\,A=V_1\,a\,\alpha$$

上記の二式から

$$V_1=A\sqrt{\frac{2\,h_1\,g}{A^2-a^2\,\alpha^2}}$$

$$Q_1=a\,\alpha\,A\sqrt{\frac{2\,h_1\,g}{A^2-a^2\,\alpha^2}}$$

液面積と流速の関係を下図に示す。液面積が有限の場合の流速はには、Torricelli の定理による流速より早い。また、液面の面積を無限大にすると流速は下記となり、

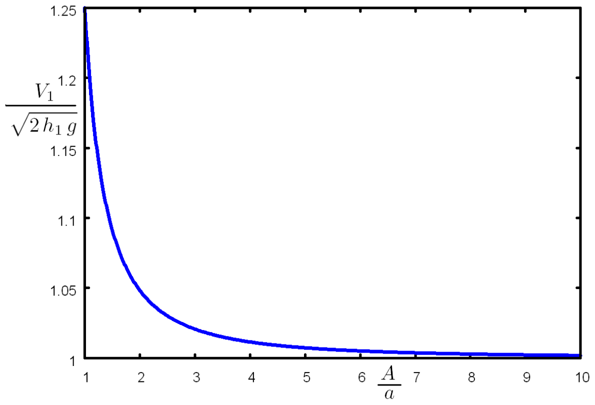


図 4.1.6: 液面積と流速の関係

Torricelli の定理と同じになる。

$$\lim_{A\to\infty}V_1=\sqrt{2\,h_1\,g}$$

例題 4.1.6 側壁の穴からの噴出水の到達距離

Torricelli の定理から、噴出水の到達距離を求める。

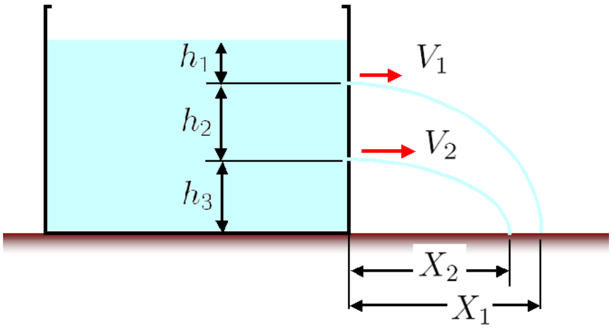


図 4.1.7: 側壁の穴からの噴出（液面積影響）

```
kill(all);
ANS10:V[1]=sqrt(2*g*h[1]);
ANS20:subst([V[1]=V[2],h[1]=h[1]+h[2]],
  ANS10);
EQD1:diff(x(t),t,1)=V;
EQD2:diff(y(t),t,2)=g;
atvalue(x(t),t=0,0);
atvalue(y(t),t=0,0);
atvalue(diff(y(t),t,1),t=0,0);
assume(x(t)>0);
assume(y(t)>0);
ANSD1:desolve(EQD1,x(t));
ANSD2:desolve(EQD2,y(t));
solve(ANSD1,t)[1];
lhs(ANSD2)=subst([%],rhs(ANSD2));
ANSD3:rootscontract(solve(%,x(t))[2]);
ANSL1:factor(rootscontract(subst([x(t)=X[1]
 ,y(t)=h[2]+h[3],V=rhs(ANS10)],ANSD3)));
ANSL2:factor(rootscontract(subst([x(t)=X[2]
 ,y(t)=h[3],V=rhs(ANS20)],ANSD3)));
```

Torricelli の定理：(4.1.1) 式、(46 ページ) から、液面から h_1 および h_2+h_1 の噴出流速：V_1,V_2 は下記となる。ここで g：重力加速度とする。

$$V_1=\sqrt{2}\sqrt{h_1\,g}$$

$$V_2=\sqrt{2}\sqrt{\left(h_2+h_1\right)\,g}$$

噴出水の軌跡は、速度 : V で水平方向に放出された質点の軌跡で表すことができる。運動方程式は下記となる。ここで、$x(t)$: 水平距離、$y(t)$: 鉛直距離、t : 時間とする。

$$\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{x}\left(t\right)=V$$

$$\frac{d^2}{d\,t^2}\,\mathrm{y}\left(t\right)=g$$

微分方程式を解くと、

$$\mathrm{x}\left(t\right)=t\,V$$

$$\mathrm{y}\left(t\right)=\frac{g\,t^2}{2}$$

軌跡は下記となり、

$$\mathrm{y}\left(t\right)=\frac{g\,\mathrm{x}\left(t\right)^2}{2\,V^2}$$

$$\mathrm{x}\left(t\right)=\sqrt{\frac{2\,\mathrm{y}\left(t\right)}{g}}\,V$$

上式に、流速、垂直距離を代入すると噴出水の上位の到達距離：X_1、下位の到達距離：X_2 が次式で得られる。

$$X_1=2\sqrt{h_1\,\left(h_3+h_2\right)}$$

$$X_2=2\sqrt{\left(h_2+h_1\right)\,h_3}$$

ここで $h_1=h_3$ とすると、上下位置の到達距離は同じになる。

例題 4.1.7　柱状タンクの下端からの流出（液位と時間）

柱状タンク（液面積：A）の下端にある穴（面積：a）から液が流出する。このときの液位と時間の関係について調べる。

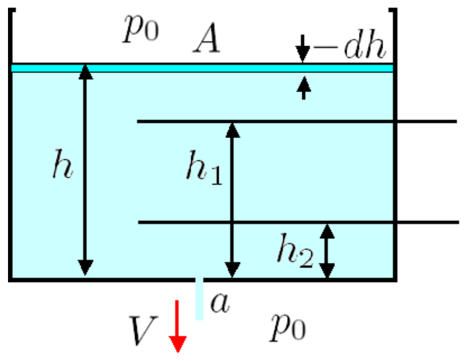


図 4.1.8: 柱状タンクの下端からの流出

```
/* 柱状タンクの水位と時間 */
kill(all);
EQB1:p[0]/\rho+g*h=V^2/2+p[0]/\rho;
ANS1:solve(%,V)[2];
Q1:\alpha*a*rhs(ANS1)*dt;
Q2:-A*dh;
EQQ1:Q1=Q2;
EQQ2:lhs(EQQ1)/dt;
EQQ3:EQQ1/EQQ2;
assume(h[1]>0);
assume(h[2]>0);
assume((h[2]-h[1])>0);
'integrate(lhs(EQQ3)/dt,t)
  ='integrate(rhs(EQQ3)/dh,h,h[1],h[2]);
factor(ev(%,integrate));
```

タンク液面の位置および下端からの流出位置で Bernoulli の定理：(2.8.4) 式、(30 ページ) を適用する。大気圧：p_0、流出速度：V、くびれ係数：α、底面から液面までの高さ：h とすると、流出速度は、

$$\frac{p_0}{\rho}+g\,h=\frac{V^2}{2}+\frac{p_0}{\rho} \quad V=\sqrt{2}\sqrt{g\,h}$$

時間：dt 間に流出する体積は
下端の流出速度から $\sqrt{2}\,a\,\alpha\,dt\,\sqrt{g\,h}$、
液面の低下量：$-dh$ から $-dh\,A$
となり次の式が得られる。

$$\sqrt{2}\,a\,\alpha\,dt\,\sqrt{g\,h}=-dh\,A$$

整理して、

$$dt=-\frac{dh\,A}{\sqrt{2}\,a\,\alpha\,\sqrt{g\,h}}$$

液位が h_1 から h_2 までになる時間：t は上式を積分して、

$$\begin{aligned}t&=-\frac{\int_{h_1}^{h_2}\frac{1}{\sqrt{g\,h}}dh\,A}{\sqrt{2}\,a\,\alpha}\\&=-\frac{\sqrt{2}\,\left(\sqrt{h_2}-\sqrt{h_1}\right)\,A}{a\,\alpha\,\sqrt{g}}\end{aligned}$$

例題 4.1.8　半球タンクの下端からの流出（液位と時間）

半径：R の半球の下端にある穴（面積：a）から液が流出する。このときの液位と時間の関係について調べる。

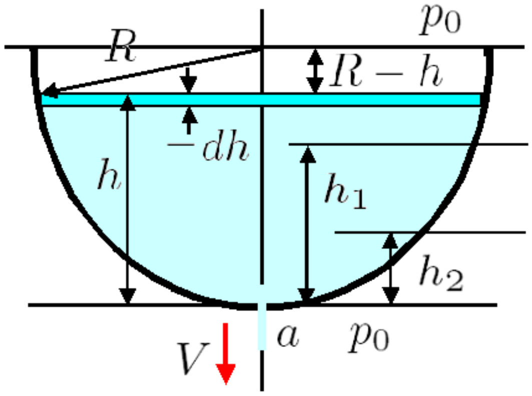


図 4.1.9: 半球タンクの下端からの流出

```
/* 半球タンクの水位と時間 */
kill(all);
EQB1:p[0]/\rho+g*h=V^2/2+p[0]/\rho;
ANS1:solve(%,V)[2];
Q1:\alpha*a*rhs(ANS1)*dt;
R1:sqrt(R^2-(R-h)^2);
A1:%pi*R1^2;
Q2:-A1*dh;
EQQ1:Q1=Q2;
EQQ2:lhs(EQQ1)/dt;
EQQ3:EQQ1/EQQ2;
assume(h[1]>0);
assume(h[2]>0);
assume((h[2]-h[1])>0);
'integrate(lhs(EQQ3)/dt,t)
  ='integrate(rhs(EQQ3)/dh,h,h[1],h[2]);
partfrac(ev(%,integrate),R);
```

タンク液面の位置および下端からの流出位置で Bernoulli の定理：(2.8.4) 式、(30 ページ) を適用する。大気圧：p_0、流出速度：V、くびれ係数：α、底面から液面までの高さ：h とすると、流出速度は、

$$\frac{p_0}{\rho}+g\,h=\frac{V^2}{2}+\frac{p_0}{\rho}$$

$$V=\sqrt{2}\,\sqrt{g\,h}$$

時間：dt 間に下端から流出する体積は

$$\sqrt{2}\,a\,\alpha\,dt\,\sqrt{g\,h}$$

液面の低下量：$-dh$ から流出する体積は

$$-\pi\,dh\,\left(R^2-(R-h)^2\right)$$

両者を等しいと置き、整理すると、

$$dt=-\frac{\pi\,dh\,\left(R^2-(R-h)^2\right)}{\sqrt{2}\,a\,\alpha\,\sqrt{g\,h}}$$

液位が h_1 から h_2 までになる時間：t は上式を積分して、

$$\begin{aligned}t&=-\frac{\pi\,\int_{h_1}^{h_2}\frac{R^2-(R-h)^2}{\sqrt{g\,h}}dh}{\sqrt{2}\,a\,\alpha}\\&=-\frac{\left(20\,\pi\,h_2^{\frac{3}{2}}-20\,\pi\,h_1^{\frac{3}{2}}\right)\,R-6\,\pi\,h_2^{\frac{5}{2}}+6\,\pi\,h_1^{\frac{5}{2}}}{15\,\sqrt{2}\,a\,\alpha\,\sqrt{g}}\end{aligned}$$

例題 4.1.9　水時計

水を入れた容器の下の小さな穴から水が流出し、水面の降下速度が一定な水時計について考える。容器は底から水面の高さ：$h(t)$ で、半径：$r(h)$ の回転対称であるとする。

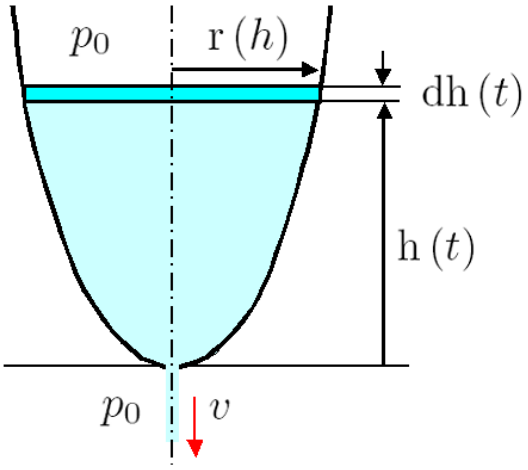


図 4.1.10: 水時計

```
kill(all);
/* 水時計 */
EQA1:p[0]/\rho+g*h(t)=v^2/2+p[0]/\rho;
EQB1:dV=\alpha*A*v*dt;
EQC1:dV=\pi*r(h)^2*dh(t);
ANSA1:solve(EQA1,v);
ANSA11:ANSA1[2];
ANSB1:rhs(EQB1)=rhs(EQC1);
ANSB2:subst([dh(t)=diff(h(t),t,1),dt=1],%);
ANSB3:subst([ANSA11,diff(h(t),t,1)=C],%);
ANSB4:solve(%,r(h))[2];
```

タンク液面の位置および下端からの流出位置で Bernoulli の定理：(2.8.4) 式、(30 ページ) を適用する。大気圧：p_0、流出速度：v、流出孔の断面積：A、くびれ係数：α、底面から液面までの高さ：$h(t)$、大気圧：p_0、密度：ρ、重力加速度：g とすると、

$$g\,\mathrm{h}\,(t)+\frac{p_0}{\rho}=\frac{v^2}{2}+\frac{p_0}{\rho}$$

下端から液体が流出する速度：v は上式から、

$$v=\sqrt{2}\,\sqrt{g\,\mathrm{h}\,(t)}$$

時間：dt 間に下端から流出する体積：dV は、くびれ係数：α を考慮して、

$$dV=\alpha\,dt\,v\,A$$

液面の低下による流出する体積：dV は、

$$dV=\mathrm{r}\,(h)^2\,\pi\,\mathrm{dh}\,(t)$$

上記から、

$$\alpha\,v\,A=\mathrm{r}\,(h)^2\,\pi\,\left(\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{h}\,(t)\right)$$

$\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{h}\,(t)=C$ で水面の降下速度が一定とすると、

$$\sqrt{2}\,\alpha\,\sqrt{g\,\mathrm{h}\,(t)}\,A=\mathrm{r}\,(h)^2\,\pi\,C$$

容器の底から水面の高さ：$h(t)$ と半径：$r(h)$ の関係式は下記となる。

$$\mathrm{r}\,(h)=2^{\frac{1}{4}}\,(g\,\mathrm{h}\,(t))^{\frac{1}{4}}\,\sqrt{\frac{\alpha\,A}{\pi\,C}}$$

例題 4.1.10 下部開口部でつながった二つのタンクの液面変化

液面の面積：A_1 と液面の面積：A_2 が下図のように下部で穴が開いてつながっている。このときの両タンクの液位と時間の関係を求める。

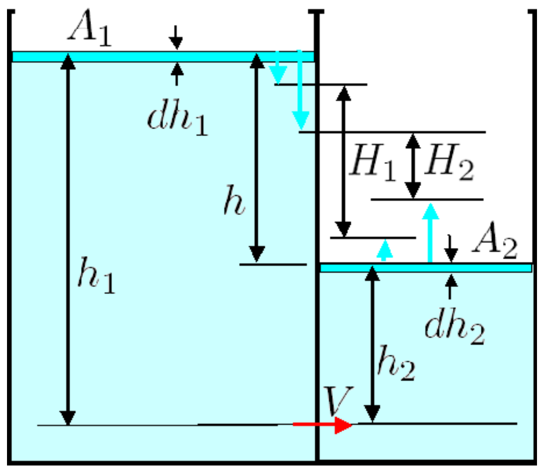


図 4.1.11: 下部開口部でつながった二つのタンクの液面変化

```
/* 下部開口部でつながった二つのタンクの液面変
化 */
kill(all);
BE:p[0]/\rho+g*h[1]=V^2/2+p[0]/\rho+g*h[2];
VV:rootscontract(solve(%,V)[2]);
V1:rootscontract(factor(subst([h[1]=h+h[2]]
 ,VV)));
DQ1:dQ=A[1]*dh[1];
DQ2:dQ=A[2]*dh[2];
DQ3:dQ=V*a*\alpha*dt;
DH:-dh=dh[1]+dh[2];
DQ11:solve(DQ1,dh[1])[1];
DQ21:solve(DQ2,dh[2])[1];
subst([DQ11,DQ21],DH);
EQ1:factor(subst([DQ3,V1],%));
EQ2:EQ1/sqrt(g*h);
assume(H[1]>0);
assume(H[2]>0);
assume((H[1]-H[2])>0);
'integrate(lhs(EQ2)/dh,h,H[1],H[2])
  ='integrate(rhs(EQ2)/dt,t);
ev(%,integrate);
factor(solve(%,t)[1]);
```

タンク 1 の液面の位置およびタンク 2 の穴開口部位置で Bernoulli の定理：(2.8.4) 式、(30 ページ) を適用する。大気圧：p_0、流出速度：V、くびれ係数：α、タンク 1 の底面から液面までの高さ：h_1、タンク 2 の底面から液面までの高さ：h_2 とすると、

$$\frac{p_0}{\rho}+h_1\,g=\frac{V^2}{2}+\frac{p_0}{\rho}+h_2\,g$$

流出速度は下記となり、両液面高さの差：$h=h_1-h_2$ とすると、

$$V=\sqrt{(2\,h_1-2\,h_2)\;g}=\sqrt{2\,g\,h}$$

時間：dt 間に下端から流出する体積：dQ は下記となる。ここで、タンク 1 の液面変化：dh_1、タンク 2 の液面変化：dh_2 とする。

$$dQ=dh_1\,A_1=dh_2\,A_2=a\,\alpha\,dt\,V$$

両液面高さの差を導入し、式を整理すると、

$$-dh=dh_2+dh_1=\frac{dQ}{A_2}+\frac{dQ}{A_1}$$

流出する体積と流出速度の関係式を代入すると、

$$-dh=\frac{\sqrt{2}\;(A_2+A_1)\;a\,\alpha\,dt\,\sqrt{g\,h}}{A_1\,A_2}$$

式を整理し、

$$-\frac{dh}{\sqrt{g\,h}}=\frac{\sqrt{2}\;(A_2+A_1)\;a\,\alpha\,dt}{A_1\,A_2}$$

両辺を積分し、

$$\int_{H_2}^{H_1}\frac{1}{\sqrt{g\,h}}dh=\frac{\sqrt{2}\;(A_2+A_1)\;a\,\alpha\,t}{A_1\,A_2}$$

式を整理すると、

$$t=-\frac{\sqrt{2}\,A_1\,A_2\,\left(\sqrt{H_2}-\sqrt{H_1}\right)}{(A_2+A_1)\;a\,\alpha\,\sqrt{g}}$$

例題 4.1.11　容器につめた気体が小さな穴から噴出

容器につめた気体が小さな穴から噴出する流速：V を求める。容器内の圧力：p_0、温度：T_0、外部圧力：p が与えられているとする。

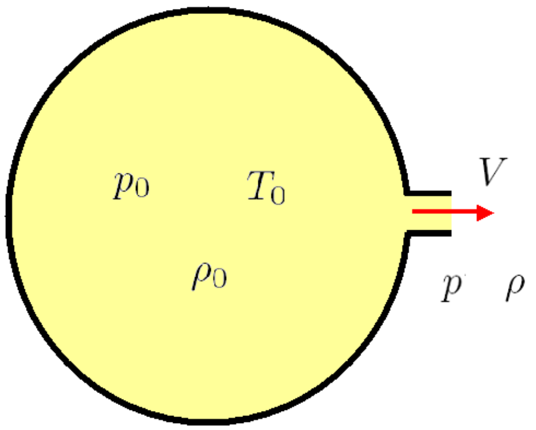


図 4.1.12: 容器につめた気体が小さな穴から噴出

```
/* 容器につめた気体が小さな穴から噴出 */
kill(all);
kill(all);
assume(\gamma>0);
assume(p>0);
assume(p[0]>0);
assume(\rho[0]>0);
EQBE01:(p*\gamma)/(\rho*(\gamma-1))+V^2/2
  =(p[0]*\gamma)/(\rho[0]*(\gamma-1));
EQRHO:p/\rho^\gamma=p[0]/\rho[0]^\gamma;
EQRHO1:solve(EQRHO,\rho)[1];
EQC:p[0]=R/M*\rho[0]*T[0];
EQC1:solve(EQC,\rho[0])[1];
subst([EQC1],EQBE01);
subst([EQRHO1],%);
subst([EQC1],%);
ANSV2:solve(%,V^2)[1];
factor((%));
V^2=(2*T[0]*(1-p[0]^(1/\gamma)*p/(p[0]
  *p^(1/\gamma)))*R*\gamma)/(M*(\gamma-1));
V=rootscontract(sqrt((2*T[0]*R*\gamma)
  /(M*(\gamma-1))))*sqrt(1-p[0]^(1/\gamma)
   *p/(p[0]*p^(1/\gamma)));
```

気体の場合の Bernoulli の定理：(2.8.9) 式、(32 ページ) で、容器内部と噴出部で式をたてると下記となる。ここで噴出部密度：ρ、容器内密度：ρ_0、定圧比熱と定積比熱の比：γ とする。

$$\frac{p\,\gamma}{\rho\,(\gamma-1)}+\frac{V^2}{2}=\frac{p_0\,\gamma}{\rho_0\,(\gamma-1)}$$

ここで必要な噴出部密度：ρ、容器内密度：ρ_0 は与えられていないので、下記から得る。
気体が理想気体で、断熱変化すると仮定する。(2.1.6) 式、(16 ページ) から下記の関係がある。

$$\frac{p}{\rho^\gamma}=\frac{p_0}{\rho_0^\gamma}$$

$$\rho=\frac{\rho_0\,p^{\frac{1}{\gamma}}}{p_0^{\frac{1}{\gamma}}}$$

また、状態方程式から圧力、密度と温度の関係は (2.1.5) 式、(15 ページ) から下記となる。ここで気体定数：R、1 モルの質量：M、容器内温度（絶対温度）：T_0 とする。

$$p_0=\frac{\rho_0\,T_0\,R}{M}$$

$$\rho_0=\frac{p_0\,M}{T_0\,R}$$

気体の場合の Bernoulli の定理に上記二式を代入し噴出速度：V を求めると,

$$V^2=\frac{2\,T_0\left(p_0\,p^{\frac{1}{\gamma}}-p_0^{\frac{1}{\gamma}}\,p\right)\,R\,\gamma}{p_0\,p^{\frac{1}{\gamma}}\,M\,(\gamma-1)}$$

$$V^2=\frac{2\,T_0\left(1-p_0^{\frac{1}{\gamma}-1}\,p^{1-\frac{1}{\gamma}}\right)\,R\,\gamma}{M\,(\gamma-1)}$$

$$V=\sqrt{1-p_0^{\frac{1}{\gamma}-1}\,p^{1-\frac{1}{\gamma}}}\,\sqrt{\frac{2\,T_0\,R\,\gamma}{M\,\gamma-M}}$$

上式から、小さな穴から噴出する流速は容器内外圧力比と容器内温度をあげることで、早くなる。しかし音速以上にはならない。

4.2 管路

例題 4.2.1 ベンチュリ管 (Venturi tube)

下図のベンチュリ管を用いて計測した圧力から流量：Q を求める。

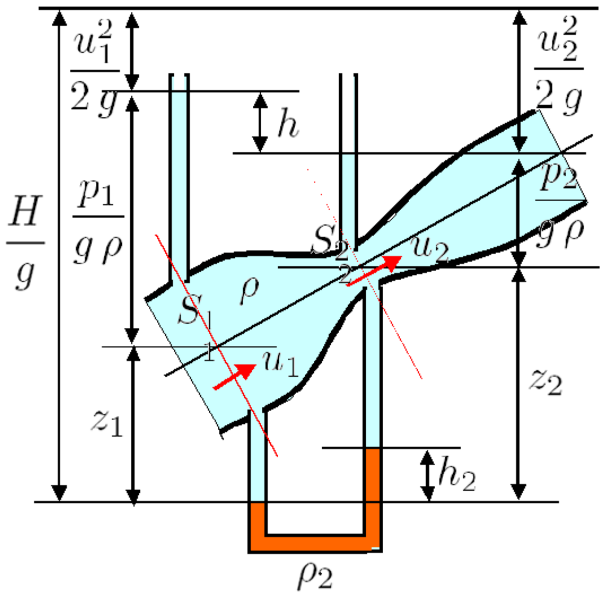


図 4.2.1: ベンチュリ管

```
/* ベンチュリ管 */
kill(all);
Q1:Q=u[1]*S[1];
Q2:Q=u[2]*S[2];
H1:u[1]^2/2+p[1]/\rho+g*z[1]=H;
H2:u[2]^2/2+p[2]/\rho+g*z[2]=H;
expand(H1/g);
expand(H2/g);
EQ1:lhs(H1)=lhs(H2);
subst([Q1],Q2);
U1:solve(%,u[1])[1];
subst([U1],EQ1);
ANS1:factor(solve(%,u[2])[2]);
DH:g*h=(g*z[1]+p[1]/\rho)-(g*z[2]
   +p[2]/\rho);
DH1:solve(DH,z[1])[1];
ANS2:factor(subst([DH1],ANS1));
subst([ANS2],Q2);
```

ベンチュリ管における場所 1 における断面積：S_1、流速：u_1、圧力：p_1 とし、場所 2 における断面積：S_2、流速：u_2、圧力：p_2、液体の密度：ρ とする。流量は下記の関係となる。

$$Q = u_1\,S_1 \qquad Q = u_2\,S_2$$

Bernoulli の定理：(2.8.4) 式、(30 ページ) でベンチュリ管の場所 1 と場所 2 について

$$\frac{p_1}{\rho} + z_1\,g + \frac{u_1^2}{2} = H \qquad \frac{p_2}{\rho} + z_2\,g + \frac{u_2^2}{2} = H$$

両式を重量加速度：g で割ると、液柱となり、損失がないとすると各項は図のような関係となる。

$$\frac{p_1}{g\,\rho} + \frac{u_1^2}{2\,g} + z_1 = \frac{H}{g} \qquad \frac{p_2}{g\,\rho} + \frac{u_2^2}{2\,g} + z_2 = \frac{H}{g}$$

上方に解放した圧力指示管で場所 1 と場所 2 の指示の差：h とすると、

$$g\,h = -\frac{p_2}{\rho} + \frac{p_1}{\rho} - z_2\,g + z_1\,g$$

上式を Bernoulli の定理の式に代入し、u_2 を求めると、

$$u_2 = \sqrt{2}\,S_1\sqrt{-\frac{g\,h}{S_2^2 - S_1^2}}$$

上式から流量は、

$$Q = \sqrt{2}\,S_1\,S_2\sqrt{-\frac{g\,h}{S_2^2 - S_1^2}}$$

```
EQ3:p[1]+\rho*g*z[1]=p[2]+\rho*g*(z[2]-h[2]
 )+\rho[2]*g*h[2];
Z1:solve(EQ3,z[1])[1];
subst([U1,Z1],EQ1);
ANS3:factor(solve(%,u[2])[2]);
subst([ANS3],Q2);
```

場所 1 と場所 2 をつないだ図下のマノメータでは、場所 1 の指示高さを基準位置とする。マノメータの指示差：h_2、マノメータで使用する液体の密度：ρ_2 とする。この位置における場所 1 および場所 2 の圧力を求め、圧力が等しいとすると、

$$z_1\,g\,\rho + p_1 = (z_2 - h_2)\,g\,\rho + h_2\,\rho_2\,g + p_2$$

上式を Bernoulli の定理の式に代入し、u_2 を求めると、

$$u_2 = \sqrt{2}\,S_1\sqrt{\frac{h_2\,g\,(\rho - \rho_2)}{(S_2^2 - S_1^2)\,\rho}}$$

上式から流量は、

$$Q = \sqrt{2}\,S_1\,S_2\sqrt{\frac{h_2\,g\,(\rho - \rho_2)}{(S_2^2 - S_1^2)\,\rho}}$$

例題 4.2.2　断面積が不連続に急拡大・縮小する管路の損失

(a) 急拡大する管路の場合：
断面積が不連続に急拡大する管路の損失を求める。

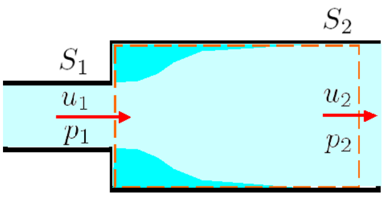


図 4.2.2: 断面積が不連続に急拡大する管路

```
/* 断面積が不連続に急拡大・縮小する管路の損失 */
kill(all);
Q1:Q=u[1]*S[1];
Q2:Q=u[2]*S[2];
M1:\rho*u[1]*S[1]*dt;
M2:\rho*u[2]*S[2]*dt;
MT1:M1*u[1];
MT2:M2*u[2];
FM:(MT2-MT1)/dt;
FP:(p[2]-p[1])*S[2];
F0:FP+FM=0;
ANS1:solve(F0,(p[2]-p[1]))[1];
solve(Q2,u[2])[1];
Q3:subst([Q1],%);
ANS2:factor(subst([Q3],ANS1));
H1:H[1]=p[1]/\rho+u[1]^2/2;
H2:H[2]=p[2]/\rho+u[2]^2/2;
DH:H1-H2;
solve(ANS2,p[2])[1];
DH2:h=rhs(factor(expand(subst([%,Q3],DH))))
  /g;
```

狭い入口側の断面積：S_1、流速：u_1、圧力：p_1 とし、拡大した出口側の断面積：S_2、流速：u_2、圧力：p_2 とする。流量：Q は下記となる。

$$Q = u_1 S_1 = u_2 S_2$$

時間：dt 間に動く質量：m は、

$$m = u_1 S_1 \, dt \, \rho = u_2 S_2 \, dt \, \rho$$

入口側運動量 :$u_1^2 S_1 \, dt \, \rho$　　出口側運動量 :$u_2^2 S_2 \, dt \, \rho$

上図の破線で囲まれた検査面について検討する。検査面に入る入口側運動量と検査面から出る出口側運動量の差は作用する力積であり、

$$F_M dt = u_2^2 S_2 \, dt \, \rho - u_1^2 S_1 \, dt \, \rho$$

一方、圧力による検査面に作用する力は、断面積は入口出口とも S_2 で作用する力は、

$$F_P = (p_2 - p_1) \, S_2$$

両方合わせた力は零となるので、

$$\frac{u_2^2 S_2 \, dt \, \rho - u_1^2 S_1 \, dt \, \rho}{dt} + (p_2 - p_1) \, S_2 = 0$$

u_1 を基準の流速とするので u_2、圧力差は、

$$u_2 = \frac{u_1 S_1}{S_2} \qquad p_2 - p_1 = \frac{u_1^2 S_1 \, (S_2 - S_1) \, \rho}{S_2^2}$$

入口、出口それぞれに Bernoulli の定理：(2.8.4) 式、(30 ページ) を適用し、単位質量あたりのエネルギーは、

$$H_1 = \frac{p_1}{\rho} + \frac{u_1^2}{2} \qquad H_2 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{u_2^2}{2}$$

単位質量あたりのエネルギー差は、

$$H_1 - H_2 = -\frac{p_2}{\rho} + \frac{p_1}{\rho} - \frac{u_2^2}{2} + \frac{u_1^2}{2}$$

重力加速度：g で割り、液柱として損失ヘッド：h は、上式から u_2、$p_2 - p_1$ を消去し、修正係数：ξ を導入して、

$$h = \xi \frac{u_1^2 \, (S_2 - S_1)^2}{2 \, S_2^2 \, g}$$

修正係数の値は急激な面積変化の場合、$\xi \approx 1$ である。

(b) 急縮小する管路の場合：
断面積が不連続に急縮小する管路の損失を求める。流れは下図にあるように一旦絞られ、そして拡大して流れる。絞られるまでは安定しており損出はほとんど無い。下流部の拡大部に前述の急拡大する管路の式を適用する。

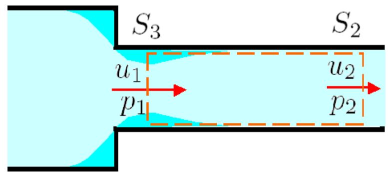


図 4.2.3: 断面積が不連続に急縮小する管路

```
Q4:solve(Q3,u[1])[1];
ANS4:factor(subst([Q4],ANS1));
solve(ANS4,p[2])[1];
DH4:h=rhs(factor(expand(subst([%,Q4],DH))))
  /g;
```

u_1 は不明なので u_2 を基準の流速とする。

$$u_1 = \frac{u_2 S_2}{S_1} \qquad p_2 = \frac{\left(u_2^2 S_2 - S_1 u_2^2\right) \, \rho + p_1 S_1}{S_1}$$

液柱として損失ヘッド：h は、S_1 の代わりに絞られた断面積：S_3 に置き換え、

$$h = \xi_c \frac{u_2^2 \, (S_2 - S_3)^2}{2 \, S_3^2 \, g}$$

この S_3 は管の面積比から実験的に求められている。

例題 4.2.3 円管摩擦損失

円管の摩擦抵抗の損出について調べる。

```
/* 円管摩擦損失 */
kill(all);
'diff(p,z,1)*%pi*R^2=\tau*2*%pi*R;
DPZ:solve(%,'diff(p,z,1))[1];
h='diff(p,z,1)*L/\rho/g;
HFL1:subst([DPZ,R=D/2],%);
HFL2:h=l*L/D*v[m]^2/2/g;
rhs(HFL1)=rhs(HFL2);
solve(%,\tau)[1];
```

円管半径：R、圧力変化：dp/dz、管壁の剪断応力：τ とすると、

$$\pi \left(\frac{d}{d\,z}\,p\right)\,R^2 = 2\,\pi\,\tau\,R$$

整理すると、

$$\frac{d}{d\,z}\,p = \frac{2\,\tau}{R}$$

損失ヘッドで表し、摩擦損失係数：l を導入するとその関係は、

$$h = \frac{\left(\frac{d}{d\,z}\,p\right)\,L}{g\,\rho} = \frac{l\,v_m^2\,L}{2\,g\,D} \tag{4.2.1}$$

上式から管壁の剪断応力：τ は、

$$\tau = \frac{l\,v_m^2\,\rho}{8}$$

円管の摩擦損失を円柱座標系の非圧縮性流体の Navier-Stokes の式：(B.1.25) 式、(667 ページ) から求める。

```
\rho*(v[z]*('diff(v[z],z,1))+(v[\theta]
  *('diff(v[z],\theta,1)))/r
  +'diff(v[z],t,1)
  +v[r]*('diff(v[z],r,1)))=mu*('diff(v[z],z
  ,2)+'diff(v[z],\theta,2)/r^2+'diff(v[z],r
  ,2)+'diff(v[z],r,1)/r)+F[z]-'diff(p,z,1);
rhs(%)=0;
EQN1:subst([F[z]=0,'diff(v[z],z,2)=0,
  'diff(v[z],\theta,2)=0],%);
EQN2:subst([v[z]=v(r)],EQN1);
atvalue(v(r),r=R,0);
atvalue(diff(v(r),r,1),r=0,0);
desolve(EQN2,v(r));
ANS1:ode2(EQN2,v(r),r);
DANS1:diff(ANS1,r,1);
K1:subst([%k1=0,r=R],rhs(ANS1)=0);
solve(%,%k2)[1];
ANS2:factor(subst([%k1=0,%],ANS1));
'integrate(rhs(ANS2)*2*\pi*r,r,0,R)/\pi
 /R^2;
VM:v[m]=ev(%,integrate);
DP:-solve(VM,'diff(p,z,1))[1];
h=rhs(DP)/\rho/g*L;
```

```
HFL3:subst([R=D/2],%);
rhs(HFL2)=rhs(HFL3);
LA1:solve(%,l)[1];
RN:R[e]=v[m]*D/\mu*\rho;
solve(RN,v[m])[1];
subst([%],LA1);
```

$$\mu\left(\frac{d^2}{d\,z^2}\,v_z + \frac{\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,v_z}{r^2} + \frac{d^2}{d\,r^2}\,v_z + \frac{\frac{d}{d\,r}\,v_z}{r}\right) + F_z - \frac{d}{d\,z}\,p = 0$$

定常状態であるとすると、

$$\mu\left(\frac{d^2}{d\,r^2}\,\mathrm{v}\left(r\right) + \frac{\frac{d}{d\,r}\,\mathrm{v}\left(r\right)}{r}\right) - \frac{d}{d\,z}\,p = 0$$

この微分方程式を解くと、

$$\mathrm{v}\left(r\right) = \frac{\%k1\,\log\left(r\right)}{\mu} + \frac{\left(\frac{d}{d\,z}\,p\right)\,r^2}{4\,\mu} + \%k2$$

解から、

$$\frac{d}{d\,r}\,\mathrm{v}\left(r\right) = \frac{\left(\frac{d}{d\,z}\,p\right)\,r}{2\,\mu} + \frac{\%k1}{\mu\,r}$$

$v(R) = 0,\ \frac{d}{d\,r}\,v(0) = 0$ の境界条件から、

$$\mathrm{v}\left(r\right) = -\frac{\left(\frac{d}{d\,z}\,p\right)\,\left(R-r\right)\,\left(R+r\right)}{4\,\mu}$$

上式から平均流速：v_m は、

$$v_m = -\frac{\left(\frac{d}{d\,z}\,p\right)\,\int_0^R r\,\left(R-r\right)\,\left(R+r\right)dr}{2\,\mu\,R^2} = -\frac{\left(\frac{d}{d\,z}\,p\right)\,R^2}{8\,\mu}$$

上式を整理し、

$$-\frac{d}{d\,z}\,p = \frac{8\,v_m\,\mu}{R^2}$$

損失ヘッドで表すと、

$$h = \frac{32\,v_m\,\mu\,L}{g\,\rho\,D^2}$$

前記の (4.2.1) 式と比較して、次の関係を得る。

$$l = \frac{64\,\mu}{v_m\,\rho\,D}$$

レイノルズ数：R_e とすると、

$$R_e = \frac{v_m\,\rho\,D}{\mu}$$

$$l = \frac{64}{R_e}$$

例題 4.2.4　貯水池を結ぶ分岐管路

下図のように貯水池を結ぶ管路の各流量を求める。

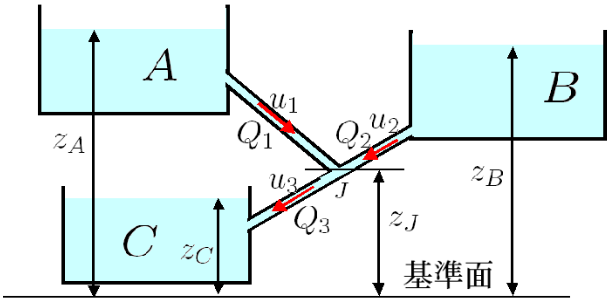


図 4.2.4: 貯水池を結ぶ分岐管路

```
/* 貯水池を結ぶ分岐管路 */
kill(all);
DT:[l=0.03,L[1]=500,L[2]=400,L[3]=1000,
  D[1]=0.15,D[2]=0.15,D[3]=0.25,z[A]=30,
  z[B]=20,z[C]=0,g=9.8];
K1:k[1]=l*L[1]/D[1];
K2:k[2]=l*L[2]/D[2];
K3:k[3]=l*L[3]/D[3];
H1:z[A]=z[J]+p[J]/\rho/g+k[1]*u[1]^2/2/g;
H2:z[B]=z[J]+p[J]/\rho/g+k[2]*u[2]^2/2/g;
H3:z[J]+p[J]/\rho/g=z[C]+k[3]*u[3]^2/2/g;
Q1:Q[1]=%pi*D[1]^2/4*u[1];
Q2:Q[2]=%pi*D[2]^2/4*u[2];
Q3:Q[3]=%pi*D[3]^2/4*u[3];
QA:Q[3]=Q[1]+Q[2];
```

貯水池:A と管路の分岐点:J との間の流速:u_1、流量:Q_1、配管長さ:L_1、配管直径:D_1、同様に、貯水池:B と管路の分岐点:J との間の流速など:u_2, Q_2, L_2, D_2、管路の分岐点:J と貯水池:c との間の流速など:u_3, Q_3, L_3, D_3 とする。摩擦損失係数:l は厳密には、流速を求めレイノルズ数から係数を決める必要があるが、ここでは $l = 0.03$ 一定とし、他の損失は無視できるとする。基準面から貯水池：A の水面高さ z_A、基準面から貯水池：B の水面高さ z_B、基準面から貯水池：C の水面高さ z_C、基準面から管路の分岐点：J の高さ z_J、管路の分岐点：J の高さの圧力：p_J とする。下記の係数を導入する。

$$k_1 = \frac{L_1\, l}{D_1} \quad k_2 = \frac{L_2\, l}{D_2} \quad k_3 = \frac{L_3\, l}{D_3}$$

貯水池：A と管路の分岐点：J との間、貯水池：B と管路の分岐点：J との間、管路の分岐点：J と貯水池：C との間で Bernoulli の定理：(2.8.4) 式、(30 ページ) を重力加速度：g で割り、損失ヘッドで表現すると下記となる。

$$A \text{ と } J \text{ との間 }: z_A = z_J + \frac{p_J}{g\,\rho} + \frac{k_1\, u_1^2}{2\,g}$$

$$B \text{ と } J \text{ との間 }: z_B = z_J + \frac{p_J}{g\,\rho} + \frac{k_2\, u_2^2}{2\,g}$$

$$J \text{ と } C \text{ との間 }: z_J + \frac{p_J}{g\,\rho} = z_C + \frac{k_3\, u_3^2}{2\,g}$$

流量と流速の関係および分岐管路の連続の条件は、

$$Q_1 = \frac{\pi\, u_1\, D_1^2}{4} \quad Q_2 = \frac{\pi\, u_2\, D_2^2}{4} \quad Q_3 = \frac{\pi\, u_3\, D_3^2}{4}$$

$$Q_3 = Q_2 + Q_1$$

```
U1:solve(Q1,u[1])[1];
U2:solve(Q2,u[2])[1];
U3:solve(Q3,u[3])[1];
H11:subst([U1,K1,K2,K3],H1);
H21:subst([U2,K1,K2,K3],H2);
H31:subst([U3,K1,K2,K3],H3);
H13:lhs(H11+H31)-rhs(H11+H31)=0;
H23:lhs(H21+H31)-rhs(H21+H31)=0;
H131:(subst([QA],H13));
H231:(subst([QA],H23));
H1323:expand(H131*(-z[C]+z[B])-H231*(-z[C]
  +z[A]));
float(subst(DT,H1323));
Q21:partfrac(solve(H1323,Q[2]),Q[1]);
float(subst(DT,Q21));
Q210:Q21[2];
Q11:subst([Q210],H131);
Q12:solve(Q11,Q[1]);
float(subst(DT,Q12));
QF1:%[1];
Q10:Q12[1];
Q20:subst([Q10],Q210);
QF2:float(subst(DT,Q20));
Q30:Q[3]=rhs(Q10)+rhs(Q20);
QF3:float(subst(DT,Q30));
float(subst(DT,lhs(H13)));
float(subst([QF1,QF2,QF3],%));
float(subst(DT,lhs(H23)));
float(subst([QF1,QF2,QF3],%));
```

損失ヘッドの式を流速から流量の式で表現すると、

$$z_A = z_J + \frac{p_J}{g\,\rho} + \frac{8\, L_1\, Q_1^2\, l}{\pi^2\, D_1^5\, g}$$

$$z_B = z_J + \frac{p_J}{g\,\rho} + \frac{8\, L_2\, Q_2^2\, l}{\pi^2\, D_2^5\, g}$$

$$z_J + \frac{p_J}{g\,\rho} = z_C + \frac{8\, L_3\, Q_3^2\, l}{\pi^2\, D_3^5\, g}$$

上式で z_J、p_J を消去すると、

$$-z_C + z_A - \frac{8\, L_3\, Q_3^2\, l}{\pi^2\, D_3^5\, g} - \frac{8\, L_1\, Q_1^2\, l}{\pi^2\, D_1^5\, g} = 0 \qquad (4.2.2)$$

$$-z_C + z_B - \frac{8\,L_3\,Q_3^2\,l}{\pi^2\,D_3^5\,g} - \frac{8\,L_2\,Q_2^2\,l}{\pi^2\,D_2^5\,g} = 0 \qquad (4.2.3)$$

Q_3 を消去すると、

$$-z_C + z_A - \frac{8\,(Q_2+Q_1)^2\,L_3\,l}{\pi^2\,D_3^5\,g} - \frac{8\,L_1\,Q_1^2\,l}{\pi^2\,D_1^5\,g} = 0 \quad (4.2.4)$$

$$-z_C + z_B - \frac{8\,(Q_2+Q_1)^2\,L_3\,l}{\pi^2\,D_3^5\,g} - \frac{8\,L_2\,Q_2^2\,l}{\pi^2\,D_2^5\,g} = 0$$

上の式 $\times (z_B - z_C)$ - 下の式 $\times (z_A - z_C)$ で整理すると、

$$\begin{aligned}
&-\frac{8\,L_2\,Q_2^2\,l\,z_C}{\pi^2\,D_2^5\,g} + \frac{8\,L_1\,Q_1^2\,l\,z_C}{\pi^2\,D_1^5\,g} - \frac{8\,Q_2^2\,L_3\,l\,z_B}{\pi^2\,D_3^5\,g} \\
&-\frac{16\,Q_1\,Q_2\,L_3\,l\,z_B}{\pi^2\,D_3^5\,g} - \frac{8\,Q_1^2\,L_3\,l\,z_B}{\pi^2\,D_3^5\,g} - \frac{8\,L_1\,Q_1^2\,l\,z_B}{\pi^2\,D_1^5\,g} \\
&+\frac{8\,Q_2^2\,L_3\,l\,z_A}{\pi^2\,D_3^5\,g} + \frac{16\,Q_1\,Q_2\,L_3\,l\,z_A}{\pi^2\,D_3^5\,g} + \frac{8\,Q_1^2\,L_3\,l\,z_A}{\pi^2\,D_3^5\,g} \\
&+\frac{8\,L_2\,Q_2^2\,l\,z_A}{\pi^2\,D_2^5\,g} = 0
\end{aligned}$$

上式から、Q_1 と Q_2 の関係式の記述は非常に長いため省略し、下記の計算条件を入れると、

$$\begin{gathered}
l = 0.03 \\
L_1 = 500 \quad L_2 = 400 \quad L_3 = 1000 \\
D_1 = 0.15 \quad D_2 = 0.15 \quad D_3 = 0.25 \\
z_A = 30 \quad z_B = 20 \quad z_C = 0
\end{gathered}$$

下記の二式の関係式を得る。ここで $Q_1 > 0, Q_2 > 0$ の条件の方を選択する。

$$\begin{aligned}
Q_2 &= -0.91259976938036\,Q_1, \\
Q_2 &= 0.79088677163431\,Q_1
\end{aligned}$$

(4.2.4) 式に上式を代入し下記の二式を得る。ここで $Q_1 > 0$ の条件の方を選択する。

$$\begin{aligned}
Q_1 &= 0.035001759462161, \\
Q_1 &= -0.035001759462161
\end{aligned}$$

上記から、流量は下記となる。

$$\begin{gathered}
Q_1 = 0.035001759462161 \\
Q_2 = 0.027682428542549 \\
Q_3 = 0.06268418800471
\end{gathered}$$

(4.2.2) 式に上記数値計算結果を代入し、確かめ算を行うと、下記となり、左辺 $=0$ となり、結果が正しいことがわかる。

$$\begin{aligned}
(4.2.2)\ \text{式左辺} =& -2540.88715223887\,Q_3^2 \\
& - 16338.00895215323\,Q_1^2 + 30.0 \\
=& 4.0856207306205761\,10^{-14}
\end{aligned}$$

また、(4.2.3) 式に上記数値計算結果を代入し、確かめ算を行うと、下記となり左辺 $=0$ となり、結果が正しいことがわかる。

$$\begin{aligned}
(4.2.3)\ \text{式左辺} =& -2540.88715223887\,Q_3^2 \\
& - 13070.40716172258\,Q_2^2 + 20.0 \\
=& 2.8421709430404007\,10^{-14}
\end{aligned}$$

例題 4.2.5　管路網の計算

下図の管路網で流量の出入り：Q_A, Q_B, Q_C を与えた時の各配管の流量を求める。

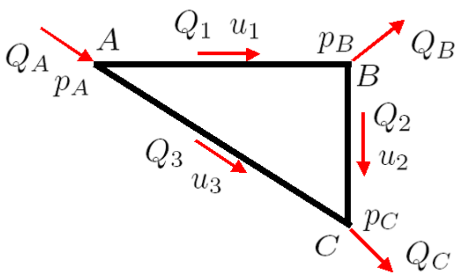


図 4.2.5: 管路網の計算

```
/* 管路網の計算 */
kill(all);
DT:[l[1]=0.025,l[2]=0.025,l[3]=0.028,
  L[1]=250,L[2]=150,L[3]=250,D[1]=0.4,
  D[2]=0.4,D[3]=0.3,Q[A]=0.6,Q[B]=0.2,
  Q[C]=0.4];
K1:k[1]=l[1]*L[1]/D[1];
K2:k[2]=l[2]*L[2]/D[2];
K3:k[3]=l[3]*L[3]/D[3];
H1:p[A]/\rho/g+u[1]^2/2/g=p[B]/\rho/g
  +k[1]*u[1]^2/2/g+u[1]^2/2/g;
H2:p[B]/\rho/g+u[2]^2/2/g=p[C]/\rho/g
  +k[2]*u[2]^2/2/g+u[2]^2/2/g;
H3:p[A]/\rho/g+u[3]^2/2/g=p[C]/\rho/g
  +k[3]*u[3]^2/2/g+u[3]^2/2/g;
Q1:Q[1]=%pi*D[1]^2/4*u[1];
Q2:Q[2]=%pi*D[2]^2/4*u[2];
Q3:Q[3]=%pi*D[3]^2/4*u[3];
QA:Q[A]=Q[1]+Q[3];
QB:Q[B]=Q[1]-Q[2];
QC:Q[C]=Q[2]+Q[3];
```

流量の出入り：$Q_A = 0.6, Q_B = 0.2, Q_C = 0.4$ とする。分岐点：A と管路の分岐点：B との間の流速：u_1、流量：Q_1、配管長さ：L_1、配管直径：D_1、摩擦損失係数：l_1、同様に、分岐点：B と管路の分岐点：C との間の流速など：u_2, Q_2, L_2, D_2, l_2、分岐点：A と管路の分岐点：C との間の流速など：u_3, Q_3, L_3, D_3, l_3 とする。

$$k_1 = \frac{l_1\, L_1}{D_1} \quad k_2 = \frac{l_2\, L_2}{D_2} \quad k_3 = \frac{l_3\, L_3}{D_3}$$

下記の間で Bernoulli の定理：(2.8.4) 式、(30 ページ) を重力加速度：g で割り、損失ヘッドで表現すると下記となる。

$$A \text{ と } B \text{ との間 :} \frac{p_A}{g\,\rho} + \frac{u_1^2}{2\,g} = \frac{p_B}{g\,\rho} + \frac{k_1\,u_1^2}{2\,g} + \frac{u_1^2}{2\,g}$$

$$B \text{ と } C \text{ との間 :} \frac{p_B}{g\,\rho} + \frac{u_2^2}{2\,g} = \frac{p_C}{g\,\rho} + \frac{k_2\,u_2^2}{2\,g} + \frac{u_2^2}{2\,g}$$

$$A \text{ と } C \text{ との間 :} \frac{p_A}{g\,\rho} + \frac{u_3^2}{2\,g} = \frac{p_C}{g\,\rho} + \frac{k_3\,u_3^2}{2\,g} + \frac{u_3^2}{2\,g}$$

流量と流速の関係および分岐管路の連続の条件は、

$$Q_1 = \frac{\pi\,u_1\,D_1^2}{4} \quad Q_2 = \frac{\pi\,u_2\,D_2^2}{4} \quad Q_3 = \frac{\pi\,u_3\,D_3^2}{4}$$

$$Q_A = Q_3 + Q_1 \quad Q_B = Q_1 - Q_2 \quad Q_C = Q_3 + Q_2$$

```
Q31:solve(QA,Q[3])[1];
Q21:solve(QB,Q[2])[1];
U1:solve(Q1,u[1])[1];
U2:solve(Q2,u[2])[1];
U3:solve(Q3,u[3])[1];
H11:subst([U1,U2,U3],lhs(H1)-rhs(H1)=0);
H21:subst([U1,U2,U3],lhs(H2)-rhs(H2)=0);
H31:subst([U1,U2,U3],lhs(H3)-rhs(H3)=0);
ANSQ1:solve([QA,QB,QC],[Q[1],Q[2],Q[3]]);
ANSP1:solve([H11,H21,H31],[p[A],p[B],p[C]]
 );
PA:solve(H31,p[A])[1];
H123:expand(subst([PA],H11+H21));
EQQ1:subst([Q21,Q31],H123);
Q12:solve(EQQ1,Q[1]);
subst([K1,K2,K3],Q12);
float(subst([DT],%));
Q10:Q12[2];
Q20:subst([Q10],Q21);
subst([K1,K2,K3],Q20);
float(subst([DT],%));
Q30:subst([Q10],Q31);
subst([K1,K2,K3],Q30);
float(subst([DT],%));
```

損失ヘッドの式を流速から流量の式で表現すると、

$$-\frac{p_B}{g\,\rho} + \frac{p_A}{g\,\rho} - \frac{8\,k_1\,Q_1^2}{\pi^2\,D_1^4\,g} = 0 \qquad -\frac{p_C}{g\,\rho} + \frac{p_B}{g\,\rho} - \frac{8\,k_2\,Q_2^2}{\pi^2\,D_2^4\,g} = 0$$

$$-\frac{p_C}{g\,\rho} + \frac{p_A}{g\,\rho} - \frac{8\,k_3\,Q_3^2}{\pi^2\,D_3^4\,g} = 0$$

上式で圧力：p_A, p_B, p_C を消去すると、

$$\frac{8\,k_3\,Q_3^2}{\pi^2\,D_3^4\,g} - \frac{8\,k_2\,Q_2^2}{\pi^2\,D_2^4\,g} - \frac{8\,k_1\,Q_1^2}{\pi^2\,D_1^4\,g} = 0$$

Q_2, Q_3 を Q_1 で表現し、上式に代入し、これを解くと Q_1 が得られる。式が長くなるので省略する。プログラム第 3 行目の DT に示されているデータを入力すると、下記の流量：Q_1 が得られる。2 番目の解が妥当である。

$$[Q_1 = 1.336880583865736, Q_1 = 0.4016377783124]$$

Q_2, Q_3 は、

$$Q_2 = 0.2016377783124$$

$$Q_3 = 0.1983622216876$$

例題 4.2.6　管路網の計算 (収束計算)

下図の管路網で流量の出入り：Q_A, Q_B, Q_C, Q_D を与えた時の各配管の流量を求める。ここでは管路数が多く複雑な場合には、ここで示す収束計算で行うのがよい。

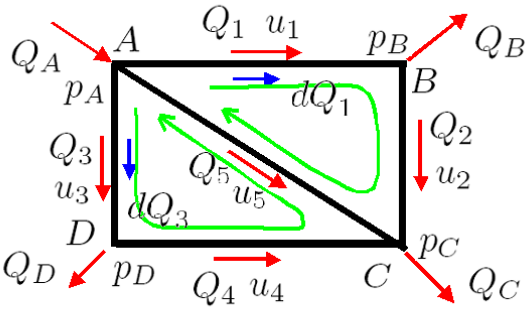


図 4.2.6: 管路網の計算

```
/* 分岐管路（収束計算） */
kill(all);
DT:[l=0.02,L[1]=300,L[2]=300,L[3]=300,
  L[4]=300,L[5]=600,D[1]=0.3,D[2]=0.3,
  D[3]=0.3,D[4]=0.3,D[5]=0.4,Q[A]=0.4,
  Q[B]=0.05,Q[C]=0.25,Q[D]=0.1,g=9.8];
K1:k[1]=l*L[1]/D[1];
K2:k[2]=l*L[2]/D[2];
K3:k[3]=l*L[3]/D[3];
K4:k[4]=l*L[4]/D[4];
K5:k[5]=l*L[5]/D[5];
H1:p[A]/\rho/g+u[1]^2/2/g=p[B]/\rho/g
  +k[1]*u[1]^2/2/g+u[1]^2/2/g;
H2:p[B]/\rho/g+u[2]^2/2/g=p[C]/\rho/g
  +k[2]*u[2]^2/2/g+u[2]^2/2/g;
H3:p[A]/\rho/g+u[3]^2/2/g=p[D]/\rho/g
  +k[3]*u[3]^2/2/g+u[3]^2/2/g;
H4:p[D]/\rho/g+u[4]^2/2/g=p[C]/\rho/g
  +k[3]*u[4]^2/2/g+u[4]^2/2/g;
H5:p[A]/\rho/g+u[5]^2/2/g=p[C]/\rho/g
  +k[3]*u[5]^2/2/g+u[5]^2/2/g;
Q1:Q[1]=%pi*D[1]^2/4*u[1];
Q2:Q[2]=%pi*D[2]^2/4*u[2];
Q3:Q[3]=%pi*D[3]^2/4*u[3];
Q4:Q[4]=%pi*D[4]^2/4*u[4];
Q5:Q[5]=%pi*D[5]^2/4*u[5];
QA:Q[A]=Q[1]+Q[3]+Q[5];
QB:Q[B]=Q[1]-Q[2];
QC:Q[C]=Q[2]+Q[4]+Q[5];
QD:Q[D]=Q[3]-Q[4];
```

流量の出入り：$Q_A = 0.6, Q_B = 0.2, Q_C = 0.4$ とする。分岐点：A と管路の分岐点：B との間の流速：u_1、流量：Q_1、配管長さ：L_1、配管直径：D_1、摩擦損失係数：l_1、同様に、分岐点：B と管路の分岐点：C との間の流速など：u_2, Q_2, L_2, D_2, l_2、分岐点：A と管路の分岐点：D との間の流速など：u_3, Q_3, L_3, D_3, l_3、分岐点：D と管路の分岐点：C との間の流速など：u_4, Q_4, L_4, D_4, l_4、分岐点：A と管路の分岐点：C との間の流速など：u_5, Q_5, L_5, D_5, l_5 とする。ここで下記の k_1～k_5 を導入する。

$$k_1 = \frac{L_1\, l}{D_1} \quad k_2 = \frac{L_2\, l}{D_2} \quad k_3 = \frac{L_3\, l}{D_3}$$

$$k_4 = \frac{L_4\, l}{D_4} \quad k_5 = \frac{L_5\, l}{D_5}$$

下記の間で Bernoulli の定理：(2.8.4) 式、(30 ページ) を重力加速度：g で割り、損失ヘッドで表現すると下記となる。

$$A \text{ と } B \text{ との間}: \frac{p_A}{g\,\rho} + \frac{u_1^2}{2\,g} = \frac{p_B}{g\,\rho} + \frac{k_1\,u_1^2}{2\,g} + \frac{u_1^2}{2\,g}$$

$$B \text{ と } C \text{ との間}: \frac{p_B}{g\,\rho} + \frac{u_2^2}{2\,g} = \frac{p_C}{g\,\rho} + \frac{k_2\,u_2^2}{2\,g} + \frac{u_2^2}{2\,g}$$

$$A \text{ と } D \text{ との間}: \frac{p_A}{g\,\rho} + \frac{u_3^2}{2\,g} = \frac{p_D}{g\,\rho} + \frac{k_3\,u_3^2}{2\,g} + \frac{u_3^2}{2\,g}$$

$$D \text{ と } C \text{ との間}: \frac{p_D}{g\,\rho} + \frac{u_4^2}{2\,g} = \frac{p_C}{g\,\rho} + \frac{k_3\,u_4^2}{2\,g} + \frac{u_4^2}{2\,g}$$

$$A \text{ と } C \text{ との間}: \frac{p_A}{g\,\rho} + \frac{u_5^2}{2\,g} = \frac{p_C}{g\,\rho} + \frac{k_3\,u_5^2}{2\,g} + \frac{u_5^2}{2\,g}$$

流量と流速の関係および分岐管路の連続の条件は、

$$Q_1 = \frac{\pi\,u_1\,D_1^2}{4} \quad Q_2 = \frac{\pi\,u_2\,D_2^2}{4} \quad Q_3 = \frac{\pi\,u_3\,D_3^2}{4}$$

$$Q_4 = \frac{\pi\,u_4\,D_4^2}{4} \quad Q_5 = \frac{\pi\,u_5\,D_5^2}{4}$$

$$Q_A = Q_5 + Q_3 + Q_1 \quad Q_B = Q_1 - Q_2$$

$$Q_C = Q_5 + Q_4 + Q_2 \quad Q_D = Q_3 - Q_4$$

```
U1:solve(Q1,u[1])[1];
U2:solve(Q2,u[2])[1];
U3:solve(Q3,u[3])[1];
U4:solve(Q4,u[4])[1];
U5:solve(Q5,u[5])[1];
H11:subst([U1],lhs(H1)-rhs(H1)=0);
H21:subst([U2],lhs(H2)-rhs(H2)=0);
H31:subst([U3],lhs(H3)-rhs(H3)=0);
H41:subst([U4],lhs(H4)-rhs(H4)=0);
H51:subst([U5],lhs(H5)-rhs(H5)=0);
H125:H11+H21-H51;
H345:H31+H41-H51;
DQ:[Q[1]=Q[1]+dQ[1],Q[2]=Q[2]+dQ[1],
  Q[3]=Q[3]+dQ[3],Q[4]=Q[4]+dQ[3],
  Q[5]=Q[5]-dQ[1]-dQ[3]];
```

```
H125D:subst([DQ],H125);
H345D:subst([DQ],H345);
H125D1:subst([dQ[1]^2=0,dQ[3]^2=0],
  expand(lhs(H125D)-(16*dQ[1]*k[3]
  *dQ[3])/(%pi^2*D[5]^4*g)=0));
H345D1:subst([dQ[1]^2=0,dQ[3]^2=0],
  expand(lhs(H345D)-(16*dQ[1]*k[3]
  *dQ[3])/(%pi^2*D[5]^4*g)=0));
DQ13:solve([H125D1,H345D1],[dQ[1],dQ[3]]);
DQ1:DQ13[1][1];
DQ3:DQ13[1][2];
subst([K1,K2,K3,K4,K5],DQ1);
DQ11:float(subst([DT],%));
subst([K1,K2,K3,K4,K5],DQ3);
DQ31:float(subst([DT],%));
```

損失ヘッドの式を流速から流量の式で表現し、p_A, p_B, p_C, p_D を消去すると下記となる。これは上図の緑矢印管路ループに沿った損失ヘッドを表し、元に戻ると当然、ヘッド零となる。最初からこの方法で損失ヘッドの式をたててもよい。

$$\frac{8\,k_3\,Q_5^2}{\pi^2\,D_5^4\,g}-\frac{8\,k_2\,Q_2^2}{\pi^2\,D_2^4\,g}-\frac{8\,k_1\,Q_1^2}{\pi^2\,D_1^4\,g}=0$$

$$\frac{8\,k_3\,Q_5^2}{\pi^2\,D_5^4\,g}-\frac{8\,k_3\,Q_4^2}{\pi^2\,D_4^4\,g}-\frac{8\,k_3\,Q_3^2}{\pi^2\,D_3^4\,g}=0$$

下記の流量補正：dQ_1, dQ_3 を考える。各管路の流量補正をいれた流量は下記となる。これで分岐管路の連続の条件も満たしている。

$$Q_1 \to dQ_1+Q_1 \quad Q_2 \to dQ_1+Q_2 \quad Q_3 \to Q_3+dQ_3$$

$$Q_4 \to Q_4+dQ_3 \quad Q_5 \to Q_5-dQ_3-dQ_1$$

上式を損失ヘッドの式に代入すると、

$$\frac{8\,k_3\,(Q_5-dQ_3-dQ_1)^2}{\pi^2\,D_5^4\,g}-\frac{8\,k_2\,(Q_2+dQ_1)^2}{\pi^2\,D_2^4\,g}-\frac{8\,k_1\,(Q_1+dQ_1)^2}{\pi^2\,D_1^4\,g}=0$$

$$\frac{8\,k_3\,(Q_5-dQ_3-dQ_1)^2}{\pi^2\,D_5^4\,g}-\frac{8\,k_3\,(Q_4+dQ_3)^2}{\pi^2\,D_4^4\,g}-\frac{8\,k_3\,(Q_3+dQ_3)^2}{\pi^2\,D_3^4\,g}=0$$

上式を展開し、dQ_1, dQ_3 の高次項は小さいとし、

$$\frac{8\,k_3\,Q_5^2}{\pi^2\,D_5^4\,g}-\frac{16\,k_3\,dQ_3\,Q_5}{\pi^2\,D_5^4\,g}-\frac{16\,dQ_1\,k_3\,Q_5}{\pi^2\,D_5^4\,g}-\frac{8\,k_2\,Q_2^2}{\pi^2\,D_2^4\,g}-\frac{16\,dQ_1\,k_2\,Q_2}{\pi^2\,D_2^4\,g}-\frac{8\,k_1\,Q_1^2}{\pi^2\,D_1^4\,g}-\frac{16\,k_1\,dQ_1\,Q_1}{\pi^2\,D_1^4\,g}=0$$

$$\frac{8\,k_3\,Q_5^2}{\pi^2\,D_5^4\,g}-\frac{16\,k_3\,dQ_3\,Q_5}{\pi^2\,D_5^4\,g}-\frac{16\,dQ_1\,k_3\,Q_5}{\pi^2\,D_5^4\,g}-\frac{8\,k_3\,Q_4^2}{\pi^2\,D_4^4\,g}-\frac{16\,k_3\,dQ_3\,Q_4}{\pi^2\,D_4^4\,g}-\frac{8\,k_3\,Q_3^2}{\pi^2\,D_3^4\,g}-\frac{16\,k_3\,dQ_3\,Q_3}{\pi^2\,D_3^4\,g}=0$$

この dQ_1, dQ_3 の連立方程式を解く。式が長くなるので省略する。流量の初期値を分岐管路の連続の条件を満たすように入力し、dQ_1, dQ_3 を得て、新たな流量を求める。これを繰り返し、収束するまで実施する。

```
DTQ1L:Q[1]=0.2;
DTQ2L:Q[2]=0.15;
DTQ3L:Q[3]=0.2;
DTQ4L:Q[4]=0.1;
DTQ5L:Q[5]=0.0;
```

```
for i:1 thru 10 do(
DQ1L:float(subst([DTQ1L,DTQ2L,DTQ3L,DTQ4L,
  DTQ5L],DQ11)),
DQ3L:float(subst([DTQ1L,DTQ2L,DTQ3L,DTQ4L,
  DTQ5L],DQ31)),
DTQ1L:Q[1]=rhs(DTQ1L)+rhs(DQ1L),
DTQ2L:Q[2]=rhs(DTQ2L)+rhs(DQ1L),
DTQ3L:Q[3]=rhs(DTQ3L)+rhs(DQ3L),
DTQ4L:Q[4]=rhs(DTQ4L)+rhs(DQ3L),
DTQ5L:Q[5]=rhs(DTQ5L)-rhs(DQ1L)-rhs(DQ3L),
print(DTQ1L));
print(DTQ1L);
print(DTQ2L);
print(DTQ3L);
print(DTQ4L);
print(DTQ5L);
float(subst([DTQ1L,DTQ2L,DTQ3L,DTQ4L,DTQ5L
 ],H125));
subst([K1,K2,K3,K4,K5],%);
float(subst([DT],%));
float(subst([DTQ1L,DTQ2L,DTQ3L,DTQ4L,DTQ5L
 ],H345));
subst([K1,K2,K3,K4,K5],%);
float(subst([DT],%));
float(subst([DTQ1L,DTQ2L,DTQ3L,DTQ4L,DTQ5L
 ],QA));
float(subst([DTQ1L,DTQ2L,DTQ3L,DTQ4L,DTQ5L
 ],QB));
float(subst([DTQ1L,DTQ2L,DTQ3L,DTQ4L,DTQ5L
 ],QC));
float(subst([DTQ1L,DTQ2L,DTQ3L,DTQ4L,DTQ5L
 ],QD));
```

Q_1 の収束状況を下記に示す。5 回程度で収束している。

$$Q_1=0.11071428571429$$

$$Q_1=0.09829718774265$$

$$Q_1=0.097834735532995$$

$$Q_1=0.097833682422925$$

$$Q_1=0.097833682417444$$

$$Q_1=0.097833682417444$$

他の解は下記となる。

$$Q_2=0.047833682417444 \quad Q_3=0.1085640273076$$

$$Q_4=0.0085640273075986 \quad Q_5=0.19360229027496$$

上記を損失ヘッドの式に代入し、確かめた結果、十分な精度であることがわかる。

4.3 管内非定常流れ

4.3.1 一様な太さの管内非定常流れ

下記の速度ポテンシャルの Bernoulli の定理：(2.9.6) 式、(34 ページ) から一様な太さの管内非定常流れについて検討する。

$$g\,z+\frac{p}{\rho}+\frac{\left(\frac{d}{d\,z}\,\Phi\right)^2+\left(\frac{d}{d\,y}\,\Phi\right)^2+\left(\frac{d}{d\,x}\,\Phi\right)^2}{2}+\frac{d}{d\,t}\,\Phi=\mathrm{F}\left(t\right) \tag{4.3.1}$$

```
kill(all);
assume(g>0);
assume(h>0);
assume(L>0);
BE1:g*z+p/\rho+u(t)^2/2+'diff(\Phi,t,1)
 =F(t);
PHI:\Phi=u(t)*s;
subst([PHI],BE1);
BE2:ev(%,diff);
BE3:subst([z=z[1],s=s[1],p=p[1]],BE2);
BE31:subst([z=z[2],s=s[2],p=p[2]],BE2);
BE4:lhs(BE31)=lhs(BE3);
solve(%,diff(u(t),t,1))[1];
factor(%);
DU1:subst([p[2]=p[0]],%);
```

一様な太さであるから管内の流速；$u(t)$ はすべて同じで、管に沿った長さ：s とする。速度ポテンシャル：Φ は下記と定義できる。

$$\Phi=s\,\mathrm{u}\left(t\right)$$

これを上記の Bernoulli の定理に代入し、

$$g\,z+s\,\left(\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{u}\left(t\right)\right)+\frac{\mathrm{u}\left(t\right)^2}{2}+\frac{p}{\rho}=\mathrm{F}\left(t\right)$$

管の入口と出口における基準地からの距離：s_1, s_2、圧力:p_1, p_2、高さ：z_1, z_2 とし、管の入口と出口において Bernoulli の定理を適用すると、

$$\begin{aligned}s_2\,\left(\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{u}\left(t\right)\right)+\frac{\mathrm{u}\left(t\right)^2}{2}+\frac{p_2}{\rho}+z_2\,g\\=s_1\,\left(\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{u}\left(t\right)\right)+\frac{\mathrm{u}\left(t\right)^2}{2}+\frac{p_1}{\rho}+z_1\,g\end{aligned}$$

上記を整理して、一様な太さの管内非定常流れの方程式を得る。

$$\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{u}\left(t\right)=-\frac{z_2\,g\,\rho-z_1\,g\,\rho-p_1+p_0}{\left(s_2-s_1\right)\,\rho} \tag{4.3.2}$$

4.3.2 断面積がゆるやかに変化する管内非定常流れ

下記の速度ポテンシャルの Bernoulli の定理：(2.9.6) 式、(34 ページ) から断面積がゆるやかに変化する管内非定常流れについて検討する。

```
kill(all);
BE1:g*z+p/\rho+u(t,s)^2/2+'diff(\Phi,t,1)
  =F(t);
U1:u(t,s)*S(s)=Q(t);
U2:solve(U1,u(t,s))[1];
PHI:\Phi='integrate(u(t,s),s,0,b);
PHI1:subst([U2],PHI);
PHI2:subst([s=c],PHI1);
subst([PHI2,U2],BE1);
BE2:ev(%,diff);
BE3:subst([z=z[1],p=p[1],S(s)=S[1],b=s[1]],
  BE2);
BE4:subst([z=z[2],p=p[2],S(s)=S[2],b=s[2]],
  BE2);
BE5:lhs(BE4)-lhs(BE3)=0;
INTS:subst([0=s[1]],first(lhs(BE5)));
BE6:rest(lhs(BE5),2)+INTS=0;
```

流速：$u(t,s)$、流量：$Q(t)$、断面積：$S(s)$ とする。管に沿った長さ：s とする。これらの関係は、

$$\mathrm{u}\left(t,s\right)=\frac{\mathrm{Q}\left(t\right)}{\mathrm{S}\left(s\right)}$$

速度ポテンシャル：Φ は下記と定義できる。

$$\Phi=\int_0^b\mathrm{u}\left(t,s\right)ds=\int_0^b\frac{1}{\mathrm{S}\left(c\right)}dc\,\mathrm{Q}\left(t\right)$$

これを上記の Bernoulli の定理に代入し、

$$g\,z+\int_0^b\frac{1}{\mathrm{S}\left(c\right)}dc\,\left(\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{Q}\left(t\right)\right)+\frac{\mathrm{Q}\left(t\right)^2}{2\,\mathrm{S}\left(s\right)^2}+\frac{p}{\rho}=\mathrm{F}\left(t\right)$$

管の入口と出口における断面積:S_1, S_2、圧力:p_1, p_2、高さ：z_1, z_2 とし、管の入口と出口において Bernoulli の定理を適用すると、

$$\begin{aligned}\int_{s_1}^{s_2}\frac{1}{\mathrm{S}\left(c\right)}dc\,\left(\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{Q}\left(t\right)\right)+\frac{\mathrm{Q}\left(t\right)^2}{2\,S_2^2}-\frac{\mathrm{Q}\left(t\right)^2}{2\,S_1^2}\\+\frac{p_2}{\rho}-\frac{p_1}{\rho}+z_2\,g-z_1\,g=0\end{aligned} \tag{4.3.3}$$

例題 4.3.3　タンク側壁につけた水平で一様な太さの管内非定常流れ

タンク側壁につけた水平な一様な太さの管から流れ出る液体の流速の過渡特性を調べる。

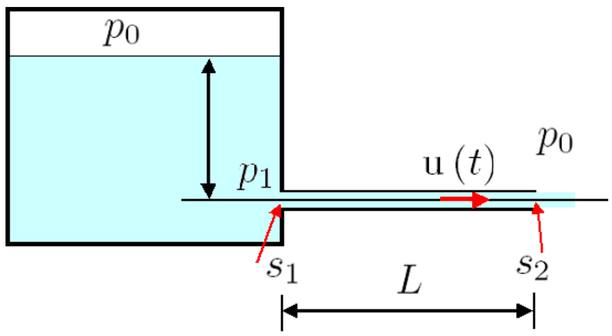


図 4.3.1: タンク側壁につけた水平管

```
kill(all);
assume(g>0);
assume(h>0);
assume(L>0);
DU1:'diff(u(t),t,1)=-(z[2]*g*rho-z[1]*g*rho
  -p[1]+p[0])/((s[2]-s[1])*rho);
DU2:subst([z[1]=z[2],s[1]=s[2]-L],DU1);
BE10:g*h+p[0]/\rho=p[1]/\rho+u(t)^2/2;
P1:solve(%,p[1])[1];
DU3:expand(subst([P1],DU2));
diff(u(t),t,1)=(2*g*h-u(t)^2)/2/L;
'integrate(1/((sqrt(2*g*h))^2-u(t)^2),
  u(t))='integrate(1/2/L,t)+C;
1/2/sqrt(2*g*h)*('integrate(1/(sqrt(2*g*h)
  +u(t)),u(t))+'integrate(1/(sqrt(2*g*h)
  -u(t)),u(t)));
ev(%,integrate)=t/2/L;
logcontract(%);
%*2^(3/2)*sqrt(g*h);
%e^(lhs(%))=%e^(rhs(%));
UT:rootscontract(factor(solve(%,u(t))[1]));
rootscontract(limit(rhs(UT),t,inf));
g:9.8;
h:1/2/9.8;
L:1;
plot2d(rhs(UT),[t,0,10]);
```

管から液面までの高さ：h、管の長さ：L、管内の流速：$u(t)$ は一様な太さから管内全て同じで時間の関数とする。管の入口の圧力 p_1 とする。管の入口と出口で一様な太さの管内非定常流れの方程式：(4.3.2) 式、(63 ページ) を適用する。

$$\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{u}\,(t) = -\frac{z_2\,g\,\rho - z_1\,g\,\rho - p_1 + p_0}{(s_2 - s_1)\,\rho}$$

水平であることから $z_1 = z_2$、管長さ：$L = s_2 - s_1$ であるから、

$$\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{u}\,(t) = -\frac{p_0 - p_1}{\rho\,L} \tag{4.3.4}$$

液面と管の入口に Bernoulli の定理：(2.8.4) 式、(30 ページ) を適用し、p_1 を求めると、

$$\frac{p_0}{\rho} + g\,h = \frac{\mathrm{u}\,(t)^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} \to p_1 = -\frac{\rho\,\mathrm{u}\,(t)^2 - 2\,g\,h\,\rho - 2\,p_0}{2}$$

上式を管内非定常流れの方程式 (4.3.4) 式に代入し、整理すると

$$\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{u}\,(t) = \frac{g\,h}{L} - \frac{\mathrm{u}\,(t)^2}{2\,L} \quad \to \quad \frac{du\,(t)}{2gh - u(t)^2} = \frac{dt}{2L}$$

両辺を積分すると、

$$\int \frac{1}{2\,g\,h - \mathrm{u}\,(t)^2} du\,(t) = \frac{t}{2\,L} + C$$

Maxima ではそのまま積分できるが結果が思わしくないので、左辺の積分を下記のように分けて積分し、

$$\frac{\int \frac{1}{\mathrm{u}(t) + \sqrt{2}\,\sqrt{g}\,\sqrt{h}} du\,(t) + \int \frac{1}{\sqrt{2}\,\sqrt{g}\,\sqrt{h} - \mathrm{u}(t)} du\,(t)}{2^{\frac{3}{2}}\,\sqrt{g}\,\sqrt{h}}$$

$$\frac{\log\left(\mathrm{u}\,(t) + \sqrt{2}\,\sqrt{g}\,\sqrt{h}\right) - \log\left(\sqrt{2}\,\sqrt{g}\,\sqrt{h} - \mathrm{u}\,(t)\right)}{2^{\frac{3}{2}}\,\sqrt{g}\,\sqrt{h}}$$
$$= \frac{t}{2\,L}$$

両辺の指数をとると、

$$\frac{\mathrm{u}\,(t) + \sqrt{2}\,\sqrt{g}\,\sqrt{h}}{\sqrt{2}\,\sqrt{g}\,\sqrt{h} - \mathrm{u}\,(t)} = e^{\frac{\sqrt{2}\,\sqrt{g}\,\sqrt{h}\,t}{L}}$$

整理し、流速を求めると下記となる。また、十分な時間がたつた結果は $t \to \infty$ として、

$$\mathrm{u}\,(t) = \frac{\sqrt{2\,g\,h}\left(e^{\frac{\sqrt{2\,g\,h}\,t}{L}} - 1\right)}{e^{\frac{\sqrt{2\,g\,h}\,t}{L}} + 1} \qquad \lim_{t\to\infty} u(t) = \sqrt{2gh}$$

上式を図にすると下図になる。

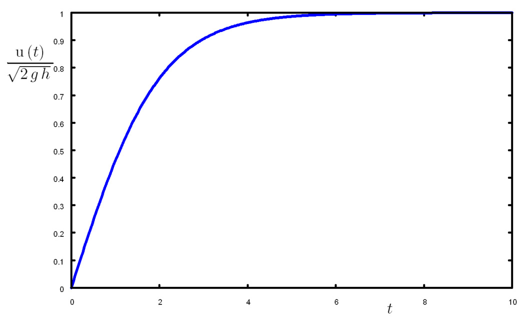


図 4.3.2: タンク側壁につけた水平な非定常管内流速

例題 4.3.4 管路内の水撃現象

長い水平な弾力性のある管路で、流速：u_0 で水が流れている時、末端の弁を急に閉じたとする。弁の直前の流体は、流速が急激に零となり、高い衝撃圧が生じる。この現象について調べる。ここで管の摩擦などの損失はないものとする。管の下流方向を x 軸とし、時間：t、流体密度：ρ、圧力：p、流体の体積弾性率：K、圧力波の伝搬速度：a とする。ここで管は円管とし、流速：u、管路の断面積：A、長さ：L、管路の直径：D、板厚さ：B、応力：σ、ひずみ：ϵ、ヤング率：E とする。

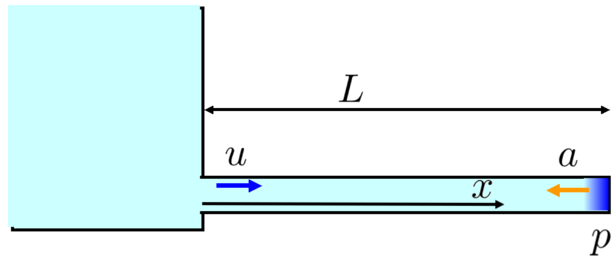


図 4.3.3: 水撃現象

(1) 質量保存の法則から

```
/* 管内水撃作用　質量保存の式から　*/
kill(all);
load("vect")$
depends(\rho,[x,t]);
depends(A,[x,t]);
depends(u,[x,t]);
depends(p,[x,t]);
depends(b,[e]);
depends(c,[f]);
depends(e,[x,t]);
depends(f,[x,t]);
assume(a>0);
assume(a[0]>0);
/* 運動方程式　*/
EQ1:'diff(\rho*A,t,1)+'diff(\rho*A*u,x,1)
  =0;
MT1:diff(u,t,1)+u*diff(u,x,1)=-1/\rho
 *diff(p,x,1);
EQ11:ev(EQ1,diff);
SG1:2*B*\sigma=D*dp;
SG2:\sigma=\epsilon*E;
EP1:1+\epsilon=(%pi*(D+dD))/%pi/D;
EP11:solve(EP1,\epsilon)[1];
solve(SG1,\sigma)[1];
rhs(%)=rhs(SG2);
subst([EP11],%);
```

```
DD1:solve(%,dD)[1];
A1:dA=%pi*(D+dD)^2/4-%pi*D^2/4;
expand(%);
A11:subst([dD^2=0],%);
A2:A=%pi*D^2/4;
A21:solve(%,%pi)[1];
A12:subst([DD1,A21],A11);
```

圧縮性流体の質量保存の式は、

$$\frac{d}{d\,x}\,(\rho\,u)+\frac{d}{d\,t}\,(\rho)=0 \tag{4.3.5}$$

運動方程式は、

$$u\left(\frac{d}{d\,x}\,u\right)+\frac{d}{d\,t}\,u=-\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\,x}\,p \tag{4.3.6}$$

または、エントロピー一定の $a^2=\frac{d}{d\,\rho}\,p$ の関係から、

$$u\left(\frac{d}{d\,x}\,u\right)+\frac{d}{d\,t}\,u=-\frac{a^2}{\rho}\frac{d}{d\,x}\,\rho$$

(4.3.5) 式を参考にして、圧力で管径が変化することから、断面積：A が変化することを考慮し、

$$\frac{d}{d\,x}\,(\rho\,u\,A)+\frac{d}{d\,t}\,(\rho\,A)=0$$

上式を展開し、

$$\begin{aligned}\rho\,u\left(\frac{d}{d\,x}\,A\right)+\rho\left(\frac{d}{d\,t}\,A\right)+\rho\left(\frac{d}{d\,x}\,u\right)\,A\\+\left(\frac{d}{d\,x}\,\rho\right)\,u\,A+\left(\frac{d}{d\,t}\,\rho\right)\,A=0\end{aligned} \tag{4.3.7}$$

管路で圧力が dp 上昇したときの管の応力：σ、ひずみ：ϵ、管径：D の関係式は、

$$2\,\sigma\,B=dp\,D,\quad \sigma=\epsilon\,E,\quad \epsilon=\frac{dD}{D} \tag{4.3.8}$$

上式の関係式から、

$$\sigma=\frac{dp\,D}{2\,B}=\frac{dD\,E}{D}$$

上式から、圧力変化と管径変化の関係は、

$$dD=\frac{dp\,D^2}{2\,B\,E}$$

また、管径変化と管断面積変化の関係は、

$$dA=\frac{\pi\,(dD+D)^2}{4}-\frac{\pi\,D^2}{4}\approx\frac{\pi\,D\,dD}{2}$$

上式から、圧力変化と管断面積変化の関係は、

$$dA=\frac{dp\,A\,D}{B\,E} \tag{4.3.9}$$

```
K1:dp=-K*dV/V;
K11:dp*\rho=K*d*\rho;
K2:a[0]=sqrt(K/\rho);
K21:%^2;
K22:solve(K21,\rho)[1];
A2T:subst([dp=diff(p,t,1),dA=diff(A,t,1)],
 A12);
A2X:subst([dp=diff(p,x,1),dA=diff(A,x,1)],
 A12);
subst([dp=diff(p,t,1),d=diff(\rho,t,1)
 /\rho],K11);
K2T:solve(%,diff(\rho,t,1))[1];
subst([dp=diff(p,x,1),d=diff(\rho,x,1)
 /\rho],K11);
K2X:solve(%,diff(\rho,x,1))[1];
```

体積 : V としたとき、dV : 体積が小さいとすると、圧力増加は、

$$dp = -\frac{dV\,K}{V} \tag{4.3.10}$$

上式を密度変化 : $d\rho$ で表すと、

$$dp\,\rho = d\,\rho\,K \tag{4.3.11}$$

水の圧力伝搬速度 : a_0 は、

$$a_0 = \sqrt{\frac{K}{\rho}} \tag{4.3.12}$$

(4.3.9) 式と (4.3.11) 式から、

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\,t}A &= \frac{\left(\frac{d}{d\,t}p\right)\,A\,D}{B\,E}, \quad \frac{d}{d\,x}A = \frac{\left(\frac{d}{d\,x}p\right)\,A\,D}{B\,E} \\ \frac{d}{d\,t}\rho &= \frac{\left(\frac{d}{d\,t}p\right)\,\rho}{K}, \quad \frac{d}{d\,x}\rho = \frac{\left(\frac{d}{d\,x}p\right)\,\rho}{K} \end{aligned} \tag{4.3.13}$$

```
subst([A2T,A2X,K2T,K2X],EQ11);
EQ12:expand(%/A/K);
subst(['diff(p,x,1)=0],%);
-solve(%,'diff(u,x,1))[1];
EQ13:factor(%);
A3:coeff(rhs(%),'diff(p,t,1),1)=1/\rho/a^2;
solve(%,a^2)[1];
(denom(rhs(%))/(num(rhs(%))))/\rho;
expand(%);
\rho*a^2=1/(%);
A4:%/\rho;
sqrt(%);
subst([K22],A4);
A41:%/a[0]^2;
expand(denom(rhs(%)));
lhs(A41)=1/%;
sqrt(%);
```

```
solve(A3,D)[1];
subst([%],EQ13);
EQ2:factor(%);
```

(4.3.7) 式に (4.3.13) 式を代入し、$\frac{d}{d\,t}p >> \frac{d}{d\,x}p$ であるから、

$$\frac{\left(\frac{d}{d\,t}p\right)\,\rho\,D}{B\,E\,K} + \frac{\rho\,\left(\frac{d}{d\,x}u\right)}{K} + \frac{\left(\frac{d}{d\,t}p\right)\,\rho}{K^2} = 0$$

上式を整理すると、

$$-\frac{d}{d\,x}u = \frac{\left(\frac{d}{d\,t}p\right)\,(D\,K + B\,E)}{B\,E\,K} \tag{4.3.14}$$

右辺の一部を下記のように置くと、

$$\frac{D\,K + B\,E}{B\,E\,K} = \frac{1}{a^2\,\rho} \tag{4.3.15}$$

(4.3.14) 式を a を使って表現すると、

$$-\frac{d}{d\,x}u = \frac{\frac{d}{d\,t}p}{a^2\,\rho} \tag{4.3.16}$$

```
MT2:subst(['diff(u,x,1)=0],MT1);
diff(EQ2,x,1)*a^2+diff(MT2,t,1);
expand(%);
EQMT1:lhs(%)=0;
diff(EQ2,t,1)+diff(MT2,x,1);
%*a^2*\rho;
expand(%);
EQMT2:rest(rhs(%),2)=0;
P1:u=b+c;
subst([P1],EQMT1);
EQMT11:ev(%,diff);
D1:e=t+x/a;
E1:f=t-x/a;
D1T1:diff(D1,t,1);
D1T2:diff(D1,t,2);
E1T1:diff(E1,t,1);
E1T2:diff(E1,t,2);
D1X1:diff(D1,x,1);
D1X2:diff(D1,x,2);
E1X1:diff(E1,x,1);
E1X2:diff(E1,x,2);
subst([D1T1,D1T2,E1T1,E1T2,D1X1,D1X2,E1X1,
 E1X2],EQMT11);
factor(%);
u=F(e)+G(f);
subst([D1,E1],%);
```

(4.3.6) 式の運動方程式で、$\frac{d}{d\,t}u >> \frac{d}{d\,x}u$ であるから、

$$\frac{d}{d\,t}u = -\frac{\frac{d}{d\,x}p}{\rho}$$

上式と (4.3.16) 式から下記の波動方程式を得る。

$$\frac{d^2}{d\,t^2}\,u-a^2\,\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,u\right)=0$$

$$\frac{d^2}{d\,t^2}\,p-a^2\,\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,p\right)=0$$

上式の一般解は、次式の形をしており、次式を上式に代入すると確かに満足する。次式は F および G の形の波が伝搬速度：a で移動することを表しており、水撃現象も a で圧力波が伝搬する。

$$u=\mathrm{F}\left(\frac{x}{a}+t\right)+\mathrm{G}\left(t-\frac{x}{a}\right)$$

上記から、伸びがある管の場合の圧力伝搬速度：a は、(4.3.15) 式から、

$$a=\sqrt{\frac{1}{\rho\,\left(\frac{1}{K}+\frac{D}{B\,E}\right)}} \tag{4.3.17}$$

また、水の圧力伝搬速度との比は、(4.3.12) 式と上式から、

$$\frac{a}{a_0}=\frac{1}{\sqrt{\frac{D\,K}{B\,E}+1}} \tag{4.3.18}$$

(2) エネルギー保存の法則から

```
/* 管内水撃作用　エネルギーの式から　*/
kill(all);
K1:K=-dp/(dV/V);
K2:K=\rho*dp/(d*\rho);
A0:a[0]=sqrt(K/\rho);
A01:solve(A0^2,K)[1];
ENB1:'integrate(-p,V,0,dp);
solve(K1,dV)[1];
ENB2:'integrate(p*V/K,p,0,dp);
ENB21:ev(%,integrate);
V1:V=%pi*D^2/4*L;
subst(V1,ENB21);
ENB3:%*A/(%pi*D^2/4);
SG1:2*B*\sigma=D*dp;
SG2:\sigma=\epsilon*E;
EP1:1+\epsilon=(%pi*(D+dD))/%pi/D;
EP11:solve(EP1,\epsilon)[1];
SG21:solve(SG1,\sigma)[1];
rhs(%)=rhs(SG2);
subst([EP11],%);
DD1:solve(%,dD)[1];
EP2:subst([DD1],EP11);
%pi*D*B*L/2*rhs(EP2)*rhs(SG21);
ENS3:%*A/(%pi*D^2/4);
```

配管内の水に蓄えられたエネルギー：E_l を求める。(4.3.10) 式から体積変化と圧力変化の関係は、

$$K=-\frac{dp\,V}{dV}$$

上式から、

$$dV=-\frac{dp\,V}{K}$$

単位長さの水に蓄えられたエネルギー：$\Delta\,E_l$ は、圧力×体積変化であるから、

$$\Delta\,E_l=\int_0^{dp}p\,dV=\frac{V}{K}\int_0^{dp}pdp=\frac{dp^2\,V}{2\,K}$$

長さ：L の配管内の水に蓄えられたエネルギー：E_l は、

$$E_l=\frac{\pi\,dp^2\,D^2\,L}{8\,K}=\frac{dp^2\,A\,L}{2\,K} \tag{4.3.19}$$

配管構造に蓄えられたエネルギー:E_s を求める。(4.3.8) 式から、応力とひずみは、

$$\sigma=\frac{dp\,D}{2\,B},\quad \epsilon=\frac{dp\,D}{2\,B\,E}$$

配管構造の単位面積に蓄えらたエネルギー：$\Delta\,E_s$ は、

$$\Delta\,E_s=\frac{1}{2}\sigma\times\epsilon$$

長さ：L の配管構造に蓄えらたエネルギー：E_s は、

$$E_s=\frac{\pi\,dp^2\,D^3\,L}{8\,B\,E}=\frac{dp^2\,A\,D\,L}{2\,B\,E} \tag{4.3.20}$$

```
assume(a[0]>0);
assume(\rho>0);
assume(u>0);
assume(dp>0);
ENB3+ENS3=\rho*A*L*u^2/2;
DP2:solve(%,dp^2)[1];
DP21:subst([A01],num(rhs(DP2))/B/E);
DP22:expand(denom(rhs(DP2))/B/E);
lhs(DP2)=DP21/DP22;
sqrt(%);
a=rhs(%)/\rho/u;
%/a[0];
```

配管内の水に蓄えられたエネルギー：E_l と配管構造に蓄えらたエネルギー：E_s の和は配管内の水エネルギーから与えらるから、(4.3.19) 式と (4.3.20) 式から、

$$\frac{dp^2\,A\,L}{2\,K}+\frac{dp^2\,A\,D\,L}{2\,B\,E}=\frac{\rho\,{u_0}^2\,A\,L}{2}$$

上式から、

$$dp^2=\frac{\rho\,u^2\,B\,E\,K}{D\,K+B\,E}=\frac{a_0^2\,\rho^2\,{u_0}^2}{\frac{D\,K}{B\,E}+1}$$

以上から、圧力上昇：dp は、

$$dp=\frac{a_0\,\rho\,u_0}{\sqrt{\frac{D\,K}{B\,E}+1}} \tag{4.3.21}$$

(3) 管内に空気が混入した場合

```
/* 管内水撃作用　空気混入の場合　*/
V2:V=V[l]+V[g];
DV2:dV=dV[l]+dV[g];
KL1:K[l]=-dp/(dV[l]/V[l]);
KG1:K[g]=-dp/(dV[g]/V[g]);
DVL1:solve(KL1,dV[l])[1];
DVG1:solve(KG1,dV[g])[1];
V3:solve(V2,V[l])[1];
V4:V[g]=v*V;
KLG1:KL1/KG1;
K3:factor(subst([DV2,DVL1,DVG1],K1));
K2N1:num(rhs(K3))/V/K[g];
denom(rhs(K3))/V/K[g];
K2D1:expand(subst([V3],%));
lhs(K3)=K2N1/K2D1;
K31:subst([V4],%);
K32:%/K[l];
RH1:\rho*V=\rho[l]*V[l]+rho[g]*V[g];
expand(RH1/V);
expand(subst([V3],%));
RH2:subst([V4],%);
RH3:expand(%/\rho[l]);
assume(a>0);
K32/RH3;
lhs(%)*a^2/K*\rho=rhs(%);
%*K[l]/\rho[l];
A31:sqrt(%);
subst([K[l]=2.07*10^4*10^4,K[g]=1.465*10^4,
 \rho[l]=102.0,\rho[g]=0.1251,v=0],A31);
subst([K[l]=2.07*10^4*10^4,K[g]=1.465*10^4,
 \rho[l]=102.0,\rho[g]=0.1251,v=0.01],A31);
subst([K[l]=2.07*10^4*10^4,K[g]=1.465*10^4,
 \rho[l]=102.0,\rho[g]=0.1251,v=0.01*t],
  A31);
plot2d(rhs(%),[t,0,1],[xlabel,"Vg/V (%)"],
 [ylabel,"a (m/s)"]);
```

管内に空気が混入した場合の水撃現象について調べる[1]。水の体積弾性率：K_l、空気の体積弾性率：K_g、水の密度：ρ_l、空気の密度：ρ_g とする。水の体積：V_l、空気の体積：V_g とすると、

$$V = V_l + V_g, \quad dV = dV_l + dV_g \tag{4.3.22}$$

また、体積弾性率の関係式は、

$$K_l = -\frac{dp\,V_l}{dV_l}, \quad K_g = -\frac{dp\,V_g}{dV_g}$$

[1] Victor L. Streeter, E. Benjamin Wylie：竹中利夫訳：流体過渡現象 [20], 1.3 空気混入の場合、　P.9

上式から、

$$dV_l = -\frac{dp\,V_l}{K_l}, \quad dV_g = -\frac{dp\,V_g}{K_g} \tag{4.3.23}$$

(4.3.10) 式から空気が混入した体積弾性率：K は次式となり、(4.3.22) 式、(4.3.23) 式を代入すると、

$$K = -\frac{dp\,V}{dV} = -\frac{dp\,V}{dV_l + dV_g} = \frac{K_g\,K_l\,V}{K_g\,V_l + V_g\,K_l}$$

上式を整理し、$V_l = V - V_g$ であるから、

$$K = \frac{K_l}{\frac{V_g\,K_l}{K_g\,V} - \frac{V_g}{V} + 1} \tag{4.3.24}$$

空気が混入した密度：ρ は次の関係から、

$$\rho\,V = \rho_l\,V_l + \rho_g\,V_g$$

次式で得られる、

$$\rho = \frac{\rho_l\,V_l}{V} + \frac{\rho_g\,V_g}{V}$$

管内に空気が混入した伝搬速度：a は、$V_l = V - V_g$ で、空気体積比：$v = V_g/V$ とすると、

$$a = \sqrt{\frac{K}{\rho}} = \sqrt{\frac{K_l}{\rho_l\left(\frac{\rho_g\,v}{\rho_l} - v + 1\right)\left(\frac{K_l\,v}{K_g} - v + 1\right)}} \tag{4.3.25}$$

下記に水に空気が混入した場合の伝搬速度を示す。空気が少し混入しても伝搬速度は大幅に減少する。空気が1%混入すると伝搬速度は約 120m/s で、空気の音速より遅いのは興味深い。

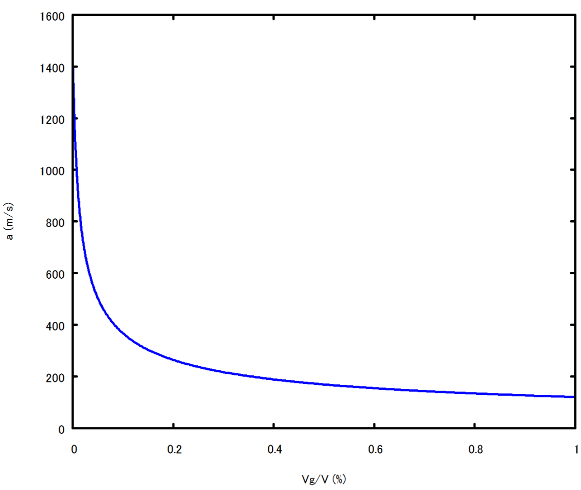


図 4.3.4: 管内に空気が混入した場合の伝搬速度

例題 4.3.5 一様な太さの U 字管の液体振動

一様な太さの U 字管の液体の振動について調べる。

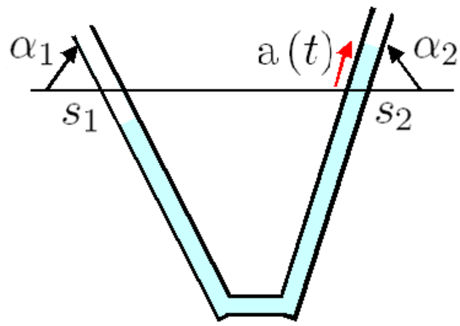


図 4.3.5: 一様な太さの U 字管の液体振動

```
/* 一様な太さの U 字管の液体振動 */
kill(all);
assume(g>0);
assume(h>0);
assume(L>0);
DU1:'diff(u(t),t,1)=-(z[2]*g*rho-z[1]*g*rho
  -p[1]+p[0])/((s[2]-s[1])*rho);
BE5:subst([p[1]=p[0]],DU1);
Z1:z[1]=-a(t)*sin(\alpha[1]);
Z2:z[2]=+a(t)*sin(\alpha[2]);
Z3:u(t)=diff(a(t),t,1);
Z4:diff(u(t),t,1)=diff(\a(t),t,2);
S1:s[2]=s[1]+L;
EQ1:factor(subst([Z1,Z2,Z4,S1],BE5));
assume((sin(\alpha[1])+sin(\alpha[2]))>0);
atvalue(a(t),t=0,S[0]);
atvalue(diff(a(t),t,1),t=0,0);
desolve(EQ1,a(t));
```

左管の水平面からの傾斜角：α_1、右管の水平面からの傾斜角：α_2 とし、管中液体充填長さ：L とする。管内の流速：$u(t)$ は一様な太さから管内全て同じで時間のみの関数となる。管の入口と出口で一様な太さの管内非定常流れの方程式：(4.3.2) 式、(63 ページ) を適用する。

$$\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{u}\,(t) = \frac{-z_2\,g\,\rho + z_1\,g\,\rho + p_1 - p_0}{(s_2 - s_1)\;\rho}$$

管の両端の圧力は大気圧で等しいので、

$$\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{u}\,(t) = \frac{z_1\,g\,\rho - z_2\,g\,\rho}{(s_2 - s_1)\;\rho} \tag{4.3.26}$$

液運動の変位：$a(t)$ とすると、下記の関係がある。

$$z_1 = -\sin(\alpha_1)\;\mathrm{a}\,(t)$$

$$z_2 = \sin(\alpha_2)\;\mathrm{a}\,(t)$$

$$\mathrm{u}\,(t) = \frac{d}{d\,t}\,\mathrm{a}\,(t)$$

上式を管内非定常流れの方程式:(4.3.26) 式に代入すると、

$$\frac{d^2}{d\,t^2}\,\mathrm{a}\,(t) = -\frac{(\sin(\alpha_2) + \sin(\alpha_1))\;g\,\mathrm{a}\,(t)}{L}$$

上記微分方程式を初期変位：S_0 として解くと、

$$\mathrm{a}\,(t) = S_0\cos\left(\frac{\sqrt{\sin(\alpha_2) + \sin(\alpha_1)}\,\sqrt{g}\,t}{\sqrt{L}}\right)$$

例題 4.3.6 断面積がゆるやかに変化する U 字管の液体振動

断面積がゆるやかに変化する U 字管の液体の振動について調べる。

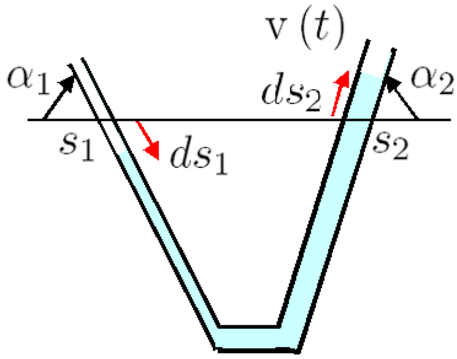


図 4.3.6: 断面積がゆるやかに変化する U 字管の液体振動

```
/* 断面積がゆるやかに変化するU字管の液体振動 */
kill(all);
BE6:integrate(1/S(c),c,s[1],s[2])
  *('diff(Q(t),t,1))+Q(t)^2/(2*S[2]^2)
  -Q(t)^2/(2*S[1]^2)+p[2]/rho-p[1]/rho
  +z[2]*g-z[1]*g=0;
assume(g>0);
assume(h>0);
assume(L[S]>0);
assume(S[0]>0);
DS1:ds[1]=v(t)/S[1];
DS2:ds[2]=v(t)/S[2];
Z1:z[1]=-ds[1]*sin(\alpha[1]);
Z2:z[2]=+ds[2]*sin(\alpha[2]);
Z11:subst([DS1],Z1);
Z21:subst([DS2],Z2);
V1:Q(t)=diff(v(t),t,1);
V2:diff(Q(t),t,2)=diff(v(t),t,2);
EQ1:(subst([Z11,Z21,V1,V2,p[1]=p[0],
  p[2]=p[0]],BE6));
EQ2:subst([S[1]=S[0],S[2]=S[0]],EQ1);
LM:integrate(1/S(c),c,s[1],s[2])=1/L[S];
EQ3:subst([LM],EQ2);
assume((sin(\alpha[1])+sin(\alpha[2]))>0);
atvalue(v(t),t=0,v[a]);
atvalue(diff(v(t),t,1),t=0,0);
rootscontract(desolve(EQ3,v(t)));
```

左管の水平面からの傾斜角：α_1、右管の水平面からの傾斜角：α_2 とし、管内の流量：$Q(t)$ とする。管の入口と出口で断面積がゆるやかに変化する管内非定常流れの方程式：(4.3.3) 式、(63 ページ) を適用する。

$$\int_{s_1}^{s_2}\frac{1}{\mathrm{S}(c)}dc\left(\frac{d}{d\,t}\mathrm{Q}(t)\right)+\frac{\mathrm{Q}(t)^2}{2\,S_2^2}-\frac{\mathrm{Q}(t)^2}{2\,S_1^2}+\frac{p_2}{\rho}-\frac{p_1}{\rho}+z_2\,g-z_1\,g=0 \tag{4.3.27}$$

$$\mathrm{Q}(t)=\frac{d}{d\,t}\mathrm{v}(t)$$

上記の関係となる v(t) を定義する。これから下記の関係を得る。

$$ds_1=\frac{\mathrm{v}(t)}{S_1}\qquad ds_2=\frac{\mathrm{v}(t)}{S_2}$$

$$z_1=-ds_1\sin(\alpha_1)\qquad z_2=ds_2\sin(\alpha_2)$$

上記から、

$$z_1=-\frac{\sin(\alpha_1)\,\mathrm{v}(t)}{S_1}\qquad z_2=\frac{\sin(\alpha_2)\,\mathrm{v}(t)}{S_2}$$

上記関係と管の両端の圧力は大気圧で等しいことから、管内非定常流れの方程式：(4.3.27) 式は下記となる。

$$\int_{s_1}^{s_2}\frac{1}{\mathrm{S}(c)}dc\left(\frac{d^2}{d\,t^2}\mathrm{v}(t)\right)+\frac{\left(\frac{d}{d\,t}\mathrm{v}(t)\right)^2}{2\,S_2^2}-\frac{\left(\frac{d}{d\,t}\mathrm{v}(t)\right)^2}{2\,S_1^2}+\frac{\sin(\alpha_2)\,g\,\mathrm{v}(t)}{S_2}+\frac{\sin(\alpha_1)\,g\,\mathrm{v}(t)}{S_1}=0$$

これは解けないので、管の入口近傍の管の断面積が等しい：($S_1=S_2=S_0$) とすると、

$$\int_{s_1}^{s_2}\frac{1}{\mathrm{S}(c)}dc\left(\frac{d^2}{d\,t^2}\mathrm{v}(t)\right)+\frac{\sin(\alpha_2)\,g\,\mathrm{v}(t)}{S_0}+\frac{\sin(\alpha_1)\,g\,\mathrm{v}(t)}{S_0}=0$$

積分を下記のように置き換えて、

$$\int_{s_1}^{s_2}\frac{1}{\mathrm{S}(c)}dc=\frac{1}{L_S}$$

運動方程式は、

$$\frac{\frac{d^2}{d\,t^2}\mathrm{v}(t)}{L_S}+\frac{\sin(\alpha_2)\,g\,\mathrm{v}(t)}{S_0}+\frac{\sin(\alpha_1)\,g\,\mathrm{v}(t)}{S_0}=0$$

振動は下記となり、一様な太さの U 字管の長さ：L の部分が等価な長さ：S_0/L_S に代わり、質量の修正が行われたことになっている。

$$\mathrm{v}(t)=v_a\cos\left(t\sqrt{\frac{(\sin(\alpha_2)+\sin(\alpha_1))\,g\,L_S}{S_0}}\right)$$

4.4 回転動座標系

4.4.1 回転する円管 (遠心ポンプの原理)

水平面で回転する円管の噴出流速や作用するモーメントについて調べる。定常回転する回転動座標系の場合の

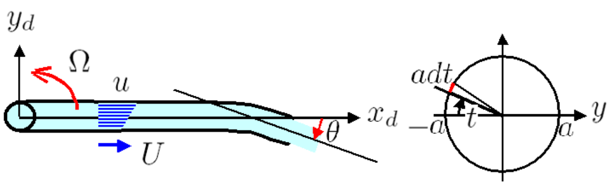


図 4.4.1: 回転する円管

Bernoulli の定理：(2.8.8) 式から下記となる。z 軸が Ω で定常回転し、回転動座標系の xy 座標上の点を x_d, y_d、その場所の流速：V、単位質量あたりの全エネルギー：H とする。

$$\frac{V^2}{2}+\frac{p}{\rho}-\frac{\left(y_d^2+x_d^2\right)\,\Omega^2}{2}+gz=H$$

流れが相対的に定常で、$curl\overrightarrow{V}+2\overrightarrow{\Omega}=0$、即ち $-2\overrightarrow{\Omega}$ の渦度がある場合には渦無し流れで、管内流れは下記となる。

$$u=U+2\,y_d\,\Omega$$

上記流速を Bernoulli の定理に代入し、圧力：p を求めると、

$$p=-\frac{\rho\,(U+2\,y_d\,\Omega)^2-2\,\rho\,H+\left(\left(-y_d^2-x_d^2\right)\,\Omega^2+2\,g\,z\right)\,\rho}{2}$$

水平面で回転する半径：a の円管内に作用する力：dF_y は圧力を管壁に沿って積分する。ここで下記の関係から

$$cos(t)=\frac{y}{a} \qquad \frac{dy}{adt}=sin(t)=\frac{\sqrt{a^2-y^2}}{a}$$

$$\begin{aligned}
dF_y&=\int_0^{\pi}2\,a\,p\cos(t)\;dt=\int_{-a}^{a}\frac{2\,p\,y}{\sqrt{a^2-y^2}}\,dy\\
&=-\int_{-a}^{a}\frac{y\,\left(\rho\,(U+2\,\Omega\,y)^2-2\,\rho\,H+\rho\,\left(\Omega^2\,\left(-y^2-x_d^2\right)+2\,g\,z\right)\right)}{\sqrt{a^2-y^2}}dy\\
&=-2\,\pi\,a^2\,\Omega\,\rho\,U
\end{aligned}$$

半径方向に積分して、長さ：L の円管で作用するモーメント：MT_1 は、

$$MT_1=\int_0^{L}-2\,\pi\,a^2\,\Omega\,\rho\,U\,x\,dx=-2\,\pi\,a^2\,\Omega\,\rho\,L^2\,U$$

Bernoulli の定理を入口と出口に適用すると、回転する円管の平均流速は

$$\frac{U^2}{2}-\frac{\Omega^2\,L^2}{2}+\frac{p_0}{\rho}=H$$

```
kill(all);
/* 回転動座標系 */
/* 回転する円管 */
assume(\Omega>0);
assume(\rho>0);
assume(L>0);
assume(U>0);
BE1:1/2*V^2+p/\rho+gz-1/2*\Omega^2*(x[d]^2
  +y[d]^2)=H;
UR1:u=U+2*\Omega*y[d];
solve(BE1,p)[1];
subst([V=rhs(UR1)],%);
PR1:subst([y[d]=y],%);
assume(a>0);
DFY1:2*p*a*cos(t)*dt;
subst([cos(t)=y/a],%);
subst([dt=dy/a/sin(t)],%);
subst([sin(t)=sqrt(a^2-y^2)/a],%);
subst([PR1],%);
'integrate(%/dy,y,-a,a);
DFY2:ev(%,integrate);
'2*integrate(DFY2*x,x,0,L);
MT1:ev(%,integrate);
subst([p=p[0],y[d]^2=0,x[d]^2=L^2,V=U,gz=0
 ],BE1);
solve(%,U)[2];
MS2:2*%pi*a^2*U*\rho;
F2:U*MS2;
MT2:F2*L*sin(\theta);
abs(MT1)=MT2;
%/2/%pi/a^2/\rho/L/U;
```

$$U=\frac{\sqrt{\Omega^2\,\rho\,L^2+2\,\rho\,H-2\,p_0}}{\sqrt{\rho}}$$

$H<p_0/\rho$ の場合でも円管を回転させれば水を吸い上げることができる。これが遠心ポンプの原理である。いま、円管の先を x 軸と角度:θ だけ角度を持たせる。この先から放出される単位時間あたりの水の質量は、$2\,\pi\,a^2\,\rho\,U$、運動量は $2\,\pi\,a^2\,\rho\,U^2$ となる。これにより円管を回転させるモーメント：MT_2 は、

$$MT_2=2\,\pi\,a^2\,\rho\sin(\theta)\;L\,U^2$$

円管を角速度：Ω で回転させるには、$MT_1=MT_2$ から、下記となり、整理して、

$$2\,\pi\,a^2\,\Omega\,\rho\,L^2\,U=2\,\pi\,a^2\,\rho\sin(\theta)\;L\,U^2$$

$$\Omega\,L=\sin(\theta)\;U$$

4.5　せき

例題 4.5.1　三角せき

下図の三角せきの流量：Q を求める。

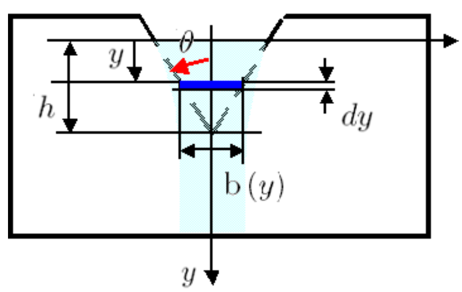


図 4.5.1: 三角せき

```
kill(all);
/* 三角せき */
assume(h>0);
assume(\theta>0);
U1:u=sqrt(2*g*y);
Q1:dQ=u*b(y)*dy;
Q2:subst([U1],Q1);
Q3:Q='integrate(rhs(Q2)/dy,y,0,h);
B1:b(y)=2*(h-y)*tan(\theta);
EQ1:subst([B1],Q3);
EQ2:ev(%,integrate);
```

せきの深さ：h、切りかき角度：θ とする。せきの上流水位を原点に y 軸をとる。y 下方の dy 幅のスリットにおいて Torricelli の定理：(4.1.1) 式を適用した流速：u、この部分からの流量：dQ は下記となる。

$$u=\sqrt{2}\sqrt{g\,y}$$

$$dQ=dy\,u\,\mathrm{b}\left(y\right)=\sqrt{2}\,dy\,\sqrt{g\,y}\,\mathrm{b}\left(y\right)$$

せきの幅は下記で表現できる。

$$\mathrm{b}\left(y\right)=2\tan\left(\theta\right)\,\left(h-y\right)$$

流量は上記を積分して、

$$\begin{aligned}Q&=\sqrt{2}\int_{0}^{h}\sqrt{g\,y}\,\mathrm{b}\left(y\right)dy\\&=2^{\frac{3}{2}}\tan\left(\theta\right)\int_{0}^{h}\left(h-y\right)\,\sqrt{g\,y}dy\\&=\frac{2^{\frac{7}{2}}\,\sqrt{g}\,h^{\frac{5}{2}}\tan\left(\theta\right)}{15}\end{aligned}$$

例題 4.5.2　もぐりせき

下図のもぐりせきの流量：Q を求める。

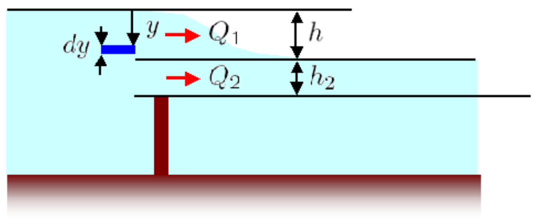


図 4.5.2: もぐりせき

```
kill(all);
/* もぐりせき */
assume(h>0);
U1:u=sqrt(2*g*y);
Q1:dQ=u*b(y)*dy;
Q2:subst([U1],Q1);
Q3:Q[1]='integrate(rhs(Q2)/dy,y,0,h);
B1:b(y)=B;
EQ1:subst([B1],Q3);
EQ2:ev(%,integrate);
U2:subst([y=h],U1);
Q21:subst([U2],Q1);
Q4:Q[2]='integrate(rhs(Q21)/dy,y,0,h[2]);
EQ3:subst([B1],Q4);
EQ4:ev(%,integrate);
EQ5:rootscontract(EQ2+EQ4);
```

下流の水位と上流の水位差：h、せき上端からの下流水位：h_2 とする。せきの上流水位を原点に下方に y 軸をとる。y 下方の dy 幅のスリットにおいて Torricelli の定理：(4.1.1) 式を適用する。下流の水位と上流の水位の間では、流速：u、スリット部分からの流量：dQ は下記となる。これを積分し、この部分の流量：Q_1 は下記となる。

$$u=\sqrt{2}\sqrt{g\,y}\quad dQ=dy\,u\,\mathrm{b}\left(y\right)\quad \mathrm{b}\left(y\right)=B$$

$$\begin{aligned}Q_1&=\sqrt{2}\int_{0}^{h}\sqrt{g\,y}\,\mathrm{b}\left(y\right)dy=\sqrt{2}\int_{0}^{h}\sqrt{g\,y}dy\,B\\&=\frac{2^{\frac{3}{2}}\,\sqrt{g}\,h^{\frac{3}{2}}\,B}{3}\end{aligned}$$

せき上端と下流の水位の間では、同様に下記となる。

$$u=\sqrt{2}\sqrt{g}\sqrt{h}\quad dQ=\sqrt{2}\,dy\,\sqrt{g}\sqrt{h}\,\mathrm{b}\left(y\right)$$

$$Q_2=\sqrt{2}\sqrt{g}\sqrt{h}\int_{0}^{h_2}\mathrm{b}\left(y\right)dy=\sqrt{2}\,h_2\,\sqrt{g}\sqrt{h}\,B$$

上記を合わせて、全体の流量：Q は、

$$Q=Q_2+Q_1=\frac{\sqrt{8\,g\,h^3}\,B}{3}+h_2\,\sqrt{2\,g\,h}\,B$$

4.6 開水路

4.6.1 ベルヌイの定理（開水路）

下図の開水路に Bernoulli の定理 : (2.8.4) 式、(30 ページ) を適用する。

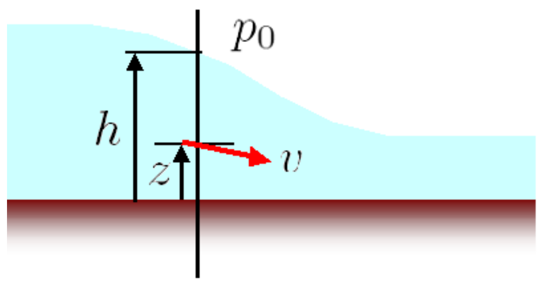


図 4.6.1: ベルヌイの定理（開水路）

```
kill(all);
/* 開水路　ベルヌイの定理 */
BE1:v^2/2/g+p/\rho/g+z=H;
P1:p=p[0]+\rho*g*(h-z);
BE2:expand(subst([P1],BE1));
```

上図の底面から z の位置にある点では Bernoulli の定理を水頭で表すと下記となる。ここで z は水の中の任意点で底面からの高さ : z、底面から水面までの高さ : h、流速 : v、大気圧 : p_0 とする。

$$z+\frac{v^2}{2\,g}+\frac{p}{g\,\rho}=H$$

なだらかな水位変化の場合、z 点の圧力分布を下記のように仮定でき、

$$p=g\,\rho\,(h-z)+p_0$$

上記を Bernoulli の定理に代入すると下記となる。これは水面の流線に沿って Bernoulli の定理を適用したものと同じである。即ち、どの位置でも下記の式が成り立つ。

$$\frac{v^2}{2\,g}+\frac{p_0}{g\,\rho}+h=H \tag{4.6.1}$$

4.6.2 一様・定常流

断面が一定で底面勾配が一定な水路における定常流れについて検討する。赤い破線で囲まれた検査面について検討する。基準面から水深の半分の位置を z_1, z_2 とする。この位置における圧力を p_1, p_2 とし、これは検査断面積 : A の平均圧力に相当する。z_1, z_2 のおける流速を v_1, v_2、摩擦損失ヘッドを h_f、傾斜角 : θ とする。Bernoulli の定理 : (2.8.4) 式、(30 ページ) をヘッドの形で表現すると下記の式となる。

$$\frac{p_1}{g\,\rho}+\frac{v_1^2}{2\,g}+z_1=\frac{p_2}{g\,\rho}+\frac{v_2^2}{2\,g}+h_f+z_2$$

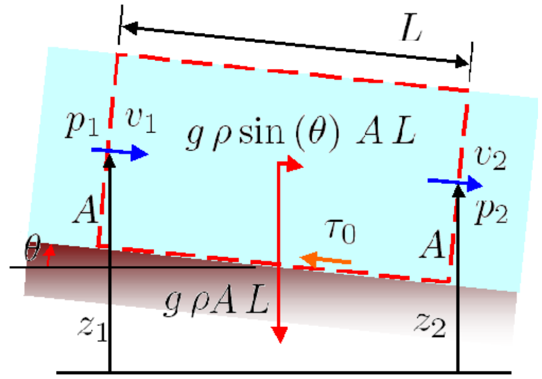


図 4.6.2: 一様・定常流

```
kill(all);
/* 開水路　一様・定常流 */
BE3:p[1]/\rho/g+v[1]^2/2/g+z[1]=p[2]/\rho/g
  +v[2]^2/2/g+z[2]+h[f];
HF1:solve(BE3,h[f])[1];
P1:solve(BE3,p[1])[1];
F1:(p[1]-p[2])*A+\rho*g*A*L*sin(\theta)
  -\tau[0]*L*s=0;
TU1:\tau[0]=l*\rho*v^2/8;
subst([TU1,P1,v[1]=v[2],z[1]=z[2]
  +L*sin(\theta)],F1);
J1:solve(%,v)[2];
J2:subst([A=m*s,h[f]=i*L],J1);
```

一様で定常流と仮定すると、流量一定、断面積 : A 不変から $v=v_1=v_2$ となる。赤い破線で囲まれた領域に運動量の定理を適用すると、領域に流れ込む流れに基づくものは零となり、領域に作用する力も零となる。作用する力は左右面に作用する圧力項、摩擦損失項、重量傾斜項から次式となる。ここで断面のぬれ長さ : s、検査断面間隔 : L、壁面・底面の剪断応力 : τ とする。

$$g\,\rho\sin(\theta)\;A\,L-\tau_0\,s\,L+(p_1-p_2)\;A=0$$

摩擦項の剪断応力を次式で表現する。ここで摩擦損失係数：l とする。

$$\tau_0 = \frac{l\,\rho\,v^2}{8}$$

上式と Bernoulli の定理から流速：v を求めると、

$$v = 2^{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{h_f\,g\,A}{l\,s\,L}}$$

断面積：A とぬれ長さ：s から次式の関係がある平均深さ：m を導入する。また、定常となるためには摩擦損失：h_f が水路の勾配：i と下記の関係となる。

$$A = m\,s \quad h_f = i\,L$$

整理して、流速：v を求めると、ここで流速係数：C とする。

$$v = 2^{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{g\,i\,m}{l}} = C\sqrt{i\,m} \tag{4.6.2}$$

4.6.3　流れのエネルギー

開水路のある断面のエネルギーについて検討する。底面の傾斜が無く、損失がないとする。

```
kill(all);
/* 開水路　流れのエネルギー */
E1:E=y+v^2/2/g;
Q1:Q=v*A;
Q2:solve(Q1,v)[1];
E2:subst([Q2],E1);
Q3:v=q/y;
Q4:solve(Q3,q)[1];
E3:subst([Q3],E1);
'diff(E,y,1)=diff(rhs(E3),y,1);
C1:rhs(%)=0;
solve(C1,y)[3];
subst([Q4],C1);
C2:solve(%,v)[2];
subst([%],Q1);
C3:subst([A=B*y],%)^2;
assume(A>0);
assume(Q>0);
solve(C3,y)[3];
C4:subst([y=h[c]],%);
C5:subst([v=v[c],y=h[c]],C2);
q:1;
g:9.8;
plot2d([x+q^2/(2*g*x^2),x],[x,0,2],[y,0,2]
 );
```

水深：y、流速：v とすると Bernoulli の定理：(4.6.1) 式、(73 ページ) から比総エネルギー (specific energy)：E は下記となる。

$$E = y + \frac{v^2}{2\,g} \tag{4.6.3}$$

速度を流量の式：$Q = v\,A$ から上式は、

$$E = \frac{Q^2}{2\,g\,A^2} + y$$

また速度を縦の単位幅の流量：q で表現すると、

$$E = y + \frac{q^2}{2\,g\,y^2} \quad v = \frac{q}{y}$$

上式を図で表すと下図となる。この図からある一定のエネルギーでは 2 種類の水位 y_1, y_2 となる流れがある。水位が低い：y_1 の流れを射流 (rapid flow)、水位が高い：y_2 の流れを常流 (tranquil flow) という。また、最下端が限界点で、その水位、流速は上式を y で微分し零とおいて得られ下記となる。

$$\frac{d}{d\,y}\,E = 1 - \frac{q^2}{g\,y^3} = 0$$

$$y = \frac{q^{\frac{2}{3}}}{g^{\frac{1}{3}}} \quad v = \sqrt{g\,y}$$

上式を流量 : Q、全幅 : B で表現すると、限界水深 : h_c、限界流速 : v_c は次式となる。

$$h_c = \frac{Q^{\frac{2}{3}}}{g^{\frac{1}{3}}\, B^{\frac{2}{3}}} \qquad v_c = \sqrt{h_c\, g}$$

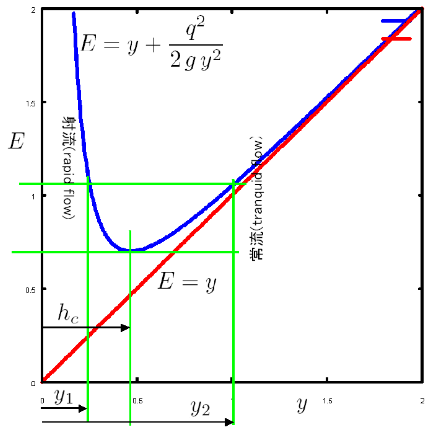


図 4.6.3: 比エネルギー (specific energy)

4.6.4　流れの運動量

開水路のある断面の運動量について検討する。

```
kill(all);
/* 開水路　流れの運動量 */
Q3:v=q/y;
MT1:\rho*Q*(v[2]-v[1])=p[1]*b[1]*d[1]
   -p[2]*b[2]*d[2]+W*sin(\theta)-F[f];
MT11:subst([p[1]=\rho*g*d[1]/2,p[2]
   =\rho*g*d[2]/2],MT1);
subst([\theta=0,F[f]=0],MT11);
v[2]*rho*Q+(b[2]*d[2]^2*g*\rho)/2=v[1]*rho
 *Q+(b[1]*d[1]^2*g*\rho)/2;
v[1]*rho*Q+(b[1]*d[1]^2*g*\rho)/2;
MT2:F=expand(subst([v[1]=Q/A,b[1]=A/d[1],
   d[1]=y],%)/\rho/g);
subst([Q=v*A],MT2);
MT3:expand(subst([Q3],%)/A);
```

図 4.6.2 で赤い破線で囲まれた領域について運動量を適用すると下記となる。ここで、流速 : v_1, v_2、流量 : Q、圧力 : p_1, p_2、水深 : d_1, d_2、水路幅 : b_1, b_2、摩擦力 : F_f、囲まれた領域の水の重量 : W、傾斜角 : θ とする。

$$(v_2 - v_1)\, \rho\, Q = \sin(\theta)\, W - F_f - b_2\, d_2\, p_2 + b_1\, d_1\, p_1$$

圧力が水深に比例して変化するとすると、平均圧力は下記となる。

$$p_1 = \frac{\rho\, g\, d_1}{2}, \quad p_2 = \frac{\rho\, g\, d_2}{2}$$

上式を運動量の式に代入すると、

$$(v_2 - v_1)\, \rho\, Q = \sin(\theta)\, W - \frac{b_2\, d_2^2\, g\, \rho}{2} + \frac{b_1\, d_1^2\, g\, \rho}{2} - F_f$$

底面の傾斜が無く、摩擦損失がないとし、項を入れ替えると

$$F = \frac{b_2\, d_2^2\, g\, \rho}{2} + v_2\, \rho\, Q = \frac{b_1\, d_1^2\, g\, \rho}{2} + v_1\, \rho\, Q$$

ρg で割り、整理すると、

$$F = \frac{Q^2}{g\, A} + \frac{y\, A}{2} \quad or \quad F = \frac{y\, A}{2} + \frac{v^2\, A}{g} \qquad (4.6.4)$$

4.6.5 ゆるやかに水位が変化する流れ

一様断面の水路でゆるやかに水位が変化する定常流を検討する [1]。

```
kill(all);
/* 開水路　運動方程式 */
BE4:v^2/2/g+z+y;
BEDX1:'diff(BE4,x,1)=-S[f]-'diff(v,t,1)/g;
subst(['diff(BE4,x,1)='diff(z,x,1)
  +'diff(y,x,1)+v/g*'diff(v,x,1)],%);
BEDX2:subst(['diff(z,x,1)=-S[0]],%)+S[0];
BEDX3:subst(['diff(v,t,1)=0],BEDX2);
subst(['diff(v,x,1)='diff(v,y,1)
  *'diff(y,x,1)],BEDX3);
DYX1:solve(%,'diff(y,x,1))[1];
DVY1:'diff(v,y,1)=Q*diff(1/A,A,1)
  *'diff(A,y,1);
subst([DVY1,v=Q/A],DYX1);
DYX2:subst(['diff(A,y,1)=B],%);
C4^3;
solve(%,Q);
ratsimp(subst([%],DYX2));
DYX3:ratsimp(subst([A=B*h],%));
subst([h^3=1,h[c]^3=h[c]^3/h^3,S[f]-S[0]
  =-S[0]*(1-S[f]/S[0]),y=h],DYX3);
```

基準から底面までの高さ：z、水位：y、流速：v とすると Bernoulli の定理：(4.6.1) 式、(73 ページ) から

$$H=z+y+\frac{v^2}{2\,g}$$

上記の流れの方向：x の微小範囲：dx のヘッド差はその間に作用する力に等しい。dx 間に作用する力は摩擦と加速度に基づく力があり下記となる。

$$\frac{d}{d\,x}\left(z+y+\frac{v^2}{2\,g}\right)=-\frac{\frac{d}{d\,t}\,v}{g}-S_f$$

整理して、

$$\frac{d}{d\,x}\,z+\frac{d}{d\,x}\,y+\frac{v\,\left(\frac{d}{d\,x}\,v\right)}{g}=-\frac{\frac{d}{d\,t}\,v}{g}-S_f$$

底面の勾配：S_0 とすると、$\frac{d}{d\,x}\,z=-S_0$ となり、これを代入し、定常流であるとして加速度項を省略すると下記となる。

$$\frac{d}{d\,x}\,y+\frac{v\,\left(\frac{d}{d\,x}\,v\right)}{g}=S_0-S_f$$

$\frac{d}{d\,x}\,v$ の項を下記のように変形し、$\frac{d}{d\,x}\,y$ でまとまると、

$$\frac{v\,\left(\frac{d}{d\,y}\,v\right)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)}{g}+\frac{d}{d\,x}\,y=S_0-S_f$$

[1] Handbook of Fluid Dynamics, Open Channel Flow, Steady Gradually Veried Flow, 24.14 Flow Analysis P.24-17 [14)]

$$\frac{d}{d\,x}\,y=-\frac{\left(S_f-S_0\right)\,g}{v\,\left(\frac{d}{d\,y}\,v\right)+g}$$

下記の項の速度：v を流量：Q で $v=Q/A$ と表す。流量：Q は一定であるが、断面積：A は水位により変化するので、下記の関係が得られる。

$$\frac{d}{d\,y}\,v=-\frac{\left(\frac{d}{d\,y}\,A\right)\,Q}{A^2}$$

上式を代入し、

$$\frac{d}{d\,x}\,y=-\frac{\left(S_f-S_0\right)\,g}{g-\frac{\left(\frac{d}{d\,y}\,A\right)\,Q^2}{A^3}}$$

$dA=Bdy$ であるから

$$\frac{d}{d\,x}\,y=-\frac{\left(S_f-S_0\right)\,g}{g-\frac{B\,Q^2}{A^3}}$$

下記の限界水位：h_c を使って表現すると、

$$h_c^3=\frac{Q^2}{g\,B^2}$$

$$\frac{d}{d\,x}\,y=\frac{\left(S_f-S_0\right)\,A^3}{h_c^3\,B^3-A^3}$$

$A=hB$ から、

$$\frac{d}{d\,x}\,y=-\frac{\left(S_f-S_0\right)\,h^3}{h^3-h_c^3}$$

整理して、

$$\frac{d}{d\,x}\,h=\frac{S_0\,\left(1-\frac{S_f}{S_0}\right)}{1-\frac{h_c^3}{h^3}}$$

上式から、S_0 の正負、S_f と S_0 の大小、h と h_c の大小で、水位の変化：$\frac{d}{d\,x}\,h$ の正負、即ち、水位の増減が左右されることがわかる。

例題 4.6.6　跳水現象

開水路で流れの状態として、常流と射流がある。常流から徐々に流速を上げて限界流速から射流に連続的に変化していく。流速が速い流れ：射流から速度が遅くなる場合、連続的に変化せず急激に常流に変化する。この現象を跳水現象という。この跳水現象に伴う損出ヘッドを求める。

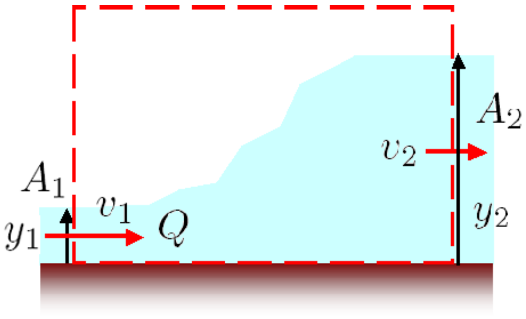


図 4.6.4: 跳水現象

```
kill(all);
/* 開水路　跳水現象 */
F1:Q^2/(g*A[1])+(y[1]*A[1])/2=Q^2/(g*A[2])
  +(y[2]*A[2])/2;
subst([A[1]=y[1]*B,A[2]=y[2]*B],F1);
F2:subst([Q=v[1]*B*y[1]],%);
F21:solve(%,y[2])[2];
F3:subst([v[1]=F[n1]*sqrt(g*y[1])],%)/y[1];
F4:lhs(F3)=subst([y[1]=1,g=1],rhs(F3));
CO10:v[1]*y[1]*B=v[2]*y[2]*B;
CO11:solve(CO10,v[2])[1];
BE5:y[1]+v[1]^2/2/g=y[2]+v[2]^2/2/g+dh;
BE6:subst([CO11],BE5);
F5:solve(F2,v[1]^2)[1];
subst([F5],BE6);
DH:solve(%,dh)[1];
factor(%);
```

上流側と下流側の検査面で、流速：v_1, v_2、水位：y_1, y_2、断面積：A_1, A_2、流量：Q とすると、流れの運動量の式：(4.6.4) 式から両検査面の力が等しい $F_1 = F_2$ として

$$\frac{Q^2}{A_1\,g}+\frac{y_1\,A_1}{2}=\frac{Q^2}{A_2\,g}+\frac{y_2\,A_2}{2}$$

下記の関係式を

$$A_1 = y_1\,B,\quad A_2 = y_2\,B,\quad Q = v_1\,B\,y_1$$

上記運動量の式に代入し下記を得る。

$$\frac{v_1^2\,y_1\,B}{g}+\frac{y_1^2\,B}{2}=\frac{v_1^2\,y_1^2\,B}{y_2\,g}+\frac{y_2^2\,B}{2}$$

上式から y_2 を求めると、

$$y_2=\frac{\sqrt{y_1^2\,g^2+8\,v_1^2\,y_1\,g}-y_1\,g}{2\,g}$$

下記のフルード数：F_{n1} を導入し、上式を整理すると、

$$v_1 = F_{n1}\sqrt{g\,y_1}$$

$$\frac{y_2}{y_1}=\frac{\sqrt{8\,F_{n1}^2+1}-1}{2}$$

$F_{n1} \approx 1$ では水位変化はなく、$F_{n1} >> 1$ の時激しい跳水現象がおきる。

流れのエネルギーの式：(4.6.3) 式から両検査面のエネルギーヘッドに損失ヘッド：dh を加えて、

$$\frac{v_1^2}{2\,g}+y_1=\frac{v_2^2}{2\,g}+dh+y_2$$

下記の流量：Q の式を代入し、

$$Q = v_1\,y_1\,B = v_2\,y_2\,B$$

v_1 を求め、

$$v_1^2=\frac{\left(y_2^2+y_1\,y_2\right)\,g}{2\,y_1}$$

損失ヘッド：dh を求めると、

$$dh=\frac{\left(y_2-y_1\right)^3}{4\,y_1\,y_2}$$

例題 4.6.7　開水路水の過渡現象（ダムの崩壊モデル）

長方形断面水路にダムがあり、ゲートで水を貯めていたとする。いま、ゲートを全て取り除いた時の水深の変化について調べる [1]。下流方向：を x 軸、水深の上方を y 軸とし、流速：V、波の伝わる速度：c、時間:t、密度：ρ、重力加速度：g とする。

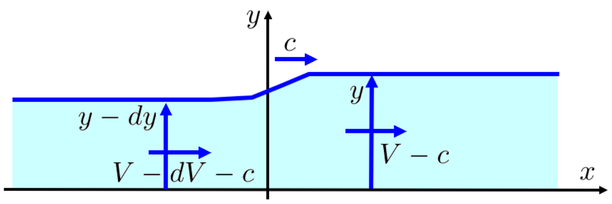


図 4.6.5: 過渡現象座標系

```
/* 開きょの過渡水波　ダムの崩壊モデル　*/
kill(all);
load("vect")$
depends(V,[y]);
assume(g>0);
assume(y>0);
/* 方程式　*/
CN1:(V-dV-c)*(y-dy)=(V-c)*y;
lhs(%)-rhs(%)=0;
expand(%);
subst([dy*dV=0],%);
solve(%,dV)[1];
CN2:expand(%/dy);
MT1:\rho/2*(y-dy)^2-\rho/2*y^2=\rho/g*(V-c)
 *y*((V-c)-(V-dV-c));
lhs(%)-rhs(%)=0;
expand(%);
MT2:subst([dy^2=0],%);
solve(%,dV)[1];
MT2:expand(%/dy);
rhs(CN2)=rhs(MT2);
%*y*(V-c);
factor(%);
VY1:c=V+sqrt(g)*sqrt(y);
VY1D:c=V-sqrt(g)*sqrt(y);
```

波の前後の質量保存の法則から、

$$(y-dy)\ (V-dV-c)=y\ (V-c)$$

微小項の高次の項を省略し、整理すると、

$$\frac{dV}{dy}=\frac{c}{y}-\frac{V}{y} \tag{4.6.5}$$

[1] Victor L. Streeter, E. Benjamin Wylie：竹中利夫訳：流体過渡現象 20), 15. 開きょの過渡現象、　P.275

波の前後で右辺に単位時間あたりの運動量差を、左辺に圧力を直線分布とした水圧差による作用力を示すと、

$$\frac{\rho\,(y-dy)^2}{2}-\frac{\rho\,y^2}{2}=\frac{\rho\,y\,(V-c)\,((V-c)-(V-dV-c))}{g}$$

微小項の高次の項を省略し、整理すると、

$$\frac{dV}{dy}=-\frac{g}{V-c} \tag{4.6.6}$$

(4.6.5) 式と (4.6.6) 式から、

$$\frac{c}{y}-\frac{V}{y}=-\frac{g}{V-c}$$

上式から、

$$-(V-c)^2=-g\,y$$

c を求めると、

$$c=V\pm\sqrt{g}\,\sqrt{y} \tag{4.6.7}$$

水深：y で流路を流れる速さに波の伝搬速度：$\sqrt{y\,g}$ を合わせた流れとなっている。ここで波の伝搬速度：$\sqrt{y\,g}$ は、「表面波　9.2.2 位相速度 (536 頁)」の浅水の場合の波面形状の移動速度である位相速度：(9.2.20) 式と一致しており、「9.2.6 群速度 (540 頁)」の群速度：(9.2.40) 式および「9.2.7 エネルギー速度 (542 頁)」のエネルギー速度：(9.2.42) 式 から浅水では波面形状の移動速度である位相速度とエネルギー速度も一致している。

```
factor(subst([VY1],CN2));
factor(subst([VY1],MT2));
diff(V,y,1)=sqrt(g/y);
VY2:ode2(%,V,y);
factor(subst([VY1D],CN2));
factor(subst([VY1D],MT2));
diff(V,y,1)=-sqrt(g/y);
VY21:ode2(%,V,y);
subst([V=V[0],y=y[0]],VY2);
solve(%,%c)[1];
VY3:subst([%],VY2);
VY11:subst([VY3],VY1);
X1:x=c*t;
X11:subst([VY11],X1);
solve(%,sqrt(y))[1];
%^2;
```

(4.6.5) 式と (4.6.6) 式に (4.6.7) 式を代入すると、

$$\frac{d}{d\,y}V=\pm\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{y}}$$

上式を ode2 関数で解くと、

$$V=\pm 2\sqrt{g}\,\sqrt{y}+\%c \tag{4.6.8}$$

x 軸の正の方向にダムの水のたまりがあり、$y=y_0$ で $V=V_0$ とすると、± の正の記号をとり、

$$V_0 = 2\sqrt{y_0}\sqrt{g} + \%c$$

上式から、$\%c$ を求め、(4.6.7) 式に代入し、

$$V = 2\sqrt{g}\sqrt{y} - 2\sqrt{y_0}\sqrt{g} + V_0 \tag{4.6.9}$$

上式を (4.6.8) 式に代入し、

$$c = 3\sqrt{g}\sqrt{y} - 2\sqrt{y_0}\sqrt{g} + V_0 \tag{4.6.10}$$

また、水面の形状は、

$$x = c\,t$$

上式に (4.6.10) 式を代入し、

$$x = t\,\left(3\sqrt{g}\sqrt{y} - 2\sqrt{y_0}\sqrt{g} + V_0\right) \tag{4.6.11}$$

上式から、別の形で表現すると、

$$\sqrt{y} = \frac{x + \left(2\sqrt{y_0}\sqrt{g} - V_0\right)\,t}{3\sqrt{g}\,t}$$

$$y = \frac{\left(x + \left(2\sqrt{y_0}\sqrt{g} - V_0\right)\,t\right)^2}{9\,g\,t^2} \tag{4.6.12}$$

ダムの崩壊モデルでは、初期の貯水は静止しているので、$V_0=0$ とする。このとき、(4.6.12) 式から、$x=0$ で、時間に関係なく、水深は $y=\frac{4}{9}\,y_0$ で変化ないことを示している。また、(4.6.10) 式から、水の先端：$y=0$ では流速：$2\sqrt{y_0\,g}$ で伸び、ダムの水位：$y=y_0$ では、流速：$\sqrt{y_0\,g}$ で後退する。

```
X12:subst([t=0.001,V[0]=0,y[0]=1,g=9.8],
 rhs(X11));
X13:subst([t=0.05,V[0]=0,y[0]=1,g=9.8],
 rhs(X11));
X14:subst([t=0.1,V[0]=0,y[0]=1,g=9.8],
 rhs(X11));
X15:subst([t=0.15,V[0]=0,y[0]=1,g=9.8],
 rhs(X11));
X16:subst([t=0.2,V[0]=0,y[0]=1,g=9.8],
 rhs(X11));
plot2d([X12,X13,X14,X15,X16],[y,0,1],
 [x,0,1.5],[legend,"t=0.001s","t=0.05s",
  "t=0.1s","t=0.15s","t=0.2s"])
```

下記に、初期水深：$y_0=1m$ の場合のダムの崩壊モデルの水位変化を示す。

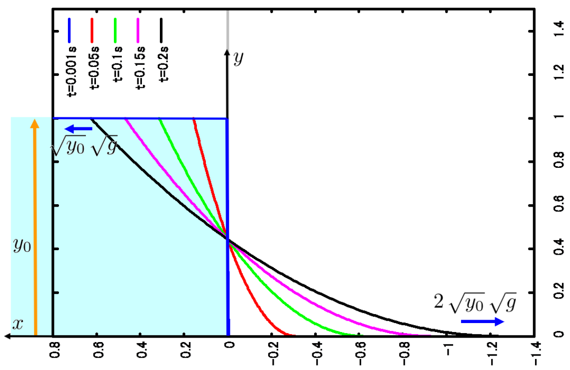


図 4.6.6: ダムの崩壊モデル

例題 4.6.8　円形開水路の経済的な形状

円形開水路でもっとも経済的な（摩擦損失が少ない→断面積一定で最大の流量を流す）円形開水路の水位と半径の関係を求める。

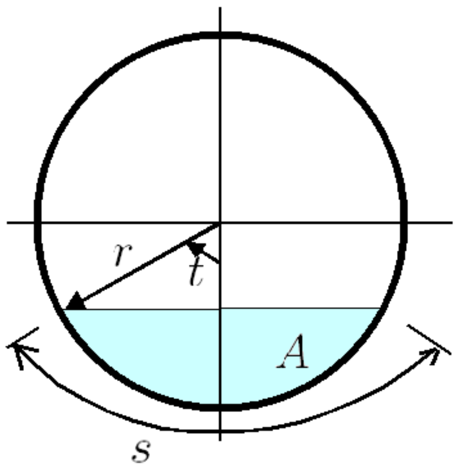


図 4.6.7: 円形開水路の経済的な形状

```
kill(all);
/* 円形開水路の経済的な形状 */
V1:v=C*sqrt(m*i);
M1:m=A/s;
Q1:Q=v*A;
Q2:subst([V1],Q1);
Q3:subst([M1],Q2);
A1:A=%pi*r^2*2*t/2/%pi
  -(r*sin(t))*(r*cos(t))/2*2;
S1:s=2*r*t;
A2:solve(A1,r)[2];
S2:subst([A2],S1);
DF1:trigsimp(diff(rhs(S2),t,1)=0);
T1:trigsimp(solve(%,t));
```

開水路の一様・定常流の摩擦損失と流量の関係は (4.6.2) 式、(74 ページ) から下記となる。ここで、水路の勾配：i、平均深さ：m、流速係数：C、断面積：A、ぬれ長さ：s とする。

$$v = \sqrt{i\,m}\,C \quad m = \frac{A}{s}$$

流量は下記で得られ、断面積：A 一定で最大の流量を流すにはぬれ長さ：s を最小にする角度：t を求めればよい。

$$Q = v\,A = A\,\sqrt{\frac{i\,A}{s}}\,C$$

断面積と角度：t の関係式は、

$$A = r^2\,t - r^2\cos(t)\,\sin(t)$$

ぬれ長さと角度の関係式は、

$$s = 2\,r\,t$$

下記の半径の式をぬれ長さの式に代入し、

$$r = \sqrt{-\frac{A}{\cos(t)\,\sin(t) - t}}$$

$$s = 2\,t\,\sqrt{-\frac{A}{\cos(t)\,\sin(t) - t}}$$

ぬれ長さを最小にする条件は、

$$\frac{d}{d\,t}\,s = \frac{\left(2\cos(t)\,\sin(t) - 2\,t\cos(t)^2\right)\,A}{\left(2\,t\cos(t)\,\sin(t) + \cos(t)^4 - \cos(t)^2 - t^2\right)\,\sqrt{-\frac{A}{\cos(t)\,\sin(t) - t}}} = 0$$

これを解くと

$$[t = \frac{\pi}{2}, t = \frac{\sin(t)}{\cos(t)}]$$

以上から半円：$t = \pi/2$ が経済的な開水路となる。

例題 4.6.9　台形開水路の経済的な形状

台形開水路でもっとも経済的な（摩擦損失が少ない→断面積一定で最大の流量を流す）台形開水路の形状を求める。

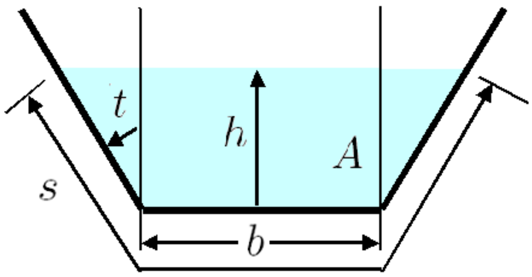


図 4.6.8: 台形開水路の経済的な形状

```
kill(all);
/* 台形開水路の経済的な形状 */
V1:v=C*sqrt(m*i);
M1:m=A/s;
Q1:Q=v*A;
Q2:subst([V1],Q1);
Q3:subst([M1],Q2);
A1:A=h*b+h*h*tan(t);
S1:s=b+2*h/cos(t);
A2:solve(A1,b)[1];
S2:subst([A2],S1);
diff(rhs(S2),h,1)=0;
H1:trigsimp(solve(%,h)[2]);
B1:subst([H1],A2);
BH1:trigsimp(B1/H1);
diff(rhs(S2),t,1)=0;
subst([sec(t)^2=1/(1-sin(t)^2),
  cos(t)^2=(1-sin(t)^2)],%);
subst([sin(t)=T],%);
T1:solve(%,T)[1];
subst([T=sin(t)],T1);
solve(%,t)[1];
subst([%],BH1);
```

開水路の一様・定常流の摩擦損失と流量の関係は (4.6.2) 式、(74 ページ) から下記となる。ここで、水路の勾配：i、平均深さ：m、流速係数：C、断面積：A、ぬれ長さ：s とする。

$$v=\sqrt{i\,m}\,C \qquad m=\frac{A}{s}$$

流量は下記で得られ、断面積：A 一定で最大の流量を流すにはぬれ長さ：s を最小にする水位：h、底の幅：b、台形の開き角度：t を求めればよい。

$$Q=v\,A$$

$$Q=\sqrt{i\,m}\,A\,C=A\,\sqrt{\frac{i\,A}{s}}\,C$$

台形の面積：A は、

$$A=h^2\tan(t)+b\,h$$

ぬれ長さ：s は、

$$s=\frac{2\,h}{\cos(t)}+b$$

次式をぬれ長さの式に代入し、

$$b=\frac{A-h^2\tan(t)}{h}$$

$$s=\frac{A-h^2\tan(t)}{h}+\frac{2\,h}{\cos(t)}$$

h を変数としてぬれ長さを最小にする条件は、

$$\frac{d}{d\,h}\,s=-\frac{A-h^2\tan(t)}{h^2}-2\tan(t)+\frac{2}{\cos(t)}=0$$

水位、底の幅は、

$$h=\frac{\sqrt{\cos(t)\;A}}{\sqrt{2-\sin(t)}}$$

$$b=\frac{\sqrt{2-\sin(t)}\,\left(A-\frac{\cos(t)\tan(t)\,A}{2-\sin(t)}\right)}{\sqrt{\cos(t)\;A}}$$

上記の比をとると、

$$\frac{b}{h}=-\frac{2\sin(t)-2}{\cos(t)}$$

t を変数としてぬれ長さを最小にする条件は、

$$\frac{d}{d\,t}\,s=\frac{2\,h\sin(t)}{\cos(t)^2}-h\sec(t)^2=0$$

上式を置き換えて、

$$\frac{d}{d\,t}\,s=\frac{2\,h\sin(t)}{1-\sin(t)^2}-\frac{h}{1-\sin(t)^2}=0$$

$$\frac{d}{d\,t}\,s=\frac{2\,h\,T}{1-T^2}-\frac{h}{1-T^2}=0$$

上式から、

$$T=\frac{1}{2}$$

$$\sin(t)=\frac{1}{2}$$

角度は、

$$t=\frac{\pi}{6}$$

水位と底の幅比は、

$$\frac{b}{h}=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

4.7　漏洩

気体がピンホールから漏れる現象は、ピンホールの大きさにより物理現象が異なり、その解析法も変わる。流路幅・高さに比べて流路長さが長い流路では、非常に小さなピンホールの場合には分子流が、比較的大きなピンホールでは粘性流が主現象となる。各現象についてその解析法を下記に示す。ここでは、容器内の空間は十分広く、そこで気体は静止しているとする。ピンホールから出た空間も十分広いとする。このときの容器などのモデルを下図とする。

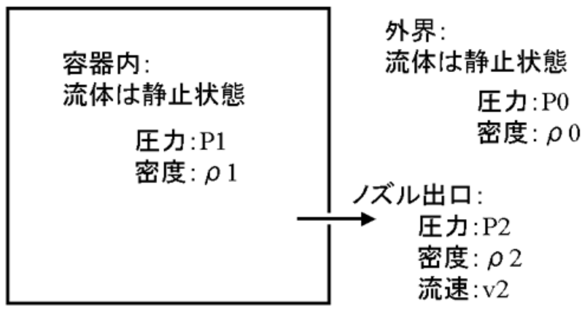


図 4.7.1: 漏洩のモデル

4.7.1　容器内圧力変化

漏洩検知方法として、一般的には、容器に加圧気体を封入、放置し、ある時間後に減圧があったとき、漏れがあると認識される。容器の外界圧力：P_0 とし、内容量：V の容器に気体を封入し、初期の圧力：P_1、温度：T_1 とし、t 時間後に、容器の圧力：P_2、温度：T_2 になったとする。

```
kill(all);
PV1:p*V=\nu*R*T;
PV2:P[1]*V/T[1]=P[2]*(V+dV)/T[2];
DV1:solve(%,dV)[1];
PV3:P[2]*dV/T[2]=P[0]*V[l]/T[0];
DV2:solve(%,dV)[1];
rhs(DV1)=rhs(DV2);
QL1:factor(solve(%,V[l])[1]);
%/T[0]/V*P[0];
lhs(%)=expand(rhs(%));
VL1:%*T[0]*V/P[0];
Q[l]=V[l]/t;
QL1:subst([VL1],%);
Q1:Q=lhs(%)*P[0];
subst([QL1],Q1);
```

気体の状態方程式は次式である。

$$PV = \nu\, R\, T \tag{4.7.1}$$

ここで、P　：圧力
V　：体積
ν　：気体のモル数
R　：気体定数
T　：絶対温度

上記から、PV/T：一定となる。圧力：P_2 となったときに外部に漏れた体積：dV とすると、

$$\frac{P_1\, V}{T_1} = \frac{P_2\, V + P_2\, dV}{T_2}$$

ここで、P_1　：初期容器内初期封入圧力
T_1　：初期容器内気体絶対温度
V　：容器体積
P_2　：t 時間後の容器内圧力
T_2　：t 時間後の容器内気体絶対温度
dV　：圧力：P_2 での漏洩体積
P_0　：外界圧力
T_0　：外界気体絶対温度
V_ℓ　：外界圧力での漏洩体積
Q_ℓ　：平均リーク量
Q　：リーク量 Q 値

上式から dV は、

$$dV = \frac{(P_1\, T_2 - T_1\, P_2)\, V}{T_1\, P_2} \tag{4.7.2}$$

容器圧力：P_2 における漏洩体積：dV は外界圧力：P_0 における漏洩体積：V_ℓ となり、その関係は、

$$\frac{P_2\, dV}{T_2} = \frac{P_0\, V_\ell}{T_0}$$

上式から dV は、

$$dV = \frac{P_0\, T_2\, V_\ell}{T_0\, P_2} \tag{4.7.3}$$

(4.7.2) 式と (4.7.3) 式から、

$$\frac{(P_1\, T_2 - T_1\, P_2)\, V}{T_1\, P_2} = \frac{P_0\, T_2\, V_\ell}{T_0\, P_2}$$

上式から、漏洩体積：V_ℓ を求めると、

$$V_\ell = \frac{T_0 \left(\frac{P_1}{T_1} - \frac{P_2}{T_2}\right) V}{P_0}$$

上式から平均リーク量（平均漏洩流量）：Q_ℓ は下記となる。

$$Q_\ell = \frac{V_\ell}{t} = \frac{T_0 \left(\frac{P_1}{T_1} - \frac{P_2}{T_2}\right) V}{P_0\, t} \tag{4.7.4}$$

また、リーク量は出口圧力によって変化するので、一般に PV に相当する下記の Q 値が用いられる。また、センサー原理から Q 値は検知出力に比例しており、リーク量の評価に使用されている。

$$Q = P_0\, Q_\ell = \frac{T_0 \left(\frac{P_1}{T_1} - \frac{P_2}{T_2}\right) V}{t} \tag{4.7.5}$$

4.7.2 分子流

厚さの無視できる壁に開けられた分子レベルの非常に小さな孔を通って他方に流れ込む量は、下記の壁面を単位時間にたたく分子数と大きく関係している。

```
kill(all);
assume(\alpha>0);
assume(m>0);
assume(k>0);
assume(T>0);
assume(R>0);
PV1:p*V=\nu*R*T;
NA1:N=\nu*N[A];
NA11:solve(%,\nu)[1];
K1:k=R/N[A];
K11:solve(%,N[A])[1];
M1:M=m*N[A];
M11:solve(%,m)[1];
N1:n=N/V;
N11:solve(%,N)[1];
PV1/V;
subst([NA11],%);
subst([K11],%);
PV2:subst([N11],%);
MV1:2*m*v[x];
N1:v[x]*t/(2*L);
MVA1:MV1*N1/t;
V1:v^2=v[x]^2+v[y]^2+v[z]^2;
V2:v^2=3*v[x]^2;
V21:solve(%,v[x]^2)[1];
V22:solve(V1,v[x]^2)[1];
p=N*MVA1/L^2;
P1:subst([L^3=V],%);
P11:subst([V21],%);
%*V;
rhs(%)=rhs(PV1);
%/N*3;
subst([NA1],%);
MV2:subst([K11],%);
V3:%/m;
V31:v=sqrt(rhs(%));
subst([M11],V3);
subst([K1],%);
v=sqrt(rhs(%));
V32:factor(subst([V22],%));
```

気体の状態方程式と関連の式は下記である。

$$PV = \nu\,R\,T \tag{4.7.6}$$

$$N = \nu\,N_A, \quad k = \frac{R}{N_A}, \quad M = m\,N_A, \quad n = \frac{N}{V} \tag{4.7.7}$$

ここで、P ：圧力
V ：体積
ν ：気体のモル数
R ：気体定数
T ：絶対温度
N ：分子の総個数
N_A ：アボガドロ数 (1 モル中の分子数)
k ：ボルツマン定数
M ：分子量
m ：分子の質量
n ：気体分子密度
(単位体積に存在する分子量)

(4.7.6) 式を (4.7.7) 式を用いて圧力 : p を求めると、

$$p = \frac{\nu\,R\,T}{V} = \frac{N\,R\,T}{N_A\,V} = \frac{k\,N\,T}{V} = k\,n\,T \tag{4.7.8}$$

一辺 : L の立方体の中に一つの分子質量 : m の気体が入っているとする。この時の分子の x 軸方向の速度 : v_x とすると、この一つの分子が壁に当たって、壁に与える力積は、

$$\text{力積=運動量変化} = 2\,m\,v_x$$

t 秒間の分子の移動速度は $v_x\,t$、立方体内での一面に当たる回数は $v_x\,t/(2L)$ であるから、t 秒間の一つの分子の力積は、

$$t\ \text{秒間の力積} = \frac{m\,v_x^2\,t}{L}$$

上記の平均は、

$$\text{平均力積} = \frac{m\,v_x^2}{L}$$

総分子個数 : N の平均力積は、速度の二乗平均 : $\overline{v_x^2}$ とすると、立方体の一面に作用する力 : F は、

$$F = \frac{N\,m\,\overline{v_x^2}}{L}$$

立方体内の圧力 : p は、立方体の体積 : $V = L^3$ とすると、

$$p = \frac{N\,m\,\overline{v_x^2}}{L^3} = \frac{N\,m\,\overline{v_x^2}}{V} \tag{4.7.9}$$

全ての方向の分子速度の二乗平均 : $\overline{v^2}$ は、

$$\overline{v^2} = \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2} = 3\,\overline{v_x^2} \tag{4.7.10}$$

(4.7.9) 式に上式を代入し、

$$p = \frac{N\,m\,\overline{v^2}}{3\,V} \tag{4.7.11}$$

上式と (4.7.6) 式から、

$$p\,V = \frac{N\,m\,\overline{v^2}}{3} = \nu\,R\,T \tag{4.7.12}$$

(4.7.12) 式から次式が得られ、(4.7.7) 式の関係式から、

$$m\,\overline{v^2}=\frac{3\,\nu\,R\,T}{N}=\frac{3\,R\,T}{N_A}=3\,k\,T \tag{4.7.13}$$

全ての方向の分子速度の平均：$\overline{v}$ は上式と (4.7.7) 式の関係式から、

$$\overline{v}=\sqrt{\frac{3\,k\,T}{m}}=\sqrt{\frac{3\,k\,T\,N_A}{M}}=\sqrt{\frac{3\,R\,T}{M}} \tag{4.7.14}$$

```
G1:g(v)=f(v[x])*f(v[y])*f(v[z]);
H1:h(v^2)=f(v[x])*f(v[y])*f(v[z]);
'diff(h(v^2),v[x],1)*2*v[x]=diff(f(v[x]),
 v[x],1)*f(v[y])*f(v[z]);
%/2/v[x];
%/H1;
rhs(%)=-\alpha;
ode2(%,f(v[x]),v[x]);
FVX1:subst([%c=A],%);
FVY1:subst([x=y],%);
FVZ1:subst([y=z],%);
1='integrate(f(v[x]),v[x],-inf,inf);
subst([FVX1],%);
ev(%,integrate);
A1:solve(%,A)[1];
FVX1*FVY1*FVZ1;
subst([A1],%);
g(v)=rhs(%);
G2:factor(subst([V22],%));
p='integrate(2*N(v[x])*m*v[x]*f(v[x]),
 v[x],0,inf)/dS/dt;
subst([N(v[x])=n*v[x]*dS*dt],%);
subst([FVX1,A1],%);
P1:ev(%,integrate);
P2:p=n*k*T;
rhs(P1)=rhs(P2);
A2:solve(%,\alpha)[1];
FVX2:subst([A1,A2],FVX1);
G3:subst([A2],G2);
g(v)=rhs(G3)*v^2*sin(\theta);
g(v)='integrate('integrate(rhs(%),\theta,
 0,%pi),\psi,0,2*%pi);
G4:ev(%,integrate);
```

分子速度の x 軸方向成分の確率分布：$\mathrm{f}\left(v_x\right)$ とする。等方性であるから、y,z 軸方向成分の速度の確率分布も同じであり、各々：$\mathrm{f}\left(v_y\right),\mathrm{f}\left(v_z\right)$ となる。各方向の分子速度の確率分布：$\mathrm{g}\left(v\right)$ を各軸の積で表現できるとすると、

$$\mathrm{g}\left(v\right)=\mathrm{f}\left(v_x\right)\,\mathrm{f}\left(v_y\right)\,\mathrm{f}\left(v_z\right) \tag{4.7.15}$$

(4.7.10) 式から、下記の $\mathrm{h}\left(v^2\right)$ を考える [1]。

$$\mathrm{h}\left(v^2\right)=\mathrm{f}\left(v_x\right)\,\mathrm{f}\left(v_y\right)\,\mathrm{f}\left(v_z\right) \tag{4.7.16}$$

上式を v_x で微分すると、

$$2\,\left(\frac{d}{d\,v_x}\,\mathrm{h}\left(v^2\right)\right)\,v_x=\left(\frac{d}{d\,v_x}\,\mathrm{f}\left(v_x\right)\right)\,\mathrm{f}\left(v_y\right)\,\mathrm{f}\left(v_z\right)$$

上式を整理し、

$$\frac{d}{d\,v_x}\,\mathrm{h}\left(v^2\right)=\frac{\left(\frac{d}{d\,v_x}\,\mathrm{f}\left(v_x\right)\right)\,\mathrm{f}\left(v_y\right)\,\mathrm{f}\left(v_z\right)}{2\,v_x}$$

上式を (4.7.16) 式で割ると、

$$\frac{\frac{d}{d\,v_x}\,\mathrm{h}\left(v^2\right)}{\mathrm{h}\left(v^2\right)}=\frac{\frac{d}{d\,v_x}\,\mathrm{f}\left(v_x\right)}{2\,v_x\,\mathrm{f}\left(v_x\right)}$$

$v_y,\,v_z$ についても同様の結果が得られ、

$$\frac{\frac{d}{d\,v_x}\,\mathrm{h}\left(v^2\right)}{\mathrm{h}\left(v^2\right)}=\frac{\frac{d}{d\,v_x}\,\mathrm{f}\left(v_x\right)}{2\,v_x\,\mathrm{f}\left(v_x\right)}=\frac{\frac{d}{d\,v_y}\,\mathrm{f}\left(v_y\right)}{2\,v_y\,\mathrm{f}\left(v_y\right)}=\frac{\frac{d}{d\,v_z}\,\mathrm{f}\left(v_z\right)}{2\,v_z\,\mathrm{f}\left(v_z\right)}$$

これから、上式は次式に示す一定値：$-\alpha$ でなければならない。

$$\frac{\frac{d}{d\,v_x}\,\mathrm{f}\left(v_x\right)}{2\,v_x\,\mathrm{f}\left(v_x\right)}=-\alpha$$

上式を ode2 関数で解くと、

$$\mathrm{f}\left(v_x\right)=\%c\,e^{-\alpha\,v_x^2}$$

上式から、

$$\mathrm{f}\left(v_x\right)=e^{-\alpha\,v_x^2}\,A \tag{4.7.17}$$

$$\mathrm{f}\left(v_y\right)=e^{-\alpha\,v_y^2}\,A \tag{4.7.18}$$

$$\mathrm{f}\left(v_z\right)=e^{-\alpha\,v_z^2}\,A \tag{4.7.19}$$

(4.7.17) 式の確率分布を積分すると 1 であるから次式となり、

$$1=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{f}\left(v_x\right)dv_x=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha\,v_x^2}dv_x\,A=\frac{\sqrt{\pi}\,A}{\sqrt{\alpha}}$$

上式から、

$$A=\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\pi}} \tag{4.7.20}$$

(4.7.15) 式に (4.7.17) 式、(4.7.18) 式、(4.7.19) 式、(4.7.20) 式を代入すると、

$$\begin{aligned}\mathrm{g}\left(v\right)=&e^{-\alpha\,v_z^2-\alpha\,v_y^2-\alpha\,v_x^2}\,A^3=\frac{\alpha^{\frac{3}{2}}\,e^{-\alpha\,v_z^2-\alpha\,v_y^2-\alpha\,v_x^2}}{\pi^{\frac{3}{2}}}\\=&\frac{\alpha^{\frac{3}{2}}\,e^{-\alpha\,v^2}}{\pi^{\frac{3}{2}}}\end{aligned} \tag{4.7.21}$$

[1] 松田七美男：気体分子運動論の基礎、https://www.jstage.jst.go.jp/article/jvsj2/56/6/56_13-LC-020/_pdf

(4.7.17) 式から圧力 : p を求める。ある時間 : dt に衝突する総数 : N は長さ : $v_x\,dt$、面積 : dS の体積に含まれる分子数であるから、

$$N = n\,v_x\,dS\,dt \tag{4.7.22}$$

圧力 : p は、上式と力積 : $2\,m\,v_x$ から、

$$\begin{aligned} p =& \frac{2\,m}{dt\,dS}\int_0^{\infty} v_x\,\mathrm{f}\left(v_x\right)\,\mathrm{N}\left(v_x\right)dv_x \\ =& 2\,m\,n\int_0^{\infty} v_x^2\,\mathrm{f}\left(v_x\right)dv_x \\ =& \frac{2\,\sqrt{\alpha}\,m\,n}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} e^{-\alpha\,v_x^2}\,v_x^2 dv_x \\ =& \frac{m\,n}{2\,\alpha} \end{aligned} \tag{4.7.23}$$

また、(4.7.8) 式から、圧力 : p は、

$$p = k\,n\,T$$

上記二式から、

$$\frac{m\,n}{2\,\alpha} = k\,n\,T$$

以上から、

$$\alpha = \frac{m}{2\,k\,T} \tag{4.7.24}$$

(4.7.17) 式に (4.7.20) 式、(4.7.24) 式を代入し、

$$\mathrm{f}\left(v_x\right)dv_x = \frac{\sqrt{m}\,e^{-\frac{m\,v_x^2}{2\,k\,T}}}{\sqrt{2}\,\sqrt{\pi}\,\sqrt{k}\,\sqrt{T}}\,dv_x \tag{4.7.25}$$

上式から (4.7.15) 式は、

$$\mathrm{g}\left(v\right)dv = \frac{m^{\frac{3}{2}}\,e^{-\frac{m\,v^2}{2\,k\,T}}}{2^{\frac{3}{2}}\,\pi^{\frac{3}{2}}\,k^{\frac{3}{2}}\,T^{\frac{3}{2}}}\,dv_x\,dv_y\,dv_z \tag{4.7.26}$$

xyz 座標系の dv_x, dv_y, dv_z を極座標系の各方向の dv で表す。xyz 座標系と極座標系の関係式は、

$$\begin{aligned} x =& \cos\left(\phi\right)\,r\sin\left(\theta\right), \quad y = \sin\left(\phi\right)\,r\sin\left(\theta\right) \\ z =& r\cos\left(\theta\right) \end{aligned} \tag{4.7.27}$$

直交曲線座標系 [1] : u_1, u_2, u_3 で極座標の変数は、

$$u_1 = r, \quad u_2 = \theta, \quad u_3 = \phi \tag{4.7.28}$$

下記の (B.3.5) 式に、

$$\begin{aligned} h_1^2 =& \left(\frac{d}{d\,u_1}\,z\right)^2 + \left(\frac{d}{d\,u_1}\,y\right)^2 + \left(\frac{d}{d\,u_1}\,x\right)^2 \\ h_2^2 =& \left(\frac{d}{d\,u_2}\,z\right)^2 + \left(\frac{d}{d\,u_2}\,y\right)^2 + \left(\frac{d}{d\,u_2}\,x\right)^2 \\ h_3^2 =& \left(\frac{d}{d\,u_3}\,z\right)^2 + \left(\frac{d}{d\,u_3}\,y\right)^2 + \left(\frac{d}{d\,u_3}\,x\right)^2 \end{aligned}$$

[1]溝口純敏 : Maxima を使った物理数学基礎演習ノート、4.5 座標変換 4.5.5 直交曲線座標系への座標変換、http://www9.plala.or.jp/prac-maxima/Practice-Maxima-Physical%20math.pdf

(4.7.27) 式、(4.7.28) 式を代入すると、

$$h_1 = 1, \quad h_2 = r, \quad h_3 = r\sin\left(\theta\right) \tag{4.7.29}$$

上記の結果から、

$$dx\,dy\,dz = h_1\,h_2\,h_3\,dr\,d\theta\,d\phi = r^2\,\sin\left(\theta\right)dr\,d\theta\,d\phi$$

上記より、

$$\mathrm{g}\left(v\right)dv = \frac{m^{\frac{3}{2}}\sin\left(\theta\right)\,v^2\,e^{-\frac{m\,v^2}{2\,k\,T}}}{2^{\frac{3}{2}}\,\pi^{\frac{3}{2}}\,k^{\frac{3}{2}}\,T^{\frac{3}{2}}}\,dv\,d\theta\,d\phi$$

上式を θ, ϕ で積分し、

$$\begin{aligned} \mathrm{g}\left(v\right)dv =& \frac{m^{\frac{3}{2}}}{2^{\frac{3}{2}}\,\pi^{\frac{3}{2}}\,k^{\frac{3}{2}}\,T^{\frac{3}{2}}} \\ & \times\int_0^{2\,\pi}\int_0^{\pi}\sin\left(\theta\right)\,v^2\,e^{-\frac{m\,v^2}{2\,k\,T}}\,d\theta\,d\phi\,dv \\ =& \frac{\sqrt{2}\,m^{\frac{3}{2}}\,v^2\,e^{-\frac{m\,v^2}{2\,k\,T}}}{\sqrt{\pi}\,k^{\frac{3}{2}}\,T^{\frac{3}{2}}}\,dv \end{aligned} \tag{4.7.30}$$

```
rhs(G4)*v;
v='integrate(%,v,0,inf);
V4:ev(%,integrate);
V41:solve(%,sqrt(T))[1];
Z1:Z[n]='integrate(N(v[x])*f(v[x])/dS/dt,
 v[x],0,inf);
subst([N(v[x])=n*v[x]*dS*dt],%);
subst([FVX2],%);
Z11:ev(%,integrate);
Z12:subst([V41],%);
solve(PV2,n)[1];
lhs(Z11)=subst([%],rhs(Z11));
Z2:Z[V]=Z[n]/n;
subst([Z11],%);
subst([K1],%);
Z21:radcan(subst([M11],%));
Q=S*rhs(%)*(P[1]-P[2]);
subst([S=%pi*D^2/4],%);
```

極座標系の v を使って、全ての方向の分子速度の平均 : $\overline{v}$ は、(4.7.30) 式の確率分布を使って、

$$\begin{aligned} \overline{v} =& \int_0^{\infty} v\mathrm{g}\left(v\right)\,dv = \frac{\sqrt{2}\,m^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}\,k^{\frac{3}{2}}\,T^{\frac{3}{2}}}\int_0^{\infty} v^3\,e^{-\frac{m\,v^2}{2\,k\,T}}dv \\ =& \frac{2^{\frac{3}{2}}\,\sqrt{k}\,\sqrt{T}}{\sqrt{\pi}\,\sqrt{m}} \end{aligned} \tag{4.7.31}$$

上式の分子速度の平均 : $\overline{v}$ と (4.7.14) 式の結果は、$\sqrt{8/\pi} \to \sqrt{3}$ となっており、少し異なっている。ここでは以降、上式を用いる。

壁面に分子が入射する頻度 : Z_n は、(4.7.23) 式と同様に考えて、(4.7.22) 式、(4.7.25) 式、(4.7.31) 式を代入し、

$$\begin{aligned}Z_n =&\frac{\int_0^\infty \mathrm{f}\,(v_x)\;\mathrm{N}\,(v_x)\,dv_x}{dt\,dS} = n\int_0^\infty v_x\,\mathrm{f}\,(v_x)\,dv_x\\ =&\frac{\sqrt{m}\,n}{\sqrt{2}\,\sqrt{\pi}\,\sqrt{k}\,\sqrt{T}}\int_0^\infty v_x\,e^{-\frac{m\,v_x^2}{2\,k\,T}}\,dv_x\\ =&\frac{\sqrt{k}\,n\,\sqrt{T}}{\sqrt{2}\,\sqrt{\pi}\,\sqrt{m}} = \frac{n\,\overline{v}}{4}\end{aligned} \tag{4.7.32}$$

上式を (4.7.8) 式を用いて表すと、

$$Z_n = \frac{p}{\sqrt{2}\,\sqrt{\pi}\,\sqrt{k}\,\sqrt{m}\,\sqrt{T}} \tag{4.7.33}$$

分子の体積は分子密度の逆数であるから、単位面積に入射する体積 : Z_V は次式となり、(4.7.7) 式を用いて表すと、

$$\begin{aligned}Z_V =&\frac{Z_n}{n} = \frac{\sqrt{k}\,\sqrt{T}}{\sqrt{2}\,\sqrt{\pi}\,\sqrt{m}}\\ =&\frac{\sqrt{R}\,\sqrt{T}}{\sqrt{2}\,\sqrt{\pi}\,\sqrt{m}\,\sqrt{N_A}} = \frac{\sqrt{R}\,\sqrt{T}}{\sqrt{2}\,\sqrt{\pi}\,\sqrt{M}}\end{aligned} \tag{4.7.34}$$

上記の結果は出口の圧力が真空 : $P_2 = 0$ で、流路長さがない場合である。これから Q 値は上式から下記となる。

$$Q = \frac{D^2}{4}\,\frac{\sqrt{\pi}\,\sqrt{R}\,\sqrt{T}}{\sqrt{2}\,\sqrt{M}}\,(P_1 - P_2) \tag{4.7.35}$$

4.7.3　粘性流

マイクロ流路の粘性流では、圧力損失が大きいことから、気体の場合には、入口と出口の圧力比が大きい。入口から出口に向かって圧力の低下とともに密度が小さくなり、流速が早くなる。従って、流路径が小さいため、レイノルズ数は低いが、圧縮性の効果が大きい現象が現れる。流路のある断面について考えると、通常のピンホール径ではレイノルズ数 < 3000 で、流れは非常に安定しており、層流の理論推定式で推定してもよい。ここで、単位時間におけるリーク重量は流路内で変化しない。

この流路内では、摩擦による圧力損失が発生しているので、流体のエネルギー保存である断熱流ではない。圧力損失により、気体温度を高めたり、壁面と流体で熱伝達する。厳密には温度項の入った境界層方程式を解く必要があるが、難解で現実的でない。そこで下記のように簡略化を行う。

壁面と流体の熱伝達率 : h は、$h = N_u \cdot k/d$ (k : 流体の熱伝導率、N_u : ヌセルト数) となり、層流ではヌセルト数は一定となる。これから、熱伝達率は円管径に反比例し、管径が小さくなればなるほど熱伝達はよくなる。以上のことから、圧力と密度の関係は、断熱流と等温流の中間にあるはずであり、管径が小さくなればなるほど、断熱流から等温流に近くなる。

```
kill(all);
U1:u(r)=-'diff(p(x),x,1)*(D^2/4-r^2)/4/
 \mu;
G=\rho(x)*'integrate(u(r)*2*%pi*r,r,0,
 D/2);
subst([U1],%);
G1:ev(%,integrate);
\rho(x)=\rho[1]*p(x)/P[1];
subst([%],G1);
PX1:ode2(%,p(x),x);
subst([p(x)=P[1],x=0],PX1);
C1:rhs(%)=lhs(%);
subst([p(x)=P[2],x=\delta,C1],PX1);
solve(%,G)[1];
G2:factor(%);
R2:\rho[2]=\rho[1]*P[2]/P[1];
Q[1]=G/\rho[2];
Q1:subst([G2,R2],%);
Q=Q[1]*P[2];
subst([Q1],%);
```

円管の場合には、流速分布 : u を解析的に求めることができ、(8.2.7) 式から次式で表される。

$$\mathrm{u}\left(r\right)=-\frac{\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{p}\left(x\right)\right)\,\left(\frac{D^2}{4}-r^2\right)}{4\,\mu}$$

ここで、u ：半径方向の流速分布
$\frac{dp}{dx}$ ：円管流れ方向の圧力勾配
μ ：粘性係数
D ：円管直径
r ：円管半径方向長さ
P_1 ：容器内初期圧力
ρ_1 ：容器内密度
P_2 ：流路出口の圧力
ρ_2 ：流路出口の密度
δ ：流路長さ

上式を半径方向に積分することにより平均流量が得られ、これに密度：$\rho\left(x\right)$ をかけるとリーク重量：G となり、これは流路内で変化しないとし、求めると、

$$\begin{aligned}G=&2\,\pi\,\int_{0}^{\frac{D}{2}}r\,\mathrm{u}\left(r\right)dr\,\rho\left(x\right)\\=&-\frac{\pi\,\rho\left(x\right)}{2\,\mu}\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{p}\left(x\right)\right)\,\int_{0}^{\frac{D}{2}}r\,\left(\frac{D^2}{4}-r^2\right)dr\\=&-\frac{\pi\,\rho\left(x\right)}{128\,\mu}\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{p}\left(x\right)\right)\,D^4\end{aligned}\tag{4.7.36}$$

流路中の x における密度：$\rho\left(x\right)$ は等温流から、

$$\rho\left(x\right)=\frac{\rho_1\,\mathrm{p}\left(x\right)}{P_1}$$

(4.7.36) 式に上式を代入すると、

$$G=-\frac{\pi\,\rho_1\,\mathrm{p}\left(x\right)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{p}\left(x\right)\right)\,D^4}{128\,P_1\,\mu}$$

上式を ode2 関数で解くと、

$$-\frac{\pi\,\rho_1\,\mathrm{p}\left(x\right)^2\,D^4}{256\,P_1\,\mu\,G}=x+\%c\tag{4.7.37}$$

境界条件：$x=0,\mathrm{p}\left(x\right)=P_1$ とすると、

$$-\frac{\pi\,\rho_1\,P_1\,D^4}{256\,\mu\,G}=\%c$$

境界条件：$x=\delta,\mathrm{p}\left(x\right)=P_2$ とし、これと上式から、(4.7.37) 式は、

$$-\frac{\pi\,\rho_1\,P_2^2\,D^4}{256\,P_1\,\mu\,G}=-\frac{\pi\,\rho_1\,P_1\,D^4}{256\,\mu\,G}+\delta$$

上式から、G を求めると、

$$G=-\frac{\pi\,\rho_1\,\left(P_2-P_1\right)\,\left(P_2+P_1\right)\,D^4}{256\,P_1\,\delta\,\mu}\tag{4.7.38}$$

流路出口の圧力、密度の関係式は等温流から、

$$\rho_2=\frac{\rho_1\,P_2}{P_1}$$

流路出口における流量：Q_l は次式となり、(4.7.38) 式と上式を代入すると、

$$Q_l=\frac{G}{\rho_2}=\frac{\pi\,\left(P_1-P_2\right)\,\left(P_2+P_1\right)\,D^4}{256\,P_2\,\delta\,\mu}\tag{4.7.39}$$

Q 値は次式となり上式を代入すると、

$$Q=P_2\,Q_l=\frac{\pi\,\left(P_1-P_2\right)\,\left(P_2+P_1\right)\,D^4}{256\,\delta\,\mu}\tag{4.7.40}$$

4.7.4　Knudsen の半理論式

気体が小さなピンホール：マイクロ流路から漏れる現象は、分子流と粘性流が主現象となる。このようなマイクロ流路を気体が流れるとき、流量を次式の Knudsen の半理論式で求めることができる [36)]。ここで、次式の第一項は粘性流：(4.7.40) 式を、第二項は分子流：(4.7.35) 式を表している。

$$Q = \left(\frac{\pi D^4 \overline{P}}{128\mu\delta} + \frac{D^3}{6\delta}\sqrt{\frac{2\pi RT}{M}} \frac{1+\sqrt{\frac{M}{RT}}\frac{d\overline{P}}{\mu}}{1+1.24\sqrt{\frac{M}{RT}}\frac{d\overline{P}}{\mu}} \right)(P_1 - P_2) \tag{4.7.41}$$

ここで、Q　：リーク量 Q 値
D　：ピンホール直径
δ　：ピンホール長さ
μ　：粘性係数
R　：気体定数
T　：絶対温度
M　：分子量
P_1, P_2　：入口、出口圧力
$\overline{P}$　：入口、出口圧力の平均

この分子流、粘性流の領域におけるリーク量に関係する係数：J を 20 ℃の空気の場合について、下記に示し、その関係を図 4.7.2 に示す [36)]。ここで、ピンホール直径：D が $1\mu m$ 程度の時、$D\overline{P} \approx 0.1$ で、中間流の領域であるが、粘性流の延長で解析しても大きな誤差はないので、以降、ピンホール径が $1\mu m$ 程度以上の時、粘性流として解ける。

$$Q = C(P_1 - P_2) \tag{4.7.42}$$

$$C = 1.21 \times 10^2 \frac{d^3}{\delta} \cdot J \tag{4.7.43}$$

$$J = \frac{1 + 202D\overline{P} + 2643(D\overline{P})^2}{1 + 236D\overline{P}} \tag{4.7.44}$$

$$\begin{aligned} J &= 11.2D\overline{P} \qquad (D\overline{P} \geq 0.67 \quad \text{粘性流}) \\ J &= 1 \qquad\qquad (D\overline{P} \leq 0.02 \quad \text{分子流}) \end{aligned} \tag{4.7.45}$$

ここで、Q　：リーク量 Q 値 [Pa・m^3/sec]
D　：ピンホール直径 [m]
δ　：ピンホール長さ [m]
P_1, P_2　：入口、出口圧力 [Pa]
$\overline{P}$　：入口、出口圧力の平均 [Pa]

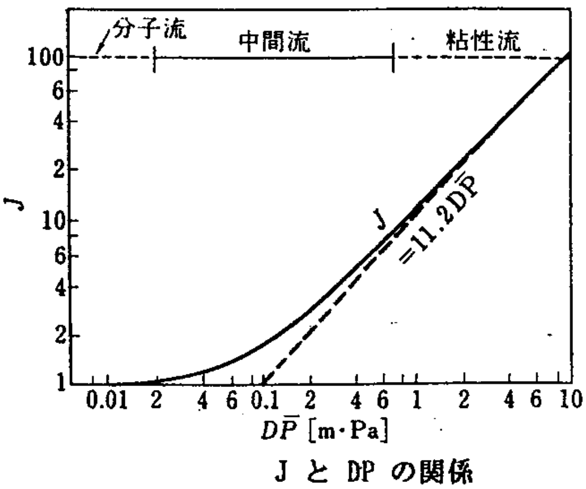


図 4.7.2: 分子流、粘性流の領域とリーク量 [36)]

第5章　2次元完全流体

5.1　複素解析

5.1.1　2次元速度ポテンシャルと流れ関数

(1) 流れ関数の関係式

下図点 A から点 P までの任意の面を考える。この面を左から右に通過する流量は $\Psi=\int_A^P v_n ds$ で、検査面によって変化しない。Ψ は点 P の位置の関数で、流線に沿って点 P を移動させても、流線を通過して流れる流れはないので、Ψ は一定である。これから $\Psi=$ 一定は流線を表す。

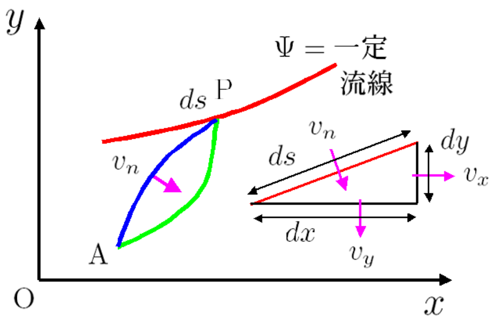


図 5.1.1: 2 次元流れ関数

```
/* 二次元の流れの関数  */
kill(all);
load("vect")
depends(\Psi,[x,y]);
depends(\Phi,[x,y]);
STF1:\Psi='integrate(v[n],s,A,P);
\Psi+v[n]*ds=\Psi+'diff(\Psi,s,1)*ds;
STFN:solve(%,v[n])[1];
\Psi+v[x]*dy=\Psi+'diff(\Psi,y,1)*dy;
STFX:solve(%,v[x])[1];
\Psi-v[y]*dx=\Psi+'diff(\Psi,x,1)*dx;
STFY:solve(%,v[y])[1];
\Psi+v[r]*r*dt=\Psi+'diff(\Psi,t,1)/r*dt*r;
solve(%,v[r])[1];
STFR:subst([t=\theta,y=r*sin(\theta)],%);
\Psi-v[\theta]*dr=\Psi+'diff(\Psi,r,1)*dr;
solve(%,v[\theta])[1];
STFT:subst([y=r*sin(\theta)],%);
```

Ψ が流量を表すので、dy、dx 間での流量変化の関係は、

$$dy\, v_x+\Psi=dy\left(\frac{d}{d\,y}\,\Psi\right)+\Psi$$

$$\Psi-dx\, v_y=dx\left(\frac{d}{d\,x}\,\Psi\right)+\Psi$$

上記から、

$$v_x=\frac{d}{d\,y}\,\Psi,\quad v_y=-\frac{d}{d\,x}\,\Psi \tag{5.1.1}$$

極座標：r,θ の流れ関数と流速の関係は、

$$dt\, r\, v_r+\Psi=dt\left(\frac{d}{d\,t}\,\Psi\right)+\Psi$$

$$\Psi-dr\, v_\theta=dr\left(\frac{d}{d\,r}\,\Psi\right)+\Psi$$

上記から、

$$v_r=\frac{\frac{d}{d\,\theta}\,\Psi}{r},\quad v_\theta=-\frac{d}{d\,r}\,\Psi \tag{5.1.2}$$

```
CIR1:\omega='diff(v[y],x,1)
 -'diff(v[x],y,1);
subst([STFX,STFY,\omega=0],CIR1);
ev(%,diff);
-rhs(%)=lhs(%);
```

渦度：ω は次式で表現でき、完全流体では $\omega=0$ である。

$$\omega=\frac{d}{d\,x}\,v_y-\frac{d}{d\,y}\,v_x$$

上式に (5.1.1) 式を代入し流れ関数の関係式を得る。

$$\frac{d^2}{d\,y^2}\,\Psi+\frac{d^2}{d\,x^2}\,\Psi=0 \tag{5.1.3}$$

(1) 速度ポテンシャルの関係式

```
PODX:v[x]=diff(\Phi,x,1);
PODY:v[y]=diff(\Phi,y,1);
rhs(PODX)=rhs(STFX);
rhs(PODY)=rhs(STFY);
```

速度ポテンシャルの定義から、

$$v_x=\frac{d}{d\,x}\,\Phi,\quad v_y=\frac{d}{d\,y}\,\Phi \tag{5.1.4}$$

速度ポテンシャルの関係式は質量保存の式から、

$$\frac{d^2}{d\,y^2}\,\Phi+\frac{d^2}{d\,x^2}\,\Phi=0 \tag{5.1.5}$$

(5.1.1) 式と (5.1.4) 式から速度ポッテンシャルと流れ関数の関係は、

$$\frac{d}{d\,x}\,\Phi=\frac{d}{d\,y}\,\Psi,\quad \frac{d}{d\,y}\,\Phi=-\frac{d}{d\,x}\,\Psi \tag{5.1.6}$$

極座標：r,θ の速度ポッテンシャルと流速の関係は、

```
/*座標変換　二次元極座標へ*/
/*r-theta co-ordinate*/
kill(all);
load("vect")
depends(r,[t,x,y]);
depends(\theta,[t,x,y]);
XR:x=r*cos(\theta);
YR:y=r*sin(\theta);
LXR1:diff(XR,x,1);
LYR1:diff(YR,x,1);
solve([LXR1,LYR1],['diff(r,x,1),
  'diff(\theta,x,1)]);
LXYR1:trigrat(%)[1];
LXR2:diff(XR,y,1);
LYR2:diff(YR,y,1);
solve([LXR2,LYR2],['diff(r,y,1),
  'diff(\theta,y,1)]);
LXYR2:trigrat(%)[1];
TR:matrix([cos(\theta),sin(\theta)],
  [-sin(\theta),cos(\theta)]);
depends(\Phi,[r,\theta]);
ADFX1:'diff(\Phi,x,1)=diff(\Phi,x,1);
ADFX2:subst(LXYR1,%);
ADFY1:'diff(\Phi,y,1)=diff(\Phi,y,1);
ADFY2:subst(LXYR2,%);
expand(TR.matrix([rhs(ADFX2)],
 [rhs(ADFY2)]));
GRADA:trigrat(%);
```

上記で$が記入できないので、Maxima 実行時には load(”vect”) →load(”vect”)$として実行願う。
二次元の xy 座標と極座標の関係は、

$$x=r\cos\left(\theta\right),\quad y=r\sin\left(\theta\right)$$

上記の関係から、

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\,x}\,r=&\cos\left(\theta\right),\frac{d}{d\,x}\,\theta=-\frac{\sin\left(\theta\right)}{r}\\ \frac{d}{d\,y}\,r=&\sin\left(\theta\right),\frac{d}{d\,y}\,\theta=\frac{\cos\left(\theta\right)}{r}\end{aligned} \tag{5.1.7}$$

速度の xy 成分は、

$$\begin{aligned}v_x=&\frac{d}{d\,x}\,\Phi=\left(\frac{d}{d\,\theta}\,\Phi\right)\left(\frac{d}{d\,x}\,\theta\right)+\left(\frac{d}{d\,r}\,\Phi\right)\left(\frac{d}{d\,x}\,r\right)\\ v_y=&\frac{d}{d\,y}\,\Phi=\left(\frac{d}{d\,\theta}\,\Phi\right)\left(\frac{d}{d\,y}\,\theta\right)+\left(\frac{d}{d\,r}\,\Phi\right)\left(\frac{d}{d\,y}\,r\right)\end{aligned} \tag{5.1.8}$$

座標から極座標に変換する下記の変換マトリックスを掛けることにより、速度の円柱座標表示を得ることができる。

$$TR=\begin{pmatrix}\cos\left(\theta\right) & \sin\left(\theta\right)\\ -\sin\left(\theta\right) & \cos\left(\theta\right)\end{pmatrix}$$

上式に (5.1.7) 式および (5.1.8) 式を代入し、変換マトリックスを掛けることにより、下記の極座標表記が得られる。

$$\begin{pmatrix}v_r\\ v_\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}TR\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{d}{d\,x}\,\Phi\\ \frac{d}{d\,y}\,\Phi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{d}{d\,r}\,\Phi\\ \frac{\frac{d}{d\,\theta}\,\Phi}{r}\end{pmatrix} \tag{5.1.9}$$

5.1.2 複素演算

(1) 表示と和

```
/* 複素演算 */
kill(all);
declare(z,complex);
declare(w,complex);
Z1:z=x[1]+%i*y[1];
Z2:w=x[2]+%i*y[2];
PZ1:polarform(rhs(Z1));
AD1:Z1+Z2;
```

複素数：z,w を下記のように定義する。

$$z = i\,y_1 + x_1, \quad w = i\,y_2 + x_2$$

複素数：z の極形式は下記で、動径：$\sqrt{y_1^2+x_1^2}$、偏角：$\mathrm{atan2}\left(y_1,x_1\right)$ で表現される。

$$z = \sqrt{y_1^2+x_1^2}\,e^{i\,\mathrm{atan2}(y_1,x_1)}$$

複素数：z と w の和は、

$$z + w = i\,y_2 + x_2 + i\,y_1 + x_1$$

(2) 積と商

```
MP1:Z1*Z2;
polarform(rhs(MP1));
rectform(%);
factor(trigexpand(%));
realpart(rhs(MP1));
imagpart(rhs(MP1));
ZC1:conjugate(Z1);
expand(Z1*ZC1);
1/Z1;
lhs(%)=polarform(rhs(%));
```

複素数：z と w の積は、

$$w\,z = \left(i\,y_1 + x_1\right)\,\left(i\,y_2 + x_2\right)$$

上記積の極形式は下記で、動径の積、偏角の和で表される。

$$w\,z = \sqrt{y_1^2+x_1^2}\,\sqrt{y_2^2+x_2^2}\,e^{i\,(\mathrm{atan2}(y_2,x_2)+\mathrm{atan2}(y_1,x_1))}$$

また、この z と w の積の実部と虚部は下記となる。

$$\Re(w\,z) = x_1\,x_2 - y_1\,y_2, \quad \Im(w\,z) = x_1\,y_2 + y_1\,x_2$$

複素数：z の複素共役：$\overline{z}$ は、

$$\overline{z} = \mathrm{conjugate}\left(z\right) = x_1 - i\,y_1$$

複素数：z と z の複素共役の積は下記となる。

$$z\overline{z} = z\,\mathrm{conjugate}\left(z\right) = y_1^2 + x_1^2$$

複素数：z の逆数は、

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{i\,y_1 + x_1} = \frac{e^{-i\,\mathrm{atan2}(y_1,x_1)}}{\sqrt{y_1^2+x_1^2}}$$

(3) 対数

```
logexpand: all;
log(PZ1);
```

複素数：z の対数は、

$$log(z) = \frac{\log\left(y_1^2+x_1^2\right)}{2} + i\,\mathrm{atan2}\left(y_1,x_1\right)$$

5.1.3　複素関数の微分

```
/* Gauss の定理 (複素形式)  */
kill(all);
load("vect")
declare(z,complex);
declare(w,complex);
declare(F,complex);
depends(z,[x,y]);
depends(w,[x,y]);
depends(F,[z,w]);
Z1:z=x+%i*y;
CZ1:w=rhs(conjugate(Z1));
XY1:solve([Z1,CZ1],[x,y]);
X1:XY1[1][1];
Y1:XY1[1][2];
Z1DX:diff(Z1,x);
CZ1DX:diff(CZ1,x);
Z1DY:diff(Z1,y);
CZ1DY:diff(CZ1,y);
'diff(F,x,1)=diff(F,x,1);
FDX:subst([Z1DX,CZ1DX],%);
'diff(F,y,1)=diff(F,y,1);
FDY:subst([Z1DY,CZ1DY],%);
FDZW:solve([FDX,FDY],['diff(F,z,1)
  ,'diff(F,w,1)]);
FDZ:FDZW[1][1];
FDW:FDZW[1][2];
```

複素数:z を下記のように定義する。その複素共役:$\overline{z} = w$ とする。

$$z = i\,y + x, \quad \overline{z} = w = x - i\,y \tag{5.1.10}$$

x, y を z, w で表現すると、

$$x = \frac{z+w}{2}, \quad y = -\frac{i\,z - i\,w}{2} \tag{5.1.11}$$

(5.1.10) 式から、

$$\frac{d}{d\,x}\,z = 1, \quad \frac{d}{d\,x}\,w = 1, \quad \frac{d}{d\,y}\,z = i, \quad \frac{d}{d\,y}\,w = -i \tag{5.1.12}$$

複素関数：F とし、x, y で微分すると、

$$\frac{d}{d\,x}\,F = \left(\frac{d}{d\,x}\,z\right)\left(\frac{d}{d\,z}\,F\right) + \left(\frac{d}{d\,x}\,w\right)\left(\frac{d}{d\,w}\,F\right)$$
$$\frac{d}{d\,y}\,F = \left(\frac{d}{d\,y}\,z\right)\left(\frac{d}{d\,z}\,F\right) + \left(\frac{d}{d\,y}\,w\right)\left(\frac{d}{d\,w}\,F\right)$$

上式に (5.1.12) 式を代入し、

$$\frac{d}{d\,x}\,F = \frac{d}{d\,z}\,F + \frac{d}{d\,w}\,F$$
$$\frac{d}{d\,y}\,F = i\left(\frac{d}{d\,z}\,F\right) - i\left(\frac{d}{d\,w}\,F\right)$$

$\frac{d}{d\,z}, \frac{d}{d\,w}$ で整理すると、

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\,z}\,F &= \frac{\frac{d}{d\,x}\,F - i\left(\frac{d}{d\,y}\,F\right)}{2}\\ \frac{d}{d\,w}\,F &= \frac{d}{d\,\overline{z}}\,F = \frac{i\left(\frac{d}{d\,y}\,F\right) + \frac{d}{d\,x}\,F}{2}\end{aligned} \tag{5.1.13}$$

```
depends(\Phi,[x,y]);
depends(\Psi,[x,y]);
F1:F=\Phi+%i*\Psi;
lhs(FDZ)=subst([F1],rhs(FDZ));
ev(%,diff);
subst(['diff(\Phi,x,1)=v[x],'diff(\Phi,y,1)
    =v[y],'diff(\Psi,x,1)=-v[y]
    ,'diff(\Psi,y,1)=v[x]],%);
expand(%);
lhs(FDW)=subst([F1],rhs(FDW));
ev(%,diff);
subst(['diff(\Phi,x,1)=v[x],'diff(\Phi,y,1)
    =v[y],'diff(\Psi,x,1)=-v[y]
    ,'diff(\Psi,y,1)=v[x]],%);
expand(%);
```

複素関数：F を速度ポッテンシャル：Φ と流れ関数：Ψ で下記のように定義する。

$$F = i\,\Psi + \Phi \tag{5.1.14}$$

(5.1.13) 式から $\frac{d}{d\,z}\,F$ を求めると、

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\,z}\,F &= \frac{\frac{d}{d\,x}\,(i\,\Psi + \Phi) - i\left(\frac{d}{d\,y}\,(i\,\Psi + \Phi)\right)}{2}\\ &= \frac{-i\left(i\left(\frac{d}{d\,y}\,\Psi\right) + \frac{d}{d\,y}\,\Phi\right) + i\left(\frac{d}{d\,x}\,\Psi\right) + \frac{d}{d\,x}\,\Phi}{2}\end{aligned}$$

(5.1.1) 式と (5.1.4) 式の関係を上式に代入すると下記の複素関数と流速の関係が得られる。

$$\frac{d}{d\,z}\,F = v_x - i\,v_y \tag{5.1.15}$$

また、同様に (5.1.13) 式から $\frac{d}{d\,\overline{z}}\,F$ を求めると、

$$\frac{d}{d\,w}\,F = \frac{d}{d\,\overline{z}}\,F = 0 \tag{5.1.16}$$

上式は、次節の (5.1.21) 式と同じ結果が得られた。

5.1.4　Cauchy-Riemanの微分方程式の複素表示

```
/* Cauchy-Riemanの微分方程式 */
kill(all);
z=x+%i*y;
F1:F(z)=\Phi(z)+%i*\Psi(z);
F0:F(z[0])=\Phi(z[0])+%i*\Psi(z[0]);
DFZ:(F(z)-F(z[0]))/(z-z[0]);
DFZ1:'diff(F(z),z,1)='limit(DFZ,z,z[0]);
Z1:z=x+%i*y[0];
Z0:z[0]=x[0]+%i*y[0];
subst([F1],DFZ);
subst([F0],%);
subst([Z0],%);
subst([Z1],%);
partfrac(%,%i);
'diff(F(z),z,1)='limit(%,x,x[0]);
DFZ1X:lhs(DFZ1)='diff(\Phi,x,1)
  +%i*'diff(\Psi,x,1);
```

複素変数：z、複素関数：$F(z)$ とし、下記に示す。

$$z = i\,y + x$$

$$\mathrm{F}\left(z\right) = i\,\Psi\left(z\right) + \Phi\left(z\right)$$

$F(z)$ が z_0 で連続で、微分可能とする。

$$\frac{d}{d\,z}\,\mathrm{F}\left(z\right) = \lim_{z\to z_0}\frac{\mathrm{F}\left(z\right) - \mathrm{F}\left(z_0\right)}{z - z_0} \tag{5.1.17}$$

y_0 で固定し、$x \to x_0$ として次式を (5.1.17) 式に代入し、

$$z = x + i\,y_0,\quad z_0 = i\,y_0 + x_0$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\,z}\,\mathrm{F}\left(z\right) =& \lim_{x\to x_0}\frac{i\left(\Psi\left(x+i\,y_0\right) - \Psi\left(i\,y_0+x_0\right)\right) + \Phi\left(x+i\,y_0\right) - \Phi\left(i\,y_0+x_0\right)}{x - x_0}\\ =& i\left(\frac{d}{d\,x}\,\Psi\right) + \frac{d}{d\,x}\,\Phi\end{aligned} \tag{5.1.18}$$

```
Z1:z=x[0]+%i*y;
Z0:z[0]=x[0]+%i*y[0];
subst([F1],DFZ);
subst([F0],%);
subst([Z0],%);
subst([Z1],%);
partfrac(%,%i);
'diff(F(z),z,1)='limit(%,y,y[0]);
DFZ1Y:lhs(DFZ1)=-%i*'diff(\Phi,y,1)
  +'diff(\Psi,y,1);
```

```
RE1:realpart(rhs(DFZ1X))
  =realpart(rhs(DFZ1Y));
IM1:imagpart(rhs(DFZ1Y))
  =imagpart(rhs(DFZ1X));
RE1-%i*IM1;
lhs(%)=-%i*(rhs(IM1)+%i*rhs(RE1));
```

また、x_0 で固定し、$y \to y_0$ として次式を (5.1.17) 式に代入し、

$$z = i\,y + x_0,\quad z_0 = i\,y_0 + x_0$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\,z}\,\mathrm{F}\left(z\right) =& \lim_{y\to y_0}\frac{\Psi\left(i\,y+x_0\right) - \Psi\left(i\,y_0+x_0\right)}{y - y_0}\\ &- \frac{i\left(\Phi\left(i\,y+x_0\right) - \Phi\left(i\,y_0+x_0\right)\right)}{y - y_0}\\ =& \frac{d}{d\,y}\,\Psi - i\left(\frac{d}{d\,y}\,\Phi\right)\end{aligned} \tag{5.1.19}$$

(5.1.18) 式、(5.1.19) 式の左辺は同じであるから、右辺も等しいとして下記の Cauchy-Rieman の微分方程式を得る。

$$\frac{d}{d\,x}\,\Phi = \frac{d}{d\,y}\,\Psi,\quad -\frac{d}{d\,y}\,\Phi = \frac{d}{d\,x}\,\Psi \tag{5.1.20}$$

上式を変形して、同様に下記の関係式が得られる。

$$i\left(\frac{d}{d\,y}\,\Phi\right) + \frac{d}{d\,x}\,\Phi = -i\left(i\left(\frac{d}{d\,y}\,\Psi\right) + \frac{d}{d\,x}\,\Psi\right)$$

$$\left(\frac{d}{d\,x} + i\,\frac{d}{d\,y}\right)\left(\Phi + i\,\Psi\right) = 0$$

(5.1.13) 式から、

$$\frac{d}{d\,\bar{z}}\,\mathrm{F}\left(z\right) = 0 \tag{5.1.21}$$

5.1.5　Cauchy の積分定理

(1) 二次元 Gauss の定理の複素表示

Gauss の定理:(A.2.1) 式、(653 ページ) は下記である。

$$\iint P\vec{n}\,dS = \iiint grad(P)dV$$

上式を二次元表記すると、

$$\oint F n_x ds = \iint \frac{\partial}{\partial x} F dS, \quad \oint F n_y ds = \iint \frac{\partial}{\partial y} F dS \tag{5.1.22}$$

(5.1.13) 式から上式右辺は、

$$\iint \frac{\partial}{\partial w} F dS = \frac{1}{2}\left(\iint \frac{\partial}{\partial x} F dS + i\iint \frac{\partial}{\partial y} F dS\right)$$

上式に (5.1.22) 式を代入すると、

$$\iint \frac{\partial}{\partial w} F dS = \frac{1}{2}\left(\oint F n_x ds + i\oint F n_y ds\right)$$

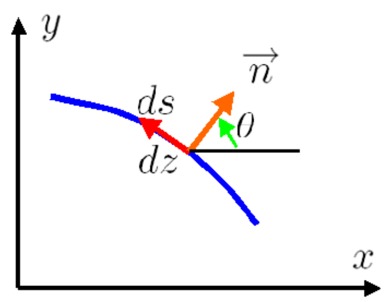


図 5.1.2: dz 表現

```
kill(all)
NXY1:(n[x]+%i*n[y])=%e^(%i*\theta);
NXY2:lhs(NXY1)=rectform(rhs(NXY1));
DZ1:dz=ds*%e^(%i*(\theta+%pi/2));
```

法線ベクトルの各要素：n_x, n_y を複素表示すると下記となる。

$$i\,n_y + n_x = e^{i\,\theta} = i\sin(\theta) + \cos(\theta)$$

この法線法線ベクトルを $\pi/2$ 回転させたものが境界に沿った dz となり下記の関係を得る。

$$dz = ds\,e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)} = i\,ds\,e^{i\,\theta} = i\,ds\,(i\,n_y + n_x)$$

上式を代入し、二次元 Gauss の定理の複素表示として下記を得る。

$$\iint \frac{\partial}{\partial \bar{z}} F dS = \frac{1}{2i}\oint F\,dz \tag{5.1.23}$$

(2)Cauchy の積分定理

(5.1.21) 式から、

$$\frac{d}{d\bar{z}}\mathrm{F} = 0$$

上式を (5.1.23) 式に代入すると、下記の Cauchy の積分定理が得られる。

$$\oint F\,dz = 0 \tag{5.1.24}$$

(3) 簡単な例 (楕円の面積)

長径：a、短径：b の楕円の面積を上記、二次元 Gauss の定理の複素表示を用いて求める。(5.1.23) 式から、$F = \bar{z}$ とすると、

$$\iint dS = S = \frac{1}{2i}\oint F\,dz$$

```
F1:F=w;
Z2:z=a*cos(\theta)+%i*b*sin(\theta);
F2:F=conjugate(rhs(Z2));
Z2DT:'diff(z,\theta,1)=diff(rhs(Z2)
  ,\theta,1);
S=1/(2*%i)*'integrate(rhs(F2)*rhs(Z2DT)
  ,\theta,0,2*%pi);
ev(%,integrate);
```

楕円形状を複素表示すると、

$$z = i\,b\sin(\theta) + a\cos(\theta)$$

また、

$$\frac{d}{d\,\theta} z = i\,b\cos(\theta) - a\sin(\theta)$$

複素関数：F は、

$$F = \bar{z} = a\cos(\theta) - i\,b\sin(\theta)$$

これらの関係式を上式に代入すると、

$$\begin{aligned} S =& \frac{1}{2i}\int_0^{2\pi} F\,\frac{d}{d\,\theta} z\,d\theta \\ =& -\frac{i}{2}\int_0^{2\pi} (i\,b\cos(\theta) - a\sin(\theta)) \\ & \times\ (a\cos(\theta) - i\,b\sin(\theta))\,d\theta \\ =& \pi\,a\,b \end{aligned}$$

楕円の面積が得られた。

5.1.6 Cauchy の積分公式

下記の複素関数：$F(z)$ を考える。ここで $f(z)$ は検討する領域内で正則とする。$F(z)$ は z_0 で正則でない。

$$F(z)=\frac{f(z)}{z-z_0}$$

Cauchy の積分定理: (5.1.24) 式から、z_0 を含む周：C と周：C 内の z_0 を囲む小さな円：K を考え、C の内側と K の外側の領域では正則である。この領域に Cauchy の積分定理: (5.1.24) 式を適用すると、

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz-\oint_K \frac{f(z)}{z-z_0}dz=0$$

ここで、K の積分は、C と逆方向に積分するため、負の符号を付ける。上記から、

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz=\oint_K \frac{f(z)}{z-z_0}dz \tag{5.1.25}$$

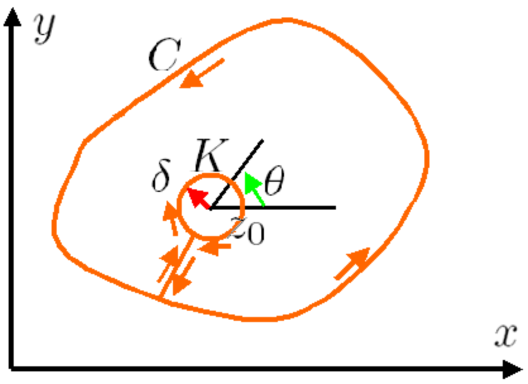


図 5.1.3: Cauchy の積分公式

```
/* Cauchy の積分公式 */
kill(all);
declare(z,complex);
Z2:z=x+%i*y;
F2:F(z)=f(z)/(z-z[0]);
Z2:z-z[0]=\delta*%e^(%i*\theta);
Z3:solve(Z2,z)[1];
Z2D:'diff(z,\theta,1)=diff(rhs(Z2),
 \theta,1);
CIF2:'integrate(F(z),z);
CIF3:subst([F2],CIF2);
CIF4:subst([f(z)=f(z[0])],%)='f(z[0])
  *'integrate(1/(z-z[0]),z);
CIF5:CIF3=f(z[0])*'integrate(1/rhs(Z2)
  *rhs(Z2D),\theta,0,2*%pi);
%/2/%i/%pi;
lhs(%)=rhs(%);
```

小さな円：K を複素表示すると、

$$z-z_0=\delta\,e^{i\,\theta},\qquad \frac{d}{d\,\theta}z=i\,\delta\,e^{i\,\theta} \tag{5.1.26}$$

また、小さな円：K 上では $f(z)=f(z_0)$ と考えられるので、

$$\oint_K \frac{f(z)}{z-z_0}dz=f(z_0)\oint_K \frac{1}{z-z_0}dz \tag{5.1.27}$$

(5.1.26) 式、(5.1.27) 式を (5.1.25) 式に代入すると、

$$\begin{aligned}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz=\oint_K \frac{f(z)}{z-z_0}dz&=f(z_0)\oint_K \frac{1}{z-z_0}dz\\ &=f(z_0)\int_0^{2\pi}\frac{1}{\delta\,e^{i\,\theta}}\left(i\,\delta\,e^{i\,\theta}\right)d\theta\\ &=2\,i\,\pi\,f(z_0)\end{aligned}$$

以上から下記の Cauchy の積分公式が得られた。

$$f(z_0)=-\frac{i}{2\,\pi}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz \tag{5.1.28}$$

5.1.7　留数定理

下記の複素関数：$F(z)$ を考える。ここで $f(z)$ は下記の級数和で表現され、z_0 以外の領域で正則とする。

$$F(z)=\oint_C f\left(z\right)dz,\quad f\left(z\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n\left(z-z_0\right)^n$$

```
/* 留数定理 */
kill(all);
declare(z,complex);
FZ1:f[n](z)=a[n]*(z-z[0])^n;
F1:f(z)=sum(rhs(FZ1),n,minf,inf);
INF1:'integrate(rhs(FZ1),z);
Z2:z-z[0]=\delta*%e^(%i*\theta);
Z3:solve(Z2,z)[1];
Z2D:'diff(z,\theta,1)=diff(rhs(Z2),
 \theta,1);
FZ2:subst([Z2],rhs(FZ1));
INF2:'integrate(FZ2*rhs(Z2D),\theta,0,
 2*%pi);
assume(n>=0);
INF1=ev(INF2,integrate);
forget(n>=0);
assume(n<-1);
INF1=ev(INF2,integrate);
subst([n=-1],INF2);
subst([n=-1],INF1)=ev(%,integrate);
```

Cauchy の積分定理: (5.1.24) 式から、z_0 を含む周：C と周：C 内の z_0 を囲む小さな円：K を考え、C の内側と K の外側の領域では正則である。この領域に Cauchy の積分定理: (5.1.24) 式を適用すると、

$$\oint_C f\left(z\right)dz=\oint_K\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n\left(z-z_0\right)^n dz$$

ここで級数和の各項は、

$$f_n\left(z\right)=a_n\left(z-z_0\right)^n$$

$$\oint_K f_n\left(z\right)dz=\oint_K a_n\left(z-z_0\right)^n dz$$

小さな円：K を複素表示すると、

$$z-z_0=\delta\,e^{i\,\theta},\quad \frac{d}{d\,\theta}\,z=i\,\delta\,e^{i\,\theta}$$

上式を代入すると、

$$\oint_K f_n\left(z\right)dz=i\,\delta\,a_n\int_0^{2\,\pi}e^{i\,\theta}\left(\delta\,e^{i\,\theta}\right)^n d\theta$$

この積分は、$n\geq 0$ では、

$$\oint_K f_n\left(z\right)dz=0$$

$n<-1$ では、

$$\oint_K f_n\left(z\right)dz=0$$

$n=-1$ では、

$$\oint_K f_n\left(z\right)dz=a_{-1}\int\frac{1}{z-z_0}dz=2\,i\,\pi\,a_{-1}$$

以上から、$n=-1$ の場合のみ積分の値を持ち、

$$F(z)=\oint_C f\left(z\right)dz=\oint_C\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n\left(z-z_0\right)^n dz$$
$$=2\,i\,\pi\,a_{-1}$$

5.1.8 一様な流れ

流速：U で x 軸と θ の角度を持つ一様な流れの複素速度ポテンシャル：$F(z)$ を求める。

```
/* 一様な流れ */
kill(all);
declare(z,complex);
assume(U>0);
F1:F(z)=\Phi+%i*\Psi;
FD1:diff(F(z),z,1)=v[x]-%i*v[y];
VX:v[x]=U*cos(\theta);
VY:v[y]=U*sin(\theta);
subst([VX,VY],FD1);
FD2:lhs(%)=polarform(rhs(%));
subst([atan2(sin(theta)*U,cos(theta)*U)
  =\theta],%);
trigsimp(%);
ode2(%,F(z),z);
subst([%c=0],%);
```

(5.1.14) 式から複素速度ポテンシャルは、

$$F(z) = i\,\Psi + \Phi$$

(5.1.15) 式から複素速度ポテンシャルと流速の関係は、

$$\frac{d}{d\,z}\,F(z) = v_x - i\,v_y$$

流速 :U で x 軸と θ の角度を持つ x, y 軸の流速の関係は、

$$v_x = \cos(\theta)\,U, \quad v_y = \sin(\theta)\,U$$

上式を代入し、

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\,z}\,\mathrm{F}(z) =& \cos(\theta)\,U - i\sin(\theta)\,U\\ =& e^{-i\,\theta}\sqrt{\sin(\theta)^2\,U^2 + \cos(\theta)^2\,U^2}\\ =& e^{-i\,\theta}\,U\end{aligned}$$

上式を解いて、一様流の複素速度ポテンシャルは下記となる。

$$\mathrm{F}(z) = e^{-i\,\theta}\,z\,U \qquad (5.1.29)$$

5.1.9 わき出し

(1) 速度ポテンシャルの二次元質量保存の式から

原点にわき出しを置いた場合、流れは下図のように原点対称となる。この流れを速度ポテンシャルの二次元質量保存の式から求める。

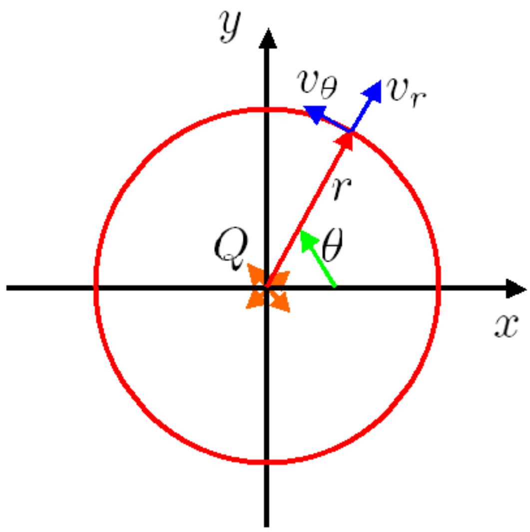


図 5.1.4: 2 次元わき出し

```
/*座標変換　二次元極座標へ → わき出し*/
kill(all);
load("vect")
depends(r,[t,x,y]);
depends(\theta,[t,x,y]);
XR:x=r*cos(\theta);
YR:y=r*sin(\theta);
LXR1:diff(XR,x,1);
LYR1:diff(YR,x,1);
```

二次元の xy 座標と極座標の関係は、

$$x = r\cos(\theta), \quad y = r\sin(\theta)$$

上記の関係から、

$$\frac{d}{d\,x}\,r = \cos(\theta), \frac{d}{d\,x}\,\theta = -\frac{\sin(\theta)}{r}$$

$$\frac{d}{d\,y}\,r = \sin(\theta), \frac{d}{d\,y}\,\theta = \frac{\cos(\theta)}{r}$$

$$\frac{d^2}{d\,x^2}\,r = \frac{\sin(\theta)^2}{r}, \frac{d^2}{d\,x^2}\,\theta = \frac{2\cos(\theta)\,\sin(\theta)}{r^2}$$

$$\frac{d^2}{d\,y^2}\,r = \frac{\cos(\theta)^2}{r}, \frac{d^2}{d\,y^2}\,\theta = -\frac{2\cos(\theta)\,\sin(\theta)}{r^2}$$

速度ポテンシャルの二次元質量保存の式は、

$$\frac{d^2}{d\,y^2}\,\Phi + \frac{d^2}{d\,x^2}\,\Phi = 0$$

上記の各項を展開する。$\frac{d^2}{d\,x^2}\,\Phi$ の展開は下記となる。

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{d\,x^2}\,\Phi =& \left(\frac{d}{d\,\theta}\,\Phi\right)\,\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,\theta\right) + \left(\frac{d}{d\,x}\,\theta\right)\,\left(\left(\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,\Phi\right)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\theta\right)\right.\\ &\left. + \left(\frac{d^2}{d\,r\,d\,\theta}\,\Phi\right)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,r\right)\right) + \left(\frac{d}{d\,x}\,r\right)\,\left(\left(\frac{d^2}{d\,r\,d\,\theta}\,\Phi\right)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\theta\right)\right.\\ &\left. + \left(\frac{d^2}{d\,r^2}\,\Phi\right)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,r\right)\right) + \left(\frac{d}{d\,r}\,\Phi\right)\,\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,r\right)\end{aligned}$$

```
solve([LXR1,LYR1],['diff(r,x,1),
 'diff(\theta,x,1)]);
LXYR1:trigrat(%)[1];
LXR2:diff(XR,y,1);
LYR2:diff(YR,y,1);
solve([LXR2,LYR2],['diff(r,y,1),
 'diff(\theta,y,1)]);
LXYR2:trigrat(%)[1];
depends(\Phi,[r,\theta]);
/* nabla^2 */
NABA:'diff(\Phi,x,2)+'diff(\Phi,y,2)=0;
ADDFX1:'diff(\Phi,x,2)=diff(\Phi,x,2);
ADFDX2:subst(LXYR1,%);
ADFDY1:'diff(\Phi,y,2)=diff(\Phi,y,2);
ADFDY2:subst(LXYR2,%);
LXDDR1:diff(XR,x,2);
LXDDR2:subst(LXYR1,%);
LYDDR1:diff(YR,x,2);
LYDDR2:subst(LXYR1,%);
solve([LXDDR2,LYDDR2],['diff(r,x,2),
 'diff(\theta,x,2)])[1];
NABRAX:subst(%,ADFDX2);
LXDDR11:diff(XR,y,2);
LXDDR21:subst(LXYR2,%);
LYDDR11:diff(YR,y,2);
LYDDR21:subst(LXYR2,%);
solve([LXDDR21,LYDDR21],['diff(r,y,2),
 'diff(\theta,y,2)])[1];
NABRAY:subst(%,ADFDY2);
NABRA1:subst([NABRAX,NABRAY],NABA);
NABRA2:expand(trigrat(expand(%)));
NABRA3:first(lhs(NABRA2))+last(lhs(NABRA2))
  =0;
ode2(NABRA3,\Phi,r);
```

上式を整理し、原点対象とすると、二次元質量保存の式はかきとなり、速度ポッテンシャル：Φ は、

$$\frac{\frac{d}{d\,r}\,\Phi}{r} + \frac{d^2}{d\,r^2}\,\Phi = 0, \quad \Phi = \%k1\,\log\left(r\right) + \%k2$$

(2) 複素ポッテンシャル

(5.1.2) 式、(5.1.9) 式から流速と速度ポッテンシャル、流れ関数の関係は、

$$v_r = \frac{d}{d\,r}\,\Phi, \quad v_\theta = \frac{\frac{d}{d\,\theta}\,\Phi}{r}, \quad v_r = \frac{\frac{d}{d\,\theta}\,\Psi}{r}, \quad v_\theta = -\frac{d}{d\,r}\,\Psi$$

```
/* わき出し  */
kill(all);
depends(\Phi,[r,\theta]);
depends(\Psi,[r,\theta]);
declear(z,complex);
declear(F,complex);
VRP:v[r]=diff(\Phi,r,1);
VTP:v[\theta]=diff(\Phi,\theta,1)/r;
VRS:v[r]=diff(\Psi,\theta,1)/r;
VTS:v[\theta]=-diff(\Psi,r,1);
Q1:Q=2*%pi*r*v[r];
VR:solve(%,v[r])[1];
VT:v[\theta]=0;
PH1:subst([VRP],VR);
ode2(PH1,\Phi,r);
PH2:subst([%c=0],%);
PS1:expand(subst([VRS],VR)*r);
PS2:\Psi=integrate(rhs(PS1),\theta);
F=\Phi+%i*\Psi;
F1:subst([PH2,PS2],%);
Z1:z=r*%e^(%i*\theta);
Z2:solve(Z1,r)[1];
subst([Z2],F1);
radcan(%);
subst([Q=m*2*%pi],%);
```

わき出しの流量：Q と半径：r における v_r, v_θ の関係は、

$$Q = 2\,\pi\,r\,v_r, \quad v_\theta = 0$$

速度ポッテンシャル：Φ と流速：v_r の関係から、

$$\frac{d}{d\,r}\,\Phi = \frac{Q}{2\,\pi\,r}, \quad \Phi = \frac{\log\left(r\right)\,Q}{2\,\pi} \tag{5.1.30}$$

流れ関数：Ψ と流速：v_r の関係から、

$$\frac{d}{d\,\theta}\,\Psi = \frac{Q}{2\,\pi}, \quad \Psi = \frac{\theta\,Q}{2\,\pi}$$

複素速度ポッテンシャルは、

$$F = i\,\Psi + \Phi, \quad z = r\,e^{i\,\theta}$$

上記の関係から、

$$\begin{aligned}F =& \frac{i\,\theta\,Q}{2\,\pi} + \frac{\log\left(r\right)\,Q}{2\,\pi} = \frac{\log\left(e^{-i\,\theta}\,z\right)\,Q}{2\,\pi} + \frac{i\,\theta\,Q}{2\,\pi}\\ =& \frac{\log\left(z\right)\,Q}{2\,\pi}\end{aligned}$$

上記からわき出しの複素速度ポッテンシャル：F は、

$$F = m\,\log\left(z\right), \quad m = \frac{Q}{2\,\pi} \tag{5.1.31}$$

5.1.10 二重わき出し

x 軸から角度：α の位置：z_0 に強さ：m のわき出しを置き、原点に $-m$ のわき出しを置く。z_0 を原点に近づけることにより二重わき出しの複素ポテンシャルを求める。

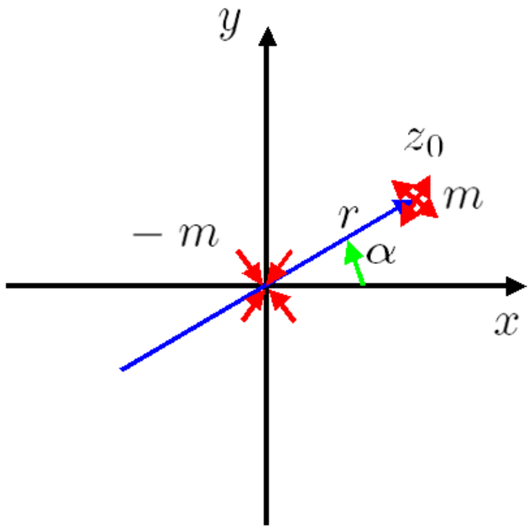


図 5.1.5: 2 次元二重わき出し

```
/*  二重わき出し  */
kill(all);
declare(z,complex);
F1:F=m*log(z-z[0])-m*log(z);
logcontract(F1);
F2:expand(%);
subst([z[0]=z[1]*z],%);
lhs(%)=taylor(rhs(%),z[1],0,5);
subst([z[1]=z[0]/z],%);
subst([z[0]=r*%e^(%i*\alpha)],%);
subst([m=\mu/r],%);
limit(%,r,0);
```

(5.1.31) 式から二重わき出しの複素ポテンシャル：F は下記となる。

$$
\begin{aligned}
F =& m\log\left(z-z_0\right)-m\log\left(z\right)\\
=& m\log\left(1-\frac{z_0}{z}\right)
\end{aligned}
$$

$\frac{z_0}{z}$ で Taylor 展開すると、

$$F=-\frac{z_0\,m}{z}-\frac{z_0^2\,m}{2\,z^2}-\frac{z_0^3\,m}{3\,z^3}-\frac{z_0^4\,m}{4\,z^4}-\frac{z_0^5\,m}{5\,z^5}+\ldots$$

ここで、

$$z_0=r\,e^{i\,\alpha}$$

これを上式に代入し、

$$
\begin{aligned}
F =& -\frac{e^{i\,\alpha}\,m\,r}{z}-\frac{e^{2\,i\,\alpha}\,m\,r^2}{2\,z^2}-\frac{e^{3\,i\,\alpha}\,m\,r^3}{3\,z^3}\\
&-\frac{e^{4\,i\,\alpha}\,m\,r^4}{4\,z^4}-\frac{e^{5\,i\,\alpha}\,m\,r^5}{5\,z^5}+\ldots
\end{aligned}
$$

$m\to\infty, r\to 0$ の時、$mr\to\mu$ とすると、

$$
\begin{aligned}
F =& -\frac{e^{i\,\alpha}\,\mu}{z}-\frac{e^{2\,i\,\alpha}\,\mu\,r}{2\,z^2}-\frac{e^{3\,i\,\alpha}\,\mu\,r^2}{3\,z^3}-\frac{e^{4\,i\,\alpha}\,\mu\,r^3}{4\,z^4}\\
&-\frac{e^{5\,i\,\alpha}\,\mu\,r^4}{5\,z^5}+\ldots\\
\to& \quad -\frac{e^{i\,\alpha}\,\mu}{z}
\end{aligned}
$$

以上から、二重わき出しの複素ポテンシャル：F は下記となる。

$$F=-\frac{e^{i\,\alpha}\,\mu}{z} \tag{5.1.32}$$

5.1.11　渦糸

原点に渦循環強さ：Γ の渦糸を置いた場合の複素ポテンシャルを求める。

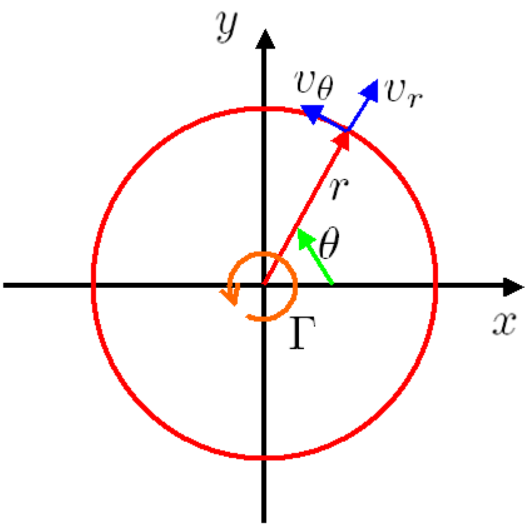


図 5.1.6: 渦糸

```
/*  渦糸  */
kill(all);
depends(\Phi,[r,\theta]);
depends(\Psi,[r,\theta]);
declear(z,complex);
declear(F,complex);
VRP:v[r]=diff(\Phi,r,1);
VTP:v[\theta]=diff(\Phi,\theta,1)/r;
VRS:v[r]=diff(\Psi,\theta,1)/r;
VTS:v[\theta]=-diff(\Psi,r,1);
G1:\gamma=2*%pi*r*v[\theta];
VT:solve(G1,v[\theta])[1];
PH1:subst([VTP],VT);
PH2:\Phi=integrate(rhs(PH1)*r,\theta);
PS1:subst([VTS],VT);
ode2(PS1,\Psi,r);
PS2:subst([%c=0],%);
F=\Phi+%i*\Psi;
F1:subst([PH2,PS2],%);
Z1:z=r*%e^(%i*\theta);
Z2:solve(Z1,r)[1];
subst([Z2],F1);
radcan(%);
subst([\gamma=\kappa*2*%pi],%);
```

(5.1.2) 式、(5.1.9) 式から流速と速度ポテンシャル、流れ関数の関係は、

$$v_r = \frac{d}{d\,r}\,\Phi, \quad v_\theta = \frac{\frac{d}{d\,\theta}\,\Phi}{r}, \quad v_r = \frac{\frac{d}{d\,\theta}\,\Psi}{r}, \quad v_\theta = -\frac{d}{d\,r}\,\Psi$$

渦循環：Γ と半径：r における v_r, v_θ の関係は、

$$v_r = 0, \quad \Gamma = 2\,\pi\,r\,v_\theta$$

速度ポテンシャル：Φ と流速：v_θ の関係から、

$$\frac{\frac{d}{d\,\theta}\,\Phi}{r} = \frac{\Gamma}{2\,\pi\,r}$$

$$\Phi = \frac{\theta\,\Gamma}{2\,\pi}$$

流れ関数：Ψ と流速：v_θ の関係から、

$$-\frac{d}{d\,r}\,\Psi = \frac{\Gamma}{2\,\pi\,r}$$

$$\Psi = -\frac{\log(r)\,\Gamma}{2\,\pi}$$

複素速度ポテンシャルは、

$$F = i\,\Psi + \Phi, \quad z = r\,e^{i\,\theta}$$

上記の関係から、

$$F = -\frac{i\log(r)\,\Gamma}{2\,\pi} + \frac{\theta\,\Gamma}{2\,\pi} = -\frac{i\log\left(e^{-i\,\theta}\,z\right)\,\Gamma}{2\,\pi} + \frac{\theta\,\Gamma}{2\,\pi}$$
$$= -\frac{i\log(z)\,\Gamma}{2\,\pi}$$

上記から渦糸の複素速度ポテンシャル：F は、

$$F = -i\,\kappa\log(z)\,, \quad \kappa = \frac{\Gamma}{2\,\pi} \tag{5.1.33}$$

例題 5.1.12 写像：角を曲がる流れ

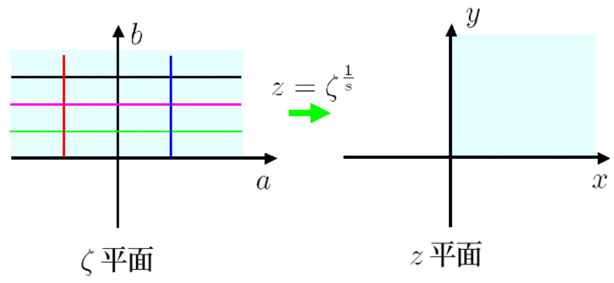


図 5.1.7: 角を曲がる流れ

```
/*  角を曲がる流れ  */
kill(all);
declare(z,complex);
declare(\zeta,complex);
assume(s>0);
assume(\zeta>0);
G0:\zeta=a+%i*b;
G1:\zeta=z^s;
Z1:solve(G1,z)[1];
Z2:subst([G0],Z1);
X1:x=realpart(rhs(Z2));
Y1:y=imagpart(rhs(Z2));
```

ζ 平面から z 平面への変換関数として、下記を考える、

$$\zeta = z^s, \quad z = \zeta^{\frac{1}{s}} \tag{5.1.34}$$

ζ 平面では、下記のように表現できる。

$$\zeta = i\,b + a$$

上式を (5.1.34) 式に代入し、ζ 平面の座標 : (a,b) が z 平面でどのように変換されるかを求める。

$$z = (i\,b + a)^{\frac{1}{s}}$$

上式の実数部と虚数部から x, y 座標が得られる。

$$x = \left(b^2 + a^2\right)^{\frac{1}{2\,s}} \cos\left(\frac{\mathrm{atan2}\,(b,a)}{s}\right)$$

$$y = \left(b^2 + a^2\right)^{\frac{1}{2\,s}} \sin\left(\frac{\mathrm{atan2}\,(b,a)}{s}\right)$$

図 5.1.7 の ζ 平面上で、$a=$ 一定、$b=$ 一定の直線が z 平面でどのように変換されるかの例を下記に示す。

```
X21:subst([s=2,b=2],rhs(X1));
Y21:subst([s=2,b=2],rhs(Y1));
X22:subst([s=2,b=4],rhs(X1));
Y22:subst([s=2,b=4],rhs(Y1));
X23:subst([s=2,b=6],rhs(X1));
Y23:subst([s=2,b=6],rhs(Y1));
X24:subst([s=2,a=0],rhs(X1));
Y24:subst([s=2,a=0],rhs(Y1));
X25:subst([s=2,a=4],rhs(X1));
Y25:subst([s=2,a=4],rhs(Y1));
X26:subst([s=2,a=-4],rhs(X1));
Y26:subst([s=2,a=-4],rhs(Y1));
XY1:[[0,0],[10,0]];
XY2:[[0,0],[10*cos(%pi/2),10*sin(%pi/2)]];
plot2d([[discrete,XY1],[discrete,XY2],
 [parametric,X21,Y21,[a,-100,100],
  [nticks,300]],
 [parametric,X22,Y22,[a,-100,100],
  [nticks,300]],
 [parametric,X23,Y23,[a,-100,100],
  [nticks,300]],
 [parametric,X24,Y24,[b,0.01,100],
  [nticks,300]],
 [parametric,X25,Y25,[b,0.01,100],
  [nticks,300]],
 [parametric,X26,Y26,[b,0.01,100],
  [nticks,300]]],
 [x,-1,10],[y,-1,5]);
```

下記に、$s=2,4,3/2,2/3$ とした場合の変換結果を以下に示す。各変換のプログラムは上記プログラムの数字を変えるだけなので、省略する。

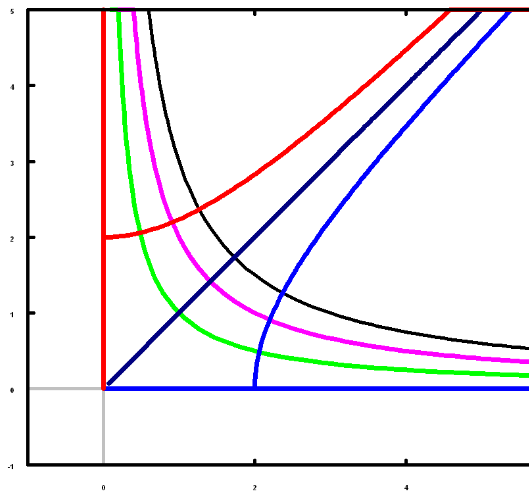


図 5.1.8: z 平面 (s=2)

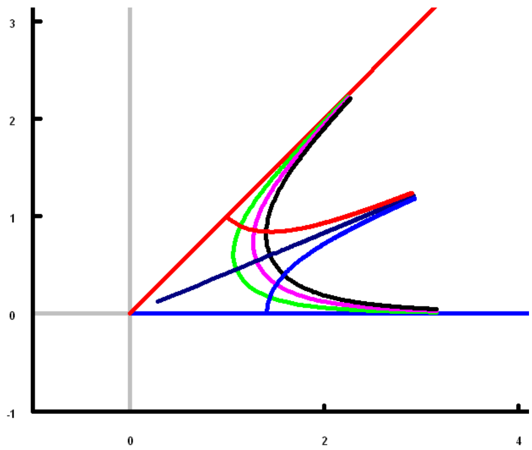


図 5.1.9: z 平面 (s=4)

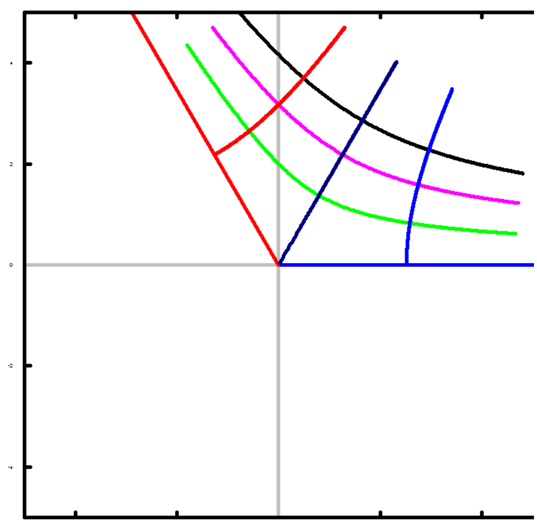


図 5.1.10: z 平面 (s=3/2)

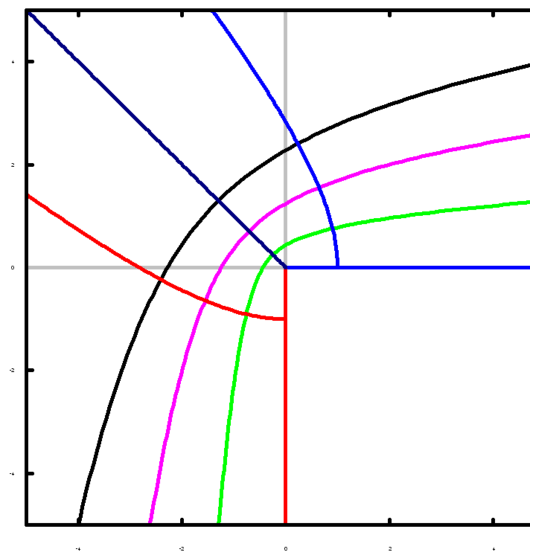


図 5.1.11: z 平面 (s=2/3)

例題 5.1.13 写像:平板・楕円変換 (Joukowski 変換)

```
/*  円→楕円変換 (Joukowski 変換)  */
kill(all);
declare(z,complex);
declare(\zeta,complex);
assume(A>0);
Z1:z=\zeta+A^2/\zeta;
G0:\zeta=R*%e^(%i*\theta);
Z2:subst([G0],Z1);
E10:%e^(%i*\theta);
E11:E10=rectform(E10);
E20:%e^(-%i*\theta);
E21:E20=rectform(E20);
subst([E21],Z2);
Z3:subst([E11],%);
X1:x=factor(realpart(rhs(Z3)));
Y1:y=factor(imagpart(rhs(Z3)));
C1:solve(X1,cos(\theta))[1];
S1:solve(Y1,sin(\theta))[1];
CS1:C1^2+S1^2;
CS2:trigsimp(lhs(CS1))=rhs(CS1);
```

変換関数として、下記を考える。

$$z=\zeta+\frac{A^2}{\zeta} \tag{5.1.35}$$

ζ 平面上で半径 : R の円が z 平面でどうなるかを調べる。ζ 平面上の点を下記の関数で表現する。

$$\zeta=e^{i\,\theta}\,R \tag{5.1.36}$$

このとき、a,b 座標は下記となる。

$$a=\cos(\theta)\;R,\quad b=\sin(\theta)\;R$$

(5.1.36) 式を (5.1.35) 式に代入し、ζ 平面上の点を z 平面上に変換する。

$$z=e^{i\,\theta}\,R+\frac{e^{-i\,\theta}\,A^2}{R}$$

ところで、下記の関係が成り立つので、

$$e^{i\,\theta}=i\sin(\theta)+\cos(\theta)\,,\quad e^{-i\,\theta}=\cos(\theta)-i\sin(\theta)$$

上式に代入し、

$$z=\left(i\sin(\theta)+\cos(\theta)\right)\,R+\frac{\left(\cos(\theta)-i\sin(\theta)\right)\,A^2}{R}$$

x,y 座標は、

$$x=\frac{\cos(\theta)\,\left(R^2+A^2\right)}{R}$$

$$y=\frac{\sin(\theta)\,(R-A)\,(R+A)}{R}$$

x,y 座標を次式のように変換する。

$$\sin(\theta)^2+\cos(\theta)^2=\frac{x^2\,R^2}{\left(R^2+A^2\right)^2}+\frac{y^2\,R^2}{\left(R^2-A^2\right)^2}$$

$$1=\frac{x^2\,R^2}{\left(R^2+A^2\right)^2}+\frac{y^2\,R^2}{\left(R^2-A^2\right)^2}$$

上式は明らかに楕円を表す式であり、ζ 平面上で半径 : R の円が z 平面で楕円に変換される。

ζ 平面上で半径 : R の円および、θ : 一定の線を描くプログラムを下記に示す。

```
A1:a=realpart(rhs(G0));
B1:b=imagpart(rhs(G0));
AA:subst([\theta=t],A1);
BB:subst([\theta=t],B1);
X21:subst([R=1],rhs(AA));
Y21:subst([R=1],rhs(BB));
X22:subst([R=2],rhs(AA));
Y22:subst([R=2],rhs(BB));
X23:subst([R=4],rhs(AA));
Y23:subst([R=4],rhs(BB));
X24:subst([t=%pi/4],rhs(AA));
Y24:subst([t=%pi/4],rhs(BB));
X25:subst([t=%pi/2],rhs(AA));
Y25:subst([t=%pi/2],rhs(BB));
X26:subst([t=3*%pi/4],rhs(AA));
Y26:subst([t=3*%pi/4],rhs(BB));
plot2d([
 [parametric,X21,Y21,[t,0.01,6.28],
  [nticks,300]],
 [parametric,X22,Y22,[t,0.01,6.28],
  [nticks,300]],
 [parametric,X23,Y23,[t,0.01,6.28],
  [nticks,300]],
 [parametric,X24,Y24,[R,1,6],[nticks,300]],
 [parametric,X25,Y25,[R,1,6],[nticks,300]],
 [parametric,X26,Y26,[R,1,6],[nticks,300]]
 ],[x,-5,5],[y,-5,5]);
```

z 平面で R の円および、θ：一定の線がどのようになるかのプログラムを下記に示す。。

```
XX:subst([\theta=t],X1);
YY:subst([\theta=t],Y1);
X21:subst([A=1,R=1],rhs(XX));
Y21:subst([A=1,R=1],rhs(YY));
X22:subst([A=1,R=2],rhs(XX));
Y22:subst([A=1,R=2],rhs(YY));
X23:subst([A=1,R=4],rhs(XX));
Y23:subst([A=1,R=4],rhs(YY));
X24:subst([A=1,t=%pi/4],rhs(XX));
Y24:subst([A=1,t=%pi/4],rhs(YY));
X25:subst([A=1,t=%pi/2],rhs(XX));
Y25:subst([A=1,t=%pi/2],rhs(YY));
X26:subst([A=1,t=3*%pi/4],rhs(XX));
Y26:subst([A=1,t=3*%pi/4],rhs(YY));
plot2d([
 [parametric,X21,Y21,[t,0.01,6.28],
  [nticks,300]],
 [parametric,X22,Y22,[t,0.01,6.28],
  [nticks,300]],
 [parametric,X23,Y23,[t,0.01,6.28],
  [nticks,300]],
 [parametric,X24,Y24,[R,1,6],[nticks,300]],
 [parametric,X25,Y25,[R,1,6],[nticks,300]],
 [parametric,X26,Y26,[R,1,6],[nticks,300]]
 ],[x,-5,5],[y,-5,5]);
```

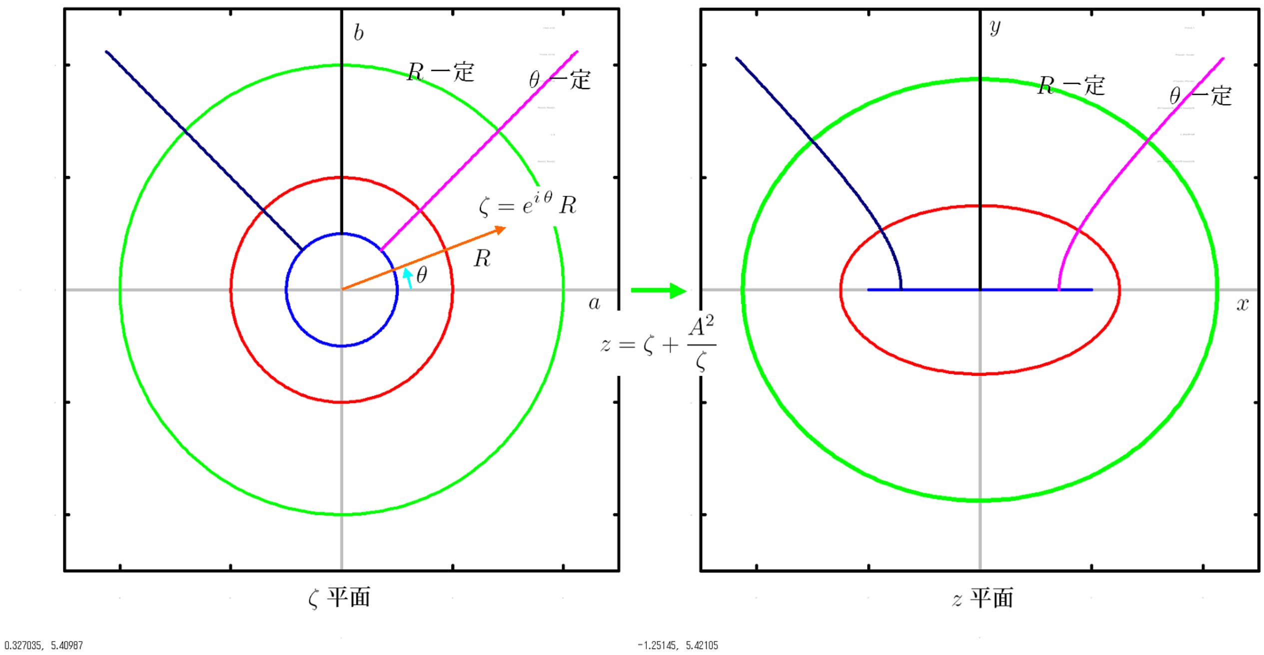


図 5.1.12: 円→楕円変換

例題 5.1.14 写像:折れ曲がり直線 (Schwarz-Christoffel の公式)

下図の ζ 平面で上面の領域を z 平面で折れ曲がり曲線の境界を持つ半無限領域となる写像関数を求める。

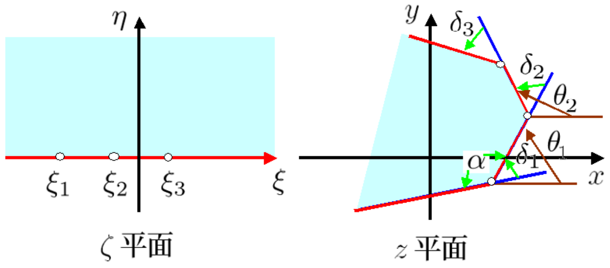


図 5.1.13: 折れ曲がり直線 (Schwarz-Christoffel の公式)

```
/* Schwarz-Christoffel の公式 */
kill(all);
declare(z,complex);
declare(F,complex);
declare(\zeta,complex);
declare(\xi,real);
declare(C,real);
assume(U>0);
assume(\xi>\xi[1]);
assume(\xi>\xi[2]);
assume(\xi<\xi[3]);
F1:F=U*\zeta;
Z1:z=\zeta^(\alpha/%pi);
Z2:\zeta=z^(%pi/\alpha);
F2:subst([Z2],F1);
XY1:z=x+%i*y;
PS1:\Psi=imagpart(subst([XY1],rhs(F2)));
subst([\alpha=%pi/2,U=1],PS1);
subst([\alpha=%pi/4,U=1],PS1);
subst([\alpha=2*%pi/3,U=1],PS1);
```

5.1.12 節に示す角を曲がる流れの下記の写像関数を使用する。 ここで角の内角を α とする。

$$z = \zeta^{\frac{\alpha}{\pi}}, \quad \zeta = z^{\frac{\pi}{\alpha}} \tag{5.1.37}$$

ζ 平面で ξ 方向の一様流の複素ポテンシャルは、

$$F = U\,\zeta$$

上式の写像関数を代入すると、z 平面の複素ポテンシャルは、

$$F = z^{\frac{\pi}{\alpha}}\,U$$

上式に $z = i\,y + x$ を代入し、虚部をとれば下記の流れ関数が得られる。

$$\Psi = \left(y^2 + x^2\right)^{\frac{\pi}{2\,\alpha}} \sin\left(\frac{\pi\,\mathrm{atan2}\,(y,x)}{\alpha}\right)\,U$$

$\alpha = \frac{\pi}{2}, U = 1$ について流れ関数は下記となる。これを *gnuplot* を使って描くと下図となる。

$$\Psi = \left(y^2 + x^2\right)\,\sin\left(2\,\mathrm{atan2}\,(y,x)\right)$$

```
#!/gnuplot
set xrange [-5:5]
set yrange [-5:5]
set isosamples 150,150
set contour base
set cntrparam levels incremental 0,1,300
unset key
unset surface
set view map
splot (y**2+x**2)*sin(2*atan2(y,x))
#    EOF
```

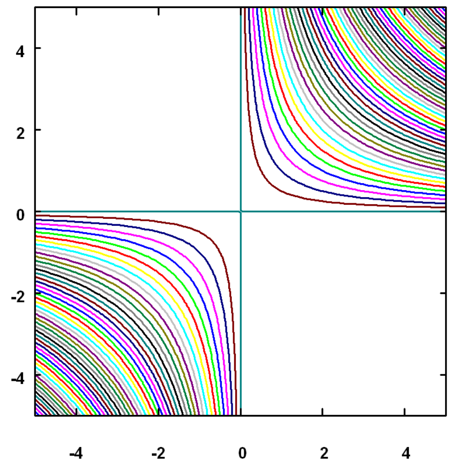


図 5.1.14: z 平面 $(\alpha = \frac{\pi}{2})$

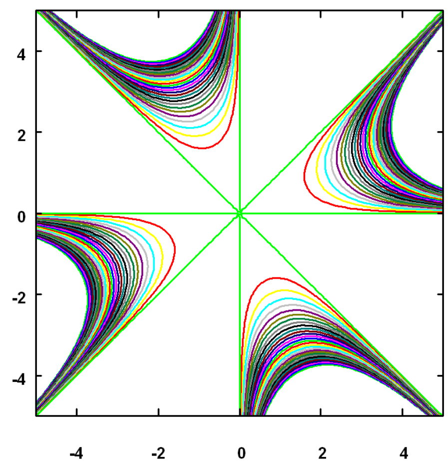


図 5.1.15: z 平面 $(\alpha = \frac{\pi}{4})$

(1)Schwarz-Christoffel の公式

```
Z3:z=(\zeta-\zeta[k])^((%pi-\delta[k])
 /%pi);
expand(%);
DZ3:'diff(z,\zeta,1)=diff(rhs(%),\zeta,1);
DZ4:lhs(DZ3)=C[1]*%e^(%i*\delta[0])
  *product((zeta-zeta[k])^(-\delta[k]/%pi)
  ,k,1,3);
DZ41:lhs(DZ3)=C[1]*%e^(%i*\delta[0])
  *product((zeta-zeta[k])^(-\delta[k]/%pi)
  ,k,1,K);
log(dz)-log(d\zeta)=log(rhs(DZ4));
expand(radcan(%));
subst([\zeta=\xi,\zeta[1]=\xi[1],\zeta[2]
  =\xi[2],\zeta[2]=\xi[2]],%);
imagpart(%);
```

(5.1.37) 式から、ζ_k で折れ曲がり、角の内角：α を外角：δ_k で表現すると写像関数は、

$$z=(\zeta-\zeta_k)^{\frac{\pi-\delta_k}{\pi}}$$

上式を ζ で微分すると、

$$\frac{d}{d\,\zeta}\,z=\frac{1-\frac{\delta_k}{\pi}}{(\zeta-\zeta_k)^{\frac{\delta_k}{\pi}}}$$

上式を基に K 点の折れ曲がりがあるときに下記とする (Schwarz-Christoffel の公式)。

$$\frac{d}{d\,\zeta}\,z=e^{i\,\delta_0}\,C_1\,\prod_{k=1}^{K}\frac{1}{(\zeta-\zeta_k)^{\frac{\delta_k}{\pi}}} \tag{5.1.38}$$

ここで $e^{i\,\delta_0}\,C_1$ は定数とする。上式で $K=3$ の場合には、

$$\frac{d}{d\,\zeta}\,z=\frac{e^{i\,\delta_0}\,C_1}{(\zeta-\zeta_1)^{\frac{\delta_1}{\pi}}\,(\zeta-\zeta_2)^{\frac{\delta_2}{\pi}}\,(\zeta-\zeta_3)^{\frac{\delta_3}{\pi}}} \tag{5.1.39}$$

dz の角度変化を求めるのに、$\log\left(e^{i\,\theta}\,R\right)=\log(R)+i\,\theta$ から角度が容易に求めることができることから、上式の *log* をとり、

$$\begin{aligned}\log(dz)-\log(d\zeta)=&-\frac{\delta_3\log(\xi-\xi_3)}{\pi}-\frac{\delta_2\log(\xi-\xi_2)}{\pi}\\&-\frac{\delta_1\log(\xi-\xi_1)}{\pi}+\log(C_1)+i\,\delta_0\end{aligned}$$

その虚部は、$\xi>\xi_1,\quad \xi>\xi_2,\quad \xi_3>\xi$ とすると、

$$\mathrm{atan2}\,(0,dz)-\mathrm{atan2}\,(0,d\zeta)=-\delta_3+\delta_0$$

以上の結果から、$\xi\to\infty$ のときの角度：δ_0 とし、ξ_3 で δ_3 曲がり、同様に、ξ_2 で δ_2、ξ_1 で δ_1 曲がる。

```
MU1:\zeta=1/\mu;
DMU1:'diff(\zeta,\mu,1)=diff(rhs(MU1),\mu
 ,1);
DZ5:'diff(z,\mu,1)=rhs(DZ4)*rhs(DMU1);
subst([(\zeta-\zeta[1])^(\delta[1]/%pi)
  =(1-\mu*\zeta[1])^(\delta[1]/%pi)/
  \mu^(\delta[1]/%pi)],DZ5);
subst([(\zeta-\zeta[2])^(\delta[2]/%pi)
  =(1-\mu*\zeta[2])^(\delta[2]/%pi)
  /\mu^(\delta[2]/%pi)],%);
DZ51:subst([(\zeta-\zeta[3])^(\delta[3]
 /%pi)=(1-\mu*\zeta[3])^(\delta[3]/%pi)
  /\mu^(\delta[3]/%pi)],%);
subst([\delta[1]=2*%pi-\delta[2]-\delta[3]]
  ,num(rhs(DZ51)));
expand(%);
DZ52:lhs(DZ51)=%/denom(rhs(DZ51));
DZ53:lhs(DZ52)=limit(rhs(DZ52),\mu,0);
```

$\zeta\to\infty$ のときの性質を調べる。$\zeta\to\infty$ のとき $\mu\to 0$ となる μ を導入する。

$$\zeta=\frac{1}{\mu}$$

μ で微分すると、

$$\frac{d}{d\,\mu}\,\zeta=-\frac{1}{\mu^2}$$

$K=3$ の場合である (5.1.39) 式に上式を代入し、$\delta_1+\delta_2+\delta_3=2\,\pi$ の関係から、

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\,\mu}\,z&=-\frac{e^{i\,\delta_0}\,C_1}{\mu^2\,(\zeta-\zeta_1)^{\frac{\delta_1}{\pi}}\,(\zeta-\zeta_2)^{\frac{\delta_2}{\pi}}\,(\zeta-\zeta_3)^{\frac{\delta_3}{\pi}}}\\&=-\frac{e^{i\,\delta_0}\,C_1\,\mu^{\frac{\delta_3}{\pi}+\frac{\delta_2}{\pi}+\frac{\delta_1}{\pi}-2}}{(1-\zeta_1\,\mu)^{\frac{\delta_1}{\pi}}\,(1-\zeta_2\,\mu)^{\frac{\delta_2}{\pi}}\,(1-\zeta_3\,\mu)^{\frac{\delta_3}{\pi}}}\\&=-\frac{e^{i\,\delta_0}\,C_1}{(1-\zeta_1\,\mu)^{\frac{\delta_1}{\pi}}\,(1-\zeta_2\,\mu)^{\frac{\delta_2}{\pi}}\,(1-\zeta_3\,\mu)^{\frac{\delta_3}{\pi}}}\end{aligned}$$

上式から、

$$\frac{d}{d\,\mu}\,z=-e^{i\,\delta_0}\,C_1\quad(\mu\to 0)$$

以上の結果から、$\xi\to\infty$ のときの角度：δ_0 で、C_1 は倍率となっている。以上から (5.1.38) 式が折れ曲がり曲線の境界を持つ半無限領域となる写像関数である。

(2) 対数速度

```
/* Schwarz-Christoffel の公式 対水速度 */
F5:F=U*\zeta;
DF5:'diff(F,\zeta,1)=diff(rhs(F5),\zeta,1);
V[x]+%i*V[y]=V*%e^(%i*\theta);
VF5:'diff(F,z,1)=V[x]-%i*V[y];
VF6:'diff(F,z,1)=w;
VF61:w='diff(F,z,1);
VF51:'diff(F,z,1)=V*%e^(-%i*\theta);
LVF5:log(lhs(VF5))=radcan(log(rhs(VF51)));
LMVF5:\Lambda=log(lhs(VF5));
LM5:subst([VF6],LMVF5);
LM51:solve(LM5,w)[1];
LM52:subst([VF61],LM51);
TH1:\delta[k]=\theta[k]-\theta[k-1];
M1:m[k]=\delta[k]/%pi;
LM6:\Lambda=sum(m[k]*log(\zeta-\xi[k]),k,1
  ,K);
LM61:subst([M1],LM6);
LM62:subst([K=3],LM61), simpsum;
DZ6:'diff(z,\zeta,1)='diff(z,F,1)
  *'diff(F,\zeta,1);
DZ61:subst(['diff(z,F,1)=1/'diff(F,z,1),
 LM52,DF5],DZ6);
subst([LM62],DZ61);
radcan(%);
```

ζ 平面で ξ 方向の一様流の複素ポテンシャル: F およびその ζ の微分は、

$$F = U\,\zeta, \quad \frac{d}{d\,\zeta}\,F = U \tag{5.1.40}$$

z 平面で複素ポテンシャルと流速の関係は、

$$\frac{d}{d\,z}\,F = V_x - i\,V_y = e^{-i\,\theta}\,V \tag{5.1.41}$$

対数速度を下記とする。

$$\Lambda = \log\left(\frac{d}{d\,z}\,F\right) = \log\left(V\right) - i\,\theta$$

上式から、

$$\frac{d}{d\,z}\,F = e^{\Lambda} \tag{5.1.42}$$

折れ線の角度を θ_k とすると、角の外角は δ_k となる。

$$\delta_k = \theta_k - \theta_{k-1}$$

このときの角に置くわき出し強さ：m_k は、

$$m_k = \frac{\delta_k}{\pi}$$

以上から、複素変数：Λ は下記となる。

$$\begin{aligned}\Lambda =& \sum_{k=1}^{K} m_k \log\left(\zeta - \xi_k\right)\\ =& \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{K} \delta_k \log\left(\zeta - \xi_k\right)\end{aligned} \tag{5.1.43}$$

$K = 3$ の場合には、

$$\Lambda = \frac{\delta_3 \log\left(\zeta - \xi_3\right)}{\pi} + \frac{\delta_2 \log\left(\zeta - \xi_2\right)}{\pi} + \frac{\delta_1 \log\left(\zeta - \xi_1\right)}{\pi}$$

(5.1.40) 式、(5.1.42) 式および上式を下記の式の代入し、

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\,\zeta}\,z =& \left(\frac{d}{d\,F}\,z\right)\left(\frac{d}{d\,\zeta}\,F\right)\\ =& e^{-\Lambda}\,U\\ =& U\,e^{-\frac{\delta_3 \log(\zeta-\xi_3)}{\pi} - \frac{\delta_2 \log(\zeta-\xi_2)}{\pi} - \frac{\delta_1 \log(\zeta-\xi_1)}{\pi}}\\ =& \frac{U}{\left(\zeta - \xi_1\right)^{\frac{\delta_1}{\pi}}\left(\zeta - \xi_2\right)^{\frac{\delta_2}{\pi}}\left(\zeta - \xi_3\right)^{\frac{\delta_3}{\pi}}}\end{aligned}$$

上式から、$K = 3$ の場合の (5.1.39) 式と同じ結果が得られた。以上から対数速度の方法でも (5.1.38) 式の Schwarz-Christoffel の公式が証明された。

5.1.15　対数速度による多角形内外へ写像

前節に示す耐水速度による写像を多角形内外への写像関数を求める。

(1) 多角形内部

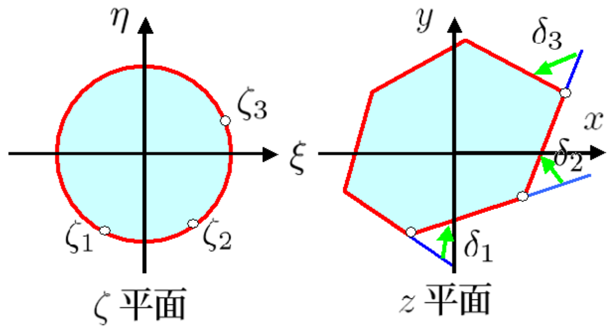


図 5.1.16: 多角形内部

```
/* 対数速度による多角形内外へ写像 */
kill(all);
declare(z,complex);
declare(F,complex);
declare(\zeta,complex);
/* 多角形内部 */
F1:F=-%i*\kappa*log(\zeta);
DF1:'diff(F,\zeta,1)=diff(rhs(F1),\zeta,1);
L1:\Lambda=sum(\delta[k]/%pi*log(\zeta[k]
  -\zeta),k,1,K)-log(\zeta);
L11:subst([K=3],L1), simpsum;
DZ1:'diff(z,\zeta,1)=%e^(-\Lambda)
  *'diff(F,\zeta,1);
subst([DF1,L11],DZ1);
DZ2:radcan(%);
DZ3:lhs(DZ2)=C*product((\zeta[k]-\zeta)
  ^(-\delta[k]/%pi),k,1,K);
/* 正多角形内部 */
ZTK1:\zeta[k]=%e^(%i*2*%pi/K*k);
DL1:\delta[k]=2*%pi/K;
DZ31:subst([ZTK1,DL1],DZ3);
```

ζ 平面で渦循環の一様流の複素ポテンシャル: F およびその ζ の微分は、

$$F=-i\,\kappa\log\left(\zeta\right),\quad \frac{d}{d\,\zeta}\,F=-\frac{i\,\kappa}{\zeta} \tag{5.1.44}$$

(5.1.43) 式を基に、内部は囲われており、外部に流れ出ないので、総わき出し量の 1/2 の吸い込みを置く必要があり、複素変数：Λ は下記となる。

$$\Lambda=\frac{\sum_{k=1}^{K}\delta_k\log\left(\zeta_k-\zeta\right)}{\pi}-\log\left(\zeta\right) \tag{5.1.45}$$

$K=3$ の場合には、

$$\Lambda=\frac{\delta_3\log\left(\zeta_3-\zeta\right)+\delta_2\log\left(\zeta_2-\zeta\right)+\delta_1\log\left(\zeta_1-\zeta\right)}{\pi}$$
$$-\log\left(\zeta\right)$$

(5.1.44) 式、(5.1.42) 式および上式を下記の式の代入し、

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\,\zeta}\,z=&\left(\frac{d}{d\,F}\,z\right)\left(\frac{d}{d\,\zeta}\,F\right)\\ =&e^{-\Lambda}\left(\frac{d}{d\,\zeta}\,F\right)\\ =&-i\,\kappa\,e^{-\frac{\delta_3\log(\zeta_3-\zeta)+\delta_2\log(\zeta_2-\zeta)+\delta_1\log(\zeta_1-\zeta)}{\pi}}\\ =&-\frac{i\,\kappa}{\left(\zeta_1-\zeta\right)^{\frac{\delta_1}{\pi}}\left(\zeta_2-\zeta\right)^{\frac{\delta_2}{\pi}}\left(\zeta_3-\zeta\right)^{\frac{\delta_3}{\pi}}}\end{aligned}$$

上式から一般化し次式の写像関数を得る。

$$\frac{d}{d\,\zeta}\,z=C\prod_{k=1}^{K}\frac{1}{\left(\zeta_k-\zeta\right)^{\frac{\delta_k}{\pi}}} \tag{5.1.46}$$

正多角形の場合には、

$$\zeta_k=e^{\frac{2\,i\,\pi\,k}{K}},\quad \delta_k=\frac{2\,\pi}{K}$$

上式を代入し、次式の写像関数を得る。

$$\frac{d}{d\,\zeta}\,z=C\prod_{k=1}^{K}\frac{1}{\left(e^{\frac{2\,i\,\pi\,k}{K}}-\zeta\right)^{\frac{2}{K}}}$$

(2) 多角形外部

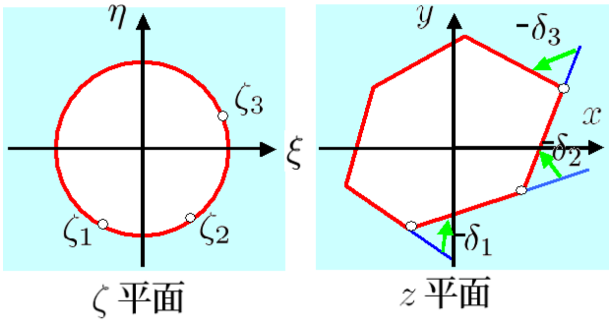


図 5.1.17: 多角形外部

```
/* 多角形外部 */
L2:\Lambda=sum(-\delta[k]/%pi*log(\zeta
  -\zeta[k]),k,1,K)+log(\zeta);
L21:subst([K=3],L2), simpsum;
subst([DF1,L21],DZ1);
DZ4:radcan(%);
DZ5:lhs(DZ4)=C*product((\zeta-\zeta[k])
  ^(\delta[k]/%pi),k,1,K)/\zeta^2;
/* 正多角形外部 */
DZ6:subst([ZTK1,DL1],DZ5);
subst([K=2],DZ6), simpproduct;
expand(%);
z=integrate(rhs(%),\zeta);
```

多角形内部の複素変数：(5.1.45) 式では辺で流体を狭める方向であるが、多角形外部では辺で流体を広げる方向であり、わき出し強さを負とする必要がある。このことから、多角形外部の複素変数は下記となる。

$$\Lambda = \log(\zeta) - \frac{\sum_{k=1}^{K} \delta_k \log(\zeta - \zeta_k)}{\pi} \tag{5.1.47}$$

$K=3$ の場合には、

$$\Lambda = \log(\zeta) - \frac{\delta_3 \log(\zeta-\zeta_3) + \delta_2 \log(\zeta-\zeta_2) + \delta_1 \log(\zeta-\zeta_1)}{\pi}$$

(5.1.44) 式、(5.1.42) 式および上式を下記の式の代入し、

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\,\zeta}\,z =& \left(\frac{d}{d\,F}\,z\right)\left(\frac{d}{d\,\zeta}\,F\right)\\
=& e^{-\Lambda}\left(\frac{d}{d\,\zeta}\,F\right)\\
=& -\frac{i\,\kappa\,e^{\frac{\delta_3 \log(\zeta-\zeta_3)+\delta_2 \log(\zeta-\zeta_2)+\delta_1 \log(\zeta-\zeta_1)}{\pi}}}{\zeta^2}\\
=& -\frac{i\,\kappa\,(\zeta-\zeta_1)^{\frac{\delta_1}{\pi}}\,(\zeta-\zeta_2)^{\frac{\delta_2}{\pi}}\,(\zeta-\zeta_3)^{\frac{\delta_3}{\pi}}}{\zeta^2}
\end{aligned}$$

上式から一般化し次式の写像関数を得る。

$$\frac{d}{d\,\zeta}\,z = \frac{C\,\prod_{k=1}^{K}(\zeta-\zeta_k)^{\frac{\delta_k}{\pi}}}{\zeta^2} \tag{5.1.48}$$

正多角形の場合には次式の写像関数を得る。

$$\frac{d}{d\,\zeta}\,z = \frac{C\,\prod_{k=1}^{K}\left(\zeta - e^{\frac{2\,i\,\pi\,k}{K}}\right)^{\frac{2}{K}}}{\zeta^2}$$

$K=2$ の場合の平板では上式から、

$$\frac{d}{d\,\zeta}\,z = \frac{C\,(\zeta-1)\,(\zeta+1)}{\zeta^2} = C - \frac{C}{\zeta^2}$$

上式を積分して、

$$z = \int C - \frac{C}{\zeta^2} d\zeta = C\,\zeta + \frac{C}{\zeta}$$

これは Joukowski 変換の結果と一致している。

5.1.16　円定理

円柱がないときの複素ポテンシャル：$f(z)$ とする。速度ポッテンシャルを Φ、流れ関数を Ψ とすると、

$$f\left(z\right)=i\,\Psi\left(z\right)+\Phi\left(z\right) \tag{5.1.49}$$

原点に中心がある半径：R の円柱を考える。円上では次の関係がある。

$$R^2=z\overline{z} \tag{5.1.50}$$

次に示す関数を考える。

$$F(z)=f(z)+\overline{f}\left(\frac{R^2}{z}\right) \tag{5.1.51}$$

ここで下記の関係から、

$$\overline{f}\left(z\right)=\overline{f\left(\overline{z}\right)} \tag{5.1.52}$$

(5.1.51) 式は、(5.1.50) 式、上式から、

$$F(z)=f(z)+\overline{f\left(z\right)}=2\,\Phi \tag{5.1.53}$$

上式から $\Psi=0$ となり、原点に中心がある半径：R の円が流線となる。

5.1.17　Blasius の定理

二次元完全流体中の物体に作用する力およびモーメントを求める。

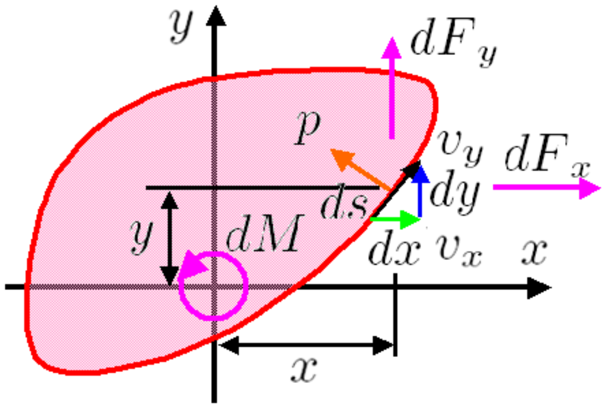


図 5.1.18: Blasius の定理

```
/* Blasius の定理  */
kill(all);
declear(z,complex);
declear(F,complex);
DFX:dF[x]=-p*dy;
DFY:dF[y]=p*dx;
DF:DFX-%i*DFY;
lhs(%)=factor(rhs(%));
lhs(%)=factor(subst([dy=%i*dy],rhs(%)));
DF1:subst([dy=-%i*dy],%);
P1:p=-1/2*\rho*(v[x]^2+v[y]^2);
V2:(v[x]-%i*v[y])*(v[x]+%i*v[y]);
V21:expand(V2)=V2;
P11:subst([V21],P1);
DF1:subst([P11],DF);
VXY:v[xy]=v[x]-%i*v[y];
DF2:subst([-%i*v[y]=v[xy]-v[x]],DF1);
DF3:lhs(DF2)=factor(expand(rhs(DF2)));
```

物体表面：x,y における圧力を p とすると、物体表面要素長さ：ds に作用する力の x,y 成分は下記となる。

$$dF_x=-dy\,p,\quad dF_y=dx\,p$$

これをまとめて、

$$dF_x-i\,dF_y=-\left(dy+i\,dx\right)\,p \tag{5.1.54}$$

圧力：p は物体表面流速：v_x,v_y から下記で表現できる。

$$\begin{aligned}p&=-\frac{\rho\,\left(v_y^2+v_x^2\right)}{2}\\&=-\frac{\rho\,\left(v_x-i\,v_y\right)\,\left(i\,v_y+v_x\right)}{2}\end{aligned}$$

一時的に下記に定義した v_{xy} を導入する。

$$v_{xy}=v_x-i\,v_y$$

上式を作用する力に代入し、

$$dF_x - i\,dF_y = \frac{\rho\,v_{xy}\,\left(i\,dy\,v_y - dx\,v_y + dy\,v_x + i\,dx\,v_x\right)}{2} \tag{5.1.55}$$

```
DF4:subst([dx*v[y]=-dx*v[y],dy*v[x]
  =-dy*v[x]],DF3);
VXY1:v[xy1]=%i*(v[x]-%i*v[y])*(dx+%i*dy);
VXY2:expand(%);
VX1:solve(VXY2,v[x])[1];
DF5:subst([VX1],DF4);
lhs(DF5)=factor(expand(rhs(DF5)));
DF6:subst([VXY1,VXY],%);
DZ1:dz=dx+%i*dy;
DZ2:solve(DZ1,dx)[1];
DFZ1:'diff(F,z,1)=v[x]-%i*v[y];
DFZ2:solve(DFZ1,v[x])[1];
DF7:subst([DZ2,DFZ2],DF6);
F1:F[x]-%i*F[y]='integrate(rhs(DF7)/dz,z);
```

境界も流線であるため、境界に沿った流れとなる。このため $dx/v_x = dy/v_y$ の関係が成り立つ。(5.1.55) 式に $dy\,v_x = dx\,v_y$ の関係から下記とする。

$$dF_x - i\,dF_y = \frac{\rho\,v_{xy}\,\left(i\,dy\,v_y + dx\,v_y - dy\,v_x + i\,dx\,v_x\right)}{2} \tag{5.1.56}$$

下記に定義した v_{xy1} を導入する。

$$\begin{aligned} v_{xy1} =& i\,\left(i\,dy + dx\right)\,\left(v_x - i\,v_y\right) \\ =& i\,dy\,v_y + dx\,v_y - dy\,v_x + i\,dx\,v_x \end{aligned}$$

(5.1.56) 式に上式を代入し、

$$\begin{aligned} dF_x - i\,dF_y =& \frac{\rho\,v_{xy}\,v_{xy1}}{2} \\ =& \frac{i\,\left(i\,dy + dx\right)\,\rho\,\left(v_x - i\,v_y\right)^2}{2} \end{aligned} \tag{5.1.57}$$

(5.1.15) 式などから、

$$dz = i\,dy + dx, \quad \frac{d}{d\,z}\,F = v_x - i\,v_y$$

(5.1.57) 式に上式を代入し、

$$dF_x - i\,dF_y = \frac{i\,dz\,\rho\,\left(\frac{d}{d\,z}\,F\right)^2}{2} \tag{5.1.58}$$

上式を積分し、

$$F_x - i\,F_y = \frac{i\,\rho}{2}\,\oint \left(\frac{d}{d\,z}\,F\right)^2 dz \tag{5.1.59}$$

```
DF10:dF=lhs(DF7);
DF11:dF=rhs(DF7);
DM1:dM=x*dF[y]-dF[x]*y;
DF10*z;
lhs(%)=subst([z=x+%i*y],rhs(%));
DM2:lhs(%)=expand(rhs(%));
DM3:'imagpart(lhs(DM2))=imagpart(rhs(DM2));
solve(DM1,dF[y])[1];
subst([%],DM3);
solve(%,dM)[1];
DM4:lhs(%)=(subst([DF11],rhs(%)));
DM5:lhs(%)='realpart(rhs(DM4));
M1:M='realpart('integrate(rhs(DM4)/dz,z));
```

下記に定義した dF を導入する。

$$\begin{aligned} dF =& dF_x - i\,dF_y \\ =& \frac{i\,dz\,\rho\,\left(\frac{d}{d\,z}\,F\right)^2}{2} \end{aligned}$$

上式に z を掛け、整理すると、

$$\begin{aligned} z\,dF =& \left(dF_x - i\,dF_y\right)\,z \\ =& \left(i\,y + x\right)\,\left(dF_x - i\,dF_y\right) \\ =& y\,dF_y - i\,x\,dF_y + i\,dF_x\,y + x\,dF_x \end{aligned}$$

物体表面要素長さ：ds に作用する原点まわりのモーメントは、

$$dM = x\,dF_y - dF_x\,y$$

上の二式から、

$$\Im_m\left(z\,dF\right) = dF_x\,y - x\,dF_y$$

原点まわりのモーメントは、

$$\begin{aligned} dM =& -\Im_m\left(z\,dF\right) \\ =& \Re_e\left(-\frac{dz\,\rho\,z\,\left(\frac{d}{d\,z}\,F\right)^2}{2}\right) \end{aligned}$$

上式を積分し、

$$M = \Re_e\left(-\frac{\rho}{2}\,\oint z\,\left(\frac{d}{d\,z}\,F\right)^2 dz\right) \tag{5.1.60}$$

5.1.18　Lagally の定理

流速：U、流向：α の一様流中の中に座標原点に柱状体 C を置き、その原点に渦循環強さ：Γ の渦糸を、その外部の $z=a$ の位置に、わき出し強さ：m のわき出しを置いたとき、柱状体 C に作用する力、モーメントを求める。

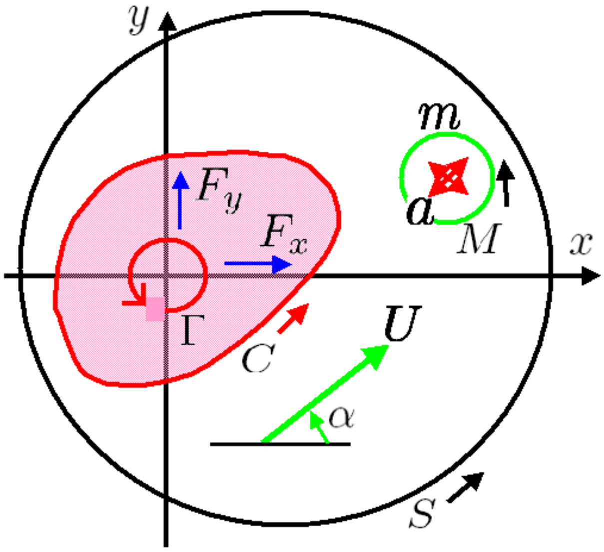


図 5.1.19: Lagally の定理

```
/* Lagally's 定理 */
kill(all);
declare(z,complex);
declare(F,complex);
declare(a,complex);
assume(r>0);
F0:U*%e^(-%i*\alpha)*z;
F1:m*log(z-a);
F2:-%i*\Gamma/2/%pi*log(z);
F3:A[1]/z+A[2]/z^2+A[3]/z^3+A[4]/z^4;
F4:F=F0+F1+F2+F3;
```

一様流の複素ポテンシャルは、

$$F_0 = e^{-i\,\alpha}\, z\, U$$

$z=a$ に置いたわき出しの複素ポテンシャルは、

$$F_1 = m \log(z-a)$$

原点に置いた渦糸の複素ポテンシャルは、

$$F_2 = -\frac{i\,\Gamma \log(z)}{2\,\pi}$$

柱状体による撹乱の複素ポテンシャルは、

$$F_3 = \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \frac{A_3}{z^3} + \frac{a_4}{z^4}$$

上記流場の複素ポテンシャルは、下記のように表せる。

$$\begin{aligned} F =& e^{-i\,\alpha}\, z\, U + m \log(z-a) - \frac{i\,\Gamma \log(z)}{2\,\pi} \\ &+ \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \frac{A_3}{z^3} + \frac{A_4}{z^4} + \ldots \end{aligned}$$

(5.1.59) 式の Blasius の定理の定理から、物体に作用する力は下記となる。

$$F_x - i\,F_y = \frac{i\,\rho}{2} \oint_C \left(\frac{d}{d\,z} F\right)^2 dz$$

上図から物体境界：C、物体、わき出しを含む大きな円：S、わき出しを囲む小さな円：M とすると下記の関係がある。

$$\begin{aligned} &\frac{i\,\rho}{2} \oint_S \left(\frac{d}{d\,z} F\right)^2 dz - \frac{i\,\rho}{2} \oint_C \left(\frac{d}{d\,z} F\right)^2 dz \\ &- \frac{i\,\rho}{2} \oint_M \left(\frac{d}{d\,z} F\right)^2 dz = 0 \end{aligned}$$

上記から、物体に作用する力は下記となる。

$$F_x - i\,F_y = \frac{i\,\rho}{2} \oint_S \left(\frac{d}{d\,z} F\right)^2 dz - \frac{i\,\rho}{2} \oint_M \left(\frac{d}{d\,z} F\right)^2 dz \tag{5.1.61}$$

```
FD1:'diff(F,z,1)=diff(rhs(F4),z,1);
F[x]-%i*F[y]=%i*\rho/2*integrate((
  'diff(F,z,1))^2,z);
F1D1:diff(F1,z,1);
F1D1=taylor(F1D1,a,0,3);
F1D2:F1D1=rest(rhs(%),-1);
FD2:subst([F1D2],FD1);
FD22:lhs(FD2)^2=expand(rhs(FD2)^2);
RFD22:coeff(rhs(FD22),z,-1);
FCS:F[xs]-%i*F[ys]=%i*\rho/2*(2*%pi*%i)
  *RFD22;
lhs(%)=expand(rectform(rhs(%)));
```

物体、わき出しを含む大きな円：S の積分について考える。

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\,z} F =& e^{-i\,\alpha}\, U + \frac{m}{z-a} - \frac{i\,\Gamma}{2\,\pi\, z} \\ &- \frac{A_1}{z^2} - \frac{2\,A_2}{z^3} - \frac{3\,A_3}{z^4} - \frac{4\,A_4}{z^5} + \ldots \end{aligned} \tag{5.1.62}$$

右辺第 2 項を Taylor 展開して、

$$\frac{m}{z-a} = \frac{m}{z} + \frac{m\,a}{z^2} + \frac{m\,a^2}{z^3} + \frac{m\,a^3}{z^4} + \ldots$$

これを上式に代入し、

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\,z} F =& e^{-i\,\alpha}\, U + \frac{m}{z} - \frac{i\,\Gamma}{2\,\pi\, z} + \frac{a\,m}{z^2} \\ &- \frac{A_1}{z^2} + \frac{a^2\,m}{z^3} - \frac{2\,A_2}{z^3} - \frac{3\,A_3}{z^4} - \frac{4\,A_4}{z^5} + \ldots \end{aligned}$$

$$\left(\frac{d}{d\,z}\,F\right)^2 = e^{-2\,i\,\alpha}\,U^2 + \underline{\frac{2\,e^{-i\,\alpha}\,m\,U}{z} - \frac{i\,e^{-i\,\alpha}\,\Gamma\,U}{\pi\,z}} + \frac{2\,a\,e^{-i\,\alpha}\,m\,U}{z^2} - \frac{2\,A_1\,e^{-i\,\alpha}\,U}{z^2} + \ldots$$

(5.1.61) 式の大きな円 : S の積分項は、留数の定理から、

$$\begin{aligned} F_{xs} - i\,F_{ys} &= \frac{i\,\rho}{2}\oint_S \left(\frac{d}{d\,z}\,F\right)^2 dz \\ &= \frac{i\,\rho}{2}(2\pi i)\left(2\,e^{-i\,\alpha}\,m\,U - i\,e^{-i\,\alpha}\,\Gamma\,U\right) \\ &= -\pi\,\rho\left(2\,e^{-i\,\alpha}\,m\,U - \frac{i\,e^{-i\,\alpha}\,\Gamma\,U}{\pi}\right) \end{aligned} \tag{5.1.63}$$

```
FD3:rhs(FD1)=F1D1+f(z);
FD31:expand(solve(FD3,f(z))[1]);
FD32:lhs(FD1)^2=expand(rhs(FD3)^2);
FZ1:f(z)=taylor(f(z),z,a,3);
FZ2:f(a)=u[m]-%i*v[m];
FD33:subst([FZ1],FD32);
FCM:F[xm]-%i*F[ym]=-%i*\rho/2*(2*%pi*%i)
  *coeff(rhs(FD33),z-a,-1);
FC1:F[x]-%i*F[y]=rhs(FCS)+rhs(FCM);
subst([FZ2],FC1);
```

わき出しを囲む小さな円 : M の積分について考える。(5.1.62) 式のわき出しの項以外を $f(z)$ と置き換えて、

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\,z}\,F &= e^{-i\,\alpha}\,U + \frac{m}{z-a} - \frac{i\,\Gamma}{2\,\pi\,z} \\ &\quad - \frac{A_1}{z^2} - \frac{2\,A_2}{z^3} - \frac{3\,A_3}{z^4} - \frac{4\,A_4}{z^5} + \ldots \\ &= f(z) + \frac{m}{z-a} \end{aligned}$$

$$\left(\frac{d}{d\,z}\,F\right)^2 = f(z)^2 + \frac{2\,m\,f(z)}{z-a} + \frac{m^2}{z^2 - 2\,a\,z + a^2} + \ldots$$

$f(z)$ を $z=a$ で Taylor 展開すると、

$$\begin{aligned} f(z) &= f(a) + \left(\frac{d}{d\,z}\,f(z)\Big|_{z=a}\right)(z-a) \\ &\quad + \frac{\left(\frac{d^2}{d\,z^2}\,f(z)\Big|_{z=a}\right)(z-a)^2}{2} \\ &\quad + \frac{\left(\frac{d^3}{d\,z^3}\,f(z)\Big|_{z=a}\right)(z-a)^3}{6} + \ldots \end{aligned}$$

また、$z=a$ では、わき出しの項以外による流速 : u_m, v_m となり、

$$f(a) = u_m - i\,v_m$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{d\,z}\,F\right)^2 &= \frac{m^2}{(z-a)^2} + \underline{\frac{2\,m\,f(a)}{z-a}} \\ &\quad + \left(f(a)^2 + 2\left(\frac{d}{d\,z}\,f(z)\Big|_{z=a}\right)m\right) \\ &\quad + \left(2\left(\frac{d}{d\,z}\,f(z)\Big|_{z=a}\right)f(a) \right.\\ &\quad \left. + \left(\frac{d^2}{d\,z^2}\,f(z)\Big|_{z=a}\right)m\right)(z-a) \end{aligned}$$

(5.1.61) 式のわき出しを囲む小さな円 : M の積分項は、留数の定理から、

$$\begin{aligned} F_{xm} - i\,F_{ym} &= -\frac{i\,\rho}{2}\oint_M \left(\frac{d}{d\,z}\,F\right)^2 dz \\ &= -\frac{i\,\rho}{2}(2\pi i)\,(2\,m\,f(a)) \\ &= 2\,\pi\,f(a)\,m\,\rho \end{aligned} \tag{5.1.64}$$

(5.1.63) 式と (5.1.64) 式の和から、物体に作用する力は、

$$\begin{aligned} F_x - i\,F_y &= 2\,\pi\,f(a)\,m\,\rho \\ &\quad - \pi\,\rho\left(2\,e^{-i\,\alpha}\,m\,U - \frac{i\,e^{-i\,\alpha}\,\Gamma\,U}{\pi}\right) \\ &= 2\,\pi\,m\,(u_m - i\,v_m)\,\rho \\ &\quad - \pi\,\rho\left(2\,e^{-i\,\alpha}\,m\,U - \frac{i\,e^{-i\,\alpha}\,\Gamma\,U}{\pi}\right) \end{aligned} \tag{5.1.65}$$

```
MD2:expand(FD22*z);
MCS:M[xs]+%i*N[xs]=-\rho/2*(2*%pi*%i)
  *coeff(rhs(MD2),z,-1);
MD3:expand(FD33*z);
MCM:M[xm]+%i*N[xm]=\rho/2*(2*%pi*%i)
  *coeff(rhs(MD3),z-a,-1);
MC:M+%iN=rhs(MCS)+rhs(MCM);
subst([FZ2],MC);
```

物体に作用するモーメントは、(5.1.60) 式で与えられる。物体、わき出しを含む大きな円：S の積分について、

$$\begin{aligned}
z\left(\frac{d}{d\,z}\,F\right)^{2} =& e^{-2\,i\,\alpha}\,z\,U^{2}+\underline{\frac{2\,a\,e^{-i\,\alpha}\,m\,U}{z}-\frac{2\,A_{1}\,e^{-i\,\alpha}\,U}{z}}+\frac{2\,a^{2}\,e^{-i\,\alpha}\,m\,U}{z^{2}}-\frac{4\,A_{2}\,e^{-i\,\alpha}\,U}{z^{2}}\\
&-\frac{6\,A_{3}\,e^{-i\,\alpha}\,U}{z^{3}}-\frac{8\,a_{4}\,e^{-i\,\alpha}\,U}{z^{4}}+2\,e^{-i\,\alpha}\,m\,U-\frac{i\,e^{-i\,\alpha}\,\Gamma\,U}{\pi}+\underline{\frac{m^{2}}{z}-\frac{i\,\Gamma\,m}{\pi\,z}-\frac{\Gamma^{2}}{4\,\pi^{2}\,z}}\\
&+\frac{2\,a\,m^{2}}{z^{2}}-\frac{i\,a\,\Gamma\,m}{\pi\,z^{2}}-\frac{2\,A_{1}\,m}{z^{2}}+\frac{i\,A_{1}\,\Gamma}{\pi\,z^{2}}
\end{aligned}$$

大きな円：S の積分項は、

$$i\,N_{xs}+M_{xs}=-i\,\pi\,\rho\left(2\,a\,e^{-i\,\alpha}\,m\,U-2\,A_{1}\,e^{-i\,\alpha}\,U+m^{2}-\frac{i\,\Gamma\,m}{\pi}-\frac{\Gamma^{2}}{4\,\pi^{2}}\right)$$

わき出しを囲む小さな円：M の積分について、

$$\begin{aligned}
z\left(\frac{d}{d\,z}\,F\right)^{2} =& \frac{m^{2}\,a}{(z-a)^{2}}+\frac{2\,f\left(a\right)\,m\,a+m^{2}}{z-a}+\left(\left(2\,\left(\frac{d}{d\,z}\,f\left(z\right)\Big|_{z=a}\right)\,m+f\left(a\right)^{2}\right)\,a+2\,f\left(a\right)\,m\right)\\
&+\left(\left(\left(\frac{d^{2}}{d\,z^{2}}\,f\left(z\right)\Big|_{z=a}\right)\,m+2\,\left(\frac{d}{d\,z}\,f\left(z\right)\Big|_{z=a}\right)\,f\left(a\right)\right)\,a\right.\\
&\left.+2\,\left(\frac{d}{d\,z}\,f\left(z\right)\Big|_{z=a}\right)m+f\left(a\right)^{2}\right)\,(z-a)
\end{aligned}$$

わき出しを囲む小さな円：M の積分項は、

$$i\,N_{xm}+M_{xm}=i\,\pi\,\left(m^{2}+2\,a\,f\left(a\right)\,m\right)\,\rho$$

積分項の和から、物体に作用するモーメントは、

$$\begin{aligned}
M+\%iN =& i\,\pi\,\left(m^{2}+2\,a\,f\left(a\right)\,m\right)\,\rho-i\,\pi\,\rho\,\left(2\,a\,e^{-i\,\alpha}\,m\,U-2\,A_{1}\,e^{-i\,\alpha}\,U+m^{2}-\frac{i\,\Gamma\,m}{\pi}-\frac{\Gamma^{2}}{4\,\pi^{2}}\right)\\
=& i\,\pi\,\left(2\,a\,m\,\left(u_{m}-i\,v_{m}\right)+m^{2}\right)\,\rho-i\,\pi\,\rho\,\left(2\,a\,e^{-i\,\alpha}\,m\,U-2\,A_{1}\,e^{-i\,\alpha}\,U+m^{2}-\frac{i\,\Gamma\,m}{\pi}-\frac{\Gamma^{2}}{4\,\pi^{2}}\right)
\end{aligned}\tag{5.1.66}$$

5.2 数値解析

5.2.1 2次元差分法 (流れ関数)

ここでは、流線の様子を把握するため、流れ関数：Ψ について解析する。二次元の完全流体を解析する場合、支配方程式は下記のラプラスの方程式である。

$$\frac{d^2}{d\,y^2}\,\Psi+\frac{d^2}{d\,x^2}\,\Psi=0 \tag{5.2.1}$$

x,y 軸で間隔：h のメッシュの交点：i,j 上の流れ関数：$\Psi_{i,j}$ を求める。

```
/*  差分法  */
kill(all);
NABA:'diff(\Psi,x,2)+'diff(\Psi,y,2)=0;
PS0:\Psi=a*x^2+b*x+c;
PSDD0:'diff(\Psi,x,2)=diff(rhs(PS0),x,2);
PSD0:'diff(\Psi,x,1)=diff(rhs(PS0),x,1);
PS1:\Psi[i-1,j]=a*(-h)^2+b*(-h)+c;
PS2:\Psi[i,j]=a*(0)^2+b*(0)+c;
PS3:\Psi[i+1,j]=a*(h)^2+b*(h)+c;
ABC:solve([PS1,PS2,PS3],[a,b,c])[1];
PSDD1:subst([ABC],PSDD0);
PSDD2:'diff(\Psi,y,2)=(\Psi[i,j+1]
  -2*\Psi[i,j]+\Psi[i,j-1])/h^2;
subst([PSDD1,PSDD2],NABA);
PSDD:solve(%,\Psi[i,j])[1];
lhs(PSD0)=subst([x=0],rhs(PSD0));
PSD1:subst([ABC],%);
PSD2:'diff(\Psi,y,1)=-(\Psi[i,j-1]
  -\Psi[i,j+1])/(2*h);
VX:v[x]='diff(\Psi,y,1);
VY:v[y]=-'diff(\Psi,x,1);
VX1:subst([PSD2],VX);
VY1:subst([PSD1],VY);
```

まず、x 軸上で、流れ関数：Ψ を下記の二次方程式で近似する。

$$\Psi=a\,x^2+b\,x+c$$

二回微分、一回微分は、

$$\frac{d^2}{d\,x^2}\,\Psi=2\,a,\quad \frac{d}{d\,x}\,\Psi=2\,a\,x+b$$

x 軸：$-h,0,+h$ 上の流れ関数：$\Psi_{i-1,j},\Psi_{i,j},\Psi_{i+1,j}$ は下記となる。

$$\Psi_{i-1,j}=a\,h^2-b\,h+c$$

$$\Psi_{i,j}=c$$

$$\Psi_{i+1,j}=a\,h^2+b\,h+c$$

上式から常数：a,b,c を求めると、

$$a=\frac{\Psi_{i+1,j}-2\,\Psi_{i,j}+\Psi_{i-1,j}}{2\,h^2},b=-\frac{\Psi_{i-1,j}-\Psi_{i+1,j}}{2\,h},c=\Psi_{i,j}$$

x 軸の二回微分は、

$$\frac{d^2}{d\,x^2}\,\Psi=\frac{\Psi_{i+1,j}-2\,\Psi_{i,j}+\Psi_{i-1,j}}{h^2}$$

y 軸の二回微分は、

$$\frac{d^2}{d\,y^2}\,\Psi=\frac{\Psi_{i,j+1}-2\,\Psi_{i,j}+\Psi_{i,j-1}}{h^2}$$

ラプラスの式から、

$$\frac{\Psi_{i+1,j}-2\,\Psi_{i,j}+\Psi_{i-1,j}}{h^2}+\frac{\Psi_{i,j+1}-2\,\Psi_{i,j}+\Psi_{i,j-1}}{h^2}=0$$

i,j 上の流れ関数：$\Psi_{i,j}$ は、

$$\Psi_{i,j}=\frac{\Psi_{i+1,j}+\Psi_{i,j+1}+\Psi_{i,j-1}+\Psi_{i-1,j}}{4} \tag{5.2.2}$$

流速は、$x=0$ の流れ関数の一回微分から、

$$\frac{d}{d\,x}\,\Psi=b$$

$$\frac{d}{d\,x}\,\Psi=-\frac{\Psi_{i-1,j}-\Psi_{i+1,j}}{2\,h}$$

$$\frac{d}{d\,y}\,\Psi=\frac{\Psi_{i,j+1}-\Psi_{i,j-1}}{2\,h}$$

以上から、

$$v_x=\frac{d}{d\,y}\,\Psi,\quad v_y=-\frac{d}{d\,x}\,\Psi$$

$$v_x=\frac{\Psi_{i,j+1}-\Psi_{i,j-1}}{2\,h},\quad v_y=\frac{\Psi_{i-1,j}-\Psi_{i+1,j}}{2\,h} \tag{5.2.3}$$

(1)Excelを用いた数値解析例

上記の計算では、反復計算により、収束した結果を求める必要がある。Excelでは、容易に反復計算が行えるので、これを使用した半円柱の数値計算例を示す。

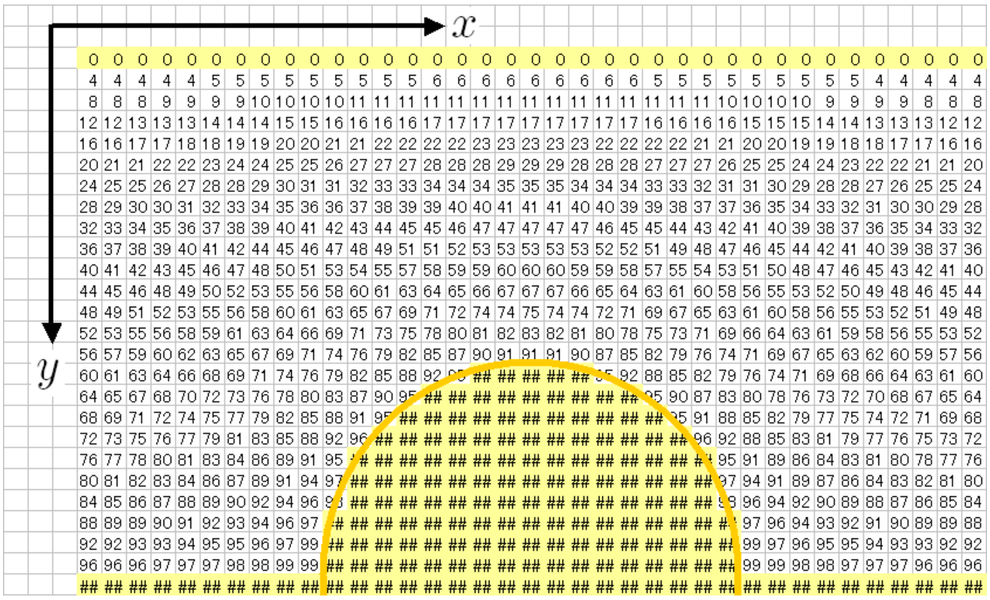
1. Excelの計算領域（D3〜AN28）を決める。また、メッシュの間隔：h を決める。物体の流れの影響が境界に影響が及ばない、十分な計算領域を選択する。ここで示す示す例では流れの様子がわかりやすいように領域に対して大きな円となっている。

2. 物体境界の流れ関数の値を決める。物体境界の流れ関数の値は、境界も流線であるので、上の物体境界 (D3〜AN3) の流れ関数値を零とする。下の物体境界 (D28〜AN28) の流れ関数値を百とする。半円柱 (N28〜AD28 から V18〜W28) についても流れ関数値を百とする。

3. 流体境界の値を決める。(5.2.3) 式から一様な流速を与えるには、流体境界 (D4〜D27 および AN4〜AN27) で物体境界零から百までを等分間隔の数字を入力する。

4. 計算式を入力する。計算領域である E4 に $=(E3+D4+E5+F4)/4$ を入力する。E4 を他の計算領域全てにコピーする。

5. 反復計算の設定をする。設定は、ツール→オプション→計算方法→のページで反復計算の部分にチェックを入れ、最大反復回数、変化の最大値を入力する。



0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5	5	5	5	6	6	6	6	6	6	6	6	6	5	5	5	5	5	5	5	5	5	4	4	4	4	4
8	8	8	9	9	9	9	10	10	10	10	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	10	10	10	10	9	9	9	9	8	8	8
12	12	13	13	13	14	14	14	15	15	16	16	16	16	17	17	17	17	17	17	17	17	17	16	16	16	16	15	15	15	14	14	13	13	13	12	12
16	16	17	17	18	18	19	19	20	20	21	21	22	22	22	22	23	23	23	23	23	22	22	22	22	21	21	20	20	19	19	18	18	17	17	16	16
20	21	21	22	22	23	24	24	25	25	26	27	27	27	28	28	28	29	29	29	28	28	28	27	27	27	26	25	25	24	24	23	22	22	21	21	20
24	25	25	26	27	28	28	29	30	31	31	32	33	33	34	34	34	35	35	35	34	34	34	33	33	32	31	31	30	29	28	28	27	26	25	25	24
28	29	30	30	31	32	33	34	35	36	36	37	38	39	39	40	40	41	41	41	40	40	39	39	38	37	37	36	35	34	33	32	31	30	30	29	28
32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	45	46	47	47	47	47	47	46	45	45	44	43	42	41	40	39	38	37	36	35	34	33	32
36	37	38	39	40	41	42	44	45	46	47	48	49	51	51	52	53	53	53	53	53	52	52	51	49	48	47	46	45	44	42	41	40	39	38	37	36
40	41	42	43	45	46	47	48	50	51	53	54	55	57	58	59	59	60	60	60	59	59	58	57	55	54	53	51	50	48	47	46	45	43	42	41	40
44	45	46	48	49	50	52	53	55	56	58	60	61	63	64	65	66	67	67	67	66	65	64	63	61	60	58	56	55	53	52	50	49	48	46	45	44
48	49	51	52	53	55	56	58	60	61	63	65	67	69	71	72	74	74	75	74	74	72	71	69	67	65	63	61	60	58	56	55	53	52	51	49	48
52	53	55	56	58	59	61	63	64	66	69	71	73	75	78	80	81	82	83	82	81	80	78	75	73	71	69	66	64	63	61	59	58	56	55	53	52
56	57	59	60	62	63	65	67	69	71	74	76	79	82	85	87	90	91	91	91	90	87	85	82	79	76	74	71	69	67	65	63	62	60	59	57	56
60	61	63	64	66	68	69	71	74	76	79	82	85	88	92	[illegible]	##	##	##	##	##	[illegible]	92	88	85	82	79	76	74	71	69	68	66	64	63	61	60
64	65	67	68	70	72	73	76	78	80	83	87	90	95	##	##	##	##	##	##	##	##	##	[illegible]	90	87	83	80	78	76	73	72	70	68	67	65	64
68	69	71	72	74	75	77	79	82	85	88	91	95	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	[illegible]	91	88	85	82	79	77	75	74	72	71	69	68
72	73	75	76	77	79	81	83	85	88	92	96	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	96	92	88	85	83	81	79	77	76	75	73	72
76	77	78	80	81	83	84	86	89	91	95	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	95	91	89	86	84	83	81	80	78	77	76
80	81	82	83	84	86	87	89	91	94	97	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	97	94	91	89	87	86	84	83	82	81	80
84	85	86	87	88	89	90	92	94	96	[illegible]	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	[illegible]	96	94	92	90	89	88	87	86	85	84
88	89	89	90	91	92	93	94	96	97	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	97	96	94	93	92	91	90	89	89	88
92	92	93	93	94	95	95	96	97	99	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	99	97	96	95	95	94	93	93	92	92
96	96	96	97	97	97	98	98	99	99	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	99	99	98	98	97	97	97	96	96	96
##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##	##

図 5.2.1: 流れ関数

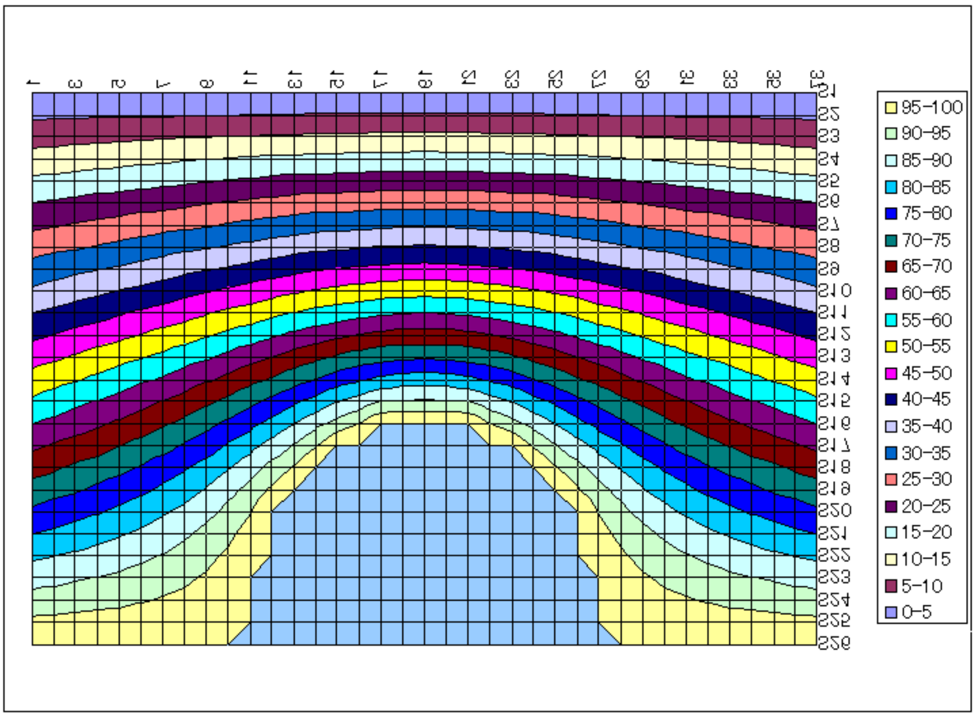


図 5.2.2: 流線

5.3 二次元完全流体の簡単な例

例題 5.3.1 特異点に作用する力 (Blasius の定理の例)

流れの複素ポテンシャル：F_0 の中で、座標原点に置いた、わき出し、渦系、二重わき出しに作用する力を求める。

```
/* 特異点に作用する力 */
kill(all);
declare(z,complex);
declare(F,complex);
F0:U*%e^(-%i*\alpha)*z;
F1:m*log(z);
F2:%i*\Gamma/2/%pi*log(z);
F3:-%e^(%i*\beta)*\mu/z;
F4:A[2]*z^2+A[3]*z^3+A[4]*z^4;
F5:F=F0+F1+F2+F3+F4;
```

特異点を除いた流れの複素ポテンシャル：F_0 を下記とする

$$F_0 = e^{-i\,\alpha}\,z\,U + A_4\,z^4 + A_3\,z^3 + A_2\,z^2$$

```
/* 特異点に作用する力 (f(z) での表現) */
kill(all);
declare(z,complex);
declare(F,complex);
F00:f(z);
F01:taylor(F00,z,0,5);
F02:rest(F01,-1);
F0:coeff(F02,z,1)*z;
F1:m*log(z);
F2:-%i*\Gamma/2/%pi*log(z);
F3:-%e^(%i*\beta)*\mu/z;
F4:F02-F0;
F5:F=F0+F1+F2+F3+F4;
```

また、特異点を除いた流れの複素ポテンシャルを $F_0 = f(z)$ の形で表現し、$z=0$ に特異点があるとき、この点で Taylor 展開すると、

$$\begin{aligned}F_0 =& f(0) + \left(\frac{d}{d\,z}\,f(z)\Big|_{z=0}\right)\,z + \frac{\left(\frac{d^2}{d\,z^2}\,f(z)\Big|_{z=0}\right)\,z^2}{2}\\&+\frac{\left(\frac{d^3}{d\,z^3}\,f(z)\Big|_{z=0}\right)\,z^3}{6}+\frac{\left(\frac{d^4}{d\,z^4}\,f(z)\Big|_{z=0}\right)\,z^4}{24}\\&+\frac{\left(\frac{d^5}{d\,z^5}\,f(z)\Big|_{z=0}\right)\,z^5}{120}+\ldots\end{aligned}$$

とも表現できる。上記のプログラム部分を入れ替えるだけでこの表現での結果が得られる。以下の結果では、結論のみの標記とした。

(1) わき出しに作用する力

```
/* わき出しに作用する力 */
F=F0+F1+F4;
FD1:'diff(F,z,1)=diff((rhs(%)),z,1);
F[x]-%i*F[y]=%i*\rho/2*integrate(
  ('diff(F,z,1))^2,z);
FD21:lhs(FD1)^2=expand(rhs(FD1)^2);
FCS:F[xs]-%i*F[ys]=%i*\rho/2*(2*%pi*%i)
  *coeff(rhs(FD21),z,-1);
FXS1:F[x]=expand(realpart(rhs(FCS)));
FYS1:F[y]=expand(-imagpart(rhs(FCS)));
MD1:FD21*z;
MD2:expand(rhs(MD1));
MCS:M[xs]+%i*N[xs]=-\rho/2*(2*%pi*%i)
  *coeff(MD2,z,-1);
MXS:M[xs]=expand(realpart(rhs(MCS)));
```

流れの複素ポテンシャル：F_0 に、強さ：m のわき出しを加えた複素ポテンシャルは下記となる。

$$F = e^{-i\,\alpha}\,z\,U + m\log(z) + A_4\,z^4 + A_3\,z^3 + A_2\,z^2$$

$$\frac{d}{d\,z}\,F = e^{-i\,\alpha}\,U + 4\,A_4\,z^3 + 3\,A_3\,z^2 + 2\,A_2\,z + \frac{m}{z}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{d}{d\,z}\,F\right)^2 =& e^{-2\,i\,\alpha}\,U^2 + 8\,A_4\,e^{-i\,\alpha}\,z^3\,U\\&+6\,A_3\,e^{-i\,\alpha}\,z^2\,U\\&+4\,A_2\,e^{-i\,\alpha}\,z\,U+\frac{2\,e^{-i\,\alpha}\,m\,U}{z}+16\,A_4^2\,z^6\\&+24\,A_3\,A_4\,z^5+16\,A_2\,A_4\,z^4+9\,A_3^2\,z^4\\&+12\,A_2\,A_3\,z^3+8\,A_4\,m\,z^2+4\,A_2^2\,z^2\\&+6\,A_3\,m\,z+\frac{m^2}{z^2}+4\,A_2\,m\end{aligned}$$

Blasius の定理：(5.1.59) 式と留数定理から、

$$\begin{aligned}F_x - i\,F_y =& \frac{i\,\rho}{2}\oint\left(\frac{d}{d\,z}\,F\right)^2 dz\\=& -2\,\pi\,e^{-i\,\alpha}\,m\,\rho\,U\\=& -2\,\pi\,m\,\rho\left(\frac{d}{d\,z}\,f(z)\Big|_{z=0}\right)\end{aligned}\tag{5.3.1}$$

わき出しに作用する力は、

$$F_x = -2\,\pi\cos(\alpha)\;m\,\rho\,U,\quad F_y = -2\,\pi\sin(\alpha)\;m\,\rho\,U$$

原点まわりのモーメントについて、Blasiusの定理:(5.1.60) 式と留数定理から、

$$M = \Re_e\left(-\frac{\rho}{2}\oint z\left(\frac{d}{d\,z}\,F\right)^2 dz\right)$$

$$i\,N+M=-i\,\pi\,m^2\,\rho$$

わき出しに作用する原点まわりのモーメントは、

$$M=0 \tag{5.3.2}$$

(2) 渦糸に作用する力

```
/* 渦糸に作用する力 */
F=F0+F2+F4;
FD1:'diff(F,z,1)=diff((rhs(%)),z,1);
F[x]-%i*F[y]=%i*\rho/2*integrate(
  ('diff(F,z,1))^2,z);
FD21:lhs(FD1)^2=expand(rhs(FD1)^2);
FCS:F[xs]-%i*F[ys]=%i*\rho/2*(2*%pi*%i)
  *coeff(rhs(FD21),z,-1);
FXS1:F[xs]=expand(realpart(rhs(FCS)));
FYS1:F[ys]=expand(-imagpart(rhs(FCS)));
MD1:FD21*z;
MD2:expand(rhs(MD1));
MCS:M[xs]+%i*N[xs]=-\rho/2*(2*%pi*%i)
  *coeff(MD2,z,-1);
MXS:M[xs]=expand(realpart(rhs(MCS)));
```

流れの複素ポテンシャル：F_0 に、渦循環：Γ の渦糸を加えた複素ポテンシャルは下記となる。

$$F=e^{-i\,\alpha}\,z\,U-\frac{i\,\Gamma\log(z)}{2\,\pi}+A_4\,z^4+A_3\,z^3+A_2\,z^2$$

上記と同様の方法（プログラムも 1 行目のみ異なり、他は上記と同じ）で求めると、渦糸に作用する力は、

$$\begin{aligned}F_x-i\,F_y=&i\,e^{-i\,\alpha}\,\Gamma\,\rho\,U\\ =&i\,\Gamma\,\rho\left(\frac{d}{d\,z}\,f(z)\Big|_{z=0}\right)\end{aligned} \tag{5.3.3}$$

$$F_x=\sin(\alpha)\,\Gamma\,\rho\,U,\quad F_y=-\cos(\alpha)\,\Gamma\,\rho\,U$$

原点まわりのモーメントについて、

$$i\,N+M=\frac{i\,\Gamma^2\,\rho}{4\,\pi}$$

$$M=0 \tag{5.3.4}$$

(3) 二重わき出しに作用する力

```
/* 二重わき出しに作用する力 */
F=F0+F3+F4;
FD1:'diff(F,z,1)=diff((rhs(%)),z,1);
F[x]-%i*F[y]=%i*\rho/2*integrate(
  ('diff(F,z,1))^2,z);
FD21:lhs(FD1)^2=expand(rhs(FD1)^2);
FCS:F[xs]-%i*F[ys]=%i*\rho/2*(2*%pi*%i)
  *coeff(rhs(FD21),z,-1);
FXS1:F[xs]=expand(realpart(rhs(FCS)));
FYS1:F[ys]=expand(-imagpart(rhs(FCS)));
MD1:FD21*z;
MD2:expand(rhs(MD1));
MCS:M[xs]+%i*N[xs]=-\rho/2*(2*%pi*%i)
  *coeff(MD2,z,-1);
MXS:M[xs]=expand(realpart(rhs(MCS)));
```

流れの複素ポテンシャル：F_0 に、強さ：μ の二重わき出しを加えた複素ポテンシャルは下記となる。

$$F=e^{-i\,\alpha}\,z\,U+A_4\,z^4+A_3\,z^3+A_2\,z^2-\frac{e^{i\beta}\,\mu}{z}$$

上記と同様の方法（プログラムも 1 行目のみ異なり、他は上記と同じ）で求めると、二重わき出しに作用する力は、下記に示すように A_2 に比例している。これは速度勾配に関連したものである。

$$\begin{aligned}F_x-i\,F_y&=-\,4\,\pi\,A_2\,e^{i\beta}\,\mu\,\rho\\ &=-\,2\,\pi\,e^{i\,\beta}\,\mu\,\rho\left(\frac{d^2}{d\,z^2}\,f(z)\Big|_{z=0}\right)\end{aligned} \tag{5.3.5}$$

$$F_x=-4\,\pi\,A_2\cos(\beta)\,\mu\,\rho,\quad F_y=4\,\pi\,A_2\sin(\beta)\,\mu\,\rho$$

原点まわりのモーメントについて、

$$\begin{aligned}i\,N+M&=-\,2\,i\,\pi\,e^{i\beta-i\,\alpha}\,\mu\,\rho\,U\\ &=-\,2\,i\,\pi\,e^{i\,\beta}\,\mu\,\rho\left(\frac{d}{d\,z}\,f(z)\Big|_{z=0}\right)\end{aligned} \tag{5.3.6}$$

$$M=2\,\pi\sin(\beta-\alpha)\,\mu\,\rho\,U$$

例題 5.3.2　一様流中のわき出し

流速：U の一様な流れの中で、原点に強さ：m のわき出しを置いたときの流れを求める。

```
/*  一様流中のわきだし  */
kill(all);
declare(z,complex);
declare(F,complex);
assume(r>0);
F1:F=U*z+m*log(z);
FD1:'diff(F,z,1)=diff(rhs(F1),z,1);
FD2:rhs(FD1)=0;
Z1:solve(FD2,z)[1];
Z11:subst([z=x[0]+%i*y[0]],Z1);
Z12:realpart(Z11);
Z13:imagpart(Z11);
F2:subst([z=x+%i*y],F1);
PS1:\Psi=imagpart(rhs(F2));
F3:subst([z=r*%e^(%i*\theta)],F1);
PS2:\Psi=imagpart(rhs(F3));
PS20:subst([\theta=%pi,r=m/U],PS2);
BD1:solve(rhs(PS2)=rhs(PS20),r)[1];
```

一様な流れの複素ポテンシャルは (5.1.29) 式から、わき出しの複素ポテンシャルは (5.1.31) 式から一様な流れに中のわき出し流れの複素ポテンシャルとして下記を得る。

$$F = z\,U + m\log(z) \tag{5.3.7}$$

先端のよどみ点では、流速が零であるから、

$$\frac{d}{d\,z}F = U + \frac{m}{z} = 0$$

よどみ点の位置：x_0, y_0 は、

$$z = -\frac{m}{U}$$

$$i\,y_0 + x_0 = -\frac{m}{U}$$

$$x_0 = -\frac{m}{U}, \quad y_0 = 0$$

流れ関数：Ψ を x, y 座標で表記すると、

$$F = \Phi + i\,\Psi = (i\,y + x)\,U + m\log(i\,y + x)$$

$$\Psi = y\,U + m\,\mathrm{atan2}(y, x) \tag{5.3.8}$$

流れ関数：Ψ を極座標で表記すると、

$$F = r\,e^{i\,\theta}\,U + m\log\left(r\,e^{i\,\theta}\right)$$

$$\Psi = r\sin(\theta)\,U + m\,\theta$$

よどみ点の下記の位置を上式に代入すると、

$$\theta = \pi, r = \frac{m}{U}$$

下記となり、物体境界の流れ関数値が得られる。

$$\Psi = \pi\,m$$

上記結果を用いて、物体境界の式は、

$$r = -\frac{m\,\theta - \pi\,m}{\sin(\theta)\,U} \tag{5.3.9}$$

上記の結果から、$U=1, m=1$ として、gnuplot を用いて流線を求めた結果を下記に示す。

```
#!/gnuplot
set xrange [-5:10]
set yrange [-5:5]
set isosamples 150,150
set contour base
set cntrparam levels incremental -10.46864,
  0.2093728,10
unset key
unset surface
set view map
splot atan2(y,x)+y
#    EOF
```

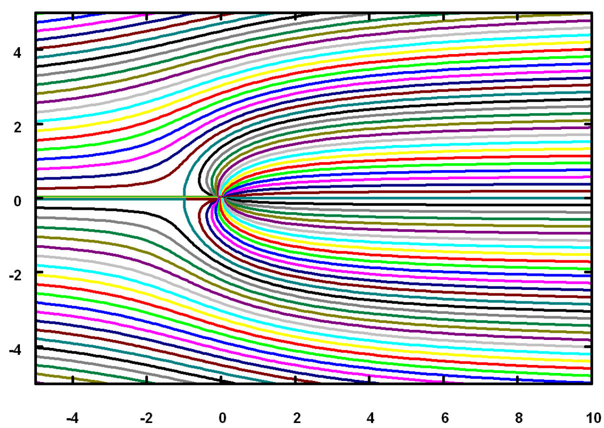


図 5.3.1: 一様流中のわきだしの流れ

```
lhs(FD1)=subst([z=r*%e^(%i*\theta)],
 rhs(FD1));
FD3:lhs(FD1)=subst([%e^(%i*\theta)
  =cos(\theta)+%i*sin(\theta)],rhs(%));
VX1:v[x]=trigsimp(realpart(rhs(FD3)));
VY1:v[y]=-trigsimp(imagpart(rhs(FD3)));
V2:v^2=trigsimp(rhs(VX1)^2+rhs(VY1)^2);
P0:p[0]+\rho/2*U^2=p[1]+\rho/2*v^2;
P1:solve(P0,p[1])[1];
P01:(p[1]-p[0])/(1/2*\rho*U^2);
P01=expand(subst(P1,P01));
P02:subst([V2],%);
P021:trigsimp(subst([BD1],P02));
P022:subst([\theta=-%pi],P02);
```

物体周りの流速から、物体周りの圧力分布を求める。流速は (5.3.7) 式を z で微分して得られる。極座標表記して、

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\,z}\,F =& v_x - i\,v_y = U + \frac{m\,e^{-i\,\theta}}{r}\\ =& U + \frac{m}{r\,\left(i\sin\left(\theta\right)+\cos\left(\theta\right)\right)}\end{aligned}$$

以上から流速は、

$$v_x = \frac{r\,U + m\cos\left(\theta\right)}{r}$$

$$v_y = \frac{m\sin\left(\theta\right)}{r}$$

$$v^2 = \frac{r^2\,U^2 + 2\,m\,r\cos\left(\theta\right)\,U + m^2}{r^2}$$

遠方の圧力:p_0、ある点の圧力:p_1 と流速の関係は Bernoulli の定理から、

$$\frac{2\,\left(p_1 - p_0\right)}{\rho\,U^2} = 1 - \frac{v^2}{U^2}$$

流速の関係式を代入し、

$$\frac{2\,\left(p_1 - p_0\right)}{\rho\,U^2} = 1 - \frac{r^2\,U^2 + 2\,m\,r\cos\left(\theta\right)\,U + m^2}{r^2\,U^2}$$

物体境界の (5.3.9) 式を代入し、物体表面の圧力分布は、

$$\frac{2\,p_1 - 2\,p_0}{\rho\,U^2} = -\frac{\sin\left(\theta\right)^2 + \left(2\,\pi - 2\,\theta\right)\,\cos\left(\theta\right)\,\sin\left(\theta\right)}{\theta^2 - 2\,\pi\,\theta + \pi^2}$$

x 軸上の物体前方の圧力分布は、$\theta = \pi$ を代入し、

$$\frac{2\,\left(p_1 - p_0\right)}{\rho\,U^2} = 1 - \frac{r^2\,U^2 - 2\,m\,r\,U + m^2}{r^2\,U^2}$$

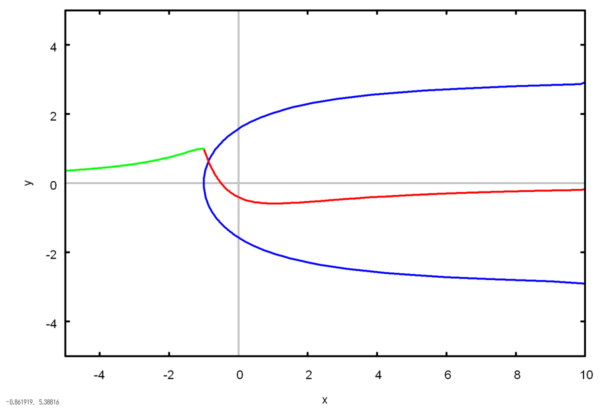


図 5.3.2: 一様流中のわき出しの物体表面圧力分布

```
BDX:rhs(BD1)*cos(\theta);
BDY:rhs(BD1)*sin(\theta);
BDX1:subst([U=1,m=1,\theta=t],BDX);
BDY1:subst([U=1,m=1,\theta=t],BDY);
P031:subst([\theta=t],rhs(P021));
P032:subst([U=1,m=1],rhs(P022));
PS11:subst([U=1,m=1],rhs(PS1));
plot2d([[parametric,BDX1,BDY1,[t,0.1,6.1],
[nticks,100]],
[parametric,BDX1,P031,[t,0.1,3.1],
[nticks,100]],
[parametric,-r,P032,[r,1,5],[nticks,100]]],
[x,-5,10],[y,-5,5]);
```

例題 5.3.3　一様流中のわき出しと吸い込み

流速：U の一様な流れの中で、x 軸上の $x=-a$ に強さ：m のわき出しを、$x=a$ に強さ：$-m$ の吸い込みを、置いたときの流れを求める。

```
/*  一様流中のわき出しと吸い込み  */
kill(all);
declare(z,complex);
declare(F,complex);
assume(r>0);
assume(U>0);
assume(m>0);
assume(a>0);
assume(b>0);
assume(b>a);
F1:F=U*z+m*log(z+a)-m*log(z-a);
FD1:'diff(F,z,1)=diff(rhs(F1),z,1);
FD2:rhs(FD1)=0;
Z1:solve(FD2,z)[1];
Z11:subst([z=x[0]+%i*y[0]],Z1);
Z12:realpart(Z11);
B1:b^2=rhs(Z12)^2;
Z13:imagpart(Z11);
F2:subst([z=x+%i*y],F1);
PS1:\Psi=imagpart(rhs(F2));
PS10:subst([x=b,y=0],PS1);
PS11:subst([U=1,m=1,a=1],PS1);
```

一様な流れの複素ポテンシャルは (5.1.29) 式から、わき出しの複素ポテンシャルは (5.1.31) 式から一様な流れに中のわき出しと吸い込みの流れの複素ポテンシャルとして下記を得る。

$$F = z\,U + m\log(z+a) - m\log(z-a)$$

先端のよどみ点では、流速が零であるから、

$$\frac{d}{d\,z}F = U + \frac{m}{z+a} - \frac{m}{z-a} = 0$$

よどみ点の位置：x_0, y_0 は、

$$z = -\frac{\sqrt{a}\,\sqrt{a\,U+2\,m}}{\sqrt{U}}$$

$$i\,y_0 + x_0 = -\frac{\sqrt{a}\,\sqrt{a\,U+2\,m}}{\sqrt{U}}$$

$$x_0 = -\frac{\sqrt{a}\,\sqrt{a\,U+2\,m}}{\sqrt{U}}, \quad y_0 = 0$$

$$b^2 = \frac{a\,(a\,U+2\,m)}{U}$$

流れ関数：Ψ を x, y 座標で表記すると、

$$\begin{aligned} F =& \Phi + i\,\Psi = (i\,y+x)\,U + m\log(i\,y+x+a) \\ &- m\log(i\,y+x-a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi =& y\,U + m\,\mathrm{atan2}\,(y, x+a) \\ &- m\,\mathrm{atan2}\,(y, x-a) \end{aligned}$$

よどみ点の上記の位置を代入すると、物体表面の流れ関数の値が得られ、

$$\Psi = 0$$

上記の結果から、$U=1, m=1, a=1$ として、gnuplot を用いて流線を求めた結果を下記に示す。

```
#!/gnuplot
set xrange [-4:4]
set yrange [-3:3]
set isosamples 150,150
set contour base
set cntrparam levels incremental -10,0.2,10
unset key
unset surface
set view map
splot atan2(y,x+1)-atan2(y,x-1)+y
#    EOF
```

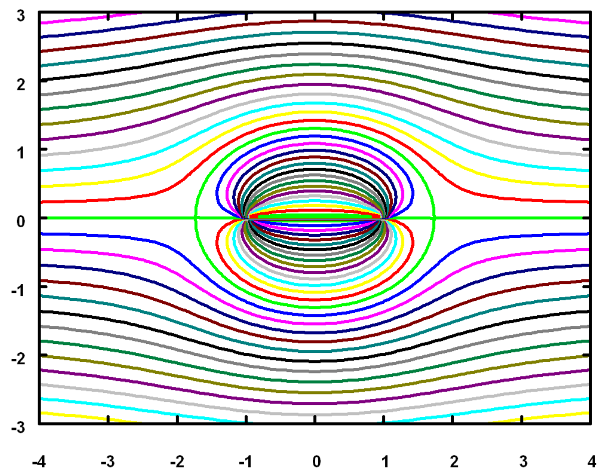


図 5.3.3: 一様流中のわき出しと吸い込みまわりの流れ

例題 5.3.4　一様流中の円柱まわりの流れ

x 軸と α の角度を持ち、流速 : U の一様な流れに中に、半径 : A の円柱を置いたときの流れを求める。また、円の中心に渦循環 : $-\Gamma$ を置いた場合の円柱まわりの流れ、円柱に作用する力を求める。

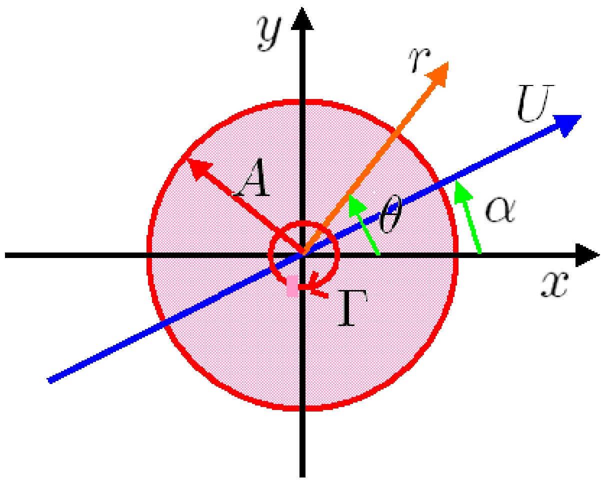


図 5.3.4: 一様流中の円柱まわりの流れ

```
/* 円柱まわりの流れと作用力 (xmaxima) */
kill(all);
load("plotdf")
declare(z,complex);
declare(F,complex);
assume(r>0);
F0:U*%e^(-%i*\alpha)*z;
subst([z=A^2/conjugate(z)],F0);
F1:conjugate(%);
F2:%i*\Gamma/2/%pi*log(z);
F3:F=F0+F1+F2;
F4:subst([z=r*%e^(%i*\theta)],F3);
PH1:\Phi=realpart(rhs(F4));
PS1:\Psi=imagpart(rhs(F4));
F5:F4:subst([z=x+%i*y],F3);
PH2:\Phi=realpart(rhs(F5));
PS2:\Psi=imagpart(rhs(F5));
```

一様流の複素関数 : F_0 は下記となる。

$$F_0 = e^{-i\,\alpha}\,z\,U$$

この流れの中に円柱を置いたときの複素関数 : F_1 は、円定理の (5.1.51) 式から、

$$F_1 = \overline{f}\left(\frac{R^2}{z}\right) = \overline{f\left(\frac{R^2}{\overline{z}}\right)}$$

一様流の複素関数 : F_0 で

$$z \to \frac{A^2}{\mathrm{conjugate}\,(z)}$$

に置き換えて、

$$F_1 = \overline{\left(\frac{e^{-i\,\alpha}\,A^2\,U}{\mathrm{conjugate}\,(z)}\right)} = \frac{e^{i\,\alpha}\,A^2\,U}{z}$$

渦循環の複素関数 : F_2 は (5.1.33) 式から

$$F_2 = \frac{i\,\Gamma\log(z)}{2\,\pi}$$

以上から、全体の流れの複素関数 : F は、

$$\begin{aligned} F &= F_0 + F_1 + F_2 = \frac{e^{i\,\alpha}\,A^2\,U}{z} + e^{-i\,\alpha}\,z\,U + \frac{i\,\Gamma\log(z)}{2\,\pi} \\ &= \Phi + i\Psi \end{aligned} \tag{5.3.10}$$

極座標表記 : $z = r\,e^{i\theta}$ を上式に代入し、実部および虚部を取り、速度ポテンシャル : Φ、流れ関数 : Ψ は、

$$\Phi = \frac{\cos(\theta-\alpha)\ A^2\,U}{r} + r\cos(\theta-\alpha)\ U - \frac{\Gamma\,\theta}{2\,\pi} \tag{5.3.11}$$

$$\Psi = -\frac{\sin(\theta-\alpha)\ A^2\,U}{r} + r\sin(\theta-\alpha)\ U + \frac{\Gamma\log(r)}{2\,\pi} \tag{5.3.12}$$

xy 座標表記 : $z = i\,y + x$ を (5.3.10) 式に代入し、実部および虚部を取り、速度ポテンシャル : Φ、流れ関数 : Ψ は、

$$\begin{aligned} \Phi =& \frac{(\sin(\alpha)\ y + \cos(\alpha)\ x)\ A^2\,U}{y^2+x^2} \\ &+ (\sin(\alpha)\ y + \cos(\alpha)\ x)\ U - \frac{\Gamma\,\mathrm{atan2}\,(y,x)}{2\,\pi} \end{aligned} \tag{5.3.13}$$

$$\begin{aligned} \Psi =& \frac{(\sin(\alpha)\ x - \cos(\alpha)\ y)\ A^2\,U}{y^2+x^2} \\ &+ (\cos(\alpha)\ y - \sin(\alpha)\ x)\ U + \frac{\Gamma\log\left(y^2+x^2\right)}{4\,\pi} \end{aligned} \tag{5.3.14}$$

```
VT1:v[\theta]='diff(\Phi,\theta,1)/r;
subst([PH1],VT1);
ev(%,diff);
VT2:expand(subst([r=A],%));
P0:p[0]+\rho/2*U^2=p+\rho/2*v[\theta]^2;
solve(P0,p)[1];
P1:subst([VT2],%);
FX1:F[x]=-'integrate(rhs(P1)*cos(\theta)*A,
  \theta,0,2*%pi);
FY1:F[y]=-'integrate(rhs(P1)*sin(\theta)*A,
  \theta,0,2*%pi);
factor(ev(FX1,integrate));
factor(ev(FY1,integrate));
P2:(lhs(P1)-p[0])/(1/2*\rho*U^2)=(rhs(P1)
  -p[0])/(1/2*\rho*U^2);
P3:lhs(P2)=expand(rhs(P2));
P4:subst([\Gamma=0],P3);
```

円柱に作用する力を求める。$r=A$ における円柱表面の流速 v_θ は、

$$\begin{aligned} v_\theta =& \frac{\frac{d}{d\,\theta}\,\Phi}{r} \\ =& \frac{-\frac{\sin(\theta-\alpha)\,A^2\,U}{r}-r\sin\left(\theta-\alpha\right)\,U-\frac{\Gamma}{2\,\pi}}{r} \\ =& -2\sin\left(\theta-\alpha\right)\,U-\frac{\Gamma}{2\,\pi\,A} \end{aligned} \tag{5.3.15}$$

下記に Bernoulli の定理から、

$$\frac{\rho\,U^2}{2}+p_0=\frac{\rho\,v_\theta^2}{2}+p$$

円柱表面の圧力：p は

$$\begin{aligned} p =& \frac{\rho\,U^2-\rho\,v_\theta^2+2\,p_0}{2} \\ =& \frac{-\rho\left(-2\sin\left(\theta-\alpha\right)\,U-\frac{\Gamma}{2\,\pi\,A}\right)^2+\rho\,U^2+2\,p_0}{2} \end{aligned}$$

円柱に作用する力は、圧力：p を円周方向に積分して、

$$F_x=-\int_0^{2\,\pi}\mathrm{p}\cos\left(\theta\right)\,Ad\theta,\quad F_y=-\int_0^{2\,\pi}\mathrm{p}\sin\left(\theta\right)\,Ad\theta$$

上式に圧力：p を代入し、まとめ、円柱に作用するとからは下記となる。

$$F_x=-\sin\left(\alpha\right)\,\Gamma\,\rho\,U,\quad F_y=\cos\left(\alpha\right)\,\Gamma\,\rho\,U$$

円柱の圧力分布は、

$$\begin{aligned} \frac{2\,\left(p-p_0\right)}{\rho\,U^2} =& -\frac{2\,\Gamma\sin\left(\theta-\alpha\right)}{\pi\,A\,U}-\frac{\Gamma^2}{4\,\pi^2\,A^2\,U^2} \\ & -4\sin\left(\theta-\alpha\right)^2+1 \end{aligned}$$

渦循環がない場合の円柱の圧力分布は、

$$\frac{2\,\left(p-p_0\right)}{\rho\,U^2}=1-4\sin\left(\theta-\alpha\right)^2$$

```
FD1:diff(rhs(F3),z,1);
FD2:subst([z=x+%i*y],FD1);
VX1:realpart(FD2);
VY1:-imagpart(FD2);
VX2:subst([\alpha=0,A=1,U=1,\Gamma=14,
  \theta=t],VX1);
VY2:subst([\alpha=0,A=1,U=1,\Gamma=14,
  \theta=t],VY1);
plotdf([VX2,VY2],[x,-4,4],[y,-4,4])
PS31:subst([\alpha=0,A=1,U=1,\Gamma=0],
 PS2);
PS32:subst([\alpha=0,A=1,U=1,\Gamma=7],
 PS2);
PS33:subst([\alpha=0,A=1,U=1,\Gamma=14],
 PS2);
```

流速は複素関数を微分して、下記のように得られる。この結果から Maxima の流向を表示できる plotdf では、xy 座標表記が要求されるので、表現式も xy 座標表記とした。

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\,z}\,F =& -\frac{e^{i\,\alpha}\,A^2\,U}{z^2}+e^{-i\,\alpha}\,U+\frac{i\,\Gamma}{2\,\pi\,z} \\ =& -\frac{e^{i\,\alpha}\,A^2\,U}{\left(i\,y+x\right)^2}+e^{-i\,\alpha}\,U+\frac{i\,\Gamma}{2\,\pi\,\left(i\,y+x\right)} \\ =& v_x-i\,v_y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_x =& -\frac{\left(\cos\left(\alpha\right)\,\left(x^2-y^2\right)+2\sin\left(\alpha\right)\,x\,y\right)\,A^2\,U}{\left(y^2+x^2\right)^2} \\ & +\cos\left(\alpha\right)\,U+\frac{\Gamma\,y}{2\,\pi\,\left(y^2+x^2\right)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_y =& \frac{\left(\sin\left(\alpha\right)\,\left(x^2-y^2\right)-2\cos\left(\alpha\right)\,x\,y\right)\,A^2\,U}{\left(y^2+x^2\right)^2} \\ & +\sin\left(\alpha\right)\,U-\frac{\Gamma\,x}{2\,\pi\,\left(y^2+x^2\right)} \end{aligned}$$

流線については、各点における流れ関数の値を求め、同じ値のところを結ぶ：等高線図を求めると流線となる。しかし、Maxima の作図機能ではうまく描けなかったので、gnuplot を使用して描いた。下記は gnuplot で使用する流れ関数を求めた。

$$\Psi=y-\frac{y}{y^2+x^2}\qquad(\Gamma=0)$$

$$\Psi=\frac{7\log\left(y^2+x^2\right)}{4\,\pi}-\frac{y}{y^2+x^2}+y\qquad(\Gamma=7)$$

$$\Psi=\frac{7\log\left(y^2+x^2\right)}{2\,\pi}-\frac{y}{y^2+x^2}+y\qquad(\Gamma=14)$$

gnuplot を起動させ、下記を入力すると流れ関数の等高線図：流線が得られる。

```
#!/gnuplot
set xrange [-3:3]
set yrange [-3:3]
set isosamples 150,150
set contour base
set cntrparam levels incremental -3,0.2,4
unset key
unset surface
set view map
splot (7*log(y**2+x**2))/(2*pi)
  -y/(y**2+x**2)+y
#    EOF
```

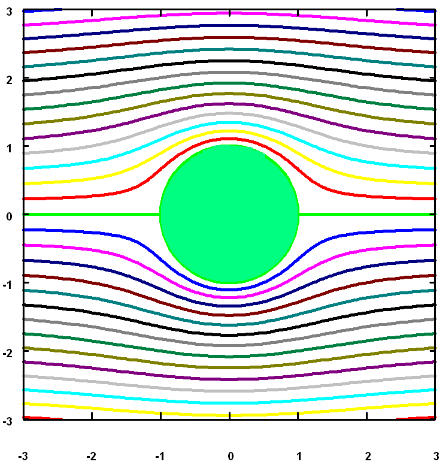


図 5.3.5: 一様流中の円柱まわりの流れ関数 : $\alpha = 0, A = 1, U = 1, \Gamma = 0$

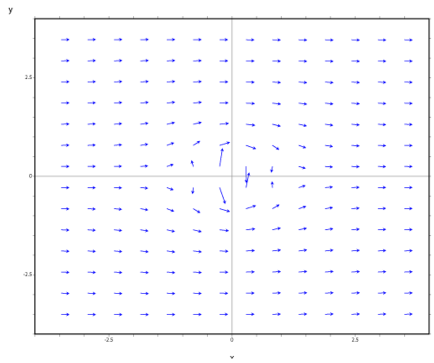


図 5.3.6: 一様流中の円柱まわりの流向 : $\alpha = 0, A = 1, U = 1, \Gamma = 0$

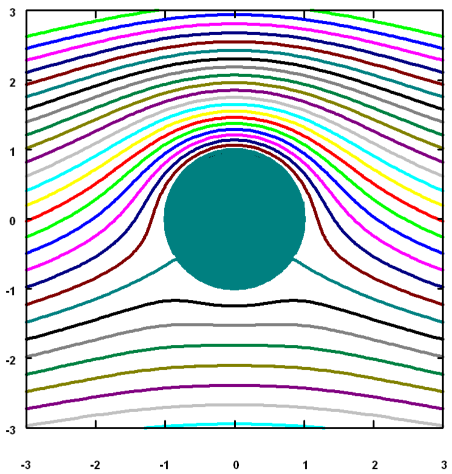


図 5.3.7: 一様流中の円柱まわりの流れ関数 : $\alpha = 0, A = 1, U = 1, \Gamma = 7$

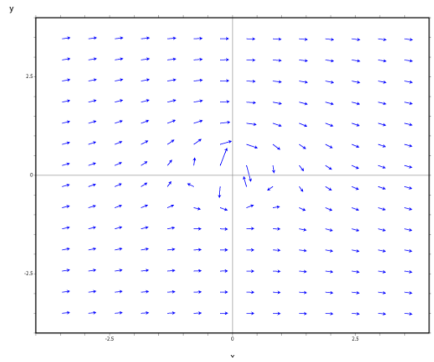


図 5.3.8: 一様流中の円柱まわりの流向 : $\alpha = 0, A = 1, U = 1, \Gamma = 7$

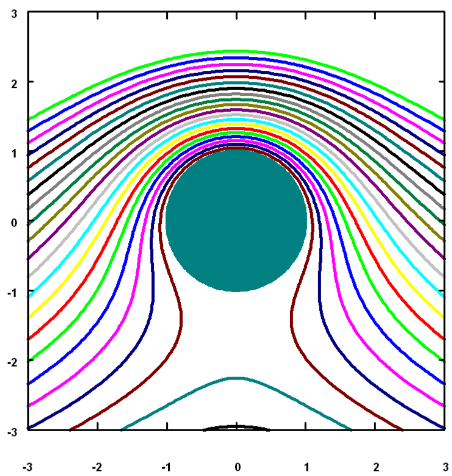


図 5.3.9: 一様流中の円柱まわりの流れ関数 : $\alpha = 0, A = 1, U = 1, \Gamma = 14$

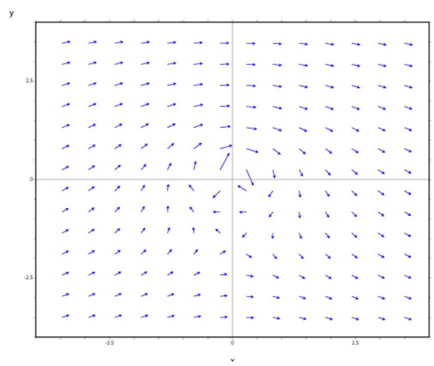


図 5.3.10: 一様流中の円柱まわりの流向 : $\alpha = 0, A = 1, U = 1, \Gamma = 14$

例題 5.3.5　一様流中の楕円柱まわりの流れ・作用力・運動エネルギー (Joukowski 変換)

x 軸と α の角度を持ち、流速：U の一様な流れに中に、半軸：a, b の楕円柱を置いたときの流れを z 平面の楕円外部領域を ζ 平面の半径：R の円外部領域に写像変換：Joukowski 変換することにより求める。

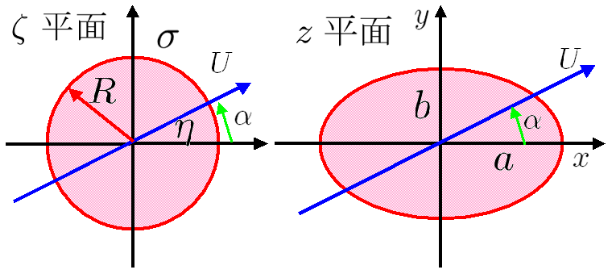


図 5.3.11: 一様流中の楕円柱まわりの流れ (Joukowski 変換)

```
/* 楕円柱まわりの流れ（Joukowski 変換） */
kill(all);
declare(z,complex);
declare(F,complex);
declare(\zeta,complex);
assume(a>0);
assume(b>0);
assume(\sigma>0);
assume(z^2>A^2);
Z0:z=x+%i*y;
Z1:z=\zeta+A^2/\zeta;
ZT1:\zeta=\sigma*%e^(%i*\eta);
ZT2:\zeta=R*%e^(%i*\eta);
F0:U*%e^(-%i*\alpha)*\zeta;
subst([\zeta=R^2/conjugate(\zeta)],F0);
F1:conjugate(%);
F3:F=F0+F1;
F4:subst([ZT1],F3);
```

写像関数を下記とする。

$$z = \zeta + \frac{A^2}{\zeta} \tag{5.3.16}$$

(5.3.10) 式から ζ 平面で流速：U の一様な流れに中に半径：R の円柱を置いたときの複素ポテンシャルは下記となる。

$$F = e^{-i\alpha} U \zeta + \frac{e^{i\alpha} R^2 U}{\zeta} \tag{5.3.17}$$

```
Z2:subst([ZT2,Z0],Z1);
X1:realpart(Z2);
Y1:imagpart(Z2);
CO1:solve(X1,cos(\eta))[1];
SI1:solve(Y1,sin(\eta))[1];
COSI1:cos(\eta)^2+sin(\eta)^2=1;
COSI2:subst([CO1,SI1],COSI1);
COSI3:x^2/a^2+y^2/b^2=1;
A1:first(lhs(COSI2))=last(lhs(COSI3));
B1:last(lhs(COSI2))=first(lhs(COSI3));
A2:solve(A1,a)[2];
B2:solve(B1,b)[2];
AB1:solve([A1,B1],[R,A])[2];
R2:AB1[1];
A2:AB1[2];
```

R, A と a, b の関係式を求める。(5.3.16) 式に下記の関係式を代入し、

$$\zeta = e^{i\eta}\sigma, \quad z = iy + x$$

境界である $\sigma = R$ とし下記を得る。

$$iy + x = e^{i\eta} R + \frac{e^{-i\eta} A^2}{R}$$

上式の実部、虚部から、

$$x = \cos(\eta)\ R + \frac{\cos(\eta)\ A^2}{R}$$

$$y = \sin(\eta)\ R - \frac{\sin(\eta)\ A^2}{R}$$

下記の関係式に代入し、

$$\sin(\eta)^2 + \cos(\eta)^2 = 1$$

下記の楕円の関係式を得る。

$$\frac{x^2 R^2}{(R^2 + A^2)^2} + \frac{y^2 R^2}{(R^2 - A^2)^2} = 1$$

半軸：a, b の楕円の関係式から、

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1$$

R, A と a, b の関係は下記となる。

$$R = \frac{b + a}{2}, \quad A = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{2} \tag{5.3.18}$$

(1) 複素ポテンシャルと流れ関数

```
ZT20:solve(Z1,\zeta);
ZT21:ZT20[1];
ZT22:ZT20[2];
ZT23:(rhs(ZT21)*rhs(ZT22));
ZT23=expand(ZT23);
ZT24:%/rhs(ZT21)*2;
F40:subst([ZT22],F0);
F41:subst([ZT22],F1);
F42:subst([ZT24],%);
F43:F=F40+F41;
F44:F=F40+F42;
SQ1:sqrt(z^2-4*A^2)+z;
SQ11:SQ1=z*(1+sqrt(1-4*A^2/z^2));
SQ3:1/SQ1;
SQ5:sqrt(z^2-4*A^2)-z;
SQ51:SQ5=z*(sqrt(1-4*A^2/z^2)-1);
F401:subst([SQ11],F40);
F411:subst([SQ11],F41);
F421:subst([SQ51],F42);
F431:F=F401+F411;
F441:F=F401+F421;
PS1:\Psi=imagpart(subst([z=x+%i*y,R2,A2]
  ,rhs(F431)));
subst([a=2,b=1,U=1,\alpha=%pi/6],PS1);
trigsimp(%);
PS2:\Psi=imagpart(subst([z=x+%i*y,R2,A2]
  ,rhs(F441)));
trigsimp(%);
subst([a=2,b=1,U=1,\alpha=%pi/6],PS2);
trigsimp(%);
```

(5.3.16) 式を ζ で解くと、

$$\zeta = -\frac{\sqrt{z^2-4\,A^2}-z}{2} \tag{5.3.19}$$

$$\zeta = \frac{\sqrt{z^2-4\,A^2}+z}{2} \tag{5.3.20}$$

外部領域である $z^2 >> A^2$ では、(5.3.20) 式が外部領域に対応していることが明らかで、この式を (5.3.17) 式の ζ 平面の複素ポテンシャルに代入し、z 平面の複素ポテンシャルを下記に得る。

$$F = \frac{2\,e^{i\,\alpha}\,R^2\,U}{\sqrt{z^2-4\,A^2}+z} + \frac{e^{-i\,\alpha}\,\left(\sqrt{z^2-4\,A^2}+z\right)\,U}{2} \tag{5.3.21}$$

下記に関係から、

$$-\frac{\left(\sqrt{z^2-4\,A^2}-z\right)\,\left(\sqrt{z^2-4\,A^2}+z\right)}{4} = A^2$$

次式が得られる。

$$\sqrt{z^2-4\,A^2}+z = -\frac{4\,A^2}{\sqrt{z^2-4\,A^2}-z}$$

上式を (5.3.21) 式に代入し、別の z 平面の複素ポテンシャルを得る。

$$F = \frac{e^{-i\,\alpha}\,\left(\sqrt{z^2-4\,A^2}+z\right)\,U}{2} - \frac{e^{i\,\alpha}\,\left(\sqrt{z^2-4\,A^2}-z\right)\,R^2\,U}{2\,A^2} \tag{5.3.22}$$

級数展開するのに便利なように、下記の関係式を

$$\sqrt{z^2-4\,A^2}+z = z\left(\sqrt{1-\frac{4\,A^2}{z^2}}+1\right)$$

$$\sqrt{z^2-4\,A^2}-z = z\left(\sqrt{1-\frac{4\,A^2}{z^2}}-1\right)$$

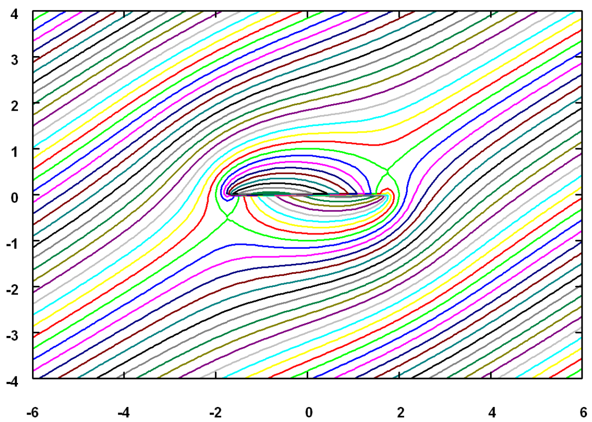


図 5.3.12: 一様流中の楕円柱まわりの流れ (Joukowski 変換)(5.3.23) 式による：$\alpha = 30°, a = 2, b = 1, U = 1$

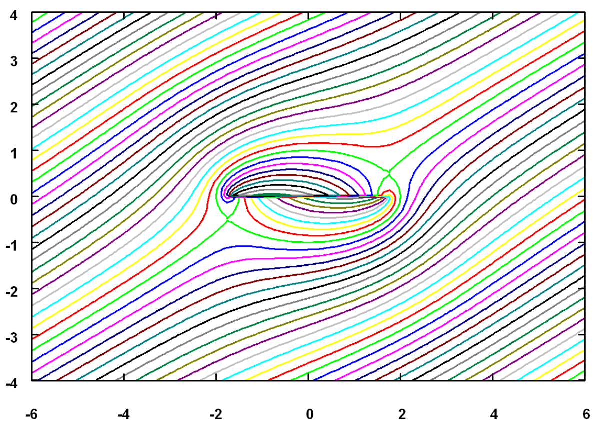


図 5.3.13: 一様流中の楕円柱まわりの流れ (Joukowski 変換)(5.3.24) 式による：$\alpha = 30°, a = 2, b = 1, U = 1$

(5.3.21) 式に代入し、

$$F=\frac{2\,e^{i\,\alpha}\,R^2\,U}{z\,\left(\sqrt{1-\frac{4\,A^2}{z^2}}+1\right)}+\frac{e^{-i\,\alpha}\,z\,\left(\sqrt{1-\frac{4\,A^2}{z^2}}+1\right)\,U}{2} \tag{5.3.23}$$

(5.3.22) 式に代入し、

$$F=\frac{e^{-i\,\alpha}\,z\,\left(\sqrt{1-\frac{4\,A^2}{z^2}}+1\right)\,U}{2}-\frac{e^{i\,\alpha}\,z\,\left(\sqrt{1-\frac{4\,A^2}{z^2}}-1\right)\,R^2\,U}{2\,A^2} \tag{5.3.24}$$

流れ関数は $z=i\,y+x$ を複素ポテンシャルの式に代入し、その虚部として得られる。(5.3.23) 式の複素ポテンシャルから得られる流れ関数は記述が長いため省く。(5.3.24) 式の複素ポテンシャルから得られる流れ関数を下記に示す。

$$\begin{aligned}\Psi=&\Bigg(\left(y^4+\left(2\,x^2-2\,b^2+2\,a^2\right)\,y^2+x^4+\left(2\,b^2-2\,a^2\right)\,x^2+b^4-2\,a^2\,b^2+a^4\right)^{\frac{1}{4}}\\
&\times\Bigg(\left(a\sin\left(\alpha\right)\,y-\cos\left(\alpha\right)\,b\,x\right)\,\sin\left(\frac{\mathrm{atan2}\left(\frac{\left(2\,b^2-2\,a^2\right)\,x\,y}{y^4+2\,x^2\,y^2+x^4},\frac{y^4+\left(2\,x^2-b^2+a^2\right)\,y^2+x^4+\left(b^2-a^2\right)\,x^2}{y^4+2\,x^2\,y^2+x^4}\right)}{2}\right)\\
&+\left(\cos\left(\alpha\right)\,b\,y+a\sin\left(\alpha\right)\,x\right)\,\cos\left(\frac{\mathrm{atan2}\left(\frac{\left(2\,b^2-2\,a^2\right)\,x\,y}{y^4+2\,x^2\,y^2+x^4},\frac{y^4+\left(2\,x^2-b^2+a^2\right)\,y^2+x^4+\left(b^2-a^2\right)\,x^2}{y^4+2\,x^2\,y^2+x^4}\right)}{2}\right)\Bigg)U\\
&+\left(-a\cos\left(\alpha\right)\,y-\sin\left(\alpha\right)\,b\,x\right)\,\left(y^4+2\,x^2\,y^2+x^4\right)^{\frac{1}{4}}\,U\Bigg)\Big/\left(\left(b-a\right)\,\left(y^4+2\,x^2\,y^2+x^4\right)^{\frac{1}{4}}\right)\end{aligned}$$

上記の流れ関数から得られる流線を前頁に示す。

(2) 楕円柱に作用する力

```
/* 作用する力 */
DF43:'diff(F,z,1)=diff(rhs(F431),z,1);
DF431:first(rhs(DF43));
DF432:last(rest(rhs(DF43),-2));
DF433:first(rest(rhs(DF43),2));
DF434:last(rhs(DF43));
SQR1:1/(sqrt(1-(4*A^2)/z^2)+1);
SQR1=rest(taylor(SQR1,A,0,8),-1);
SQR11:1/%;
DF4311:expand(subst([SQR11],DF431));
SQR2:1/(sqrt(1-(4*A^2)/z^2)*(sqrt(1-(4*A^2)
  /z^2)+1)^2);
SQR2=rest(taylor(SQR2,A,0,8),-1);
DF4321:expand(num(DF432)*rhs(%)/z^4);
SQR3:sqrt(1-(4*A^2)/z^2)+1;
SQR31:SQR3=rest(taylor(SQR3,A,0,8),-1);
DF4331:expand(subst([SQR31],DF433));
SQR4:1/(sqrt(1-(4*A^2)/z^2));
SQR4=rest(taylor(SQR4,A,0,8),-1);
SQR41:1/%;
DF4341:expand(subst([SQR41],DF434));
```

```
DF435:'diff(F,z,1)=DF4311+DF4321+DF4331
  +DF4341;
DF436:expand(rhs(DF435)^2);
F[x]-%i*F[Y]=%i*\rho/2*(2*%pi*%i)
  *residue(%,z,0);
DF437:expand(rhs(DF435)^2*z);
M+%i*N=-\rho/2*(2*%pi*%i)*residue(%,z,0);
realpart(%);
factor(trigexpand(%));
subst([A2],%);
```

(5.3.23) 式の複素ポテンシャルを z で微分し、

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\,z}\,F=&-\frac{2\,e^{i\,\alpha}\,R^2\,U}{z^2\,\left(\sqrt{1-\frac{4\,A^2}{z^2}}+1\right)}\\
&-\frac{8\,e^{i\,\alpha}\,A^2\,R^2\,U}{z^4\,\sqrt{1-\frac{4\,A^2}{z^2}}\,\left(\sqrt{1-\frac{4\,A^2}{z^2}}+1\right)^2}\\
&+\frac{e^{-i\,\alpha}\,\left(\sqrt{1-\frac{4\,A^2}{z^2}}+1\right)\,U}{2}+\frac{2\,e^{-i\,\alpha}\,A^2\,U}{z^2\,\sqrt{1-\frac{4\,A^2}{z^2}}}\end{aligned}$$

上式の下記の部分を級数展開し、

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{4\,A^2}{z^2}}+1}=\frac{5\,A^6}{2\,z^6}+\frac{A^4}{z^4}+\frac{A^2}{2\,z^2}+\frac{1}{2},\quad \frac{1}{\sqrt{1-\frac{4\,A^2}{z^2}}\left(\sqrt{1-\frac{4\,A^2}{z^2}}+1\right)^2}=\frac{14\,A^6}{z^6}+\frac{15\,A^4}{4\,z^4}+\frac{A^2}{z^2}+\frac{1}{4}$$

$$\sqrt{1-\frac{4\,A^2}{z^2}}+1=-\frac{4\,A^6}{z^6}-\frac{2\,A^4}{z^4}-\frac{2\,A^2}{z^2}+2,\quad \frac{1}{\sqrt{1-\frac{4\,A^2}{z^2}}}=\frac{20\,A^6}{z^6}+\frac{6\,A^4}{z^4}+\frac{2\,A^2}{z^2}+1$$

上記展開式を代入し、

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\,z}\,F=&-\frac{112\,e^{i\,\alpha}\,A^8\,R^2\,U}{z^{10}}-\frac{35\,e^{i\,\alpha}\,A^6\,R^2\,U}{z^8}-\frac{10\,e^{i\,\alpha}\,A^4\,R^2\,U}{z^6}-\frac{3\,e^{i\,\alpha}\,A^2\,R^2\,U}{z^4}-\frac{e^{i\,\alpha}\,R^2\,U}{z^2}\\&+\frac{40\,e^{-i\,\alpha}\,A^8\,U}{z^8}+\frac{10\,e^{-i\,\alpha}\,A^6\,U}{z^6}+\frac{3\,e^{-i\,\alpha}\,A^4\,U}{z^4}+\frac{e^{-i\,\alpha}\,A^2\,U}{z^2}+e^{-i\,\alpha}\,U\end{aligned}\tag{5.3.25}$$

(5.1.59) 式に (5.3.25) 式を代入し、楕円柱に作用する力：F_x, F_y は、

$$F_x-i\,F_y=\frac{i\,\rho}{2}\oint\left(\frac{d}{d\,z}\,F\right)^2 dz=0\tag{5.3.26}$$

(5.1.60) 式に (5.3.25) 式を代入し、楕円柱に作用するモーメント：M は、

$$\begin{aligned}M=&\Re_e\left(-\frac{\rho}{2}\oint z\left(\frac{d}{d\,z}\,F\right)^2 dz\right)\\=&-\pi\cos(\alpha)\,\sin(\alpha)\,\left(a^2-b^2\right)\,\rho U^2\end{aligned}\tag{5.3.27}$$

```
DF44:'diff(F,z,1)=diff(rhs(F441),z,1);
DF441:first(rhs(DF44));
DF442:last(rest(rhs(DF44),-2));
DF443:first(rest(rhs(DF44),2));
DF444:last(rhs(DF44));
SQR5:sqrt(1-(4*A^2)/z^2);
SQR51:SQR5=rest(taylor(SQR5,A,0,8),-1);
DF4411:expand(subst([SQR51],DF441));
DF4421:expand(subst([SQR41],DF442));
DF4431:expand(subst([SQR51],DF443));
DF4441:expand(subst([SQR41],DF444));
DF445:'diff(F,z,1)=DF4411+DF4421+DF4431
  +DF4441;
DF446:expand(rhs(DF445)^2);
F[x]-%i*F[Y]=%i*\rho/2*(2*%pi*%i)
  *residue(%,z,0);
DF447:expand(rhs(DF445)^2*z);
M+%i*N=-\rho/2*(2*%pi*%i)*residue(%,z,0);
realpart(%);
factor(trigexpand(%));
subst([A2],%);
```

(5.3.24) 式の複素ポテンシャルを z で微分し、

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\,z}\,F=&-\frac{e^{i\,\alpha}\left(\sqrt{1-\frac{4\,A^2}{z^2}}-1\right)\,R^2\,U}{2\,A^2}\\&-\frac{2\,e^{i\,\alpha}\,R^2\,U}{z^2\,\sqrt{1-\frac{4\,A^2}{z^2}}}\\&+\frac{e^{-i\,\alpha}\left(\sqrt{1-\frac{4\,A^2}{z^2}}+1\right)\,U}{2}\\&+\frac{2\,e^{-i\,\alpha}\,A^2\,U}{z^2\,\sqrt{1-\frac{4\,A^2}{z^2}}}\end{aligned}$$

上式の下記の部分を級数展開し、

$$\sqrt{1-\frac{4\,A^2}{z^2}}=-\frac{4\,A^6}{z^6}-\frac{2\,A^4}{z^4}-\frac{2\,A^2}{z^2}+1$$

上記展開式および前述の展開式を代入し、

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\,z}\,F=&-\frac{40\,e^{i\,\alpha}\,A^6\,R^2\,U}{z^8}-\frac{10\,e^{i\,\alpha}\,A^4\,R^2\,U}{z^6}\\&-\frac{3\,e^{i\,\alpha}\,A^2\,R^2\,U}{z^4}-\frac{e^{i\,\alpha}\,R^2\,U}{z^2}\\&+\frac{40\,e^{-i\,\alpha}\,A^8\,U}{z^8}+\frac{10\,e^{-i\,\alpha}\,A^6\,U}{z^6}\\&+\frac{3\,e^{-i\,\alpha}\,A^4\,U}{z^4}+\frac{e^{-i\,\alpha}\,A^2\,U}{z^2}+e^{-i\,\alpha}\,U\end{aligned}\tag{5.3.28}$$

(5.1.59) 式に (5.3.28) 式を代入し、楕円柱に作用する力：F_x, F_y および (5.1.60) 式に (5.3.28) 式を代入し、楕円柱に作用するモーメント：M は前述の結果と一致する。この結果から、楕円柱に作用する力は零で、モーメントは時計回りで迎角をさらにつける方向に作用している。

(3) 運動エネルギー

```
/* 運動エネルギー */
F11:F=F0+F1-U*%e^(-%i*\alpha)*z;
expand(subst([Z1],F11));
F12:expand(subst([ZT1],%));
PH1:\Phi=realpart(rhs(F12));
PS1:\Psi=imagpart(rhs(F12));
DPS1:'diff(\Psi,\eta)=diff(rhs(PS1),
 \eta,1);
PHS1:rhs(PH1)*rhs(DPS1);
PHS2:subst([\sigma=R],PHS1);
T1:T=-\rho/2*integrate(PHS2,\eta,0,2*%pi);
subst([A2,R2],T1);
trigexpand(%);
T2:factor(%);
T3:factor(subst([cos(\alpha)=V[x]/U,
 sin(\alpha)=V[y]/U,U^2=V[x]^2+V[y]^2],
  T2));
```

運動エネルギーは次の (A.5.3) 式で得られる。ここで $\frac{d}{dn}\,\Phi=-\frac{d}{ds}\,\Psi$ から次式となる。ここで流体を囲む、無限遠の積分：∞ と物体表面の積分：B になるが、無限遠の積分は零となるので、物体表面の積分のみが残る。

$$\begin{aligned}T=&\frac{\rho}{2}\iint\left(\frac{d}{d\,y}\,\Phi\right)^2+\left(\frac{d}{d\,x}\,\Phi\right)^2dxdy\\=&-\frac{\rho}{2}\oint\Phi\frac{d}{d\,n}\,\Phi\,ds\\=&\frac{\rho}{2}\oint_{\infty}\Phi d\,\Psi-\frac{\rho}{2}\oint_{B}\Phi d\,\Psi\end{aligned}\tag{5.3.29}$$

積分の容易さから、ζ 平面の複素ポテンシャルを使用する。上式から運動エネルギーの計算に使用する複素ポテンシャルは一様流成分を除く必要があり、(5.3.17) 式にその成分を引き、次式となる。さらに写像関数：(5.3.16) 式から、

$$F=e^{-i\,\alpha}\,U\,\zeta+\frac{e^{i\,\alpha}\,R^2\,U}{\zeta}-e^{-i\,\alpha}\,z\,U=\frac{e^{i\,\alpha}\,R^2\,U}{\zeta}-\frac{e^{-i\,\alpha}\,A^2\,U}{\zeta}$$

$\zeta=e^{i\,\eta}\,\sigma,$ を代入し、

$$F=\Phi+i\,\Psi=\frac{e^{i\,\alpha-i\,\eta}\,R^2\,U}{\sigma}-\frac{e^{-i\,\eta-i\,\alpha}\,A^2\,U}{\sigma}$$

上式から、速度ポテンシャル：Φ、流れ関数：Ψ は、

$$\Phi=\frac{\cos\left(\eta-\alpha\right)\,R^2\,U}{\sigma}-\frac{\cos\left(\eta+\alpha\right)\,A^2\,U}{\sigma},\quad \Psi=\frac{\sin\left(\eta+\alpha\right)\,A^2\,U}{\sigma}-\frac{\sin\left(\eta-\alpha\right)\,R^2\,U}{\sigma}$$

$$\frac{d}{d\,\eta}\,\Psi=\frac{\cos\left(\eta+\alpha\right)\,A^2\,U}{\sigma}-\frac{\cos\left(\eta-\alpha\right)\,R^2\,U}{\sigma}$$

運動エネルギーは上式を (5.3.29) 式に代入し、

$$T=-\frac{\rho}{2}\int_0^{2\pi}\Phi\frac{d}{d\,\eta}\,\Psi d\eta=-\frac{\pi\,\left(\sin\left(\alpha\right)^2\,b^2-\cos\left(\alpha\right)^2\,b^2-b^2-a^2\sin\left(\alpha\right)^2+a^2\cos\left(\alpha\right)^2-a^2\right)\,\rho U^2}{4}$$

一様流速：U の x 成分：V_x、y 成分：V_y とすると、下記の関係から、

$$\cos\left(\alpha\right)=\frac{V_x}{U},\sin\left(\alpha\right)=\frac{V_y}{U},U^2=V_y^2+V_x^2$$

運動エネルギーは

$$T=\frac{\pi\,\rho\,\left(a^2\,V_y^2+b^2\,V_x^2\right)}{2}\tag{5.3.30}$$

例題 5.3.6　運動する楕円柱まわりの流体運動エネルギー (楕円座標変換)

半軸：a, b の楕円柱が x 軸方向に V_X、y 軸方向に V_Y で動き、角速度: ω で回転する。この楕円柱まわりの流体の運動エネルギーを楕円座標変換により求める [1]。

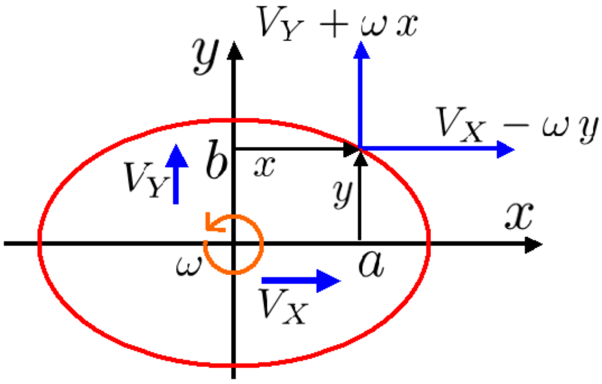


図 5.3.14: 運動する楕円柱まわりの流体運動エネルギー (楕円座標変換)

(1) 境界条件

```
/*  運動する楕円柱まわりの流体運動エネルギー (楕
円座標変換)  */
kill(all);
declare(z,complex);
declare(\zeta,complex);
declare(F,complex);
assume(C>0);
assume(\xi[0]>0);
assume(a>0);
assume(b>0);
assume(a>b);
/*  境界条件  */
VX1:v[x]='diff(\Psi,y,1);
VY1:v[y]=-'diff(\Psi,x,1);
VX2:v[x]=V[X]-y*\omega;
VY2:v[y]=V[Y]+x*\omega;
VX3:rhs(VX1)=rhs(VX2);
VX4:\Psi[x]=integrate(rhs(VX3),y,1);
VY3:rhs(VY1)=rhs(VY2);
VY4:\Psi[y]=-integrate(rhs(VY3),x,1);
PS0:\Psi=rhs(VX4)+rhs(VY4);
```

物体の境界条件について検討する。物体表面上のある点の運動による速度を v_x, v_y とする。この速度と流れ関数：Ψ との関係は、

$$v_x = \frac{d}{d\,y}\,\Psi, \quad v_y = -\frac{d}{d\,x}\,\Psi$$

運動との関係は、

$$v_x = V_X - \omega\,y, \quad v_y = V_Y + \omega\,x$$

これらを等しい置き、積分すると、

$$\frac{d}{d\,y}\,\Psi = V_X - \omega\,y, \quad \Psi_x = y\,V_X - \frac{\omega\,y^2}{2}$$

$$-\frac{d}{d\,x}\,\Psi = V_Y + \omega\,x, \quad \Psi_y = -x\,V_Y - \frac{\omega\,x^2}{2}$$

以上から、境界条件は下記となる。

$$\Psi = -x\,V_Y + y\,V_X - \frac{\omega\,y^2}{2} - \frac{\omega\,x^2}{2} \tag{5.3.31}$$

(2) 各種関係式

```
/*  楕円関係式  */
Z1:z=C*cosh(\zeta);
Z11:cosh(\zeta)=z/C;
ZT1:\zeta=\xi+%i*\eta;
Z2:z=x+%i*y;
Z3:subst([Z2,ZT1],Z1);
X1:realpart(Z3);
Y1:imagpart(Z3);
S1:sin(\eta)^2+cos(\eta)^2=1;
S1S:solve(S1,sin(\eta)^2)[1];
S2:cosh(\xi)^2-sinh(\xi)^2=1;
S2S:solve(S2,sinh(\xi)^2)[1];
subst([\xi=\zeta],S2);
subst([Z11],%);
Z12:solve(%,sinh(\zeta))[2];
Z13:%e^(\zeta)=cosh(\zeta)+sinh(\zeta);
Z14:%e^(-\zeta)=cosh(\zeta)-sinh(\zeta);
Z15:subst([Z11,Z12],Z13);
Z16:subst([Z11,Z12],Z14);
S11:solve(X1,cos(\eta))[1];
S12:solve(Y1,sin(\eta))[1];
S21:solve(X1,cosh(\xi))[1];
S22:solve(Y1,sinh(\xi))[1];
S3:subst([S11,S12],S1);
S4:subst([S21,S22],S2);
XI1:\xi=\xi[0];
S31:subst([XI1],S3);
A1:a=sqrt(denom(last(lhs(S31))));
B1:b=sqrt(denom(first(lhs(S31))));
A2:cosh(xi[0])=a/C;
B2:sinh(xi[0])=b/C;
```

[1]Sir Horance Lamb, Hydrodynamics sixth edition 11), P.83 71.

```
subst([\xi=\xi[0]],S2);
subst([A2,B2],%*C);
C1:expand(%*C);
C2:solve(C1,C)[2];
AB1:A1+B1;
AB2:A1-B1;
AB1/AB2;
trigrat(%);
log(rhs(%))=log(lhs(%));
XI1:%/2;
```

楕円座標変換式は、

$$z = C\cosh(\zeta) \tag{5.3.32}$$

上式に次式を代入すると、

$$\zeta = \xi + i\,\eta, \quad z = i\,y + x$$

$$i\,y + x = \cosh(\xi + i\,\eta)\;C$$

上式の実部、虚部は、

$$x = \cos(\eta)\,\cosh(\xi)\;C, \quad y = \sin(\eta)\,\sinh(\xi)\;C \tag{5.3.33}$$

また。下記の関係がある。

$$\cosh(\zeta)^2 - \sinh(\zeta)^2 = 1$$

上式と (5.3.31) 式から下記の関係を得る。

$$\cosh(\zeta) = \frac{z}{C}, \quad \sinh(\zeta) = \frac{\sqrt{z^2 - C^2}}{C}$$

上式と下記と関係から、

$$e^{\zeta} = \sinh(\zeta) + \cosh(\zeta), \quad e^{-\zeta} = \cosh(\zeta) - \sinh(\zeta)$$

$$e^{\zeta} = \frac{\sqrt{z^2 - C^2}}{C} + \frac{z}{C}, \quad e^{-\zeta} = \frac{z}{C} - \frac{\sqrt{z^2 - C^2}}{C}$$

(5.3.33) 式から

$$\cos(\eta) = \frac{x}{\cosh(\xi)\;C}, \quad \sin(\eta) = \frac{y}{\sinh(\xi)\;C}$$

$$\cosh(\xi) = \frac{x}{\cos(\eta)\;C}, \quad \sinh(\xi) = \frac{y}{\sin(\eta)\;C}$$

下記の関係式に代入し、

$$\sin(\eta)^2 + \cos(\eta)^2 = 1, \quad \cosh(\xi)^2 - \sinh(\xi)^2 = 1$$

下記の関係式を得る。

$$\frac{y^2}{\sinh(\xi)^2\,C^2} + \frac{x^2}{\cosh(\xi)^2\,C^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{\cos(\eta)^2\,C^2} - \frac{y^2}{\sin(\eta)^2\,C^2} = 1$$

楕円上である $\xi = \xi_0$ を上式に代入し、下記の楕円の式を得る。

$$\frac{y^2}{\sinh(\xi_0)^2\,C^2} + \frac{x^2}{\cosh(\xi_0)^2\,C^2} = 1$$

上記から、楕円の半軸：a, b との関係式が得られる。

$$a = \cosh(\xi_0)\;C, \quad b = \sinh(\xi_0)\;C$$

$$\cosh(\xi_0) = \frac{a}{C}, \quad \sinh(\xi_0) = \frac{b}{C}$$

また、次式の関係から、

$$\cosh(\xi_0)^2 - \sinh(\xi_0)^2 = 1$$

下記を得る。

$$a^2 - b^2 = C^2, \quad C = \sqrt{a^2 - b^2} \tag{5.3.34}$$

更に、下記の関係から、

$$\frac{b+a}{a-b} = \frac{\sinh(\xi_0)\;C + \cosh(\xi_0)\;C}{\cosh(\xi_0)\;C - \sinh(\xi_0)\;C} = e^{2\,\xi_0}$$

上式から、

$$\xi_0 = \frac{\log\left(-\frac{b+a}{b-a}\right)}{2} \tag{5.3.35}$$

(3)V_X, V_Y **による運動エネルギー**

```
/*  x 方向  */
PS0X:\Psi[x0]=subst([Y1],first(rest
 (rhs(PS0),-2)));
F1:F[1]=-D[1]*%e^(-(\xi+%i*\eta));
PS1:\Psi[1]=imagpart(rhs(F1));
rhs(PS0X)=rhs(PS1);
subst([\xi=\xi[0]],%);
solve(%,D[1])[1];
subst([B2,C2],%);
D1:radcan(subst([XI1],%));
PS11:\Psi[x1]=subst([D1],rhs(PS1));
F11:subst([D1],F1);
PH11:\Phi[x1]=realpart(rhs(F11));
\Psi[x1]=imagpart(rhs(F11));
```

(5.3.31) 式の x 方向の境界条件：$y\,V_X$ に (5.3.33) 式を代入し下記の境界条件を得る。

$$\Psi_{x0} = \sin(\eta)\,\sinh(\xi)\;C\,V_X$$

上式を参考に下記の複素ポテンシャル：F_1 を導入する。また、流れ関数：Ψ_1 は、

$$F_1 = -D_1\,e^{-\xi - i\,\eta}, \quad \Psi_1 = D_1\sin(\eta)\;e^{-\xi}$$

上式の流れ関数と境界条件が等しいとし、

$$\sin(\eta)\,\sinh(\xi)\;C\,V_X = D_1\sin(\eta)\;e^{-\xi}$$

D_1 を求め、(5.3.34) 式、(5.3.35) 式を代入し、

$$D_1 = e^{\xi_0}\sinh(\xi_0)\,C\,V_X = \frac{b\sqrt{b+a}\,V_X}{\sqrt{a-b}}$$

上式を複素ポテンシャル：F_1 に代入し、速度ポテンシャル：Φ_1、流れ関数：Ψ_1 は、

$$F_1 = -\frac{b\sqrt{b+a}\,e^{-\xi-i\,\eta}\,V_X}{\sqrt{a-b}}$$

$$\Phi_1 = -\frac{b\sqrt{b+a}\cos(\eta)\,e^{-\xi}\,V_X}{\sqrt{a-b}} \tag{5.3.36}$$

$$\Psi_1 = \frac{b\sqrt{b+a}\sin(\eta)\,e^{-\xi}\,V_X}{\sqrt{a-b}} \tag{5.3.37}$$

```
/*  y 方向  */
PS0Y:\Psi[y0]=subst([X1],last(rest(rhs(PS0)
  ,-2)));
F2:F[2]=-%i*D[2]*%e^(-(\xi+%i*\eta));
PS2:\Psi[2]=imagpart(rhs(F2));
rhs(PS0Y)=rhs(PS2);
subst([\xi=\xi[0]],%);
solve(%,D[2])[1];
subst([A2,C2],%);
D2:radcan(subst([XI1],%));
PS21:\Psi[y2]=subst([D2],rhs(PS2));
F21:subst([D2],F2);
PH21:\Phi[y2]=realpart(rhs(F21));
\Psi[y2]=imagpart(rhs(F21));
```

(5.3.31) 式の y 方向の境界条件：$-x\,V_Y$ に (5.3.33) 式を代入し下記の境界条件を得る。

$$\Psi_{y0} = -\cos(\eta)\cosh(\xi)\,C\,V_Y$$

上式を参考に下記の複素ポテンシャル：F_2 を導入する。また、流れ関数：Ψ_2 は、

$$F_2 = -i\,D_2\,e^{-\xi-i\,\eta}, \quad \Psi_2 = -D_2\cos(\eta)\,e^{-\xi}$$

上式の流れ関数と境界条件が等しいとし、

$$-\cos(\eta)\cosh(\xi)\,C\,V_Y = -D_2\cos(\eta)\,e^{-\xi}$$

D_2 を求め、(5.3.34) 式、(5.3.35) 式を代入し、

$$D_2 = e^{\xi_0}\cosh(\xi_0)\,C\,V_Y = \frac{a\sqrt{b+a}\,V_Y}{\sqrt{a-b}}$$

上式を複素ポテンシャル：F_2 に代入し、速度ポテンシャル：Φ_2、流れ関数：Ψ_2 は、

$$F_2 = -\frac{i\,a\sqrt{b+a}\,e^{-\xi-i\,\eta}\,V_Y}{\sqrt{a-b}}$$

$$\Phi_2 = -\frac{a\sqrt{b+a}\sin(\eta)\,e^{-\xi}\,V_Y}{\sqrt{a-b}} \tag{5.3.38}$$

$$\Psi_2 = -\frac{a\sqrt{b+a}\cos(\eta)\,e^{-\xi}\,V_Y}{\sqrt{a-b}} \tag{5.3.39}$$

```
/* x-y 方向運動エネルギー */
PH3:\Phi=rhs(PH11)+rhs(PH21);
PS3:\Psi=rhs(PS11)+rhs(PS21);
DPS3:diff(rhs(PS3),\eta,1);
rhs(PH3)*DPS3;
DI1:subst([\xi=\xi[0]],%);
T1:T=-\rho/2*integrate(DI1,\eta,0,%pi*2);
subst([%e^(2*xi[0])=-(b+a)/(b-a)],%);
T2:factor(%);
```

(5.3.36) 式、(5.3.38) 式から V_X, V_Y による速度ポテンシャルは、

$$\Phi = -\frac{a\sqrt{b+a}\sin(\eta)\,e^{-\xi}\,V_Y}{\sqrt{a-b}} - \frac{b\sqrt{b+a}\cos(\eta)\,e^{-\xi}\,V_X}{\sqrt{a-b}}$$

(5.3.37) 式、(5.3.39) 式から V_X, V_Y による流れ関数は、

$$\Psi = \frac{b\sqrt{b+a}\sin(\eta)\,e^{-\xi}\,V_X}{\sqrt{a-b}} - \frac{a\sqrt{b+a}\cos(\eta)\,e^{-\xi}\,V_Y}{\sqrt{a-b}}$$

$$\frac{d}{d\eta}\Psi = \frac{a\sqrt{b+a}\sin(\eta)\,e^{-\xi}\,V_Y}{\sqrt{a-b}} + \frac{b\sqrt{b+a}\cos(\eta)\,e^{-\xi}\,V_X}{\sqrt{a-b}}$$

(5.3.29) 式から、$\xi = \xi_0$ として、下記の積分をして V_X, V_Y による運動エネルギーを得る。

$$T = -\frac{\rho}{2}\int_0^{2\pi}\Phi\frac{d}{d\eta}\Psi d\eta = \frac{\pi\,\rho\,\left(a^2\,V_Y^2 + b^2\,V_X^2\right)}{2} \tag{5.3.40}$$

(4) 回転による運動エネルギー

```
/*  回転方向  */
PS0W:\Psi[\omega]=subst([X1,Y1]
  ,rest(rhs(PS0),2));
PS0W1:expand(trigrat(%));
S5:cosh(\xi)=(%e^(\xi)+%e^(-\xi))/2;
subst([\xi=2*\xi],S5);
S51:%e^(2*xi)=2*cosh(2*xi)-%e^(-2*xi);
PS0W2:lhs(PS0W1)=expand(subst([S51],first(
  rhs(PS0W1)))+rest(rhs(PS0W1),1));
F4:F[4]=-%i*D[4]*%e^(-2*(\xi+%i*\eta));
PS4:\Psi[4]=imagpart(rhs(F4));
rhs(PS0W2)=rhs(PS4);
subst([\xi=\xi[0]],%);
rhs(%)-lhs(%)=0;
coeff(%,cos(2*\eta));
D4:solve(%,D[4])[1];
D41:factor(subst([XI1,C2],D4));
F41:subst([D41],F4);
PH41:\Phi[\omega]=realpart(rhs(F41));
PS41:\Psi[\omega]=imagpart(rhs(F41));
DPS41:diff(rhs(PS41),\eta,1);
rhs(PH41)*DPS41;
DI1:subst([\xi=\xi[0]],%);
T1:T=-\rho/2*integrate(DI1,\eta,0,%pi*2);
subst([XI1],%);
```

(5.3.31) 式の回転方向の境界条件:$-\frac{\omega y^2}{2}-\frac{\omega x^2}{2}$ に (5.3.33) 式を代入し下記の境界条件を得る。これを整理して、

$$\begin{aligned}\Psi_\omega &= -\frac{\sin(\eta)^2\omega\sinh(\xi)^2C^2}{2}-\frac{\cos(\eta)^2\omega\cosh(\xi)^2C^2}{2}\\ &= -\frac{\omega e^{2\xi}C^2}{8}-\frac{\omega e^{-2\xi}C^2}{8}-\frac{\cos(2\eta)\,\omega C^2}{4}\\ &= -\frac{\omega\cosh(2\xi)\,C^2}{4}-\frac{\cos(2\eta)\,\omega C^2}{4}\end{aligned}$$

上式を参考に下記の複素ポテンシャル : F_4 を導入する。また、流れ関数 : Ψ_4 は、

$$F_4=-i\,D_4\,e^{-2(\xi+i\eta)},\quad \Psi_4=-D_4\cos(2\eta)\,e^{-2\xi}$$

上式の流れ関数と境界条件が等しいとし、

$$-\frac{\omega\cosh(2\xi)\,C^2}{4}-\frac{\cos(2\eta)\,\omega C^2}{4}=-D_4\cos(2\eta)\,e^{-2\xi}$$

$\xi=\xi_0$ とし、

$$\frac{\cos(2\eta)\,\omega C^2}{4}+\frac{\cosh(2\xi_0)\,\omega C^2}{4}-e^{-2\xi_0}D_4\cos(2\eta)=0$$

左辺第 2 項は定数であり、流れ関数の式から省くことができ、

$$\frac{\omega C^2}{4}-e^{-2\xi_0}D_4=0$$

D_4 を求め、(5.3.34) 式、(5.3.35) 式を代入し、

$$D_4=\frac{e^{2\xi_0}\omega C^2}{4}=\frac{(b+a)^2\omega}{4}$$

上式を複素ポテンシャル : F_4 に代入し、速度ポテンシャル : Φ_ω、流れ関数 : Ψ_ω は、

$$F_4=-\frac{i\,(b+a)^2\,\omega\,e^{-2(\xi+i\eta)}}{4}$$

$$\Phi_\omega=-\frac{(b+a)^2\sin(2\eta)\,\omega\,e^{-2\xi}}{4}$$

$$\Psi_\omega=-\frac{(b+a)^2\cos(2\eta)\,\omega\,e^{-2\xi}}{4}$$

$$\frac{d}{d\eta}\Psi_\omega=\frac{(b+a)^2\sin(2\eta)\,\omega\,e^{-2\xi}}{2}$$

(5.3.29) 式から、$\xi=\xi_0$ として、下記を積分して、回転による運動エネルギーを得る。

$$\begin{aligned}T &= -\frac{\rho}{2}\int_0^{2\pi}\Phi_\omega\frac{d}{d\eta}\Psi_\omega d\eta\\ &= \frac{\pi e^{-4\xi_0}(b+a)^4\omega^2\rho}{16}\\ &= \frac{\pi(b-a)^2(b+a)^2\omega^2\rho}{16}\end{aligned}\tag{5.3.41}$$

例題 5.3.7　平板をすぎる流れ (Joukowski 変換)

ζ 平面上で円に対し流向：α の流場を x 軸上 $-1 \to 1$ の平板および y 軸上 $-i \to i$ に変換する写像関数とそれらの流場を求める。

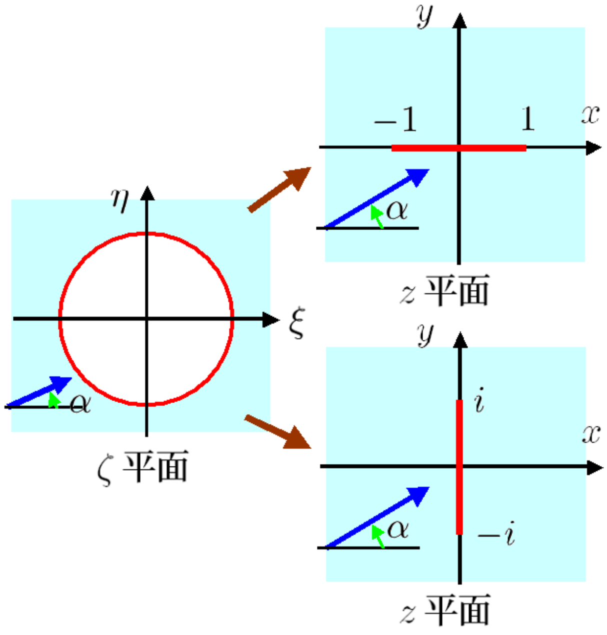


図 5.3.15: 平板をすぎる流れ

```
/* 平板をすぎる流れ (Joukowski 変換) */
kill(all);
declare(z,complex);
declare(F,complex);
declare(\zeta,complex);
assume(a>0);
assume(b>0);
assume(\sigma>0);
assume(z^2>A^2);
Z0:z=x+%i*y;
Z1:z=\zeta+A^2/\zeta;
ZT1:\zeta=\sigma*%e^(%i*\eta);
ZT2:\zeta=R*%e^(%i*\eta);
F0:U*%e^(-%i*\alpha)*\zeta;
subst([\zeta=R^2/conjugate(\zeta)],F0);
F1:conjugate(%);
F3:F=F0+F1;
F4:subst([ZT1],F3);
Z2:subst([ZT2,Z0],Z1);
X1:realpart(Z2);
Y1:imagpart(Z2);
CO1:solve(X1,cos(\eta))[1];
SI1:solve(Y1,sin(\eta))[1];
```

```
COSI1:cos(\eta)^2+sin(\eta)^2=1;
COSI2:subst([CO1,SI1],COSI1);
COSI3:x^2/a^2+y^2/b^2=1;
A1:first(lhs(COSI2))=last(lhs(COSI3));
B1:last(lhs(COSI2))=first(lhs(COSI3));
A2:solve(A1,a)[2];
B2:solve(B1,b)[2];
AB1:solve([A1,B1],[R,A])[2];
R2:AB1[1];
A2:AB1[2];
```

例題 5.3.5 の結果を基に解く。(5.3.16) 式から写像関数を下記とする。

$$z = \zeta + \frac{A^2}{\zeta}$$

ζ 平面で流速：U の一様な流れに中に半径：R の円柱を置いたときの複素ポテンシャルは (5.3.17) 式から下記となる。

$$F = e^{-i\,\alpha}\,U\,\zeta + \frac{e^{i\,\alpha}\,R^2\,U}{\zeta}$$

半軸：a, b の楕円の関係式から、

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1$$

R, A と a, b の関係は (5.3.18) 式から下記となる。

$$R = \frac{b+a}{2}, \quad A = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{2}$$

```
F442:F=(%e^(-%i*alpha)*(sqrt(1-(a^2-b^2)
  /z^2)+1)*z*U)/2-(%e^(%i*alpha)*(b+a)^2
  *(sqrt(1-(a^2-b^2)/z^2)-1)*z*U)
  /(2*(a^2-b^2));
AB2:subst([b=0],AB1);
R3:AB2[1];
A3:AB2[2];
Z3:subst([R3,A3,a=2],Z1);
PS2:\Psi=imagpart(subst([z=x+%i*y],
  rhs(F442)));
subst([a=2,b=0,U=1,\alpha=%pi/2],PS2);
trigsimp(%);
subst([a=2,b=0,U=1,\alpha=%pi/4],PS2);
trigsimp(%);
AB3:subst([a=0],AB1);
R4:AB3[1];
A4:AB3[2];
Z4:subst([R4,A4,b=2],Z1);
subst([a=0,b=2,U=1,\alpha=0],PS2);
trigsimp(%);
subst([a=0,b=2,U=1,\alpha=%pi/4],PS2);
trigsimp(%);
```

z 平面の複素ポテンシャルは (5.3.24) 式から下記となる。

$$F = \frac{e^{-i\,\alpha}\left(\sqrt{1-\frac{a^2-b^2}{z^2}}+1\right)z\,U}{2} - \frac{e^{i\,\alpha}\,(b+a)^2\left(\sqrt{1-\frac{a^2-b^2}{z^2}}-1\right)z\,U}{2\,(a^2-b^2)}$$

$b = 0$ を代入し、x 軸上の平板の写像関数は下記を代入し、

$$R = \frac{a}{2}, \quad A = \frac{a}{2}$$

$$z = \zeta + \frac{1}{\zeta} \tag{5.3.42}$$

$a = 2, b = 0, U = 1, \alpha = \frac{\pi}{2}, \quad \alpha = \frac{\pi}{4}$ のときの流場を下記の gnupot を用いて求めた。その結果を下記に示す。

```
#!/gnuplot
set xrange [-4:4]
set yrange [-3:3]
set isosamples 150,150
set contour base
set cntrparam levels incremental -20,0.1,20
unset key
unset surface
set view map
splot ((y**4+(2*x**2+8)*y**2+x**4-8*x**2
 +16)**(0.25)*(1.4142135*y*sin(atan2((
 8*x*y)/(y**4+2*x**2*y**2+x**4),(y**4
 +(2*x**2+4)*y**2+x**4-4*x**2)/(y**4
 +2*x**2*y**2+x**4))/2)-1.4142135*x
 *cos(atan2((8*x*y)/(y**4+2*x**2*y**2
 +x**4),(y**4+(2*x**2+4)*y**2+x**4
  -4*x**2)/(y**4+2*x**2*y**2+x**4))/2))
  +1.4142135*y*(y**4+2*x**2*y**2+x**4)
  **(0.25))/(2*(y**4+2*x**2*y**2+x**4)
  **(0.25))
#    EOF
```

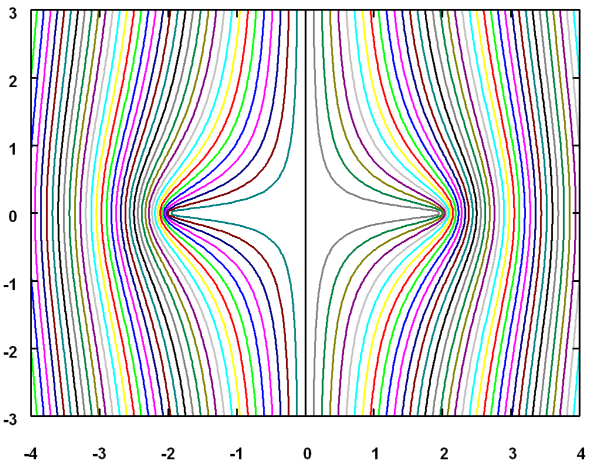


図 5.3.16: 平板をすぎる流れ $a = 2, b = 0, U = 1, \alpha = \frac{\pi}{2}$

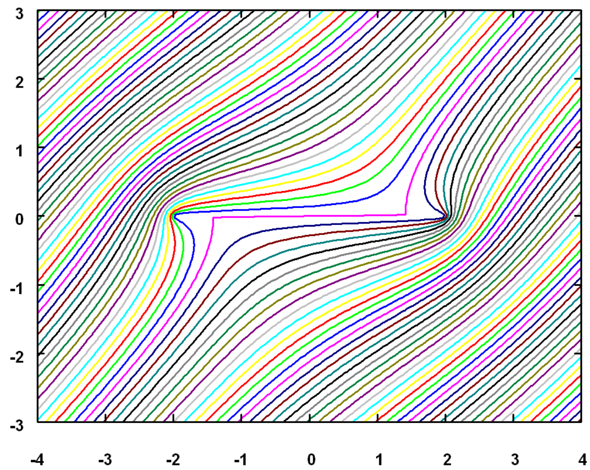


図 5.3.17: 平板をすぎる流れ $a = 2, b = 0, U = 1, \alpha = \frac{\pi}{4}$

$a = 0$ を代入し、y 軸上の平板の写像関数は下記を代入し、

$$a = 0$$

$$R = \frac{b}{2}, \quad A = \frac{i\,b}{2}$$

$$z = \zeta - \frac{1}{\zeta} \tag{5.3.43}$$

$a = 0, b = 2, U = 1, \alpha = 0$ のときの流場を下記の gnupot を用いて求めた。その結果を下記に示す。

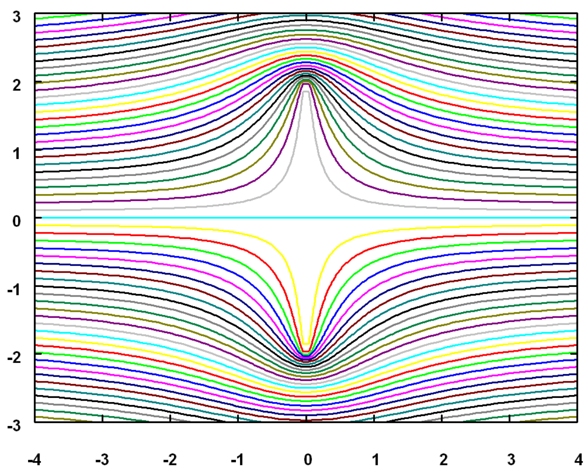


図 5.3.18: 平板をすぎる流れ $a = 0, b = 2, U = 1, \alpha = 0$

例題 5.3.8　円柱の外に置いたわき出し

半径：A の円の外の、$z = R e^{i\,\theta}$ に強さ：m のわき出しを置いたときの流れを求める。

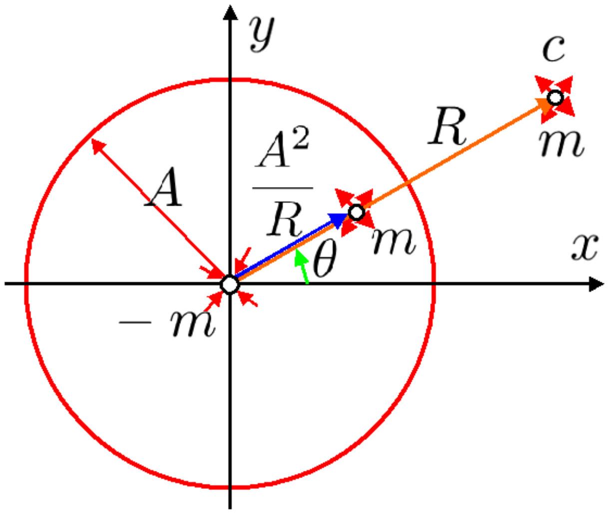


図 5.3.19: 円柱の外に置いたわき出し

```
/*  円柱の外に置いたわき出し  */
kill(all);
declare(z,complex);
declare(F,complex);
declare(c,complex);
F0:m*log(z-c);
subst([z=A^2/conjugate(z)],F0);
conjugate(%);
F1:m*log(A^2/z-conjugate(c));
FF1:F=F0+F1;
factor(logcontract(%));
F11:factor(F1);
F2:-m*log(z);
F12:F11-F2;
F13:logcontract(F12);
F3:-m*log(-1/(conjugate(c)));
F14:F13-F3;
F15:expand(logcontract(F14));
F4:F=F0+F15+F2+F3;
F5:F=F0+F15+F2;
subst([c=R*%e^(%i*\theta)],F5);
subst([z=x+%i*y,c=R*%e^(%i*\theta)
  ,\theta=0],F5);
PS1:\Psi=imagpart(rhs(%));
PS10:subst([x=-A,y=0],PS1);
subst([m=1,A=1,R=1.5],PS1);
subst([m=1,A=1,R=1.5],PS10);
```

$z = c = R e^{i\,\theta}$ に強さ：m のわき出しの複素ポテンシャル：F_0 は (5.1.31) 式から、

$$F_0 = m \log(z - c)$$

5.1.16 円定理 (110 ページ) から、半径：A の円が境界となるための複素ポテンシャル：F_1 は、

$$F_1 = m\,\overline{\left(\log\left(\frac{A^2}{\overline{(z)}} - c\right)\right)} = m \log\left(\frac{A^2}{z} - \bar{c}\right) \tag{5.3.44}$$

以上から、全体の複素ポテンシャルは、下記となり、展開すると、

$$\begin{aligned} F =& m \log\left(\frac{A^2}{z} - \bar{c}\right) + m \log(z - c) \\ =& m \log\left(z - \frac{A^2}{\bar{c}}\right) + m \log(z - c) - m \log(z) \\ &- \log\left(-\frac{1}{\bar{c}}\right) m \end{aligned} \tag{5.3.45}$$

右辺最終項は常数であるため、省くことができるため、全体の複素ポテンシャルは下記となる。この結果から、円の境界となるためには、円内で原点と外に置いたわき出しを結んだ線上で原点から $\frac{A^2}{R}$ の位置に同じ強さのわき出しを、原点に同じ強さの吸い込みを置けばよい。

$$\begin{aligned} F =& m \log\left(z - \frac{A^2}{\bar{c}}\right) + m \log(z - c) - m \log(z) \\ =& m \log\left(z - e^{i\,\theta} R\right) + m \log\left(z - \frac{e^{i\,\theta} A^2}{R}\right) - m \log(z) \end{aligned} \tag{5.3.46}$$

流れ関数：Ψ は上式の虚部であり、$\theta = 0$ としたとき、次式となる。

$$\begin{aligned} \Psi =& m\,\mathrm{atan2}(y, x - R) + m\,\mathrm{atan2}\left(y, x - \frac{A^2}{R}\right) \\ &- m\,\mathrm{atan2}(y, x) \end{aligned}$$

円柱の左端における流れ関数の値は、$x = -A, y = 0, m = 1, A = 1, R = 1.5$ を代入すると、
$\Psi = 6.283185307179586 - \pi$ を得る。これをもとに流線を gnuplot を用いて描く。$m = 1, A = 1, a = 1.5$ として、gnuplot を用いて流線を求めた結果を下記に示す。下記の図から、$x = 0, x = A^2/a = 0.6666, x = 1.5$ にわき出しがあるのがわかり、境界が円になっている。

```
#!/gnuplot
set xrange [-2:3]
set yrange [-2:2]
set isosamples 150,150
set contour base
set cntrparam levels incremental
 -12.566368,0.12566368,12.5
unset key
unset surface
set view map
splot -atan2(y,x)
 +atan2(y,x-0.66666666666667)
 +atan2(y,x-1.5)
#    EOF
```

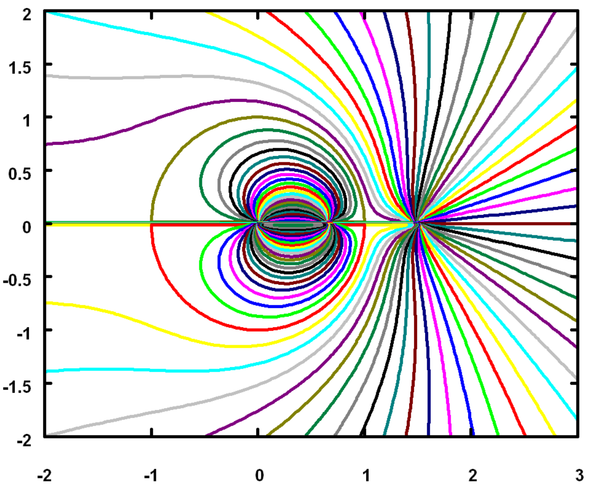


図 5.3.20: 円柱の外に置いたわき出しの流線

```
DF5:'diff(F,z,1)=diff(rhs(F5),z,1);
subst([c=R*%e^(%i*\theta),\theta=0],%);
DF52:lhs(DF5)^2=expand(rhs(%)^2);
FXY1:F[x]-%i*F[y]=-\rho*%i/2*(2*%pi*%i)
  *residue(rhs(DF52),z,R);
```

円柱および円柱外部のわき出しを含む大きな円：S、円柱外部のわき出しを囲む小さな円：M とすると物体に作用する力は (5.1.61) 式から下記となる。

$$F_x - i\,F_y = \frac{i\,\rho}{2}\oint_S \left(\frac{d}{d\,z}\,F\right)^2 dz - \frac{i\,\rho}{2}\oint_M \left(\frac{d}{d\,z}\,F\right)^2 dz$$

大きな円：S の積分は零となり、円柱外部のわき出しを囲む小さな円：M の積分が残る。(5.3.46) 式から、

$$\frac{d}{d\,z}\,F = \frac{m}{z - \frac{A^2}{R}} + \frac{m}{z - R} - \frac{m}{z}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{d}{d\,z}\,F\right)^2 =& \frac{m^2}{\frac{A^4}{R^2} - \frac{2\,z\,A^2}{R} + z^2} + \frac{2\,m^2}{-\frac{z\,A^2}{R} + A^2 + z^2 - R\,z} \\ & - \frac{2\,m^2}{z^2 - \frac{z\,A^2}{R}} - \frac{2\,m^2}{z^2 - R\,z} + \frac{m^2}{z^2 - 2\,a\,z + R^2} \\ & + \frac{m^2}{z^2}\end{aligned}$$

留数定理から下記積分は得られる。

$$F_x - i\,F_y = -\frac{i\,\rho}{2}\oint_M \left(\frac{d}{d\,z}\,F\right)^2 dz = \frac{2\,\pi\,m^2\,\rho\,A^2}{R^3 - A^2\,R}$$

ここで $A < R$ であるから、物体は円柱外部のわき出しと引き合っている。

例題 5.3.9　円柱の外に置いた二重わき出し

半径：A の円の外の、$z=c=R\,e^{i\,\theta}$ に強さ：μ、方向：α の二重わき出しを置いたときの流れを求める。

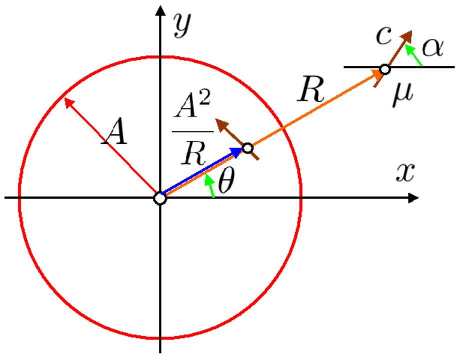


図 5.3.21: 円柱の外に置いた二重わき出し

```
/*  円柱の外に置いた二重わき出し  */
kill(all);
declare(z,complex);
declare(F,complex);
declare(c,complex);
F0:m*log(z-c);
subst([z=A^2/conjugate(z)],F0);
conjugate(%);
F1:m*log(A^2/z-conjugate(c));
FF1:F=F0+F1;
factor(logcontract(%));
F11:factor(F1);
F2:-m*log(z);
F12:F11-F2;
F13:logcontract(F12);
F3:-m*log(-1/(conjugate(c)));
F14:F13-F3;
F15:expand(logcontract(F14));
F4:F=F0+F15+F2+F3;
F5:F=F0+F15+F2;
```

$z=c$ に強さ：m のわき出しを置いたときの複素ポテンシャルは、(5.3.46) 式から、

$$F=m\log\left(z-\frac{A^2}{\bar{c}}\right)+m\log(z-c)-m\log(z) \tag{5.3.47}$$

```
F01:subst([c=c+\delta*%e^(%i*\alpha)],F0);
F02:subst([m=-m],F0);
F03:F01+F02;
expand(logcontract(%));
factor(%);
taylor(%,\delta,0,3);
subst([\delta^2=0,\delta^3=0],%);
F04:-(%e^(%i*alpha)*\mu)/(z-c);
```

(5.3.47) 式の右辺第二項から、円の外の、$z=c$ に強さ：μ、方向：α の二重わき出しの複素ポテンシャルを求める。強さ：m のわき出しを $z=c+e^{i\,\alpha}\,\delta$ に、吸い込みを $z=c$ に置くと、

$$\begin{aligned}F_0=&m\log\left(z-e^{i\,\alpha}\,\delta-c\right)-m\log(z-c)\\=&m\log\left(\frac{z-e^{i\,\alpha}\,\delta-c}{z-c}\right)\end{aligned}$$

上式を δ で Taylor 展開し、高次項を省略し、$\delta\to 0$ で $\delta m\to\mu$ とすると

$$\begin{aligned}F_0=&\frac{e^{i\,\alpha}\,m\,\delta}{c-z}-\frac{\left(e^{i\,\alpha}\right)^2\,m\,\delta^2}{2\,c^2-4\,z\,c+2\,z^2}\\&+\frac{\left(e^{i\,\alpha}\right)^3\,m\,\delta^3}{3\,c^3-9\,z\,c^2+9\,z^2\,c-3\,z^3}+\ldots\\=&-\frac{e^{i\,\alpha}\,\mu}{z-c}\end{aligned} \tag{5.3.48}$$

```
F151:subst([c=c+\delta*%e^(%i*\alpha)],
 F15);
F152:subst([m=-m],F15);
F153:F151+F152;
(logcontract(%));
taylor(%,\delta,0,3);
factor(subst([\delta^2=0,\delta^3=0],%));
F154:%e^(-%i*alpha)*\mu*A^2
  /((conjugate(c))^2*(z-A^2/conjugate(c)));
```

(5.3.47) 式の右辺第一項、第三項から、円定理で、円内に生じる複素ポテンシャルを求める。強さ：m のわき出しを $z=c+e^{i\,\alpha}\,\delta$ に、吸い込みを $z=c$ に置くと、円内に生じる複素ポテンシャルは、

$$F_{11}=m\log\left(z-\frac{A^2}{e^{-i\,\alpha}\,\delta+\bar{c}}\right)-m\log\left(z-\frac{A^2}{\bar{c}}\right)$$

上式を δ で Taylor 展開し、高次項を省略し、$\delta\to 0$ で $\delta m\to\mu$ とすると

$$\begin{aligned}F_1=&\frac{A^2\,m\,\delta}{\bar{c}^2\,e^{i\,\alpha}\,z-A^2\,\bar{c}\,e^{i\,\alpha}}\\&-\frac{\left(2\,A^2\,\bar{c}\,z-A^4\right)\,m\,\delta^2}{2\,\bar{c}^4\left(e^{i\,\alpha}\right)^2z^2-4\,A^2\,\bar{c}^3\left(e^{i\,\alpha}\right)^2z+2\,A^4\,\bar{c}^2\left(e^{i\,\alpha}\right)^2}\\&+\ldots\\=&\frac{e^{-i\,\alpha}\,\mu\,A^2}{\bar{c}^2\,\left(z-\frac{A^2}{\bar{c}}\right)}\end{aligned} \tag{5.3.49}$$

```
F6:F=F04+F154;
F61:subst([c=R*%e^(%i*\theta)],F6);
subst([\alpha=0,\theta=0],F61);
subst([\alpha=%pi/2,\theta=%pi/2],F61);
```

```
subst([\alpha=%pi/2,\theta=0],F61);
subst([\alpha=%pi,\theta=%pi/2],F61);
```

(5.3.48) 式と (5.3.49) 式から二重わき出しの複素ポテンシャルが得られる。

$$\begin{aligned} F =& \frac{e^{-i\,\alpha}\,\mu\,A^2}{\bar{c}^2\,\left(z-\frac{A^2}{\bar{c}}\right)} - \frac{e^{i\,\alpha}\,\mu}{z-c} \\ =& \frac{\mu\,e^{2\,i\,\theta-i\,\alpha}\,A^2}{\left(z-\frac{e^{i\,\theta}\,A^2}{R}\right)\,R^2} - \frac{e^{i\,\alpha}\,\mu}{z-e^{i\,\theta}\,R} \end{aligned} \tag{5.3.50}$$

上式から、円内の二重わき出し強さは A^2/a^2 倍になっている。上式に下式を代入し、

$\alpha=0,\theta=0$、$\alpha=\frac{\pi}{2},\theta=\frac{\pi}{2}$ の複素ポテンシャルはそれぞれ対応している。

$$F = \frac{\mu\,A^2}{\left(z-\frac{A^2}{R}\right)\,R^2} - \frac{\mu}{z-R} \quad (\alpha=0,\theta=0)$$

$$F = \frac{i\,\mu\,A^2}{\left(z-\frac{i\,A^2}{R}\right)\,R^2} - \frac{i\,\mu}{z-i\,R} \quad (\alpha=\frac{\pi}{2},\theta=\frac{\pi}{2})$$

$\alpha=\frac{\pi}{2},\theta=0$、$\alpha=\pi,\theta=\frac{\pi}{2}$ の複素ポテンシャルについてもそれぞれ対応している。

$$F = -\frac{i\,\mu\,A^2}{\left(z-\frac{A^2}{R}\right)\,R^2} - \frac{i\,\mu}{z-R} \quad (\alpha=\frac{\pi}{2},\theta=0)$$

$$F = \frac{\mu}{z-i\,R} + \frac{\mu\,A^2}{\left(z-\frac{i\,A^2}{R}\right)\,R^2} \quad (\alpha=\pi,\theta=\frac{\pi}{2})$$

```
Z1:z=x+%i*y;
subst([Z1],rhs(F61));
PSI1:\Psi=imagpart(%);
subst([A=1,\mu=1,R=1.5,\alpha=0,\theta=0]
  ,PSI1);
subst([x=1,y=0],%);
subst([A=1,\mu=1,R=1.5,\alpha=%pi/2,
  \theta=0],PSI1);
subst([x=1,y=0],%);
subst([A=1,\mu=1,R=1.5,\alpha=0,
  \theta=%pi/2],PSI1);
subst([x=1,y=0],%);
```

流れ関数：Ψ は (5.3.50) 式に次式、

$$z = i\,y + x$$

を代入し、その虚部であり次式となる。

$$\Psi = \frac{\mu\,A^2\left(\frac{\sin(2\,\theta-\alpha)\left(x-\frac{\cos(\theta)\,A^2}{R}\right)}{\left(y-\frac{\sin(\theta)\,A^2}{R}\right)^2+\left(x-\frac{\cos(\theta)\,A^2}{R}\right)^2} - \frac{\cos(2\,\theta-\alpha)\left(y-\frac{\sin(\theta)\,A^2}{R}\right)}{\left(y-\frac{\sin(\theta)\,A^2}{R}\right)^2+\left(x-\frac{\cos(\theta)\,A^2}{R}\right)^2}\right)}{R^2} - \frac{\mu\,(\cos(\alpha)\,(\sin(\theta)\,R-y)+\sin(\alpha)\,(x-\cos(\theta)\,R))}{(y-\sin(\theta)\,R)^2+(x-\cos(\theta)\,R)^2}$$

円柱の右端における流れ関数の値は、$m=1,A=1,a=1.5,\alpha=0,x=1,y=0$ を代入すると、$\Psi=0$ を得る。これをもとに流線を gnuplot を用いて描く。$m=1,A=1,a=1.5,\alpha=0$ として、gnuplot を用いて流線を求めた結果を下記に示す。下記の図から、$x=A^2/a=0.6666,x=1.5$ に二重わき出しがあるのがわかり、境界が円になっている。

```
#!/gnuplot
set xrange [-2:4]
set yrange [-2:2]
set isosamples 150,150
set contour base
set cntrparam levels incremental -20,0.05
 ,20
unset key
unset surface
set view map
splot y/(y**2+(x-1.5)**2)
  -(0.44444444444444*y)/(y**2
  +(x-0.66666666666667)**2)
#    EOF
```

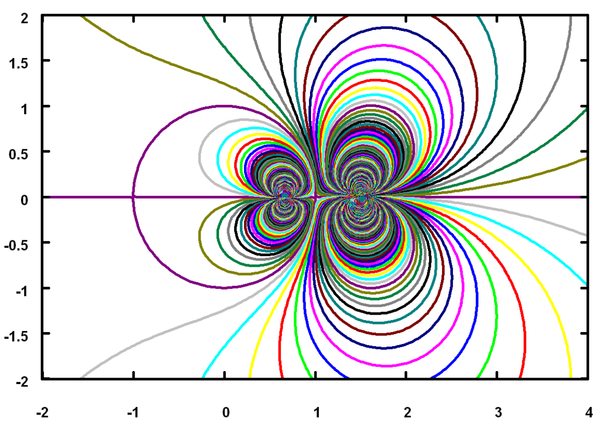


図 5.3.22: 円柱の外に置いた二重わき出しの流線 ($\alpha=0,\theta=0$)

また、$\alpha=\pi/2,\theta=0$、$\alpha=0,\theta=\pi/2$ についても下記に示す。

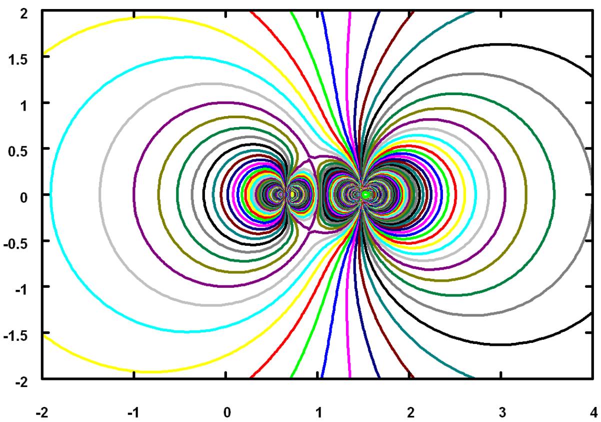


図 5.3.23: 円柱の外に置いた二重わき出しの流線 ($\alpha=\pi/2,\theta=0$)

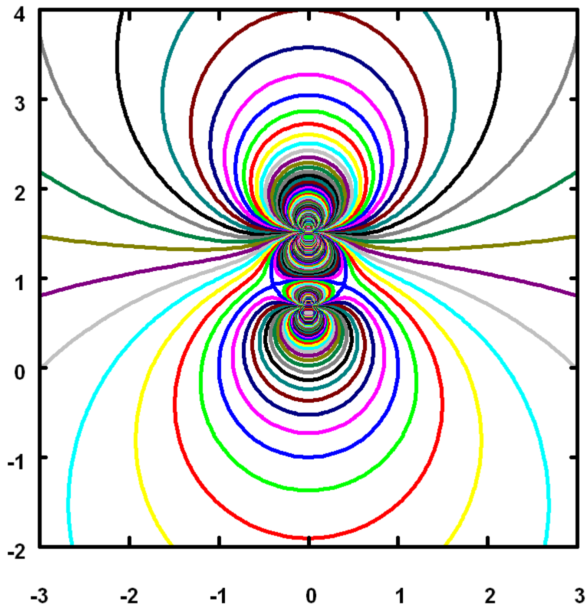


図 5.3.24: 円柱の外に置いた二重わき出しの流線 ($\alpha=0,\theta=\pi/2$)

円柱および円柱外部のわき出しを含む大きな円：S、円柱外部のわき出しを囲む小さな円：M とすると物体に作用する力は (5.1.61) 式から下記となる。

$$F_x-i\,F_y=\frac{i\,\rho}{2}\oint_S\left(\frac{d}{d\,z}\,F\right)^2dz-\frac{i\,\rho}{2}\oint_M\left(\frac{d}{d\,z}\,F\right)^2dz$$

大きな円：S の積分は零となり、円柱外部のわき出しを囲む小さな円：M の積分が残る。(5.3.50) 式から、

```
DF5:'diff(F,z,1)=diff(rhs(subst([\theta=0]
  ,F61)),z,1);
DF52:lhs(DF5)^2=expand(rhs(DF5)^2);
F[x]-%i*F[y]=-\rho*%i/2*(2*%pi*%i)
  *residue(rhs(DF52),z,R);
FXY1:factor(%);
F[x]=realpart(rhs(FXY1));
F[y]=-imagpart(rhs(FXY1));
```

$\theta=0$ のとき、

$$\frac{d}{d\,z}\,F=\frac{e^{i\,\alpha}\,\mu}{(z-R)^2}-\frac{e^{-i\,\alpha}\,\mu\,A^2}{\left(z-\frac{A^2}{R}\right)^2R^2}$$

留数定理から下記積分は得られる。

$$F_x-i\,F_y=-\frac{i\,\rho}{2}\oint_M\left(\frac{d}{d\,z}\,F\right)^2dz=\frac{4\,\pi\,\mu^2\,\rho\,A^2\,R}{(R-A)^3\,(R+A)^3}$$

$$F_x=\frac{4\,\pi\,\mu^2\,\rho\,A^2\,R}{(R-A)^3\,(R+A)^3},\quad F_y=0$$

```
DF5:'diff(F,z,1)=diff(rhs(subst(
 [\theta=%pi/2],F61)),z,1);
DF52:lhs(DF5)^2=expand(rhs(DF5)^2);
F[x]-%i*F[y]=-\rho*%i/2*(2*%pi*%i)
  *residue(rhs(DF52),z,%i*R);
FXY1:factor(%);
F[x]=realpart(rhs(FXY1));
F[y]=-imagpart(rhs(FXY1));
```

$$F_x=0,\quad F_y=\frac{4\,\pi\,\mu^2\,\rho\,A^2\,R}{(R-A)^3\,(R+A)^3}$$

上記から、円柱は外部の二重わき出しの方へ引かれている。

例題 5.3.10　一様流中に置かれた二つの円柱に作用する相互力

一様流の流速：U の中に半径：A の円柱を原点に、半径：B の円柱を $z=c=R\,e^{i\,\theta}$ に置いたときの流れを求める。

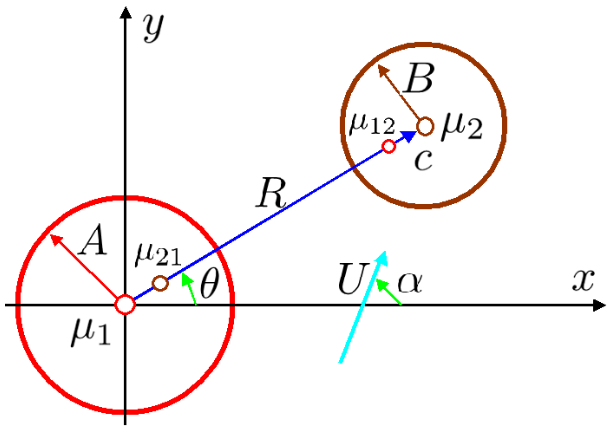


図 5.3.25: 一様流中に置かれた二つの円柱

```
/*  2つの円柱の相互干渉  */
kill(all);
declare(z,complex);
declare(F,complex);
declare(c,complex);
F0:U*z*%e^(-%i*\alpha);
F1:(%e^(-%i*alpha)*mu*A^2)/(conjugate(c)^2
  *(z-A^2/conjugate(c)))
  -(%e^(%i*alpha)*mu)/(z-c);
F12:subst([\mu=\mu[2]],F1);
MU21:\mu[21]=-\mu[2]*%e^(-%i*alpha)*A^2
  /(conjugate(c)^2);
subst([\mu=\mu[1],A=B,c=-c],F1);
F11:subst([z=z-c],%);
MU12:\mu[12]=-mu[1]*%e^(-%i*alpha)*B^2
  /(conjugate(c)^2);
MU1:\mu[1]=-A^2*U;
MU2:\mu[2]=-B^2*U;
F2:F=F0+F11+F12;
F21:subst([MU1,MU2,\alpha=0],F2);
F22:subst([c=R*%e^(%i*\theta)],F21);
F23:F=-(A^2*B^2*U)/(conjugate(c)^2*(z-c))
  -(A^2*B^2*U)/(conjugate(c)^2*(z))
  +(B^2*U)/(z-c)+(A^2*U)/z+z*U;
F24:subst([c=R*%e^(%i*\theta)],F23);
```

一様流の複素ポテンシャル：F_0 は (5.1.29) 式から、

$$F_0=e^{-i\,\alpha}\,z\,U \tag{5.3.51}$$

一様流中に円柱を置いたときの複素関数は円定理を用いて下記の (5.3.10) 式から、

$$F=\frac{e^{i\,\alpha}\,A^2\,U}{z}+e^{-i\,\alpha}\,z\,U$$

上式から、半径：A の円柱の二重わき出しの強さ：μ_1、半径：B の円柱の二重わき出しの強さ：μ_2 は下記となる。

$$\mu_1=-A^2\,U,\quad \mu_2=-B^2\,U \tag{5.3.52}$$

一様流中に半径：A の円柱、半径：B の円柱がある場合のは、二つの二重わき出しで表現できる。この相互干渉は円柱の外に置いた二重わきだしにより下記の (5.3.50) 式から得られる。

$$F=\frac{e^{-i\,\alpha}\,\mu\,A^2}{\bar{c}^2\,\left(z-\frac{A^2}{\bar{c}}\right)}-\frac{e^{i\,\alpha}\,\mu}{z-c}$$

半径：A の円柱の外、$z=c$ に置かれた半径：B の二重わき出しの複素ポテンシャルは、上式から、

$$F_2=\frac{\mu_2\,e^{-i\,\alpha}\,A^2}{\bar{c}^2\,\left(z-\frac{A^2}{\bar{c}}\right)}-\frac{\mu_2\,e^{i\,\alpha}}{z-c} \tag{5.3.53}$$

上式から、半径：A の円柱の中に置いた二重わき出しの強さ：μ_{21} は、

$$\mu_{21}=-\frac{\mu_2\,e^{-i\,\alpha}\,A^2}{\bar{c}^2}$$

同様に、原点に置いた半径：B の円柱の外、$z=-c$ に置かれた半径：A の二重わき出しの複素ポテンシャルは、上式から、

$$F=\frac{\mu_1\,e^{-i\,\alpha}\,B^2}{\bar{c}^2\,\left(\frac{B^2}{\bar{c}}+z\right)}-\frac{\mu_1\,e^{i\,\alpha}}{z+c}$$

上式から、$z=c$ に置かれた半径：B の円柱の外、原点に置かれた半径：A の二重わき出しの複素ポテンシャルは、

$$F_1=\frac{\mu_1\,e^{-i\,\alpha}\,B^2}{\bar{c}^2\,\left(\frac{B^2}{\bar{c}}+z-c\right)}-\frac{\mu_1\,e^{i\,\alpha}}{z} \tag{5.3.54}$$

上式から、半径：B の円柱の中に置いた二重わき出しの強さ：μ_{12} は、

$$\mu_{12}=-\frac{\mu_1\,e^{-i\,\alpha}\,B^2}{\mathrm{conjugate}\,(c)^2}$$

一様流中に半径：A の円柱を原点に、半径：B の円柱を $z=c$ に置いたときの複素ポテンシャルは、(5.3.51) 式、(5.3.53) 式、(5.3.54) 式から、

$$\begin{aligned}F=&e^{-i\,\alpha}\,z\,U+\frac{\mu_1\,e^{-i\,\alpha}\,B^2}{\bar{c}^2\,\left(\frac{B^2}{\bar{c}}+z-c\right)}+\frac{\mu_2\,e^{-i\,\alpha}\,A^2}{\bar{c}^2\,\left(z-\frac{A^2}{\bar{c}}\right)}\\&-\frac{\mu_2\,e^{i\,\alpha}}{z-c}-\frac{\mu_1\,e^{i\,\alpha}}{z}\end{aligned}$$

円柱間の距離：R と円柱の半径：A,B の関係が $R>>A, R>>B$ のとき、円柱の中に置いた鏡像の二重わき出

しの位置が円柱の中心に一致するとし、$\alpha=0$、(5.3.52) 式および $c=R\,e^{i\,\theta}$ を代入すると、

$$\begin{aligned}F=&-\frac{A^2\,B^2\,U}{\overline{c}^2\,(z-c)}-\frac{A^2\,B^2\,U}{\overline{c}^2\,z}\\&+\frac{B^2\,U}{z-c}+\frac{A^2\,U}{z}+z\,U\\=&-\frac{e^{2\,i\,\theta}\,A^2\,B^2\,U}{R^2\,(z-e^{i\,\theta}\,R)}+\frac{B^2\,U}{z-e^{i\,\theta}\,R}\\&-\frac{e^{2\,i\,\theta}\,A^2\,B^2\,U}{z\,R^2}+\frac{A^2\,U}{z}+z\,U\end{aligned}\tag{5.3.55}$$

```
subst([z=x+%i*y],F24);
PS1:\Psi=imagpart(rhs(%));
subst([A=1,B=1,R=4,U=1,\theta=0],PS1);
subst([x=1,y=0],%);
subst([A=1,B=1,R=4,U=1,\theta=%pi/4],PS1);
subst([x=1,y=0],%);
subst([A=1,B=1,R=4,U=1,\theta=%pi/2],PS1);
subst([x=1,y=0],%);
```

流れ関数：Ψ は上式の虚部であり、

$$z=i\,y+x$$

を代入し、次式となる。

$$\begin{aligned}\Psi=&-\frac{A^2\,B^2\,\left(\cos\left(2\,\theta\right)\,\left(\sin\left(\theta\right)\,R-y\right)+\sin\left(2\,\theta\right)\,\left(x-\cos\left(\theta\right)\,R\right)\right)\,U}{R^2\,\left(\left(y-\sin\left(\theta\right)\,R\right)^2+\left(x-\cos\left(\theta\right)\,R\right)^2\right)}\\&+\frac{B^2\,\left(\sin\left(\theta\right)\,R-y\right)\,U}{\left(y-\sin\left(\theta\right)\,R\right)^2+\left(x-\cos\left(\theta\right)\,R\right)^2}\\&-\frac{\left(\sin\left(2\,\theta\right)\,x-\cos\left(2\,\theta\right)\,y\right)\,A^2\,B^2\,U}{\left(y^2+x^2\right)\,R^2}-\frac{y\,A^2\,U}{y^2+x^2}+y\,U\end{aligned}$$

円柱の右端における流れ関数の値は、$A=1, B=1, R=4, U=1, \theta=0$ を代入し、これをもとに流線を gnuplot を用いて描く。また、$A=1, B=1, R=4, U=1, \theta=\frac{\pi}{2}$ についても gnuplot を用いて流線を求めた結果を下記に示す。

```
#!/gnuplot
set xrange [-5:5]
set yrange [-3:7]
set isosamples 150,150
set contour base
set cntrparam levels incremental
  -19.75,0.1,20
unset key
unset surface
set view map
```

```
splot -(17*y)/(16*(y**2+x**2))+y
  -(y-4)/(16*((y-4)**2+x**2))
  +(4-y)/((y-4)**2+x**2)
#    EOF
```

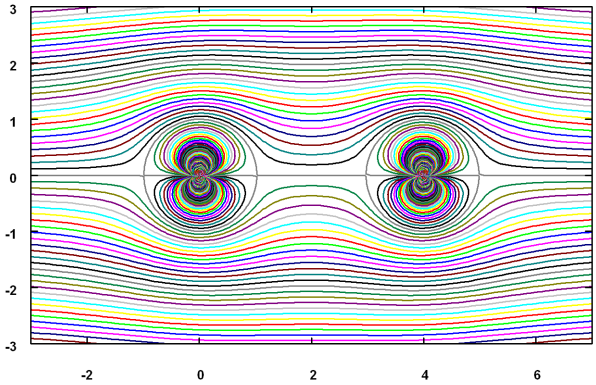


図 5.3.26: 一様流中に置かれた二つの円柱 ($\theta=0$)

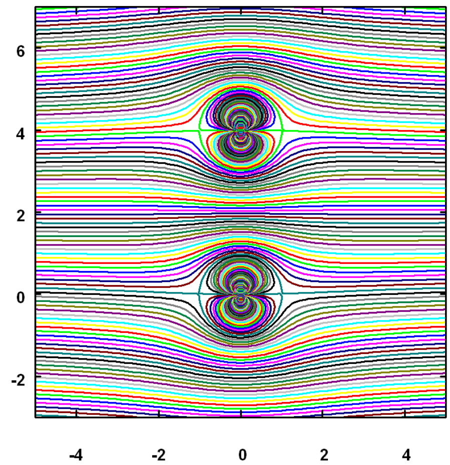


図 5.3.27: 一様流中に置かれた二つの円柱 ($\theta=\frac{\pi}{2}$)

```
F3:F=rest(rhs(F24),2);
DF3:'diff(F,z,2)=diff(rhs(F3),z,2);
FXY:F[x]-%i*F[y]=-(-2*%pi*\rho*(\mu[2]
  +\mu[12])*(subst([z=R*%e^(%i*\theta)
  ,c=R*%e^(%i*\theta)],rhs(DF3))));
subst([MU12,MU1,MU2,\alpha=0,c=R
  *%e^(%i*\theta)],FXY);
expand(factor(%));
lhs(%)=rest(rhs(%),-1);
FXY1:factor(%);
FXY11:subst([\theta=0],FXY1);
F[x]=realpart(rhs(FXY11));
F[y]=-imagpart(rhs(FXY11));
FXY12:subst([\theta=%pi/2],FXY1);
F[x]=realpart(rhs(FXY12));
F[y]=-imagpart(rhs(FXY12));
```

円柱：A に作用する力は、円柱：A の外部にある二重わき出しに作用する力を求めることができる。二重わき出しに作用する力は、(5.3.5) 式から

$$F_x - i\,F_y = -2\,\pi\,e^{i\,\beta}\,\mu\,\rho\,\left(\frac{d^2}{d\,z^2}\,f\,(z)\Big|_{z=c}\right)$$

(5.3.55) 式において、$z=c$ における二重わき出しを除いた複素ポテンシャル：$f(z)$ は、

$$f(z) = -\frac{e^{2\,i\,\theta}\,A^2\,B^2\,U}{z\,R^2} + \frac{A^2\,U}{z} + z\,U$$

$$\frac{d^2}{d\,z^2}\,f(z) = \frac{2\,A^2\,U}{z^3} - \frac{2\,e^{2\,i\,\theta}\,A^2\,B^2\,U}{z^3\,R^2}$$

円柱：A に作用する力は、$z=c$ における二重わき出しの作用反作用から下記となり、$z=R\,e^{i\,\theta}$ を代入すると、

$$\begin{aligned}F_x - i\,F_y =& -\left(-2\,\pi\,e^{i\,\beta}\,\mu\,\rho\,\left(\frac{d^2}{d\,z^2}\,f\,(z)\Big|_{z=c}\right)\right)\\ =&2\,\pi\,\left(\mu_{12}+\mu_2\right)\,\rho\,\left(\frac{2\,e^{-3\,i\,\theta}\,A^2\,U}{R^3} - \frac{2\,e^{-i\,\theta}\,A^2\,B^2\,U}{R^5}\right)\end{aligned}$$

μ_2, μ_{12} を代入し、R^7 の項は小さいとして省き、整理すると

$$\begin{aligned}F_x - i\,F_y =&2\,\pi\,\rho\,\left(\frac{2\,e^{-3\,i\,\theta}\,A^2\,U}{R^3} - \frac{2\,e^{-i\,\theta}\,A^2\,B^2\,U}{R^5}\right)\left(\frac{e^{2\,i\,\theta}\,A^2\,B^2\,U}{R^2} - B^2\,U\right)\\ =& -\frac{4\,\pi\,\rho\,e^{-3\,i\,\theta}\,A^2\,B^2\,U^2}{R^3} + \frac{4\,\pi\,\rho\,e^{-i\,\theta}\,A^2\,B^4\,U^2}{R^5} + \frac{4\,\pi\,\rho\,e^{-i\,\theta}\,A^4\,B^2\,U^2}{R^5} - \frac{4\,\pi\,\rho\,e^{i\,\theta}\,A^4\,B^4\,U^2}{R^7}\\ =& -\frac{4\,\pi\,\rho\,e^{-3\,i\,\theta}\,A^2\,B^2\,\left(R^2 - e^{2\,i\,\theta}\,B^2 - e^{2\,i\,\theta}\,A^2\right)\,U^2}{R^5}\end{aligned} \tag{5.3.56}$$

$\theta=0$ では、円柱：A に作用する力は下記となり、お互いに反発しあう力となる。

$$F_x = -\frac{4\,\pi\,\rho\,A^2\,B^2\,\left(R^2 - B^2 - A^2\right)\,U^2}{R^5}, \quad F_y = 0$$

$\theta=\frac{\pi}{2}$ では、円柱：A に作用する力は下記となり、お互いに引きあう力となる。

$$F_x = 0, \quad F_y = \frac{4\,\pi\,\rho\,A^2\,B^2\,\left(R^2 + B^2 + A^2\right)\,U^2}{R^5}$$

例題 5.3.11　写像：コ型の流路

下記に示すコ型の流路内の流れについて調べる。例題 5.3.55 に示す Schwarz-Christoffel の公式：(5.1.38) 式、106 頁を用いて、ζ 平面では ξ 方向に一様な流れ、z 平面ではコ型の流路幅：A の流路となる写像関数を求めて、その流場を求める。

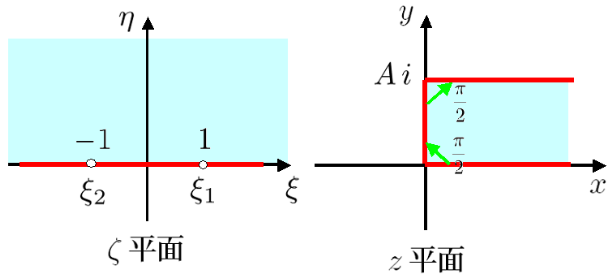


図 5.3.28: コ型の流路

```
/*  コ型の流路  */
kill(all);
declare(z,complex);
declare(\zeta,complex);
declare(F,complex);
DZ4:'diff(z,\zeta,1)=C[1]*product((zeta
  -zeta[k])^(-\delta[k]/%pi),k,1,K);
subst([K=2],DZ4),simpproduct;
DZ41:subst([\delta[1]=%pi/2,\delta[2]=
 %pi/2,\zeta[1]=1,\zeta[2]=-1],%);
Z1:z=integrate(rhs(DZ41),\zeta)+C[2];
radcan(factor(%));
Z2:subst([C[2]=C[2]-C[1]*log(2)],%);
```

(5.1.38) 式から Schwarz-Christoffel の公式の写像関数は、

$$\frac{d}{d\,\zeta}\,z = C_1\prod_{k=1}^{K}\frac{1}{(\zeta-\zeta_k)^{\frac{\delta_k}{\pi}}}$$

ここで、$K=2$ とし、$\zeta_1=1,\zeta_2=-1$、各々で折り曲げ、その角度は $\delta_1=\frac{\pi}{2},\delta_2=\frac{\pi}{2}$ であるから、

$$\frac{d}{d\,\zeta}\,z = \frac{C_1}{\sqrt{\zeta-1}\,\sqrt{\zeta+1}} \tag{5.3.57}$$

上式を積分し、

$$\begin{aligned}
z = &\int \frac{C_1}{\sqrt{\zeta-1}\,\sqrt{\zeta+1}}d\zeta\\
=&C_1\log\left(2\sqrt{\zeta^2-1}+2\,\zeta\right)+C_2\\
=&C_1\log\left(\sqrt{\zeta-1}\,\sqrt{\zeta+1}+\zeta\right)+C_1\log(2)+C_2\\
=&C_1\log\left(\sqrt{\zeta-1}\,\sqrt{\zeta+1}+\zeta\right)+C_2
\end{aligned} \tag{5.3.58}$$

```
subst([\zeta=1],Z2);
subst([z=0],%);
C2:solve(%,C[2])[1];
Z3:subst([\zeta=-1],Z2);
LG1:log(-1)=%pi*%i;
subst([LG1,C2,z=A*%i],Z3);
C1:solve(%,C[1])[1];
Z4:subst([C1,C2],Z2);
Z5:subst([log(sqrt(zeta-1)*sqrt(zeta+1)
    +zeta)=acosh(\zeta)],Z4);
ZT1:solve(%,\zeta)[1];
F1:F=U*\zeta;
subst([ZT1],F1);
subst([z=x+%i*y],%);
PS1:\Psi=imagpart(rhs(%));
subst([U=1,A=1,%pi=3.14159],PS1);
```

折れ点である $\zeta=1,z=0$ を (5.3.58) 式に代入し、

$$C_2=0$$

もう一方の折れ点である $\zeta=-1$ を (5.3.58) 式に代入し、

$$z=C_2+\log(-1)\,C_1$$

$z=A\,i,\log(-1)=i\,\pi$ であるから、

$$C_1=\frac{A}{\pi}$$

以上から写像関数は、

$$z=\frac{A\log\left(\sqrt{\zeta-1}\,\sqrt{\zeta+1}+\zeta\right)}{\pi}$$

ここで、

$$\log\left(\sqrt{\zeta-1}\,\sqrt{\zeta+1}+\zeta\right)=\operatorname{acosh}(\zeta)$$

であるから、写像関数は、

$$z=\frac{A}{\pi}\operatorname{acosh}(\zeta)\,,\quad \zeta=\cosh\left(\frac{\pi\,z}{A}\right) \tag{5.3.59}$$

ζ 平面では ξ 方向に一様な流れとする。この複素ポテンシャル：F は下記となる。

$$F=U\,\zeta$$

z 平面では上式に写像関数を代入し、

$$F=\cosh\left(\frac{\pi\,z}{A}\right)\,U \tag{5.3.60}$$

$z=i\,y+x$ を上式に代入し、その虚部から流れ関数：Ψ は、

$$\Psi=\sinh\left(\frac{\pi\,x}{A}\right)\,\sin\left(\frac{\pi\,y}{A}\right)\,U$$

上式に、$U=1,A=1,\pi=3.14159$ を代入し、流れの様子を gnuplot を用いて描く。

$$\Psi=\sinh(3.14159\,x)\,\sin(3.14159\,y)$$

```
#!/gnuplot
set xrange [-1:2]
set yrange [-1:2]
set isosamples 150,150
set contour base
set cntrparam levels incremental 0,0.5,100
unset key
unset surface
set view map
splot sinh(3.14159*x)*sin(3.14159*y)
#    EOF
```

下記に、コ型の流路の流線を示す。

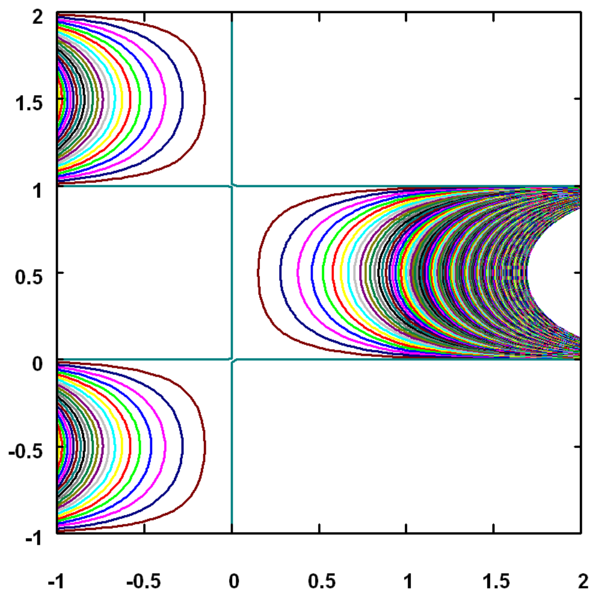


図 5.3.29: コ型の流路

例題 5.3.12　写像：平行流路

下記に示す平行流路内の流れについて調べる。例題5.3.55に示す Schwarz-Christoffel の公式：(5.1.38) 式、106 頁を用いて、z 平面で平行の流路幅：A の流路となる写像関数を求めて、その流場を求める。

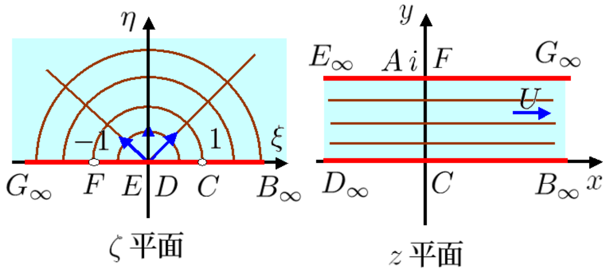


図 5.3.30: 平行流路

```
/*  平行流路  */
kill(all);
declare(z,complex);
declare(\zeta,complex);
declare(F,complex);
DZ4:'diff(z,\zeta,1)=C[1]*product((zeta
  -zeta[k])^(-\delta[k]/%pi),k,1,K);
subst([K=1],DZ4),simpproduct;
DZ41:subst([\delta[1]=%pi,\zeta[1]=0],%);
Z1:z=integrate(rhs(DZ41),\zeta)+C[2];
subst([\zeta=1],Z1);
subst([z=0],%);
C2:solve(%,C[2])[1];
Z3:subst([\zeta=-1],Z1);
LG1:log(-1)=%pi*%i;
subst([LG1,C2,z=A*%i],Z3);
C1:solve(%,C[1])[1];
Z4:subst([C1,C2],Z1);
ZT1:solve(%,\zeta)[1];
F1:F=m*log(\zeta);
F2:subst([ZT1],F1);
F11:F=U*z;
rhs(F2)=rhs(F11);
M1:solve(%,m)[1];
F11:subst([M1],F1);
F2:subst([ZT1,M1],F2);
subst([z=x+%i*y],%);
PS1:\Psi=imagpart(rhs(%));
```

(5.1.38) 式から Schwarz-Christoffel の公式の写像関数は、

$$\frac{d}{d\,\zeta}\,z = C_1 \prod_{k=1}^{K} \frac{1}{(\zeta-\zeta_k)^{\frac{\delta_k}{\pi}}}$$

ここで、境界面を D,E 点で折り返すようにするため、$K=1$ とし、$\zeta_1=0$ で折り曲げ、その角度は $\delta_1=\pi$ であるから、

$$\frac{d}{d\,\zeta}\,z = \frac{C_1}{\zeta} \tag{5.3.61}$$

上式を積分し、

$$z = C_1 \log(\zeta) + C_2 \tag{5.3.62}$$

$\zeta=1,-1$ で流路幅:A の条件を満足させる。$\zeta=1, z=0$ を (5.3.62) 式に代入し、

$$C_2 = 0$$

$\zeta=-1$ を (5.3.62) 式に代入し、

$$z = C_2 + \log(-1)\;C_1$$

$z=A\,i, \log(-1)=i\,\pi$ であるから、

$$C_1 = \frac{A}{\pi}$$

以上から写像関数は、

$$z = \frac{A\log(\zeta)}{\pi}, \quad \zeta = e^{\frac{\pi\,z}{A}} \tag{5.3.63}$$

z 平面で x 軸方向の流れを生むには、ζ 平面で D,E 点にわき出しを置く必要がある。そこで、複素ポテンシャル：F は、

$$F = m\log(\zeta)$$

(5.3.63) 式を上式に代入し、

$$F = \frac{\pi\,m\,z}{A}$$

これは x 軸方向の一様流である。一様流の流速：U とわき出し強さ：m との関係は、

$$m = \frac{A\,U}{\pi}$$

例題 5.3.13　自由流線：平面壁のスリットから出る噴流

下記に示す間隔：A の平面壁のスリットから出る噴流の形状を求める。

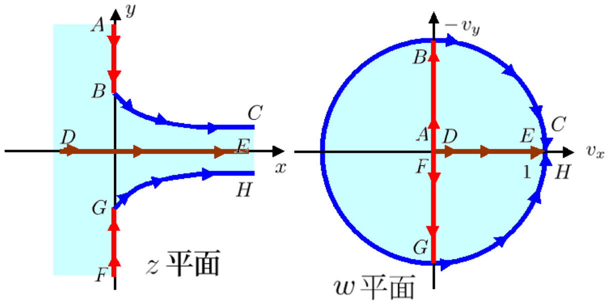


図 5.3.31: 平面壁のスリットから出る噴流

```
/*　平面壁のスリットから出る噴流　*/
kill(all);
declare(z,complex);
declare(w,complex);
declare(\zeta,complex);
declare(F,complex);
assume(\theta>=0 and \theta<=%pi/2);
assume(cabs(w)<=1);
DFZ1:w='diff(F,z,1);
DFZ2:'diff(z,F,1)=1/w;
F0:F=m*log(z-(1+\delta))+m*log(z-1/
  (1+\delta))-m*log(z);
lhs(F0)=limit(rhs(F0),\delta,0);
F1:F=m/2*log(w)-m*log(w-1)+m/2*log(w)
  -m*log(w+1);
F2:logcontract(F1);
DF2:'diff(F,w,1)=diff(rhs(F2),w,1);
DZ1:'diff(z,w,1)='diff(z,F,1)*'diff(F,w,1);
DZ2:factor(lhs(DZ1)=subst([DFZ2,DF2]
  ,rhs(DZ1)));
z=integrate(rhs(DZ2),w)+C;
Z1:subst([w-1=1-w],%);
subst([w=%e^(%i*\theta)],Z1);
Z2:logcontract(%);
```

下記の複素速度：w を導入する。ここで複素ポテンシャル：F、流速：q、流向：θ、流速の x,y 軸の各コンポネント：v_x, v_y とする。

$$w=\frac{d}{d\,z}F=v_x-i\,v_y=q\,e^{i\,\theta},\quad \frac{d}{d\,F}z=\frac{1}{w} \tag{5.3.64}$$

ここで流体内圧力：p、大気圧：p_0、自由流線上の流速：U とすると、下記の Bernoulli の定理：(2.8.4) 式、(30 ページ) から、

$$\frac{p}{\rho}+\frac{q^2}{2}=\frac{p_0}{\rho}+\frac{U^2}{2}$$

自由流線上の流速：U は一定となる。今、$U=1$ とすると、上図に示す w 平面では、自由流線は単位円となる。このことを考慮して、z 平面の平面壁のスリットから出る噴流の速度の関係を w 平面に描いてみる。

1) A-B-C：平面壁：AB では、スリットから十分遠い：A での流速は $v_x=0, v_y=0$ で w 平面の原点に位置する。スリットに近づくに従い $v_x=0, -1<v_y<0$ で流速が増加し、スリット：B で自由流線に繋がり、$v_x=0, v_y=-1$ で w 平面の i に位置する。BC では周囲圧力が大気圧となり、一定流速：$U=1$ で $v_x>0, v_y<0$ から単位円上を時計方向にまわり、噴流がスリットから十分遠いときには $v_x=1, v_y=0$ の w 平面の 1 の C に至る。

2) D-E：スリットから十分遠い：D での流速は $v_x=0, v_y=0$ で w 平面の原点に位置する。x 軸上を流れるので、流速は $v_x<1, v_y=0$ で流速が増加し、噴流がスリットから十分遠いときには $v_x=1, v_y=0$ で w 平面の 1 の E に至る。

3) F-G-H：平面壁：FG では、スリットから十分遠い：F での流速は $v_x=0, v_y=0$ で w 平面の原点に位置する。スリットに近づくに従い $v_x=0, 0<v_y<1$ で流速が増加し、スリット：G で自由流線に繋がり、$v_x=0, v_y=1$ で w 平面の $-i$ に位置する。GH では周囲圧力が大気圧となり、一定流速：$U=1$ で $v_x>0, v_y>0$ から単位円上を反時計方向にまわり、噴流がスリットから十分遠いときには $v_x=1, v_y=0$ の w 平面の 1 の H に至る。

以上から w 平面で原点:$w=0$ にわき出しがあり、$w=1$ に吸い込みがある流れとなる。また、w 平面で自由流線は単位円となることから、単位円が流線とならねばならない。強さ：m のわき出しを単位円の少し外：$w=1+\delta$ に置く。円定理を用いて、(5.3.46) 式から、下記の単位円上に置いたわき出しと原点に置いた吸い込みの複素ポテンシャルとなる。

$$\begin{aligned}F=&\lim_{\delta\to 0}\left(m\log\left(z-\frac{1}{\delta+1}\right)+m\log(z-\delta-1)\right.\\&\left.-m\log(z)\right)\\=&2\,m\log(z-1)-m\log(z)\end{aligned} \tag{5.3.65}$$

左右対称性から、上式から $z=1,-1$ に吸い込みを、

$z=0$ にわき出しを置いた複素ポテンシャルは、

$$F=-m\log(w+1)+m\log(w)-m\log(w-1)$$
$$=m\log\left(\frac{w}{w^2-1}\right) \tag{5.3.66}$$

w 平面の流れ場を調べるため、上式から流れ関数：Ψ を下記にように求める。

```
subst([w=x+%i*y,m=1],F2);
PS1:\Psi=imagpart(rhs(%));
subst([x=0,y=1],PS1);
subst([x=0,y=-1],PS1);
```

$$\Psi=-\operatorname{atan2}\left(\frac{y}{\sqrt{y^2+(x+1)^2}},\frac{x+1}{\sqrt{y^2+(x+1)^2}}\right)$$
$$-\operatorname{atan2}\left(\frac{y}{\sqrt{y^2+(x-1)^2}},\frac{x-1}{\sqrt{y^2+(x-1)^2}}\right)$$
$$+\operatorname{atan2}(y,x)$$

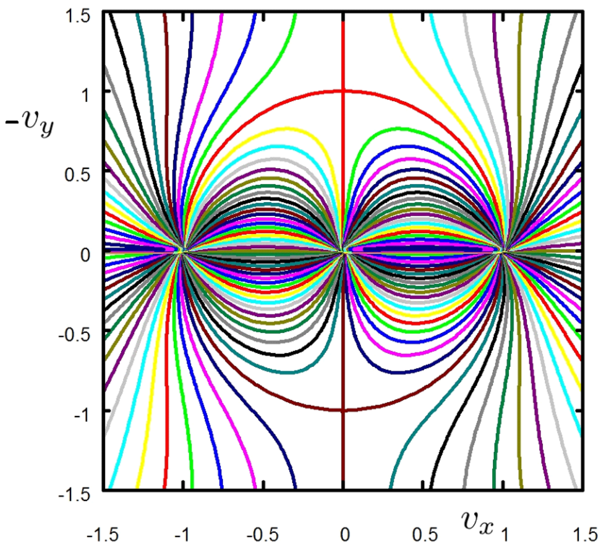


図 5.3.32: 平面壁のスリットから出る噴流の w 平面の流れ

流れ図を上図に示す。単位円上に置いたわき出しと原点に置いた吸い込みが表現されている。(5.3.66) 式を w で微分し、

$$\frac{d}{dw}F=\frac{m\,(w^2-1)\left(\frac{1}{w^2-1}-\frac{2w^2}{(w^2-1)^2}\right)}{w} \tag{5.3.67}$$

ところで、上式と $\frac{d}{dF}z$ の (5.3.64) 式から、

$$\frac{d}{dw}z=\left(\frac{d}{dF}z\right)\left(\frac{d}{dw}F\right)$$
$$=-\frac{m\,(w^2+1)}{(w-1)\,w^2\,(w+1)}$$

上式を積分し、$|w|\le 0$ であるから、下記となり、z 平面と w 平面の相関が得られた。

$$z=\int-\frac{m\,(w^2+1)}{(w-1)\,w^2\,(w+1)}dw$$
$$=C-m\left(-\log(w+1)+\frac{1}{w}+\log(1-w)\right) \tag{5.3.68}$$

```
E1:(%e^(%i*\theta)+1)/(%e^(%i*\theta)-1);
E2:E1=trigrat(E1);
E3:lhs(E2)=subst([cos(\theta/2)=cot(
 \theta/2)*sin(\theta/2)],rhs(E2));
expand(radcan(subst([E3],Z2)));
Z3:subst([p=%pi/2],%);
Z31:subst([\theta=%pi/2],Z3);
X0:realpart(rhs(Z31))=0;
Y0:imagpart(rhs(Z31))=A/2;
M1:solve(Y0,m)[1];
Z4:subst([X0,M1],Z3);
X1:x=realpart(rhs(Z4));
Y1:y=imagpart(rhs(Z4));
y=first(rhs(Y1))+last(rhs(Y1));
Y2:factor(%);
subst([y=B/2,\theta=0],Y2);
%*2/A;
X3:subst([A=2,\theta=t],rhs(X1));
Y3:subst([A=2,\theta=t],rhs(Y2));
plot2d([parametric,X3,Y3,[t,0.0001,1.571]
  ,[nticks,100]],[x,-1,3],[y,0,2]
  ,[xlabel, "x"],[ylabel, "y"]);
```

自由流線の形状を求める。自由流線上では、w 平面で単位円上であるから、$w=e^{i\theta}$ を (5.3.68) 式に代入し、

$$z=e^{-i\theta}\left(e^{i\theta}C+m\,e^{i\theta}\log\left(-\frac{e^{i\theta}+1}{e^{i\theta}-1}\right)-m\right)$$

log 内の $\frac{e^{i\theta}+1}{e^{i\theta}-1}$ を分子分母とも $e^{\frac{i\theta}{2}}$ で割り、整理する。ここで $p=\frac{\pi}{2}$ とする。

$$\frac{e^{i\theta}+1}{e^{i\theta}-1}=-\frac{i\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}=-\frac{e^{ip}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}=-e^{ip}\cot\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

上式を代入し、$p=\frac{\pi}{2}$ から、

$$z=C+m\log\left(\cot\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)-m\,e^{-i\theta}+i\,m\,p$$
$$=C+m\log\left(\cot\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)-m\,e^{-i\theta}+\frac{i\,\pi\,m}{2}$$

スリット部では、$\theta=\frac{\pi}{2}$ を上式に代入し、$z=i\frac{A}{2}$ から、

$$z=C+\frac{i\,\pi\,m}{2}+i\,m$$

次の結果を得る。

$$C = 0, \quad m = \frac{A}{\pi + 2}$$

上式を代入し、自由流線の形状は、

$$z = \frac{\log\left(\cot\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)\, A}{\pi + 2} - \frac{e^{-i\,\theta}\, A}{\pi + 2} + \frac{i\,\pi\, A}{2\,\left(\pi + 2\right)}$$

上式の実部、虚部から、

$$x = \frac{\log\left(\left|\cot\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|\right)\, A}{\pi + 2} - \frac{\cos\left(\theta\right)\, A}{\pi + 2}$$

$$y = \frac{\sin\left(\theta\right)\, A}{\pi + 2} + \frac{\pi\, A}{2\,\left(\pi + 2\right)}$$

噴流の下流における幅：B とし、y の式に代入し、

$$y = \frac{B}{2}, \theta = 0 \rightarrow \frac{B}{A} = \frac{\pi}{\pi + 2} \approx 0.611$$

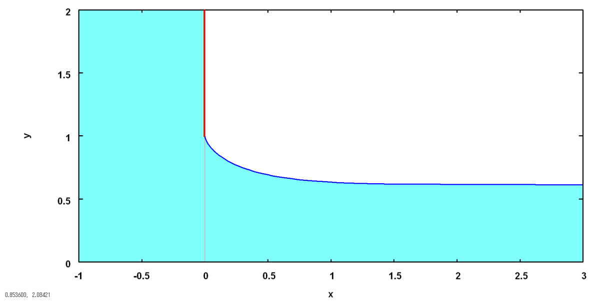


図 5.3.33: 平面壁のスリットから出る噴流

例題 5.3.14　自由流線：Borda の吹き出し口

下記に示す開口幅：A の吹き出し口から出る噴流の形状を求める。

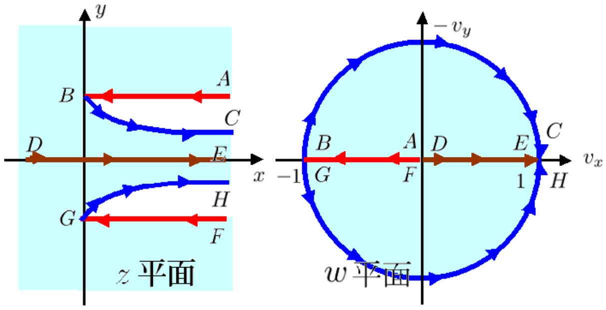


図 5.3.34: Borda の吹き出し口

```
/*  Borda の吹き出し口  */
kill(all);
declare(z,complex);
declare(w,complex);
declare(\zeta,complex);
declare(F,complex);
assume(\theta>=0);
assume(\theta<=%pi/2);
assume(cabs(w)<=1);
DFZ1:w='diff(F,z,1);
DFZ2:'diff(z,F,1)=1/w;
F0:F=m*log(z-(1+\delta))+m*log(z-1/(1
  +\delta))-m*log(z);
lhs(F0)=limit(rhs(F0),\delta,0);
F1:F=m*log(w)-2*m*log(w-1);
F2:logcontract(F1);
DF2:'diff(F,w,1)=diff(rhs(F2),w,1);
DZ1:'diff(z,w,1)='diff(z,F,1)*'diff(F,w,1);
DZ2:factor(lhs(DZ1)=subst([DFZ2,DF2]
  ,rhs(DZ1)));
z=integrate(rhs(DZ2),w)+C;
Z1:subst([w-1=1-w],%);
```

前例 5.3.13 から、自由流線上の流速：U は一定となる。今、$U=1$ とすると、上図に示す w 平面では、自由流線は単位円となる。このことを考慮して、z 平面の吹き出し口から出る噴流の速度の関係を w 平面に描いてみる。

1) A-B-C：平面壁：AB では、スリットから十分遠い A での流速は $v_x=0, v_y=0$ で w 平面の原点に位置する。スリットに近づくに従い $v_x<0, v_y=0$ で流速が増加し、吹き出し口：B で自由流線に繋がり、$v_x=-1, v_y=0$ で w 平面の -1 に位置する。BC では周囲圧力が大気圧となり、一定流速：$U=1$ で $v_y<0$ から単位円上を反時計方向にまわり、噴流が吹き出し口から十分遠いときには $v_x=1, v_y=0$ の w 平面の 1 の C に至る。

2) D-E：吹き出し口から十分遠い：D での流速は $v_x=0, v_y=0$ で w 平面の原点に位置する。x 軸上を流れるので、流速は $v_x>1, v_y=0$ で流速が増加し、噴流が吹き出し口から十分遠いときには $v_x=1, v_y=0$ で w 平面の 1 の E に至る。

3) F-G-H:平面壁:FG では、吹き出し口から十分遠い: F での流速は $v_x=0, v_y=0$ で w 平面の原点に位置する。吹き出し口に近づくに従い $v_x<0, v_y=0$ で流速が増加し、吹き出し口：G で自由流線に繋がり、$v_x=-1, v_y=0$ で w 平面の -1 に位置する。GH では周囲圧力が大気圧となり、一定流速：$U=1$ で $v_y>0$ から単位円上を時計方向にまわり、噴流が吹き出し口から十分遠いときには $v_x=1, v_y=0$ の w 平面の 1 の H に至る。

以上から w 平面で原点:$w=0$ にわき出しがあり、$w=1$ に吸い込みがある流れとなる。また、w 平面で自由流線は単位円となることから、単位円が流線とならねばならない。単位円上に置いたわき出しと原点に置いた吸い込みの複素ポテンシャルは (5.3.65) 式で上記の流場は次式となる。

$$
\begin{aligned}
F =& m\log(w) - 2\,m\log(w-1) \\
=& m\log\left(\frac{w}{w^2-2\,w+1}\right)
\end{aligned}
\tag{5.3.69}
$$

w 平面の流れ場を調べるため、上式から流れ関数：Ψ を下記にように求める。

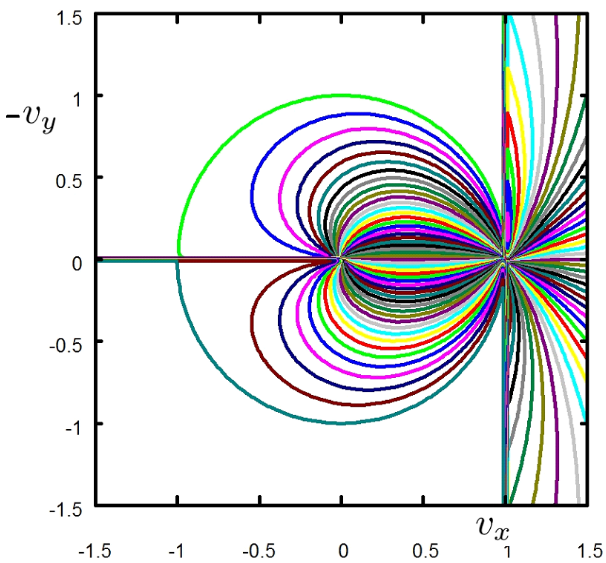


図 5.3.35: Borda の吹き出し口

```
subst([w=x+%i*y,m=1],F2);
PS1:\Psi=imagpart(rhs(%));
subst([x=0,y=1],PS1);
subst([x=0,y=-1],PS1);
```

$$\Psi = \mathrm{atan2}\left(y,x\right) - \mathrm{atan2}\Bigg(\sin\left(2\,\mathrm{atan2}\left(y,x-1\right)\right),\ \cos\left(2\,\mathrm{atan2}\left(y,x-1\right)\right)\Bigg)$$

流れ図を上図に示す。単位円上に置いたわき出しと原点に置いた吸い込みが表現されている。(5.3.69) 式を w で微分し、$\frac{d}{d\,F}\,z$ の (5.3.64) 式から、

$$\frac{d}{d\,w}\,z = \left(\frac{d}{d\,F}\,z\right)\,\left(\frac{d}{d\,w}\,F\right) = -\frac{m\,\left(w+1\right)}{\left(w-1\right)\,w^2}$$

上式を積分し、z 平面と w 平面の相関が得られた。

$$\begin{aligned} z =& \int -\frac{m\,\left(w+1\right)}{\left(w-1\right)\,w^2} dw \\ =& C - m\,\left(-2\log\left(w\right) + \frac{1}{w} + 2\log\left(1-w\right)\right) \end{aligned} \tag{5.3.70}$$

```
subst([w=%e^(%i*\theta)],Z1);
Z2:expand(%);
E1:1-%e^(%i*theta);
E2:%e^(%i*\theta/2);
NE1:expand(E1/E2);
NE11:realpart(NE1);
NE12:imagpart(NE1);
E3:E1=%i*NE12*E2;
Z3:expand(radcan(subst([E3],Z2)));
LG1:log(-%i)=-%i*%pi/2;
Z4:subst([LG1],Z3);
Z41:subst([\theta=%pi],Z4);
X0:realpart(rhs(Z41))=0;
Y0:imagpart(rhs(Z41))=A/2;
M1:solve(Y0,m)[1];
subst([M1],X0);
C1:solve(%,C)[1];
Z5:expand(subst([M1,C1],Z4));
X1:x=realpart(rhs(Z5));
Y1:y=imagpart(rhs(Z5));
Y2:y=rest(rhs(Y1),-2)+last(rhs(Y1));
subst([y=B/2,\theta=0],Y2);
%*2/A;
X3:subst([A=2,\theta=t],rhs(X1));
Y3:subst([A=2,\theta=t],rhs(Y2));
plot2d([parametric,X3,Y3,[t,0.00001,
 3.14159],[nticks,100]],[x,-1,3],
 [y,0,2],[xlabel, "x"],[ylabel, "y"]);
```

自由流線の形状を求める。自由流線上では、w 平面で単位円上であるから、$w = e^{i\,\theta}$ を (5.3.70) 式に代入し、

$$z = C - 2\,m\log\left(1 - e^{i\,\theta}\right) - m\,e^{-i\,\theta} + 2\,i\,m\,\theta$$

次式の関係式を代入し、

$$1 - e^{i\,\theta} = -2\,i\,e^{\frac{i\,\theta}{2}}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right),\quad \log\left(-i\right) = -\frac{i\,\pi}{2}$$

上式から、

$$\begin{aligned} z =& C - 2\,m\log\left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) - m\,e^{-i\,\theta} + i\,m\,\theta \\ & - 2\log\left(-i\right)\,m - 2\log\left(2\right)\,m \\ =& C - 2\,m\log\left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) - m\,e^{-i\,\theta} + i\,m\,\theta \\ & - 2\log\left(2\right)\,m + i\,\pi\,m \end{aligned} \tag{5.3.71}$$

開口部では、$\theta = \pi$ で、これを上式に代入すると、

$$z = C - 2\log\left(2\right)\,m + 2\,i\,\pi\,m + m$$

開口部では、$x = 0, y = \frac{A}{2}$ から、

$$m = \frac{A}{4\,\pi},\quad C = \frac{\left(2\log\left(2\right) - 1\right)\,A}{4\,\pi}$$

上記の関係を (5.3.71) 式に代入し、

$$z = -\frac{\log\left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)\,A}{2\,\pi} - \frac{e^{-i\,\theta}\,A}{4\,\pi} + \frac{i\,\theta\,A}{4\,\pi} - \frac{A}{4\,\pi} + \frac{i\,A}{4}$$

上式から、噴流の自由流線の軌跡は、

$$x = -\frac{\log\left(\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|\right)\,A}{2\,\pi} - \frac{\cos\left(\theta\right)\,A}{4\,\pi} - \frac{A}{4\,\pi}$$

$$y = \frac{\sin\left(\theta\right)\,A}{4\,\pi} + \frac{\theta\,A}{4\,\pi} + \frac{A}{4}$$

開口部から噴流の十分下流で噴流幅：B とすると、

$$y = \frac{B}{2}, \theta = 0 \quad \rightarrow \frac{B}{A} = \frac{1}{2}$$

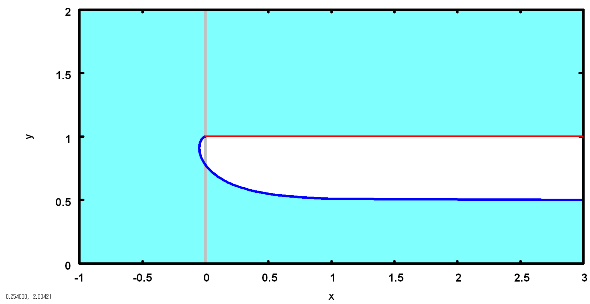


図 5.3.36: Borda の吹き出し口

例題 5.3.15　自由流線：死水をともなう流れに垂直な平板

下記に示す幅：L の流れに垂直な平板まわりに生じる死水の形状をおよび平板の抗力を求める。

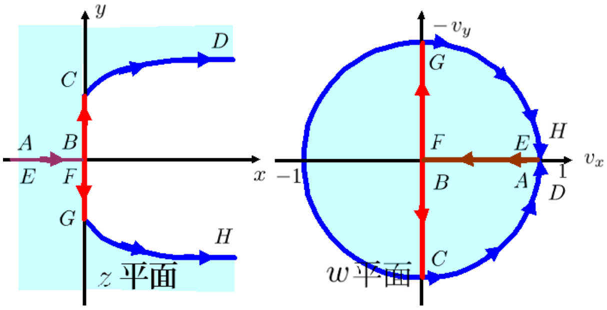


図 5.3.37: 死水をともなう流れに垂直な平板

```
/*  死水をともなう平板  */
kill(all);
declare(z,complex);
declare(w,complex);
declare(\zeta,complex);
declare(F,complex);
declare(c,complex);
assume(\theta>=0 and \theta<=%pi/2);
assume(cabs(w)<=1);
assume(L>0);
DFZ1:w='diff(F,z,1);
DFZ2:'diff(z,F,1)=1/w;
F0:F=m*log(z-\delta)+m*log(z+\delta)
 -m*log(z-(%i*\delta))
 -m*log(z+(%i*\delta));
logcontract(%);
taylor(rhs(%),\delta,0,10);
first(%);
F1:F=subst([2*m*\delta^2=\nu],%);
```

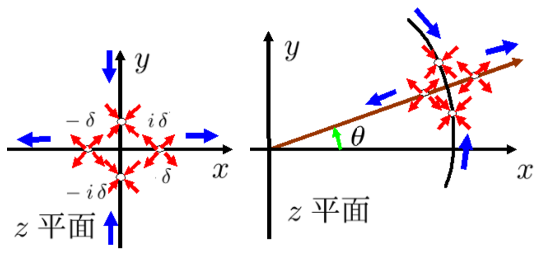
前例 5.3.13 から、自由流線上の流速：U は一定となる。今、$U=1$ とすると、上図に示す w 平面では、自由流線は単位円となる。このことを考慮して、z 平面の吹き出し口から出る噴流の速度の関係を w 平面に描いてみる。

1) A-B-C-D：AB では、平板から十分遠い：A での流速は $v_x=1, v_y=0$ で w 平面の $w=1$ に位置する。平板に近づくに従い $v_x>0, v_y=0$ で流速が減少し、平板：B で $v_x=0, v_y=0$ で w 平面の原点に位置する。BC では平板に沿って流れ、$v_x>0, v_y=0$ で平板の端 C に至る。C から自由流線で周囲圧力が大気圧となり、一定流速：$U=1$ で $v_y>0$ から単位円上を反時計方向にまわり、平板から十分遠いときには $v_x=1, v_y=0$ の w 平面の 1 の D に至る。

2) E-F-G-H：EF では、平板から十分遠い：E での流速は $v_x=1, v_y=0$ で w 平面の $w=1$ に位置する。平板に近づくに従い $v_x>0, v_y=0$ で流速が減少し、平板：F で $v_x=0, v_y=0$ で w 平面の原点に位置する。FG では平板に沿って流れ、$v_x<0, v_y=0$ で平板の端 G に至る。G から自由流線で周囲圧力が大気圧となり、一定流速：$U=1$ で $v_y<0$ から単位円上を時計方向にまわり、平板から十分遠いときには $v_x=1, v_y=0$ の w 平面の 1 の H に至る。

以上から w 平面で $w=1$ で上下から吸い込まれ、左右に流出する 4 重極がある流れとなる。また、w 平面で自由流線は単位円となることから、単位円が流線とならねばならない。

まず、$x-y$ 座標の原点においた 4 重極の複素ポテンシャルを求める。下図に示す原点から δ だけ離れた位置に置いたわき出しと吸い込みの複素ポテンシャルは下記となり、δ が十分小さいとして、Taylor 展開して、高次項を省略し得られる。



原点においた 4 重極　　単位円上の 4 重極

図 5.3.38: 4 重極

$$
\begin{aligned}
F=&-m\log(z+i\,\delta)-m\log(z-i\,\delta)+m\log(z+\delta)\\
&+m\log(z-\delta)\\
=&m\log\left(\frac{(z-\delta)\,(z+\delta)}{(z-i\,\delta)\,(z+i\,\delta)}\right)\\
=&-\frac{2\,m\,\delta^2}{z^2}-\frac{2\,m\,\delta^6}{3\,z^6}-\frac{2\,m\,\delta^{10}}{5\,z^{10}}+\ldots\\
\approx&-\frac{2\,\delta^2\,m}{z^2}
\end{aligned}
$$

以上から、4 重極の複素ポテンシャルは下記となる。ここで 4 重極の強さを ν とする。

$$
F=-\frac{\nu}{z^2}\qquad(2\,m\,\delta^2\to\nu) \tag{5.3.72}
$$

```
F0:F=m*log(z-c)+m*log(z-A^2/(conjugate(c)))
 -m*log(z);
F01:subst([c=(1+\delta)*%e^(%i*\theta),A=1,
 m=m[0]],rhs(F0));
```

```
F02:subst([c=(1-\delta)*%e^(%i*\theta),A=1,
 m=m[0]],rhs(F0));
F03:subst([c=(1)*%e^(%i*(\theta+\delta)),
 A=1,m=-m[0]],rhs(F0));
F04:subst([c=(1)*%e^(%i*(\theta-\delta)),
 A=1,m=-m[0]],rhs(F0));
F01+F02+F03+F04;
logcontract(%);
F05:taylor(%,\delta,0,5);
F06:first(F05);
F06-m[0]*\delta^2;
factor(%);
F11:F=subst([m[0]=\nu/\delta^2],%);
F2:F=subst([\theta=0,z=w],rhs(F11))
 +subst([\theta=%pi,z=w],rhs(F11));
subst([w=x+%i*y,\nu=1],F2);
PS1:\Psi=imagpart(rhs(%));
subst([x=0,y=1],PS1);
subst([x=0,y=-1],PS1);
```

単位円上の角度 : θ の位置に置いた 4 重極の複素ポテンシャルを求める。円柱の外の c の位置に置いたわき出しの複素ポテンシャルは (5.3.45) 式から下記となる。

$$
\begin{aligned}
F =& m\log\left(z-\frac{A^2}{\bar{c}}\right)+m\log(z-c)-m\log(z)\\
&-\log\left(-\frac{1}{\bar{c}}\right)m
\end{aligned}
$$

円の外 : $(\delta+1)\,e^{i\,\theta}$ に置いたわき出しの複素ポテンシャル : F_1 は上式から、

$$
\begin{aligned}
F_1 =& m_0\log\left(z-\frac{e^{i\,\theta}}{\delta+1}\right)+m_0\log\left(z-(\delta+1)\,e^{i\,\theta}\right)\\
&-m_0\log(z)
\end{aligned}
$$

円の内 : $(1-\delta)\,e^{i\,\theta}$ に置いたわき出しの複素ポテンシャル : F_2 は上式から、

$$
\begin{aligned}
F_2 =& m_0\log\left(z-(1-\delta)\,e^{i\,\theta}\right)+m_0\log\left(z-\frac{e^{i\,\theta}}{1-\delta}\right)\\
&-m_0\log(z)
\end{aligned}
$$

単位円上に置いたわき出し複素ポテンシャルは (5.3.65) 式から下記となる。

$$
F=2\,m\log(z-1)-m\log(z)
$$

単位円上 : $\theta+\delta$ に置いた吸い込みの複素ポテンシャル : F_3 は上式から、

$$
F_3=m_0\log(z)-2\,m_0\log\left(z-e^{i\,(\theta+\delta)}\right)
$$

単位円上 : $\theta-\delta$ に置いた吸い込みの複素ポテンシャル : F_4 は上式から、

$$
F_4=m_0\log(z)-2\,m_0\log\left(z-e^{i\,(\theta-\delta)}\right)
$$

上式をまとめ、単位円上の角度 : θ の位置に置いた 4 重極の複素ポテンシャル : F は下記となる。

$$
F=F_1+F_2+F_3+F_4=m_0\log\left(\frac{e^{2\,i\,\delta}\,\left(z+(-\delta-1)\,e^{i\,\theta}\right)\,\left(z+(\delta-1)\,e^{i\,\theta}\right)\,\left((\delta-1)\,z+e^{i\,\theta}\right)\,\left((\delta+1)\,z-e^{i\,\theta}\right)}{(\delta-1)\,(\delta+1)\,\left(z-e^{i\,\theta+i\,\delta}\right)^2\left(e^{i\,\delta}\,z-e^{i\,\theta}\right)^2}\right)
$$

上式で、δ が十分小さいとして、Taylor 展開して、高次項を省略すると、

$$
F=-\frac{4\,z\,e^{i\,\theta}\,m_0\,\delta^2}{\left(e^{i\,\theta}\right)^2-2\,z\,e^{i\,\theta}+z^2}-\frac{11\,z\,e^{i\,\theta}\,m_0\,\delta^4}{6\left(e^{i\,\theta}\right)^2-12\,z\,e^{i\,\theta}+6\,z^2}+...\approx-\frac{4\,m_0\,\delta^2\,e^{i\,\theta}\,z}{z^2-2\,e^{i\,\theta}\,z+e^{2\,i\,\theta}}
$$

上式に $-m_0\,\delta^2$ を加え、整理すると、

$$
\begin{aligned}
F =& -\frac{4\,m_0\,\delta^2\,e^{i\,\theta}\,z}{z^2-2\,e^{i\,\theta}\,z+e^{2\,i\,\theta}}-m_0\,\delta^2\\
=& -\frac{m_0\,\delta^2\left(z+e^{i\,\theta}\right)^2}{\left(z-e^{i\,\theta}\right)^2}\\
=& -\frac{\nu\left(z+e^{i\,\theta}\right)^2}{\left(z-e^{i\,\theta}\right)^2}\quad(m_0\,\delta^2\to\nu)
\end{aligned}
\tag{5.3.73}
$$

以上から w 平面で $w=1$ に 4 重極がある流れとなる。また、w 平面で自由流線は単位円となることから、単位円が流線とならねばならない。対称性から、

$$
F=-\frac{\nu\,(w+1)^2}{(w-1)^2}-\frac{\nu\,(w-1)^2}{(w+1)^2}\tag{5.3.74}
$$

w 平面の流れ場を調べるため、上式から流れ関数 : Ψ を求め、その結果を下記に示す。

$$
\begin{aligned}
\Psi =& -\frac{2\,(x-1)\,y\,\left((x+1)^2-y^2\right)-2\,(x+1)\,y\,\left((x-1)^2-y^2\right)}{\left(y^2+(x+1)^2\right)^2}\\
&-\frac{2\,(x+1)\,y\,\left((x-1)^2-y^2\right)-2\,(x-1)\,y\,\left((x+1)^2-y^2\right)}{\left(y^2+(x-1)^2\right)^2}
\end{aligned}
$$

w 平面の流れ図を下記に示す。単位円上に置いた 4 重極が表現されている。

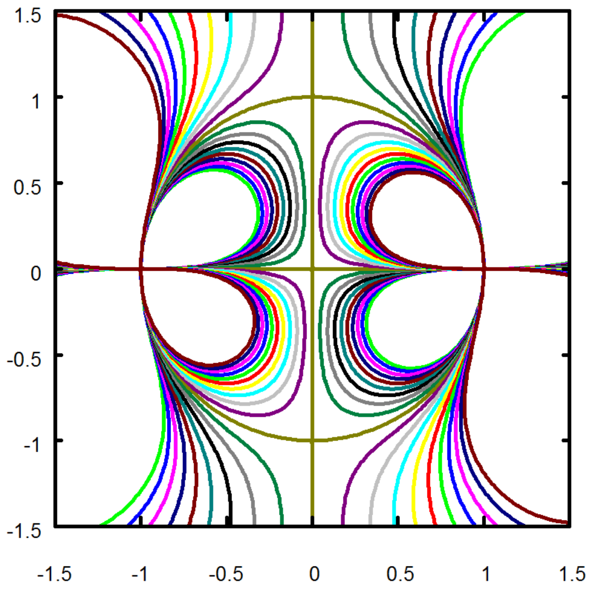


図 5.3.39: w 平面の死水をともなう平板の流れ

```
DF2:'diff(F,w,1)=diff(rhs(F2),w,1);
DZ1:'diff(z,w,1)='diff(z,F,1)*'diff(F,w,1);
DZ2:factor(lhs(DZ1)=subst([DFZ2,DF2],
 rhs(DZ1)));
z=integrate(rhs(DZ2),w)+C;
Z1:subst([w-1=1-w],%);
subst([z=0,w=0],Z1);
Z2:expand(subst([C=0],Z1));
Z21:first(rhs(Z2))+last(rhs(Z2));
Z22:4*\nu*log((1-w)/(1+w));
Z23:rhs(Z2)-Z21;
Z24:z=Z22+Z23;
Z32:subst([w=%e^(%i*\theta)],Z22);
Z33:subst([w=%e^(%i*\theta)],Z23);
E1:(1-%e^(%i*\theta))/(1+%e^(%i*\theta));
E2:E1=trigrat(E1);
E21:E2*(denom(lhs(E2)));
E22:factor(subst([E21],Z32));
realpart(Z33);
E31:trigrat(%);
imagpart(Z33);
E32:trigrat(%);
Z4:z=E22+E31+%i*E32;
Z41:subst([\theta=%pi/2,z=-%i*L/2],Z4);
subst([log(-%i)=(-%i*%pi/2)],Z41);
NU1:solve(%,\nu)[1];
Z5:subst([NU1],Z4);
X1:x=realpart(rhs(Z5));
Y1:y=imagpart(rhs(Z5));
```

```
X3:subst([L=2,\theta=t],rhs(X1));
Y3:subst([L=2,\theta=t],rhs(Y1));
plot2d([parametric,X3,Y3,[t,-1.571,1.571],
   [nticks,401]],[x,-2,8],[y,-4,4],
   [xlabel, "x"],[ylabel, "y"]);
```

(5.3.74) 式を w で微分し、

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\,w}\,F =&\frac{2\,\nu\,(w+1)^2}{(w-1)^3}-\frac{2\,\nu\,(w-1)}{(w+1)^2}+\frac{2\,\nu\,(w-1)^2}{(w+1)^3}\\&-\frac{2\,\nu\,(w+1)}{(w-1)^2}\end{aligned}$$

上式と $\frac{d}{d\,F}\,z$ の (5.3.64) 式から、

$$\frac{d}{d\,w}\,z=\left(\frac{d}{d\,F}\,z\right)\left(\frac{d}{d\,w}\,F\right)=\frac{32\,\nu\,\left(w^2+1\right)}{(w-1)^3\,(w+1)^3}$$

上式を積分し、z 平面と w 平面の相関が得られた。

$$\begin{aligned}z =&C+32\,\nu\left(-\frac{\log{(w+1)}}{8}+\frac{w^3-3\,w}{4\,w^4-8\,w^2+4}\right.\\&\left.+\frac{\log{(1-w)}}{8}\right)\end{aligned}$$

$z=0, w=0$ のとき、$C=0$ となり、

$$z=4\,\nu\log\left(\frac{1-w}{w+1}\right)+\frac{32\,\nu\,w^3}{4\,w^4-8\,w^2+4}-\frac{96\,\nu\,w}{4\,w^4-8\,w^2+4}$$

単位円上の自由流線を求めるため、$w=e^{i\,\theta}$ を上式に代入し、

$$\begin{aligned}z =&4\,\nu\log\left(\frac{1-e^{i\,\theta}}{e^{i\,\theta}+1}\right)\\&+\frac{32\,\nu\,e^{3\,i\,\theta}}{4\,e^{4\,i\,\theta}-8\,e^{2\,i\,\theta}+4}-\frac{96\,\nu\,e^{i\,\theta}}{4\,e^{4\,i\,\theta}-8\,e^{2\,i\,\theta}+4}\end{aligned}$$

下記の関係から、

$$\frac{1-e^{i\,\theta}}{e^{i\,\theta}+1}=-\frac{i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

上式は下記となる。

$$z=4\,\nu\log\left(-\frac{i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right)-\frac{8\,\nu\cos{(\theta)}}{\cos{(2\,\theta)}-1}-\frac{8\,i\,\nu}{\sin{(\theta)}} \tag{5.3.75}$$

平板の端では、$\theta=\frac{\pi}{2}, z=\frac{-i\,L}{2}$ であり、これを上式に代入すると、

$$-\frac{i\,L}{2}=4\log{(-i)}\,\nu-8\,i\,\nu$$

以上から 4 重極の強さ：ν が得られる。

$$\nu=\frac{L}{4\,\pi+16}$$

(5.3.75) 式に代入し、

$$z = \frac{4\log\left(-\frac{i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right)\,L}{4\,\pi+16} - \frac{8\cos\left(\theta\right)\,L}{\left(4\,\pi+16\right)\,\left(\cos\left(2\,\theta\right)-1\right)} - \frac{8\,i\,L}{\left(4\,\pi+16\right)\,\sin\left(\theta\right)}$$

実部および虚部から

$$x = \frac{4\log\left(\frac{\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|}{\left|\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|}\right)\,L}{4\,\pi+16} - \frac{8\cos\left(\theta\right)\,L}{\left(4\,\pi+16\right)\,\left(\cos\left(2\,\theta\right)-1\right)}$$

$$y = \frac{4\,\left(\mathrm{atan2}\left(0,\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)+\mathrm{atan2}\left(0,\frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sqrt{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)^2}}\right)-\frac{\pi}{2}\right)\,L}{4\,\pi+16} - \frac{8\,L}{\left(4\,\pi+16\right)\,\sin\left(\theta\right)}$$

上式から自由流線を描くと下図となる。

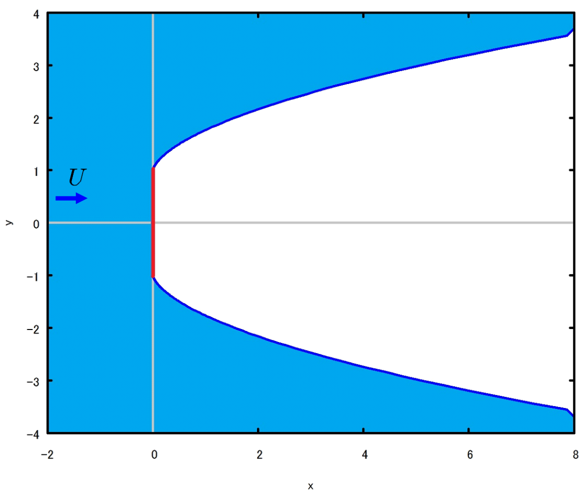


図 5.3.40: 垂直な平板の死水をともなう流れ

```
D1:D=integrate(p(y)-p[inf],y,-L/2,L/2);
H1:p[inf]+1/2*\rho*U^2=p(y)+1/2*\rho
 *v(y)^2;
H2:solve(H1,p(y))[1];
D2:factor(subst([H2,v(y)=t(y)*U],D1));
CD2:C[D]=D/(1/2*\rho*U^2*L);
CD3:lhs(CD2)=subst([D2],rhs(CD2));
CD4:C[D]=-2*integrate(t(y)^2-1,y,0,L/2)/L;
Z6:subst([w=-%i*t,z=%i*y],Z24);
DZ6:%i*'diff(y,t,1)=factor(diff(rhs(Z6),t
 ,1));
subst(['diff(y,t,1)=dy/dt],DZ6);
```

```
solve(%,dy)[1];
DI1:%*(-(t^2-1));
CD5:C[D]=2*integrate(rhs(DI1)/dt,t,0,1)/L;
subst([NU1],%);
subst([%pi=3.14159],%);
```

平板の抗力は次式で表せる。ここで平板の上流側の圧力を $p(y)$、無限遠の圧力を p_∞ とする。

$$D = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \mathrm{p}\left(y\right) - p_\infty dy$$

平板上の流速を $v(y)$ とすると、Bernoulli の定理から、

$$\frac{\rho\,U^2}{2} + p_\infty = \frac{\rho\,\mathrm{v}\left(y\right)^2}{2} + \mathrm{p}\left(y\right)$$

無次元化した速度を $t(y)$ を $\mathrm{v}\left(y\right)=\mathrm{t}\left(y\right)\,U$ の関係とし、平板の抗力は、

$$D = -\frac{\rho\,\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \mathrm{t}\left(y\right)^2 - 1dy\,U^2}{2}$$

抗力を無次元化し、

$$C_D = \frac{D}{\frac{\rho\,U^2\,L}{2}} = -\frac{2\,\int_0^{\frac{L}{2}} \mathrm{t}\left(y\right)^2 - 1dy}{L}$$

平板上の流れは $w=-i\,t, z=i\,y$ を (5.3.75) 式に代入し、

$$i\,y = 4\,\nu\log\left(\frac{i\,t+1}{1-i\,t}\right) + \frac{32\,i\,\nu\,t^3}{4\,t^4+8\,t^2+4} + \frac{96\,i\,\nu\,t}{4\,t^4+8\,t^2+4}$$

上式を t で微分し、

$$i\,\left(\frac{d}{d\,t}\,y\right) = \frac{32\,i\,\nu\,\left(t-1\right)\,\left(t+1\right)}{\left(i\,t-1\right)\,\left(i\,t+1\right)\,\left(t^2+1\right)^2}$$

抗力の無次元化式に代入し、積分して、

$$C_D = \frac{8\,\pi\,\nu}{L} = \frac{8\,\pi}{4\,\pi+16} \approx 0.88$$

平板の抗力の実験は $C_D \approx 2$ で、上記の計算結果は背面の吸引現象が表現されていないため、精度が悪くなっている。

例題 5.3.16　自由流線：平板に垂直にぶつかるジェット

下記に示す幅：H、流速：U のジェットが平板に垂直にぶつかるジェットの形状を求める。

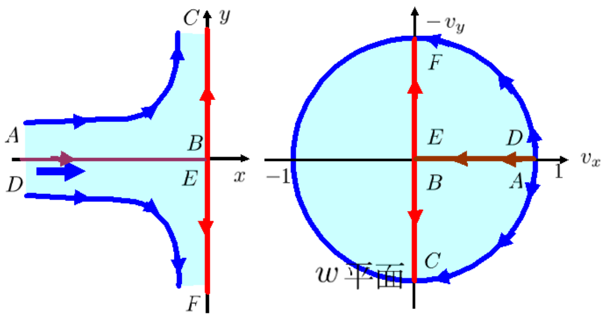


図 5.3.41: 平板に垂直にぶつかるジェット

```
/*  平板にぶつかるジェット  */
kill(all);
declare(z,complex);
declare(w,complex);
declare(F,complex);
assume(\theta>=-%pi/2 and \theta<=%pi/2);
assume(cabs(w)<=1);
DFZ1:w='diff(F,z,1);
DFZ2:'diff(z,F,1)=1/w;
F0:F=m*log(z-(1+\delta)*%e^(%i*\theta))
 +m*log(z-%e^(%i*\theta)/(1+\delta))
 -m*log(z);
F01:lhs(F0)=limit(rhs(F0),\delta,0);
F11:subst([\theta=0,z=w],rhs(F01));
F12:subst([\theta=%pi,z=w],rhs(F01));
F13:subst([\theta=%pi/2,z=w,m=-m],
 rhs(F01));
F14:subst([\theta=-%pi/2,z=w,m=-m]
 ,rhs(F01));
F1:F=(F11+F12+F13+F14)/2;
F2:logcontract(F1);
```

前例 5.3.13 から、自由流線上の流速：U は一定となる。今、$U=1$ とすると、上図に示す w 平面では、自由流線は単位円となる。このことを考慮して、z 平面のジェットの速度の関係を w 平面に描いてみる。

1) A-B-C：AB では、平板から十分遠い A での流速は $v_x=1, v_y=0$ で w 平面の $w=1$ に位置する。平板に近づくに従い $v_x>0, v_y=0$ で流速が減速し、よどみ点：B で $w=0$ に位置する。BC では平板に沿って流れ、$v_y>0$ で流速が加速し、$v_y=1$ で C に至る。

2) A-C：平板から十分遠い A での流速は $v_x=1, v_y=0$ で w 平面の $w=1$ に位置する。自由流線上であるので、外界の圧力は p_∞、一定であるため、流速も一定：$v=1$ で C に至る。w 平面上では、単位円上を A から時計回りに C に至る。

D-E-F：、D-E：については、上記と対称であるので説明を省く。以上から対称性を考慮し、w 平面で $w=1,-1$ にわき出しがあり、$w=i,-i$ に吸い込みがある流れとなる。また、w 平面で自由流線は単位円となることから、単位円が流線とならねばならない。単位円上に置いたわき出しの複素ポテンシャルは (5.3.46) 式から次式となる。

$$\begin{aligned}F=&m\log\left(z-\frac{e^{i\theta}}{\delta+1}\right)+m\log\left(z-(\delta+1)\,e^{i\theta}\right)\\&-m\log(z)\\=&2\,m\log\left(z-e^{i\theta}\right)-m\log(z)\quad(\delta\to 0)\end{aligned}\tag{5.3.76}$$

以上から、$w=1$ に置いたわき出しの複素ポテンシャル：F_1 は、

$$F_1=2\,m\log(w-1)-m\log(w)$$

同様に、$w=-1,i,-i$ の複素ポテンシャル：F_2,F_3,F_4 は、

$$F_2=2\,m\log(w+1)-m\log(w)$$
$$F_3=m\log(w)-2\,m\log(w-i)$$
$$F_4=m\log(w)-2\,m\log(w+i)$$

以上をまとめ、本流れの w 平面の複素ポテンシャルは、

$$\begin{aligned}F=&\frac{F_1+F_2+F_3+F_4}{2}\\=&m\log\left(\frac{(w-1)\,(w+1)}{(w-i)\,(w+i)}\right)\end{aligned}\tag{5.3.77}$$

```
subst([w=x+%i*y,m=1],F2);
PS1:\Psi=imagpart(rhs(%));
subst([x=0.7071,y=0.7071],PS1);
subst([x=-0.7071,y=-0.7071],PS1);
subst([x=0.7071,y=-0.7071],PS1);
subst([x=-0.7071,y=0.7071],PS1);
```

w 平面の流れ場を調べるため、上式に $w=i\,y+x, m=1$ を代入し、流れ関数を求めると、

$$\begin{aligned}\Psi=&-\operatorname{atan2}\left(\frac{y+1}{\sqrt{(y+1)^2+x^2}},\frac{x}{\sqrt{(y+1)^2+x^2}}\right)\\&+\operatorname{atan2}(y,x+1)+\operatorname{atan2}(y,x-1)\\&-\operatorname{atan2}\left(\frac{y-1}{\sqrt{(y-1)^2+x^2}},\frac{x}{\sqrt{(y-1)^2+x^2}}\right)\end{aligned}$$

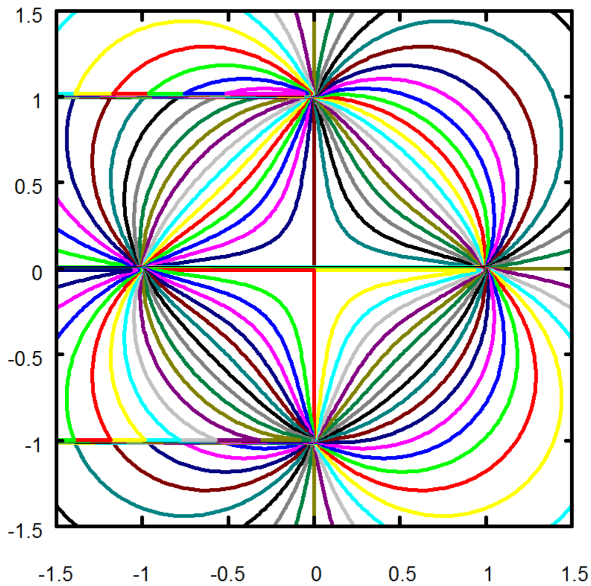


図 5.3.42: w 平面の流れ　平板に垂直にぶつかるジェット

w 平面の流れ図を下記に示す。単位円上に置いたわき出し、吸い込みが表現されている。

```
DF2:'diff(F,w,1)=factor(diff(rhs(F2),w,1));
DZ1:'diff(z,w,1)='diff(z,F,1)*'diff(F,w,1);
DZ2:factor(lhs(DZ1)=subst([DFZ2,DF2],
  rhs(DZ1)));
z=integrate(rhs(DZ2),w)+C;
Z1:subst([w-1=1-w,w-%i=%i-w],%);
subst([z=0,w=0],Z1);
Z11:subst([C=0],Z1);
subst([w=%e^(%i*\theta)],Z11);
Z2:logcontract(%);
Q1:m=Q/2/%pi;
Q2:Q=2*(H*U);
subst([Q2,U=1],Q1);
Z21:subst([m=H/%pi],Z2);
E1:(%e^(%i*theta)-1)/(%e^(%i*theta)+1);
E11:E1=trigrat(E1);
E2:(%e^(%i*theta)-%i)/(%e^(%i*theta)+%i);
E22:E2=trigrat(E2);
Z23:subst([E11,E22],Z21);
```

(5.3.77) 式を w で微分し、

$$\frac{d}{d\,w}\,z=\frac{4\,m}{(w-1)\,(w+1)\,(w-i)\,(w+i)}$$

上式と $\frac{d}{d\,F}\,z$ の (5.3.64) 式から、

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\,w}\,z=&\left(\frac{d}{d\,F}\,z\right)\,\left(\frac{d}{d\,w}\,F\right)\\=&\frac{4\,m}{(w-1)\,(w+1)\,(w-i)\,(w+i)}\end{aligned}$$

上式を積分し、z 平面と w 平面の相関が得られた。

$$\begin{aligned}z=&C+4\,m\left(-\frac{i\log\left(w+i\right)}{4}-\frac{\log\left(w+1\right)}{4}\right.\\&\left.+\frac{i\log\left(i-w\right)}{4}+\frac{\log\left(1-w\right)}{4}\right)\end{aligned}$$

$z=0,w=0$ のとき、$C=0$ となり、上式は、

$$\begin{aligned}z=&4\,m\left(-\frac{i\log\left(w+i\right)}{4}-\frac{\log\left(w+1\right)}{4}\right.\\&\left.+\frac{i\log\left(i-w\right)}{4}+\frac{\log\left(1-w\right)}{4}\right)\end{aligned}$$

単位円上の自由流線を求めるため、$w=e^{i\,\theta}$ を上式に代入し、

$$z=m\,\left(i\log\left(-\frac{e^{i\,\theta}-i}{e^{i\,\theta}+i}\right)+\log\left(-\frac{e^{i\,\theta}-1}{e^{i\,\theta}+1}\right)\right)$$

ここで、わき出し強さ：m とその流量：Q の関係は、$m=\frac{Q}{2\,\pi}$ であり、一方、ジェットの流量：Q は単位円の内部と外部の両方を考慮して、$Q=2\,H\,U$ である。$U=1$ とすると、わき出し強さ：m とジェットの幅：H の関係は、

$$m=\frac{H}{\pi}$$

log の中の項は、下記の関係があり、

$$\frac{e^{i\,\theta}-1}{e^{i\,\theta}+1}=\frac{i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$\frac{e^{i\,\theta}-i}{e^{i\,\theta}+i}=\frac{i\,\left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)-\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)+\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

上記の関係を代入して、

$$z=\frac{H}{\pi}\left(i\log\left(-\frac{i\,\left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)-\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)+\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right)+\log\left(-\frac{i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right)\right) \tag{5.3.78}$$

```
Z24:subst([z=x+%i*y],Z23);
X1:realpart(Z24);
Y1:imagpart(Z24);
X3:subst([H=2,\theta=t],rhs(X1));
Y3:subst([H=2,\theta=t],rhs(Y1));
plot2d([[parametric,X3,Y3,[t,-1.570,
 -0.0001],[nticks,100]],[parametric,
 X3,Y3,[t,0.0001,1.570],[nticks,100]]],
 [x,-7,3],[y,-5,5],[xlabel, "x"],
 [ylabel, "y"]);
```

上式に、$z=x+i\,y$ を代入し、その実部、虚部から、自由流線は、

$$x=\frac{H}{\pi}\left(\log\left(\frac{\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|}{\left|\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|}\right)-\operatorname{atan2}\left(0,\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)+\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sqrt{\left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)+\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^2}}\right)-\operatorname{atan2}\left(0,\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)-\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y=\frac{H}{\pi}\left(\log\left(\frac{\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)-\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|}{\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)+\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|}\right)+\operatorname{atan2}\left(0,\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)+\operatorname{atan2}\left(0,\frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sqrt{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)^2}}\right)-\frac{\pi}{2}\right)$$

上式で、$H=2$ として、自由流線を描くと下図となる。

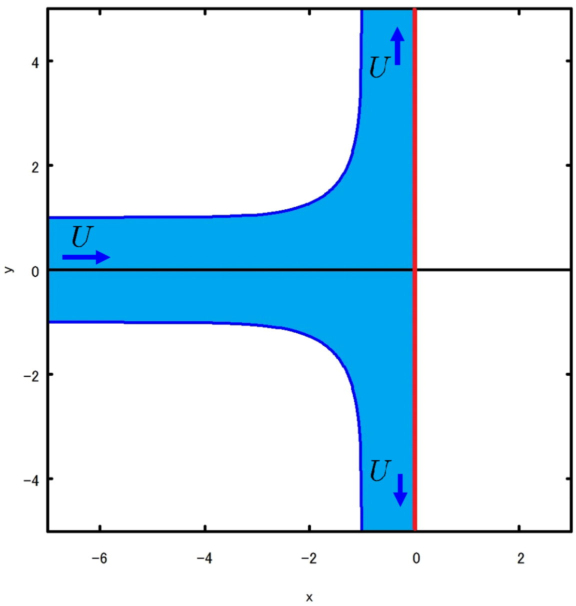


図 5.3.43: 平板に垂直にぶつかるジェット

例題 5.3.17　二つの渦糸の運動

x 軸上に置いた二つの渦糸の運動を求める。

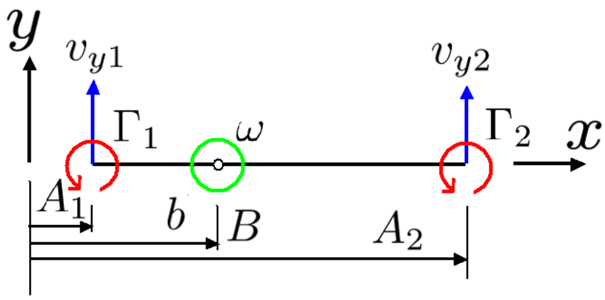


図 5.3.44: 二つの渦糸の動き

```
/*  二つの渦糸の動き  */
kill(all);
declare(z,complex);
declare(F,complex);
assume(A[2]>A[1]);
F1:-%i*\Gamma[1]/2/%pi*log(z-A[1]);
F2:-%i*\Gamma[2]/2/%pi*log(z-A[2]);
F0:F=F1+F2;
V1:v[x1]-%i*v[y1]=subst([z=A[1]]
  ,diff(F2,z,1));
V2:v[x2]-%i*v[y2]=subst([z=A[2]]
  ,diff(F1,z,1));
VY1:solve(imagpart(V1),v[y1])[1];
VY2:solve(imagpart(V2),v[y2])[1];
v[y2]/(A[2]-b)+v[y1]/(b-A[1])=0;
solve(%,b)[1];
subst([VY1,VY2],%);
B1:factor(%);
\omega[2]*(A[2]-b)=v[y2];
factor(subst([VY2,B1],%));
factor(solve(%,\omega[2])[1]);
\omega[1]*(b-A[1])=-v[y1];
factor(subst([VY1,B1],%));
factor(solve(%,\omega[1])[1]);
```

x 軸上 $x=A_1$ に渦循環強さ：Γ_1、$x=A_2$ に渦循環強さ：Γ_2 を置くと、(5.1.33) 式から複素ポテンシャルは下記となる。

$$F=-\frac{i\,\Gamma_2\log(z-A_2)}{2\,\pi}-\frac{i\,\Gamma_1\log(z-A_1)}{2\,\pi}$$

渦糸 2 による渦糸 1 の速度：v_{y1} は、渦糸 1 による渦糸 2 の速度：v_{y2} は次式から、

$$v_{x1}-i\,v_{y1}=-\frac{i\,\Gamma_2}{2\,\pi\,(A_1-A_2)}$$

$$v_{x2}-i\,v_{y2}=-\frac{i\,\Gamma_1}{2\,\pi\,(A_2-A_1)}$$

$$v_{y1}=-\frac{\Gamma_2}{2\,\pi\,A_2-2\,\pi\,A_1},\quad v_{y2}=\frac{\Gamma_1}{2\,\pi\,A_2-2\,\pi\,A_1}$$

回転中心である点：B は次式で得られる。

$$\frac{v_{y2}}{A_2-b}+\frac{v_{y1}}{b-A_1}=0$$

$$b=\frac{\Gamma_2\,A_2+\Gamma_1\,A_1}{\Gamma_2+\Gamma_1}$$

その回転角速度：ω は、

$$\omega_2\,(A_2-b)=v_{y2}$$

$$\omega_2=\frac{\Gamma_2+\Gamma_1}{2\,\pi\,(A_2-A_1)^2}$$

$$\omega_1\,(b-A_1)=-v_{y1}$$

$$\omega_1=\frac{\Gamma_2+\Gamma_1}{2\,\pi\,(A_2-A_1)^2}$$

例題 5.3.18　直交する壁に置いた渦の動き

$x-y$ 軸を壁とし、その中に置いた渦糸の運動を求める。

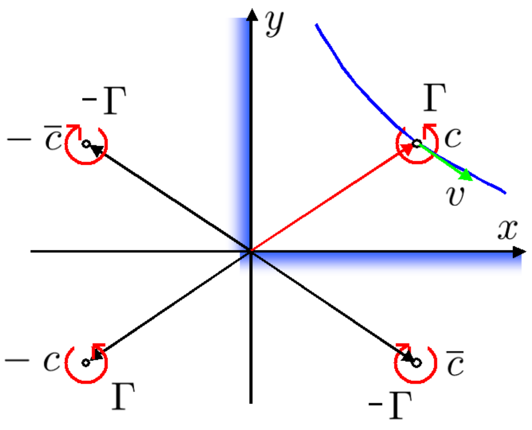


図 5.3.45: 直交する壁に置いた渦の動き

```
/*  直交する壁に置いた渦の動き  */
kill(all);
declare(z,complex);
declare(F,complex);
declare(c,complex);
assume(r>0);
F1:F[1]=-%i*\Gamma/2/%pi*log(z-c);
F2:F[2]=+%i*\Gamma/2/%pi*log(z-conjugate(
 c));
F3:F[3]=-%i*\Gamma/2/%pi*log(z+c);
F4:F[4]=+%i*\Gamma/2/%pi*log(z+conjugate(
 c));
F0:F=rhs(F1)+rhs(F2)+rhs(F3)+rhs(F4);
```

第 1 象限に置いた渦の動きを求める。第 1 象限の複素ポテンシャル：F_1 とし、第 4 象限の複素ポテンシャル：F_2、第 3 象限の複素ポテンシャル：F_3、第 2 象限の複素ポテンシャル：F_4 とすると、

$$F_1=-\frac{i\,\Gamma\log(z-c)}{2\,\pi},\quad F_2=\frac{i\,\Gamma\log(z-\bar{c})}{2\,\pi}$$

$$F_3=-\frac{i\,\Gamma\log(z+c)}{2\,\pi},\quad F_4=\frac{i\,\Gamma\log(z+\bar{c})}{2\,\pi}$$

流れ全体の複素ポテンシャル：F は下記となる。

$$\begin{aligned}F=&\frac{i\,\Gamma\log(z+\bar{c})}{2\,\pi}+\frac{i\,\Gamma\log(z-\bar{c})}{2\,\pi}\\&-\frac{i\,\Gamma\log(z+c)}{2\,\pi}-\frac{i\,\Gamma\log(z-c)}{2\,\pi}\end{aligned}\tag{5.3.79}$$

```
F01:F=rhs(F2)+rhs(F3)+rhs(F4);
VXY1:v[x]-%i*v[y]=diff(rhs(F01),z,1);
VXY2:subst([z=r*%e^(%i*\theta),
  c=r*%e^(%i*\theta)],VXY1);
VX1:v[x]=realpart(rhs(VXY2));
VY1:v[y]=-imagpart(rhs(VXY2));
```

```
VR1:v[r]=v[x]*cos(\theta)+v[y]*sin(\theta);
VT1:v[\theta]=-v[x]*sin(\theta)
  +v[y]*cos(\theta);
VR2:trigsimp(subst([VX1,VY1],VR1));
VT2:trigsimp(subst([VX1,VY1],VT1));
VR3:v[r]='diff(r,t,1);
VT3:v[\theta]=r*'diff(\theta,t,1);
VR21:subst([VR3],VR2);
VT21:subst([VT3],VT2);
VT22:VT21/r;
'diff(r,\theta,1)=rhs(VR21)/rhs(VT22);
factor(%/r);
VRT1:trigrat(%);
'integrate(1/r,r)='integrate(rhs(VRT1)
  ,\theta);
ev(%,integrate);
lhs(%)=rhs(%)+log(a);
logcontract(%)*2;
%e^(lhs(%))=%e^(rhs(%));
```

第 1 象限に置いた渦糸の移動速度は、第 1 象限の複素ポテンシャル：F_1 を除いた下記の複素ポテンシャル：f を用いて、

$$f=\frac{i\,\Gamma\log(z+\bar{c})}{2\,\pi}+\frac{i\,\Gamma\log(z-\bar{c})}{2\,\pi}-\frac{i\,\Gamma\log(z+c)}{2\,\pi}$$

渦糸の移動速度は下記の式に渦糸の位置を代入し、

$$\begin{aligned}v_x-i\,v_y=&\frac{d}{d\,z}\,f=\frac{i\,\Gamma}{2\,\pi\,(z+\bar{c})}+\frac{i\,\Gamma}{2\,\pi\,(z-\bar{c})}\\&-\frac{i\,\Gamma}{2\,\pi\,(z+c)}\\=&\frac{i\,\Gamma}{2\,\pi\,(r\,e^{i\,\theta}+r\,e^{-i\,\theta})}+\frac{i\,\Gamma}{2\,\pi\,(r\,e^{i\,\theta}-r\,e^{-i\,\theta})}\\&-\frac{i\,\Gamma\,e^{-i\,\theta}}{4\,\pi\,r}\end{aligned}$$

上式の実部と虚部から、

$$v_x=-\frac{\Gamma\sin(\theta)}{4\,\pi\,r}+\frac{\Gamma}{4\,\pi\,r\sin(\theta)}$$

$$v_y=-\frac{\Gamma}{4\,\pi\,r\cos(\theta)}+\frac{\Gamma\cos(\theta)}{4\,\pi\,r}$$

v_x, v_y と v_r, v_θ の関係は、

$$v_r=\sin(\theta)\;v_y+\cos(\theta)\;v_x$$

$$v_\theta=\cos(\theta)\;v_y-\sin(\theta)\;v_x$$

上式を代入し、v_r, v_θ で表現すると、

$$v_r=\frac{2\,\Gamma\cos(\theta)^2-\Gamma}{4\,\pi\,r\cos(\theta)\,\sin(\theta)},\quad v_\theta=-\frac{\Gamma}{4\,\pi\,r}$$

また、次の関係がある。

$$v_r = \frac{d}{d\,t}\,r, \quad v_\theta = r\left(\frac{d}{d\,t}\,\theta\right)$$

上記から、

$$\frac{d}{d\,t}\,r = \frac{2\,\Gamma\cos(\theta)^2 - \Gamma}{4\,\pi\,r\cos(\theta)\,\sin(\theta)}, \quad r\left(\frac{d}{d\,t}\,\theta\right) = -\frac{\Gamma}{4\,\pi\,r}$$

この比をとり、時間を消去すると、渦糸が移動する軌跡の関係式が得られ、

$$\frac{d}{d\,\theta}\,r = -\frac{r\left(2\,\Gamma\cos(\theta)^2 - \Gamma\right)}{\Gamma\cos(\theta)\,\sin(\theta)}$$

整理すると、

$$\frac{\frac{d}{d\,\theta}\,r}{r} = -\frac{2\cos(2\,\theta)}{\sin(2\,\theta)}$$

両辺積分すると、

$$\int \frac{1}{r}dr = -2\int \frac{\cos(2\,\theta)}{\sin(2\,\theta)}d\theta$$

$$\log(r) = \log(a) - \log(\sin(2\,\theta))$$

整理し、

$$2\log(r) = 2\log\left(\frac{a}{\sin(2\,\theta)}\right)$$

まとめると、渦糸が移動する軌跡の関係式が得らる。

$$r^2 = \frac{a^2}{\sin(2\,\theta)^2}$$

```
PS1:\Psi=imagpart(subst([z=x+%i*y,c=x[0]
  +%i*y[0]],rhs(F0)));
subst([\Gamma=1,x[0]=2,y[0]=1],PS1);
subst([\Gamma=1,x[0]=10,y[0]=0],PS1);
subst([\Gamma=1,x[0]=0,y[0]=10],PS1);
```

流れ関数 : Ψ は、(5.3.79) 式に $z = x + iy, c = x_0 + iy_0$ を代入し、その虚部から下記となる。

$$\Psi = -\frac{\Gamma\log\left((y+y_0)^2 + (x+x_0)^2\right)}{4\,\pi} + \frac{\Gamma\log\left((y+y_0)^2 + (x-x_0)^2\right)}{4\,\pi} + \frac{\Gamma\log\left((y-y_0)^2 + (x+x_0)^2\right)}{4\,\pi} - \frac{\Gamma\log\left((y-y_0)^2 + (x-x_0)^2\right)}{4\,\pi}$$

$\Gamma = 1$、渦位置 : $x_0 = 2, y_0 = 1$ を上式に代入し、流線を描くと下記となる。

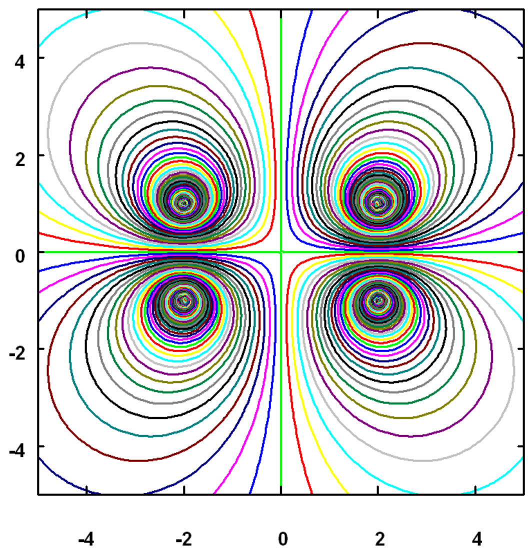


図 5.3.46: 直交する壁に置いた渦の流線 ($\Gamma = 1$、渦位置 : $x_0 = 2, y_0 = 1$)

```
#!/gnuplot
set xrange [-5:5]
set yrange [-5:5]
set isosamples 150,150
set contour base
set cntrparam levels incremental -20,0.01
,20
unset key
unset surface
set view map
splot -log((y+1)**2+(x+2)**2)
/(12.56636)+log((y+1)**2+(x-2)**2)
/(12.56636)
+log((y-1)**2+(x+2)**2)/(12.56636)
-log((y-1)**2+(x-2)**2)/(12.56636)
#    EOF
```

例題 5.3.19　円柱の外に置いた渦糸の運動

半径 : A の円柱の外の、$z = r\,e^{i\,\theta}$ に渦循環強さ : Γ の渦糸を置いたときの流れを求める。

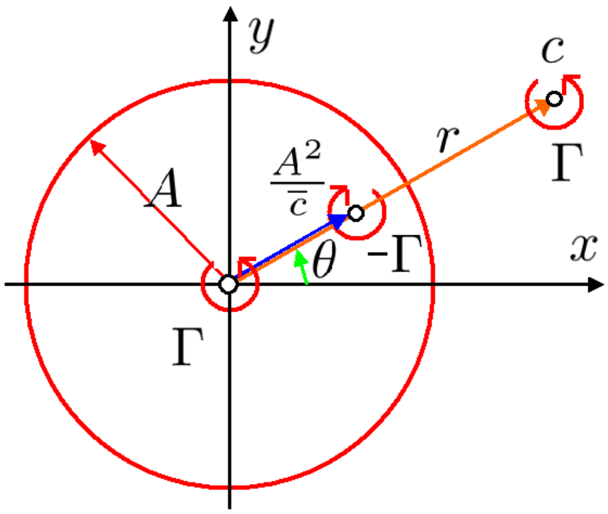


図 5.3.47: 円柱の外に置いた渦糸の運動

```
/*  円柱の外に置いた渦糸の運動  */
kill(all);
declare(z,complex);
declare(F,complex);
declare(c,complex);
F0:-%i*\Gamma*log(z-c)/2/%pi;
subst([z=A^2/conjugate(z)],F0);
conjugate(%);
F1:(%i*Gamma*(log(A^2/z-conjugate(c))))
  /(2*%pi);
FF1:F=F0+F1;
factor(logcontract(%));
F11:factor(F1);
F2:-%i*\Gamma*log(z)/2/%pi;
F12:F11-F2;
F13:logcontract(F12);
F3:-%i*Gamma*log(-1/(conjugate(c)))/2/%pi;
F14:F13-F3;
F15:expand(logcontract(F14));
F4:F=F0+F15+F2+F3;
F5:F=F0+F15+F2;
```

$z = c = R\,e^{i\,\theta}$ に渦循環強さ : Γ の渦糸を置いたときの複素ポテンシャル : F_0 は (5.1.31) 式から、

$$F_0 = -\frac{i\,\Gamma \log(z-c)}{2\,\pi}$$

5.1.16 円定理 (110 ページ) から、半径 : A の円が境界となるための複素ポテンシャル : F_1 は、

$$F_1 = \frac{i\,\Gamma\,\overline{\left(\log\left(\frac{A^2}{\bar{z}} - c\right)\right)}}{2\,\pi} = \frac{i\,\Gamma \log\left(\frac{A^2}{z} - \bar{c}\right)}{2\,\pi} \qquad (5.3.80)$$

以上から、全体の複素ポテンシャルは、$F = F_0 + F_1$ から、整理して、

$$\begin{aligned} F &= -\frac{i\,\Gamma \log(z-c)}{2\,\pi} + \frac{i\,\Gamma \log\left(\frac{A^2}{z} - \bar{c}\right)}{2\,\pi} \\ &= \frac{i\,\Gamma \log\left(z - \frac{A^2}{\bar{c}}\right)}{2\,\pi} - \frac{i\,\Gamma \log(z-c)}{2\,\pi} - \frac{i\,\Gamma \log(z)}{2\,\pi} \\ &\quad - \frac{i \log\left(-\frac{1}{\bar{c}}\right)\Gamma}{2\,\pi} \end{aligned}$$

右辺最終項は定数のため削除して、半径 : A の円柱の外に渦糸を置いたときの複素ポテンシャルは下記となる。

$$F = \frac{i\,\Gamma \log\left(z - \frac{A^2}{\bar{c}}\right)}{2\,\pi} - \frac{i\,\Gamma \log(z-c)}{2\,\pi} - \frac{i\,\Gamma \log(z)}{2\,\pi} \qquad (5.3.81)$$

```
F6:F=F15+F2;
DF6:'diff(F,z,1)=diff(rhs(F6),z,1);
VXY1:v[x]-%i*v[y]=rhs(DF6);
VXY2:subst([z=r*%e^(%i*\theta),
  c=r*%e^(%i*\theta)],VXY1);
VX1:v[x]=realpart(rhs(VXY2));
VY1:v[y]=-imagpart(rhs(VXY2));
VR1:v[r]=v[x]*cos(\theta)+v[y]*sin(\theta);
VT1:v[\theta]=-v[x]*sin(\theta)
  +v[y]*cos(\theta);
VR2:trigsimp(subst([VX1,VY1],VR1));
VT2:trigsimp(subst([VX1,VY1],VT1));
PS1:\Psi=imagpart(subst([z=x+%i*y,
  c=r*%e^(%i*\theta)],rhs(F5)));
subst([\Gamma=1,A=1,r=1.5,\theta=0],PS1);
subst([x=1,y=0],%);
```

円柱の外に置いた渦糸の移動速度は、(5.3.81) 式から、右辺第二項の渦糸自体の複素ポテンシャルを除き、下記のから求められる。

$$f = -\frac{i\,\Gamma \log(z)}{2\,\pi} + \frac{i\,\Gamma \log\left(z - \frac{A^2}{\bar{c}}\right)}{2\,\pi}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\,z} f = v_x - i\,v_y &= -\frac{i\,\Gamma}{2\,\pi\,z} + \frac{i\,\Gamma}{2\,\pi\,\left(z - \frac{A^2}{\bar{c}}\right)} \\ &= -\frac{i\,\Gamma}{2\,\pi\,z} + \frac{i\,\Gamma}{2\,\pi\,\left(z - \frac{A^2}{\bar{c}}\right)} \end{aligned}$$

渦糸位置 : $z = r\,e^{i\,\theta}, c = r\,e^{i\,\theta}$ を代入すると、

$$v_x - i\,v_y = -\frac{i\,\Gamma\,e^{-i\,\theta}}{2\,\pi\,r} + \frac{i\,\Gamma}{2\,\pi\,\left(r\,e^{i\,\theta} - \frac{e^{i\,\theta} A^2}{r}\right)}$$

上式から、v_x, v_y は、

$$v_x = -\frac{\Gamma \sin(\theta)}{2\pi r} + \frac{\Gamma \left(r \sin(\theta) - \frac{\sin(\theta) A^2}{r}\right)}{2\pi \left(\left(r \sin(\theta) - \frac{\sin(\theta) A^2}{r}\right)^2 + \left(r \cos(\theta) - \frac{\cos(\theta) A^2}{r}\right)^2\right)}$$

$$v_y = -\frac{\Gamma \left(r \cos(\theta) + \frac{\cos(\theta) A^2}{r}\right)}{2\pi \left(\left(r \sin(\theta) - \frac{\sin(\theta) A^2}{r}\right)^2 + \left(r \cos(\theta) - \frac{\cos(\theta) A^2}{r}\right)^2\right)} + \frac{\Gamma \cos(\theta)}{2\pi r}$$

v_x, v_y と円柱座標の v_r, v_θ の関係は、

$$v_r = \sin(\theta)\ v_y + \cos(\theta)\ v_x, \quad v_\theta = \cos(\theta)\ v_y - \sin(\theta)\ v_x$$

上式を代入すると、

$$v_r = 0, \quad v_\theta = \frac{\Gamma A^2}{2\pi r A^2 - 2\pi r^3}$$

$r > A$ であるから、$\Gamma > 0$ とすると、$v_\theta < 0$ となり、渦糸は時計方向へ回る。

(5.3.81) 式に $c = r e^{i\theta}$ を代入する。複素ポテンシャルの虚部が流れ関数：Ψ となり、

$$\Psi = \frac{\Gamma \log\left(\left(y - \frac{\sin(\theta) A^2}{r}\right)^2 + \left(x - \frac{\cos(\theta) A^2}{r}\right)^2\right)}{4\pi} - \frac{\Gamma \log\left((y - r\sin(\theta))^2 + (x - r\cos(\theta))^2\right)}{4\pi} - \frac{\Gamma \log\left(y^2 + x^2\right)}{4\pi}$$

$\Gamma = 1, A = 1, r = 1.5, \theta = 0$ を上記に代入し、下記の gnuplot から、流線は下記となる。

```
#!/gnuplot
set xrange [-2:5]
set yrange [-3:3]
set isosamples 150,150
set contour base
set cntrparam levels incremental -19.93547,
  0.02,20
unset key
unset surface
set view map
splot -log(y**2+x**2)/(12.56636)+log(y**2
  +(x-0.66666666666667)**2)/(12.56636)
  -log(y**2+(x-1.5)**2)/(12.56636)
#    EOF
```

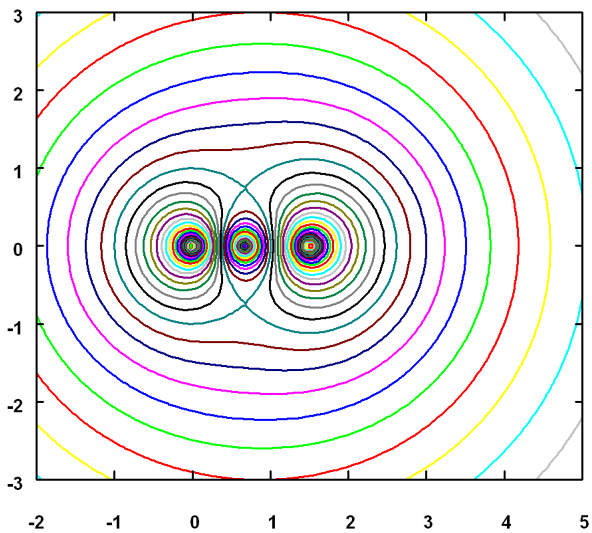


図 5.3.48: 円柱の外に置いた渦糸の流線 ($\Gamma = 1, A = 1, r = 1.5, \theta = 0$)

例題 5.3.20　一様流中に置いた円柱の背後の渦対

x 軸方向、流速：U の一様流中に置いた半径：A の円柱の外の $z=c,\bar{c}$ の渦対の流れを求める。

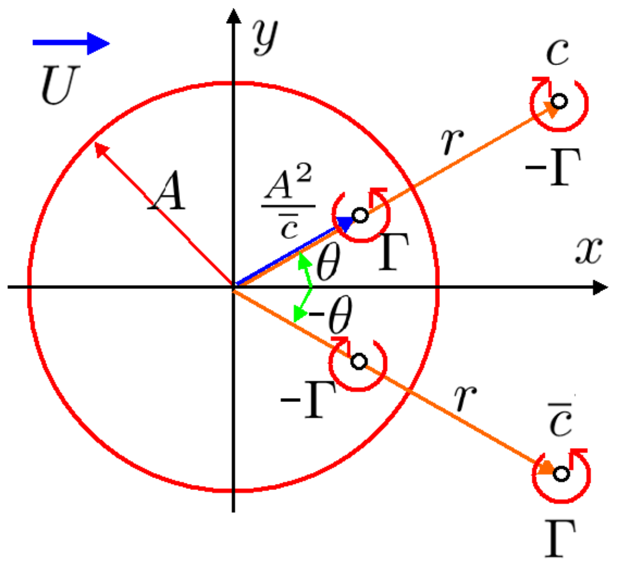


図 5.3.49: 一様流中に置いた円柱の背後の渦対

```
/*  円柱の背後の渦対  */
kill(all);
declare(z,complex);
declare(F,complex);
declare(c,complex);
assume(r>A);
F0:U*z+U*A^2/z;
F1:-(%i*Gamma*log(z-A^2/conjugate(c)))
  /(2*%pi)+(%i*Gamma*log(z-c))/(2*%pi)
  +(%i*Gamma*log(z))/(2*%pi);
F2:+(%i*Gamma*log(z-A^2
  /conjugate(conjugate(c))))/(2*%pi)
  -(%i*Gamma*log(z-conjugate(c)))
  /(2*%pi)-(%i*Gamma*log(z))/(2*%pi);
F3:F=F0+F1+F2;
```

一様流の複素ポテンシャルは、(5.3.10) 式から、

$$F_0=\frac{A^2\,U}{z}+z\,U$$

$z=c$ に渦循環強さ：Γ の渦糸を置いたときの複素ポテンシャル：F_1 は、(5.3.81) 式から、

$$F_1=-\frac{i\,\Gamma\log\left(z-\frac{A^2}{\bar{c}}\right)}{2\,\pi}+\frac{i\,\Gamma\log(z-c)}{2\,\pi}+\frac{i\,\Gamma\log(z)}{2\,\pi}$$

x 軸に対称の $z=\bar{c}$ に渦循環強さ：$-\Gamma$ の渦糸を置いたときの複素ポテンシャル：F_2 は、

$$F_2=\frac{i\,\Gamma\log\left(z-\frac{A^2}{c}\right)}{2\,\pi}-\frac{i\,\Gamma\log(z-\bar{c})}{2\,\pi}-\frac{i\,\Gamma\log(z)}{2\,\pi}$$

以上から、全体の複素ポテンシャル：F は、

$$F=\frac{A^2\,U}{z}+z\,U-\frac{i\,\Gamma\log\left(z-\frac{A^2}{\bar{c}}\right)}{2\,\pi}+\frac{i\,\Gamma\log\left(z-\frac{A^2}{c}\right)}{2\,\pi}-\frac{i\,\Gamma\log(z-\bar{c})}{2\,\pi}+\frac{i\,\Gamma\log(z-c)}{2\,\pi} \tag{5.3.82}$$

```
F4:F=rhs(F3)-(%i*Gamma*log(z-c))/(2*%pi);
DF4:'diff(F,z,1)=diff(rhs(F4),z,1);
DF40:subst([z=c],rhs(DF4)=0);
DF41:rest(lhs(DF40),-3);
DF5:DF41=-(lhs(DF40)-DF41);
DF51:factor(%);
DF52:DF51/(A-c)/(A+c)*c^2/\Gamma;
conjugate(rhs(DF52))=rhs(DF52);
DF53:factor(lhs(%)-rhs(%)=0);
DF6:A^4-2*c*conjugate(c)*A^2+
  c*conjugate(c)^3-c^2*conjugate(c)^2
  +c^3*conjugate(c)=0;
DF61:A^4-2*c*conjugate(c)*A^2
  +c^2*conjugate(c)^2;
DF62:lhs(DF6)-DF61;
DF63:factor(DF61)=-factor(DF62);
DF7:factor(subst([c=r*%e^(%i*\theta)],
 DF63));
DF71:trigsimp(realpart(DF7));
DF72:trigsimp(imagpart(DF7));
subst([8*r^4*sin(theta)^4=a],%);
DF721:solve(%,a)[1];
subst([8*r^4*sin(theta)^4=a],DF71);
trigsimp(subst([DF721],%));
DF711:factor(subst([sin(2*\theta)=
  2*sin(\theta)*cos(\theta)],%));
DF712:factor(solve(%,sin(\theta)^2)[1]);
DF713:solve(DF712,sin(\theta))[1];
DF714:solve(DF713,\theta)[1];
```

$z=c$ における渦糸の移動速度は、それ自体の複素ポテンシャルを除いて、

$$F=\frac{A^2\,U}{z}+z\,U-\frac{i\,\Gamma\log\left(z-\frac{A^2}{\bar{c}}\right)}{2\,\pi}+\frac{i\,\Gamma\log\left(z-\frac{A^2}{c}\right)}{2\,\pi}-\frac{i\,\Gamma\log(z-\bar{c})}{2\,\pi}$$

渦糸の移動速度は $\frac{d}{d\,z}F=v_x-i\,v_y$ からこれを零と置き、

$$\frac{d}{d\,z}F=-\frac{A^2\,U}{z^2}+U-\frac{i\,\Gamma}{2\,\pi\,\left(z-\frac{A^2}{\bar{c}}\right)}+\frac{i\,\Gamma}{2\,\pi\,\left(z-\frac{A^2}{c}\right)}-\frac{i\,\Gamma}{2\,\pi\,(z-\bar{c})}=0$$

上式を整理すると、

$$-\frac{U}{\Gamma}=-\frac{i\,c^2\,\left(A^4+\overline{c}^2\,A^2-3\,c\,\overline{c}\,A^2+c^3\,\overline{c}\right)}{2\,\pi\,\left(\overline{c}-c\right)\,\left(A-c\right)^2\left(A+c\right)^2\,\left(A^2-c\,\overline{c}\right)} \tag{5.3.83}$$

上式の左辺は実数であるから、上式の右辺とその共役複素数は等しい。これを整理して、

$$-\frac{i\,\left(\overline{c}+c\right)\,A^2\,\left(A^4-2\,c\,\overline{c}\,A^2+c\,\overline{c}^3-c^2\,\overline{c}^2+c^3\,\overline{c}\right)}{2\,\pi\left(A-c\right)^2\left(A+c\right)^2\left(A-\overline{c}\right)^2\left(A+\overline{c}\right)^2}=0$$

上式から、

$$A^4-2\,c\,\overline{c}\,A^2+c\,\overline{c}^3-c^2\,\overline{c}^2+c^3\,\overline{c}=0$$

整理して、

$$\left(A^2-c\,\overline{c}\right)^2=-c\,\overline{c}\left(\overline{c}-c\right)^2 \tag{5.3.84}$$

$c=r\,e^{i\,\theta}$ を代入し、

$$\left(A-r\right)^2\left(A+r\right)^2=-r^4\,e^{-2\,i\,\theta}\left(e^{i\,\theta}-1\right)^2\left(e^{i\,\theta}+1\right)^2$$

上式の実部は、

$$\begin{aligned}A^4-2\,r^2\,A^2+r^4=&\,8\,r^4\cos\left(\theta\right)\,\sin\left(\theta\right)^3\sin\left(2\,\theta\right)\\&+\left(4\,r^4\sin\left(\theta\right)^2-8\,r^4\sin\left(\theta\right)^4\right)\,\cos\left(2\,\theta\right)\end{aligned}$$

虚部は、

$$\begin{aligned}0=&\left(8\,r^4\sin\left(\theta\right)^4-4\,r^4\sin\left(\theta\right)^2\right)\,\sin\left(2\,\theta\right)\\&+8\,r^4\cos\left(\theta\right)\,\sin\left(\theta\right)^3\cos\left(2\,\theta\right)\end{aligned}$$

上記の実部と虚部の関係から、渦糸が静止する位置関係式が得られる。

$$\left(A-r\right)^2\left(A+r\right)^2=4\,r^4\sin\left(\theta\right)^2 \tag{5.3.85}$$

$0<\theta<\pi/2$ の範囲では、

$$\sin\left(\theta\right)=-\frac{A^2-r^2}{2\,r^2} \tag{5.3.86}$$

上記の曲線は $r\to\infty$ のとき、$\theta\to\pi/6$ に漸近する。

```
DF8N:num(rhs(DF52));
DF8N1:-%i*c^2*(A^4-2*c*conjugate(c)*A^2
  +c^2*conjugate(c)^2);
DF8N2:DF8N-DF8N1;
DF8:lhs(DF52)=(factor(DF8N1)+factor(DF8N2))
  /denom(rhs(DF52));
subst([DF63],%);
DF81:factor(%);
solve(%,\Gamma)[1]/U;
DF82:factor(subst([c=r*%e^(%i*\theta)],%));
expand(realpart(%));
subst([cos(\theta)^4=(1-sin(\theta)^2)^2,
  cos(\theta)^2=1-sin(\theta)^2,DF713],%);
DF83:factor(%);
```

(5.3.83) 式を変形し、(5.3.84) 式を代入し、

$$\begin{aligned}-\frac{U}{\Gamma}=&\frac{-i\,c^2\left(A^2-c\,\overline{c}\right)^2-i\,c^2\,\overline{c}\,\left(\overline{c}-c\right)\,\left(A-c\right)\,\left(A+c\right)}{2\,\pi\,\left(\overline{c}-c\right)\,\left(A-c\right)^2\left(A+c\right)^2\,\left(A^2-c\,\overline{c}\right)}\\=&\frac{i\,c^3\,\overline{c}\left(\overline{c}-c\right)^2-i\,c^2\,\overline{c}\,\left(\overline{c}-c\right)\,\left(A-c\right)\,\left(A+c\right)}{2\,\pi\,\left(\overline{c}-c\right)\,\left(A-c\right)^2\left(A+c\right)^2\,\left(A^2-c\,\overline{c}\right)}\\=&-\frac{i\,c^2\,\overline{c}}{2\,\pi\left(A-c\right)^2\left(A+c\right)^2}\end{aligned}$$

上式から、

$$\frac{\Gamma}{U}=-\frac{2\,i\,\pi\,A^4-4\,i\,\pi\,c^2\,A^2+2\,i\,\pi\,c^4}{c^2\,\overline{c}}$$

$c=r\,e^{i\,\theta}$ を代入し、その実部は、

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma}{U}=&-\frac{2\,\pi\sin\left(\theta\right)\,A^4}{r^3}\\&-\frac{4\,\pi\sin\left(\theta\right)^3\,A^2}{r}-\frac{4\,\pi\cos\left(\theta\right)^2\sin\left(\theta\right)\,A^2}{r}\\&-2\,\pi\,r\sin\left(\theta\right)^5+4\,\pi\,r\cos\left(\theta\right)^2\sin\left(\theta\right)^3+6\,\pi\,r\end{aligned}$$

(5.3.86) 式を代入し、渦循環強さの関係式が得られる。

$$\frac{\Gamma}{U}=\frac{2\,\pi\left(A-r\right)^2\left(A+r\right)^2\,\left(A^2+r^2\right)}{r^5}$$

```
PS1:\Psi=imagpart(subst([z=x+%i*y,
  c=r*%e^(%i*\theta)],rhs(F3)));
TH1:subst([A=1,r=1.3],DF714);
GM1:subst([A=1,r=1.3,U=1,TH1],DF83);
PS2:subst([A=1,r=1.3,U=1,TH1,GM1],PS1);
subst([x=1,y=0],PS2);
```

流れ関数は複素ポテンシャル：(5.3.82) 式に $z=x+i\,y,c=r\,e^{i\,\theta}$ を代入し、その虚部から得られ、

$$\begin{aligned}\Psi=&-\frac{y\,A^2\,U}{y^2+x^2}+y\,U\\&+\frac{\Gamma\log\left(\left(\frac{\sin(\theta)\,A^2}{r}+y\right)^2+\left(x-\frac{\cos(\theta)\,A^2}{r}\right)^2\right)}{4\,\pi}\\&-\frac{\Gamma\log\left(\left(y-\frac{\sin(\theta)\,A^2}{r}\right)^2+\left(x-\frac{\cos(\theta)\,A^2}{r}\right)^2\right)}{4\,\pi}\\&-\frac{\Gamma\log\left(\left(y+r\sin\left(\theta\right)\right)^2+\left(x-r\cos\left(\theta\right)\right)^2\right)}{4\,\pi}\\&+\frac{\Gamma\log\left(\left(y-r\sin\left(\theta\right)\right)^2+\left(x-r\cos\left(\theta\right)\right)^2\right)}{4\,\pi}\end{aligned}$$

```
#!/gnuplot
set xrange [-2:5]
set yrange [-3:3]
set isosamples 150,150
set contour base
set cntrparam levels incremental -20,0.1,20
unset key
unset surface
set view map
splot -0.17246608473631*log((y
+0.26538461538462)**2+(x-1.272623670185794)
**2)+0.17246608473631*log((y
+0.15703231679563)**2+(x-0.75303175750639)
**2)-y/(y**2+x**2)+y-0.17246608473631
*log((y-0.15703231679563)**2+(x
-0.75303175750639)**2)+0.17246608473631
*log((y-0.26538461538462)**2
+(x-1.272623670185794)**2)
#    EOF
```

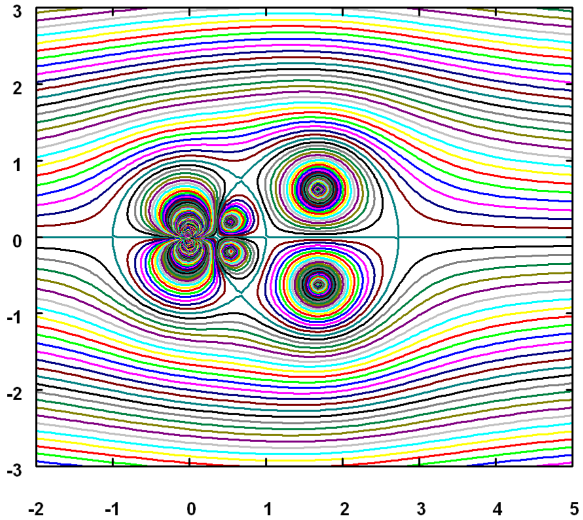


図 5.3.51: 一様流中に置いた円柱の背後の渦対 ($A = 1, r = 1.6, U = 1$)

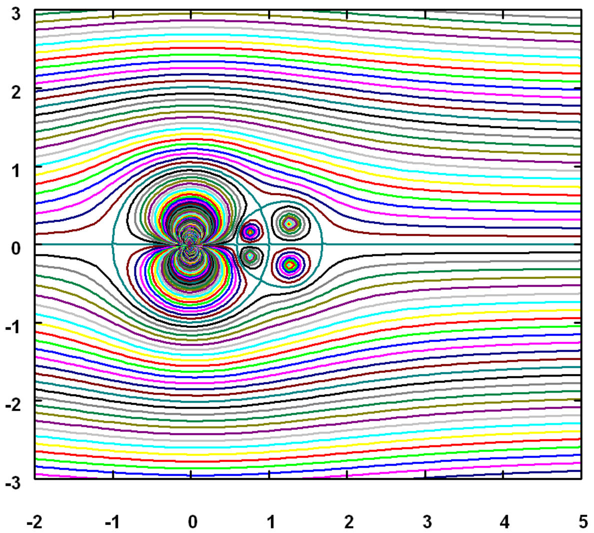


図 5.3.50: 一様流中に置いた円柱の背後の渦対 ($A = 1, r = 1.3, U = 1$)

例題 5.3.21 渦列

x 軸上に a 間隔に渦循環強さ：Γ の渦糸を置いたときの流れを求める [1]。

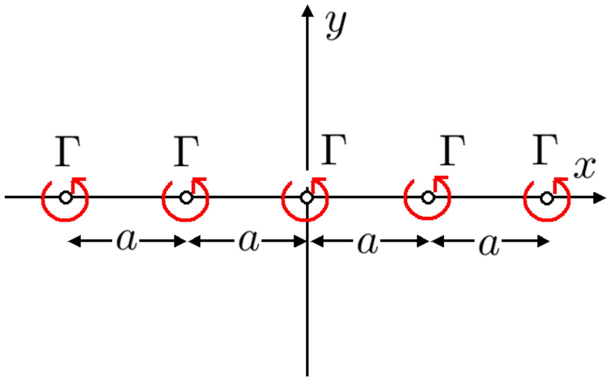


図 5.3.52: 渦列まわりの流れ

```
/* 渦列 */
kill(all);
declare(z,complex);
declare(F,complex);
declare(c,complex);
assume(a>0);
F0:-%i*\Gamma/2/%pi*log(z);
F1:-%i*\Gamma/2/%pi*log(z-a)
  -%i*\Gamma/2/%pi*log(z+a);
F2:-%i*\Gamma/2/%pi*log(z-2*a)
  -%i*\Gamma/2/%pi*log(z+2*a);
F3:-%i*\Gamma/2/%pi*log(z-3*a)
  -%i*\Gamma/2/%pi*log(z+3*a);
LSUM1:F=F0+F1+F2+F3;
```

原点に置いた渦糸の複素ポテンシャル：F_0 は、

$$F_0 = -\frac{i\,\Gamma \log(z)}{2\,\pi}$$

$x = \pm a$ に置いた渦糸の複素ポテンシャル：F_1 は、

$$F_1 = -\frac{i\,\Gamma \log(z+a)}{2\,\pi} - \frac{i\,\Gamma \log(z-a)}{2\,\pi}$$

同様に、$x = 0, \pm a, \pm 2a, \pm 3a$ に置いた渦糸の複素ポテンシャル：F は、

$$\begin{aligned}F = &-\frac{i\,\Gamma \log(z+3\,a)}{2\,\pi} - \frac{i\,\Gamma \log(z+2\,a)}{2\,\pi} \\ &- \frac{i\,\Gamma \log(z+a)}{2\,\pi} \\ &- \frac{i\,\Gamma \log(z-a)}{2\,\pi} - \frac{i\,\Gamma \log(z-2\,a)}{2\,\pi} \\ &- \frac{i\,\Gamma \log(z-3\,a)}{2\,\pi} - \frac{i\,\Gamma \log(z)}{2\,\pi}\end{aligned}$$

[1] L. M. Milne-Thomson : Theretical Hydrodynamics, Fourth Edition [15], 13.71 P.373

```
LSUM2:logcontract(%);
L1:z^7-14*a^2*z^5+49*a^4*z^3-36*a^6*z;
L2:factor(%);
L3:z*(z^2-(3*a)^2)*(z^2-(2*a)^2)*(z^2-a^2);
L4:z*(1-(z/(3*a))^2)*(1-(z/(2*a))^2)*(1
  -(z/a)^2)*(-(a^2))*(-(2*a)^2)*(-(3*a)^2);
logexpand: all;
expand(log(L4));
logexpand: false;
-%i*\Gamma/2/%pi*(log(z)
  +sum(log(1-(z/a)^2/n^2),n,1,inf));
-%i*\Gamma/2/%pi*(log(z*product(1-(z/a)^2
  /n^2,n,1,inf)));
SIN1:%pi*x*product((1-x^2/n^2),n,1,inf)
  =sin(%pi*x);
log(lhs(SIN1))=log(rhs(SIN1));
-%i*\Gamma/2/%pi*subst([x=z/a],%);
F4:F=rhs(%);
```

上式をまとめると、

$$F = -\frac{i\,\Gamma \log\left(z^7 - 14\,a^2\,z^5 + 49\,a^4\,z^3 - 36\,a^6\,z\right)}{2\,\pi}$$

log の中を下記のように整理する。

$$\begin{aligned}&z^7 - 14\,a^2\,z^5 + 49\,a^4\,z^3 - 36\,a^6\,z \\ &= -36\,a^6\,z\left(1 - \frac{z^2}{a^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{4\,a^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{9\,a^2}\right)\end{aligned}$$

上式を log の中に代入し、展開すると、

$$\begin{aligned}F = -\frac{i\,\Gamma}{2\,\pi}\Bigg(&\log\left(1 - \frac{z^2}{9\,a^2}\right) + \log\left(1 - \frac{z^2}{4\,a^2}\right) \\ &+ \log\left(1 - \frac{z^2}{a^2}\right) + \log(z) + 6\log(a) + \log(-36)\Bigg)\end{aligned}$$

定数項を削除し、$n = 3$ 項までを $n \to \infty$ とすると、

$$\begin{aligned}F &= -\frac{i\,\Gamma}{2\,\pi}\left(\left(\sum_{n=1}^{\infty}\log\left(1 - \frac{z^2}{a^2\,n^2}\right)\right) + \log(z)\right) \\ &= -\frac{i\,\Gamma}{2\,\pi}\log\left(z\prod_{n=1}^{\infty}1 - \frac{z^2}{a^2\,n^2}\right)\end{aligned}$$

下記の公式を活用し、

$$\pi\,x\prod_{n=1}^{\infty}1 - \frac{x^2}{n^2} = \sin(\pi\,x)$$

x 軸上に a 間隔に無限個の渦糸を置いたときの複素ポテンシャルは下記となる。

$$\begin{aligned}F &= -\frac{i\,\Gamma}{2\,\pi}\log\left(\frac{\pi\,z}{a}\prod_{n=1}^{\infty}1 - \frac{z^2}{a^2\,n^2}\right) \\ &= -\frac{i\,\Gamma}{2\,\pi}\log\left(\sin\left(\frac{\pi\,z}{a}\right)\right)\end{aligned} \tag{5.3.87}$$

(1) 渦列の移動速度と周辺流速

```
F5:F=rhs(F4)-F0;
DF5:'diff(F,z,1)=diff(rhs(F5),z,1);
DF51:limit(rhs(%),z,0);
DF4:'diff(F,z,1)=diff(rhs(F4),z,1);
COS2:cos(c)=(%e^(%i*c)+%e^(-%i*c))/2;
SIN2:sin(c)=(%e^(%i*c)-%e^(-%i*c))/%i/2;
COS3:subst([c=%pi*z/a],COS2);
SIN3:subst([c=%pi*z/a],SIN2);
DF41:lhs(DF4)=subst([COS3,SIN3,z=%i*y]
 ,rhs(DF4));
'diff(F,z,1)=limit(rhs(DF41),y,inf);
'diff(F,z,1)=limit(rhs(DF41),y,minf);
PS1:\Psi=imagpart(subst([z=x+%i*y],
 rhs(F4)));
subst([a=1,\Gamma=1],PS1);
```

原点に置いた渦糸の移動速度を求める。原点の渦糸の複素ポテンシャルを除き、

$$f=-\frac{i\,\Gamma\log\left(\sin\left(\frac{\pi\,z}{a}\right)\right)}{2\,\pi}+\frac{i\,\Gamma\log\left(z\right)}{2\,\pi}$$

原点の渦糸の移動速度は下記となる。

$$\frac{d}{d\,z}\,f=v_x-i\,v_y=-\frac{i\,\Gamma\cos\left(\frac{\pi\,z}{a}\right)}{2\,a\sin\left(\frac{\pi\,z}{a}\right)}+\frac{i\,\Gamma}{2\,\pi\,z}\rightarrow 0\quad(z\rightarrow 0) \tag{5.3.88}$$

以上から、渦糸は移動しないで停留する。渦列から離れた位置における流速は、(5.3.87) 式から、

$$\frac{d}{d\,z}\,F=-\frac{i\,\Gamma\cos\left(\frac{\pi\,z}{a}\right)}{2\,a\sin\left(\frac{\pi\,z}{a}\right)}$$

下記の関係を代入し、

$$\cos\left(c\right)=\frac{e^{i\,c}+e^{-i\,c}}{2},\quad \sin\left(c\right)=-\frac{i\,\left(e^{i\,c}-e^{-i\,c}\right)}{2}$$

渦列から離れた位置における流速は、$z=i\,y$ を代入し、

$$\frac{d}{d\,z}\,F=\frac{\Gamma\,\left(e^{\frac{\pi\,y}{a}}+e^{-\frac{\pi\,y}{a}}\right)}{2\,a\,\left(e^{-\frac{\pi\,y}{a}}-e^{\frac{\pi\,y}{a}}\right)}$$

以上から、

$$\frac{d}{d\,z}\,F=v_x=-\frac{\Gamma}{2\,a}\quad(y>>a)$$

$$\frac{d}{d\,z}\,F=v_x=+\frac{\Gamma}{2\,a}\quad(y<<-a)$$

渦列より十分上では、x 軸方向と逆方向の一様流となり、渦列より十分下では、x 軸方向の一様流なる。流れ関数：Ψ は (5.3.87) 式に $z=x+i\,y$ を代入し、虚部をとり、

$$\Psi=-\frac{\Gamma\log\left(\sqrt{\cos\left(\frac{\pi\,x}{a}\right)^2\sinh\left(\frac{\pi\,y}{a}\right)^2+\sin\left(\frac{\pi\,x}{a}\right)^2\cosh\left(\frac{\pi\,y}{a}\right)^2}\right)}{2\,\pi}$$

gnuplot を使った流線は下記のようになる。

```
#!/gnuplot
set xrange [-2:2]
set yrange [-2:2]
set isosamples 150,150
set contour base
set cntrparam levels incremental -20,0.02
 ,20
unset key
unset surface
set view map
splot -log(sqrt(cos(3.14159*x)**2
  *sinh(3.14159*y)**2+sin(3.14159*x)**2
  *cosh(3.14159*y)**2))/(2*3.14159)
#    EOF
```

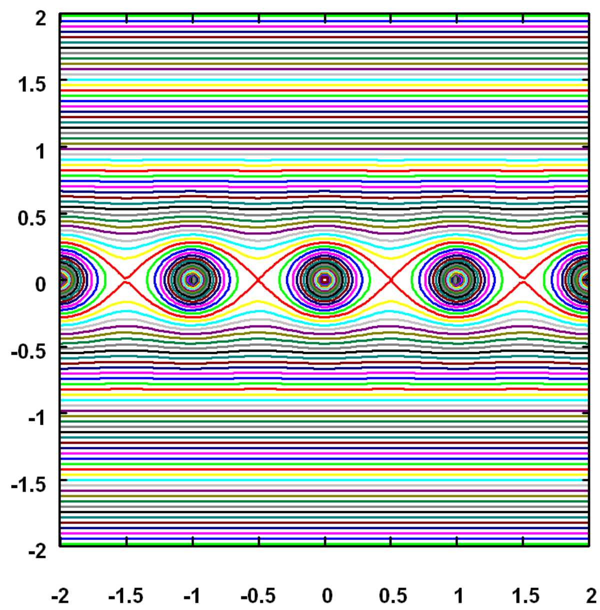


図 5.3.53: 渦列のまわりの流れ $(a=1,\Gamma=1)$

(2) 渦列の安定性 原点の渦糸が直線上の列から外れた場合

```
DF51:subst([cos((%pi*z)/a)=cot((%pi*z)/a)
  *sin((%pi*z)/a)],DF5);
DF52:lhs(%)=subst([z=d[0]],rhs(%));
DF53:first(rhs(DF52));
DF54:taylor(last(rhs(DF52)),d[0],0,5);
lhs(DF5)=DF53+DF54;
DF6:du[0]-%i*dv[0]=rest(rhs(%),-2);
DF61:subst([d[0]=dx+%i*dy],DF6);
```

```
DF62:realpart(DF61);
DF63:imagpart(DF61);
DF62T:'diff(dx(t),t,2)=coeff(rhs(DF62),dy)
  *'diff(dy(t),t,1);
DF63T:-'diff(dy(t),t,2)=coeff(rhs(DF63),dx)
  *'diff(dx(t),t,1);
DF64:desolve([DF62T,DF63T],[dx(t),dy(t)]);
```

原点に置いた渦糸の移動速度は、(5.3.88) 式から下記となる。

$$\frac{d}{d\,z}\,F=\frac{i\,\Gamma}{2\,\pi\,z}-\frac{i\,\Gamma\cot\left(\frac{\pi\,z}{a}\right)}{2\,a}$$

ここで、原点の渦糸を $z=d_0$ の位置にずらすと、その渦糸の移動速度は $z\to d_0$ に置き換えて、

$$\frac{d}{d\,z}\,F=\frac{i\,\Gamma}{2\,\pi\,d_0}-\frac{i\cot\left(\frac{\pi\,d_0}{a}\right)\,\Gamma}{2\,a}$$

上式の右辺第 2 項を d_0 が十分小さいとして Taylor 展開すると、

$$-\frac{i\cot\left(\frac{\pi\,d_0}{a}\right)\,\Gamma}{2\,a}=-\frac{i\,\Gamma}{2\,\pi\,d_0}+\frac{\pi\,i\,\Gamma\,d_0}{6\,a^2}+\frac{\pi^3\,i\,\Gamma\,d_0^3}{90\,a^4}+\frac{\pi^5\,i\,\Gamma\,d_0^5}{945\,a^6}+\ldots$$

上式を代入し、

$$\frac{d}{d\,z}\,F=\frac{\Gamma\,\pi\,i\,d_0}{6\,a^2}+\frac{\Gamma\,\pi^3\,i\,d_0^3}{90\,a^4}+\frac{\Gamma\,\pi^5\,i\,d_0^5}{945\,a^6}+\ldots$$

d_0 の高次項を省略し、渦糸の移動速度は、$d_0 \quad\to i\,dy+dx$ を代入し、

$$du_0-i\,dv_0=\frac{i\,\pi\,d_0\,\Gamma}{6\,a^2}=\frac{i\,\pi\,\left(i\,dy+dx\right)\,\Gamma}{6\,a^2}$$

上式の、実部、虚部は、

$$du_0=-\frac{\pi\,dy\,\Gamma}{6\,a^2},\quad -dv_0=\frac{\pi\,dx\,\Gamma}{6\,a^2}$$

上式を時間：t で更に微分し、

$$\frac{d^2}{d\,t^2}\,\mathrm{dx}\,(t)=-\frac{\pi\,\Gamma\,\left(\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{dy}\,(t)\right)}{6\,a^2},\quad -\frac{d^2}{d\,t^2}\,\mathrm{dy}\,(t)=\frac{\pi\,\Gamma\,\left(\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{dx}\,(t)\right)}{6\,a^2}$$

上記の連立微分方程式の解は、下記となり、原点から少し離れたの渦糸は原点に戻らず、離れ、不安定となる。

$$\begin{aligned}\mathrm{dx}\,(t)=&-\frac{e^{-\frac{\pi\,\Gamma\,t}{6\,a^2}}\,\left(18\,a^4\,\left(\left.\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{dy}\,(t)\right|_{t=0}\right)+18\,a^4\,\left(\left.\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{dx}\,(t)\right|_{t=0}\right)\right)}{6\,\pi\,a^2\,\Gamma}\\&-\frac{e^{\frac{\pi\,\Gamma\,t}{6\,a^2}}\,\left(18\,a^4\,\left(\left.\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{dy}\,(t)\right|_{t=0}\right)-18\,a^4\,\left(\left.\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{dx}\,(t)\right|_{t=0}\right)\right)}{6\,\pi\,a^2\,\Gamma}+\frac{6\,a^2\,\left(\left.\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{dy}\,(t)\right|_{t=0}\right)+\pi\,\mathrm{dx}\,(0)\,\Gamma}{\pi\,\Gamma}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{dy}\,(t)=&-\frac{e^{-\frac{\pi\,\Gamma\,t}{6\,a^2}}\,\left(18\,a^4\,\left(\left.\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{dy}\,(t)\right|_{t=0}\right)+18\,a^4\,\left(\left.\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{dx}\,(t)\right|_{t=0}\right)\right)}{6\,\pi\,a^2\,\Gamma}\\&+\frac{e^{\frac{\pi\,\Gamma\,t}{6\,a^2}}\,\left(18\,a^4\,\left(\left.\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{dy}\,(t)\right|_{t=0}\right)-18\,a^4\,\left(\left.\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{dx}\,(t)\right|_{t=0}\right)\right)}{6\,\pi\,a^2\,\Gamma}+\frac{6\,a^2\,\left(\left.\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{dx}\,(t)\right|_{t=0}\right)+\pi\,\mathrm{dy}\,(0)\,\Gamma}{\pi\,\Gamma}\end{aligned}$$

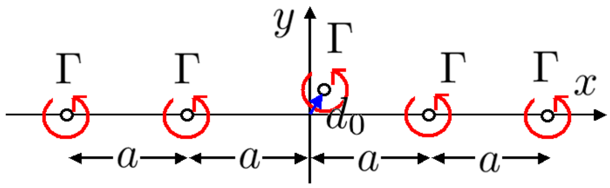


図 5.3.54: 渦列の安定性 (原点の渦糸が直線上の列から外れた場

(3) 渦列の安定性 (渦糸が千鳥状に並んでいる場合)

```
FM:-%i*\Gamma/2/%pi*log(z-m*a-d[m])
  -%i*\Gamma/2/%pi*log(z+m*a-d[-m]);
DFM:diff(FM,z,1);
ZM1:z[m]=z-d[m];
ZM2:z[-m]=z-d[-m];
DM1:solve(ZM1,d[m])[1];
DM2:solve(ZM2,d[-m])[1];
DFM1:subst([DM1,DM2],DFM);
DFM1T:taylor(first(DFM1),z[m],0,3);
DFM2T:taylor(last(DFM1),z[-m],0,3);
'diff(F[m],z,1)=rest(DFM1T,-2)+rest(DFM2T,
 -2);
DFM3:lhs(%)=subst([ZM1,ZM2,z=d[0]],rhs(%));
DMC0:d[0]=d;
DMC1:d[m]=d*cos(m*\theta);
DMC2:d[-m]=d*cos(-m*\theta);
DFM4:factor(subst([DMC0,DMC1,DMC2],DFM3));
DFM5:'diff(F[0],z,1)=sum(rhs(DFM4),m,1
 ,inf);
SUMC:sum((cos(m*\theta)-1)/m^2,m,1,inf)
  =1/4*\theta*(2*%pi-\theta);
```

```
DFM51:'diff(F[0],z,1)=-%i*d*Gamma/(%pi*a^2)
  *1/4*\theta*(2*%pi-\theta);
DFM52:du[0]-%i*dv[0]=subst([d=dx+%i*dy,
  \theta=%pi],rhs(DFM51));
DFM53R:realpart(DFM52);
DFM53I:imagpart(DFM52);
DFM54R:'diff(dx(t),t,2)=coeff(rhs(DFM53R),
  dy)*'diff(dy(t),t,1);
DFM54I:-'diff(dy(t),t,2)=coeff(rhs(DFM53I),
  dx)*'diff(dx(t),t,1);
DFM55:desolve([DFM54R,DFM54I],[dx(t),
 dy(t)]);
```

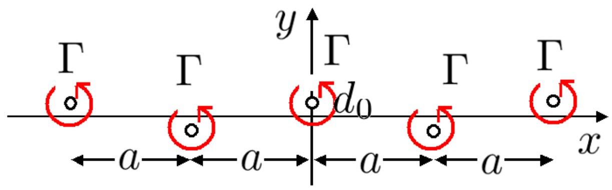


図 5.3.55: 渦列の安定性 (渦糸が千鳥状に並んでいる場合

原点の渦糸を $m=0$ とし、x 軸の正方向の m 番目の渦糸の微小ずれを d_m、負方向の $-m$ 番目の渦糸の微小ずれを d_{-m} とし、この二つの複素ポテンシャル：F_m は、

$$F_m=-\frac{i\,\Gamma\log\left(z-d_m-a\,m\right)}{2\,\pi}-\frac{i\,\Gamma\log\left(z-d_{-m}+a\,m\right)}{2\,\pi}$$

上式を z で微分し、

$$\frac{d}{d\,z}\,F_m=-\frac{i\,\Gamma}{2\,\pi\,\left(z-d_m-a\,m\right)}-\frac{i\,\Gamma}{2\,\pi\,\left(z-d_{-m}+a\,m\right)}$$

微小項を z_m, z_{-m} でまとめ、$z-d_m \to z_m, z-d_{-m} \to z_{-m}$ に置き換え、

$$\frac{d}{d\,z}\,F_m=-\frac{i\,\Gamma}{2\,\pi\,\left(z_m-a\,m\right)}-\frac{i\,\Gamma}{2\,\pi\,\left(z_{-m}+a\,m\right)}$$

z_m, z_{-m} で Taylor 展開し、高次項を省略して、

$$\frac{d}{d\,z}\,F_m=\frac{i\,\Gamma\,z_m}{2\,\pi\,a^2\,m^2}+\frac{i\,\Gamma\,z_{-m}}{2\,\pi\,a^2\,m^2}$$

$z_m \to z-d_m, z_{-m} \to z-d_{-m}$ に戻し、$z=d_0$ とおいて、

$$\frac{d}{d\,z}\,F_m=\frac{i\,\Gamma\,\left(d_0-d_m\right)}{2\,\pi\,a^2\,m^2}+\frac{i\,\Gamma\,\left(d_0-d_{-m}\right)}{2\,\pi\,a^2\,m^2}$$

渦糸が正弦状に並んでいるとして、下記に置き換える。$\theta=\pi$ とすると、正負が逆の渦列となる。

$$d_0=d,\quad d_m=d\cos\left(m\,\theta\right),\quad d_{-m}=d\cos\left(-m\,\theta\right)$$

$$\frac{d}{d\,z}\,F_m=-\frac{i\,d\,\Gamma\,\left(\cos\left(m\,\theta\right)-1\right)}{\pi\,a^2\,m^2}$$

上記を $m=1 \to \infty$ までの和から、無限に続く渦列による原点の渦糸の移動速度が得られる。

$$\frac{d}{d\,z}\,F_0=-\frac{i\,d\,\Gamma\,\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos\left(m\,\theta\right)-1}{m^2}}{\pi\,a^2}$$

ところで、下記の公式から、

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos\left(m\,\theta\right)-1}{m^2}=\frac{\left(2\,\pi-\theta\right)\,\theta}{4}$$

上式を代入し、

$$\frac{d}{d\,z}\,F_0=-\frac{i\,d\,\Gamma\,\left(2\,\pi-\theta\right)\,\theta}{4\,\pi\,a^2}$$

$d=i\,dy+dx, \theta=\pi$ を代入し、

$$du_0-i\,dv_0=-\frac{i\,\pi\,\left(i\,dy+dx\right)\,\Gamma}{4\,a^2}$$

実部、虚部は、

$$du_0=\frac{\pi\,dy\,\Gamma}{4\,a^2},\quad -dv_0=-\frac{\pi\,dx\,\Gamma}{4\,a^2}$$

上式を時間：t で更に微分し、

$$\frac{d^2}{d\,t^2}\,\mathrm{dx}\left(t\right)=\frac{\pi\,\Gamma\,\left(\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{dy}\left(t\right)\right)}{4\,a^2},$$

$$-\frac{d^2}{d\,t^2}\,\mathrm{dy}\left(t\right)=-\frac{\pi\,\Gamma\,\left(\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{dx}\left(t\right)\right)}{4\,a^2}$$

上記の連立微分方程式の解は、下記となり、原点から少し離れたの渦糸は原点に戻らず、離れ、不安定となる。

$$\begin{aligned}\mathrm{dx}\left(t\right)=&\frac{e^{\frac{\pi\,\Gamma\,t}{4\,a^2}}\,\left(8\,a^4\,\left(\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{dy}\left(t\right)\Big|_{t=0}\right)+8\,a^4\,\left(\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{dx}\left(t\right)\Big|_{t=0}\right)\right)}{4\,\pi\,a^2\,\Gamma}\\&+\frac{e^{-\frac{\pi\,\Gamma\,t}{4\,a^2}}\,\left(8\,a^4\,\left(\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{dy}\left(t\right)\Big|_{t=0}\right)-8\,a^4\,\left(\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{dx}\left(t\right)\Big|_{t=0}\right)\right)}{4\,\pi\,a^2\,\Gamma}\\&-\frac{4\,a^2\,\left(\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{dy}\left(t\right)\Big|_{t=0}\right)-\pi\,\mathrm{dx}\left(0\right)\,\Gamma}{\pi\,\Gamma}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{dy}\left(t\right)=&\frac{e^{\frac{\pi\,\Gamma\,t}{4\,a^2}}\,\left(8\,a^4\,\left(\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{dy}\left(t\right)\Big|_{t=0}\right)+8\,a^4\,\left(\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{dx}\left(t\right)\Big|_{t=0}\right)\right)}{4\,\pi\,a^2\,\Gamma}\\&-\frac{e^{-\frac{\pi\,\Gamma\,t}{4\,a^2}}\,\left(8\,a^4\,\left(\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{dy}\left(t\right)\Big|_{t=0}\right)-8\,a^4\,\left(\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{dx}\left(t\right)\Big|_{t=0}\right)\right)}{4\,\pi\,a^2\,\Gamma}\\&-\frac{4\,a^2\,\left(\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{dx}\left(t\right)\Big|_{t=0}\right)-\pi\,\mathrm{dy}\left(0\right)\,\Gamma}{\pi\,\Gamma}\end{aligned}$$

上記の結果から、原点の渦糸が直線上の列から外れた場合でも、渦糸が千鳥状に並んでいる場合でも共に渦列は不安定である。また、原点の渦糸に対する流速は、渦糸が千鳥状に並んでいる方が強く、千鳥状の影響は無視できない程度ある。

例題 5.3.22　Karman 渦列

x 軸上に a 間隔に渦循環強さ：Γ の渦列を置き、$s-i\,b$ だけ下に平行移動した位置に同じ a 間隔に逆の渦循環強さ：$-\Gamma$ の渦列を置いたときの流れ、安定性について調べる [1]。

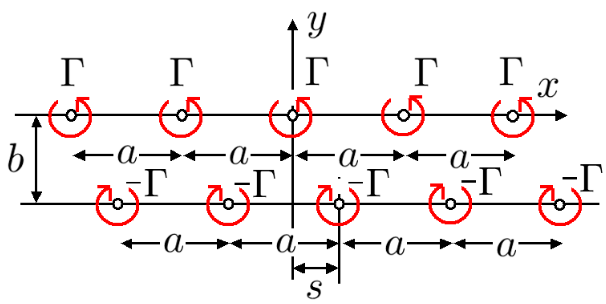


図 5.3.56: Karman 渦列

```
/*  Karman 渦列  */
kill(all);
declare(z,complex);
declare(F,complex);
declare(c,complex);
declare(d,complex);
Z0:c[1]=0;
Z1:c[2]=s-%i*b;
F1:-%i*\Gamma/2/%pi*log(sin(%pi/a*
 (z-c[1])));
F10:-%i*\Gamma/2/%pi*log(z-c[1]);
F2:+%i*\Gamma/2/%pi*log(sin(%pi/a*
 (z-c[2])));
F20:+%i*\Gamma/2/%pi*log(z-c[2]);
F3:F=F1+F2;
```

x 軸上に a 間隔に無限個の渦糸を置いたときの複素ポテンシャルは (5.3.87) 式から下記となる。

$$F == -\frac{i\,\Gamma}{2\,\pi}\log\left(\sin\left(\frac{\pi\,z}{a}\right)\right) \tag{5.3.89}$$

上の渦循環強さ：Γ の渦列の一つが $c_1=0$ に、下の渦循環強さ：$-\Gamma$ の渦列の一つが $c_2=s-i\,b$ にあるとする。上式から、Karman 渦列の複素ポテンシャル：F は下記となる。

$$F=\frac{i\,\Gamma\log\left(\sin\left(\frac{\pi\,(z-c_2)}{a}\right)\right)}{2\,\pi}-\frac{i\,\Gamma\log\left(\sin\left(\frac{\pi\,(z-c_1)}{a}\right)\right)}{2\,\pi} \tag{5.3.90}$$

[1] L. M. Milne-Thomson : Theretical Hydrodynamics, Fourth Edition [15)], 13.72 Karman vortex street,P375

(1)Karman 渦列の相互位置

```
DF10:'diff(F[11],z,1)=diff(F1-F10,z,1);
DF2:'diff(F[21],z,1)=diff(F2,z,1);
V11:lhs(DF10)=limit(rhs(DF10),z,c[1]);
V12:lhs(DF2)=limit(rhs(DF2),z,c[1]);
V1:u[1]-%i*v[1]=rhs(V11)+rhs(V12);
DF12:'diff(F[12],z,1)=diff(F1,z,1);
DF22:'diff(F[22],z,1)=diff(F2-F20,z,1);
V21:lhs(DF12)=limit(rhs(DF12),z,c[2]);
V22:lhs(DF22)=limit(rhs(DF22),z,c[2]);
V2:u[2]-%i*v[2]=rhs(V21)+rhs(V22);
V23:subst([Z0,Z1],V2);
U3:trigsimp(realpart(V23));
V3:v[0]=factor(trigsimp(-imagpart(rhs(
 V23))));
A1:solve(rhs(V3)=0,s);
A2:A1[1];
A3:A1[2];
U31:subst([A2],U3);
U32:trigsimp(subst([A3],U3));
PS1:\Psi=imagpart(subst([z=x+%i*y,Z0,Z1],
  rhs(F3)));
subst([a=1,b=1,s=0.5,\Gamma=1],PS1);
```

上の列の $z=c_1$ のおける、上の渦列による流速を求める。$z=c_1$ の渦糸の複素ポテンシャルを除いた複素ポテンシャル：F_{11} から、

$$F_{11}=-\frac{i\,\Gamma\log\left(\sin\left(\frac{\pi\,(z-c_1)}{a}\right)\right)}{2\,\pi}+\frac{i\,\Gamma\log\left(z-c_1\right)}{2\,\pi}$$

上式を z で微分して、$z\to c_1$ とすると下記のように流速は零となる。

$$\frac{d}{d\,z}\,F_{11}=\frac{i\,\Gamma}{2\,\pi\,(z-c_1)}-\frac{i\,\Gamma\cos\left(\frac{\pi\,(z-c_1)}{a}\right)}{2\,a\sin\left(\frac{\pi\,(z-c_1)}{a}\right)}$$
$$\to 0 \quad (z\to c_1)$$

下の列の $z=c_1$ のおける、上の渦列による流速を求める。複素ポテンシャル：F_{21} から、

$$F_{21}=\frac{i\,\Gamma\log\left(\sin\left(\frac{\pi\,(z-c_2)}{a}\right)\right)}{2\,\pi}$$

上式を z で微分して、

$$\frac{d}{d\,z}\,F_{21}=\frac{i\,\Gamma\cos\left(\frac{\pi\,(z-c_2)}{a}\right)}{2\,a\sin\left(\frac{\pi\,(z-c_2)}{a}\right)} \tag{5.3.91}$$

$z\to c_1$ とすると $z=c_1$ における流速：u_1,v_1 が得られ、

$$u_1-i\,v_1=-\frac{i\cos\left(\frac{\pi\,c_2-\pi\,c_1}{a}\right)\,\Gamma}{2\sin\left(\frac{\pi\,c_2-\pi\,c_1}{a}\right)\,a}$$

同様にして、下の列の $z=c_2$ のおける流速：u_2, v_2 を求めると下記となる。

$$u_2 - i\,v_2 = -\frac{i\cos\left(\frac{\pi\,c_2-\pi\,c_1}{a}\right)\,\Gamma}{2\sin\left(\frac{\pi\,c_2-\pi\,c_1}{a}\right)\,a}$$

$c_1=0, c_2=s-i\,b$ を上式に代入し、その実部、虚部から、

$$u_2 = \frac{\cosh\left(\frac{\pi\,b}{a}\right)\,\sinh\left(\frac{\pi\,b}{a}\right)\,\Gamma}{2\,a\sin\left(\frac{\pi\,s}{a}\right)^2+2\,a\sinh\left(\frac{\pi\,b}{a}\right)^2}$$

$$v_2 = \frac{\Gamma\cos\left(\frac{\pi\,s}{a}\right)\,\sin\left(\frac{\pi\,s}{a}\right)}{2\,a\,\left(\cosh\left(\frac{\pi\,b}{a}\right)^2\sin\left(\frac{\pi\,s}{a}\right)^2+\sinh\left(\frac{\pi\,b}{a}\right)^2\cos\left(\frac{\pi\,s}{a}\right)^2\right)}$$

上記から、一般的に斜めに移動するが、渦列の位置が変化しないためには、$v_2=0$ とすると、

$$s=0, s=\frac{a}{2}$$

即ち、下の渦糸の縦位置が上と一致している場合：$s=0$ と下の渦糸の縦位置が上の渦糸の真ん中：$s=\frac{a}{2}$ にある場合である。このときの渦列の x 方向の移動速度は、

$$u_2 = \frac{\cosh\left(\frac{\pi\,b}{a}\right)\,\Gamma}{2\,a\sinh\left(\frac{\pi\,b}{a}\right)} \quad (s=0) \tag{5.3.92}$$

$$u_2 = \frac{\sinh\left(\frac{\pi\,b}{a}\right)\,\Gamma}{2\,a\cosh\left(\frac{\pi\,b}{a}\right)} \quad (s=\frac{a}{2}) \tag{5.3.93}$$

流れ関数：Ψ は (5.3.90) 式に $z=x+i\,y$ を代入し、虚部をとり、

$$\Psi = \frac{\Gamma\log\left(\cos\left(\frac{\pi\,x}{a}-\frac{\pi\,s}{a}\right)^2\sinh\left(\frac{\pi\,y}{a}+\frac{\pi\,b}{a}\right)^2+\sin\left(\frac{\pi\,x}{a}-\frac{\pi\,s}{a}\right)^2\cosh\left(\frac{\pi\,y}{a}+\frac{\pi\,b}{a}\right)^2\right)}{4\,\pi} - \frac{\Gamma\log\left(\cos\left(\frac{\pi\,x}{a}\right)^2\sinh\left(\frac{\pi\,y}{a}\right)^2+\sin\left(\frac{\pi\,x}{a}\right)^2\cosh\left(\frac{\pi\,y}{a}\right)^2\right)}{4\,\pi}$$

上式に $a=1, b=1, s=0.5, \Gamma=1$ を代入し、gnuplot を用いて流線を求めた結果を下記に示す。

```
#!/gnuplot
set xrange [-2:2]
set yrange [-2:1]
set isosamples 150,150
set contour base
set cntrparam levels incremental -20,0.05
 ,20
unset key
unset surface
set view map
splot log(sin(3.14159*x)**2*sinh(3.14159*y
 +3.14159)**2+sin(3.14159*x-0.5*3.14159)**2
 *cosh(3.14159*y+3.14159)**2)/(4*3.14159)
 -log(cos(3.14159*x)**2*sinh(3.14159*y)**2
 +sin(3.14159*x)**2*cosh(3.14159*y)**2)
 /(4*3.14159)
#    EOF
```

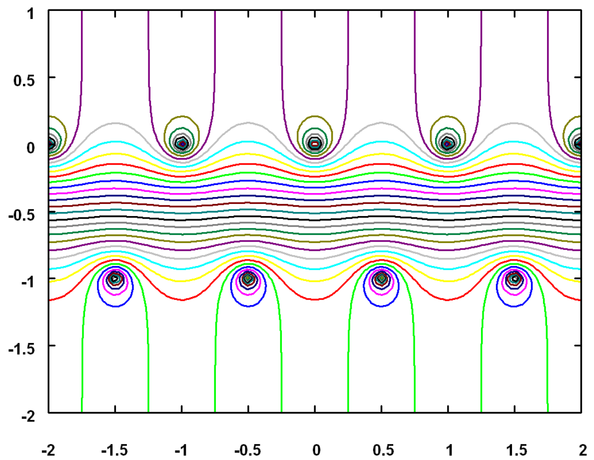


図 5.3.57: Karman 渦列

(2)Karman 渦列の安定性

例題 5.3.21 から、渦列の安定性の検討には、渦糸が千鳥状に並んでいる状態の方がよいことが示されているので、千鳥状に並んでいる場合のみについて検討する。

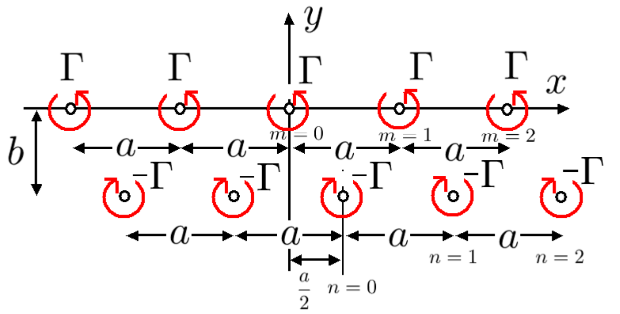


図 5.3.58: Karman 渦列の安定性

```
FM:-%i*\Gamma/2/%pi*log(z-m*a-d[m])
 -%i*\Gamma/2/%pi*log(z+m*a-d[-m]);
DFM:diff(FM,z,1);
ZM1:z[m]=z-d[m];
ZM2:z[-m]=z-d[-m];
DM1:solve(ZM1,d[m])[1];
DM2:solve(ZM2,d[-m])[1];
DFM1:subst([DM1,DM2],DFM);
DFM1T:taylor(first(DFM1),z[m],0,3);
DFM2T:taylor(last(DFM1),z[-m],0,3);
'diff(F[m],z,1)=rest(DFM1T,-2)+rest(DFM2T,
 -2);
DFM3:lhs(%)=subst([ZM1,ZM2,z=d[0]],rhs(%));
DMC0:d[0]=d[1];
DMC1:d[m]=d[1]*cos(m*\theta);
DMC2:d[-m]=d[1]*cos(-m*\theta);
DFM4:factor(subst([DMC0,DMC1,DMC2],DFM3));
DFM5:'diff(F[1],z,1)=sum(rhs(DFM4),m,1
 ,inf);
SUMC:sum((cos(m*\theta)-1)/m^2,m,1,inf)
 =-1/4*\theta*(2*%pi-\theta);
DFM51:'diff(F[1],z,1)=%i*d[1]*Gamma
 /(%pi*a^2)
 *1/4*\theta*(2*%pi-\theta);
```

まず、上の渦列で渦列が a の間隔で並んでいる複素ポテンシャル：F_1 を求める。この上の渦列の $x=0$ における渦糸を $m=0$ とし、x 軸の正方向で m 番目のずれを d_m、x 軸の負方向で $-m$ 番目のずれを d_{-m} とする。$x=0, m=0$ における渦糸位置の流速を求める。m 番目と $-m$ 番目の渦糸による複素ポテンシャル：F_m は、

$$F_m = -\frac{i\,\Gamma\log\left(z-d_m-a\,m\right)}{2\,\pi}-\frac{i\,\Gamma\log\left(z-d_{-m}+a\,m\right)}{2\,\pi}$$

上式を z で微分して、

$$\frac{d}{d\,z}\,F_m = -\frac{i\,\Gamma}{2\,\pi\,\left(z-d_m-a\,m\right)}-\frac{i\,\Gamma}{2\,\pi\,\left(z-d_{-m}+a\,m\right)}$$

$z \to d_0$ を代入し、d_0, d_m, d_{-m} は小さいとして、Taylor 展開し、その高次項を省略すると、

$$\frac{d}{d\,z}\,F_m = \frac{i\,\Gamma\,\left(d_0-d_m\right)}{2\,\pi\,a^2\,m^2}+\frac{i\,\Gamma\,\left(d_0-d_{-m}\right)}{2\,\pi\,a^2\,m^2}$$

d_0, d_m, d_{-m} を次式のように、振幅：d_1、cos 関数で表現する。$\theta=\pi$ のとき、千鳥配列となる。

$$d_0 = d_1, \quad d_m = d_1\cos\left(m\,\theta\right), \quad d_{-m} = d_1\cos\left(-m\,\theta\right)$$

上式を代入し、m 番目と $-m$ 番目の渦糸による $x=0, m=0$ における渦糸位置の流速は、

$$\frac{d}{d\,z}\,F_m = -\frac{i\,d_1\,\Gamma\,\left(\cos\left(m\,\theta\right)-1\right)}{\pi\,a^2\,m^2}$$

上式を $m=1\sim\infty$ までの和をとり、

$$\frac{d}{d\,z}\,F_1 = -\frac{i\,d_1\,\Gamma\,\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos(m\,\theta)-1}{m^2}}{\pi\,a^2}$$

次式の公式を利用する。

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos\left(m\,\theta\right)-1}{m^2} = -\frac{\left(2\,\pi-\theta\right)\,\theta}{4}$$

上記公式を代入し、上の渦列による $x=0, m=0$ における渦糸位置の流速は次式となる。

$$\frac{d}{d\,z}\,F_1 = \frac{i\,d_1\,\Gamma\,\left(2\,\pi-\theta\right)\,\theta}{4\,\pi\,a^2} \tag{5.3.94}$$

```
AN1:a[n]=(n+1/2)*a-%i*b;
AN2:a[-n]=-(n+1/2)*a-%i*b;
FN:%i*\Gamma/2/%pi*log(z-a[n]-d[n])+%i
  *\Gamma/2/%pi*log(z-a[-n]-d[-n]);
DFN:diff(FN,z,1);
DFNT1:taylor(first(DFN),d[n],0,3);
DFNT2:taylor(last(DFN),d[-n],0,3);
DFN3:'diff(F[n],z,1)=rest(DFNT1,-2)
  +rest(DFNT2,-2);
DFN31:'diff(F[n1],z,1)=rest(rhs(DFN3),2);
DFN32:'diff(F[n2],z,1)=rest(rhs(DFN3),-2);
subst([AN1,AN2],DFN31);
lhs(DFN31)=subst([z=d[1]],rhs(DF2));
subst([cos((%pi*(d[1]-c[2]))/a)=cot((%pi
  *(d[1]-c[2]))/a)*sin((%pi*(d[1]-c[2]))
  /a)],%);
taylor(rhs(%),d[1],0,3);
rest(%,-2);
subst([tan((%pi*c[2])/a)=sin((%pi*c[2])/a)
  /cos((%pi*c[2])/a)],%);
DFN31T:subst([Z1,s=a/2],%);
```

```
DFN4:'diff(F[2],z,1)=last(DFN31T);
DFN4R:realpart(rhs(DFN4));
DFN4I:imagpart(rhs(DFN4));
DFN41:lhs(DFN4)=DFN4R;
DFN5:'diff(F[3],z,1)=first(DFN31T);
factor(expand(%));
DFN51:trigsimp(%);
```

次に、下の渦列で上の渦列に比べ $\frac{a}{2}$ だけずれ、渦列が a の間隔で並んでいる複素ポテンシャルおよび下の渦列による上の渦列の $x=0$ における渦糸位置：$z=d_1$ の流速を求める。下の渦列の n 番目と $-n$ 番目の渦糸による複素ポテンシャル：F_n は、

$$a_n = a\left(n+\frac{1}{2}\right) - i\,b, \quad a_{-n} = a\left(-n-\frac{1}{2}\right) - i\,b \tag{5.3.95}$$

$$F_n = \frac{i\,\Gamma \log(z-d_n-a_n)}{2\,\pi} + \frac{i\,\Gamma \log(z-d_{-n}-a_{-n})}{2\,\pi}$$

上式を z で微分すると、

$$\frac{d}{d\,z}F_n = \frac{i\,\Gamma}{2\,\pi\,(z-d_n-a_n)} + \frac{i\,\Gamma}{2\,\pi\,(z-d_{-n}-a_{-n})}$$

d_n, d_{-n} は小さいとして、Taylor 展開し、その高次項を省略すると、

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\,z}F_n =& \frac{i\,\Gamma\,d_n}{2\,\pi\,z^2-4\,\pi\,a_n\,z+2\,\pi\,a_n^2} \\ &+ \frac{i\,\Gamma\,d_{-n}}{2\,\pi\,z^2-4\,\pi\,a_{-n}\,z+2\,\pi\,a_{-n}^2} \\ &+ \frac{i\,\Gamma}{2\,\pi\,z-2\,\pi\,a_n} + \frac{i\,\Gamma}{2\,\pi\,z-2\,\pi\,a_{-n}}\end{aligned}$$

上式で、d_n, d_{-n} を含まない項: $\frac{d}{d\,z}F_{n1}$ と含む項: $\frac{d}{d\,z}F_{n2}$ に下記のように分ける。

$$\frac{d}{d\,z}F_{n1} = \frac{i\,\Gamma}{2\,\pi\,z-2\,\pi\,a_n} + \frac{i\,\Gamma}{2\,\pi\,z-2\,\pi\,a_{-n}} \tag{5.3.96}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\,z}F_{n2} =& \frac{i\,\Gamma\,d_n}{2\,\pi\,z^2-4\,\pi\,a_n\,z+2\,\pi\,a_n^2} \\ &+ \frac{i\,\Gamma\,d_{-n}}{2\,\pi\,z^2-4\,\pi\,a_{-n}\,z+2\,\pi\,a_{-n}^2}\end{aligned} \tag{5.3.97}$$

$\frac{d}{d\,z}F_{n1}$ は下の渦列で一直線に並んでおり、それによる z における流速を表している。これは (5.3.91) 式そのものであり、

$$\frac{d}{d\,z}F_{n1} = \frac{i\cos\left(\frac{\pi\,(d_1-c_2)}{a}\right)\Gamma}{2\sin\left(\frac{\pi\,(d_1-c_2)}{a}\right)a}$$

cot に置き換え、$z \to d_1$ と置き換え、d_1 が小さいとして Taylor 展開し、その高次項を省略すると、

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\,z}F_{n1} =& \frac{i\cot\left(\frac{\pi\,(d_1-c_2)}{a}\right)\Gamma}{2\,a} \\ =& -\frac{i\,\Gamma}{2\tan\left(\frac{\pi\,c_2}{a}\right)a} - \frac{i\,\pi\,d_1\left(\tan\left(\frac{\pi\,c_2}{a}\right)^2+1\right)\Gamma}{2\tan\left(\frac{\pi\,c_2}{a}\right)^2a^2}\end{aligned} \tag{5.3.98}$$

(5.3.98) 式右辺第 1 項を $\frac{d}{d\,z}F_2$ とし、$c_2 \to \frac{a}{2} - i\,b$ に置き換え、整理すると、

$$\frac{d}{d\,z}F_2 = \frac{\sinh\left(\frac{\pi\,b}{a}\right)\Gamma}{2\,a\cosh\left(\frac{\pi\,b}{a}\right)} \tag{5.3.99}$$

(5.3.98) 式右辺第 2 項を $\frac{d}{d\,z}F_3$ とし、$c_2 \to \frac{a}{2} - i\,b$ に置き換え、整理すると、

$$\frac{d}{d\,z}F_3 = -\frac{i\,\pi\,d_1\,\Gamma}{2\,a^2\cosh\left(\frac{\pi\,b}{a}\right)^2} \tag{5.3.100}$$

```
DN1:d[n]=d[2]*cos((n+1/2)*\theta);
DN2:d[-n]=d[2]*cos((n+1/2)*\theta);
DFN6:lhs(DFN32)=subst([z=d[1]],rhs(DFN32));
DFN61:factor(first(rhs(DFN6)));
subst([d[1]=d[N]*a[n]],DFN61);
factor(%);
taylor(%,d[N],0,5);
DFN611:first(%);
DFN62:factor(last(rhs(DFN6)));
subst([d[1]=d[N]*a[-n]],DFN62);
factor(%);
taylor(%,d[N],0,5);
DFN621:first(%);
DFN63:lhs(DFN6)=DFN621+DFN611;
DFN631:factor(subst([DN1,DN2],DFN63));
subst([AN1,AN2],num(rhs(DFN631)));
DFN63N:factor(expand(%));
NN1:a[N12]=(n+1/2)*a;
AN3:a[n]=a[N12]-%i*b;
AN4:a[-n]=-a[N12]-%i*b;
expand(subst([AN3,AN4],a[-n]*a[n]));
2*%pi*%^2;
DFN63D:subst([NN1],%);
DFN64:lhs(DFN6)=DFN63N/DFN63D;
DFN65:'diff(F[4],z,1)=sum(rhs(%),n,0,inf);
```

(5.3.97) 式の $\frac{d}{d\,z}F_{n2}$ について検討する。d_n, d_{-n}, d_1 が小さいとして、Taylor 展開し、その高次項を省略すると、

$$\frac{d}{d\,z}F_{n2} = \frac{i\,\Gamma\,d_n}{2\,\pi\,a_n^2} + \frac{i\,\Gamma\,d_{-n}}{2\,\pi\,a_{-n}^2}$$

d_n, d_{-n} を振幅：d_2 の cos 形状とし、下記のように定義する。

$$d_n = d_2\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right), \quad d_{-n} = d_2\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right)$$

上式を代入すると、

$$\frac{d}{d\,z}F_{n2} = \frac{i\,d_2\,\Gamma\left(a_n^2+a_{-n}^2\right)\cos\left(\frac{(2\,n+1)\,\theta}{2}\right)}{2\,\pi\,a_{-n}^2\,a_n^2}$$

(5.3.95) 式を代入し、

$$\frac{d}{d\,z}\,F_{n2}=\frac{i\,d_2\,\Gamma\,\left(2\,a\,n-2\,b+a\right)\,\left(2\,a\,n+2\,b+a\right)\,\cos\left(\frac{(2\,n+1)\,\theta}{2}\right)}{4\,\pi\,\left(-a^2\,\left(n+\frac{1}{2}\right)^2-b^2\right)^2}$$

上式を $n=0\sim\infty$ までの和をとり、

$$\frac{d}{d\,z}\,F_4=\frac{i\,d_2\,\Gamma}{4\,\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(2\,a\,n-2\,b+a\right)\,\left(2\,a\,n+2\,b+a\right)\,\cos\left(\frac{(2\,n+1)\,\theta}{2}\right)}{\left(-a^2\,\left(n+\frac{1}{2}\right)^2-b^2\right)^2} \tag{5.3.101}$$

```
DFT:'diff(F,z,1)=rhs(DFM51)+rhs(DFN41)
  +rhs(DFN51)+rhs(DFN65);
AA1:A=expand(coeff(rhs(DFT),d[1])/%i);
CC1:C=coeff(rhs(DFT),d[2])/%i;
DFF1:conjugate('diff(d[1],t,1))=lhs(DFT);
DFT1:conjugate('diff(d[1],t,1))=%i*A*d[1]
  +%i*C*d[2];
DFT2:conjugate('diff(d[2],t,1))=-(%i*A*d[2]
  +%i*C*d[1]);
DFT3:('diff(d[1],t,1))=-%i*A*conjugate(
 d[1])-%i*C*conjugate(d[2]);
DFT4:('diff(d[1],t,2))=-%i*A*conjugate(
  'diff(d[1],t,1))-%i*C*conjugate(
  'diff(d[2],t,1));
DFT41:expand(subst([DFT1,DFT2],%));
subst([d[1]=d(t)],%);
rhs(AA1)=0;
subst([\theta=%pi],%);
solve(%,cosh((%pi*b)/a))[2];
```

上の渦列の $x=0$ における渦糸位置の流速は、(5.3.94) 式、(5.3.99) 式、(5.3.100) 式、(5.3.101) 式の和から下記のように得られる。ここで右辺第 3 項は定常項で安定性の検討には省くことができる。

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\,z}\,F=&\frac{i\,d_2\,\Gamma}{4\,\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(2\,a\,n-2\,b+a\right)\,\left(2\,a\,n+2\,b+a\right)\,\cos\left(\frac{(2\,n+1)\,\theta}{2}\right)}{\left(-a^2\,\left(n+\frac{1}{2}\right)^2-b^2\right)^2}\\&+\frac{i\,d_1\,\Gamma\,\left(2\,\pi-\theta\right)\,\theta}{4\,\pi\,a^2}+\frac{\sinh\left(\frac{\pi\,b}{a}\right)\,\Gamma}{2\,a\cosh\left(\frac{\pi\,b}{a}\right)}\\&-\frac{i\,\pi\,d_1\,\Gamma}{2\,a^2\cosh\left(\frac{\pi\,b}{a}\right)^2}\end{aligned}$$

下記のように置き換え、

$$A=-\frac{\Gamma\,\theta^2}{4\,\pi\,a^2}+\frac{\Gamma\,\theta}{2\,a^2}-\frac{\pi\,\Gamma}{2\,a^2\cosh\left(\frac{\pi\,b}{a}\right)^2}$$

$$C=\frac{\Gamma}{4\,\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(2\,a\,n-2\,b+a\right)\,\left(2\,a\,n+2\,b+a\right)\,\cos\left(\frac{(2\,n+1)\,\theta}{2}\right)}{\left(-a^2\,\left(n+\frac{1}{2}\right)^2-b^2\right)^2}$$

下記の関係から、

$$\frac{d}{d\,t}\,\overline{d_1}=\frac{d}{d\,z}\,F$$

上の渦列の $x=0$ における渦糸位置の流速は下記となる。

$$\frac{d}{d\,t}\,\overline{d_1}=i\,d_2\,C+i\,d_1\,A \tag{5.3.102}$$

上の渦列と下の渦列を置き換えると、$\Gamma\to-\Gamma$ と置き換え、

$$\frac{d}{d\,t}\,\overline{d_2}=-i\,d_1\,C-i\,d_2\,A \tag{5.3.103}$$

(5.3.102) 式の共役複素数をとると、

$$\frac{d}{d\,t}\,d_1=-i\,\overline{d_2}\,C-i\,\overline{d_1}\,A$$

さらに時間：t で微分すると、

$$\frac{d^2}{d\,t^2}\,d_1=-i\,\frac{d}{d\,t}\,\overline{d_2}\,C-i\,\frac{d}{d\,t}\,\overline{d_1}\,A$$

(5.3.102) 式、(5.3.103) 式を代入すると、

$$\frac{d^2}{d\,t^2}\,d_1=d_1\,A^2-d_1\,C^2$$

上式から、安定条件は $A^2-C^2<0$ である。これから、$A=0$ が安定条件となり、次式を得る。

$$-\frac{\Gamma\,\theta^2}{4\,\pi\,a^2}+\frac{\Gamma\,\theta}{2\,a^2}-\frac{\pi\,\Gamma}{2\,a^2\cosh\left(\frac{\pi\,b}{a}\right)^2}=0$$

上式で、渦列が千鳥状態となる $\theta=\pi$ を代入すると、

$$\frac{\pi\,\Gamma}{4\,a^2}-\frac{\pi\,\Gamma}{2\,a^2\cosh\left(\frac{\pi\,b}{a}\right)^2}=0$$

以上から安定条件は下記となる。

$$\cosh\left(\frac{\pi\,b}{a}\right)=\sqrt{2},\quad b=0.281a$$

第6章　3次元完全流体

6.1　軸対称の流れ

6.1.1　速度ポテンシャルの極座標表示

軸対称の流れ表示として、極座標から z 軸対称として、速度ポテンシャルの表示式を求める。下記に極座標系を示す。

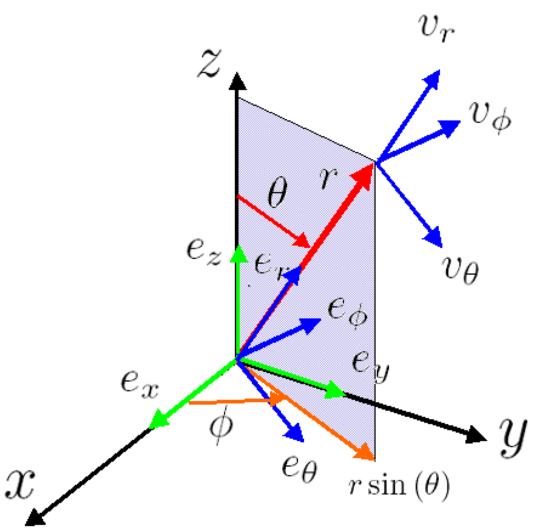


図 6.1.1: 極座標系

```
/* 座標変換　極座標へ → 軸対称流れの速度ポテンシャルと流れ関数　*/
kill(all);
load("vect")
depends(r,[t,x,y,z]);
depends(\phi,[t,x,y,z]);
depends(\theta,[t,x,y,z]);
depends(\Phi,[r,\theta,\phi]);
XR:x=r*sin(\theta)*cos(\phi);
YR:y=r*sin(\theta)*sin(\phi);
ZR:z=r*cos(\theta);
```

上記で\$が記入できないので、Maxima 実行時には load(”vect”) →load(”vect”)\$として実行願う。
xyz 座標と極座標の関係は、

$$x = \cos(\phi)\ r\sin(\theta)$$

$$y = \sin(\phi)\ r\sin(\theta)$$

$$z = r\cos(\theta)$$

```
LXR1:diff(XR,x,1);
LYR1:diff(YR,x,1);
LZR1:diff(ZR,x,1);
solve([LXR1,LYR1,LZR1],['diff(r,x,1),
  'diff(\theta,x,1),'diff(\phi,x,1)]);
LXYZR1:trigsimp(%)[1];
LXR2:diff(XR,y,1);
LYR2:diff(YR,y,1);
LZR2:diff(ZR,y,1);
solve([LXR2,LYR2,LZR2],['diff(r,y,1),
  'diff(\theta,y,1),'diff(\phi,y,1)]);
LXYZR2:trigsimp(%)[1];
LXR3:diff(XR,z,1);
LYR3:diff(YR,z,1);
LZR3:diff(ZR,z,1);
solve([LXR3,LYR3,LZR3],['diff(r,z,1),
  'diff(\theta,z,1),'diff(\phi,z,1)]);
LXYZR3:trigsimp(%)[1];
```

上記の関係から、

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{d\,x}\,r = \cos(\phi)\ \sin(\theta)\,,\ \frac{d}{d\,x}\,\theta = \frac{\cos(\phi)\ \cos(\theta)}{r},\\
&\frac{d}{d\,x}\,\phi = -\frac{\sin(\phi)}{r\sin(\theta)}\,\frac{d}{d\,y}\,r = \sin(\phi)\ \sin(\theta)\,,\ \frac{d}{d\,y}\\
&\quad\theta = \frac{\sin(\phi)\ \cos(\theta)}{r},\ \frac{d}{d\,y}\,\phi = \frac{\cos(\phi)}{r\sin(\theta)}\\
&\frac{d}{d\,z}\,r = \cos(\theta)\,,\ \frac{d}{d\,z}\,\theta = -\frac{\sin(\theta)}{r},\ \frac{d}{d\,z}\,\phi = 0
\end{aligned} \tag{6.1.1}$$

速度の xyz 成分は下記である。ここで load(”vect”)\$と

depends 関数を使用すれば、下記の展開が容易に行える。

$$\begin{aligned}v_x =&\frac{d}{d\,x}\,\Phi = \left(\frac{d}{d\,\theta}\,\Phi\right)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\theta\right) + \left(\frac{d}{d\,r}\,\Phi\right)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,r\right)\\ &+\left(\frac{d}{d\,x}\,\phi\right)\,\left(\frac{d}{d\,\phi}\,\Phi\right)\\ v_y =&\frac{d}{d\,y}\,\Phi = \left(\frac{d}{d\,\theta}\,\Phi\right)\,\left(\frac{d}{d\,y}\,\theta\right) + \left(\frac{d}{d\,r}\,\Phi\right)\,\left(\frac{d}{d\,y}\,r\right)\\ &+\left(\frac{d}{d\,y}\,\phi\right)\,\left(\frac{d}{d\,\phi}\,\Phi\right)\\ v_z =&\frac{d}{d\,z}\,\Phi = \left(\frac{d}{d\,\theta}\,\Phi\right)\,\left(\frac{d}{d\,z}\,\theta\right) + \left(\frac{d}{d\,r}\,\Phi\right)\,\left(\frac{d}{d\,z}\,r\right)\\ &+\left(\frac{d}{d\,z}\,\phi\right)\,\left(\frac{d}{d\,\phi}\,\Phi\right)\end{aligned} \tag{6.1.2}$$

xyz 座標から極座標に変換する下記の変換マトリックス：TR を掛けることにより、速度の極座標表示を得ることができる。

$$TR = \begin{pmatrix}\cos(\phi)\,\cos(\theta) & \sin(\phi)\,\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) & 0\\ \cos(\phi)\,\sin(\theta) & \sin(\phi)\,\sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix} \tag{6.1.3}$$

```
TR:matrix([cos(\theta)*cos(\phi),
  cos(\theta)*sin(\phi),-sin(\theta)],
  [-sin(\phi),cos(\phi),0],
  [sin(\theta)*cos(\phi),
  sin(\theta)*sin(\phi),
  cos(\theta)]);
/* grad(\Phi) */
grad(\Phi);
GRADXYZ:transpose(express(%));
matrix([v[x]],[v[y]],[v[z]])=GRADXYZ;
ADFX1:'diff(\Phi,x,1)=diff(\Phi,x,1);
ADFX2:subst(LXYZR1,%);
ADFY1:'diff(\Phi,y,1)=diff(\Phi,y,1);
ADFY2:subst(LXYZR2,%);
ADFZ1:'diff(\Phi,z,1)=diff(\Phi,z,1);
ADFZ2:subst(LXYZR3,%);
expand(TR.matrix([rhs(ADFX2)],[rhs(ADFY2)],
  [rhs(ADFZ2)]));
GRADA:matrix([v[\theta]],[v[\phi]],
  [v[r]])=trigsimp(%);
```

$\overrightarrow{V}$ の xyz 座標表記は、

$$\overrightarrow{V} = \begin{pmatrix}v_x\\ v_y\\ v_z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{d}{d\,x}\,\Phi\\ \frac{d}{d\,y}\,\Phi\\ \frac{d}{d\,z}\,\Phi\end{pmatrix} \tag{6.1.4}$$

上式に (6.1.2) 式および (6.1.1) 式を代入し、(6.1.3) 式の変換マトリックスを掛けることにより、下記の $\overrightarrow{V}$ の最右辺に極座標表記が得られる。

$$\overrightarrow{V} = \begin{pmatrix}v_\theta\\ v_\phi\\ v_r\end{pmatrix} = \left(TR\right)\begin{pmatrix}\frac{d}{d\,x}\,\Phi\\ \frac{d}{d\,y}\,\Phi\\ \frac{d}{d\,z}\,\Phi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\frac{d}{d\,\theta}\,\Phi}{r}\\ \frac{\frac{d}{d\,\phi}\,\Phi}{r\,\sin(\theta)}\\ \frac{d}{d\,r}\,\Phi\end{pmatrix} \tag{6.1.5}$$

速度ポテンシャル：Φ の質量保存の方程式 (2.9.5) 式、(33 ページ) から下記である。

$$\frac{d^2}{d\,z^2}\,\Phi + \frac{d^2}{d\,y^2}\,\Phi + \frac{d^2}{d\,x^2}\,\Phi = 0 \tag{6.1.6}$$

```
/* nabla^2 */
NABA:'diff(\Phi,x,2)+'diff(\Phi,y,2)
  +'diff(\Phi,z,2)=0;
ADDFX1:'diff(\Phi,x,2)=diff(\Phi,x,2);
ADFDX2:subst(LXYZR1,%);
ADFDY1:'diff(\Phi,y,2)=diff(\Phi,y,2);
ADFDY2:subst(LXYZR2,%);
ADFDZ1:'diff(\Phi,z,2)=diff(\Phi,z,2);
ADFDZ2:subst(LXYZR3,%);
LXDDR1:diff(XR,x,2);
LXDDR2:subst(LXYZR1,%);
LYDDR1:diff(YR,x,2);
LYDDR2:subst(LXYZR1,%);
LZDDR1:diff(ZR,x,2);
LZDDR2:subst(LXYZR1,%);
trigsimp(solve([LXDDR2,LYDDR2,LZDDR2],
  ['diff(r,x,2),'diff(\theta,x,2),
  'diff(\phi,x,2)])[1]);
NABRAX:subst(%,ADFDX2);
LXDDR11:diff(XR,y,2);
LXDDR21:subst(LXYZR2,%);
LYDDR11:diff(YR,y,2);
LYDDR21:subst(LXYZR2,%);
LZDDR11:diff(ZR,y,2);
LZDDR21:subst(LXYZR2,%);
trigsimp(solve([LXDDR21,LYDDR21,LZDDR21],
  ['diff(r,y,2),'diff(\theta,y,2),
  'diff(\phi,y,2)])[1]);
NABRAY:subst(%,ADFDY2);
LXDDR12:diff(XR,z,2);
LXDDR22:subst(LXYZR3,%);
LYDDR12:diff(YR,z,2);
LYDDR22:subst(LXYZR3,%);
LZDDR12:diff(ZR,z,2);
LZDDR22:subst(LXYZR3,%);
```

```
solve([LXDDR22,LYDDR22,LZDDR22],
  ['diff(r,z,2),'diff(\theta,z,2),
  'diff(\phi,z,2)])[1];
NABRAZ:subst(%,ADFDZ2);
NABRA1:rhs(NABRAX)+rhs(NABRAY)
 +rhs(NABRAZ)=0;
NABRA2:expand(trigsimp(expand(%)));
```

上式の左辺最終項は下記のように展開できる。

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{d\,x^2}\,\Phi =& \left(\frac{d}{d\,x}\,\theta\right)\,\left(\left(\frac{d}{d\,x}\,\theta\right)\,\left(\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,A\right)+\left(\frac{d}{d\,x}\,r\right)\,\left(\frac{d^2}{d\,r\,d\,\theta}\,\Phi\right)+\left(\frac{d}{d\,x}\,\phi\right)\,\left(\frac{d^2}{d\,\phi\,d\,\theta}\,\Phi\right)\right)\\ &+\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,\theta\right)\,\left(\frac{d}{d\,\theta}\,\Phi\right)+\left(\frac{d}{d\,x}\,r\right)\,\left(\left(\frac{d}{d\,x}\,r\right)\,\left(\frac{d^2}{d\,r^2}\,\Phi\right)+\left(\frac{d}{d\,x}\,\theta\right)\,\left(\frac{d^2}{d\,r\,d\,\theta}\,\Phi\right)+\left(\frac{d}{d\,x}\,\phi\right)\,\left(\frac{d^2}{d\,\phi\,d\,r}\,\Phi\right)\right)\\ &+\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,r\right)\,\left(\frac{d}{d\,r}\,\Phi\right)+\left(\frac{d}{d\,x}\,\phi\right)\,\left(\left(\frac{d}{d\,x}\,\phi\right)\,\left(\frac{d^2}{d\,\phi^2}\,\Phi\right)+\left(\frac{d}{d\,x}\,\theta\right)\,\left(\frac{d^2}{d\,\phi\,d\,\theta}\,\Phi\right)+\left(\frac{d}{d\,x}\,r\right)\,\left(\frac{d^2}{d\,\phi\,d\,r}\,\Phi\right)\right)\\ &+\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,\phi\right)\,\left(\frac{d}{d\,\phi}\,\Phi\right)\end{aligned}$$

$\frac{d^2}{d\,y^2}\,\Phi,\frac{d^2}{d\,z^2}\,\Phi$ も同様に求め、(6.1.1) 式を代入し、質量保存の方程式 : (6.1.6) 式に代入し、整理すると下記の極座標表示を得る。

$$\frac{\left(\frac{d}{d\,\theta}\,\Phi\right)\,\cos\left(\theta\right)}{r^2\,\sin\left(\theta\right)}+\frac{\frac{d^2}{d\,\phi^2}\,\Phi}{r^2\,\sin\left(\theta\right)^2}+\frac{2\,\left(\frac{d}{d\,r}\,\Phi\right)}{r}+\frac{\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,\Phi}{r^2}+\frac{d^2}{d\,r^2}\,\Phi=0$$

```
/* z 軸対称の速度ポッテンシャル   */
NABRA21:expand((first(lhs(NABRA2))
  +rest(lhs(NABRA2),2))*r^2)=0;
NABRA21R:'r^2*'diff(\Phi,r,1);
NABRA21R1:'diff(%,r,1)=ev(diff(%,r,1),
 diff);
NABRA21T:'sin(\theta)*'diff(\Phi,\theta,1);
NABRA21T1:'diff(%,\theta,1)/sin(\theta)
  =expand(ev(diff(%,\theta,1),diff)
  /sin(\theta));
NABRA22:lhs(NABRA21R1)+lhs(NABRA21T1)=0;
PTR:v[r]='diff(\Phi,r,1);
PTT:v[\theta]='diff(\Phi,theta,1)/r;
```

z 軸まわりの軸対称であることを考慮すると、ϕ の微分項は零となり、

$$\frac{\left(\frac{d}{d\,\theta}\,\Phi\right)\,\cos\left(\theta\right)}{\sin\left(\theta\right)}+\left(\frac{d^2}{d\,r^2}\,\Phi\right)\,r^2+2\,\left(\frac{d}{d\,r}\,\Phi\right)\,r+\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,\Phi=0 \tag{6.1.7}$$

更に整理すると、

$$\frac{\frac{d}{d\,\theta}\,\left(\left(\frac{d}{d\,\theta}\,\Phi\right)\,\sin\left(\theta\right)\right)}{\sin\left(\theta\right)}+\frac{d}{d\,r}\,\left(\left(\frac{d}{d\,r}\,\Phi\right)\,r^2\right)=0 \tag{6.1.8}$$

流速成分は、(6.1.5) 式から、

$$v_r=\frac{d}{d\,r}\,\Phi,\quad v_\theta=\frac{\frac{d}{d\,\theta}\,\Phi}{r} \tag{6.1.9}$$

6.1.2　速度ポテンシャルの円柱座標表示

軸対称の流れ表示として、円柱座標から z 軸対称として、速度ポテンシャルの表示式を求める。下記に円柱座標系を示す。

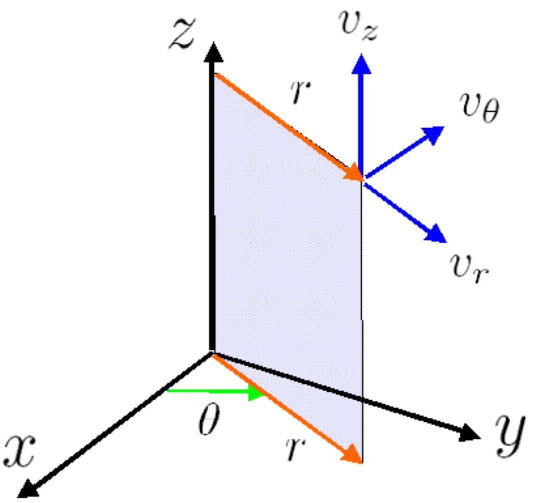


図 6.1.2: 円柱座標系

```
/*座標変換　円柱座標へ*/
kill(all);
load("vect")
depends(r,[t,x,y]);
depends(\theta,[t,x,y]);
depends(z,[t]);
XR:x=r*cos(\theta);
YR:y=r*sin(\theta);
LXR1:diff(XR,x,1);
LYR1:diff(YR,x,1);
solve([LXR1,LYR1],['diff(r,x,1),
  'diff(\theta,x,1)]);
LXYR1:trigrat(%)[1];
LXR2:diff(XR,y,1);
LYR2:diff(YR,y,1);
solve([LXR2,LYR2],['diff(r,y,1),
  'diff(\theta,y,1)]);
LXYR2:trigrat(%)[1];
```

上記で$が記入できないので、Maxima 実行時には load(”vect”) →load(”vect”)$として実行願う。
xyz 座標と円柱座標の関係は、

$$x = r\cos(\theta)$$

$$y = r\sin(\theta)$$

上記の関係から、

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\,x}\,r = &\cos(\theta)\,,\ \frac{d}{d\,x}\,\theta = -\frac{\sin(\theta)}{r}\\ \frac{d}{d\,y}\,r = &\sin(\theta)\,,\ \frac{d}{d\,y}\,\theta = \frac{\cos(\theta)}{r}\end{aligned} \tag{6.1.10}$$

```
TR:matrix([cos(\theta),sin(\theta),0],
  [-sin(\theta),cos(\theta),0],[0,0,1]);
depends(\Phi,[r,\theta,z]);
ADFX1:'diff(\Phi,x,1)=diff(\Phi,x,1);
ADFX2:subst(LXYR1,%);
ADFY1:'diff(\Phi,y,1)=diff(\Phi,y,1);
ADFY2:subst(LXYR2,%);
expand(TR.matrix([rhs(ADFX2)],[rhs(ADFY2)],
  ['diff(\Phi,z,1)]));
GRADA:trigrat(%);
```

速度の xy 成分は、

$$\begin{aligned}v_x = &\frac{d}{d\,x}\,\Phi = \left(\frac{d}{d\,\theta}\,\Phi\right)\left(\frac{d}{d\,x}\,\theta\right) + \left(\frac{d}{d\,r}\,\Phi\right)\left(\frac{d}{d\,x}\,r\right)\\ v_y = &\frac{d}{d\,y}\,\Phi = \left(\frac{d}{d\,\theta}\,\Phi\right)\left(\frac{d}{d\,y}\,\theta\right) + \left(\frac{d}{d\,r}\,\Phi\right)\left(\frac{d}{d\,y}\,r\right)\end{aligned} \tag{6.1.11}$$

xyz 座標から円柱座標に変換する下記の変換マトリックス：TR を掛けることにより、速度の円柱座標表示を得ることができる。

$$TR = \begin{pmatrix}\cos(\theta) & \sin(\theta) & 0\\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$\vec{V}$ の xyz 座標表記は、

$$\vec{V} = \begin{pmatrix}v_x\\ v_y\\ v_z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{d}{d\,x}\,\Phi\\ \frac{d}{d\,y}\,\Phi\\ \frac{d}{d\,z}\,\Phi\end{pmatrix}$$

上式に (6.1.10) 式および (6.1.11) 式を代入し、変換マトリックスを掛けることにより、下記の $\vec{V}$ の最右辺に円柱座標表記が得られる。

$$\vec{V} = \begin{pmatrix}v_r\\ v_\theta\\ v_z\end{pmatrix} = \left(TR\right)\begin{pmatrix}\frac{d}{d\,x}\,\Phi\\ \frac{d}{d\,y}\,\Phi\\ \frac{d}{d\,z}\,\Phi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{d}{d\,r}\,\Phi\\ \frac{\frac{d}{d\,\theta}\,\Phi}{r}\\ \frac{d}{d\,z}\,\Phi\end{pmatrix} \tag{6.1.12}$$

```
/* nabla^2 */
NABA:'diff(\Phi,x,2)+'diff(\Phi,y,2)+
  'diff(\Phi,z,2)=0;
ADDFX1:'diff(\Phi,x,2)=diff(\Phi,x,2);
ADFDX2:subst(LXYR1,%);
ADFDY1:'diff(\Phi,y,2)=diff(\Phi,y,2);
ADFDY2:subst(LXYR2,%);
LXDDR1:diff(XR,x,2);
LXDDR2:subst(LXYR1,%);
LYDDR1:diff(YR,x,2);
LYDDR2:subst(LXYR1,%);
solve([LXDDR2,LYDDR2],['diff(r,x,2),
  'diff(\theta,x,2)])[1];
NABRAX:subst(%,ADFDX2);
LXDDR11:diff(XR,y,2);
LXDDR21:subst(LXYR2,%);
LYDDR11:diff(YR,y,2);
LYDDR21:subst(LXYR2,%);
solve([LXDDR21,LYDDR21],['diff(r,y,2),
  'diff(\theta,y,2)])[1];
NABRAY:subst(%,ADFDY2);
NABRA1:subst([NABRAX,NABRAY],NABA);
NABRA2:expand(trigrat(expand(%)));
NABRA3:subst(['diff(\Phi,\theta,2)=0],
 NABRA2);
```

速度ポテンシャル：Φ の質量保存の方程式 (2.9.5) 式、(33 ページ) から下記である。

$$\frac{d^2}{d\,z^2}\,\Phi+\frac{d^2}{d\,y^2}\,\Phi+\frac{d^2}{d\,x^2}\,\Phi=0 \tag{6.1.13}$$

上式の第 2 項、第 3 項は下記のように展開できる。

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{d\,x^2}\,\Phi=&\left(\frac{d}{d\,\theta}\,\Phi\right)\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,\theta\right)+\left(\frac{d}{d\,x}\,\theta\right)\left(\left(\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,\Phi\right)\left(\frac{d}{d\,x}\,\theta\right)+\left(\frac{d^2}{d\,r\,d\,\theta}\,\Phi\right)\left(\frac{d}{d\,x}\,r\right)\right)\\&+\left(\frac{d}{d\,x}\,r\right)\left(\left(\frac{d^2}{d\,r\,d\,\theta}\,\Phi\right)\left(\frac{d}{d\,x}\,\theta\right)+\left(\frac{d^2}{d\,r^2}\,\Phi\right)\left(\frac{d}{d\,x}\,r\right)\right)+\left(\frac{d}{d\,r}\,\Phi\right)\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,r\right)\\\frac{d^2}{d\,y^2}\,\Phi=&\left(\frac{d}{d\,\theta}\,\Phi\right)\left(\frac{d^2}{d\,y^2}\,\theta\right)+\left(\frac{d}{d\,y}\,\theta\right)\left(\left(\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,\Phi\right)\left(\frac{d}{d\,y}\,\theta\right)+\left(\frac{d^2}{d\,r\,d\,\theta}\,\Phi\right)\left(\frac{d}{d\,y}\,r\right)\right)\\&+\left(\frac{d}{d\,y}\,r\right)\left(\left(\frac{d^2}{d\,r\,d\,\theta}\,\Phi\right)\left(\frac{d}{d\,y}\,\theta\right)+\left(\frac{d^2}{d\,r^2}\,\Phi\right)\left(\frac{d}{d\,y}\,r\right)\right)+\left(\frac{d}{d\,r}\,\Phi\right)\left(\frac{d^2}{d\,y^2}\,r\right)\end{aligned} \tag{6.1.14}$$

また、(6.1.10) 式を更に微分して、

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{d\,x^2}\,r=&\frac{\sin(\theta)^2}{r},\frac{d^2}{d\,x^2}\,\theta=\frac{2\cos(\theta)\,\sin(\theta)}{r^2}\\\frac{d^2}{d\,y^2}\,r=&\frac{\cos(\theta)^2}{r},\frac{d^2}{d\,y^2}\,\theta=-\frac{2\cos(\theta)\,\sin(\theta)}{r^2}\end{aligned} \tag{6.1.15}$$

質量保存の方程式 (6.1.13) 式に (6.1.14) 式を代入し、更に (6.1.10) 式、(6.1.15) 式を代入し、速度ポテンシャル：Φ の円柱座標の質量保存の方程式は、

$$\frac{\frac{d}{d\,r}\,\Phi}{r}+\frac{\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,\Phi}{r^2}+\frac{d^2}{d\,z^2}\,\Phi+\frac{d^2}{d\,r^2}\,\Phi=0 \tag{6.1.16}$$

z 軸まわりの軸対称であることを考慮すると θ の微分項は零となり、速度ポテンシャル：Φ の円柱座標の軸対称表記の質量保存の方程式は、

$$\frac{\frac{d}{d\,r}\,\Phi}{r}+\frac{d^2}{d\,z^2}\,\Phi+\frac{d^2}{d\,r^2}\,\Phi=0 \tag{6.1.17}$$

6.1.3 流れ関数の極座標・円柱座標表示

z 軸まわりの軸対称の座標 yz 座標を考える。下図、点 O から任意の点 P までの任意の軸対称面：A を考える。単位時間にこの面を左から右に通過する流量を考える。これは検査面：A、検査面：B によって変化しない。そこで下記に示すこの流量を表す流れ関数：Ψ を考える。Ψ は点 P の位置の関数である。流線に沿って点 P を移動させても、流線を通過して流れる流れはないので、Ψ は一定である。これから $\Psi =$ 一定は流線を表す。

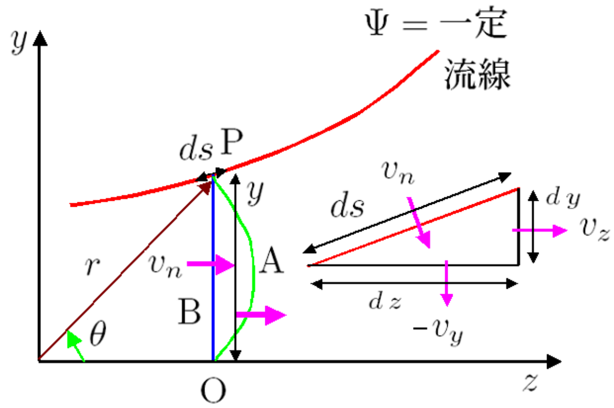


図 6.1.3: 流れ関数：Ψ

```
/* z 軸対称の流れの関数  */
kill(all);
load("vect")
depends(\Psi,[r,\theta]);
depends(\Phi,[r,\theta]);
STF1:2*%pi*\Psi='integrate(2*%pi*v[n]*y,s,0
  ,P);
2*%pi*\Psi+v[n]*ds*2*%pi*y=2*%pi*(\Psi
  +'diff(\Psi,s,1)*ds);
STFN:solve(%,v[n])[1];
2*%pi*\Psi+v[y]*dz*2*%pi*y=2*%pi*(\Psi
  +'diff(\Psi,z,1)*dz);
STFY:solve(%,v[y])[1];
2*%pi*\Psi+v[z]*dy*2*%pi*y=2*%pi*(\Psi
  +'diff(\Psi,y,1)*dy);
STFZ:solve(%,v[z])[1];
2*%pi*\Psi+v[r]*r*dt*2*%pi*y=2*%pi*(\Psi
  +'diff(\Psi,t,1)/r*dt*r);
solve(%,v[r])[1];
STFR:subst([t=\theta,y=r*sin(\theta)],%);
2*%pi*\Psi+v[\theta]*dr*2*%pi*y=2*%pi*(\Psi
  +'diff(\Psi,r,1)*dr);
solve(%,v[\theta])[1];
STFT:subst([y=r*sin(\theta)],%);
```

(上記プログラムで$が記入できないので、Maxima 実行時には
load(”vect”) →load(”vect”)$として実行願う。)

$$2\,\pi\,\Psi = \int_O^P 2\,\pi\,v_n\,y dy$$

$$v_n\,ds\,2\,\pi\,y + 2\,\pi\,\Psi = 2\,\pi\left(\left(\frac{d}{d\,s}\,\Psi\right)\,ds + \Psi\right)$$

$$v_n = \frac{\frac{d}{d\,s}\,\Psi}{y} \tag{6.1.18}$$

上記と同様に $dz, dy, rd\theta, dr$ について行うと下記によう に各速度成分を流れ関数：Ψ で表現できる。

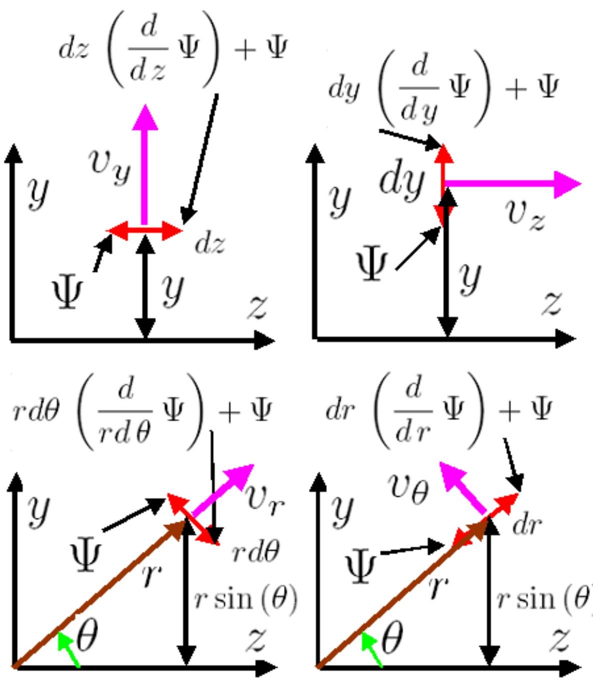


図 6.1.4: 流れ関数の速度成分表現

軸対称の円柱座標表記は、

$$2\,\pi\,dz\,y\,v_y + 2\,\pi\,\Psi = 2\,\pi\left(dz\left(\frac{d}{d\,z}\,\Psi\right) + \Psi\right)$$

$$2\,\pi\,dy\,y\,v_z + 2\,\pi\,\Psi = 2\,\pi\left(dy\left(\frac{d}{d\,y}\,\Psi\right) + \Psi\right)$$

$$v_y = -\frac{\frac{d}{d\,z}\,\Psi}{y}, \quad v_z = \frac{\frac{d}{d\,y}\,\Psi}{y} \tag{6.1.19}$$

軸対称の極座標表記は、

$$2\,\pi\,d\theta\,r\,v_r\,y + 2\,\pi\,\Psi = 2\,\pi\left(rd\theta\left(\frac{d}{r d\,\theta}\,\Psi\right) + \Psi\right)$$

$$2\,\pi\,dr\,v_\theta\,y + 2\,\pi\,\Psi = 2\,\pi\left(dr\left(\frac{d}{d\,r}\,\Psi\right) + \Psi\right)$$

$$v_r = \frac{\frac{d}{d\,\theta}\,\Psi}{r^2\sin(\theta)}, \quad v_\theta = -\frac{\frac{d}{d\,r}\,\Psi}{r\sin(\theta)} \tag{6.1.20}$$

(1) 流れ関数の関係式の極座標表示

```
PTSTR:diff(\Phi,r,1)='diff(\Psi,\theta,1)
  /r^2/sin(\theta);
PTSTT:diff(\Phi,theta,1)=-'diff(\Psi,r,1)
  /sin(\theta);
PTSTRT:diff(PTSTR,\theta,1);
PTSTTR:diff(PTSTT,r,1);
PTSTTR-PTSTRT;
expand(-%*sin(\theta));
PTSTRT1:rhs(%)=lhs(%);
PSIT1:diff(\Psi,\theta,1)/sin(\theta);
PSIT2:'diff(PSIT1,\theta,1)*sin(\theta)/r^2
  =expand(diff(PSIT1,\theta,1)*sin(\theta)
  /r^2);
NABPSI:lhs(PSIT2)+last(lhs(PTSTRT1))
  =rhs(PTSTRT1);
```

(6.1.9) 式と (6.1.20) 式から、速度ポテンシャル：Φ と流れ関数：Ψ の関係は、

$$v_r = \frac{d}{d\,r}\,\Phi = \frac{\frac{d}{d\,\theta}\,\Psi}{r^2\sin(\theta)}, \quad v_\theta \times r = \frac{d}{d\,\theta}\,\Phi = -\frac{\frac{d}{d\,r}\,\Psi}{\sin(\theta)} \tag{6.1.21}$$

上式をそれぞれ ,θ, r で微分し、

$$\frac{d^2}{d\,r\,d\,\theta}\,\Phi = \frac{\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,\Psi}{r^2\sin(\theta)} - \frac{\left(\frac{d}{d\,\theta}\,\Psi\right)\cos(\theta)}{r^2\sin(\theta)^2}$$

$$\frac{d^2}{d\,r\,d\,\theta}\,\Phi = -\frac{\frac{d^2}{d\,r^2}\,\Psi}{\sin(\theta)}$$

上式から下記の流れ関数の関係式を得る。

$$-\frac{\left(\frac{d}{d\,\theta}\,\Psi\right)\cos(\theta)}{r^2\sin(\theta)} + \frac{\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,\Psi}{r^2} + \frac{d^2}{d\,r^2}\,\Psi = 0 \tag{6.1.22}$$

下記の関係から

$$\frac{\sin(\theta)\left(\frac{d}{d\,\theta}\,\frac{\frac{d}{d\,\theta}\,\Psi}{\sin(\theta)}\right)}{r^2} = \frac{\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,\Psi}{r^2} - \frac{\left(\frac{d}{d\,\theta}\,\Psi\right)\cos(\theta)}{r^2\sin(\theta)}$$

流れ関数の関係式は、

$$\frac{\sin(\theta)\left(\frac{d}{d\,\theta}\,\frac{\frac{d}{d\,\theta}\,\Psi}{\sin(\theta)}\right)}{r^2} + \frac{d^2}{d\,r^2}\,\Psi = 0 \tag{6.1.23}$$

(2) 流れ関数の関係式の円柱座標表示

```
depends(\Psi,[r,\theta,z]);
depends(\Phi,[r,\theta,z]);
GRADA:matrix(['diff(\Phi,r,1)],['diff(\Phi
  ,theta,1)/r],['diff(\Phi,z,1)]);
PHPSR1:GRADA[1][1]=-diff(\Psi,z,1)/r;
PHPSZ1:GRADA[3][1]=diff(\Psi,r,1)/r;
PHPSR2:diff(PHPSR1,z,1);
PHPSZ2:diff(PHPSZ1,r,1);
expand((PHPSZ2-PHPSR2)*r);
NABPSI1:rhs(%)=lhs(%);
```

(6.1.12) 式と (6.1.19) 式から、速度ポテンシャル：Φ と流れ関数：Ψ の関係は下記となる。ここで (6.1.19) 式では yz 座標であるが、ここでは rz 座標でで表記しているので $y \to r$ に変換する。

$$\frac{d}{d\,r}\,\Phi = -\frac{\frac{d}{d\,z}\,\Psi}{r}$$

$$\frac{d}{d\,z}\,\Phi = \frac{\frac{d}{d\,r}\,\Psi}{r}$$

上式をそれぞれ r, z で微分し、

$$\frac{d^2}{d\,r\,d\,z}\,\Phi = -\frac{\frac{d^2}{d\,z^2}\,\Psi}{r}$$

$$\frac{d^2}{d\,r\,d\,z}\,\Phi = \frac{\frac{d^2}{d\,r^2}\,\Psi}{r} - \frac{\frac{d}{d\,r}\,\Psi}{r^2}$$

上式から下記の流れ関数の関係を得る。

$$-\frac{\frac{d}{d\,r}\,\Psi}{r} + \frac{d^2}{d\,z^2}\,\Psi + \frac{d^2}{d\,r^2}\,\Psi = 0 \tag{6.1.24}$$

6.1.4 軸対称流れの一般解（極座標表示）

速度ポテンシャル : Φ の軸対称流れの質量保存の方程式は (6.1.7) 式、(178 ページ) から下記である。

$$\frac{\left(\frac{d}{d\,\theta}\,\Phi\right)\,\cos\left(\theta\right)}{\sin\left(\theta\right)}+\left(\frac{d^2}{d\,r^2}\,\Phi\right)\,r^2+2\,\left(\frac{d}{d\,r}\,\Phi\right)\,r+\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,\Phi=0$$

これを変数分離法を用いて解く。r のみの関数である R と θ のみの関数である T で速度ポテンシャルを下記のように表現する。

$$\Phi=R\,T$$

これを上記、質量保存の方程式に代入し整理すると

```
/* 軸対称流れの一般解 */
kill(all);
load("vect")
NABRA21:(('diff(Phi,theta,1))*cos(theta))
  /sin(theta)+('diff(Phi,r,2))*r^2
  +2*('diff(Phi,r,1))*r+'diff(Phi,theta,2)
  =0;
depends(\R,[r]);
depends(\T,[\theta]);
POTRT:\Phi=R*T;
NABRA5:subst([POTRT],NABRA21);
ev(%,diff);
NABRA6:%*r^2/R/T;
POTR:'diff(r^2*'diff(R,r,1),r,1);
POTR1:POTR=ev(POTR,diff);
POTR2:solve(POTR1,'diff(R,r,2))[1];
POTT:'diff(sin(\theta)*'diff(T,\theta,1),
  theta,1);
POTT1:POTT=ev(POTT,diff);
POTT2:solve(POTT1,'diff(T,\theta,2))[1];
subst([POTR2,POTT2],NABRA6)/r^2;
NABRA7:expand(%);
```

(上記プログラムで$が記入できないので、Maxima 実行時には
load(”vect”) →load(”vect”)$として実行願う。)

$$\frac{\frac{d}{d\,\theta}\,\left(\sin\left(\theta\right)\,\left(\frac{d}{d\,\theta}\,T\right)\right)}{\sin\left(\theta\right)\,T}+\frac{\frac{d}{d\,r}\,\left(r^2\,\left(\frac{d}{d\,r}\,R\right)\right)}{R}=0 \quad (6.1.25)$$

上式から、下記の二つの式が得られる。

$$\frac{\frac{d}{d\,r}\,\left(r^2\,\left(\frac{d}{d\,r}\,R\right)\right)}{R}=K \quad (6.1.26)$$

$$\frac{\frac{d}{d\,\theta}\,\left(\sin\left(\theta\right)\,\left(\frac{d}{d\,\theta}\,T\right)\right)}{\sin\left(\theta\right)\,T}=-K \quad (6.1.27)$$

(1)R について

(6.1.26) 式の R について解く。

```
/* R について解く */
assume(K>=0);
assume(N>=0);
last(lhs(NABRA7))=K;
NABRAR1:ev(%,diff);
ode2(NABRAR1,R,r);
expand(subst([K=N*(N+1)],%));
RN:expand(subst([4*N^2=-4*N-1+(2*N+1)^2]
 ,%));
RN1:subst([%k2=0],RN);
RN2:subst([%k1=0],RN);
```

微分方程式は下記となり、

$$\frac{r^2\,\left(\frac{d^2}{d\,r^2}\,R\right)+2\,r\,\left(\frac{d}{d\,r}\,R\right)}{R}=K$$

上式は ode2 関数で解くことができ、次式を得る。

$$R=\%k1\,r^{\frac{\sqrt{4\,K+1}}{2}-\frac{1}{2}}+\%k2\,r^{-\frac{\sqrt{4\,K+1}}{2}-\frac{1}{2}}$$

$K=N*(1+N), K\geq 0, N\geq 0$ と置き換え、整理すると、

$$R=\%k1\,r^N+\%k2\,r^{-N-1} \quad (6.1.28)$$

ここで、右辺第 1 項は、$N>1$ では無限遠方で発散するので、解としてふさわしくない。

(2)T について

(6.1.27) 式の T について解く。

```
/* T について解く */
NABRAT1:first(lhs(NABRA7))=-K;
NABRAT2:subst([K=N*(N+1)],%);
depends(t,[\theta]);
COS1:t=cos(\theta);
DCOS1:diff(COS1,\theta,1);
DTTH:'diff(T,\theta,1)='diff(T,t,1)
  *'diff(t,\theta,1);
DTTH1:subst([DCOS1],DTTH);
subst([DTTH1],NABRAT2);
'diff((-sin(theta)^2*('diff(T,t,1))),t,1)
  *'diff(t,\theta,1)/(sin(theta)*T)
  =-N*(N+1);
subst([DCOS1,sin(\theta)^2=1-
 cos(\theta)^2],%);
NABRAT3:subst([cos(\theta)^2=t^2],%)*T;
depends(\T,[t]);
ev(NABRAT3,diff);
NABRAT4:lhs(%)-rhs(%)=0;
```

$K = N * (1+N), K \geq 0, N \geq 0$ と置き換え、

$$\frac{\frac{d}{d\theta}\left(\sin(\theta)\left(\frac{d}{d\theta}T\right)\right)}{\sin(\theta)\,T} = -N\,(N+1)$$

また、$t = \cos(\theta)$ と置き換えて、整理すると、

$$\left(1-t^2\right)\left(\frac{d^2}{d\,t^2}T\right) - 2\,t\left(\frac{d}{d\,t}T\right) + N\,(N+1)\,T = 0 \tag{6.1.29}$$

これは Legendre の微分方程式で、級数解が得られる。

(3)$N = 0$ の速度ポテンシャル

(6.1.29) 式の T に関する微分方程式で $N = 0$ として解く。

```
/* N=0 について解く */
NTN0:subst([N=0],NABRAT4);
ode2(%,T,t);
\Phi=subst([N=0],rhs(RN))*subst([%k1=0,
  %k2=1],rhs(%));
```

$$\left(1-t^2\right)\left(\frac{d^2}{d\,t^2}T\right) - 2\,t\left(\frac{d}{d\,t}T\right) = 0$$

上式は ode2 関数で解くことができ、次式を得る。

$$T = \%k1\left(\frac{\log(t-1)}{2} - \frac{\log(t+1)}{2}\right) + \%k2$$

$t \pm 1$ で上記右辺第 1 項は発散するので、$T = \%k2$ となる。(6.1.28) 式の R に関する微分方程式で $N = 0$ として、速度ポテンシャルは次式となる。

$$\Phi = \frac{\%k2}{r} + \%k1 \tag{6.1.30}$$

これは後述する 6.1.7 わき出し (ページ 190) の速度ポテンシャルである。

(4)$N = 1$ の速度ポテンシャル

(6.1.29) 式の T に関する微分方程式で $N = 1$ として解く。

```
/* N=1 について解く */
NTN1:subst([N=1],NABRAT4);
ode2(%,T,t);
T11:T=a[0]+a[1]*t;
subst([T11],NTN1);
factor(ev(%,diff));
T110:subst([a[0]=0],T11);
\Phi=subst([N=1],rhs(RN))*rhs(T110);
POTN1:expand(subst([a[1]=1,t=cos(\theta)]
 ,%));
```

$$\left(1-t^2\right)\left(\frac{d^2}{d\,t^2}T\right) - 2\,t\left(\frac{d}{d\,t}T\right) + 2\,T = 0$$

上式は ode2 関数で解けない。そこで下記の 1 次までの多項式を考え、代入すると。

$$T = a_1\,t + a_0$$

下記が特解となる。

$$T = a_1\,t$$

(6.1.28) 式の R に関する微分方程式で $N = 1$ として、速度ポテンシャルは次式となる。

$$\Phi = a_1\left(\%k1\,r + \frac{\%k2}{r^2}\right)t$$

$$\Phi = \%k1\,r\cos(\theta) + \frac{\%k2\cos(\theta)}{r^2} \tag{6.1.31}$$

上式の右辺第 1 項は後述する 6.1.6 一様な流れ (ページ 189) を、右辺第 2 項は後述する 6.1.9 二重わき出し (ページ 192) となっている。

(5) 級数解

(6.1.29) 式の T に関する微分方程式の級数解を次式で表現する。ここで、b は初期の次数を表す。

$$T=\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{a}\left(n\right)\,t^{n+b}$$

```
/* 級数解　次数の確定 */
EQ1:NABRAT4;
FC:T;
VA:t;
EQSER:(VA)^b*a(n)*(VA)^n;
ANS:FC=sum(EQSER,n,0,12);
ANSD1:diff(ANS,VA,1);
ANSD2:diff(ANS,VA,2);
subst(rhs(ANSD2),lhs(ANSD2),EQ1);
subst(rhs(ANSD1),lhs(ANSD1),%);
TR:expand(subst(rhs(ANS),lhs(ANS),%));
COr:coeff(TR,VA,b-2);
rANS:solve(COr,b);
```

$n=12$ の項までの級数で T を表し、

$$T=\cdots+\mathrm{a}\left(3\right)\,t^{b+3}+\mathrm{a}\left(2\right)\,t^{b+2}+\mathrm{a}\left(1\right)\,t^{b+1}+\mathrm{a}\left(0\right)\,t^{b}$$

(6.1.29) 式の T に関する微分方程式に代入する。指数：$b-2$ で整理すると、

$$\mathrm{a}\left(0\right)\,b^2-\mathrm{a}\left(0\right)\,b=0$$

下記に最低指数：b が得られる。

$$[b=0,b=1]$$

最低指数：$b=0$ の特異解を求める。係数の関係を調べる。

```
/* 級数解　係数の確定 */
TR1:subst([b=0],TR);
for i:0 thru 8 do(
I:i-1,
print(COi[i]:coeff(TR1,VA,I)));
solve([COi[0],COi[1],COi[2],COi[3],COi[4],
  COi[5],COi[6],COi[7],COi[8]],
      [a(1),a(2),a(3),a(4),a(5),a(6),a(7),
  a(8),a(9)]);
factor(%);
```

各指数の係数が零の関係から、

$$\mathrm{a}\left(0\right)\,N^2+\mathrm{a}\left(0\right)\,N+2\,\mathrm{a}\left(2\right)=0$$

$$\mathrm{a}\left(1\right)\,N^2+\mathrm{a}\left(1\right)\,N+6\,\mathrm{a}\left(3\right)-2\,\mathrm{a}\left(1\right)=0$$

$$\mathrm{a}\left(2\right)\,N^2+\mathrm{a}\left(2\right)\,N+12\,\mathrm{a}\left(4\right)-6\,\mathrm{a}\left(2\right)=0$$

$$\mathrm{a}\left(3\right)\,N^2+\mathrm{a}\left(3\right)\,N+20\,\mathrm{a}\left(5\right)-12\,\mathrm{a}\left(3\right)=0$$

$\cdots\cdots\cdots$

係数を求めると、

$$\mathrm{a}\left(1\right)=\%r1,\mathrm{a}\left(2\right)=-\frac{\mathrm{a}\left(0\right)\,N^2+\mathrm{a}\left(0\right)\,N}{2},$$

$$\mathrm{a}\left(3\right)=-\frac{\%r1\,N^2+\%r1\,N-2\,\%r1}{6},\cdots$$

最低指数：$b=0$ の場合の係数の一般形式を求める。

```
EQSER1:subst([b=0],EQSER);
EQSUM:0;
for IJP:-3 thru 3 do(
ANSND0:subst(n+IJP,n,EQSER1),
ANSND1:diff(ANSND0,VA,1),
ANSND2:diff(ANSND0,VA,2),
EQ12:subst(ANSND2,diff(FC,VA,2),EQ1),
EQ11:subst(ANSND1,diff(FC,VA,1),EQ12),
TR12:expand(subst(ANSND0,FC,EQ11)),
EQSUM:EQSUM+TR12);
CON:ratsimp(coeff(EQSUM,VA,n-2));
CON1:factor(solve(CON,a(n)))[1];
TR13:T[1]=a(0)*(1+sum(product((N-2*m+2)
  *(N+2*m-1)/(2*m-1)/(2*m),m,1,n)*t^(2*n),
  n,1,inf));
```

係数の関係式は、

$$\mathrm{a}\left(n-2\right)\,N^2+\mathrm{a}\left(n-2\right)\,N+\left(n^2-n\right)\,\mathrm{a}\left(n\right)+\left(-n^2+3\,n-2\right)\,\mathrm{a}\left(n-2\right)=0$$

係数は、

$$\mathrm{a}\left(n\right)=-\frac{\mathrm{a}\left(n-2\right)\,\left(N-n+2\right)\,\left(N+n-1\right)}{\left(n-1\right)\,n}$$

これから最低指数：$b=0$ の特異解は

$$T_1=\mathrm{a}\left(0\right)\,\left(\left(\sum_{n=1}^{\infty}t^{2\,n}\,\prod_{m=1}^{n}\frac{\left(N-2\,m+2\right)\,\left(N+2\,m-1\right)}{2\,m\,\left(2\,m-1\right)}\right)+1\right)$$

最低指数：$b=1$ の場合は $b=0$ の場合と比べ、係数の関係から、独立であるので、最低指数：$b=1$ の係数の一般形式を求める。

```
EQSER2:subst([b=1],EQSER);
EQSUM:0;
for IJP:-3 thru 3 do(
ANSND0:subst(n+IJP,n,EQSER2),
ANSND1:diff(ANSND0,VA,1),
ANSND2:diff(ANSND0,VA,2),
EQ12:subst(ANSND2,diff(FC,VA,2),EQ1),
EQ11:subst(ANSND1,diff(FC,VA,1),EQ12),
TR12:expand(subst(ANSND0,FC,EQ11)),
EQSUM:EQSUM+TR12);
CON:ratsimp(coeff(EQSUM,VA,n+1-2));
CON1:factor(solve(CON,a(n)))[1];
TR14:T[2]=b(0)*t*(1+sum(product((N-2*m+1)
  *(N+2*m)/(2*m)/(2*m+1),m,1,n)*t^(2*n),n,
  1,inf));
T=subst([t=cos(\theta)],rhs(TR13)
 +rhs(TR14));
```

係数の関係式は、

$$\mathrm{a}\left(n-2\right)\,N^2+\mathrm{a}\left(n-2\right)\,N+\left(n^2+n\right)\,\mathrm{a}\left(n\right)+\left(n-n^2\right)\,\mathrm{a}\left(n-2\right)=0$$

係数は、

$$\mathrm{a}\left(n\right)=-\frac{\mathrm{a}\left(n-2\right)\,\left(N-n+1\right)\,\left(N+n\right)}{n\,\left(n+1\right)}$$

これから最低指数：$b=1$ の特異解は

$$T_2=\mathrm{b}\left(0\right)\,t\,\left(\left(\sum_{n=1}^{\infty}t^{2\,n}\,\prod_{m=1}^{n}\frac{\left(N-2\,m+1\right)\,\left(N+2\,m\right)}{2\,m\,\left(2\,m+1\right)}\right)+1\right)$$

最低指数：$b=0$ の特異解と最低指数：$b=1$ の特異解を合わせた特解は

$$\begin{aligned}T=&\mathrm{b}\left(0\right)\,\cos\left(\theta\right)\,\left(\left(\sum_{n=1}^{\infty}\cos\left(\theta\right)^{2\,n}\,\prod_{m=1}^{n}\frac{\left(N-2\,m+1\right)\,\left(N+2\,m\right)}{2\,m\,\left(2\,m+1\right)}\right)+1\right)\\&+\mathrm{a}\left(0\right)\,\left(\left(\sum_{n=1}^{\infty}\cos\left(\theta\right)^{2\,n}\,\prod_{m=1}^{n}\frac{\left(N-2\,m+2\right)\,\left(N+2\,m-1\right)}{2\,m\,\left(2\,m-1\right)}\right)+1\right)\end{aligned}$$

6.1.5 軸対称流れの一般解（円柱座標表示）

速度ポテンシャル：Φ の軸対称流れの質量保存の方程式は (6.1.17) 式、(180 ページ) から下記である。

$$\frac{\frac{d}{d\,r}\,\Phi}{r}+\frac{d^2}{d\,z^2}\,\Phi+\frac{d^2}{d\,r^2}\,\Phi=0 \tag{6.1.32}$$

```
/* 軸対称流れの一般解 円柱座標*/
kill(all);
load("vect")
depends(r,[t,x,y]);
depends(\theta,[t,x,y]);
depends(z,[t]);
NABRA3:'diff(\Phi,r,1)/r+'diff(\Phi,z,2)
  +'diff(\Phi,r,2)=0;
GRADA:matrix(['diff(\Phi,r,1)],['diff(\Phi,
  theta,1)/r],['diff(\Phi,z,1)]);
depends(\R,[r]);
depends(\Z,[z]);
POTRZ:\Phi=Z*R;
subst([POTRZ],NABRA3);
ev(%,diff);
expand(%/R/Z);
NABRA4:lhs(%)-first(lhs(%))=rhs(%)
  -first(lhs(%));
```

これを変数分離法を用いて解く。r のみの関数である R と z のみの関数である Z で速度ポテンシャルを下記のように表現する。

$$\Phi=R\,Z$$

これを上記、質量保存の方程式に代入し整理すると

$$\frac{d^2}{d\,z^2}\,(R\,Z)+\frac{d^2}{d\,r^2}\,(R\,Z)+\frac{\frac{d}{d\,r}\,(R\,Z)}{r}=0$$

$$\frac{\frac{d^2}{d\,z^2}\,Z}{Z}+\frac{\frac{d^2}{d\,r^2}\,R}{R}+\frac{\frac{d}{d\,r}\,R}{r\,R}=0$$

$$\frac{\frac{d^2}{d\,r^2}\,R}{R}+\frac{\frac{d}{d\,r}\,R}{r\,R}=-\frac{\frac{d^2}{d\,z^2}\,Z}{Z} \tag{6.1.33}$$

(1)Z について

```
assume(K>0);
rhs(NABRA4)=K^2;
expand((-lhs(%)+rhs(%))*Z)=0;
ode2(%,Z,z);
NABR1:lhs(NABRA4)=-K^2;
NABZ1:rhs(NABRA4)=-K^2;
expand((-lhs(NABZ1)+rhs(NABZ1))*Z)=0;
ode2(%,Z,z);
Z1:subst([%k1=0],%);
```

(6.1.33) 式の右辺について下記のように置くと、

$$-\frac{\frac{d^2}{d\,z^2}\,Z}{Z}=K^2$$

$$\frac{d^2}{d\,z^2}\,Z+K^2\,Z=0$$

解は下記となる。

$$Z=\%k1\sin(z\,K)+\%k2\cos(z\,K)$$

$z\to\infty$ の時、$Z\to 0$ とならないので解として採用できない。(6.1.33) 式の右辺について下記のように置くと、

$$-\frac{\frac{d^2}{d\,z^2}\,Z}{Z}=-K^2 \tag{6.1.34}$$

$$\frac{d^2}{d\,z^2}\,Z-K^2\,Z=0$$

解は下記となる。

$$Z=\%k1\,e^{z\,K}+\%k2\,e^{-z\,K}$$

$z\to\infty$ の時、$Z\to 0$ となる解は下記となる。

$$Z=\%k2\,e^{-z\,K}$$

(2)R について

```
NABR2:expand(-(-lhs(NABR1)+rhs(NABR1))*R)
 =0;
depends(u,[t]);
depends(v,[x]);
depends(x,[t]);
depends(t,[x]);
BESS1:t^2*diff(u,t,2)+t*diff(u,t,1)
  +(t^2-n^2)*u=0;
V1:v=u*(t/B)^(A/C);
X1:x=(t/B)^(1/C);
T1:t=x^C*B;
V1D:diff(V1,x,1);
V1DD:diff(V1,x,2);
T1D:diff(T1,x,1);
T1DD:diff(T1,x,2);
U1:solve(V1,u)[1];
solve(V1D,'diff(u,t,1))[1];
U1D:lhs(%)=subst([T1D],rhs(%));
solve(V1DD,'diff(u,t,2))[1];
U1DD:lhs(%)=subst([U1D,U1,T1D,T1DD],
 rhs(%));
subst([U1D,U1DD],BESS1);
subst([U1,T1],%);
VXX:expand(%*(x^C)^(A/C)*C^2);
CVDD:coeff(lhs(VXX),'diff(v,x,2),1);
CVD:factor(coeff(lhs(VXX),'diff(v,x,1),1));
CV:coeff(lhs(VXX),v,1);
BESS2:(CV)*v+CVD*diff(v,x,1)
  +CVDD*diff(v,x,2)=0;
expand(NABR2*r^2);
```

```
CNS1:C=1;
-(2*A-1)=1;
CNS2:solve(%,A)[1];
B^2*C^2=K^2;
CNS3:B=K;
-n^2*C^2+A^2=0;
subst([CNS1,CNS2],%);
CNS4:n=0;
BESS3:subst([CNS1,CNS2,CNS3,CNS4],BESS2);
T11:subst([CNS1,CNS2,CNS3,CNS4],T1);
U11:subst([CNS1,CNS2,CNS3,CNS4],U1);
ANBES1:ode2(BESS1,u,t);
ANBES2:subst([CNS4,T11,U11],ANBES1);
R1:subst([%k2=0,v=R,x=r],ANBES2);
\Phi=rhs(Z1)*rhs(R1);
PHI01:subst([%k2=1],%);
plot2d([bessel_j(0,x),bessel_y(0,x)],
     [x,-50,50]);
```

Z で解が得られた、(6.1.34) 式の右辺の定数を採用して、(6.1.33) 式の左辺は、

$$\frac{d^2}{d\,r^2}\,R+\frac{\frac{d}{d\,r}\,R}{r}+K^2\,R=0 \tag{6.1.35}$$

上式は Bessel の方程式である。しかし、Maxima では下記の式の形しか解けない。Maxima を使った微分方程式演習ノート (http://www9.plala.or.jp/prac-maxima/) 4.5Bessel の微分方程式にならって、

$$t^2\,\left(\frac{d^2}{d\,t^2}\,u\right)+t\,\left(\frac{d}{d\,t}\,u\right)+\left(t^2-n^2\right)\,u=0 \tag{6.1.36}$$

そこで、下記の変数変換を行って解く。

$$v=u\left(\frac{t}{B}\right)^{\frac{A}{C}},\quad x=\left(\frac{t}{B}\right)^{\frac{1}{C}}$$

(6.1.36) 式に上記の変数変換を行うと下記が得られる。

$$v\,\left(x^{2\,C}\,B^2\,C^2-n^2\,C^2+A^2\right)-\left(\frac{d}{d\,x}\,v\right)\,x\,\left(2\,A-1\right)+\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,v\right)\,x^2=0$$

上式と (6.1.35) 式を比較して、下記の関係が得られる。

$$C=1,\quad 1-2\,A=1,\quad A^2-n^2\,C^2=0,\quad B^2\,C^2=K^2$$

上記の関係から、各係数は、

$$C=1,\quad A=0,\quad B=K,\quad n=0$$

(6.1.36) 式の解は、

$$u=\%k2\,\mathrm{bessel\_y}\left(n,t\right)+\%k1\,\mathrm{bessel\_j}\left(n,t\right)$$

上記に各係数の関係を代入した変数変換を施すと、

$$v=\mathrm{bessel\_y}\left(0,x\,K\right)\,\%k2+\mathrm{bessel\_j}\left(0,x\,K\right)\,\%k1$$

$v\to R$ に、$x\to r$ に変換して、(6.1.35) 式の解が得られる。ここで $r\to\infty$ の時、$R\to 0$ となり、下図に示す Bessel 関数の特性から下記となる。

$$R=\mathrm{bessel\_j}\left(0,r\,K\right)\,\%k1$$

以上から速度ポテンシャルの一般解は、

$$\Phi=\mathrm{bessel\_j}\left(0,r\,K\right)\,\%k1\,e^{-z\,K}$$

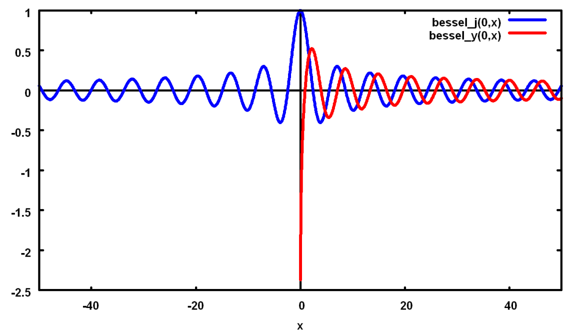


図 6.1.5: Bessel 関数

```
'diff(lhs(PHI01),r,1)=diff(rhs(R1),r,1)
  *rhs(Z1);
PHI01D:subst([%k2=1],%);
PHPSR1:GRADA[1][1]=-'diff(\Psi,z,1)/r;
subst([PHI01D],PHPSR1);
ode2(%,\Psi,z);
subst([%c=0],%);
```

上記に対応する流れ関数は、

$$\frac{d}{d\,r}\,\Phi=-\frac{\frac{d}{d\,z}\,\Psi}{r}$$

$$\frac{d}{d\,r}\,\Phi=-\mathrm{bessel\_j}\left(1,r\,K\right)\,\%k1\,K\,e^{-z\,K}$$

上記から流れ関数は下記となる。

$$\Psi=-\mathrm{bessel\_j}\left(1,r\,K\right)\,\%k1\,r\,e^{-z\,K}$$

6.1.6 一様な流れ

z 軸方向に一様な流れの速度ポテンシャルと流れ関数を求める。

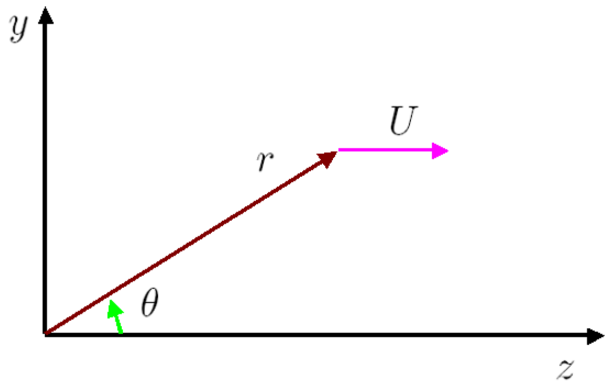


図 6.1.6: z 方向の一様な流れ

```
kill(all);
ZR:z=r*cos(\theta);
CONPHI1:\Phi=U*z;
CONPHI2:subst(ZR,%);
v[z]='diff(Psi,y,1)/y;
CONST1:U='diff(\Psi,y,1)/y;
ode2(CONST1,\Psi,y);
CONST2:subst([%c=0],%);
STFUN:subst([y=r*sin(\theta)],%);
```

極座標と xyz 座標の関係は、

$$z = r\cos(\theta)$$

z 軸方向に一様な流れの速度ポテンシャルは (6.1.4) 式、(177 ページ) から

$$v_z = U = \frac{d}{dz}\Phi$$

これを解くと明らかに、

$$\Phi = z\,U$$

極座標表示すると下記で、これは軸対称流れの速度ポテンシャルの極座標一般解の (6.1.31) 式右辺第 2 項に相当しており、質量保存の法則を満足している。

$$\Phi = r\cos(\theta)\;U$$

流れ関数の関係式 (6.1.19) 式、(181 ページ) から

$$U = v_z = \frac{\frac{d}{dy}\Psi}{y}$$

ode2 関数を用いて上式を解いて、

$$\Psi = \frac{y^2\,U}{2} + \%c$$

$\%c = 0$ として、

$$\Psi = \frac{y^2\,U}{2}$$

極座標表示すると、

$$\Psi = \frac{r^2\sin(\theta)^2\,U}{2}$$

以上まとめると極座標表記の速度ポテンシャル：Φ と流れ関数：Ψ は

$$\Phi = r\cos(\theta)\;U, \quad \Psi = \frac{r^2\sin(\theta)^2\,U}{2} \tag{6.1.37}$$

6.1.7　わき出し

```
/* わき出し*/
kill(all);
load("vect")
NABRA21:(('diff(\Phi,\theta,1))*cos(\theta
 ))/sin(\theta)+('diff(\Phi,r,2))*r^2+2*(
 'diff(\Phi,r,1))*r+'diff(\Phi,\theta,2)
 =0;
NABRA3:lhs(%)-first(lhs(%))-last(lhs(%))=0;
NABRA4:first(lhs(NABRA3))+last(lhs(
 NABRA3))=0;
POT1:ode2(NABRA4,\Phi,r);
POTSO:subst([%k1=0,%k2=-m],POT1);
VR1:v[r]='diff(lhs(POTSO),r,1);
VR2:v[r]=diff(rhs(POTSO),r,1);
Q1:Q=v[r]*S(r);
Q2:Q=rhs(VR2)*4*%pi*r^2;
v[r]='diff(\Phi,r,1);
v[r]='diff(\Psi,\theta,1)/(r^2*sin(
 \theta));
'diff(\Phi,r,1)='diff(\Psi,\theta,1)/(r^2
  *sin(\theta));
subst([POTSO],lhs(%))=rhs(%);
ev(lhs(%),diff)=rhs(%);
%*r^2*sin(\theta);
ode2(%,\Psi,\theta);
STFSO:factor(subst([%c=m],%));
```

(1) 原点にわき出しがある場合

質量保存の方程式の z 軸まわりの軸対称極座標は (6.1.7) 式、(178 ページ) から

$$\frac{\left(\frac{d}{d\theta}\Phi\right)\cos(\theta)}{\sin(\theta)}+\left(\frac{d^2}{d\,r^2}\Phi\right)r^2+2\left(\frac{d}{d\,r}\Phi\right)r+\frac{d^2}{d\,\theta^2}\Phi=0$$

わき出しは、θ 方向にも対称であることから次式を得る。

$$\frac{2\left(\frac{d}{d\,r}\Phi\right)}{r}+\frac{d^2}{d\,r^2}\Phi=0$$

ode2 関数を用いて上式を解いて、$r\to\infty$ のとき、$\Phi=0$ とし、$m>0$ の時 $v_r>0$ から

$$\Phi=\frac{\%k2}{r}+\%k1\to\Phi=-\frac{m}{r}$$

また、上式は軸対称流れの速度ポッテンシャルの極座標一般解の (6.1.30) 式右辺第 1 項に相当している。r 方向の速度は、

$$v_r=\frac{d}{d\,r}\Phi=\frac{m}{r^2}$$

r における表面積：$S(r)$ を通る流量：Q は、

$$Q=v_r\,\mathrm{S}(r)=4\,m\,\pi$$

r 方向の速度の速度ポテンシャルと流れ関数の関係式から

$$v_r=\frac{d}{d\,r}\Phi=\frac{m}{r^2}=\frac{\frac{d}{d\,\theta}\Psi}{r^2\sin(\theta)}$$

ode2 関数を用いて上式を解いて、

$$\Psi=\%c-m\cos(\theta)$$

$\theta=0$ で $\Psi=0$ として、$\%c=m$ とし、極座標表記の速度ポテンシャルと流れ関数は

$$\Phi=-\frac{m}{r},\quad \Psi=-m\,(\cos(\theta)-1) \tag{6.1.38}$$

(2) 原点から離れた位置にわき出しがある場合

下図のようにわき出しの位置が原点から c ずれている場合には、

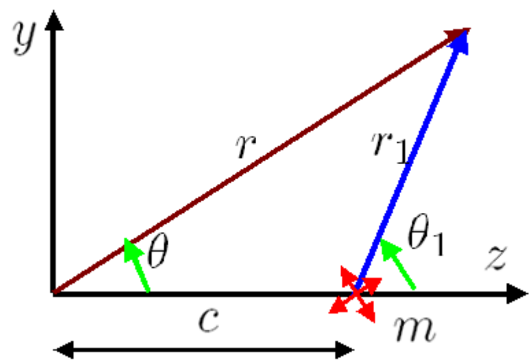


図 6.1.7: z 軸上にずれているわき出し

```
POTR1:subst([r=r[1]],POTSO);
STFS1:subst([\theta=\theta[1]],STFSO);
R1:r[1]=sqrt(r^2+c^2-2*r*c*cos(\theta));
T1:cos(\theta[1])=(r*cos(\theta)-c)/(r[1]);
POTR2:subst([R1],POTR1);
STFS2:subst([T1,R1],STFS1);
```

(6.1.38) 式から、

$$\begin{aligned}\Phi&=-\frac{m}{r_1}\\ \Psi&=-(\cos(\theta_1)-1)\,m\end{aligned} \tag{6.1.39}$$

三辺が c,r,r_1 の三角形の第 2 余弦法則から下記の関係を得る、

$$r_1=\sqrt{-2\,c\,r\cos(\theta)+r^2+c^2}$$

$$\cos(\theta_1)=\frac{r\cos(\theta)-c}{\sqrt{-2\,c\,r\cos(\theta)+r^2+c^2}}$$

上記の関係を代入し、z 軸上にずれているわき出しの速度ポテンシャル：Φ と流れ関数：Ψ は

$$\begin{aligned}\Phi&=-\frac{m}{\sqrt{-2\,c\,r\cos(\theta)+r^2+c^2}}\\ \Psi&=-m\left(\frac{r\cos(\theta)-\ c}{\sqrt{-2\,c\,r\cos(\theta)+r^2+c^2}}-1\right)\end{aligned} \tag{6.1.40}$$

6.1.8 一様なわき出し分布

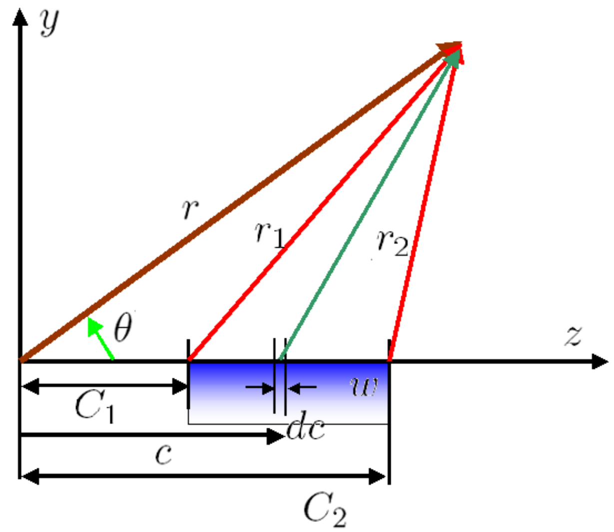


図 6.1.8: 一様なわき出し分布

軸対称 z 軸上の C_1 から C_2 に一様なわき出しが分布しているとする。下記プログラムは前記わき出しに続いて実行するものとする。

```
/* Finite Line Source */
assume((C[2]-C[1])>0);
assume(r[1]>0);
assume(r[2]>0);
assume(r>0);
assume(cos(\theta)<1 and cos(\theta)>0);
assume(sin(\theta)<1 and sin(\theta)>0);
MW1:m=w*(C[2]-C[1]);
MW2:solve(MW1,w)[1];
RC1:r[1]^2=r^2-2*C[1]*r*cos(theta)+C[1]^2;
RC2:r[2]^2=r^2-2*C[2]*r*cos(theta)+C[2]^2;
CR1:solve(RC1,C[1]^2)[1];
CR2:solve(RC2,C[2]^2)[1];
DPOTL1:subst([m=w],rhs(POTR2));
lhs(POTR2)='integrate(DPOTL1,c,C[1],C[2]);
ev(%,integrate);
expand(subst([cos(\theta)^2=1-sin(\theta)^2
  ,MW2],%));
POTL2:factor(%);
```

(1) 速度ポテンシャル

分布強度 : w とすると、全体のわき出し : m との関係は、

$$m = w\,(C_2 - C_1)$$

z 軸上の c にわき出しがある場合の速度ポテンシャルは (6.1.40) 式から、下記となる。

$$\Phi = -\frac{m}{\sqrt{-2\,c\,r\cos(\theta) + r^2 + c^2}}$$

上式を $m \to w\,dc$ とし、積分範囲 : $C_1 \sim C_2$ で積分すると、

$$\begin{aligned}\Phi &= -\int_{C_1}^{C_2} \frac{1}{\sqrt{-2\,c\,r\cos(\theta) + r^2 + c^2}} dc\, w \\ &= \left(\operatorname{asinh}\left(\frac{r\cos(\theta) - C_2}{r\sin(\theta)}\right)\right. \\ &\quad \left. - \operatorname{asinh}\left(\frac{r\cos(\theta) - C_1}{r\sin(\theta)}\right)\right) w \\ &= \frac{m}{C_2 - C_1}\left(\operatorname{asinh}\left(\frac{r\cos(\theta) - C_2}{r\sin(\theta)}\right)\right. \\ &\quad \left. - \operatorname{asinh}\left(\frac{r\cos(\theta) - C_1}{r\sin(\theta)}\right)\right)\end{aligned} \tag{6.1.41}$$

```
DSTFL1:subst([m=w],rhs(STFS2));
lhs(STFS2)='integrate(DSTFL1,c,C[1],C[2]);
STFL2:expand(ev(%,integrate));
subst([CR1,CR2,MW2],%);
STFL3:\Psi=((r[2]-r[1])*m)/(C[2]-C[1]);
```

(2) 流れ関数

z 軸上の c にわき出しがある場合の流れ関数は (6.1.40) 式から、下記となる。

$$\Psi = -m\left(\frac{r\cos(\theta) - c}{\sqrt{-2\,c\,r\cos(\theta) + r^2 + c^2}} - 1\right)$$

上式を $m \to w\,dc$ とし、$C_1 \sim C_2$ の範囲で積分すると、

$$\begin{aligned}\Psi &= -\,w\int_{C_1}^{C_2}\left(\frac{r\cos(\theta) - c}{\sqrt{-2\,c\,r\cos(\theta) + r^2 + c^2}} - 1\right) dc \\ &= \sqrt{-2\,C_2\,r\cos(\theta) + r^2 + C_2^2}\,w \\ &\quad - \sqrt{-2\,C_1\,r\cos(\theta) + r^2 + C_1^2}\,w + C_2\,w - C_1\,w \\ &= (r_2 - r_1)\,w + w(C_2 - C_1)\end{aligned}$$

上式を $r \to \infty$ のとき $\Psi \to 0$ として下記となる。

$$\Psi = \frac{(r_2 - r_1)\,m}{C_2 - C_1} \tag{6.1.42}$$

6.1.9　二重わき出し

二重わき出しの速度ポテンシャル：Φ と流れ関数：Ψ を求める。また、二重わき出しの位置が原点からずれている場合の速度ポテンシャルと流れ関数も求める。

(1) 原点に二重わき出しがある場合

z 軸上の $z=c$ の位置に強さ：m のわき出しを、$z=-c$ の位置に強さ：$-m$ の吸い込みを置く。$c\to 0$ にした時の速度ポテンシャルと流れ関数を求める。

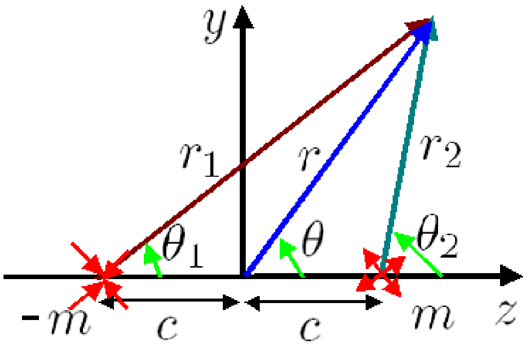


図 6.1.9: 二重わき出し

```
/* 二重わき出し */
kill(all);
assume(r>0);
assume(r[A]>0);
PHI0:\Phi=-m/r[A];
PSI0:\Psi=-m*(cos(\theta[A])-1);
PHI00:\Phi=-m/sqrt(-2*c*r*cos(\theta)+r^2
  +c^2);
PSI00:\Psi=-m*((r*cos(\theta)-c)/sqrt(-2*c
  *r*cos(\theta)+r^2+c^2)-1);
PHI01:subst([c=-c,m=-m],PHI00);
PHDB1:\Phi=rhs(PHI00)+rhs(PHI01);
subst([c^2=0],%);
lhs(%)=taylor(rhs(%),c,0,3);
subst([c^3=0],%);
PHDB2:subst([c=\mu/2/m],%);
PSI01:subst([c=-c,m=-m],PSI00);
PSDB1:\Psi=rhs(PSI00)+rhs(PSI01);
subst([c^2=0],%);
lhs(%)=taylor(rhs(%),c,0,3);
subst([c^3=0],%);
PSDB2:trigsimp(subst([c=\mu/2/m],%));
```

z 軸上の $z=c$ の位置に強さ：m のわき出しの速度ポテンシャルと流れ関数は下記である。(6.1.39) 式、(6.1.40) 式、(190 ページ) から

$$\Phi=-\frac{m}{r_A},\quad \Psi=-m\,(\cos(\theta_A)-1)$$

$$\Phi=-\frac{m}{\sqrt{-2\,c\,r\cos(\theta)+r^2+c^2}}$$

$$\Psi=-m\left(\frac{r\cos(\theta)-c}{\sqrt{-2\,c\,r\cos(\theta)+r^2+c^2}}-1\right)$$

上式から、$z=c$ にあるわき出しと $z=-c$ にある吸い込みの速度ポテンシャル：Φ は下記となる。

$$\Phi=\frac{m}{\sqrt{2\,c\,r\cos(\theta)+r^2+c^2}}-\frac{m}{\sqrt{-2\,c\,r\cos(\theta)+r^2+c^2}} \tag{6.1.43}$$

(6.1.43) 式の速度ポテンシャルで c の高次項を省略し、c について taylor 展開すると、

$$\Phi=-\frac{2\,m\cos(\theta)\;c}{r^2}-\frac{5\,m\cos(\theta)^3\;c^3}{r^4}+\ldots$$

更に上式の c の高次項を省略し、$c\to 0, m\to\infty$ として、$2cm\to\mu$ とすると、

$$\Phi=-\frac{2\,c\,m\cos(\theta)}{r^2}\to-\frac{\mu\cos(\theta)}{r^2}$$

$z=c$ にあるわき出しと $z=-c$ にある吸い込みの流れ関数：Ψ は下記となる。

$$\begin{aligned}\Psi=&m\left(\frac{r\cos(\theta)+c}{\sqrt{2\,c\,r\cos(\theta)+r^2+c^2}}-1\right)\\&-m\left(\frac{r\cos(\theta)-c}{\sqrt{-2\,c\,r\cos(\theta)+r^2+c^2}}-1\right)\end{aligned} \tag{6.1.44}$$

(6.1.44) 式の流れ関数で c の高次項を省略し、c について taylor 展開すると、

$$\Psi=-\frac{\left(2\,m\cos(\theta)^2-2\,m\right)\,c}{r}-\frac{\left(5\,m\cos(\theta)^4-3\,m\cos(\theta)^2\right)\,c^3}{r^3}+\ldots$$

更に上式の c の高次項を省略し、$c\to 0, m\to\infty$ として、$2*cm\to\mu$ とすると、

$$\Psi=-\frac{c\left(2\,m\cos(\theta)^2-2\,m\right)}{r}\to\frac{\mu\sin(\theta)^2}{r}$$

以上から二重わき出しの速度ポテンシャル：Φ と流れ関数：Ψ は下記となる。

$$\Phi=-\frac{\mu\cos(\theta)}{r^2},\quad \Psi=\frac{\mu\sin(\theta)^2}{r} \tag{6.1.45}$$

(2) 原点から離れた位置にある場合

上図に示すように、z 軸上に原点から C_A 離れた位置を中心に $+c$ の位置に m のわき出しを、$-c$ の位置に $-m$ のわき出し（吸いこみ）を置く。

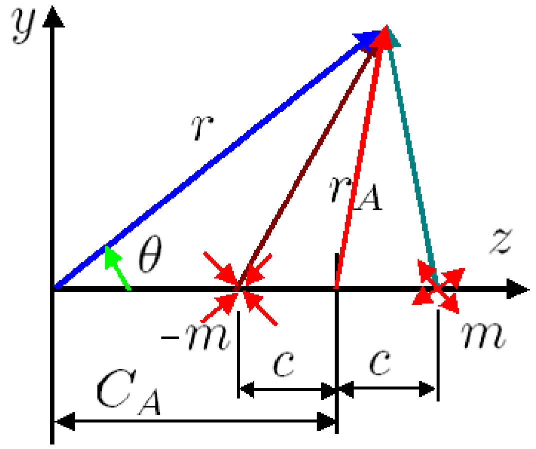


図 6.1.10: 二重わき出しの位置が原点から離れた位置にある場合

```
\Phi=-m/r[A];
r[A]=sqrt(r^2-2*C[A]*r*cos(\theta)+C[A]^2);
subst([c=C[A]+c],PHI00);
PHI11:lhs(%)=taylor(rhs(%),c,0,3);
subst([c=C[A]-c,m=-m],PHI00);
PHI12:lhs(%)=taylor(rhs(%),c,0,3);
rhs(PHI11)+rhs(PHI12);
PHDB3:\Phi=factor(subst([c^3=0,m=\mu/c/2]
  ,%));
```

わき出しの速度ポテンシャル:Φ は下記から得られる。

$$\Phi = -\frac{m}{r_A} \tag{6.1.46}$$

ここで $+c$ の位置の r_A を r_{A+}、$-c$ の位置の r_A を r_{A-} とすると、

$$\begin{aligned} r_{A+} &= \sqrt{(C_A+c)^2 - 2\,r\cos(\theta)\,(C_A+c) + r^2} \\ r_{A-} &= \sqrt{(C_A-c)^2 - 2\,r\cos(\theta)\,(C_A-c) + r^2} \end{aligned} \tag{6.1.47}$$

(6.1.47) 式を (6.1.46) 式に代入し、速度ポテンシャル:Φ を c で taylor 展開し、c の高次項を省略しわき出しと吸いこみの両式の和をとって、$c \to 0, m \to \infty$ として、$2cm \to \mu$ とすると、二重わき出しの速度ポテンシャル:Φ は、

$$\Phi = \frac{\mu\,(C_A - r\cos(\theta))}{(C_A^2 - 2\,r\cos(\theta)\,C_A + r^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{6.1.48}$$

```
\Psi=-m*(cos(\theta[A])-1);
cos(\theta[A])=(r*cos(\theta)-C[A])/sqrt(
 r^2-2*C[A]*r*cos(\theta)+C[A]^2);
subst([c=C[A]+c],PSI00);
PSI11:lhs(%)=taylor(rhs(%),c,0,3);
subst([c=C[A]-c,m=-m],PSI00);
PSI12:lhs(%)=taylor(rhs(%),c,0,3);
rhs(PSI11)+rhs(PSI12);
PSDB3:\Psi=trigsimp(factor(subst([c^3=0,
  m=\mu/c/2],%)));
```

わき出しの流れ関数:Ψ は下記から得られる。

$$\Psi = -m\,(\cos(\theta_A) - 1) \tag{6.1.49}$$

ここで $+c$ の位置の Ψ を Ψ_{A+}、$-c$ の位置の Ψ を Ψ_{A-} とすると、

$$\begin{aligned} &\Psi_{A+} \\ &= -m\left(\frac{-C_A + r\cos(\theta) - c}{\sqrt{(C_A+c)^2 - 2\,r\cos(\theta)\,(C_A+c) + r^2}} - 1\right) \\ &\Psi_{A-} \\ &= m\left(\frac{-C_A + r\cos(\theta) + c}{\sqrt{(C_A-c)^2 - 2\,r\cos(\theta)\,(C_A-c) + r^2}} - 1\right) \end{aligned} \tag{6.1.50}$$

流れ関数:Ψ_{A+} を c で taylor 展開し、c の高次項を省略しわき出しの式を求める。また、流れ関数:Ψ_{A-} を c で taylor 展開し、c の高次項を省略し吸いこみの式を求める。これらのわき出し、吸いこみの両式の和をとって、$c \to 0, m \to \infty$ として、$2cm \to \mu$ とすると、二重わき出しの流れ関数:Ψ は、

$$\Psi = \frac{\mu\,r^2\sin(\theta)^2}{(C_A^2 - 2\,r\cos(\theta)\,C_A + r^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{6.1.51}$$

6.1.10 Kervin の球定理 (速度ポッテンシャル)

```
/* Kervin の球定理 */
kill(all);
NABRA:'diff((('diff(\Phi(r,\theta),
 \theta,1)) *sin(\theta)),\theta,1)
 /sin(\theta) +'diff((('diff(\Phi(r,
 \theta),r,1))*r^2),r,1)=0;
PHI0:\Phi[0]=\Phi(r,\theta);
PHI1:\Phi[1]=A/r*\Phi(A^2/r,\theta);
RR1:R=A^2/r;
RR2:solve(RR1,r)[1];
PHI11:subst([RR2],PHI1);
NABRAR:subst([r=R],NABRA);
PHI1D:'diff(\Phi[1],r,1)=
  'diff(R,r,1)*\Phi(R,\theta)/A+R/A
  *'diff(\Phi(R,\theta),R,1)*'diff(R,r,1);
RR1D:'diff(R,r,1)=diff(rhs(RR1),r,1);
PHI1D1:expand(subst([RR1D],PHI1D)*r^2);
PHI1D21:-A*'diff(R,r,1)
 *'diff(\Phi(R,\theta),R,1)-A*R
 *'diff(\Phi(R,\theta),R,2)*'diff(R,r,
    1);
PHI1D22:-A*'diff(\Phi(R,\theta),R,1)
  *'diff(R,r,1);
PHI1D20:'diff(lhs(PHI1D1),r,1)=PHI1D21
  +PHI1D22;
subst([RR1D],PHI1D20);
lhs(%)=subst([RR2],rhs(%));
PHI1D21:lhs(%)=R/A*'diff(R^2
  *'diff(\Phi(R,\theta),R,1),R,1);
PHI11TD:'diff(\Phi[1],\theta,1)=R/A
  *'diff(\Phi(R,\theta),\theta,1);
NABRA1:'diff((('diff(\Phi[1],\theta,1))
  *sin(\theta)),\theta,1)/sin(\theta)
  +'diff((('diff(\Phi[1],r,1))*r^2),r,1)
  =R/A*(lhs(NABRAR));
NABRA11:'diff((('diff(\Phi[1],\theta,1))
  *sin(\theta)),\theta,1)/sin(\theta)
  +'diff((('diff(\Phi[1],r,1))*r^2),r,1)=0;
```

軸対称の非回転、非圧縮性の流れがあるとする。軸対称の速度ポテンシャル：$\Phi_0 = \Phi(r,\theta)$ が調和関数であるとする。この速度ポテンシャルの質量保存の方程式は (6.1.8) 式から、

$$\frac{\frac{d}{d\theta}\left(\left(\frac{d}{d\theta}\Phi(r,\theta)\right)\sin(\theta)\right)}{\sin(\theta)}+\frac{d}{d\,r}\left(r^2\left(\frac{d}{d\,r}\Phi(r,\theta)\right)\right)=0 \tag{6.1.52}$$

半径：$r=A$ の球の鏡像位置の関係とした下記の関数も調和関数となることを証明する。

$$\Phi_1=\frac{A\,\Phi\left(\frac{A^2}{r},\theta\right)}{r}$$

$R=\frac{A^2}{r}$ の置き換えをすると、

$$\Phi_1=\frac{R\,\Phi(R,\theta)}{A}$$

$\Phi_1(R,\theta)$ は $r\to R$ に置き換えているのみであるから、下記の質量保存の方程式は (6.1.8) 式を満足し下記となる。

$$\frac{d}{d\,R}\left(R^2\left(\frac{d}{d\,R}\Phi(R,\theta)\right)\right)+\frac{\frac{d}{d\theta}\left(\sin(\theta)\left(\frac{d}{d\theta}\Phi(R,\theta)\right)\right)}{\sin(\theta)}=0 \tag{6.1.53}$$

Φ_1 について、r の一回微分の下記の式に $\frac{d}{d\,r}R=-\frac{A^2}{r^2}$ を代入すると、

$$\frac{d}{d\,r}\Phi_1=\frac{R\left(\frac{d}{d\,r}R\right)\left(\frac{d}{d\,R}\Phi(R,\theta)\right)}{A}+\frac{\left(\frac{d}{d\,r}R\right)\Phi(R,\theta)}{A}$$

$$\left(\frac{d}{d\,r}\Phi_1\right)r^2=-A\,R\left(\frac{d}{d\,R}\Phi(R,\theta)\right)-A\,\Phi(R,\theta)$$

更に上記を r で微分すると、

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\,r}\left(\left(\frac{d}{d\,r}\Phi_1\right)r^2\right)=&\frac{A^3\,R\left(\frac{d^2}{d\,R^2}\Phi(R,\theta)\right)}{r^2}\\&+\frac{2\,A^3\left(\frac{d}{d\,R}\Phi(R,\theta)\right)}{r^2}\\=&\frac{R\left(\frac{d}{d\,R}\left(R^2\left(\frac{d}{d\,R}\Phi(R,\theta)\right)\right)\right)}{A}\end{aligned} \tag{6.1.54}$$

また、Φ_1 について、θ の一回微分は

$$\frac{d}{d\,\theta}\Phi_1=\frac{R\left(\frac{d}{d\theta}\Phi(R,\theta)\right)}{A} \tag{6.1.55}$$

下記左辺に上式の (6.1.54) 式、(6.1.55) 式を代入すると、右辺となる。

$$\frac{\frac{d}{d\theta}\left(\left(\frac{d}{d\theta}\Phi_1\right)\sin(\theta)\right)}{\sin(\theta)}+\frac{d}{d\,r}\left(\left(\frac{d}{d\,r}\Phi_1\right)r^2\right)$$
$$=\frac{R\left(\frac{d}{d\,R}\left(R^2\left(\frac{d}{d\,R}\Phi(R,\theta)\right)\right)+\frac{\frac{d}{d\theta}\left(\sin(\theta)\left(\frac{d}{d\theta}\Phi(R,\theta)\right)\right)}{\sin(\theta)}\right)}{A}$$

上記右辺は (6.1.53) 式から零となり、Φ_1 は下記の関係を満足する。

$$\frac{\frac{d}{d\theta}\left(\left(\frac{d}{d\theta}\Phi_1\right)\sin(\theta)\right)}{\sin(\theta)}+\frac{d}{d\,r}\left(\left(\frac{d}{d\,r}\Phi_1\right)r^2\right)=0$$

以上から下記の関数も質量保存の方程式を満足し、調和関数である。

$$\Phi_1=\frac{A\,\Phi\left(\frac{A^2}{r},\theta\right)}{r} \tag{6.1.56}$$

6.1.11 Weissの球定理(速度ポテンシャル)

軸対称の非回転、非圧縮性の流れがあるとする。流れの元の速度ポテンシャル：Φ_0 とする。この流れに球が存在するときの鏡像関係の速度ポテンシャル：Φ_1 を求める。

```
kill(all);
NABRA:'diff((('diff(\Phi(r,\theta),
 \theta,1))*sin(\theta)),\theta,1)
 /sin(\theta)+'diff((('diff(\Phi (r,
 \theta),r,1))*r^2),r,1)=0;
OMG0:\Omega(r,\theta)=r*diff(\Phi(r,
 \theta),r,1);
subst([\Phi=\Omega],NABRA);
subst([OMG0],%);
OMG01:expand(ev(%,diff));
NABRA1:expand(ev(diff(NABRA,r,1),diff));
NABRA2:solve(NABRA1,'diff(\Phi(r,\theta),r,
  1))[1];
expand(subst([NABRA2],lhs(OMG01)));
OMG10:\Omega[0](r,\theta)=r*'diff(\Phi[0](
 r,\theta),r,1);
OMG10R:subst([r=R],OMG10);
OMG11:\Omega[1](r,\theta)=r*'diff(\Phi[1](
 r,\theta),r,1);
OMG2:\Omega[1](r,\theta)=-A/r
  *\Omega[0](A^2/r,\theta);
  PHI1:solve(OMG11,'diff(\Phi[1](r,\theta)
 ,r,1))[1];
```

速度ポテンシャル：$\Phi(r,\theta)$ は (6.1.8) 式から下記を満足する。

$$\frac{\frac{d}{d\theta}\left(\left(\frac{d}{d\theta}\Phi\left(r,\theta\right)\right)\sin\left(\theta\right)\right)}{\sin\left(\theta\right)}+\frac{d}{d\,r}\left(r^2\left(\frac{d}{d\,r}\Phi\left(r,\theta\right)\right)\right)=0 \tag{6.1.57}$$

下記の関数：$\Omega(r,\theta)$ を考える。

$$\Omega\left(r,\theta\right)=r\left(\frac{d}{d\,r}\Phi\left(r,\theta\right)\right) \tag{6.1.58}$$

$\Omega(r,\theta)$ が上記の質量保存の方程式:(6.1.57) 式を満足し、調和関数となることを示す。

$$\frac{\frac{d}{d\theta}\left(\left(\frac{d}{d\theta}\Omega\left(r,\theta\right)\right)\sin\left(\theta\right)\right)}{\sin\left(\theta\right)}+\frac{d}{d\,r}\left(r^2\left(\frac{d}{d\,r}\Omega\left(r,\theta\right)\right)\right)=0$$

上式に、(6.1.58) 式を代入し整理すると、

$$\frac{\left(\frac{d^2}{d\,r\,d\,\theta}\Phi\left(r,\theta\right)\right)\cos\left(\theta\right)}{\sin\left(\theta\right)}+r^2\left(\frac{d^3}{d\,r^3}\Phi\left(r,\theta\right)\right)+4\,r\left(\frac{d^2}{d\,r^2}\Phi\left(r,\theta\right)\right)+\frac{d^3}{d\,r\,d\,\theta^2}\Phi\left(r,\theta\right)+2\left(\frac{d}{d\,r}\Phi\left(r,\theta\right)\right)=0 \tag{6.1.59}$$

(6.1.57) 式を展開し、$\frac{d}{d\,r}\Phi\left(r,\theta\right)$ について解き、下記を得る。

$$\frac{d}{d\,r}\Phi\left(r,\theta\right)=-\frac{\left(r^2\left(\frac{d^3}{d\,r^3}\Phi\left(r,\theta\right)\right)+4\,r\left(\frac{d^2}{d\,r^2}\Phi\left(r,\theta\right)\right)+\frac{d^3}{d\,r\,d\,\theta^2}\Phi\left(r,\theta\right)\right)\sin\left(\theta\right)+\left(\frac{d^2}{d\,r\,d\,\theta}\Phi\left(r,\theta\right)\right)\cos\left(\theta\right)}{2\sin\left(\theta\right)}$$

```
PHI2:\Phi[1](r,\theta)='integrate(rhs(
 PHI1),r,\infty,r);
subst([OMG2],PHI2);
RR1:R=A^2/r;
RR2:solve(RR1,r)[1];
RR2D:'diff(r,R,1)=diff(rhs(RR2),R,1);
\Phi[1](r,theta)=-A*'integrate(\Omega[0](R,
  \theta)/(A^4/R^2)*(-A^2/R^2),R,0,A^2/R);
subst([OMG10R],%);
\Phi(r,\theta)=\Phi[0](r,\theta)+subst(
 [R=r],rhs(%));
```

これを (6.1.59) 式の左辺最終項に代入すると左辺は零となり、$\Omega(r,\theta)$ が (6.1.57) 式を満足している。(6.1.58) 式にならい、

$$\Omega_0\left(r,\theta\right)=r\left(\frac{d}{d\,r}\Phi_0\left(r,\theta\right)\right),\Omega_1\left(r,\theta\right)=r\left(\frac{d}{d\,r}\Phi_1\left(r,\theta\right)\right)$$

球が存在しない元の速度ポテンシャルを Φ_0、球に関する鏡像の速度ポテンシャルを Φ_1 とする。上式から、

$$\frac{d}{d\,r}\Phi_1\left(r,\theta\right)=\frac{\Omega_1\left(r,\theta\right)}{r} \tag{6.1.60}$$

半径:$r=A$ の球の鏡像の関係を Kervin の球定理 (6.1.56) 式から、

$$\Omega_1\left(r,\theta\right)=-\frac{A\,\Omega_0\left(\frac{A^2}{r},\theta\right)}{r} \tag{6.1.61}$$

(6.1.60) 式を積分、(6.1.61) 式を代入、$\frac{A^2}{r}\to R$ とし、

$$\begin{aligned}\Phi_1\left(r,\theta\right)=&\int_{\infty}^{r}\frac{\Omega_1\left(r,\theta\right)}{r}dr=-A\int_{\infty}^{r}\frac{\Omega_0\left(\frac{A^2}{r},\theta\right)}{r^2}dr\\=&-A\int_0^{\frac{A^2}{R}}\frac{\Omega_0\left(R,\theta\right)\left(-A^2\right)}{\frac{A^4}{R^2}R^2}dR\\=&\frac{1}{A}\int_0^{\frac{A^2}{R}}R\left(\frac{d}{d\,R}\Phi_0\left(R,\theta\right)\right)dR\end{aligned}$$

$\Phi_0(r,\theta)$ に球が存在する場合の速度ポテンシャル：Φ は上式で $R\to r$ の置き換えて、

$$\Phi\left(r,\theta\right)=\frac{1}{A}\int_0^{\frac{A^2}{r}}r\left(\frac{d}{d\,r}\Phi_0\left(r,\theta\right)\right)dr+\Phi_0\left(r,\theta\right) \tag{6.1.62}$$

6.1.12　Bulter の球定理 (流れ関数)

流れの元の流れ関数：Ψ_0 とする。この流れに球が存在するときの鏡像関係の流れ関数：Ψ_1 を求める。

```
/* Bulter の球定理 */
kill(all);
PSI0:\Psi[0]=\Psi[0](r,\theta);
NABPSI:(sin(\theta)*('diff(
  'diff(\Psi[0](r,\theta),\theta,1)
  /sin(\theta),\theta,1)))/r^2
  +'diff(\Psi[0](r,\theta),r,2)=0;
NABPSI1:expand(NABPSI*r^2);
NABPSIR:subst([r=R],NABPSI1);
PSI1:\Psi[1]=-r/A*\Psi[0](A^2/r,\theta);
PSI2:\Psi=rhs(PSI0)+rhs(PSI1);
PSI00:\Psi[0](0)=O(r^2);
PSIC0:\Psi=\Psi[0](r,\theta)-r/A
  *\Psi[0](A^2/r,\theta);
RR1:R=A^2/r;
RR2:solve(RR1,r)[1];
RR1D:'diff(R,r,1)=diff(rhs(RR1),r,1);
PSI11:subst([A^2=R*r],PSI1);
PSI1D:'diff(\Psi[1],r,1)=
  -\Psi[0](R,\theta)/A-r/A*'diff(
 \Psi[0](R,\theta),R,1)*'diff(R,r,1);
PSI1D1:subst([RR1D],PSI1D);
'diff(\Psi[1],r,2)=diff(A/r,r,1)
  *'diff(\Psi[0](R,\theta),R,1)
  +A/r*'diff(\Psi[0](R,\theta),R,2)
  *'diff(R,r,1)-1/A*'diff(\Psi[0](
 R,\theta),R,1)*'diff(R,r,1);
subst([RR1D],%);
PSI1D2:r^2*lhs(%)=subst([RR2],r^2*rhs(%));
-%/A/R;
PSI31:rhs(%)=lhs(%);
PHI11TD:'diff(\Psi[1],\theta,1)=-r/A
  *'diff(\Psi[0](R,\theta),\theta,1);
-subst([RR2],%)*R/A;
PSI32:rhs(%)=lhs(%);
subst([PSI31,PSI32],NABPSIR);
```

軸対称の非回転、非圧縮性の流れがあるとする。球のない軸対称の下記の流れ関数で、半径：$r=A$ の球の外に特異点があるとする。

$$\Psi_0=\Psi_0\left(r,\theta\right)$$

上式は (6.1.23) 式から、下記の関係がある。

$$\sin\left(\theta\right)\,\left(\frac{d}{d\,\theta}\,\frac{\frac{d}{d\,\theta}\,\Psi_0\left(r,\theta\right)}{\sin\left(\theta\right)}\right)+r^2\,\left(\frac{d^2}{d\,r^2}\,\Psi_0\left(r,\theta\right)\right)=0 \tag{6.1.63}$$

下記の半径：$r=A$ の球と鏡像関係になる関数を考える。

$$\Psi_1=-\frac{r\,\Psi_0\left(\frac{A^2}{r},\theta\right)}{A}$$

下記の置き換えをすると、

$$\Psi_1=-\frac{r\,\Psi_0\left(R,\theta\right)}{A},\qquad R=\frac{A^2}{r}$$

(6.1.63) 式で $r\to R$ と置き換え、$\Psi_0(R,\theta)$ について、下記が成り立つ。

$$\sin\left(\theta\right)\,\left(\frac{d}{d\,\theta}\,\frac{\frac{d}{d\,\theta}\,\Psi_0\left(R,\theta\right)}{\sin\left(\theta\right)}\right)+R^2\,\left(\frac{d^2}{d\,R^2}\,\Psi_0\left(R,\theta\right)\right)=0 \tag{6.1.64}$$

Ψ_1 について、r の一回微分、r の二回微分は、

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\,r}\,\Psi_1&=-\frac{r\,\left(\frac{d}{d\,r}\,R\right)\,\left(\frac{d}{d\,R}\,\Psi_0\left(R,\theta\right)\right)}{A}-\frac{\Psi_0\left(R,\theta\right)}{A}\\&=\frac{A\,\left(\frac{d}{d\,R}\,\Psi_0\left(R,\theta\right)\right)}{r}-\frac{\Psi_0\left(R,\theta\right)}{A}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{d\,r^2}\,\Psi_1=&\frac{A\,\left(\frac{d}{d\,r}\,R\right)\,\left(\frac{d^2}{d\,R^2}\,\Psi_0\left(R,\theta\right)\right)}{r}\\&-\frac{\left(\frac{d}{d\,r}\,R\right)\,\left(\frac{d}{d\,R}\,\Psi_0\left(R,\theta\right)\right)}{A}\\&-\frac{A\,\left(\frac{d}{d\,R}\,\Psi_0\left(R,\theta\right)\right)}{r^2}\\=&-\frac{A^3\,\left(\frac{d^2}{d\,R^2}\,\Psi_0\left(R,\theta\right)\right)}{r^3}\end{aligned}$$

$$\left(\frac{d^2}{d\,r^2}\,\Psi_1\right)\,r^2=-A\,R\,\left(\frac{d^2}{d\,R^2}\,\Psi_0\left(R,\theta\right)\right)$$

また、Ψ_1 について、θ の一回微分は、

$$\frac{d}{d\,\theta}\,\Psi_1=-\frac{r\,\left(\frac{d}{d\,\theta}\,\Psi_0\left(R,\theta\right)\right)}{A}=-\frac{A\,\left(\frac{d}{d\,\theta}\,\Psi_0\left(R,\theta\right)\right)}{R}$$

上記の二つの関係式を次式左辺に代入する。

$$\sin\left(\theta\right)\,\left(\frac{d}{d\,\theta}\,\left(-\frac{\left(\frac{d}{d\,\theta}\,\Psi_1\right)\,R}{\sin\left(\theta\right)\,A}\right)\right)-\frac{\left(\frac{d^2}{d\,r^2}\,\Psi_1\right)\,r^2\,R}{A}=0$$

(6.1.64) 式の関係式を利用すると上式左辺は零となる。上記から Ψ_1 も調和関数となる。よって、下記の Ψ も調和関数となり、流れ関数：Ψ_0 に球が存在する場合の流れ関数：Ψ が得られた。

$$\Psi=\Psi_0\left(r,\theta\right)-\frac{r\,\Psi_0\left(\frac{A^2}{r},\theta\right)}{A} \tag{6.1.65}$$

上式に $r=A$ を代入すると、$\Psi=0$ となり $r=A$ の球面が流線となっている。

6.1.13　外部に特異点がある物体に作用する力

物体の外部にわき出しや二重わき出しがある場合に物体に作用する力を求める。[1]

(1) 物体の外部にわき出しがある場合

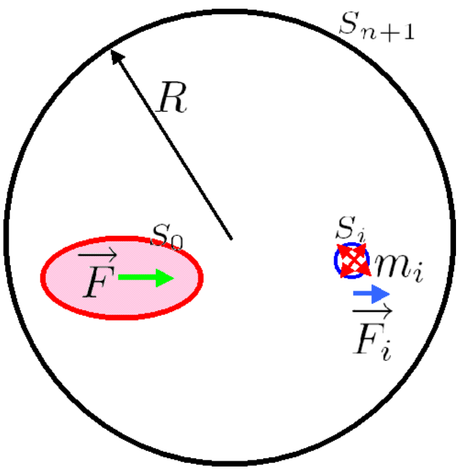


図 6.1.11: 外部に特異点がある物体に作用する力

物体に作用する力：$\overrightarrow{F}$ は表面圧力を p、外向きの方向ベクトルを $\overrightarrow{n}$ とすると、

$$\overrightarrow{F} = -\int_{S_0} p\overrightarrow{n}\,dS$$

Bernoulli の定理から、

$$p = -\frac{\rho v^2}{2}$$

物体外部に n 個のわき出しがあるとする。このわき出しを囲む球の境界面：S_i を考える。そして物体、わき出し全体を囲む大きな球の境界面：S_{n+1} を考える。そして物体境界面：S_0 とすると、全体の境界内部では特異点がないので下記の積分は零となる。

$$\sum_{i=0}^{n+1}\int_{S_i} p\overrightarrow{n}\,dS = 0$$

物体、わき出し全体を囲む大きな球の境界面：S_{n+1} の積分は、境界面の半径を R とすると、流速が $O(1/R^2)$ であるので、$R\to\infty$ とすると、

$$\int_{S_{n+1}} p\overrightarrow{n}\,dS \quad \to 0$$

以上から、

$$\overrightarrow{F} = -\int_{S_0} p\overrightarrow{n}\,dS = \sum_{i=1}^{n}\int_{S_i} p_i\overrightarrow{n}\,dS$$

いま、i におけるわき出しを囲む小さな半径：r の球の境界面：S_i 上の流速は、

$$\overrightarrow{v_i} = \frac{m_i\overrightarrow{n}}{r^2} + \overrightarrow{v_{i0}}$$

ここで上式第 1 項は強さ：m_i のわき出しによる流速で、第 2 項の $\overrightarrow{v_{i0}}$ は m_i のわき出しを除いた流場における流速を表す。この球の境界面：S_i 上の圧力は、

$$p_i = -\frac{\rho}{2}{v_i}^2 = -\frac{\rho}{2}\left(\left(\frac{m_i}{r^2}\right)^2 + 2\frac{m_i\overrightarrow{n}}{r^2}\overrightarrow{v_{i0}} + v_{i0}^2\right)$$

上式右辺第 1 項、第 3 項は定数の積分となり、

$$\int_{S_i}\overrightarrow{n}\,dS = 0$$

から零となる。そこで右辺第 2 項のみが残り、わき出し m_i に作用する力：F_i は

$$\overrightarrow{F_i} = \int_{S_i} p_i\overrightarrow{n}\,dS = -4\pi\rho m_i\overrightarrow{v_{i0}} \qquad (6.1.66)$$

(2) 物体の外部に二重わき出しがある場合

物体の外部に置いた二重わき出しを図 (6.1.9) に示すようにわき出しと吸いこみの関係と同じように考える。吸いこみ $-m_i$ とこれと δ だけ離れたわき出し m_i を考える。i における吸いこみを囲む小さな半径：r の球の境界面：S_i- 上の流速は、

$$\overrightarrow{v_{i-}} = \frac{-m_i\overrightarrow{n}}{r^2} + \overrightarrow{v_{i0}}$$

i におけるわき出しを囲む小さな半径：r の球の境界面：S_i+ 上の流速は、δ だけ離れているので、

$$\overrightarrow{v_{i+}} = \frac{m_i\overrightarrow{n}}{r^2} + (\overrightarrow{v_{i0}} + \nabla\overrightarrow{v_{i0}}\,\delta)$$

わき出し m_i による力：F_{i+}、吸いこみ $-m_i$ による力：F_{i-} は (6.1.66) 式から、

$$\overrightarrow{F_{i-}} = -4\pi\rho(-m_i)\overrightarrow{v_{i0}}$$

$$\overrightarrow{F_{i+}} = -4\pi\rho(+m_i)\,(\overrightarrow{v_{i0}} + \nabla\overrightarrow{v_{i0}}\,\delta)$$

上式の和をとり

$$\overrightarrow{F_i} = \overrightarrow{F_{i+}} + \overrightarrow{F_{i-}} = -4\pi\rho m_i\nabla\overrightarrow{v_{i0}}\,\delta$$

$\delta\to 0$ とすると、二重わき出しの定義から、$m_i\,\delta\to\mu_i$ となり、二重わき出しによる力：F_i は

$$\overrightarrow{F_i} = -4\pi\rho\mu_i\nabla\overrightarrow{v_{i0}} \qquad (6.1.67)$$

[1] L.M.Milne-Thomson：Theoretical Hydrodynamics [15]), 15-42 Force on an obstacle P.470

6.1.14　複素変換による流れ関数と流速の関係式

複素 (共形) 変換：conformal transformation を導入したときの流れ関数の関係式と流速の関係式を求める。

(1) 流れ関数の関係式 [1]

```
/* 回転楕円体 */
kill(all);
load("vect")
declare(z,complex);
declare(w,complex);
depends(\Psi,[r,x]);

EQZ1:z=x+%i*r;
EQZC:w=conjugate(rhs(EQZ1));
EQZCDX:'diff(w,x,1)=diff(rhs(EQZC),x,1);
EQZCDR:'diff(w,r,1)=diff(rhs(EQZC),r,1);
depends(r,[w]);
depends(x,[w]);
PSDW:'diff(\Psi,w,1)=diff(\Psi,w,1);
subst(['diff(x,w,1)=1/rhs(EQZCDX)
  ,'diff(r,w,1)=1/rhs(EQZCDR)],PSDW);
PSDW1:expand(%/r);
EQZDX:'diff(z,x,1)=diff(rhs(EQZ1),x,1);
EQZDR:'diff(z,r,1)=diff(rhs(EQZ1),r,1);
depends(r,[z]);
depends(x,[z]);
'diff(lhs(PSDW1),z,1)=diff(rhs(PSDW1),z,1);
subst(['diff(x,z,1)=1/rhs(EQZDX)
  ,'diff(r,z,1)=1/rhs(EQZDR)],%);
PSDW2:realpart(expand(%));
```

円柱座標系における流れ関数の関係式はを得る。(6.1.24) 式から次式となる。

$$-\frac{\frac{d}{d\,r}\Psi}{r}+\frac{d^2}{d\,x^2}\Psi+\frac{d^2}{d\,r^2}\Psi=0 \qquad (6.1.68)$$

$x-r$ 円柱座標系で複素表示：z とその共役複素表示：w は下記となる。

$$z=x+i\,r,\quad w=\bar{z}=x-i\,r$$

流れ関数：Ψ を共役複素表示：w で微分すると、

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\,w}\Psi&=\left(\frac{d}{d\,x}\Psi\right)\left(\frac{d}{d\,w}x\right)+\left(\frac{d}{d\,r}\Psi\right)\left(\frac{d}{d\,w}r\right)\\&=\frac{d}{d\,x}\Psi+i\left(\frac{d}{d\,r}\Psi\right)\end{aligned}$$

[1]L.M.Milne-Thomson:Theoretical Hydrodynamics [15)], 15-50 The equation satisfied by the stream function when the motion in irrotational P.472

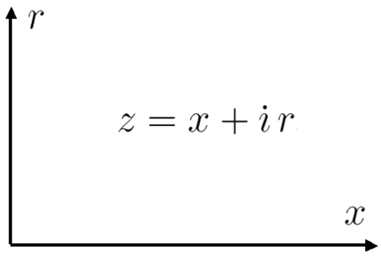


図 6.1.12: $x-r$ 円柱座標系で複素表示：z

r で除し、更に複素表示：z で微分すると、

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\,z}\frac{\frac{d}{d\,w}\Psi}{r}=&\frac{\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\Psi\right)\left(\frac{d}{d\,z}x\right)+\left(\frac{d^2}{d\,r\,d\,x}\Psi\right)\left(\frac{d}{d\,z}r\right)}{r}\\&+\frac{i\left(\left(\frac{d^2}{d\,r\,d\,x}\Psi\right)\left(\frac{d}{d\,z}x\right)+\left(\frac{d^2}{d\,r^2}\Psi\right)\left(\frac{d}{d\,z}r\right)\right)}{r}\\&-\frac{\left(\frac{d}{d\,x}\Psi\right)\left(\frac{d}{d\,z}r\right)}{r^2}-\frac{i\left(\frac{d}{d\,r}\Psi\right)\left(\frac{d}{d\,z}r\right)}{r^2}\\=&\frac{\frac{d^2}{d\,x^2}\Psi-i\left(\frac{d^2}{d\,r\,d\,x}\Psi\right)}{r}\\&+\frac{i\left(\frac{d^2}{d\,r\,d\,x}\Psi-i\left(\frac{d^2}{d\,r^2}\Psi\right)\right)}{r}+\frac{i\left(\frac{d}{d\,x}\Psi\right)}{r^2}\\&-\frac{\frac{d}{d\,r}\Psi}{r^2}\end{aligned}$$

上記の実数部分をとると下記となり、円柱座標系における流れ関数の複素数表示の関係式が得られた。

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\,z}\left(\frac{1}{r}\frac{d}{d\,\bar{z}}\Psi\right)=&\frac{d}{d\,z}\left(\frac{1}{r}\frac{d}{d\,w}\Psi\right)\\=&\frac{\frac{d^2}{d\,x^2}\Psi}{r}+\frac{\frac{d^2}{d\,r^2}\Psi}{r}-\frac{\frac{d}{d\,r}\Psi}{r^2}\\=&\frac{d}{d\,x}\left(\frac{1}{r}\frac{d}{d\,x}\Psi\right)+\frac{d}{d\,r}\left(\frac{1}{r}\frac{d}{d\,r}\Psi\right)=0\end{aligned}$$

z と ζ の複素変換の式を下記とする。

$$z=x+i\,r=f(\xi+i\eta)=f(\zeta)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\,z}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\,\bar{z}}\right)=&\frac{\partial}{\partial\,z}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\bar{\zeta}}{\partial\,\bar{z}}\frac{\partial\Psi}{\partial\,\bar{\zeta}}\right)\\=&\frac{\partial\bar{\zeta}}{\partial\,\bar{z}}\frac{\partial}{\partial\,z}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\,\bar{\zeta}}\right)\\=&\frac{\partial\bar{\zeta}}{\partial\,\bar{z}}\frac{\partial\zeta}{\partial\,z}\frac{\partial}{\partial\,\zeta}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\,\bar{\zeta}}\right)=0\end{aligned}$$

以上の結果から複素変換による流れ関数の関係式は下記となる。

$$\frac{\partial}{\partial\,\xi}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\,\xi}\Psi\right)+\frac{\partial}{\partial\,\eta}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\,\eta}\Psi\right)=0 \qquad (6.1.69)$$

(2) 流速の関係式 [1]

円柱座標系における速度：v_x, v_r と流れ関数：Ψ の関係は (6.1.19) 式から下記となる。

$$v_r = -\frac{\frac{d}{d\,x}\,\Psi}{r}, \quad v_x = \frac{\frac{d}{d\,r}\,\Psi}{r} \tag{6.1.70}$$

また、円柱座標系における速度ポテンシャル：Φ と流れ関数：Ψ の関係は (6.1.12) 式と (6.1.19) 式から下記となる。

$$\frac{d}{d\,r}\,\Phi = -\frac{\frac{d}{d\,x}\,\Psi}{r}, \quad \frac{d}{d\,x}\,\Phi = \frac{\frac{d}{d\,r}\,\Psi}{r} \tag{6.1.71}$$

(6.1.70) 式を複素表示すると下記となる。

$$v_x + i v_r = \frac{1}{r}\frac{d}{d\,r}\,\Psi - i\frac{1}{r}\frac{d}{d\,x}\,\Psi = \frac{1}{r}\frac{d}{d\,z}\,\Psi$$

上記から、

$$v_x^2 + v_r^2 = \frac{1}{r^2}\frac{d}{d\,z}\,\Psi\,\frac{d}{d\,\overline{z}}\,\Psi = \frac{1}{r^2}\frac{d\zeta}{d\,z}\,\frac{d}{d\,\zeta}\,\Psi\,\frac{d\overline{\zeta}}{d\,\overline{z}}\,\frac{d}{d\,\overline{\zeta}}\,\Psi$$

z と ζ の下記の複素変換の式から、

$$z = f(\zeta), \quad \frac{d\,z}{d\zeta} = \frac{d}{d\,\zeta}\,f(\zeta), \quad \frac{d\,\overline{z}}{d\overline{\zeta}} = \frac{d}{d\,\overline{\zeta}}\,\overline{f(\zeta)}$$

上記から、

$$J^2 = \frac{d}{d\,\zeta}\,f(\zeta)\,\frac{d}{d\,\overline{\zeta}}\,\overline{f(\zeta)}$$

$$\begin{aligned} v_x^2 + v_r^2 =& \frac{1}{r^2}\frac{1}{J^2}\,\frac{d}{d\,\zeta}\,\Psi\,\frac{d}{d\,\overline{\zeta}}\,\Psi \\ =& \frac{1}{r^2}\frac{1}{J^2}\,\left(\left(\frac{d}{d\,\xi}\,\Psi\right)^2 + \left(\frac{d}{d\,\eta}\,\Psi\right)^2\right) \end{aligned}$$

要素長さの ξ, η 方向成分を ds_ξ, ds_η とすると、

$$\begin{aligned} (ds_\xi)^2 + (ds_\eta)^2 =& (ds)^2 = (dx)^2 + (dr)^2 \\ =& \left(\frac{d}{d\,\zeta}\,f(\zeta)\,d\zeta\right)\,\left(\frac{d}{d\,\overline{\zeta}}\,\overline{f(\zeta)}\,d\overline{\zeta}\right) \\ =& J^2\left((d\xi)^2 + (d\eta)^2\right) \end{aligned}$$

速度と速度ポテンシャルとの関係は、

$$v_\xi = \frac{d}{ds_\xi}\,\Phi = \frac{1}{J}\frac{d}{d\xi}\,\Phi, \quad v_\eta = \frac{d}{ds_\eta}\,\Phi = \frac{1}{J}\frac{d}{d\eta}\,\Phi$$

速度と流れ関数との関係は、

$$v_\xi = \frac{1}{r}\frac{d}{ds_\eta}\,\Psi = \frac{1}{Jr}\frac{d}{d\eta}\,\Psi, \quad v_\eta = -\frac{1}{r}\frac{d}{ds_\xi}\,\Psi = -\frac{1}{Jr}\frac{d}{d\xi}\,\Psi$$

以上から、

$$\frac{d}{d\xi}\,\Phi = \frac{1}{r}\frac{d}{d\eta}\,\Psi, \quad \frac{d}{d\eta}\,\Phi = -\frac{1}{r}\frac{d}{d\xi}\,\Psi \tag{6.1.72}$$

(3) 流れ関数が満足すべき境界条件 [2]

物体が x 軸方向に速度：U で動くとき、物体に垂直な方向の速度は (6.1.18) 式から、

$$v_n = \frac{\frac{d}{d\,s}\,\Psi}{r} = U\,cos(\theta) = U\,\frac{dr}{d\,s} \tag{6.1.73}$$

上記から、

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\,r}\,\Psi &= r\,U \\ \Psi &= \frac{1}{2}\,U\,r^2 + Const. \end{aligned} \tag{6.1.74}$$

[1] L.M.Milne-Thomson：Theoretical Hydrodynamics [15)], 15-51 The velocity P.473

[2] L.M.Milne-Thomson：Theoretical Hydrodynamics [15)], 15-52 Boundary condition satisfied by the stream function P.474

6.2　軸対称の流れの簡単な例

例題 6.2.1　一様流中の半無限物体（わき出しによる）

z 軸方向に一様な流れの中に、わき出しを置いたときの流れ関数を求め、半無限物体まわりの流れを求める。

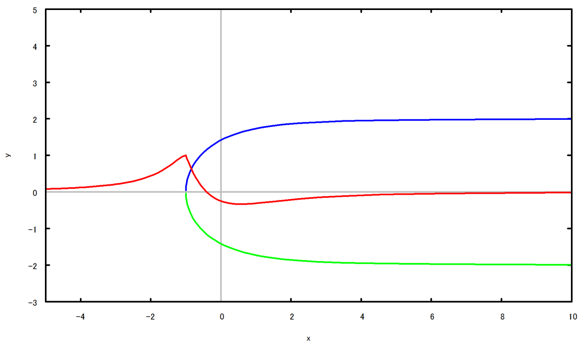


図 6.2.1: 一様流中の半無限物体の形状と表面圧力分布

```
/* 一様流中のわき出し */
kill(all);
assume(A>0);
VR:v[r]='diff(\Psi,\theta,1)
  /(r^2*sin(\theta));
VT:v[\theta]=-'diff(\Psi,r,1)
  /(r*sin(\theta));
PSI:\Psi=(r^2*sin(\theta)^2*U)/2
  -m*cos(\theta)+%c;
subst([PSI],VR);
VR1:factor(ev(%,diff));
subst([PSI],VT);
VT1:factor(ev(%,diff));
rhs(VT1)=0;
TH1:\theta=%pi;
subst([TH1,r=A],rhs(VR1)=0);
M1:solve(%,m)[1];
PSI1:rhs(subst([TH1],PSI))=0;
C0:solve(%,%c)[1];
subst([C0],PSI);
PSI0:subst([M1],%);
TH1:\theta=atan2(y,x);
RR2:r^2=x^2+y^2;
PSI01:subst([TH1,RR2,U=1,A=1],PSI0);
PHI0:\Phi=r*cos(\theta)*U-A^2*U/r;
```

流速 : U の一様流の中、原点に強さ : m のわき出しを置く。(6.1.37) 式、(189 ページ) および (6.1.38) 式、(190 ページ) から流れ関数は、

$$\Psi = \frac{r^2 \sin(\theta)^2 U}{2} - m\cos(\theta) + \%c$$

(6.1.20) 式、(181 ページ) の流れ関数と流速の関係式から、

$$v_r = \frac{\frac{d}{d\theta}\Psi}{r^2 \sin(\theta)} = \frac{r^2\cos(\theta)\,U + m}{r^2} \tag{6.2.1}$$

$$v_\theta = -\frac{\frac{d}{dr}\Psi}{r\sin(\theta)} = -\sin(\theta)\,U \tag{6.2.2}$$

原点から半無限物体の先端までの距離を A とし、ここでの流速は零となることから、(6.2.1) 式の流速 : $v[r]$ に $\theta = \pi, r = A$ を代入し、

$$v_r = \frac{r^2\cos(\theta)\,U + m}{r^2} = \frac{m - A^2 U}{A^2} = 0$$

また、半無限物体の先端で $\Psi = 0$ とすると、

$$m = A^2 U, \quad \%c = -m \tag{6.2.3}$$

上記の関係を代入し、流れ関数 : Ψ およびこれに対応する速度ポッテンシャル : Φ は、

$$\Psi = -\cos(\theta)\,A^2 U - A^2 U + \frac{r^2 \sin(\theta)^2 U}{2} \tag{6.2.4}$$

$x - y$ 座標で表現すると、下記の式を代入し、

$$\theta = \mathrm{atan2}(y, x), \quad r^2 = y^2 + x^2$$

$$\Psi = -\frac{x}{\sqrt{y^2 + x^2}} + \frac{y^2}{2} - 1$$

上式を用いて流線を gnuplot を用いて描いた図を下記に示す。

```
#!/gnuplot
set xrange [-5:10]
set yrange [-5:5]
set isosamples 150,150
set contour base
set cntrparam levels incremental -20,0.5,20
unset key
unset surface
set view map
splot -x/sqrt(y**2+x**2)+y**2/2-1
#    EOF
```

$$\Phi = r\cos(\theta)\,U - \frac{A^2 U}{r} \tag{6.2.5}$$

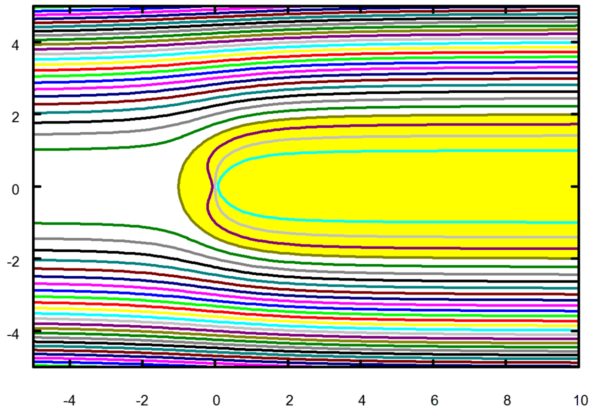


図 6.2.2: 一様流中の半無限物体の流線

(1) 物体形状

```
RBON:solve(rhs(PSI0)=0,r)[2];
RBONY:subst([r=y/sin(\theta)],%)*sin(
 \theta);
RBONZ:z=r*cos(\theta);
RBONZ1:subst([RBON],%);
RBONP:solve(PSI0,r)[2];
RBONY2:subst([r=y/sin(\theta)],%)
  *sin(\theta);
RBONZ2:subst([RBONP],RBONZ);
DD0:D[0]=subst([\Psi=0,\theta=0],
  rhs(RBONY2));
AA1:solve(M1,A)[2];
DD1:subst([AA1],DD0);
PRS0:p[0]/\rho+U^2/2=p/\rho+(v[r]^2
  +v[\theta]^2)/2;
last(rhs(PRS0))-last(lhs(PRS0))=first(
  lhs(PRS0))-first(rhs(PRS0));
PRS1:expand(%/(U^2/2));
subst([VR1,VT1,M1],%);
PRS2:trigsimp(expand(%));
subst([RBON],PRS2);
PRS3:trigsimp(expand(%));
PRS4:subst([\theta=%pi],PRS2);
```

流れ関数：$\Psi=$ 一定が流線を表す。流れ関数を r で解くと下記が得られ、流線を表す式となる。ここで、$\Psi=0$ は物体境界を表す。

$$r=\frac{\sqrt{2}}{\sin(\theta)}\sqrt{\frac{\Psi}{U}+\cos(\theta)\ A^2+A^2} \tag{6.2.6}$$

上式から θ における流線の y,z 座標は、

$$y=\sqrt{2}\sqrt{\frac{\Psi}{U}+\cos(\theta)\ A^2+A^2}$$

$$z=\frac{\sqrt{2}\cos(\theta)\sqrt{\frac{\Psi}{U}+\cos(\theta)\ A^2+A^2}}{\sin(\theta)}$$

$\Psi=0,\theta=0$ を上記の y 式に代入し、無限後方における半無限物体の半径：D_0 は、

$$D_0=2\,A=2\sqrt{\frac{m}{U}}$$

(2) 物体表面の圧力分布

下記の Bernoulli の定理から、

$$\frac{U^2}{2}+\frac{p_0}{\rho}=\frac{v_\theta^2+v_r^2}{2}+\frac{p}{\rho}$$

圧力の式は、流速の関係式：(6.2.1) 式、(6.2.2) 式および (6.2.3) 式から、

$$\frac{2\,p-2\,p_0}{\rho\,U^2}=-\frac{A^4+2\,r^2\cos(\theta)\ A^2}{r^4} \tag{6.2.7}$$

物体表面の圧力は、流線の関係式：(6.2.6) 式に $\Psi=0$ を代入し、r と θ の関係式を上式の圧力の式：(6.2.7) 式に代入し、

$$\frac{2\,p-2\,p_0}{\rho\,U^2}=\frac{3\cos(\theta)^2-2\cos(\theta)-1}{4}$$

半無限物体の先端の z 軸上の圧力は、圧力の式：(6.2.7) 式に $\theta=\pi$ を代入し、

$$\frac{2\,p-2\,p_0}{\rho\,U^2}=-\frac{A^4-2\,r^2\,A^2}{r^4}$$

(3) 物体に作用する力

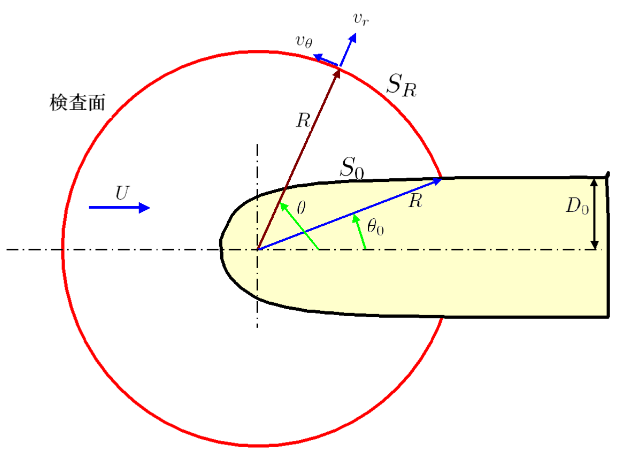


図 6.2.3: 半無限物体の検査面

図 6.2.3 に示すわき出し点を中心にする球面で物体部分を除く検査面 : S_R および物体表面 : S_0 を考える。S_R 上の圧力は、$r=R$ における流速 : (6.2.1) 式、(6.2.2) 式を代入し、

$$p=\frac{\rho U^2-\rho v_\theta^2-v_r^2\rho+2p_0}{2}=-\frac{m\rho\cos(\theta)\,U}{R^2}-\frac{m^2\rho}{2R^4}+p_0$$

```
PRS10:solve(PRS0,p)[1];
PRS11:expand(trigsimp(expand(subst([VR1,
 VT1,r=R],PRS10))));
DFZ1:dF[ZR]=p*cos(\theta)*2*%pi*R^2
  *sin(\theta);
DFZ2:subst([PRS11],DFZ1);
FZ1:F[ZR]=-'integrate(rhs(DFZ2),\theta,
  \theta[0],%pi);
THE0:\theta[0]=D[0]/R;
THE01:subst([DD1],THE0);
COSTH0:cos(\theta[0])=taylor(cos(
 \theta[0]),\theta[0],0,4);
COSTH1:lhs(COSTH0)=rest(rhs(COSTH0),-1);
COSTH3:lhs(COSTH1)=subst([THE01],
  rhs(COSTH1));
ev(FZ1,integrate);
FZ2:expand(subst([COSTH3,m=Q/4/%pi],%));
FZ3:lhs(FZ2)=expand(limit(rhs(FZ2),R,inf));
F[ZR]+F[ZB]=0;
F[ZB]=-rhs(FZ3);
```

S_R 全体に作用する軸方向の力 : F_{ZR} は、これを積分し、

$$F_{ZR}=-2\pi R^2\int_{\theta_0}^{\pi}\cos(\theta)\sin(\theta)\left(-\frac{m\rho\cos(\theta)\,U}{R^2}-\frac{m^2\rho}{2R^4}+p_0\right)d\theta$$

ここで、

$$\theta_0=\frac{D_0}{R}=\frac{2\sqrt{\frac{m}{U}}}{R}$$

$$\cos(\theta_0)=1-\frac{\theta_0^2}{2}+\frac{\theta_0^4}{24}+\ldots\approx 1-\frac{\theta_0^2}{2}=1-\frac{2m}{R^2U}$$

上式を代入して積分を実行すると、

$$F_{ZR}=\frac{\rho QU}{3}+\frac{3\rho Q^3}{32\pi^2R^4U}+\frac{p_0Q}{U}-\frac{p_0Q^2}{4\pi R^2U^2}-\frac{5\rho Q^4}{384\pi^3R^6U^2}-\frac{\rho Q^2}{4\pi R^2}$$

$R\to\infty$ とすると、S_R 全体に作用する軸方向の力は

$$F_{ZR}\to\frac{\rho QU}{3}+\frac{p_0Q}{U}\quad(R\to\infty)$$

球形の検査面による軸方向の力 : F_{ZR} と物体による軸方向の力 : F_{ZB} の合計はその両検査面 : S_R+S_0 内で特異点がないため零となるはずである。そこで、物体による軸方向の力 : F_{ZB} は、

$$F_{ZR}+F_{ZB}=0$$

$$F_{ZB}=-\frac{\rho QU}{3}-\frac{p_0Q}{U}\tag{6.2.8}$$

(4) 運動量

$r=R$ における S_R の θ 上の z 軸方向の運動量：dMT =(境界を通過する質量) × (z 軸方向の流速) から、

$$dMT=2\,\pi\,v_r\,\rho\sin(\theta)\,R^2\,d\theta\,\left(v_r\cos(\theta)-v_\theta\sin(\theta)\right)$$

S_R 上の流速：(6.2.1) 式、(6.2.2) 式を $r=R$ として上式に代入し、z 軸方向の運動量：MT はこれを積分し、

$$\begin{aligned}MT=&2\,\pi\,\rho\int_{\theta_0}^{\pi}\sin(\theta)\,\left(\cos(\theta)\,R^2\,U+m\right)\\&\left(\frac{\cos(\theta)\,\left(\cos(\theta)\,R^2\,U+m\right)}{R^2}+\sin(\theta)^2\,U\right)d\theta\\=&\frac{\rho\,Q\,U}{3}+\frac{\rho\,Q^3}{16\,\pi^2\,R^4\,U}-\frac{\rho\,Q^4}{192\,\pi^3\,R^6\,U^2}-\frac{\rho\,Q^2}{4\,\pi\,R^2}\end{aligned}$$

$R\to\infty$ とすると z 軸方向の運動量は下記となる。圧力積分による z 軸方向の力：(6.2.8) 式と比較すると、運動量によるものと穴の部分の力とによっていることがわかる。。

$$MT\to\frac{\rho\,Q\,U}{3}\quad(R\to\infty)$$

```
MM0:\rho*v[r]*(2*%pi*R*sin(\theta))*(R);
DMT0:dMT=(v[r]*cos(\theta)-v[\theta]
  *sin(\theta))*MM0;
DMT1:subst([VR1,VT1,r=R],DMT0);
MT0:MT='integrate(rhs(DMT1),\theta,
  \theta[0],%pi);
ev(MT0,integrate);
MT1:expand(subst([COSTH3,m=Q/4/%pi],%));
MT2:lhs(MT1)=expand(limit(rhs(MT1),R,inf));
```

(5) 図の作成

図 6.2.2 に物体境界：$\Psi=0$、流線：$\Psi=0.5,\ \ 2$、物体表面の圧力分布を示す。下記に、図を作成するプログラムを示す。

```
X:subst([A=1,z=x,\theta=t],RBONZ1);
Y:subst([A=1,\theta=t],RBONY);
X1:subst([A=1,z=x,\theta=t,\Psi=0.5,U=1],
  RBONZ2);
Y1:subst([A=1,\theta=t,\Psi=0.5,U=1],
 RBONY2);
X2:subst([A=1,z=x,\theta=t,\Psi=2,U=1],
  RBONZ2);
Y2:subst([A=1,\theta=t,\Psi=2,U=1],RBONY2);
P1:subst([A=1,\theta=t],rhs(PRS3));
R2:-t;
P2:subst([A=1,r=-t],rhs(PRS4));
list1:[[subst([t=0.1],rhs(X)),subst(
 [t=0.1],rhs(Y))]];
  for J:2 thru 31 do(
```

```
list1:[[subst([t=0.1],rhs(X)),subst(
 [t=0.1],rhs(Y))]];
for J:2 thru 31 do(
list1:append(list1,[[subst([t=0.1*J],
 rhs(X)),subst([t=0.1*J],rhs(Y))]]));
list4:[[subst([t=0.1],rhs(X)),subst(
 [t=0.1],P1)]];
for J:2 thru 31 do(
list4:append(list4,[[subst([t=0.1*J],
 rhs(X)),subst([t=0.1*J],P1)]]));
for J:10 thru 50 do(
list4:append(list4,[[subst([t=0.1*J],R2),
  subst([t=0.1*J],P2)]]));
list5:[[subst([t=0.1],rhs(X)),subst(
 [t=0.1],rhs(-Y))]];
for J:2 thru 31 do(
list5:append(list5,[[subst([t=0.1*J],
 rhs(X)),subst([t=0.1*J],rhs(-Y))]]));
plot2d([[discrete,list1],[discrete,list4]
    ,[discrete,list5]],[x,-5,10],[y,-3,5]);
```

例題 6.2.2　一定速度で動く球

軸対称軸：z 軸方向の一定速度：U で動く半径：A の球の速度ポテンシャルを求める。

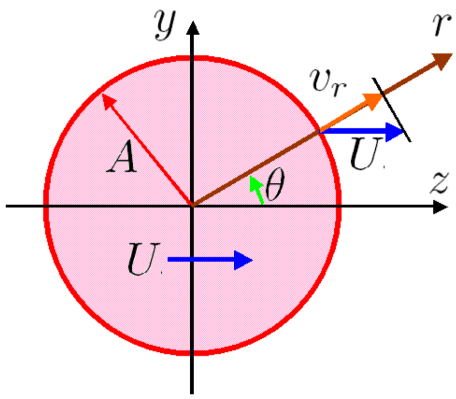


図 6.2.4: 一定速度で動く球

(1) 速度ポテンシャル

```
/* 一定速度で動く球 */
kill(all);
load("vect")
depends(\Phi,[r,\theta,n]);
assume(r>0);
BC1:diff(\Phi,r,1)=U*cos(\theta);
PHI0:\Phi=%k2*cos(\theta)/r^2;
PHI0D:diff(PHI0,r,1);
PHI0D1:subst([r=A],rhs(PHI0D))=rhs(BC1);
K1:solve(%,%k2)[1];
PHI1:subst([K1],PHI0);
```

$r=A$ の球が z 軸方向に一定速度：U で動いている。境界条件は、

$$\frac{d}{d\,r}\,\Phi=v_r=\cos\left(\theta\right)\,U,\quad (r=A)$$

軸対称流れの速度ポテンシャルの極座標一般解の (6.1.31) 式の下記の右辺第 2 項をここで使用する。この式とこれを r で微分した式を下記に示す。

$$\Phi=\frac{\%k2\cos\left(\theta\right)}{r^2},\quad \frac{d}{d\,r}\,\Phi=-\frac{2\,\%k2\cos\left(\theta\right)}{r^3}$$

上式における $r=A$ の式と境界条件から、

$$-\frac{2\,\%k2\cos\left(\theta\right)}{A^3}=\cos\left(\theta\right)\,U$$

$$\%k2=-\frac{A^3\,U}{2}$$

上式を速度ポテンシャルに代入すると一定速度で動く球の速度ポテンシャルは下記となる。

$$\Phi=-\frac{\cos\left(\theta\right)\,A^3\,U}{2\,r^2} \tag{6.2.9}$$

(2) 運動エネルギー

```
/* 運動エネルギー */
PHI1D:diff(PHI1,r,1);
PHI1A:subst([r=A],PHI1);
PHI1AD:lhs(PHI1D)=subst([r=A],rhs(PHI1D));
rhs(PHI1A)*rhs(PHI1AD)*A*2*%pi*A*
 sin(\theta);
T1:T=-\rho/2*'integrate(%,\theta,0,%pi);
T11:ev(%,integrate);
ADM:T=1/2*M*U^2;
ADM1:solve(rhs(T11)=rhs(ADM),M)[1];
VOL:V=4/3*%pi*A^3;
VOL1:solve(VOL,A)[3];
ADM2:subst([VOL1],ADM1);
```

運動エネルギーは次式で得ることができる。

$$T=-\frac{\rho}{2}\int\Phi\,\left(\frac{d}{d\,n}\,\Phi\right)\,dS$$

(6.2.9) 式から、

$$\Phi=-\frac{\cos\left(\theta\right)\,A^3\,U}{2\,r^2},\quad \frac{d}{d\,r}\,\Phi=\frac{\cos\left(\theta\right)\,A^3\,U}{r^3}$$

上式を代入し、球表面上では $r=A$ から、

$$\begin{aligned}T=&\frac{\pi\,\rho}{2}\,\int_0^{\pi}\cos\left(\theta\right)^2\sin\left(\theta\right)d\theta\,A^3\,U^2\\=&\frac{\pi\,\rho\,A^3\,U^2}{3}\\=&\frac{M\,U^2}{2}\end{aligned} \tag{6.2.10}$$

ここで、M を付加質量とする。球の体積：V とすると、

$$V=\frac{4\,\pi\,A^3}{3}$$

付加質量は、球の 1/2 の体積の質量に相当する。

$$\begin{aligned}M=&\frac{2\,\pi\,\rho\,A^3}{3}\\=&\frac{\rho\,V}{2}\end{aligned}$$

例題 6.2.3　一定速度で動く球 (複素変換)

軸対称軸：x 軸方向に一定速度：U で動く半径：A の球の速度ポテンシャル：Φ と流れ関数：Ψ を複素変換の方法で求める。

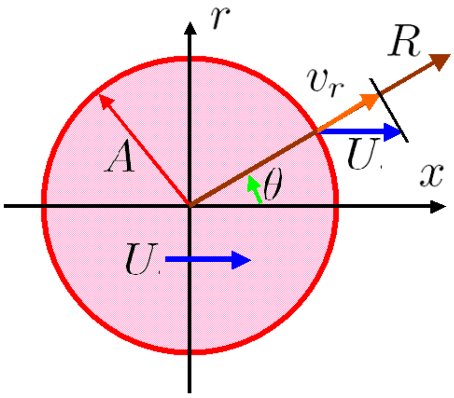


図 6.2.5: 一定速度で動く球

```
/* 球（複素変換） */
kill(all);
declare(z,complex);
declare(w,complex);
EQ1:x+%i*r=c*%e^(\xi+%i*\eta);
EQ1RE:realpart(lhs(EQ1))=realpart(rhs(EQ1)
 );
EQ1IM:imagpart(lhs(EQ1))=imagpart(rhs(EQ1)
 );
EQ1RE1:EQ1RE/(%e^\xi*c);
EQ1IM1:EQ1IM/(%e^\xi*c);
EQ12:expand(trigsimp(EQ1RE1^2+EQ1IM1^2));
EQ121:subst([\xi=\xi[0]],EQ12);
A1:A=%e^(\xi[0])*c;
A2:solve(A1,c)[1];
subst([A2],EQ121);
EQ122:expand(%*A^2);
```

z と ζ の複素変換の式を下記とする。

$$z = x + i\,r$$
$$= f(\zeta) = f(\xi + i\eta) = c\,e^{\xi + i\,\eta}$$

ここで、　$x = c\cos(\eta)\,e^{\xi}$,　$r = c\sin(\eta)\,e^{\xi}$

この関係式は半径：A の円を表す。

$$A = e^{\xi_0}\,c, \quad x^2 + r^2 = A^2$$

```
PSIEQ0:'diff((1/r*'diff(\Psi,\xi,1)),\xi,1)
  +'diff((1/r*'diff(\Psi,\eta,1)),\eta,1)
   =0;
PSI00:\Psi[0]=1/2*U*r^2;
PSI01:subst([EQ1IM,\xi=\xi[0]],PSI00);
PSI10:\Psi=f(\xi)*sin(\eta)^2;
subst([PSI10,EQ1IM],PSIEQ0);
ev(%,diff);
PSIEQ1:expand(%*c/sin(\eta)/%e^(-\xi));
ode2(PSIEQ1,f(\xi),\xi);
F1:subst([%k1=0],%);
PSI11:subst([F1],PSI10);
subst([\xi=\xi[0]],rhs(PSI11))=rhs(PSI01);
solve(%,%k2)[1];
PSI12:subst([%],PSI11);
A3:solve(A1,\xi[0])[1];
PSI13:subst([A3],PSI12);
EQ13:rhs(EQ1)=R*%e^(%i*\eta);
EQ13*%e^(-%i*\eta);
EQ131:solve(%,\xi)[1];
subst([EQ131,\eta=\theta],PSI13);
```

(6.1.74) 式による流れ関数の境界条件から、$\xi = \xi_0$ の球の境界において、

$$\Psi_0 = \frac{r^2\,U}{2} = \frac{e^{2\,\xi_0}\,c^2\sin(\eta)^2\,U}{2} \tag{6.2.11}$$

上記を参考に複素変換式を下記の変数分離型とする。

$$\Psi = \sin(\eta)^2\,f(\xi)$$

(6.1.69) 式から複素変換による流れ関数の関係式は下記となる。

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\xi}\Psi\right) + \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\eta}\Psi\right) = 0$$

上式に複素変換式を代入すると、

$$\frac{d^2}{d\xi^2}f(\xi) - \frac{d}{d\xi}f(\xi) - 2\,f(\xi) = 0$$

この解は $ode2$ 関数で得られ、$\xi \to \infty$ における条件から、

$$f(\xi) = \%k1\,e^{2\,\xi} + \%k2\,e^{-\xi} = \%k2\,e^{-\xi}$$

上記から流れ関数は、

$$\Psi = \%k2\sin(\eta)^2\,e^{-\xi}$$

上式と (6.2.11) 式の境界における流れ関数から

$$\%k2 = \frac{e^{3\,\xi_0}\,c^2\,U}{2}$$

ここで下記の極座標表示：R, θ を導入すると次式が得られ、流れ関数は下記となる。

$$c\,e^{\xi + i\,\eta} = e^{i\,\theta}\,R$$

$$\Psi = \frac{c^2\sin(\eta)^2\,e^{3\,\xi_0 - \xi}\,U}{2} = \frac{A^3\sin(\eta)^2\,e^{-\xi}\,U}{2\,c} = \frac{A^3\sin(\theta)^2\,U}{2\,R} \tag{6.2.12}$$

```
PHPS1:'diff(\Phi,\eta,1)=-1/r*'diff(\Psi,
 \xi,1);
'diff(\Psi,\xi,1)=diff(rhs(PSI12),\xi,1);
subst([%,EQ1IM],PHPS1);
\Phi=integrate(rhs(%),\eta);
PHI1:subst([A3],%);
subst([EQ131,\eta=\theta],%);
```

速度と速度ポテンシャル、流れ関数との関係 (6.1.72) 式から、

$$\frac{d}{d\eta}\,\Phi=-\frac{1}{r}\,\frac{d}{d\xi}\,\Psi$$

上式に上記で得られた流れ関数を代入すると、

$$\frac{d}{d\xi}\,\Psi=-\frac{c^2\sin\left(\eta\right)^2\,e^{3\,\xi_0-\xi}\,U}{2}$$

$$\frac{d}{d\eta}\,\Phi=-\frac{1}{r}\,\frac{d}{d\xi}\,\Psi=\frac{c\sin\left(\eta\right)\,e^{3\,\xi_0-2\,\xi}\,U}{2}$$

上式を積分し速度ポッテンシャルを求める。ここで前記同様極座標表示：R,θ を導入すると

$$\begin{aligned}\Phi=&-\frac{c\cos\left(\eta\right)\,e^{3\,\xi_0-2\,\xi}\,U}{2}=-\frac{A^3\cos\left(\eta\right)\,e^{-2\,\xi}\,U}{2\,c^2}\\ =&-\frac{A^3\cos\left(\theta\right)\,U}{2\,R^2}\end{aligned} \tag{6.2.13}$$

上式は前節で得られた (6.2.9) 式と一致している。

```
PHI2:subst([\xi=\xi[0]],rhs(PHI1));
diff(rhs(PSI13),\eta,1);
PSETD:subst([\xi=\xi[0]],%);
T=-%pi*\rho*integrate(PHI2*PSETD,\eta,0,
 %pi);
subst([A3],%);
```

運動エネルギーは下記で与えられる。

$$T=-\pi\,\rho\int_0^{\pi}\Phi\,\frac{d}{d\eta}\,\Psi\,d\eta$$

$$\Phi\Big|_{\xi=\xi_0}=-\frac{e^{-2\,\xi_0}\cos\left(\eta\right)\,A^3\,U}{2\,c^2}$$

$$\frac{d}{d\eta}\,\Psi\Big|_{\xi=\xi_0}=\frac{e^{-\xi_0}\cos\left(\eta\right)\,\sin\left(\eta\right)\,A^3\,U}{c}$$

上記を積分し、運動エネルギーは、

$$T=\frac{\pi\,e^{-3\,\xi_0}\,\rho\,A^6\,U^2}{3\,c^3}=\frac{\pi\,\rho\,A^3\,U^2}{3}$$

上記は前節の結果：(6.2.10) 式と一致している。

例題 6.2.4 一様流中の球（球定理による）

軸対称軸：z 軸方向に一様な流れ：U の中に半径：A の球が存在する流れの速度ポテンシャルと流れ関数を球定理により求める。

```
/* 一様流中の球（球定理による） */
PHI0:\Phi[0](r,\theta)=r*cos(\theta)*U;
PHI0D:'diff(\Phi[0](r,\theta),r,1)
  ='diff((r*cos(\theta)*U),r,1);
PHI0D1:lhs(PHI0D)=ev(rhs(PHI0D),diff);
PHI1:\Phi[1](r,\theta)=1/A*integrate((r
  *'diff(\Phi[0](r,\theta),r,1)),r,0,A^2
  /r);
subst([PHI0D1],PHI1);
PHI11:ev(%,integrate);
\Phi(r,\theta)=rhs(PHI0)+rhs(PHI11);
```

(6.1.62) 式の球定理から速度ポテンシャルは、

$$\Phi\left(r,\theta\right)=\frac{1}{A}\int_{0}^{\frac{A^2}{r}}r\,\left(\frac{d}{d\,r}\,\Phi_0\left(r,\theta\right)\right)dr+\Phi_0\left(r,\theta\right) \tag{6.2.14}$$

一様流の速度ポテンシャルは (6.1.37) 式から、

$$\Phi_0\left(r,\theta\right)=r\cos\left(\theta\right)\,U$$
$$\frac{d}{d\,r}\,\Phi_0\left(r,\theta\right)=\cos\left(\theta\right)\,U$$

球定理 (6.2.14) 式の右辺第 1 項は、

$$\begin{aligned}\Phi_1\left(r,\theta\right)=&\frac{1}{A}\int_{0}^{\frac{A^2}{r}}r\,\left(\frac{d}{d\,r}\,\Phi_0\left(r,\theta\right)\right)dr\\=&\frac{1}{A}\int_{0}^{\frac{A^2}{r}}rdr\cos\left(\theta\right)\,U\\=&\frac{\cos\left(\theta\right)\,A^3\,U}{2\,r^2}\end{aligned}$$

以上から求める一様な流れの中に球が存在する流れの速度ポテンシャル：Φ は、

$$\Phi\left(r,\theta\right)=\frac{\cos\left(\theta\right)\,A^3\,U}{2\,r^2}+r\cos\left(\theta\right)\,U \tag{6.2.15}$$

```
PSI0:\Psi[0](r,\theta)=r^2*sin(\theta)^2
 *U/2;
PSI1:\Psi[1](r,\theta)=-r/A*subst(
 [r=A^2/r],rhs(PSI0));
\Psi(r,\theta)=rhs(PSI0)+rhs(PSI1);
```

(6.1.65) 式、から流れ関数は、

$$\Psi=\Psi_0\left(r,\theta\right)-\frac{r\,\Psi_0\left(\frac{A^2}{r},\theta\right)}{A} \tag{6.2.16}$$

一様流の流れ関数は (6.1.37) 式から、

$$\Psi_0\left(r,\theta\right)=\frac{r^2\sin\left(\theta\right)^2\,U}{2}$$

上式で $r\rightarrow\frac{A^2}{r}$ の置き換えを行って、球定理 (6.2.16) 式の右辺第 2 項は、

$$\Psi_1\left(r,\theta\right)=-\frac{\sin\left(\theta\right)^2\,A^3\,U}{2\,r}$$

以上から求める一様な流れの中に球が存在する流れの流れ関数：Ψ は、

$$\Psi\left(r,\theta\right)=\frac{r^2\sin\left(\theta\right)^2\,U}{2}-\frac{\sin\left(\theta\right)^2\,A^3\,U}{2\,r} \tag{6.2.17}$$

結果の一様流中の球の速度ポテンシャル (6.2.15) 式および流れ関数 (6.2.17) 式は次項にに示す二重わき出しによる一様流中の球の速度ポテンシャルおよび流れ関数と一致している。

例題 6.2.5　一様流中の球（二重わき出しによる）

軸対称軸：z 軸方向の一様な流れ：U の中に、二重わき出しを置いた半径：A の球まわりの流れを求める。

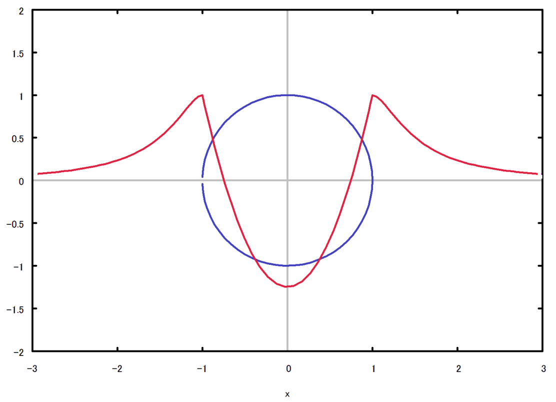


図 6.2.6: 一様流中の球の表面圧力分布

```
/* 一様流れ中の二重わき出し */
kill(all);
assume(r>0);
assume(A>0);
VR:v[r]='diff(\Psi,\theta,1)
  /(r^2*sin(\theta));
VT:v[\theta]=-'diff(\Psi,r,1)
  /(r*sin(\theta));
PSI:\Psi=(r^2*sin(\theta)^2*U)/2
  +\mu*(sin(\theta))^2/r+%c;
subst([PSI],VR);
VR1:factor(ev(%,diff));
subst([PSI],VT);
VT1:factor(ev(%,diff));
rhs(VT1)=0;
TH1:\theta=%pi;
subst([TH1,r=A],rhs(VR1)=0);
M1:solve(%,\mu)[1];
PSI1:rhs(subst([TH1],PSI))=0;
C0:solve(%,%c)[1];
subst([C0],PSI);
PSI0:subst([M1],%);
PSI1:subst([\theta=atan2(y,x),r=
  sqrt(x^2+y^2),A=1,U=1],PSI0);
PHI0:\Phi=r*cos(\theta)*U
  +A^3*U/2*cos(\theta)/r^2;
```

流速：U の一様流の中に、強さ：μ の二重わき出しを置く。(6.1.37) 式、(189 ページ) および (6.1.45) 式、(192 ページ) から流れ関数は、

$$\Psi=\frac{r^2\sin(\theta)^2\,U}{2}+\frac{\mu\sin(\theta)^2}{r}+\%c$$

(6.1.20) 式、(181 ページ) の流れ関数と流速の関係式から、

$$v_r=\frac{\frac{d}{d\theta}\Psi}{r^2\sin(\theta)}=\frac{\cos(\theta)\,\left(r^3\,U+2\,\mu\right)}{r^3} \tag{6.2.18}$$

$$v_\theta=-\frac{\frac{d}{dr}\Psi}{r\sin(\theta)}=-\frac{\sin(\theta)\,\left(r^3\,U-\mu\right)}{r^3} \tag{6.2.19}$$

原点から物体の先端までの距離を A とし、ここでの流速は零となることから、$\theta=\pi, r=A$ を流速：(6.2.18) 式に代入し、

$$v_r=\frac{\cos(\theta)\,\left(r^3\,U+2\,\mu\right)}{r^3}-\frac{A^3\,U+2\,\mu}{A^3}=0$$

また、物体の先端で $\Psi=0$ とすると、

$$\mu=-\frac{A^3\,U}{2}\qquad \%c=0 \tag{6.2.20}$$

上記の関係を代入し、流れ関数：Ψ およびこれに対応する速度ポテンシャル：Φ は (6.1.37) 式および (6.1.45) 式から

$$\Psi=\frac{r^2\sin(\theta)^2\,U}{2}-\frac{\sin(\theta)^2\,A^3\,U}{2\,r} \tag{6.2.21}$$

$$\Phi=\frac{\cos(\theta)\,A^3\,U}{2\,r^2}+r\cos(\theta)\,U \tag{6.2.22}$$

(6.2.21) 式に $\theta=atan2(y,x), r=sqrt(x^2+y^2), A=1, U=1$ を代入すると、

$$\Psi=\frac{y^2}{2}-\frac{y^2}{2\,(y^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

上式の流線を gnuplot を用いて描くと下図となる。

```
#!/gnuplot
set xrange [-3:3]
set yrange [-2:2]
set isosamples 150,150
set contour base
set cntrparam levels incremental -20,0.1,20
unset key
unset surface
set view map
splot y**2/2-y**2/(2*(y**2+x**2)**(1.5))
#    EOF
```

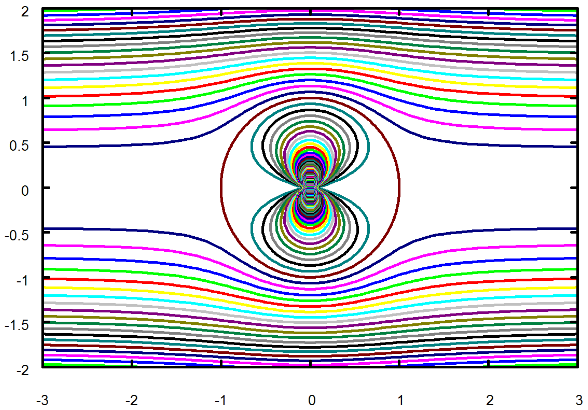


図 6.2.7: 一様流中の球まわりの流線

(1) 物体形状

```
PSI2:subst([\Psi=0],PSI0);
solve(%,r);
RBON:%[3];
```

流れ関数：$\Psi=$ 一定が流線を表す。流れ関数を r で解くと下記が得られ、流線を表す式となる。ここで、$\Psi=0$ は物体境界を表す。

$$0=\frac{r^2\sin(\theta)^2 U}{2}-\frac{\sin(\theta)^2 A^3 U}{2r}$$

上式を解いて、

$$r=A$$

これは球を表している。

(2) 物体表面の圧力分布

```
/* 圧力分布 */
PRS0:p[0]/\rho+U^2/2=p/\rho+(v[r]^2
  +v[\theta]^2)/2;
last(rhs(PRS0))-last(lhs(PRS0))
  =first(lhs(PRS0))-first(rhs(PRS0));
PRS1:expand(%/(U^2/2));
subst([VR1,VT1,M1],%);
PRS2:trigsimp(expand(%));
subst([RBON],%);
PRS3:trigsimp(expand(%));
PRS4:factor(subst([\theta=0],PRS2));
VT2:subst([r=A,M1],VT1);
```

下記の Bernoulli の定理から、

$$\frac{U^2}{2}+\frac{p_0}{\rho}=\frac{v_\theta^2+v_r^2}{2}+\frac{p}{\rho}$$

圧力：p の式は、流速の関係式：(6.2.18) 式、(6.2.19) 式および (6.2.20) 式から得られる。

物体表面の圧力は、$r=A$ を代入し、

$$\frac{2p-2p_0}{\rho U^2}=-\frac{9\sin(\theta)^2-4}{4} \tag{6.2.23}$$

物体外の z 軸上の圧力は、$\theta=0$ を代入し、

$$\frac{2\,(p-p_0)}{\rho U^2}=-\frac{A^3\,(A^3-2r^3)}{r^6} \tag{6.2.24}$$

物体表面の流速は、流速の関係式：(6.2.19) 式および (6.2.20) 式から、$r=A$ を代入し、

$$v_\theta=-\frac{3\sin(\theta)\;U}{2} \tag{6.2.25}$$

(3) 物体に作用する力

```
PRS5:p(\theta)=rhs(solve(PRS3,p)[1]);
FH:F[H]='integrate(p(\theta)*cos(\theta)*2
  *%pi*A*sin(\theta)*A,\theta,0,%pi/2);
FH1:subst([PRS5],FH);
FH2:expand(ev(FH1,integrate));
FV:F[V]='integrate('integrate(p(\theta)
  *sin(\theta)*A*sin(\theta)*A*cos(a),a,
  -%pi/2,%pi/2),\theta,0,%pi);
FV1:subst([PRS5],FV);
FV2:expand(ev(FV1,integrate));
```

物体表面圧力：p は、流速の関係式：(6.2.23) 式から、

$$\mathrm{p}(\theta)=-\frac{\left(9\rho\sin(\theta)^2-4\rho\right)\,U^2-8p_0}{8}$$

完全流体中の球全体に作用する力は、球外部に特異点が内ので、零であるが、球を半分に割り、球の前後半部分に作用する力：F_H と球の上下部分に作用する力：F_V は、上記圧力分布を積分して、下記を得る。

$$\begin{aligned}F_H=&\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{p}(\theta)\,\cos(\theta)\;2\pi A\sin(\theta)\;Ad\theta\\ =&\pi p_0 A^2-\frac{\pi\rho A^2U^2}{16}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F_V=&\int_0^{\pi}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{p}(\theta)\,\sin(\theta)\;A\sin(\theta)\;A\cos(a)\,dad\theta\\ =&\pi p_0 A^2-\frac{11\pi\rho A^2U^2}{32}\end{aligned}$$

上式から、前後および上下に引き離そうとする力が働いている。

(5) 図の作成

図 6.2.7 に物体境界と物体表面の圧力分布を示す。下記に、図を作成するプログラムを示す。

```
/* 図の作成 */
solve(PSI0,r)[3];
R1:subst([A=1,U=1,\theta=t],%);
assume(t>0);
R10:subst([\Psi=0],R1);
X1:rhs(R10)*cos(t);
Y1:rhs(R10)*sin(t);
list1:[[1,0]];
list11:[[1,0]];
for J:1 thru 31 do(
list1:append(list1,[[subst([t=0.1*J],X1),
  subst([t=0.1*J],Y1)]]),
list11:append(list11,[[subst([t=0.1*J],X1),
  subst([t=0.1*J],-Y1)]]));
PRS31:subst([\theta=t],rhs(PRS3));
list5:[[subst([t=0],cos(t)),
  subst([t=0],PRS31)]];
for J:2 thru 31 do(
list5:append(list5,[[subst([t=0.1*J],
 cos(t)),subst([t=0.1*J],PRS31)]]));
PRS41:subst([A=1,r=t],rhs(PRS4));
list6:[[1,1]];
list7:[[-1,1]];
for J:21 thru 100 do(
list6:append(list6,[[0.05*J,subst(
 [t=0.05*J],PRS41)]]),
 list7:append(list7,[[-0.05*J,
  subst([t=0.05*J],PRS41)]]));
plot2d([[discrete,list1],[discrete,list11],
  [discrete,list5],[discrete,list6],
  [discrete,list7]],[x,-3,3],[y,-2,2]);
```

例題 6.2.6　球の外部にわき出しがある流れ

球に軸対称軸 z 軸方向に一様な流れをあて、球の外部にわき出しを置いたときの球まわりの流れとその干渉力について調べる。流速：U、z 軸方向の一様流の中に、原点：O に半径：A の球を置く。球の外部、原点から C_A の z 軸上 A に強さ：m のわき出しを置く。この球まわりの流れを球定理から求める。

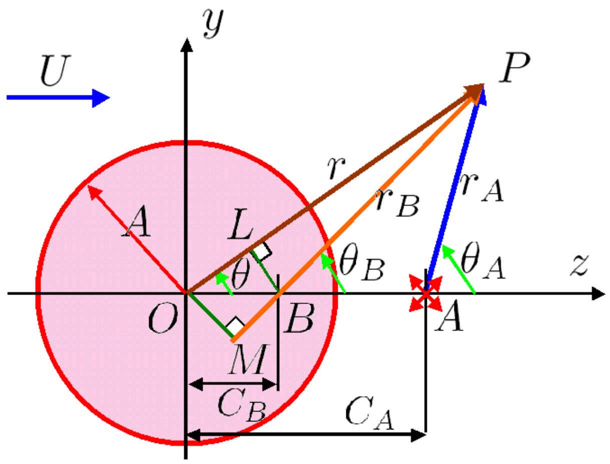


図 6.2.8: 球の外部にわき出しがある流れ

(1)Weiss の球定理 (速度ポテンシャル) による

```
/* 球の外部にあるわき出し（速度ポテンシャル）*/
kill(all);
assume(m>0);
assume(A>0);
assume(r>A);
assume(M[1]>0);
assume(C[A]>A);
assume(C[B]<A and C[B]>0);
assume(r[A]>0);
assume(r[B]>0);
assume(cos(\theta)*C[B]<r);
assume(cos(\theta)<1 and cos(\theta)>0);
assume(sin(\theta)<1 and sin(\theta)>0);
PHI01:\Phi[01](r,\theta)=r*cos(\theta)*U;
PHI02:\Phi[02](r,\theta)=-m/r[A];
RA1:r[A]=sqrt(r^2+C[A]^2-2*r*C[A]
  *cos(\theta));
RA2:r[A]^2=r^2+C[A]^2-2*r*C[A]*cos(\theta);
CA2:solve(RA2,C[A]^2)[1];
RB1:r[B]^2=r^2+C[B]^2-2*r*C[B]*cos(\theta);
CB11:C[B]=A^2/C[A];
CB2:solve(CB11,A^2)[1];
RB2:subst([CB11],RB1);
RB3:RB2*C[A]^2;
CA3:solve(RB3,A^4)[1];
PHI021:subst([RA1],PHI02);
PHI01D:'diff(lhs(PHI01),r,1)=
  'diff((rhs(PHI01)),r,1);
PHI01D1:lhs(PHI01D)=ev(rhs(PHI01D),diff);
PHI02D:'diff(lhs(PHI021),r,1)=
  'diff((rhs(PHI021)),r,1);
PHI02D1:lhs(PHI02D)=ev(rhs(PHI02D),diff);
PHI11:\Phi[11](r,\theta)=1/A
  *integrate((r*'diff(\Phi[01](r,\theta),
  r,1)),r,0,A^2/r);
subst([PHI01D1],PHI11);
PHI111:ev(%,integrate);
PHI12:\Phi[12](r,\theta)=1/A
  *integrate((r*'diff(\Phi[02](r,\theta),r,
  1)),r,0,A^2/r);
subst([PHI02D1],PHI12);
PHI121:ev(%,integrate);
PHI122:expand(subst([cos(\theta)^2=
  1-sin(\theta)^2],%));
subst([CA3],%);
expand(subst([CB2],%));
```

一様流の速度ポテンシャル：Φ_{O1} は、(6.1.37) 式から、

$$\Phi_{O1}\left(r,\theta\right)=r\cos\left(\theta\right)\,U \tag{6.2.26}$$

点 A に置いたわき出しの速度ポテンシャル：Φ_{O2} は、(6.1.40) 式から、

$$\Phi_{O2}\left(r,\theta\right)=-\frac{m}{\sqrt{C_A^2-2\,r\cos\left(\theta\right)\,C_A+r^2}} \tag{6.2.27}$$

ここで点 A、A の球面に対する鏡像位置：B に関する関係式は下記となる。

$$r_A=\sqrt{C_A^2-2\,r\cos\left(\theta\right)\,C_A+r^2}$$

$$C_B=\frac{A^2}{C_A}$$

$$r_B=\sqrt{C_B^2-2\,r\cos\left(\theta\right)\,C_B+r^2}$$

$$r_B=\sqrt{-\frac{2\,r\cos\left(\theta\right)\,A^2}{C_A}+\frac{A^4}{C_A^2}+r^2}$$

一様流中に球が存在することによる鏡像関係の速度ポテンシャル：Φ_{11} は (6.1.62) 式から、

$$\begin{aligned}\Phi_{11}\left(r,\theta\right)=&\frac{1}{A}\int_0^{\frac{A^2}{r}}r\,\left(\frac{d}{d\,r}\,\Phi_{O1}\left(r,\theta\right)\right)dr\\=&\frac{1}{A}\int_0^{\frac{A^2}{r}}rdr\cos\left(\theta\right)\,U\\=&\frac{\cos\left(\theta\right)\,A^3\,U}{2\,r^2}\end{aligned} \tag{6.2.28}$$

球の外部のわき出しがある流れに球が存在することによる鏡像関係の速度ポッテンシャル：Φ_{12} は同様に、

$$\begin{aligned}\Phi_{12}\left(r,\theta\right)=&\frac{1}{A}\int_{0}^{\frac{A^2}{r}} r\,\left(\frac{d}{d\,r}\,\Phi_{O2}\left(r,\theta\right)\right)dr=\frac{m}{2\,A}\int_{0}^{\frac{A^2}{r}}\frac{r\,\left(2\,r-2\cos\left(\theta\right)\,C_A\right)}{\left(C_A^2-2\,r\cos\left(\theta\right)\,C_A+r^2\right)^{\frac{3}{2}}}dr\\ =&\frac{m\operatorname{asinh}\left(\frac{A^2}{r\sin(\theta)\,C_A}-\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right)}{A}-\frac{m\,A}{\sqrt{r^2\,C_A^2-2\,r\cos\left(\theta\right)\,A^2\,C_A+A^4}}+\frac{m\operatorname{asinh}\left(\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right)}{A}\\ =&\frac{m\operatorname{asinh}\left(\frac{C_B}{r\sin(\theta)}-\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right)}{A}-\frac{m\,A}{C_A\,r_B}+\frac{m\operatorname{asinh}\left(\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right)}{A}\end{aligned}\tag{6.2.29}$$

上記右辺第 2 項は球の**鏡像点に** mA/C_A **の強さのわき出し**による項で、右辺第 1 項と第 3 項は (6.1.41) 式から**一様な吸いこみ分布**を表している。一様流中に球が存在する流れの速度ポッテンシャル：Φ_{31} は (6.2.26) 式および (6.2.28) 式から下記となる。これは一様流中の球（二重わき出しによる）の結果：(6.2.22) 式と一致している。

$$\Phi_{31}\left(r,\theta\right)=\frac{\cos\left(\theta\right)\,A^3\,U}{2\,r^2}+r\cos\left(\theta\right)\,U$$

球の外部にわき出しがある流れの速度ポッテンシャル：Φ_{32} は (6.2.27) 式および (6.2.29) 式から下記となる。

$$\begin{aligned}\Phi_{32}\left(r,\theta\right)=&\frac{m\operatorname{asinh}\left(\frac{A^2}{r\sin(\theta)\,C_A}-\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right)}{A}-\frac{m\,A}{\sqrt{r^2\,C_A^2-2\,r\cos\left(\theta\right)\,A^2\,C_A+A^4}}-\frac{m}{\sqrt{C_A^2-2\,r\cos\left(\theta\right)\,C_A+r^2}}\\ &+\frac{m\operatorname{asinh}\left(\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right)}{A}\end{aligned}$$

一様流中にの球が存在する流れの r 方向の流速：v_{r1} は下記となり、球面：$r=A$ では零となる。わき出しがある流れの r 方向の流速：v_{r2} も球面：$r=A$ では零となる。

$$v_{r1}=\frac{d}{d\,r}\,\Phi_{31},=\cos\left(\theta\right)\,U-\frac{\cos\left(\theta\right)\,A^3\,U}{r^3}\quad v_{r1,r=A}=0$$

$$v_{r2}=\frac{m\,A\,\left(2\,r\,C_A^2-2\cos\left(\theta\right)\,A^2\,C_A\right)}{2\left(r^2\,C_A^2-2\,r\cos\left(\theta\right)\,A^2\,C_A+A^4\right)^{\frac{3}{2}}}+\frac{m\,\left(2\,r-2\cos\left(\theta\right)\,C_A\right)}{2\left(C_A^2-2\,r\cos\left(\theta\right)\,C_A+r^2\right)^{\frac{3}{2}}}-\frac{m\,A}{r^2\sin\left(\theta\right)\,\sqrt{\left(\frac{A^2}{r\sin(\theta)\,C_A}-\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right)^2+1}\,C_A}$$

一様流中に球が存在する流れの θ 方向の流速：v_{t1} とその球面上の流速は下記となる。

$$v_{t1}=\frac{\frac{d}{d\,\theta}\,\Phi_{31}}{r}=-\frac{\sin\left(\theta\right)\,A^3\,U}{2\,r^3}-\sin\left(\theta\right)\,U\quad v_{t1,r=A}=-\frac{3\sin\left(\theta\right)\,U}{2}$$

わき出しがある流れの θ 方向の流速：v_{t2} とその球面上の流速は下記となる。

$$v_{t2}=\frac{\frac{d}{d\,\theta}\,\Phi_{32}}{r}=\frac{\frac{m\,r\sin(\theta)\,A^3\,C_A}{\left(r^2\,C_A^2-2\,r\cos(\theta)\,A^2\,C_A+A^4\right)^{\frac{3}{2}}}+\frac{m\,r\sin(\theta)\,C_A}{\left(C_A^2-2\,r\cos(\theta)\,C_A+r^2\right)^{\frac{3}{2}}}+\frac{m\left(-\frac{\cos(\theta)\,A^2}{r\sin(\theta)^2\,C_A}+\frac{\cos(\theta)^2}{\sin(\theta)^2}+1\right)}{A\sqrt{\left(\frac{A^2}{r\sin(\theta)\,C_A}-\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right)^2+1}}+\frac{m\left(-\frac{\cos(\theta)^2}{\sin(\theta)^2}-1\right)}{\sqrt{\frac{\cos(\theta)^2}{\sin(\theta)^2}+1}\,A}}{r}$$

$$v_{t2,r=A}=-\frac{m\,\left(\left(C_A^2-2\cos\left(\theta\right)\,A\,C_A+A^2\right)^{\frac{3}{2}}-C_A^3+3\cos\left(\theta\right)\,A\,C_A^2-3\,A^2\,C_A+\cos\left(\theta\right)\,A^3\right)}{\sin\left(\theta\right)\,A^2\left(C_A^2-2\cos\left(\theta\right)\,A\,C_A+A^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

```
PHI31:\Phi[31](r,\theta)=rhs(PHI01)
  +rhs(PHI111);
PHI32:\Phi[32](r,\theta)=rhs(PHI021)
  +rhs(PHI122);
VR1:v[r1]=diff(rhs(PHI31),r,1);
v[r1,r=A]=subst([r=A],rhs(VR1));
VR2:v[r2]=diff(rhs(PHI32),r,1);
v[r2,r=A]=subst([r=A],rhs(VR2));
factor(%);
subst([sin(\theta)^2=1-cos(\theta)^2],%);
VT1:v[t1]=expand(diff(rhs(PHI31),\theta,1)
  /r);
v[t1,r=A]=subst([r=A],rhs(VT1));
VT2:v[t2]=(diff(rhs(PHI32),\theta,1)/r);
expand(subst([cos(\theta)^2=1
 -sin(\theta)^2],%));
subst([cos(\theta)^2=1-sin(\theta)^2],%);
v[t2,r=A]=factor(subst([r=A],rhs(%)));
factor(subst([cos(\theta)^2=1
 -sin(\theta)^2],%));
```

(2)Bulter の球定理 (流れ関数) による

```
/* 球の外部にあるわき出し（流れ関数）*/
kill(all);
assume(m>0);
assume(A>0);
assume(r>A);
assume(M[1]>0);
assume(C[A]>A);
assume(C[B]<A);
assume(r[A]>0);
assume(r[B]>0);
assume(cos(\theta)*C[B]<r);
assume(cos(\theta)<1 and cos(\theta)>0);
PSI01:\Psi[01]=r^2*sin(\theta)^2*U/2;
PSI02:\Psi[02]=-m*(cos(\theta[A])-1);
PSI0:\Psi[0]=rhs(PSI01)+rhs(PSI02);
PSI11:\Psi[11]=-r/A*subst([r=A^2/r],
  rhs(PSI01));
CB11:C[B]=A^2/C[A];
A11:solve(CB11,A)[2];
A12:A11^2;
A14:A12^2;
RA1:r[A]^2=r^2+C[A]^2-2*r*C[A]*cos(\theta);
RB1:r[B]^2=r^2+C[B]^2-2*r*C[B]*cos(\theta);
RA2:sqrt(RA1);
RB2:solve(RB1,C[B]^2)[1];
RB3:sqrt(RB1);
COSA1:r*cos(\theta)=r[A]*cos(\theta[A])
 +C[A];
solve(COSA1,cos(\theta[A]))[1];
COSA2:subst([RA2],%);
COSB1:r*cos(\theta)=r[B]*cos(\theta[B])
 +C[B];
COSB2:solve(COSB1,cos(\theta[B]))[1];
subst([RB3],%);
COSB3:subst([CB11],%);
PSI2:\Psi[12]=-r/A*(-m*(
 cos(\theta[A])[B]-1)+%c);
PSI21:cos(\theta[A])[B]=subst([r=A^2/r],
  rhs(COSA2));
PSI2N:num(rhs(PSI21))^2;
PSI2D:denom(rhs(PSI21))^2;
PSI22:ratsimp(PSI2N/PSI2D);
PSI22N:factor(num(PSI22)/C[A]^2);
expand(%);
subst([A12,A14],%);
PSI22N1:factor(%);
PSI22D:expand(denom(PSI22)/C[A]^2);
subst([A12,A14],%);
PSI22D1:subst([RB2],%);
PSI23:lhs(PSI21)=-sqrt(PSI22N1)/
  sqrt(PSI22D1);
PSI24:lhs(PSI21)=-(r[B]+C[B]
 *cos(\theta[B]))/r;
expand(subst([PSI24],PSI2));
PSI25:subst([CB11],%);
PSI26:subst([%c=-2*m],%);
subst([COSB3],%);
PSI27:subst([RB3],%);
```

一様流の流れ関数 : Ψ_{O1} は、(6.1.37) 式から、

$$\Psi_{O1} = \frac{r^2 \sin(\theta)^2 U}{2} \tag{6.2.30}$$

点 A に置いたわき出しの流れ関数 : Ψ_{O2} は、(6.1.39) 式から、

$$\Psi_{O2} = -m\,(\cos(\theta_A) - 1) \tag{6.2.31}$$

ここで点 A、A の球面に対する鏡像位置 : B に関する関係式は下記となる。

$$\cos(\theta_A) = -\frac{C_A - r\cos(\theta)}{r_A}$$

$$\cos(\theta_A) = -\frac{C_A - r\cos(\theta)}{\sqrt{C_A^2 - 2\,r\cos(\theta)\,C_A + r^2}}$$

$$r\cos(\theta) = r_B\cos(\theta_B) + C_B$$

$$\cos(\theta_B) = -\frac{C_B - r\cos(\theta)}{r_B} = -\frac{C_B - r\cos(\theta)}{\sqrt{C_B^2 - 2r\cos(\theta)\,C_B + r^2}} = -\frac{\frac{A^2}{C_A} - r\cos(\theta)}{\sqrt{-\frac{2r\cos(\theta)\,A^2}{C_A} + \frac{A^4}{C_A^2} + r^2}}$$

一様流中に球が存在することによる鏡像関係の流れ関数：Ψ_{11} は (6.1.65) 式から、

$$\Psi_{11} = -\frac{r\,\Psi_{01}\left(\frac{A^2}{r}, \theta\right)}{A} = -\frac{\sin(\theta)^2 A^3 U}{2r} \tag{6.2.32}$$

わき出しがある流れに球が存在することによる鏡像関係の流れ関数：Ψ_{12} は同様に、

$$\Psi_{12} = -\frac{r\,\Psi_{02}\left(\frac{A^2}{r}, \theta\right)}{A} = -\frac{r\left(\%c - m\left((\cos(\theta_A))_B - 1\right)\right)}{A}$$

ここで $(\cos(\theta_A))_B$ を抜き出し、

$$(\cos(\theta_A))_B = -\frac{C_A - \frac{\cos(\theta)\,A^2}{r}}{\sqrt{C_A^2 - \frac{2\cos(\theta)\,A^2\,C_A}{r} + \frac{A^4}{r^2}}} = -\frac{r - \cos(\theta)\,C_B}{r_B} = -\frac{PL}{PB}$$

$\triangle\,PBL$ と $\triangle\,POM$ が相似であることから、

$$(\cos(\theta_A))_B = -\frac{PL}{PB} = -\frac{PM}{PO} = \frac{-C_B\cos(\theta_B) - r_B}{r}$$

上式を代入して流れ関数：Ψ_{12} は、

$$\Psi_{12} = -\frac{m\,C_B\cos(\theta_B)}{A} - \frac{m\,r_B}{A} - \frac{m\,r}{A} - \frac{\%c\,r}{A} \tag{6.2.33}$$

一様流中に球が存在する流れの流れ関数：Ψ_{31} は (6.2.30) 式および (6.2.32) 式から下記となる。これは一様流中の球（二重わき出しによる）で示した流れ関数：(6.2.21) 式と一致している。

$$\Psi_{31} = \frac{r^2\sin(\theta)^2 U}{2} - \frac{\sin(\theta)^2 A^3 U}{2r}$$

わき出しがある流れの流れ関数：Ψ_{32} は (6.2.31) 式および (6.2.34) 式から下記となる。ここで特異性を除くため $\%c = -2m$ と置き、

$$\Psi_{32} = -\frac{m\,A\cos(\theta_B)}{C_A} - \frac{m\,r_B}{A} - m\,(\cos(\theta_A) - 1) + \frac{m\,r}{A}$$

上式は右辺第 3 項が球の外部に置いたわき出し、右辺第 1 項が鏡像点に mA/C_A の強さの鏡像関係のわき出し、右辺第 2 項と第 4 項は鏡像点：B から原点：O に分布した一様な吸いこみ分布を表している。球内のその分布強さは球の中で打ち消し合うようになっている。Ψ_{32} を r, θ で表現すると、

$$\Psi_{32} = -m\left(-\frac{C_A - r\cos(\theta)}{\sqrt{C_A^2 - 2r\cos(\theta)\,C_A + r^2}} - 1\right) + \frac{m\,A\left(\frac{A^2}{C_A} - r\cos(\theta)\right)}{\sqrt{-\frac{2r\cos(\theta)\,A^2}{C_A} + \frac{A^4}{C_A^2} + r^2}\,C_A} - \frac{m\sqrt{-\frac{2r\cos(\theta)\,A^2}{C_A} + \frac{A^4}{C_A^2} + r^2}}{A} + \frac{m\,r}{A}$$

一様流中に球が存在する流れの r 方向の流速：v_{r1} は下記となり、球面：$r = A$ では零となる。わき出しがある流れの r 方向の流速：v_{r2} も球面：$r = A$ では零となる。

$$v_{r1} = \frac{\frac{d}{d\theta}\Psi_{11}}{r^2\sin(\theta)} = \cos(\theta)\,U - \frac{\cos(\theta)\,A^3 U}{r^3}, \quad v_{r1,r=A} = 0 \tag{6.2.34}$$

$$v_{r2} = \frac{\frac{d}{d\theta}\Psi_{12}}{r^2\sin(\theta)} = \frac{-m\left(\frac{r\sin(\theta)\,C_A\,(C_A - r\cos(\theta))}{\left(C_A^2 - 2r\cos(\theta)\,C_A + r^2\right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{r\sin(\theta)}{\sqrt{C_A^2 - 2r\cos(\theta)\,C_A + r^2}}\right) - \frac{m\,r\sin(\theta)\,A^3\left(\frac{A^2}{C_A} - r\cos(\theta)\right)}{\left(-\frac{2r\cos(\theta)\,A^2}{C_A} + \frac{A^4}{C_A^2} + r^2\right)^{\frac{3}{2}} C_A^2}}{r^2\sin(\theta)} \tag{6.2.35}$$

$$v_{r2,r=A} = 0$$

一様流球が存在する流れの θ 方向の流速：v_{t1} とその球面上の流速は下記となる。

$$v_{t1} = -\frac{\frac{d}{dr}\Psi_{31}}{r\sin(\theta)} = -\frac{\sin(\theta)\,A^3 U}{2r^3} - \sin(\theta)\,U, \quad v_{t1,r=A} = -\frac{3\sin(\theta)\,U}{2}$$

わき出しがある流れの θ 方向の球面上の流速：v_{t2} は下記となる。

$$v_{t2,r=A} = -\frac{m\left(\left(C_A^2 - 2\cos(\theta)\,A\,C_A + A^2\right)^{\frac{3}{2}} - C_A^3 + 3\cos(\theta)\,A\,C_A^2 - 3A^2 C_A + \cos(\theta)\,A^3\right)}{\sin(\theta)\,A^2\left(C_A^2 - 2\cos(\theta)\,A\,C_A + A^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

上記の結果は Weiss の球定理 (速度ポテンシャル) による結果と一致している。

```
PSI31:\Psi[31]=rhs(PSI01)+rhs(PSI11);
PSI32:\Psi[32]=rhs(PSI02)+rhs(PSI26);
subst([COSA2,COSB3],%);
subst([RB3],%);
PSI321:subst([CB11],%);
VR1:v[r1]=expand(diff(rhs(PSI31),\theta,1)
  /r^2/sin(\theta));
v[r1,r=A]=subst([r=A],rhs(VR1));
VR2:v[r2]=diff(rhs(PSI321),\theta,1)/r^2
  /sin(\theta);
v[r2,r=A]=subst([r=A],rhs(VR2));
factor(%);
VT1:v[t1]=expand(-(diff(rhs(PSI31),r,1)/r
  /sin(\theta)));
VT11:v[t1,r=A]=subst([r=A],rhs(VT1));
VT2:v[t2]=-(diff(rhs(PSI321),r,1)/r/
  sin(\theta));
VT21:v[t2,r=A]=factor(subst([r=A],rhs(%)));
VT3:v[t]=rhs(VT21);
```

(3) 球に作用する力

```
/* 球に作用する力 */
VRCA1:v[r1,r=C[A]]=trigsimp(subst([r=C[A],
  \theta=0],rhs(VR1)));
v[r2,r=C[A]]=expand(diff(rhs(PSI27),\theta,
  1)/r^2/sin(\theta));
```

```
VRCA22:v[r2,r=C[A]]=subst([r=C[A],\theta=0,
  CB11],rhs(%));
VRCA221:factor(%);
CA41:C[A]^4=(C[A]^2-A^2)^2-(-2*A^2*C[A]^2
  +A^4);
VRCA222:factor(subst([CA41],VRCA221));
F[H]=4*%pi*\rho*m*(rhs(VRCA1)
 +rhs(VRCA221));
subst([CA41],%);
```

球の表面の圧力積分により球に作用する力を求めることができるが、式が複雑になり Maxima では解けなかった。そこでここでは、6.1.13 節「外部に特異点がある物体に作用する力」（197 ページ）の方法で球に作用する力を求める。物体の外部にわき出しがある場合、(6.1.66) 式から物体に作用する力：F_H は下記で得られる。

$$F_H = -4\,\pi\,m\,\rho\,v'$$

ここで v' はわき出し強さ：m の場所における、わき出し自体以外の流速を示す。(6.2.34) 式で $r = C_A$ として、わき出し点における一様流中の球による流速は下記である。

$$v_{r1,r=C_A} = \frac{\left(C_A^3 - A^3\right)\,U}{C_A^3}$$

球の外部のわき出しの流速は考慮しないので、(6.2.33) 式からわき出しの球の鏡像によるわき出し点における流れ関数から流速は下記である。

$$\begin{aligned}
v_{r2,r=C_A} =& \frac{1}{r^2\sin(\theta)}\frac{d}{d\,\theta}\,\Psi_{12}\\
=& -\frac{m\,C_B}{r\,A\,\sqrt{C_B^2 - 2\,r\cos(\theta)\,C_B + r^2}} + \frac{m\,A}{r\,\sqrt{-\frac{2\,r\cos(\theta)\,A^2}{C_A} + \frac{A^4}{C_A^2} + r^2}\,C_A} + \frac{m\cos(\theta)\,A^3}{\left(-\frac{2\,r\cos(\theta)\,A^2}{C_A} + \frac{A^4}{C_A^2} + r^2\right)^{\frac{3}{2}}\,C_A^2}\\
&- \frac{m\,A^5}{r\left(-\frac{2\,r\cos(\theta)\,A^2}{C_A} + \frac{A^4}{C_A^2} + r^2\right)^{\frac{3}{2}}\,C_A^3}\\
=& \frac{m\,A^3}{C_A\,\left(C_A - A\right)\,\left(C_A + A\right)\,\sqrt{C_A^4 - 2\,A^2\,C_A^2 + A^4}}\\
=& \frac{m\,A^3}{C_A\,(C_A - A)^2\,(C_A + A)^2}
\end{aligned}$$

以上から、球に作用する力は、

$$\begin{aligned}
F_H =& -4\,\pi\,m\,\rho\,\left(v_{r1,r=C_A} + v_{r2,r=C_A}\right)\\
=& -4\,\pi\,m\,\rho\,\left(\frac{\left(C_A^3 - A^3\right)\,U}{C_A^3} + \frac{m\,A^3}{C_A\,\left(C_A^2 - A^2\right)^2}\right)
\end{aligned}$$

例題 6.2.7 球の外部に二重わき出しがある流れ

球に軸対称軸 z 軸方向に一様な流れをあて、球の外部に二重わき出しを置いたときの球まわりの流れを求める。流速：U、z 軸方向の一様流の中に、原点：O に半径：A の球を置く。球の外部、原点から C_A の z 軸上に強さ：μ の二重わき出しを置く。この球まわりの流れを球定理から求める。

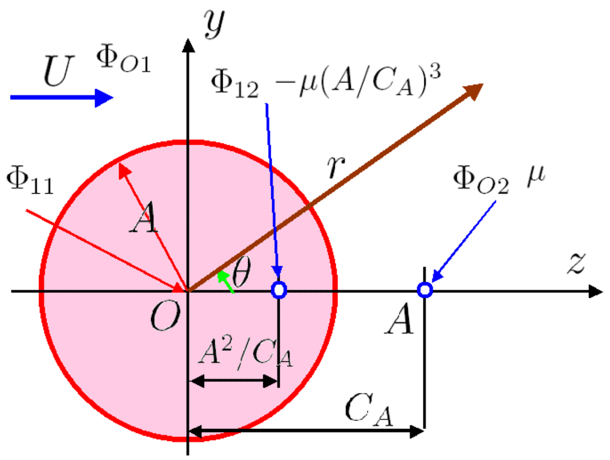


図 6.2.9: 球の外部に二重わき出しがある流れ

(1)Weiss の球定理 (速度ポテンシャル) による

```
/* 球の外部にある二重わき出し（速度ポテンシャ
ル）*/
kill(all);
assume(m>0);
assume(A>0);
assume(r>A);
assume(C[A]>A);
assume(C[A]>0);
assume(C[A1]>0);
assume(C[A2]>0);
assume(cos(\theta)<1 and cos(\theta)>0);
assume(sin(\theta)<1 and sin(\theta)>0);
PHI01:\Phi[01](r,\theta)=r*cos(\theta)*U;
PHI02:\Phi[02](r,\theta)=-(\mu*(C[A]-r
  *cos(\theta)))/(C[A]^2-2*r*cos(\theta)
  *C[A]+r^2)^(3/2);
PHI01D:'diff(lhs(PHI01),r,1)='diff((
  rhs(PHI01)),r,1);
PHI01D1:lhs(PHI01D)=ev(rhs(PHI01D),diff);
PHI02D:'diff(lhs(PHI02),r,1)='diff((
  rhs(PHI02)),r,1);
PHI02D1:lhs(PHI02D)=ev(rhs(PHI02D),diff);
PHI11:\Phi[11](r,\theta)=1/A*integrate((r*
 'diff(\Phi[01](r,\theta),r,1)),r,0,A^2/r);
subst([PHI01D1],PHI11);
PHI111:ev(%,integrate);
PHI12:\Phi[12](r,\theta)=1/A*integrate((r*
 'diff(\Phi[02](r,\theta),r,1)),r,0,A^2/r);
subst([PHI02D1],PHI12);
PHI121:ev(%,integrate);
RCA1:r^2*C[A]^2-2*r*cos(\theta)*A^2*C[A]
 +A^4=C[A]^2*(r^2-2*r*cos(\theta)*A^2
 /C[A]+A^4/C[A]^2);
RCA2:r^2*C[A]^3-2*r*cos(\theta)*A^2*C[A]^2
  +A^4*C[A]=C[A]^3*(r^2-2*r*cos(\theta)
  *A^2/C[A]+A^4/C[A]^2);
RCA3:r*cos(\theta)*C[A]-A^2=C[A]*(r
  *cos(\theta)-A^2/C[A]);
PHI12NU:factor(num(rhs(PHI121))/C[A]);
PHI12DN:subst([RCA1,RCA2],
  denom(rhs(PHI121)))/C[A];
lhs(PHI121)=PHI12NU/PHI12DN;
PHI122:subst([RCA3],%);
PHI31:\Phi[31](r,\theta)=rhs(PHI01)
  +rhs(PHI111);
PHI32:\Phi[32](r,\theta)=rhs(PHI02)
  +rhs(PHI122);
```

一様流の速度ポテンシャル：Φ_{O1} は、(6.1.37) 式から、

$$\Phi_{O1}\left(r,\theta\right)=r\cos\left(\theta\right)\,U \tag{6.2.36}$$

球の外部に置いた二重わき出しの速度ポテンシャル：Φ_{O2} は、(6.1.45) 式から、

$$\Phi_{O2}\left(r,\theta\right)=\frac{\mu\,\left(C_A-r\cos\left(\theta\right)\right)}{\left(C_A^2-2\,r\cos\left(\theta\right)\,C_A+r^2\right)^{\frac{3}{2}}} \tag{6.2.37}$$

一様流に球が存在することによる鏡像関係の速度ポテンシャル：Φ_{11} は (6.1.62) 式から、

$$\Phi_{11}\left(r,\theta\right)=\frac{1}{A}\int_0^{\frac{A^2}{r}} r\left(\frac{d}{d\,r}\,\Phi_{O1}\left(r,\theta\right)\right)dr=\frac{\cos\left(\theta\right)\,A^3\,U}{2\,r^2} \tag{6.2.38}$$

二重わき出しがある流れに球が存在することによる鏡像関係の速度ポテンシャル：Φ_{12} は同様の方法で下記となる。これは鏡像関係の二重わき出しが A^2/C_A の位置に強さ：$-\mu(A/C_A)^3$ の二重わき出しとなるを表している。

$$\begin{aligned}\Phi_{12}\left(r,\theta\right)&=\frac{1}{A}\int_0^{\frac{A^2}{r}} r\left(\frac{d}{d\,r}\,\Phi_{O2}\left(r,\theta\right)\right)dr\\&=-\frac{\mu\,A^3\left(r\cos\left(\theta\right)-\frac{A^2}{C_A}\right)}{\left(-\frac{2\,r\cos(\theta)\,A^2}{C_A}+\frac{A^4}{C_A^2}+r^2\right)^{\frac{3}{2}}\,C_A^3}\end{aligned} \tag{6.2.39}$$

一様流中に球が存在する流れの速度ポテンシャル：Φ_{31} は (6.2.36) 式と (6.2.38) 式から下記となる。

$$\Phi_{31}(r,\theta)=\frac{\cos(\theta)\ A^3\,U}{2\,r^2}+r\cos(\theta)\ U \qquad (6.2.40)$$

また、二重わき出しがある流れの速度ポテンシャル：Φ_{32} は (6.2.37) 式と (6.2.39) 式から下記となる。

$$\Phi_{32}(r,\theta)=-\frac{\mu\,(C_A-r\cos(\theta))}{(C_A^2-2\,r\cos(\theta)\ C_A+r^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{\mu\,A^3\left(r\cos(\theta)-\frac{A^2}{C_A}\right)}{\left(-\frac{2\,r\cos(\theta)\,A^2}{C_A}+\frac{A^4}{C_A^2}+r^2\right)^{\frac{3}{2}}C_A^3} \qquad (6.2.41)$$

```
VR1:v[r1]=diff(rhs(PHI31),r,1);
v[r1,r=A]=subst([r=A],rhs(VR1));
VR2:v[r2]=diff(rhs(PHI32),r,1);
v[r2,r=A]=subst([r=A],rhs(VR2));
factor(%);
subst([sin(\theta)^2=1-cos(\theta)^2],%);
VT1:v[t1]=expand(diff(rhs(PHI31),\theta,1)
  /r);
VT11:v[t1,r=A]=subst([r=A],rhs(VT1));
VT2:v[t2]=(diff(rhs(PHI32),\theta,1)/r);
VT21:v[t2,r=A]=factor(subst([r=A],rhs(%)));
```

一様流中で球が存在する流れの r 方向の流速：v_{r1} は (6.2.40) 式から下記となり、球面：$r=A$ では零となる。球の外部に二重わき出しがある流れの r 方向の流速：v_{r2} も (6.2.41) 式から得られ、球面：$r=A$ では零となる。

$$v_{r1}=\frac{d}{d\,r}\,\Phi_{31}=\cos(\theta)\ U-\frac{\cos(\theta)\ A^3\,U}{r^3} \qquad v_{r1,r=A}=0$$

$$v_{r2,r=A}=0$$

一様流中で球が存在する流れの θ 方向の流速：v_{t1} とその球面上の流速は (6.2.40) 式から下記となる。

$$v_{t1}=\frac{\frac{d}{d\,\theta}\,\Phi_{31}}{r}=-\frac{\sin(\theta)\ A^3\,U}{2\,r^3}-\sin(\theta)\ U$$

$$v_{t1,r=A}=-\frac{3\sin(\theta)\ U}{2} \qquad (6.2.42)$$

球の外部に二重わき出しがある流れの θ 方向の流速：v_{t2} とその球面上の流速は (6.2.41) 式から下記となる。

$$v_{t2,r=A}=-\frac{3\,\mu\sin(\theta)\ (C_A-A)\ (C_A+A)}{(C_A^2-2\cos(\theta)\ A\,C_A+A^2)^{\frac{5}{2}}} \qquad (6.2.43)$$

(2) 球に作用する力 (圧力積分による)

Bernoulli の定理から、圧力は下記で表すことができる。球面上の圧力 $p(\theta)$ を下記の積分をすることで z 軸方向の力：F を得ることができる。

$$\mathrm{p}(\theta)=-\frac{\rho\,v^2}{2},\quad F=2\,\pi\int_0^{\pi}\mathrm{p}(\theta)\,\cos(\theta)\,\sin(\theta)\,d\theta\,A^2$$

一様流中で球が存在し、球の外部に二重わき出しがある流れの z 軸方向の力：F を求める。一様流中で球が存在する場合の流速：$v_{t1,r=A}$ と球の外部に二重わき出しがある場合の流速：$v_{t2,r=A}$ から球面上の圧力 $p(\theta)$ は下記となる。

$$\mathrm{p}(\theta)=-\frac{\rho\,(v_{t2,r=A}+v_{t1,r=A})^2}{2}$$

```
/* 球に作用する力 */
PRS0:p(\theta)=-1/2*\rho*v^2;
F0:F='integrate(p(\theta)*2*%pi*A
  *sin(\theta)*A*cos(\theta),\theta,0,%pi);
PRS11:subst([v=rhs(VT11)],PRS0);
subst([PRS11],F0);
F21:factor(ev(%,integrate));
PRS21:subst([v=rhs(VT21)],PRS0);
subst([PRS21],F0);
F21:factor(ev(%,integrate));
PRS31:subst([v=lhs(VT11)+lhs(VT21)],PRS0);
PRS32:expand(%);
PRS321:p(\theta)=first(rhs(PRS32));
PRS323:p(\theta)=last(rhs(PRS32));
PRS322:p(\theta)=rhs(PRS32)-rhs(PRS321)
  -rhs(PRS323);
PRS3211:subst([VT11,VT21],PRS321);
PRS3221:subst([VT11,VT21],PRS322);
PRS3231:subst([VT11,VT21],PRS323);
subst([PRS3211],F0);
expand(%);
F31:F[22]=rhs(factor(ev(%,integrate)));
subst([PRS3221],F0);
expand(%);
F[12]=rhs(factor(ev(%,integrate)));
subst([C[A]^2+2*A*C[A]+A^2=C[A1]^2],%);
subst([C[A]^2-2*A*C[A]+A^2=C[A2]^2],%);
subst([C[A1]=(C[A]+A)],%);
subst([C[A2]=(C[A]-A)],%);
F32:ratsimp(%);
subst([PRS3231],F0);
expand(%);
F33:F[11]=rhs(factor(ev(%,integrate)));
F=rhs(F31)+rhs(F32)+rhs(F33);
```

これを展開すると、

$$\mathrm{p}(\theta)=-\frac{\rho\,v_{t2,r=A}^2}{2}-\rho\,v_{t1,r=A}\,v_{t2,r=A}-\frac{\rho\,v_{t1,r=A}^2}{2} \qquad (6.2.44)$$

(6.2.44) 式第 1 項は、球の外部に二重わき出しがある

場合の流速による項で、(6.2.43) 式から、

$$\mathrm{p}\left(\theta\right)=-\frac{9\,\mu^2\,\rho\sin\left(\theta\right)^2\left(C_A-A\right)^2\left(C_A+A\right)^2}{2\left(C_A^2-2\cos\left(\theta\right)\,A\,C_A+A^2\right)^5}$$

これを積分して、

$$F_{22}=-9\,\pi\,\mu^2\,\rho\,A^2\left(C_A-A\right)^2\left(C_A+A\right)^2\int_0^{\pi}\frac{\cos\left(\theta\right)\,\sin\left(\theta\right)^3}{\left(C_A^2-2\cos\left(\theta\right)\,A\,C_A+A^2\right)^5}d\theta=-\frac{24\,\pi\,\mu^2\,\rho\,A^3\,C_A}{\left(C_A-A\right)^4\left(C_A+A\right)^4}$$

(6.2.44) 式第 2 項は、球の外部に二重わき出しがある場合の流速による項と一様流中で球が存在する場合の流速による項で、(6.2.43) 式と (6.2.42) 式から、

$$\mathrm{p}\left(\theta\right)=-\frac{9\,\mu\,\rho\sin\left(\theta\right)^2\,\left(C_A-A\right)\,\left(C_A+A\right)\,U}{2\left(C_A^2-2\cos\left(\theta\right)\,A\,C_A+A^2\right)^{\frac{5}{2}}}$$

これを積分して、

$$F_{12}=-9\,\pi\,\mu\,\rho\,A^2\,\left(C_A-A\right)\,\left(C_A+A\right)\int_0^{\pi}\frac{\cos\left(\theta\right)\,\sin\left(\theta\right)^3}{\left(C_A^2-2\cos\left(\theta\right)\,A\,C_A+A^2\right)^{\frac{5}{2}}}d\theta\,U=-\frac{12\,\pi\,\mu\,\rho\,A^3\,U}{C_A^4}$$

(6.2.44) 式第 3 項は、一様流中で球が存在する場合の流速による項で、(6.2.42) 式から、

$$\mathrm{p}\left(\theta\right)=-\frac{9\,\rho\sin\left(\theta\right)^2\,U^2}{8}$$

これを積分して、

$$F_{11}=-\frac{9\,\pi\,\rho}{4}\int_0^{\pi}\cos\left(\theta\right)\,\sin\left(\theta\right)^3 d\theta\,A^2\,U^2=0$$

z 軸方向の力：F は上記の各項を合わせて、

$$F=F_{11}+F_{12}+F_{22}=-\frac{12\,\pi\,\mu\,\rho\,A^3\,U}{C_A^4}-\frac{24\,\pi\,\mu^2\,\rho\,A^3\,C_A}{\left(C_A-A\right)^4\left(C_A+A\right)^4} \tag{6.2.45}$$

(3)Bulter の球定理 (流れ関数) による

```
/* 球の外部にある二重わき出し（流れ関数）*/
kill(all);
assume(m>0);
assume(A>0);
assume(r>A);
assume(M[1]>0);
assume(C[A]>A);
assume(C[B]<A);
assume(r[A]>0);
assume(r[B]>0);
assume(cos(\theta)*C[B]<r);
assume(cos(\theta)<1 and cos(\theta)>0);
PSI01:\Psi[01]=r^2*sin(\theta)^2*U/2;
PSI02:\Psi[02]=(\mu*r^2*sin(\theta)^2)
  /(C[A]^2-2*r*cos(\theta)*C[A]+r^2)^(3/2);
PSI0:\Psi[0]=rhs(PSI01)+rhs(PSI02);
PSI11:\Psi[11]=-r/A*subst([r=A^2/r]
  ,rhs(PSI01));
PSI12:\Psi[12]=-r/A*subst([r=A^2/r]
  ,rhs(PSI02));
RCA1:C[A]^2-(2*cos(theta)*A^2*C[A])/r+A^4
  /r^2=C[A]^2/r^2*(r^2-(2*cos(theta)*A^2
  /C[A])*r+A^4);
PSI121:subst([RCA1],PSI12);
```

一様流の流れ関数：Ψ_{O1} は、(6.1.37) 式から、

$$\Psi_{O1} = \frac{r^2 \sin(\theta)^2 U}{2} \tag{6.2.46}$$

球の外部に置いた二重わき出しの流れ関数：Ψ_{O2} は、(6.1.45) 式から、

$$\Psi_{O2} = \frac{\mu r^2 \sin(\theta)^2}{\left(C_A^2 - 2 r \cos(\theta)\, C_A + r^2\right)^{\frac{3}{2}}} \tag{6.2.47}$$

一様流に球が存在することによる鏡像関係の流れ関数：Ψ_{11} は (6.1.65) 式から、

$$\Psi_{11} = -\frac{r\,\Psi_{01}\left(\frac{A^2}{r}, \theta\right)}{A} = -\frac{\sin(\theta)^2 A^3 U}{2 r} \tag{6.2.48}$$

二重わき出しがある流れに球が存在することによる鏡像関係の流れ関数：Ψ_{12} は同様の方法で下記となる。これは鏡像関係の二重わき出しが A^2/C_A の位置に強さ：$-\mu(A/C_A)^3$ の二重わき出しとなるを表している。これは当然であるが速度ポッテンシャルの結果と一致している。

$$\begin{aligned}\Psi_{12} &= -\frac{r\,\Psi_{02}\left(\frac{A^2}{r}, \theta\right)}{A} \\ &= -\frac{\mu r^2 \sin(\theta)^2 A^3}{\left(-\frac{2 r \cos(\theta) A^2}{C_A} + \frac{A^4}{C_A^2} + r^2\right)^{\frac{3}{2}} C_A^3}\end{aligned} \tag{6.2.49}$$

一様流球が存在する流れの流れ関数：Ψ_{31} は (6.2.46) 式および (6.2.48) 式から下記となる。

$$\Psi_{31} = \frac{r^2 \sin(\theta)^2 U}{2} - \frac{\sin(\theta)^2 A^3 U}{2 r}$$

二重わき出しがある流れの流れ関数：Ψ_{32} は (6.2.47) 式および (6.2.49) 式から下記となる。

$$\begin{aligned}\Psi_{32} =& \frac{\mu r^2 \sin(\theta)^2}{\left(C_A^2 - 2 r \cos(\theta)\, C_A + r^2\right)^{\frac{3}{2}}} \\ &- \frac{\mu r^2 \sin(\theta)^2 A^3}{\left(-\frac{2 r \cos(\theta) A^2}{C_A} + \frac{A^4}{C_A^2} + r^2\right)^{\frac{3}{2}} C_A^3}\end{aligned}$$

```
PSI31:\Psi[31]=rhs(PSI01)+rhs(PSI11);
PSI32:\Psi[32]=rhs(PSI02)+rhs(PSI121);
VR1:v[r1]=expand(diff(rhs(PSI31),\theta,1)
  /r^2/sin(\theta));
v[r1,r=A]=subst([r=A],rhs(VR1));
VR2:v[r2]=diff(rhs(PSI32),\theta,1)/r^2
  /sin(\theta);
v[r2,r=A]=subst([r=A],rhs(VR2));
factor(%);
VT1:v[t1]=expand(-(diff(rhs(PSI31),r,1)/r
  /sin(\theta)));
VT11:v[t1,r=A]=subst([r=A],rhs(VT1));
VT2:v[t2]=-(diff(rhs(PSI32),r,1)/r
  /sin(\theta));
VT21:v[t2,r=A]=factor(expand(factor(
  subst([r=A],rhs(%)))));
```

一様流中に球が存在する流れの r 方向の流速：v_{r1} は下記となり、球面：$r=A$ では零となる。

$$v_{r1} = \frac{\frac{d}{d\theta}\Psi_{31}}{r^2 \sin(\theta)} = \cos(\theta)\, U - \frac{\cos(\theta)\, A^3 U}{r^3} \tag{6.2.50}$$

$$v_{r1,r=A} = 0$$

二重わき出しがある流れの r 方向の流速：v_{r2} も球面：$r=A$ では零となる。

$$\begin{aligned}v_{r2} = \frac{\frac{d}{d\theta}\Psi_{32}}{r^3 \sin(\theta)} =& -\frac{2\mu \cos(\theta)\, A^3}{r^3\left(C_A^2 - \frac{2\cos(\theta) A^2 C_A}{r} + \frac{A^4}{r^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \\ &+ \frac{3\mu \sin(\theta)^2 A^5 C_A}{r^4\left(C_A^2 - \frac{2\cos(\theta) A^2 C_A}{r} + \frac{A^4}{r^2}\right)^{\frac{5}{2}}} \\ &+ \frac{2\mu \cos(\theta)}{\left(C_A^2 - 2 r \cos(\theta)\, C_A + r^2\right)^{\frac{3}{2}}} \\ &- \frac{3\mu r \sin(\theta)^2 C_A}{\left(C_A^2 - 2 r \cos(\theta)\, C_A + r^2\right)^{\frac{5}{2}}}\end{aligned}$$

$$v_{r2,r=A} = 0$$

一様流中に球が存在する流れの θ 方向の流速：v_{t1} とその球面上の流速は下記となる。

$$v_{t1}=-\frac{\frac{d}{d\,r}\,\Psi_{31}}{r\sin(\theta)}=-\frac{\sin(\theta)\;A^3\,U}{2\,r^3}-\sin(\theta)\;U$$

$$v_{t1,r=A}=-\frac{3\sin(\theta)\;U}{2}$$

二重わき出しがある流れの θ 方向の球面上の流速：v_{t2} は長い記述になるので省く。球面上の流速は下記となる。

$$v_{t2,r=A}=-\frac{3\,\mu\sin(\theta)\;(C_A-A)\;(C_A+A)}{\left(C_A^2-2\cos(\theta)\;A\,C_A+A^2\right)^{\frac{5}{2}}}$$

この結果は「Weiss の球定理 (速度ポテンシャル) による」の結果と一致している。

(4) 球に作用する力 (外部に特異点がある方法による)

6.1.13 節「外部に特異点がある物体に作用する力」（197 ページ）の方法で球に作用する力を求める。球に作用する力は下記の (6.1.67) 式から、

$$\overrightarrow{F_i}=4\pi\rho\mu_i\nabla\overrightarrow{v_{i0}} \qquad (6.2.51)$$

一様流中に球が存在する流れの z 軸上の速度変化：$\nabla\overrightarrow{v_{i0}}$ は、(6.2.50) 式から $\theta=0$ として、

$$\nabla v_{r1,\theta=0}=\frac{3\,A^3\,U}{r^4}$$

特異点上の速度変化：$\nabla\overrightarrow{v_{i0}}$ は、$r=C_A$ とおき、

$$\nabla v_{r1,\theta=0,r=C_A}=\frac{3\,A^3\,U}{C_A^4}$$

二重わき出しの鏡像関係の流れの z 軸上の速度：v_{r2} は、(6.2.49) 式から、

$$\begin{aligned}v_{r2}=&-\frac{2\,\mu\sin(\theta)}{\left(C_A^2-2\,r\cos(\theta)\;C_A+r^2\right)^{\frac{3}{2}}}+\frac{3\,\mu\,r\sin(\theta)\;(2\,r-2\cos(\theta)\;C_A)}{2\left(C_A^2-2\,r\cos(\theta)\;C_A+r^2\right)^{\frac{5}{2}}}\\&+\frac{2\,\mu\sin(\theta)\,A^3}{\left(-\frac{2\,r\cos(\theta)\,A^2}{C_A}+\frac{A^4}{C_A^2}+r^2\right)^{\frac{3}{2}}C_A^3}-\frac{3\,\mu\,r\sin(\theta)\,A^3\left(2\,r-\frac{2\cos(\theta)\,A^2}{C_A}\right)}{2\left(-\frac{2\,r\cos(\theta)\,A^2}{C_A}+\frac{A^4}{C_A^2}+r^2\right)^{\frac{5}{2}}C_A^3}\end{aligned}$$

速度変化：$\nabla\overrightarrow{v_{i0}}$ は、上式を r で微分し、$\theta=0$ として、

$$\nabla v_{r2,\theta=0}=\frac{6\,\mu\,A^3}{r^4\left(C_A^2-\frac{2\,A^2\,C_A}{r}+\frac{A^4}{r^2}\right)^{\frac{3}{2}}}+\frac{3\,\mu\,A^3\left(\frac{2\,A^2\,C_A}{r^2}-\frac{2\,A^4}{r^3}\right)}{r^3\left(C_A^2-\frac{2\,A^2\,C_A}{r}+\frac{A^4}{r^2}\right)^{\frac{5}{2}}}$$

特異点上の速度変化：$\nabla\overrightarrow{v_{i0}}$ は、$r=C_A$ とおき、

$$\nabla v_{r2,\theta=0,r=C_A}=\frac{6\,\mu\,A^3\,C_A}{(C_A-A)^4\,(C_A+A)^4}$$

以上から球に作用する力は、(6.2.51) 式から、

$$F=-4\,\pi\,\mu\,\rho\left(\frac{3\,A^3\,U}{C_A^4}+\frac{6\,\mu\,A^3\,C_A}{(C_A-A)^4\,(C_A+A)^4}\right)$$

これは Weiss の球定理から求めた圧力の積分による結果：(6.2.44) 式と一致している。

```
/* 球に作用する力 */
subst([\theta=0],rhs(VR1));
dv[r1,\theta=0]=diff(%,r,1);
DVR1:dv[r1,\theta=0,r=C[A]]=subst([r=C[A]],
  rhs(%));
'diff(rhs(PSI12),\theta,1)/r^2/sin(\theta);
expand(ev(%,diff));
subst([\theta=0],%);
dv[r2,\theta=0]=diff(%,r,1);
DVR2:factor(dv[r2,\theta=0,r=C[A]]=subst(
  [r=C[A]],rhs(%)));
CA41:C[A]^4=(C[A]^2-A^2)^2-(-2*A^2*C[A]^2
  +A^4);
DVR21:factor(subst([CA41],DVR2));
F=4*%pi*\rho*\mu*(rhs(DVR1)+rhs(DVR21));
```

例題 6.2.8　一定速度で向かいあう２つの球の相互干渉

z 軸方向に一定速度で向かい合う２つの球に作用する付加質量を求め [1]。騎 B 半径 : A の球 : A を原点に置き、z 軸の方向に速度 : U で動いている。また、半径 : B の球 : B を原点から L の位置に置き、z 軸と反対方向、球 : A に向かいあう速度 : V で動いている。球の中心間の距離 : L とし、球の半径に比べ十分長い : $A/L << 1, B/L << 1$ ものとする。

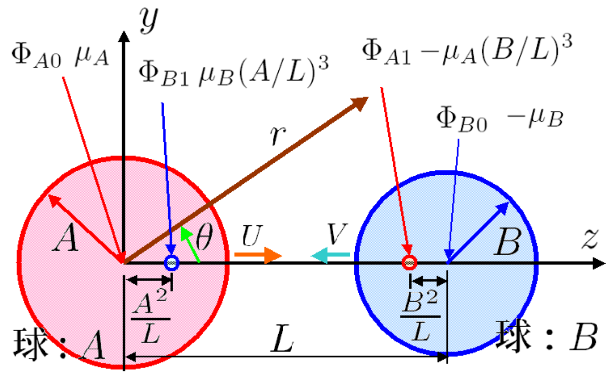


図 6.2.10: 一定速度で向かいあう２つの球の相互干渉

```
/* 球の相互干渉（ｚ軸上） */
kill(all);
load("vect")
depends(\Phi,[r,\theta,n]);
assume(A>0);
assume(B>0);
assume(r>0);
assume(r>A);
assume(C[A]>A);
assume(C[A]>0);
assume(L>0);
PHI0:\Phi=\mu*(C[A]-r*cos(\theta))/(C[A]^2
  -2*r*cos(\theta)*C[A]+r^2)^(3/2);
PHIA0:\Phi[A0]=subst([C[A]=0,\mu=\mu[A]]
  ,rhs(PHI0));
PHIB0:\Phi[B0]=subst([C[A]=L,\mu=-\mu[B]]
  ,rhs(PHI0));
PHIA1:\Phi[A1]=subst([C[A]=L-B^2/L,\mu=
  -\mu[A]*(B/L)^3],rhs(PHI0));
PHIB1:\Phi[B1]=subst([C[A]=A^2/L,\mu=
  +\mu[B]*(A/L)^3],rhs(PHI0));
PHIA2:\Phi[A2]=subst([C[A]=A^2/(L-B^2/L),
 \mu=\mu[A]*(B/L)^3*(A/(L-B^2/L))^3],
 rhs(PHI0));
```

[1] L.M.Milne-Thomson : Theretical Hydrodynamics, Fourth Edition, Chapter 16 Spheres and Ellipsoids, 16.30 Two spheres moving in the line of centres, P.501 [15)]

```
PHIB2:\Phi[B2]=subst([C[A]=B^2/(L-A^2/L),
 \mu=-\mu[B]*(A/L)^3*(B/(L-A^2/L))^3],
 rhs(PHI0));
MA1:\mu[A]=A^3*U/2;
MB1:\mu[B]=B^3*V/2;
```

原点から離れた位置にある二重わき出しの速度ポテンシャルは (6.1.48) 式、(193 ページ) から下記となる。

$$\Phi = \frac{\mu\ (C_A - r\cos(\theta))}{(C_A^2 - 2\,r\cos(\theta)\ C_A + r^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{6.2.52}$$

球 : A の二重わき出しの速度ポテンシャル : Φ_{A0} は原点にわき出し強さ : μ_A を、球 : B の二重わき出しの速度ポテンシャル : Φ_{B0} は原点から距離 : L にわき出し強さ : $-\mu_B$ を置き、上式から、

$$\Phi_{A0} = -\frac{\cos(\theta)\ \mu_A}{r^2} \tag{6.2.53}$$

$$\Phi_{B0} = -\frac{\mu_B\ (L - r\cos(\theta))}{(L^2 - 2\,r\cos(\theta)\ L + r^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{6.2.54}$$

球 : A の鏡像関係の二重わき出し位置は球 : B の中となり、位置およびわき出し強さは (6.2.39) 式、(216 ページ) から、二重わき出しが $L - \frac{B^2}{L}$ の位置に強さ : $-\mu_A(B/L)^3$ となり、速度ポテンシャル : Φ_{A1} は次式となる。

$$\Phi_{A1} = -\frac{\mu_A\, B^3\left(L - \frac{B^2}{L} - r\cos(\theta)\right)}{L^3\left(\left(L - \frac{B^2}{L}\right)^2 - 2\,r\cos(\theta)\ \left(L - \frac{B^2}{L}\right) + r^2\right)^{\frac{3}{2}}} \tag{6.2.55}$$

球 : B の鏡像関係の二重わき出し位置は球 : A の中となり、位置およびわき出し強さ上記と同様にして二重わき出しが $\frac{A^2}{L}$ の位置に強さ : $\mu_B(A/L)^3$ となり、速度ポテンシャル : Φ_{B1} は次式となる。

$$\Phi_{B1} = \frac{A^3\,\mu_B\left(\frac{A^2}{L} - r\cos(\theta)\right)}{\left(-\frac{2\,r\cos(\theta)\,A^2}{L} + \frac{A^4}{L^2} + r^2\right)^{\frac{3}{2}} L^3} \tag{6.2.56}$$

ここで、

$$\mu_A = \frac{A^3\,U}{2}, \quad \mu_B = \frac{B^3\,V}{2} \tag{6.2.57}$$

更に１次の鏡像関係の二重わき出しの球に対する２次の鏡像関係の二重わき出し強さは約 $\mu_B(A/L)^3(B/L)^3$ となり無視できるので、ここでは球に対する１次の鏡像関係までを考慮することとする。上記の二重わき出しの位置関係を図 6.2.10 に示す。運動エネルギーは次式で得られる。

$$T = -\frac{\rho}{2}\int \Phi\left(\frac{d}{d\,n}\Phi\right)\ dS$$

ここで、

$$\Phi = \Phi_A + \Phi_B, \quad \Phi_A = \Phi_{A0} + \Phi_{A1}, \quad \Phi_B = \Phi_{B0} + \Phi_{B1}$$

上式から運動エネルギーは、

$$
\begin{aligned}
T =& -\frac{\rho}{2}\int_{A+B}\left(\Phi_A+\Phi_B\right)\left(\frac{d}{d\,n}\,\Phi_A+\frac{d}{d\,n}\,\Phi_B\right)\,dS\\
=& -\frac{\rho}{2}\int_{A}\left(\Phi_A+\Phi_B\right)\left(\frac{d}{d\,n}\,\Phi_A\right)\,dS\\
&-\frac{\rho}{2}\int_{A}\left(\Phi_A+\Phi_B\right)\left(\frac{d}{d\,n}\,\Phi_B\right)\,dS\\
&-\frac{\rho}{2}\int_{B}\left(\Phi_A+\Phi_B\right)\left(\frac{d}{d\,n}\,\Phi_A\right)\,dS\\
&-\frac{\rho}{2}\int_{B}\left(\Phi_A+\Phi_B\right)\left(\frac{d}{d\,n}\,\Phi_B\right)\,dS
\end{aligned}
$$

ここで球面：A では Φ_{B0} と Φ_{B1} は鏡像関係にあり $\frac{d}{d\,n}\,\Phi_B=0$ となる。また、球面：B では Φ_{A0} と Φ_{A1} は鏡像関係にあり $\frac{d}{d\,n}\,\Phi_A=0$ となる。これにより、

$$
\begin{aligned}
T =& -\frac{\rho}{2}\int_{A}\left(\Phi_A+\Phi_B\right)\left(\frac{d}{d\,n}\,\Phi_A\right)\,dS\\
&-\frac{\rho}{2}\int_{B}\left(\Phi_A+\Phi_B\right)\left(\frac{d}{d\,n}\,\Phi_B\right)\,dS
\end{aligned}
\tag{6.2.58}
$$

下記では、まず積分：A について検討する。

```
/* 運動量 */
PHIA:\Phi[A]=rhs(PHIA0)+rhs(PHIA1);
subst([r=A],diff(rhs(PHIA),r,1));
PHADN:last(%);
PHIA01:subst([r=A],rhs(PHIA0));
RB1:L^2-2*cos(\theta)*A*L+A^2=L^2*(1-2
  *cos(\theta)*A/L+A^2/L^2);
subst([r=A],rhs(PHIB0));
PHIB011:subst([RB1],%);
```

```
subst([A=a*L],denom(PHIB011));
taylor(1/%,a,0,3);
num(PHIB011)*%;
subst([a=A/L],%);
PHIB01:expand(%);
PHIA12:subst([r=A],rhs(PHIA1));
assume((L-B^2/L)>0);
assume((L^2-B^2)>0);
RB2:(L-B^2/L)^2-2*cos(\theta)*A*(L-B^2/L)
  +A^2=(L-B^2/L)^2*(1-2*cos(\theta)*A
  /(L-B^2/L)+A^2/(L-B^2/L)^2);
PHIA123:subst([RB2],PHIA12);
subst([A=a*(L-B^2/L)],denom(PHIA123));
taylor(1/%,a,0,3);
num(PHIA123)*%;
subst([a=A/(L-B^2/L)],%);
PHIA11:expand(%);
PHIB12:subst([r=A],rhs(PHIB1));
RB3:-(2*cos(\theta)*A^3)/L+A^4/L^2+A^2=A^2
  *(-2*cos(\theta)*A/L+A^2/L^2+1);
PHIB123:subst([RB3],PHIB12);
subst([A=a*L],denom(PHIB123));
taylor(1/%,a,0,3);
num(PHIB123)*%;
subst([a=A/L],%);
PHIB11:expand(%);
```

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{d}{d\,n}\,\Phi_A\right|_{r=A}=\left.\frac{d}{d\,r}\,\Phi_A\right|_{r=A}=&\frac{\cos(\theta)\;\mu_A\,B^3}{L^3\left(\left(L-\frac{B^2}{L}\right)^2-2\cos(\theta)\;A\,\left(L-\frac{B^2}{L}\right)+A^2\right)^{\frac{3}{2}}}\\
&+\frac{3\,\mu_A\,B^3\,\left(L-\frac{B^2}{L}-\cos(\theta)\;A\right)\,\left(2\,A-2\cos(\theta)\,\left(L-\frac{B^2}{L}\right)\right)}{2\,L^3\left(\left(L-\frac{B^2}{L}\right)^2-2\cos(\theta)\;A\,\left(L-\frac{B^2}{L}\right)+A^2\right)^{\frac{5}{2}}}+\frac{2\cos(\theta)\;\mu_A}{A^3}+\ldots
\end{aligned}
$$

$B/L<<1$ で、高次の微少項を省略して、

$$
\left.\frac{d}{d\,n}\,\Phi_A\right|_{r=A}=\frac{2\cos(\theta)\;\mu_A}{A^3}
\tag{6.2.59}
$$

球面 A 上：$r=A$ における球：A の速度ポテンシャル：Φ_{A0} は下記で与えられる。

$$
\Phi_{A0}=-\frac{\cos(\theta)\;\mu_A}{A^2}
\tag{6.2.60}
$$

球面 A 上：$r=A$ における球 B の速度ポッテンシャル：Φ_{B0} は、$A/L<<1$ として、Taylor 展開し、高次項を省

略すると、

$$\begin{aligned}\Phi_{B0} =& -\frac{\mu_B\ (L-\cos(\theta)\ A)}{(L^2-2\cos(\theta)\ A\,L+A^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{\mu_B\ (L-\cos(\theta)\ A)}{\left(-\frac{2\cos(\theta)\,A}{L}+\frac{A^2}{L^2}+1\right)^{\frac{3}{2}} L^3} \\ \approx& -\frac{\mu_B}{L^2} - \frac{2\cos(\theta)\ A\,\mu_B}{L^3} - \frac{9\cos(\theta)^2\,A^2\,\mu_B}{2\,L^4} + \frac{3\,A^2\,\mu_B}{2\,L^4} \\ & - \frac{10\cos(\theta)^3\,A^3\,\mu_B}{L^5} + \frac{6\cos(\theta)\ A^3\,\mu_B}{L^5} + \frac{35\cos(\theta)^4\,A^4\,\mu_B}{2\,L^6} - \frac{15\cos(\theta)^2\,A^4\,\mu_B}{2\,L^6} + \dots\end{aligned} \tag{6.2.61}$$

球面 A 上：$r=A$ における球 B の中にある球 A の鏡像関係の速度ポッテンシャル：Φ_{A1} は、

$$\Phi_{A1} = -\frac{\mu_A\,B^3\,\left(L-\frac{B^2}{L}-\cos(\theta)\ A\right)}{L^3\left(\left(L-\frac{B^2}{L}\right)^2-2\cos(\theta)\ A\ \left(L-\frac{B^2}{L}\right)+A^2\right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\mu_A\,B^3\,\left(L-\frac{B^2}{L}-\cos(\theta)\ A\right)}{L^3\left(L-\frac{B^2}{L}\right)^3\left(-\frac{2\cos(\theta)\,A}{L-\frac{B^2}{L}}+\frac{A^2}{\left(L-\frac{B^2}{L}\right)^2}+1\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$A^2/\left(L-\frac{B^2}{L}\right) << 1$ として、Taylor 展開し、高次項を省略すると、

$$\begin{aligned}\Phi_{B1} \approx& \frac{3\cos(\theta)\ A\,\mu_A\,B^3\,L^2}{-L^8+4\,B^2\,L^6-6\,B^4\,L^4+4\,B^6\,L^2-B^8} - \frac{3\cos(\theta)^2\,A^2\,\mu_A\,B^3\,L}{-L^8+4\,B^2\,L^6-6\,B^4\,L^4+4\,B^6\,L^2-B^8} \\ & - \frac{3\cos(\theta)\ A\,\mu_A\,B^5}{-L^8+4\,B^2\,L^6-6\,B^4\,L^4+4\,B^6\,L^2-B^8} + \frac{\mu_A\,B^3\,L^2}{-L^7+3\,B^2\,L^5-3\,B^4\,L^3+B^6\,L} \\ & - \frac{\cos(\theta)\ A\,\mu_A\,B^3\,L}{-L^7+3\,B^2\,L^5-3\,B^4\,L^3+B^6\,L} - \frac{\mu_A\,B^5}{-L^7+3\,B^2\,L^5-3\,B^4\,L^3+B^6\,L} + \dots\end{aligned} \tag{6.2.62}$$

球面 A 上：$r=A$ における球 A の中にある球 B の鏡像関係の速度ポッテンシャル：Φ_{B1} は、$A^2/L << 1$ して、Taylor 展開し、高次項を省略すると、

$$\begin{aligned}\Phi_{B1} =& \frac{A^3\,\mu_B\,\left(\frac{A^2}{L}-\cos(\theta)\ A\right)}{\left(-\frac{2\cos(\theta)\,A^3}{L}+\frac{A^4}{L^2}+A^2\right)^{\frac{3}{2}} L^3} = \frac{\mu_B\,\left(\frac{A^2}{L}-\cos(\theta)\ A\right)}{\left(-\frac{2\cos(\theta)\,A}{L}+\frac{A^2}{L^2}+1\right)^{\frac{3}{2}} L^3} \\ \approx& -\frac{\cos(\theta)\ A\,\mu_B}{L^3} - \frac{3\cos(\theta)^2\,A^2\,\mu_B}{L^4} + \frac{A^2\,\mu_B}{L^4} + \frac{3\cos(\theta)\ A^3\,\mu_B}{L^5} + \dots\end{aligned} \tag{6.2.63}$$

(6.2.58) 式の A における積分を (6.2.59) 式〜(6.2.63) 式を代入して下記を得る。

$$\begin{aligned}T_{AA0} =& -\frac{\rho}{2}\int_A \Phi_{A0}\,\left(\frac{d}{d\,n}\,\Phi_A\right)\ dS \\ =& -\frac{\rho}{2}\int_0^\pi \Phi_{A0}\,\left(\frac{d}{d\,n}\,\Phi_A\right)\,2\pi A^2 sin(\theta)\,d\theta \\ =& \frac{4\,\pi\,\rho\,\mu_A^2}{3\,A^3} = \frac{\pi\,\rho\,A^3\,U^2}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}T_{AA1} =& -\frac{\rho}{2}\int_A \Phi_{A1}\,\left(\frac{d}{d\,n}\,\Phi_A\right)\ dS \\ =& \frac{2\,\pi\,\rho\,A^6\,B^3\,U^2}{3\,(L-B)^3\,(L+B)^3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}T_{AB0} =& -\frac{\rho}{2}\int_A \Phi_{B0}\,\left(\frac{d}{d\,n}\,\Phi_A\right)\ dS \\ =& \frac{2\,\pi\,\rho\,A^3\,B^3\,U\,V}{3\,L^3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}T_{AB1} =& -\frac{\rho}{2}\int_A \Phi_{B1}\,\left(\frac{d}{d\,n}\,\Phi_A\right)\ dS \\ =& \frac{\pi\,\rho\,A^3\,B^3\,\left(L^4-3\,A^4\right)\,U\,V}{3\,L^7} \\ =& \frac{\pi\,\rho\,A^3\,B^3\,U\,V}{3\,L^3}\end{aligned}$$

```
-\rho/2*'integrate((PHIA01)*PHADN*2
  *%pi*A*sin(\theta)*A,\theta,0,%pi);
ev(%,integrate);
TIA1:subst([MA1],%);
T[AA1]=-\rho/2*'integrate((PHIA11)*PHADN*2
  *%pi*A*sin(\theta)*A,\theta,0,%pi);
ev(%,integrate);
TIA2:factor(subst([MA1],%));
T[AB0]=-\rho/2*'integrate((PHIB01)*PHADN*2
  *%pi*A*sin(\theta)*A,\theta,0,%pi);
ev(%,integrate);
TIA3:factor(subst([MA1,MB1],%));
T[AB1]=-\rho/2*'integrate((PHIB11)*PHADN*2
  *%pi*A*sin(\theta)*A,\theta,0,%pi);
ev(%,integrate);
TIA4:factor(subst([MA1,MB1],%));
subst([A^4=0],%);
T=expand(rhs(TIA1)+rhs(TIA2)+rhs(TIA3)
  +rhs(TIA4));
TIA0:subst([A^7=0,A^6=0],%);
T=rhs(TIA1)+first(rhs(TIA0))*2+subst([A=B,
  U=V],rhs(TIA1));
TIA01:T=expand(subst([B=A,V=U,L=2*H],
  rhs(%))/2);
MAS1:1/2*M*U^2=rhs(TIA01);
MAS2:\Delta=\rho*4/3*%pi*A^3;
MAS3:solve(MAS2,\rho)[1];
solve(MAS1,M)[1];
subst([MAS3],%);
```

上記の積分結果の総和は、高次の微少項を省略すると、

$$T_{AA0}+T_{AA1}+T_{AB0}+T_{AB1}=\frac{\pi\,\rho\,A^3\,B^3\,U\,V}{L^3}+\frac{\pi\,\rho\,A^3\,U^2}{3}$$

球 B の積分を上式の $A\to B, B\to A, U\to V, V\to U$ の置き換えを行って求め、球 A と球 B による総運動エネルギーは、

$$T=\frac{\pi\,\rho\,B^3\,V^2}{3}+\frac{2\,\pi\,\rho\,A^3\,B^3\,U\,V}{L^3}+\frac{\pi\,\rho\,A^3\,U^2}{3}$$

球 A が壁までの距離：H とし、壁に向かって速度：U で動く球の運動エネルギーは、上式から

$$T=\frac{\pi\,\rho\,A^6\,U^2}{8\,H^3}+\frac{\pi\,\rho\,A^3\,U^2}{3}$$

上式の運動エネルギーと付加質量：M の関係は、

$$\frac{M\,U^2}{2}=\frac{\pi\,\rho\,A^6\,U^2}{8\,H^3}+\frac{\pi\,\rho\,A^3\,U^2}{3}$$

付加質量:M は球の流体排出相当質量:Δ で表現すると、

$$M=\frac{3\,\Delta\,A^3}{16\,H^3}+\frac{\Delta}{2}$$

上記の左辺第二項は球単体の付加質量項を表し、左辺第一項は壁と球の干渉項である。

例題 6.2.9　一定速度で平行して動く２つの球の相互干渉

z 軸方向に一定速度で平行して動く２つの球に作用する付加質量を求める [1]。半径：A の球：A を原点に置き、z 軸の方向に速度：U で動いている。また、半径：B の球：B を原点から y 軸上の L の位置に置き球：A と同じ方向の速度：V で動いている。球の中心間の距離：L とし、球の半径に比べ十分長い $(A/L << 1, B/L << 1)$ ものとする。

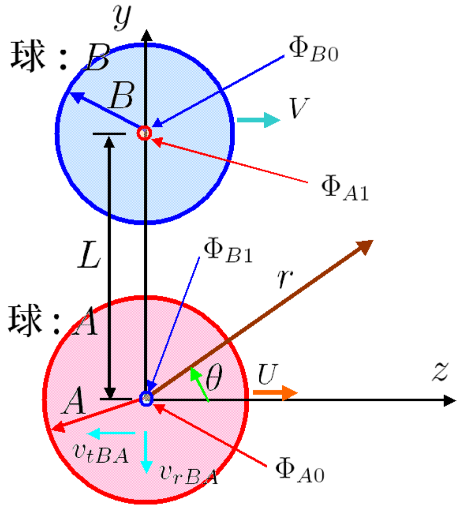


図 6.2.11: 一定速度で平行して動く２つの球の相互干渉

```
/* 球の相互干渉（y 軸上） */
kill(all);
load("vect")
depends(\Phi,[r,\theta,n]);
assume(A>0);
assume(r>0);
assume(r>A);
assume(r[A]>0);
assume(r[B]>0);
assume(L>0);
assume(cos(\theta)<1 and cos(\theta)>0);
assume(cos(\theta-a)<1 and
 cos(\theta-a)>0);
assume(sin(\theta)<1 and sin(\theta)>0);
PHI0:\Phi=(\mu*(C[A]-r*cos(\theta)))/
 (C[A]^2-2*r*cos(\theta)*C[A]+r^2)^(3/2);
PHIA0:\Phi[A0]=subst([C[A]=0,\mu=\mu[A]]
  ,rhs(PHI0));
MA0:\mu[A]=A^3*U/2;
MB0:\mu[B]=B^3*V/2;
```

原点から離れた位置にある二重わき出しの速度ポッテンシャルは (6.1.48) 式、(193 ページ) から下記となる。

$$\Phi = \frac{\mu\,(C_A - r\cos(\theta))}{(C_A^2 - 2\,r\cos(\theta)\,C_A + r^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{6.2.64}$$

ここで球：A の二重わき出し強さ：μ_A、球：B の二重わき出し強さ：μ_B は (6.2.9) 式から下記となる。

$$\mu_A = \frac{A^3\,U}{2}, \quad \mu_B = \frac{B^3\,V}{2} \tag{6.2.65}$$

```
/* 球 A 上の速度ポテンシャル */
/* 球 A 上の二重わき出し：A の速度ポテンシャル */
PHIA00:\Phi[A0]=rhs(PHIA0);
PHIA01:\Phi[A0]=subst([r=A],rhs(PHIA00));
/* 球 A 上の二重わき出し：B の速度ポテンシャル */
PHIB00:subst([\Phi[A0]=\Phi[B0],\mu[A]=
  \mu[B],r=r[B],\theta=\theta[B]],PHIA00);
r[B]^2=(L-A*sin(\theta)*sin(\phi))^2+(A*
 sin(\theta)*cos(\phi))^2+(A*cos(\theta))
 ^2;
trigsimp(%);
RB1:r[B]=sqrt(rhs(%));
COSB1:cos(\theta[B])=A*cos(\theta)/r[B];
COSB2:subst([RB1],COSB1);
L^2-2*sin(phi)*sin(theta)*A*L+A^2=L^2*(1
  -2*sin(phi)*sin(theta)*A/L+A^2/L^2);
PHIB02:subst([COSB1,RB1,%],PHIB00);
subst([A=a*L],denom(rhs(%)));
taylor(1/%,a,0,3);
subst([a=A/L],%);
PHIB01:lhs(PHIB02)=expand(num(rhs(PHIB02))
 *%);
```

球面 A 上：$r = A$ における球：A の二重わき出しの速度ポテンシャル：Φ_{A0} は原点にわき出し強さ：μ_A をを置き (6.2.64) 式から、

$$\Phi_{A0} = -\frac{\cos(\theta)\,\mu_A}{A^2} \tag{6.2.66}$$

球面 A 上：$r = A$ における球：B の二重わき出しの速度ポテンシャル：Φ_{B0} は原点から y 軸上の L の位置に置きわき出し強さ：μ_B とすると一般的な二重吹き出しの速度ポテンシャルは、

$$\Phi_{B0} = -\frac{\mu_B\cos(\theta_B)}{r_B^2}$$

ここでは球：A と球：B を z 軸を回転対称軸として解くことはできない。そこで、球：B の中心を基準とした上記速度ポッテンシャルを球：A の中心である原点座標で表現する。球面：A 上の点を A, θ, ϕ で表現すると球面上に点と球：B の中心との距離：r_B は、

$$r_B^2 = (L - \sin(\phi)\sin(\theta)\ A)^2 + \cos(\phi)^2\sin(\theta)^2 A^2 + \cos(\theta)^2 A^2$$

[1] L.M.Milne-Thomson : Theretical Hydrodynamics, Fourth Edition, Chapter 16 Spheres and Ellipsoids, 16.40 Two spheres moving at right angles to the line of centres, P.504 [15)]

$$r_B = \sqrt{L^2 - 2\sin(\phi)\sin(\theta)\ A\,L + A^2}$$

また、$\cos(\theta_B)$ は、

$$\cos(\theta_B) = \frac{\cos(\theta)\ A}{r_B}$$

これを上式に代入し、$A/L << 1$ として、Taylor 展開し、高次項を省略すると、

$$\begin{aligned}
\Phi_{B0} =& -\frac{\cos(\theta)\ A\,\mu_B}{\left(-\frac{2\sin(\phi)\sin(\theta)\,A}{L} + \frac{A^2}{L^2} + 1\right)^{\frac{3}{2}} L^3} \\
\approx& -\frac{\cos(\theta)\ A\,\mu_B}{L^3} - \frac{3\sin(\phi)\ \cos(\theta)\ \sin(\theta)\ A^2\,\mu_B}{L^4} \\
& - \frac{15\sin(\phi)^2\cos(\theta)\ \sin(\theta)^2\ A^3\,\mu_B}{2\,L^5} \\
& + \frac{3\cos(\theta)\ A^3\,\mu_B}{2\,L^5} \\
& - \frac{35\sin(\phi)^3\cos(\theta)\ \sin(\theta)^3\ A^4\,\mu_B}{2\,L^6} \\
& + \frac{15\sin(\phi)\ \cos(\theta)\ \sin(\theta)\ A^4\,\mu_B}{2\,L^6}
\end{aligned} \tag{6.2.67}$$

```
/* 球 A 上の二重わき出し：B の鏡像速度ポテンシャル */
VRB1:v[rB]=diff(rhs(PHIB00),r[B],1);
VTB1:v[tB]=diff(rhs(PHIB00),\theta[B],1)
  /r[B];
VPB1:v[pB]=diff(rhs(PHIB00),\phi,1)/r[B]
  /sin(\theta[B]);
VRB2:v[rBA]=subst([r[B]=L*(1+a),\theta[B]
  =%pi/2+b],rhs(VRB1));
taylor(rhs(VRB2),a,0,3);
taylor(%,b,0,3);
VRB3:v[rBA]=expand(%);
VTB2:v[tBA]=subst([r[B]=L*(1+a),\theta[B]
  =%pi/2+b],rhs(VTB1));
taylor(rhs(VTB2),a,0,3);
taylor(%,b,0,3);
VTB3:v[tBA]=expand(%);
VTB4:v[tBA]=last(rhs(VTB3));
subst([MB0],%);
MB1:subst([\mu[A]=\mu[B1],U=rhs(%)],MA0);
MA1:subst([V=U,\mu[B1]=\mu[A1]],MB1);
PHIB11:\Phi[B1]=subst([\mu[A]=\mu[B1]]
  ,rhs(PHIA01));
```

ここでは球：A と球：B を z 軸を回転対称軸として解くことはできない。このため前節で使用した鏡像関係は扱えない。そこでまず球：B による球：A 近傍の流れを下記に示す。ここで r 方向の流速：v_{rB}、θ 方向の流速：v_{tB}、ϕ 方向の流速：v_{pB} とする。

$$v_{rB} = \frac{2\,\mu_B\cos(\theta_B)}{r_B^3}, \quad v_{tB} = \frac{\mu_B\sin(\theta_B)}{r_B^3}, \quad v_{pB} = 0 \tag{6.2.68}$$

$A << L$ とし、球：A、球：B は y 軸上にあるので、下記の微小パラメター：a, b を導入できる。

$$r_B = L\,(a+1), \quad \theta_B = b + \frac{\pi}{2}$$

球：B による球：A 近傍の流れ：v_{rB}, v_{tB} を a, b で Taylor 展開すると、

$$\begin{aligned}
v_{rBA} =& -\frac{2\sin(b)\ \mu_B}{(a+1)^3\,L^3} \\
\approx& -\frac{10\,a^3\,b^3\,\mu_B}{3\,L^3} + \frac{2\,a^2\,b^3\,\mu_B}{L^3} - \frac{a\,b^3\,\mu_B}{L^3} + \frac{b^3\,\mu_B}{3\,L^3} \\
& + \frac{20\,a^3\,b\,\mu_B}{L^3} - \frac{12\,a^2\,b\,\mu_B}{L^3} + \frac{6\,a\,b\,\mu_B}{L^3} - \frac{2\,b\,\mu_B}{L^3} \\
\approx& -\frac{2\,b\,\mu_B}{L^3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_{tBA} =& \frac{\cos(b)\ \mu_B}{(a+1)^3\,L^3} \\
\approx& \frac{5\,a^3\,b^2\,\mu_B}{L^3} - \frac{3\,a^2\,b^2\,\mu_B}{L^3} + \frac{3\,a\,b^2\,\mu_B}{2\,L^3} - \frac{b^2\,\mu_B}{2\,L^3} \\
& - \frac{10\,a^3\,\mu_B}{L^3} + \frac{6\,a^2\,\mu_B}{L^3} - \frac{3\,a\,\mu_B}{L^3} + \frac{\mu_B}{L^3} \\
\approx& \frac{\mu_B}{L^3}
\end{aligned}$$

以上から球：A の近傍では、$v_{rB} << v_{tB}$ であることがわかる。そこで v_{tB} のみを考慮することとし、球：A の中心：原点に下記に示す二重わき出し (強さ：μ_{B1}) を置くことで球：B の球：A に対する影響を取り除ける。

$$v_{tBA} = \frac{B^3\,V}{2\,L^3}$$

球：A の球：B に対する影響も同様に求めることができ、それぞれの二重吹き出しの強さは下記となる。

$$\mu_{B1} = \frac{A^3\,B^3\,V}{4\,L^3}, \quad \mu_{A1} = \frac{A^3\,B^3\,U}{4\,L^3} \tag{6.2.69}$$

以上から、球：B に対して球：A の境界を保つ速度ポッテンシャルは下記となる。

$$\Phi_{B1} = -\frac{\cos(\theta)\ \mu_{B1}}{A^2}$$

球：A に対して球：B の境界を保つ速度ポッテンシャルは球：B の中心に置いた二重わきだし（強さ：μ_{A1}）で得られている。これによる球面：A 上の速度ポッテンシャルは (6.2.67) 式で $\mu_B \to \mu_{A1}$ に置き換えることで得られ下記となる。

$$\Phi_{A1} \approx -\frac{\cos(\theta)\ A\,\mu_{A1}}{L^3}$$

これを Φ_{A0} と比較すると、下記となり

$$\frac{\Phi_{A1}}{\Phi_{A0}} = \frac{A^3 B^3}{2L^6} \approx 0$$

Φ_{A1} は

$$\Phi_{A1} \approx 0 \tag{6.2.70}$$

運動エネルギーは次式で得られる。

$$T = -\frac{\rho}{2} \int \Phi \left(\frac{d}{d\,n}\,\Phi \right)\, dS$$

ここで、

$$\Phi = \Phi_A + \Phi_B, \quad \Phi_A = \Phi_{A0} + \Phi_{A1}, \quad \Phi_B = \Phi_{B0} + \Phi_{B1}$$

上式から運動エネルギーは、

$$\begin{aligned} T &= -\frac{\rho}{2} \int_{A+B} (\Phi_A + \Phi_B) \left(\frac{d}{d\,n}\,\Phi_A + \frac{d}{d\,n}\,\Phi_B \right)\, dS \\ &= -\frac{\rho}{2} \int_A (\Phi_A + \Phi_B) \left(\frac{d}{d\,n}\,\Phi_A \right)\, dS \\ &\quad -\frac{\rho}{2} \int_A (\Phi_A + \Phi_B) \left(\frac{d}{d\,n}\,\Phi_B \right)\, dS \\ &\quad -\frac{\rho}{2} \int_B (\Phi_A + \Phi_B) \left(\frac{d}{d\,n}\,\Phi_A \right)\, dS \\ &\quad -\frac{\rho}{2} \int_B (\Phi_A + \Phi_B) \left(\frac{d}{d\,n}\,\Phi_B \right)\, dS \end{aligned}$$

ここで球面 : A では Φ_{B0} と Φ_{B1} は球面 : A の境界を保つように決めたので $\frac{d}{d\,n}\,\Phi_B = 0$ となる。また、球面 : B では Φ_{A0} と Φ_{A1} も球面 : B の境界を保つように決めたので $\frac{d}{d\,n}\,\Phi_A = 0$ となる。これにより、

$$\begin{aligned} T = &-\frac{\rho}{2} \int_A (\Phi_A + \Phi_B) \left(\frac{d}{d\,n}\,\Phi_A \right)\, dS \\ &-\frac{\rho}{2} \int_B (\Phi_A + \Phi_B) \left(\frac{d}{d\,n}\,\Phi_B \right)\, dS \end{aligned}$$

下記では、まず球面 : A の積分について検討する。

```
PHADN:subst([r=A],diff(rhs(PHIA0),r,1));
expand(-\rho/2*integrate(rhs(PHIA01)*A
  *sin(\theta)*PHADN,\phi,0,%pi*2));
expand(integrate(%*A,\theta,0,%pi));
TA0A:T[A0A]=subst([MA0,MB0],%);
expand(-\rho/2*integrate(rhs(PHIB01)*A
  *sin(\theta)*PHADN,\phi,0,2*%pi));
expand(integrate(%*A,\theta,0,%pi));
TB0A:T[B0A]=subst([MA0,MB0],%);
expand(-\rho/2*integrate(rhs(PHIB11)*A
  *sin(\theta)*PHADN,\phi,0,%pi*2));
expand(integrate(%*A,\theta,0,%pi));
```

```
TB1A:T[B1A]=subst([MA1,MB1,MA0,MB0],%);
T=rhs(TA0A)+rhs(TB0A)+rhs(TB1A)+subst([A=B
  ,U=V],rhs(TA0A))+rhs(TB0A)+rhs(TB1A);
TIA01:T=expand(subst([B=A,V=U,L=2*H]
  ,rhs(%))/2);
MAS1:1/2*M*U^2=rhs(TIA01);
MAS2:\Delta=\rho*4/3*%pi*A^3;
MAS3:solve(MAS2,\rho)[1];
solve(MAS1,M)[1];
expand(subst([MAS3],%));
```

$A/L << 1$ で、高次の微少項を省略して、

$$\frac{d}{d\,n}\,\Phi_A\Big|_{r=A} = \frac{d}{d\,r}\,\Phi_A\Big|_{r=A} = \frac{2\cos(\theta)\ \mu_A}{A^3}$$

上式と (6.2.66) 式、(6.2.67) 式、(6.2.69) 式、(6.2.70) 式から運動エネルギーの各項の積分は下記となる。

$$\begin{aligned} T_{A0A} &= -\frac{\rho}{2} \int_A \Phi_{A0}\,\frac{d}{d\,n}\,\Phi_A\ dS = \frac{4\,\pi\,\rho\,\mu_A^2}{3\,A^3} = \frac{\pi\,\rho\,A^3\,U^2}{3} \\ T_{B0A} &= -\frac{\rho}{2} \int_A \Phi_{B0}\,\frac{d}{d\,n}\,\Phi_A\ dS = \frac{\pi\,\rho\,A^3\,B^3\,U\,V}{3\,L^3} \\ T_{A1A} &= -\frac{\rho}{2} \int_A \Phi_{A1}\,\frac{d}{d\,n}\,\Phi_A\ dS = 0 \\ T_{B1A} &= -\frac{\rho}{2} \int_A \Phi_{B1}\,\frac{d}{d\,n}\,\Phi_A\ dS = \frac{\pi\,\rho\,A^3\,B^3\,U\,V}{6\,L^3} \end{aligned}$$

上記の結果から、球面 : B の積分を上式の $A \to B, B \to A, U \to V, V \to U$ の置き換えを行って求め、球 A と球 B による総運動エネルギーは、

$$T = \frac{\pi\,\rho\,B^3\,V^2}{3} + \frac{\pi\,\rho\,A^3\,B^3\,U\,V}{L^3} + \frac{\pi\,\rho\,A^3\,U^2}{3}$$

球 A が壁までの距離 : H とし、壁に平行に速度 : U で動く球の運動エネルギーは、上式から

$$T = \frac{\pi\,\rho\,A^6\,U^2}{16\,H^3} + \frac{\pi\,\rho\,A^3\,U^2}{3}$$

付加質量 : M は、

$$\frac{M\,U^2}{2} = \frac{\pi\,\rho\,A^6\,U^2}{16\,H^3} + \frac{\pi\,\rho\,A^3\,U^2}{3}$$

球の流体排出相当質量 : Δ で表現すると、

$$M = \frac{3\,\Delta\,A^3}{32\,H^3} + \frac{\Delta}{2}$$

例題 6.2.10　回転楕円体 (複素変換)

軸対称軸：x 軸方向に一定速度：U で動く下図の長径：A、短径：B の回転楕円体の速度ポテンシャル：Φ と流れ関数：Ψ を複素変換の方法で求める [1]。

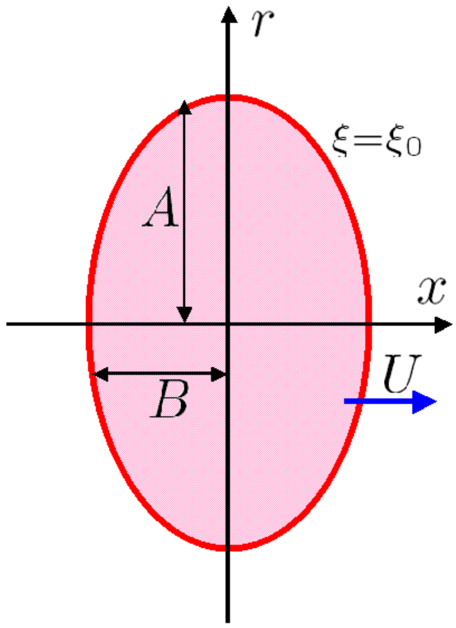


図 6.2.12: 一定速度で動く回転楕円体

```
/* 回転楕円体（複素変換） */
kill(all);
load("vect")
declare(z,complex);
declare(w,complex);
depends(\Psi,[r,x]);
EQZ1:z=x+%i*r;
EQZC:w=conjugate(rhs(EQZ1));
depends(\Psi,[\xi,\eta]);
depends(\xi,[r,x]);
depends(\eta,[r,x]);
EQ1:x+%i*r=c*sinh(\xi+%i*\eta);
EQ1RE:realpart(lhs(EQ1))=realpart(
 rhs(EQ1));
EQ1IM:imagpart(lhs(EQ1))=imagpart(
 rhs(EQ1));
SINH:sinh(\xi)=(%e^\xi-%e^(-\xi))/2;
SINH1:%e^\xi-%e^(-\xi)=2*sinh(\xi);
COSH:cosh(\xi)=(%e^\xi+%e^(-\xi))/2;
COSH1:%e^\xi+%e^(-\xi)=2*cosh(\xi);
EX1:expand((SINH1+COSH1)/2);
SINCOSH:expand(-SINH^2+COSH^2);
SINH2:solve(%,sinh(\xi)^2)[1];
```

[1] L.M.Milne-Thomson : Theretical Hydrodynamics, Fourth Edition, Chapter 15 Stokes' Stream Function, 15.54 Stream function for a planetary ellipsiod, P.475 [15)]

```
EQ1RE1:EQ1RE/(sinh(\xi)*c);
EQ1IM1:EQ1IM/(cosh(\xi)*c);
EQ12:expand(trigsimp(EQ1RE1^2+EQ1IM1^2));
EQ121:subst([\xi=\xi[0]],EQ12);
A1:A=cosh(\xi[0])*c;
B1:B=sinh(\xi[0])*c;
A2:solve(A1,cosh(\xi[0]))[1];
B2:solve(B1,sinh(\xi[0]))[1];
EX2:subst([\xi=\xi[0]],EX1);
EQ122:subst([A2,B2],EQ121);
assume(A>0);
assume(B>0);
assume(A>B);
assume(E>0 and E<1);
subst([\xi=\xi[0]],SINCOSH);
subst([A2,B2],%)*c^2;
C1:solve(%,c)[2];
E1:E=sqrt((A^2-B^2)/A^2);
E2:rhs(E1)*A=lhs(E1)*A;
BE1:solve(E2,B)[2];
```

z と ζ の複素変換の式を下記とする。

$$\begin{aligned} z &= x + i\,r \\ &= f(\zeta) = f(\xi + i\eta) = c\sinh(\xi + i\,\eta) \end{aligned}$$

ここで、　$x = c\cos(\eta)\sinh(\xi)$,　$r = c\sin(\eta)\cosh(\xi)$

この関係式は上図の長径：A、短径：B の楕円体を表す。

$$\frac{x^2}{\sinh(\xi_0)^2 c^2} + \frac{r^2}{\cosh(\xi_0)^2 c^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{B^2} + \frac{r^2}{A^2} = 1$$

離心率：E と短径：B は、

$$E = \frac{\sqrt{A^2 - B^2}}{A}, \quad B = A\sqrt{1 - E^2}$$

```
EQD1:1/(cosh(\xi)*sin(\eta))*'diff(\Psi,\xi
  ,1);
EQD2:1/(cosh(\xi)*sin(\eta))*'diff(\Psi
  ,\eta,1);
PSGH1:'diff(EQD1,\xi,1)+'diff(EQD2,\eta,1)
 =0;
\Psi=r^2*U/2;
subst([EQ1IM],%);
PSBD1:subst([\xi=\xi[0]],%);
PSI0:\Psi=f(\xi)*sin(\eta)^2;
subst([%],PSGH1);
ev(%,diff);
```

```
factor(subst(['diff(f(\xi),\eta,1)=0
  ,'diff(f(\xi),\eta,2)=0],%));
PSI1:expand(%/sin(\eta)*cosh(\xi)^2);
ode2(PSI1,f(\xi),\xi);
FG1:subst([%k2=0],%);
FG10:FG1/8/%k1/cosh(\xi)^2;
FG11:first(rhs(FG10));
FG12:last(rhs(FG10));
expand(num(FG12)*%e^(-2*\xi));
FG121:subst([SINH1],%);
factor(denom(FG12)*%e^(-2*\xi));
8*(%e^(\xi)+%e^(-\xi))^2;
FG122:subst([COSH1],%);
lhs(FG10)=FG11+FG121/FG122;
FG13:factor(solve(%,f(\xi))[1]);
ATN1:atan(t)=1/2*atan(-2/(t-1/t));
subst([t=%e^\xi],ATN1);
ATN2:subst([SINH1],%);
FG14:subst([ATN2],FG13);
PSI1:factor(subst([FG14],PSI0));
f(\xi[0])*sin(\eta)^2=rhs(PSBD1);
FG0:solve(%,f(\xi[0]))[1];
subst([\xi=\xi[0]],rhs(FG14))=rhs(FG0);
```

```
solve(%,%k1)[1];
subst([EX2],%);
K1:factor(subst([A2,B2],%));
PSI2:factor(subst([K1],PSI1));
```

(6.1.74) 式による流れ関数の境界条件から、$\xi=\xi_0$ の回転楕円体の境界において、

$$\Psi=\frac{r^2\,U}{2}=\frac{\cosh\left(\xi_0\right)^2\,c^2\,\sin\left(\eta\right)^2\,U}{2} \tag{6.2.71}$$

上記を参考に複素変換式を下記の変数分離型とする。

$$\Psi=\sin\left(\eta\right)^2\,\mathrm{f}\left(\xi\right)$$

(6.1.69) 式から複素変換による流れ関数の関係式は下記となる。

$$\frac{d}{d\,\xi}\,\frac{\frac{d}{d\,\xi}\,\Psi}{\sin\left(\eta\right)\,\cosh\left(\xi\right)}+\frac{d}{d\,\eta}\,\frac{\frac{d}{d\,\eta}\,\Psi}{\sin\left(\eta\right)\,\cosh\left(\xi\right)}=0$$

上式に複素変換式を代入すると、

$$\cosh\left(\xi\right)\,\left(\frac{d^2}{d\,\xi^2}\,\mathrm{f}\left(\xi\right)\right)-\sinh\left(\xi\right)\,\left(\frac{d}{d\,\xi}\,\mathrm{f}\left(\xi\right)\right)-2\,\mathrm{f}\left(\xi\right)\,\cosh\left(\xi\right)=0$$

この解は $ode2$ で得られ、$\xi\to\infty$ における条件から整理すると、

$$\mathrm{f}\left(\xi\right)=8\,\%k1\cosh\left(\xi\right)^2\,\left(\frac{\mathrm{atan}\left(e^{\xi}\right)}{8}+\frac{e^{3\,\xi}-e^{\xi}}{8\,e^{4\,\xi}+16\,e^{2\,\xi}+8}\right)=\frac{\%k1\,\left(2\cosh\left(\xi\right)^2\,\mathrm{atan}\left(e^{\xi}\right)+\sinh\left(\xi\right)\right)}{2}$$

下記に関係式から、

$$\mathrm{atan}\left(t\right)=-\frac{\mathrm{atan}\left(\frac{2}{t-\frac{1}{t}}\right)}{2},\quad \mathrm{atan}\left(e^{\xi}\right)=-\frac{\mathrm{atan}\left(\frac{1}{\sinh(\xi)}\right)}{2}$$

上の関係式を代入し、

$$\mathrm{f}\left(\xi\right)=\frac{\%k1\,\left(\sinh\left(\xi\right)-\cosh\left(\xi\right)^2\,\mathrm{atan}\left(\frac{1}{\sinh(\xi)}\right)\right)}{2}$$

流れ関数：Ψ は、

$$\Psi=-\frac{\%k1\sin\left(\eta\right)^2\,\left(\cosh\left(\xi\right)^2\,\mathrm{atan}\left(\frac{1}{\sinh(\xi)}\right)-\sinh\left(\xi\right)\right)}{2}$$

上式と (6.2.71) 式の境界における流れ関数から

$$\%k1=-\frac{\cosh\left(\xi_0\right)^2\,c^2\,U}{\cosh\left(\xi_0\right)^2\,\mathrm{atan}\left(\frac{1}{\sinh(\xi_0)}\right)-\sinh\left(\xi_0\right)}=\frac{c^2\,A^2\,U}{c\,B-A^2\,\mathrm{atan}\left(\frac{c}{B}\right)}$$

$\%k1$ を代入し流れ関数：Ψ は、

$$\Psi=-\frac{c^2\sin\left(\eta\right)^2\,\left(\cosh\left(\xi\right)^2\,\mathrm{atan}\left(\frac{1}{\sinh(\xi)}\right)-\sinh\left(\xi\right)\right)\,A^2\,U}{2\,\left(c\,B-A^2\,\mathrm{atan}\left(\frac{c}{B}\right)\right)} \tag{6.2.72}$$

```
PHPS1:'diff(\Phi,\eta,1)=-1/r*'diff(\Psi
  ,\xi,1);
'diff(\Psi,\xi,1)=diff(rhs(PSI2),\xi,1);
factor(subst([%,EQ1IM],PHPS1));
\Phi=integrate(rhs(%),\eta);
subst([SINH2],%);
subst([sinh(\xi)^3=(cosh(\xi)^2-1)
  *sinh(\xi)],%);
PHI1:factor(%);
```

速度と速度ポテンシャル、流れ関数との関係 (6.1.72) 式から、

$$\frac{d}{d\eta}\,\Phi=-\frac{1}{r}\,\frac{d}{d\xi}\,\Psi$$

上式に流れ関数 (6.2.72) 式を代入すると、

```
PHI2:subst([\xi=\xi[0]],rhs(PHI1));
diff(rhs(PSI2),\eta,1);
PSETD:subst([\xi=\xi[0]],%);
T=-%pi*\rho*integrate(PHI2*PSETD,\eta,0,
 %pi);
subst([EX2],%);
factor(subst([A2,B2],%));
subst([C1],%);
subst([E2],%);
T1:factor(subst([BE1],%));
subst([E=0.01],T1);
lhs(T1)=limit(rhs(T1),E,0,plus);
subst([E=0.99],T1);
lhs(T1)=limit(rhs(T1),E,1,minus);
```

$$\frac{d}{d\eta}\,\Phi=\frac{c\sin(\eta)\,\left(2\sinh(\xi)^3\,\mathrm{atan}\left(\frac{1}{\sinh(\xi)}\right)+2\sinh(\xi)\,\mathrm{atan}\left(\frac{1}{\sinh(\xi)}\right)-\sinh(\xi)^2-\cosh(\xi)^2-1\right)\,A^2\,U}{2\,\left(\sinh(\xi)^2+1\right)\,\left(c\,B-A^2\,\mathrm{atan}\left(\frac{c}{B}\right)\right)}$$

上式を積分し速度ポッテンシャルを求める。

$$\begin{aligned}\Phi&=-\frac{c\cos(\eta)\,\left(2\sinh(\xi)^3\,\mathrm{atan}\left(\frac{1}{\sinh(\xi)}\right)+2\sinh(\xi)\,\mathrm{atan}\left(\frac{1}{\sinh(\xi)}\right)-\sinh(\xi)^2-\cosh(\xi)^2-1\right)\,A^2\,U}{2\,\left(\sinh(\xi)^2+1\right)\,\left(c\,B-A^2\,\mathrm{atan}\left(\frac{c}{B}\right)\right)}\\&=-\frac{c\cos(\eta)\,\left(\sinh(\xi)\,\mathrm{atan}\left(\frac{1}{\sinh(\xi)}\right)-1\right)\,A^2\,U}{c\,B-A^2\,\mathrm{atan}\left(\frac{c}{B}\right)}\end{aligned}\tag{6.2.73}$$

運動エネルギーは下記で与えられる。

$$T=-\pi\,\rho\int_0^{\pi}\Phi\,\frac{d}{d\eta}\,\Psi\,d\eta$$

$$\Phi\Big|_{\xi=\xi_0}=-\frac{\left(\sinh(\xi_0)\,\mathrm{atan}\left(\frac{1}{\sinh(\xi_0)}\right)-1\right)\,c\cos(\eta)\,A^2\,U}{c\,B-A^2\,\mathrm{atan}\left(\frac{c}{B}\right)}$$

$$\frac{d}{d\eta}\,\Psi\Big|_{\xi}=-\frac{\left(\cosh(\xi_0)^2\,\mathrm{atan}\left(\frac{1}{\sinh(\xi_0)}\right)-\sinh(\xi_0)\right)\,c^2\cos(\eta)\,\sin(\eta)\,A^2\,U}{c\,B-A^2\,\mathrm{atan}\left(\frac{c}{B}\right)}$$

上記を積分し、運動エネルギーは、

$$\begin{aligned}T&=-\frac{2\,\pi\,\left(\cosh(\xi_0)^2\,\mathrm{atan}\left(\frac{1}{\sinh(\xi_0)}\right)-\sinh(\xi_0)\right)\,\left(\sinh(\xi_0)\,\mathrm{atan}\left(\frac{1}{\sinh(\xi_0)}\right)-1\right)\,c^3\,\rho\,A^4\,U^2}{3\,\left(c\,B-A^2\,\mathrm{atan}\left(\frac{c}{B}\right)\right)^2}\\&=\frac{2\,\pi\,\rho\,A^4\,\left(\mathrm{atan}\left(\frac{c}{B}\right)\,B-c\right)\,U^2}{3\,\left(c\,B-A^2\,\mathrm{atan}\left(\frac{c}{B}\right)\right)}=-\frac{2\,\pi\,\rho\,A^3\,\left(\sqrt{1-E^2}\,\mathrm{atan}\left(\frac{E}{\sqrt{1-E^2}}\right)-E\right)\,U^2}{3\,\left(\mathrm{atan}\left(\frac{E}{\sqrt{1-E^2}}\right)-E\,\sqrt{1-E^2}\right)}\end{aligned}\tag{6.2.74}$$

(6.2.74) 式で離心率：$E\to 0$ とすると球となり、その運動エネルギーは下記となり、(6.2.10) 式、(204 ページ) の結果と一致している。

$$T=\frac{\pi\,\rho\,A^3\,U^2}{3}\tag{6.2.75}$$

(6.2.74) 式で離心率：$E\to 1$ とすると $B=0$ で円板となり、その運動エネルギーは下記となる。

$$T=\frac{4\,\rho\,A^3\,U^2}{3}$$

例題 6.2.11 楕円体

楕円体の直進、旋回運動による運動エネルギーを求める [1]。楕円体の x 軸の径：A、y 軸の径：B、z 軸の径：C とすると、楕円体の曲面は次式で表すことができる。

$$\frac{z^2}{C^2}+\frac{y^2}{B^2}+\frac{x^2}{A^2}=1 \tag{6.2.76}$$

(6.2.76) 式を変形し、次式は楕円面、一葉双曲面、二葉双曲面の三つの直交系の共焦点二次曲面を表している。

$$\frac{z^2}{C^2+\theta}+\frac{y^2}{B^2+\theta}+\frac{x^2}{A^2+\theta}-1=0$$

上式は θ の三次式である。その根を κ, μ, ν とする。ここで $A>B>C$ とする。$-A^2<\theta<\infty$ の根を κ とする。このとき次式となり楕円体となる。

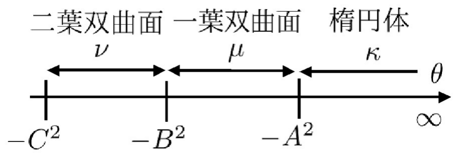
$$\frac{z^2}{{C_1}^2}+\frac{y^2}{{B_1}^2}+\frac{x^2}{{A_1}^2}-1=0$$

$-B^2<\theta<-A^2$ の根を μ とする。このとき次式となり一葉双曲面となる。

$$\frac{z^2}{{C_2}^2}+\frac{y^2}{{B_2}^2}-\frac{x^2}{{A_2}^2}-1=0$$

$-C^2<\theta<-B^2$ の根を ν とする。このとき次式となり二葉双曲面となる。

$$\frac{z^2}{{C_3}^2}-\frac{y^2}{{B_3}^2}-\frac{x^2}{{A_3}^2}-1=0$$




```
kill(all);
assume(A>0);
assume(B>0);
assume(C>0);
EL1:x^2/(A^2)+y^2/(B^2)+z^2/(C^2)=1;
LI:[A=3,B=2,C=1];
X1:x=r*sin(\theta)*cos(\phi);
Y1:y=r*sin(\theta)*sin(\phi);
Z1:z=r*cos(\theta);
EL2:subst([X1,Y1,Z1],EL1);
solve(%,r^2)[1];
sqrt(%);
PL1:subst([LI],rhs(%));
plot3d(PL1, [\theta,0,%pi],[\phi,0,2*%pi],
 [transform_xy, spherical_to_xyz],
 [grid,60,60]);
```

楕円体の形状は、

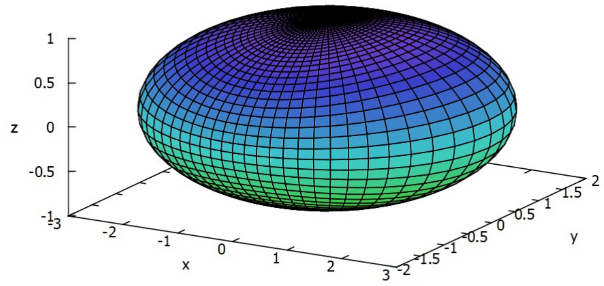


図 6.2.13: 楕円体

```
EL1:-x^2/(A^2)+y^2/(B^2)+z^2/(C^2)=1;
EL11:%-last(lhs(%));
Y1:y=r*cos(\theta);
Z1:z=r*sin(\theta);
EL2:subst([Y1,Z1],EL11);
solve(%,r^2)[1];
R1:r=sqrt(rhs(%));
X2:x;
subst([R1],rhs(Y1));
Y2:subst([LI],%);
subst([R1],rhs(Z1));
Z2:subst([LI],%);
plot3d([X2,Y2,Z2], [\theta,0,2*%pi],
 [x,-5,5],[grid,60,60]);
```

一葉双曲面の形状は、

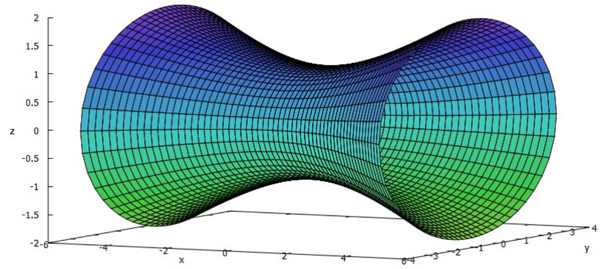


図 6.2.14: 一葉双曲面

```
EL1:-x^2/(A^2)-y^2/(B^2)+(z)^2/(C^2)=1;
%-rest(lhs(%),1);
EL11:%*C^2;
Z1:sqrt(rhs(%));
Z2:subst([LI],%);
Z3:-%;
plot3d([Z2,[x,-10,10],[y,-10,10]],
 [grid,30,30],[z,0,7]);
```

[1] ラム：今井　功、橋本　英典訳：流体力学（１）、第５章　液体の渦なし運動：３次元の問題　112. [24)]

二葉双曲面の形状は、

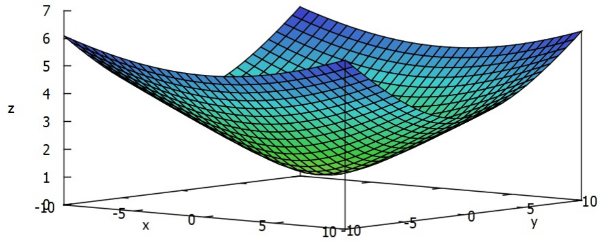


図 6.2.15: 二葉双曲面

$\nabla^2\Phi$

```
kill(all);
depends([x,y,z,\Phi],[\kappa,\mu,\nu]);
depends([d],[\kappa]);
depends([e],[\mu]);
depends([f],[\nu]);
assume(A^2+\kappa>0);
assume(B^2+\kappa>0);
assume(C^2+\kappa>0);
assume(A>0);
assume(B>0);
assume(C>0);
EL1:x^2/(A^2+\theta)+y^2/(B^2+\theta)
 +z^2/(C^2+\theta)=1;
lhs(%-rhs(%))=0;
F1:lhs(%)=(\kappa-\theta)*(\mu-\theta)*
 (\nu-\theta)/(A^2+\theta)/
 (B^2+\theta)/(C^2+\theta);
F1*(A^2+\theta);
factor(%);
subst([\theta=-(A^2)],%);
solve(%,x^2)[1];
X1:factor(%);
F1*(B^2+\theta);
factor(%);
subst([\theta=-(B^2)],%);
solve(%,y^2)[1];
Y1:factor(%);
F1*(C^2+\theta);
factor(%);
subst([\theta=-(C^2)],%);
solve(%,z^2)[1];
Z1:factor(%);
```

$\kappa,\,\mu,\,\nu$ が一定の局面の交点では各面が直交しており、直交曲面となっている。(6.2.76) 式は三次式で、その根は $\kappa,\,\mu,\,\nu$ であるから、次式のように表現できる。

$$\begin{aligned}\frac{z^2}{C^2+\theta}+\frac{y^2}{B^2+\theta}+\frac{x^2}{A^2+\theta}-1\\=\frac{(\kappa-\theta)\,(\mu-\theta)\,(\nu-\theta)}{(A^2+\theta)\,(B^2+\theta)\,(C^2+\theta)}\end{aligned}\tag{6.2.77}$$

(6.2.77) 式に $\left(A^2+\theta\right)$ を掛け、$\theta=A^2$ と置き x^2 を求めると下記となり、他も同様に求めると、

$$\begin{aligned}x^2=&\frac{\left(A^2+\kappa\right)\,\left(A^2+\mu\right)\,\left(A^2+\nu\right)}{(B-A)\,(B+A)\,(C-A)\,(C+A)}\\y^2=&-\frac{\left(B^2+\kappa\right)\,\left(B^2+\mu\right)\,\left(B^2+\nu\right)}{(B-A)\,(B+A)\,(C-B)\,(C+B)}\\z^2=&\frac{\left(C^2+\kappa\right)\,\left(C^2+\mu\right)\,\left(C^2+\nu\right)}{(C-A)\,(C+A)\,(C-B)\,(C+B)}\end{aligned}\tag{6.2.78}$$

速度ポテンシャル：Φ の満たすべき条件式は (2.9.5) 式から $\nabla^2\Phi = 0$ であり、上記の直交曲線座標系では (B.3.20) 式から、

$$\begin{aligned}\nabla^2\Phi =&\frac{1}{h_1h_2h_3}\left(\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial}{\partial u_1}\Phi\right)\right.\\&+\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_1h_3}{h_2}\frac{\partial}{\partial u_2}\Phi\right)\\&\left.+\frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}\Phi\right)\right)=0\end{aligned} \tag{6.2.79}$$

ここで、h_1, h_2 h_3 は (B.3.5) 式から、

$$\begin{aligned}h_1^2 =&\left(\frac{d}{d\,u_1}\,z\right)^2+\left(\frac{d}{d\,u_1}\,y\right)^2+\left(\frac{d}{d\,u_1}\,x\right)^2\\h_2^2 =&\left(\frac{d}{d\,u_2}\,z\right)^2+\left(\frac{d}{d\,u_2}\,y\right)^2+\left(\frac{d}{d\,u_2}\,x\right)^2\\h_3^2 =&\left(\frac{d}{d\,u_3}\,z\right)^2+\left(\frac{d}{d\,u_3}\,y\right)^2+\left(\frac{d}{d\,u_3}\,x\right)^2\end{aligned} \tag{6.2.80}$$

ここで直交系の共焦点二次曲面では、(6.2.79) 式、(6.2.80) 式の u_1, u_2, u_3 は、

$$u_1=\kappa,\quad u_2=\mu,\quad u_3=\nu \tag{6.2.81}$$

```
diff(X1,\kappa,1);
%/X1;
DXK1:%/2*x;
diff(%,\kappa,1);
DXK2:subst([DXK1],%);
diff(Y1,\kappa,1);
%/Y1;
DYK1:%/2*y;
diff(Z1,\kappa,1);
%/Z1;
DZK1:%/2*z;
h[1]^2=rhs(DXK1)^2+rhs(DYK1)^2+rhs(DZK1)^2;
subst([X1,Y1,Z1],%);
H1:factor(%);
K1:d^2=(A^2+\kappa)*(B^2+\kappa)*(C^2
 +\kappa);
D11:d=sqrt(rhs(%));
H1*K1;
H11:%/d^2;
```

(6.2.78) 式の第 1 式を κ で微分すると、

$$2\,x\left(\frac{d}{d\,\kappa}\,x\right)=\frac{\left(A^2+\mu\right)\,\left(A^2+\nu\right)}{(B-A)\,(B+A)\,(C-A)\,(C+A)}$$

上式を (6.2.78) 式の第 1 式で割ると、

$$\frac{2\,\left(\frac{d}{d\,\kappa}\,x\right)}{x}=\frac{1}{A^2+\kappa}$$

上式から、

$$\frac{d}{d\,\kappa}\,x=\frac{x}{2\,\left(A^2+\kappa\right)} \tag{6.2.82}$$

上式を κ で微分すると、

$$\frac{d^2}{d\,\kappa^2}\,x=\frac{\frac{d}{d\,\kappa}\,x}{2\,\left(A^2+\kappa\right)}-\frac{x}{2\,\left(A^2+\kappa\right)^2}$$

上式に (6.2.82) 式を代入し、

$$\frac{d^2}{d\,\kappa^2}\,x=-\frac{x}{4\,\left(A^2+\kappa\right)^2}$$

同様にして、(6.2.78) 式の第 2 式、第 3 式を κ で微分すると、

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\,\kappa}\,x =&\frac{x}{2\,\left(A^2+\kappa\right)}\\\frac{d}{d\,\kappa}\,y =&\frac{y}{2\,\left(B^2+\kappa\right)}\\\frac{d}{d\,\kappa}\,z =&\frac{z}{2\,\left(C^2+\kappa\right)}\end{aligned} \tag{6.2.83}$$

(6.2.80) 式の第 1 式に上式を代入し、(6.2.78) 式を代入すると、

$$\begin{aligned}h_1^2 =&\frac{z^2}{4\,\left(C^2+\kappa\right)^2}+\frac{y^2}{4\,\left(B^2+\kappa\right)^2}+\frac{x^2}{4\,\left(A^2+\kappa\right)^2}\\=&\frac{(\mu-\kappa)\,(\nu-\kappa)}{4\,\left(A^2+\kappa\right)\,\left(B^2+\kappa\right)\,\left(C^2+\kappa\right)}\end{aligned}$$

ここで下記とすると、

$$d=\sqrt{A^2+\kappa}\,\sqrt{B^2+\kappa}\,\sqrt{C^2+\kappa} \tag{6.2.84}$$

h_1^2 は、

$$h_1^2=\frac{(\mu-\kappa)\,(\nu-\kappa)}{4\,d^2} \tag{6.2.85}$$

```
diff(X1,\mu,1);
%/X1;
DXM1:%/2*x;
diff(%,\mu,1);
DXM2:subst([DXM1],%);
diff(Y1,\mu,1);
%/Y1;
DYM1:%/2*y;
diff(Z1,\mu,1);
%/Z1;
DZM1:%/2*z;
h[2]^2=rhs(DXM1)^2+rhs(DYM1)^2+rhs(DZM1)^2;
subst([X1,Y1,Z1],%);
H2:factor(%);
K2:e^2=(A^2+\mu)*(B^2+\mu)*(C^2+\mu);
E11:e=sqrt(rhs(%));
H2*K2;
H21:%/e^2;
```

上記と同様にして、(6.2.78) 式を μ で微分すると、

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\mu}\,x=&\frac{x}{2\,(A^2+\mu)}\\ \frac{d}{d\mu}\,y=&\frac{y}{2\,(B^2+\mu)}\\ \frac{d}{d\mu}\,z=&\frac{z}{2\,(C^2+\mu)}\end{aligned}\tag{6.2.86}$$

(6.2.80) 式の第 2 式に上式を代入し、(6.2.78) 式を代入すると、

$$h_2^2=-\frac{(\mu-\kappa)\,(\nu-\mu)}{4\,e^2}\tag{6.2.87}$$

ここで、

$$e=\sqrt{(A^2+\mu)\,(B^2+\mu)\,(C^2+\mu)}\tag{6.2.88}$$

```
diff(X1,\nu,1);
%/X1;
DXN1:%/2*x;
diff(%,\nu,1);
DXN2:subst([DXN1],%);
diff(Y1,\nu,1);
%/Y1;
DYN1:%/2*y;
diff(Z1,\nu,1);
%/Z1;
DZN1:%/2*z;
h[3]^2=rhs(DXN1)^2+rhs(DYN1)^2+rhs(DZN1)^2;
subst([X1,Y1,Z1],%);
H3:factor(%);
K3:f^2=(A^2+\nu)*(B^2+\nu)*(C^2+\nu);
F11:f=sqrt(rhs(%));
H3*K3;
H31:%/f^2;
```

上記と同様にして、(6.2.78) 式を ν で微分すると、

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\nu}\,x=&\frac{x}{2\,(A^2+\nu)}\\ \frac{d}{d\nu}\,y=&\frac{y}{2\,(B^2+\nu)}\\ \frac{d}{d\nu}\,z=&\frac{z}{2\,(C^2+\nu)}\end{aligned}\tag{6.2.89}$$

(6.2.80) 式の第 3 式に上式を代入し、(6.2.78) 式を代入すると、

$$h_3^2=\frac{(\nu-\kappa)\,(\nu-\mu)}{4\,f^2}\tag{6.2.90}$$

ここで、

$$f=\sqrt{(A^2+\nu)\,(B^2+\nu)\,(C^2+\nu)}\tag{6.2.91}$$

```
DPH2:\nabla^2*\Phi=1/(h[1]*h[2]*h[3])*
 ('diff(h[2]*h[3]/h[1]*'diff(\Phi,u[1]),
 u[1])+'diff(h[1]*h[3]/h[2]*'diff(\Phi,
 u[2]),u[2])+'diff(h[2]*h[1]/h[3]*
 'diff(\Phi,u[3]),u[3]));
DPH21:subst([u[1]=\kappa,u[2]=\mu,
 \u[3]=\nu],%);
DPH22:num(rhs(DPH21));
DPH23:denom(rhs(DPH21));
DPH24:first(DPH22);
DPH26:last(DPH22);
DPH25:DPH22-DPH24-DPH26;
1/(h[1])*h[2]*h[3];
%^2;
H12:%=subst([H11,H21,H31],%);
solve(H12,h[1])[1];
subst([%],DPH26);
DPH261:%i*(\nu-\mu)/(2*e*f)*'diff(d*(
 'diff(\Phi,\kappa,1)),\kappa,1);
h[1]*h[3]/h[2];
%^2;
H22:%=subst([H11,H21,H31],%);
solve(H22,h[2])[2];
subst([%],DPH25);
DPH251:-%i*(\nu-\kappa)/(2*d*f)*
 'diff(((e*('diff(\Phi,\mu,1)))),\mu,1);
h[2]*h[1]/h[3];
%^2;
H32:%=subst([H11,H21,H31],%);
solve(H32,h[3])[1];
subst([%],DPH24);
DPH241:%i*(\mu-\kappa)/(2*d*e)*
 'diff(((f*('diff(\Phi,\nu,1)))),\nu,1);
h[1]*h[2]*h[3];
%^2;
H42:%=subst([H11,H21,H31],%);
H43:h[1]*h[2]*h[3]=-%i*((\mu-\kappa)
 *(\nu-\kappa)*(\nu-\mu))/(8*d*e*f);
```

(6.2.79) 式に (6.2.81) 式を代入すると、

$$\begin{aligned}\nabla^2\,\Phi=&\frac{1}{h_1\,h_2\,h_3}\left(\frac{d}{d\nu}\,\frac{h_1\,h_2\,\left(\frac{d}{d\nu}\,\Phi\right)}{h_3}\right.\\ &\left.+\frac{d}{d\mu}\,\frac{h_1\,h_3\,\left(\frac{d}{d\mu}\,\Phi\right)}{h_2}+\frac{d}{d\kappa}\,\frac{h_2\,h_3\,\left(\frac{d}{d\kappa}\,\Phi\right)}{h_1}\right)=0\end{aligned}$$

上式より Φ の満たすべき条件式は、

$$\frac{d}{d\,\nu}\,\frac{h_1\,h_2\,\left(\frac{d}{d\,\nu}\,\Phi\right)}{h_3}+\frac{d}{d\,\mu}\,\frac{h_1\,h_3\,\left(\frac{d}{d\,\mu}\,\Phi\right)}{h_2}+\frac{d}{d\,\kappa}\,\frac{h_2\,h_3\,\left(\frac{d}{d\,\kappa}\,\Phi\right)}{h_1}=0 \tag{6.2.92}$$

上式の $\frac{h_2\,h_3}{h_1}$, $\frac{h_1\,h_3}{h_2}$, $\frac{h_1\,h_2}{h_3}$ は、(6.2.85) 式、(6.2.87) 式、(6.2.90) 式から、

$$\begin{aligned}\frac{h_2^2\,h_3^2}{h_1^2}&=-\frac{d^2\,(\nu-\mu)^2}{4\,e^2\,f^2}\\ \frac{h_1^2\,h_3^2}{h_2^2}&=-\frac{e^2\,(\nu-\kappa)^2}{4\,d^2\,f^2}\\ \frac{h_1^2\,h_2^2}{h_3^2}&=-\frac{f^2\,(\mu-\kappa)^2}{4\,d^2\,e^2}\end{aligned} \tag{6.2.93}$$

```
(DPH241+DPH251+DPH261)/rhs(H43);
-(4*((f*(\kappa-\nu)*('diff((f*('diff(
 \Phi,\nu,1))),\nu,1)))+(e*(\nu-\kappa)*
 ('diff((e*('diff(\Phi,\mu,1))),\mu,1)))
 +(d*(\mu-\nu)*('diff((d*('diff(\Phi,
 \kappa,1))),\kappa,1)))))/((\kappa-\mu)
 *(\mu-nu)*(\nu-\kappa))=0;
DPH3:((f*(\kappa-\nu)*('diff((f*('diff(
 \Phi,\nu,1))),\nu,1)))+(e*(\nu-\kappa)*
 ('diff((e*('diff(\Phi,\mu,1))),\mu,1)))
 +(d*(\mu-\nu)*('diff((d*('diff(\Phi,
 \kappa,1))),\kappa,1))))=0;
```

(6.2.92) 式に (6.2.93) 式を代入し整理すると、

$$\begin{aligned}&f\,(\kappa-\nu)\left(\frac{d}{d\,\nu}\left(f\left(\frac{d}{d\,\nu}\,\Phi\right)\right)\right)\\&\quad+e\,(\nu-\kappa)\left(\frac{d}{d\,\mu}\left(e\left(\frac{d}{d\,\mu}\,\Phi\right)\right)\right)\\&\quad+d\,(\mu-\nu)\left(\frac{d}{d\,\kappa}\left(d\left(\frac{d}{d\,\kappa}\,\Phi\right)\right)\right)=0\end{aligned} \tag{6.2.94}$$

x 軸方向の運動

```
kill(all);
depends([x,y,z,\Phi],[\kappa,\mu,\nu]);
depends([d],[\kappa]);
assume(A^2+\kappa>0);
assume(B^2+\kappa>0);
assume(C^2+\kappa>0);
assume(A>0);
assume(B>0);
assume(C>0);
depends([\chi,g],[\kappa]);
DXK1:'diff(x,\kappa,1)=x/(2*(A^2+\kappa));
DYK1:'diff(y,\kappa,1)=y/(2*(B^2+\kappa));
DZK1:'diff(z,\kappa,1)=z/(2*(C^2+\kappa));
D11:d=sqrt(A^2+\kappa)*sqrt(B^2+\kappa)
 *sqrt(C^2+\kappa);
PH1:\Phi=x*\chi;
'diff(d*('diff(\Phi,\kappa,1)),\kappa,1)=0;
subst([PH1],%);
ev(%,diff);
expand(%);
rest(lhs(%),2)=0;
%-first(lhs(%));
expand(%/x);
'diff(d*('diff(chi,kappa,1)),\kappa,1)=
 rhs(%);
G0:subst([DXK1],%);
G1:g=('diff(chi,kappa,1))*d;
G2:solve(%,d)[1];
subst([G2],G0);
ode2(%,g,\kappa);
subst([G1],%);
%/d;
subst([D11],%);
PH11:1/denom(rhs(%));
\chi=%k1*'integrate(PH11,\kappa)+%k2;
PH12:\Phi=%k1*x*integrate(PH11,\kappa,
 \kappa,\inf);
```

x 軸方向に速度：U で運動する楕円体の運動エネルギーを求める。いま、Φ を下記とし、χ は κ のみの関数とする。

$$\Phi=\chi\,x \tag{6.2.95}$$

(6.2.94) 式に上式を代入し、χ は κ のみの関数である

ことを考慮すると [1]、

$$2\left(\frac{d}{d\,\kappa}\,\chi\right)\,d\,\left(\frac{d}{d\,\kappa}\,x\right)+\left(\frac{d}{d\,\kappa}\,\chi\right)\,\left(\frac{d}{d\,\kappa}\,d\right)\,x$$
$$+\left(\frac{d^2}{d\,\kappa^2}\,\chi\right)\,d\,x=0$$

上式を変形し、x で割ると、

$$\left(\frac{d}{d\,\kappa}\,\chi\right)\,\left(\frac{d}{d\,\kappa}\,d\right)+\left(\frac{d^2}{d\,\kappa^2}\,\chi\right)\,d=-\frac{2\,\left(\frac{d}{d\,\kappa}\,\chi\right)\,d\,\left(\frac{d}{d\,\kappa}\,x\right)}{x}$$

左辺をまとめると、

$$\frac{d}{d\,\kappa}\,\left(\left(\frac{d}{d\,\kappa}\,\chi\right)\,d\right)=-\frac{2\,\left(\frac{d}{d\,\kappa}\,\chi\right)\,d\,\left(\frac{d}{d\,\kappa}\,x\right)}{x}$$

上式に (6.2.83) 式を代入すると、

$$\frac{d}{d\,\kappa}\,\left(\left(\frac{d}{d\,\kappa}\,\chi\right)\,d\right)=-\frac{\left(\frac{d}{d\,\kappa}\,\chi\right)\,d}{A^2+\kappa} \tag{6.2.96}$$

上式の一部を下記と置くと、

$$g=\left(\frac{d}{d\,\kappa}\,\chi\right)\,d \tag{6.2.97}$$

(6.2.96) 式は、

$$\frac{d}{d\,\kappa}\,g=-\frac{g}{A^2+\kappa}$$

上式を ode2 関数で解くと、

$$g=\frac{\%c}{A^2+\kappa}$$

(6.2.97) 式に上式を代入し、d で割ると、

$$\frac{d}{d\,\kappa}\,\chi=\frac{\%c}{d\,\left(A^2+\kappa\right)}$$

上式に (6.2.84) 式を代入すると、

$$\frac{d}{d\,\kappa}\,\chi=\frac{\%c}{\left(A^2+\kappa\right)^{\frac{3}{2}}\,\sqrt{B^2+\kappa}\,\sqrt{C^2+\kappa}}$$

上式を ode2 関数で解くと、

$$\chi=\%k1\,\int\frac{1}{\left(A^2+\kappa\right)^{\frac{3}{2}}\,\sqrt{B^2+\kappa}\,\sqrt{C^2+\kappa}}d\kappa+\%k2$$

上式から (6.2.95) 式の Φ は、

$$\Phi=\%k1\,x\,\int_{\kappa}^{\infty}\frac{1}{\left(A^2+\kappa\right)^{\frac{3}{2}}\,\sqrt{B^2+\kappa}\,\sqrt{C^2+\kappa}}d\kappa \tag{6.2.98}$$

```
PHN1:-'diff(\Phi,n,1)=U*cos(\theta[x]);
PHN11:'diff(\Phi,n,1)=1/h[1]*'diff(\Phi,
 \kappa,1);
PHN12:cos(\theta[x])=1/h[1]*'diff(x,
 \kappa,1);
subst([PHN11,PHN12],PHN1);
PHN13:-%*h[1];
PHN14:lhs(PHN13)=subst([DXK1,\kappa=0],
 rhs(PHN13));
DXK11:lhs(DXK1)=subst([\kappa=0],rhs(DXK1));
%k1*'diff(x,\kappa,1)*integrate(PH11,
 \kappa,0,inf)+%k1*x*'limit(PH11,
 \kappa,inf)-%k1*x*'limit(PH11,\kappa,0);
subst([DXK11],%);
PHN15:ev(%,limit);
AL10:\alpha[1]=A*B*C*integrate(PH11,
 \kappa,0,inf);
PHN151:%k1*x*\alpha[1]/2/A^3/B/C
 +last(PHN15);
rhs(PHN14)=PHN151;
K11:solve(%,%k1)[1];
PH13:subst([K11],PH12);
PH130:\Phi=\alpha[1]*x*U/(2-\alpha[1]);
PDPN1:\Phi*'diff(\Phi,n,1);
subst([-PHN1],%);
subst([PH130],%);
PDPN2:PDPN1=%;
T=-1/2*\rho*'integrate(PDPN1,S);
T=-1/2*\rho*'integrate(rhs(PDPN2),S);
subst([S=4/3*%pi*A*B*C/x/
 cos(\theta[x])],%);
K1:k[1]=\alpha[1]/(2-\alpha[1]);
subst([A=1,B=1,C=1],AL10);
ev(%,integrate);
subst([%],K1);
float(%);
TT1:T=%pi*\rho*A^3*U^2/3;
TT2:T=1/2*\rho*k[1]*M*U^2;
MM1:M=4/3*%pi*A^3;
rhs(TT1)=rhs(TT2);
subst([MM1],%);
solve(%,k[1])[1];
```

[1] L.M.Milne-Thomson : Theretical Hydrodynamics, Fourth Edition, Chapter 16 Sheres and Ellipsoids 16.51 Ellipsiodal harmonics, P.509 [15)]

境界面は、楕円面であるから、(6.2.77) 式で $\theta=\kappa$ であり、楕円体境界は $\kappa=0$ となる。境界条件は次式となる。

$$-\frac{d}{d\,n}\,\Phi=\cos\left(\theta_x\right)\,U \quad \text{at } \kappa=0 \tag{6.2.99}$$

ここで上式の左辺、右辺は、

$$\frac{d}{d\,n}\,\Phi=\frac{\frac{d}{d\,\kappa}\,\Phi}{h_1}, \quad \cos\left(\theta_x\right)=\frac{\frac{d}{d\,\kappa}\,x}{h_1}$$

(6.2.99) 式に上式を代入し、整理すると、

$$\frac{d}{d\,\kappa}\,\Phi=-\left(\frac{d}{d\,\kappa}\,x\right)\,U \quad \text{at } \kappa=0 \tag{6.2.100}$$

(6.2.83) 式に $\kappa=0$ を代入すると、

$$\frac{d}{d\,\kappa}\,x=\frac{x}{2\,A^2} \tag{6.2.101}$$

(6.2.100) 式に上式を代入すると、境界条件式は、

$$\frac{d}{d\,\kappa}\,\Phi=-\frac{x\,U}{2\,A^2} \quad \text{at } \kappa=0 \tag{6.2.102}$$

(6.2.98) 式から (6.2.102) 式の境界条件式の $\kappa=0$ における $\frac{d}{d\kappa}\,\Phi$ を求めると、

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\,\kappa}\,\Phi=&\%k1\,x\left(\lim_{\kappa\to\infty}\frac{1}{\left(A^2+\kappa\right)^{\frac{3}{2}}\,\sqrt{B^2+\kappa}\,\sqrt{C^2+\kappa}}\right)+\%k1\,\left(\frac{d}{d\,\kappa}\,x\right)\int_0^{\infty}\frac{1}{\left(A^2+\kappa\right)^{\frac{3}{2}}\,\sqrt{B^2+\kappa}\,\sqrt{C^2+\kappa}}d\kappa\\&-\%k1\,x\left(\lim_{\kappa\to 0}\frac{1}{\left(A^2+\kappa\right)^{\frac{3}{2}}\,\sqrt{B^2+\kappa}\,\sqrt{C^2+\kappa}}\right)\end{aligned}$$

上式の極限を求め、(6.2.101) 式を代入すると、

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\,\kappa}\,\Phi=&\frac{\%k1\,x}{2\,A^2}\int_0^{\infty}\frac{1}{\left(A^2+\kappa\right)^{\frac{3}{2}}\,\sqrt{B^2+\kappa}\,\sqrt{C^2+\kappa}}d\kappa\\&-\frac{\%k1\,x}{A^3\,B\,C}\end{aligned} \tag{6.2.103}$$

上式の積分を下記とする。

$$\alpha_1=A\,B\,C\int_0^{\infty}\frac{1}{\left(A^2+\kappa\right)^{\frac{3}{2}}\,\sqrt{B^2+\kappa}\,\sqrt{C^2+\kappa}}d\kappa \tag{6.2.104}$$

(6.2.103) 式を上式を使って表すと、

$$\frac{d}{d\,\kappa}\,\Phi=\frac{\alpha_1\,\%k1\,x}{2\,A^3\,B\,C}-\frac{\%k1\,x}{A^3\,B\,C}$$

(6.2.102) 式の境界条件式から、

$$\frac{x\,U}{2\,A^2}=\frac{\alpha_1\,\%k1\,x}{2\,A^3\,B\,C}-\frac{\%k1\,x}{A^3\,B\,C}$$

上式から、$\%k1$ を求めると、

$$\%k1=-\frac{A\,B\,C\,U}{\alpha_1-2} \tag{6.2.105}$$

(6.2.98) 式に上式を代入すると、速度ポテンシャル : Φ は、

$$\Phi=-\frac{x\,A\,B\,C}{\alpha_1-2}\int_{\kappa}^{\infty}\frac{1}{\left(A^2+\kappa\right)^{\frac{3}{2}}\,\sqrt{B^2+\kappa}\,\sqrt{C^2+\kappa}}d\kappa\,U \tag{6.2.106}$$

境界上の速度ポテンシャル : Φ は、上式に $\kappa=0$ を代入し、(6.2.104) 式から、

$$\Phi=\frac{\alpha_1\,x\,U}{2-\alpha_1}$$

上式と (6.2.99) 式から、

$$\Phi\left(\frac{d}{d\,n}\,\Phi\right)=-\frac{\alpha_1\,x\cos\left(\theta_x\right)\,U^2}{2-\alpha_1}$$

流体の運動エネルギーは (A.5.2) 式から、次式となり、上式から、

$$\begin{aligned}T=&-\frac{1}{2}\rho\iint\Phi\left(\frac{d}{d\,n}\,\Phi\right)dS\\=&\frac{\alpha_1\,\rho\,U^2}{2\,\left(2-\alpha_1\right)}\iint x\cos\left(\theta_x\right)dS\end{aligned}$$

上式の二重積分は楕円体の体積を表しており、二重積分 $=\frac{4}{3}\pi\,A\,B\,C$ であるから、

$$T=\frac{2\,\pi\,\alpha_1\,\rho\,A\,B\,C\,U^2}{3\,\left(2-\alpha_1\right)}=\frac{1}{2}\,k_1\,M\,U^2 \tag{6.2.107}$$

ここで、k_1 : 付加質量係数、M : 楕円体と同体積の流体質量 $=\rho\,\frac{4}{3}\pi\,A\,B\,C$ とすると、k_1 は上式から、

$$k_1=\frac{\alpha_1}{2-\alpha_1} \tag{6.2.108}$$

例として、球では、$A=B=C=1$ として下記の結果を得る。これは図 6.2.16 の結果と一致している。

$$\alpha_1=\int_0^{\infty}\frac{1}{\left(\kappa+1\right)^{\frac{5}{2}}}d\kappa=\frac{2}{3}$$

$$k_1=\frac{1}{2}$$

前節の回転楕円体 (複素変換) の球の運動エネルギーの結果 : (6.2.75) 式は次式である。

$$T=\frac{\pi\,\rho\,A^3\,U^2}{3}=\frac{k_1\,\rho\,M\,U^2}{2}$$

ここで、球と同体積の流体質量：$M=\frac{4\,\pi\,A^3}{3}$ を代入し、k_1 を求めると、下記となり、本方法と同じ結果が得られた。

$$k_1=\frac{1}{2}$$

```
LI:[A=8.01,B=1,C=1];
subst(LI,AL10);
AL101:ev(%,integrate);
subst([AL101],K1);
float(%);
PL1:subst([LI],A*B*C*PH11);
plot2d(PL1,[\kappa,0,100]);
depends([\kappa],[t]);
KD1:\kappa=%e^(2*sinh(t));
DKD1:diff(KD1,t,1);
subst([KD1],PL1);
PL2:%*rhs(DKD1);
plot2d(PL2,[t,-10,10]);
DT1:DT=0.1;
subst([t=DT*n],PL2);
%*DT;
subst([DT1],%);
'sum(%,n,-100,100);
AL102:\alpha[1]=ev(%,sum);
subst([AL102],K1);
subst(LI,%);
float(%);
```

例として、楕円体で $A=8.01,\,B=C=1$ として、(6.2.104) 式に Maxima の積分結果を使い、(6.2.108) に代入すると下記の結果を得る。これは図 6.2.16(250 頁) の結果と一致している。

$$\alpha_1=0.056737088992185$$

$$k_1=0.029196815660296$$

(6.2.104) 式の次式の半無限積分の求め方 [1]

$$\alpha_1=A\,B\,C\int_0^{\infty}\frac{1}{(A^2+\kappa)^{\frac{3}{2}}\sqrt{B^2+\kappa}\sqrt{C^2+\kappa}}d\kappa \tag{6.2.109}$$

上式の半無限積分を下記の変換関数を使って、

$$\kappa=e^{2\sinh(t)} \tag{6.2.110}$$

$$\frac{d}{d\,t}\,\kappa=2\,e^{2\sinh(t)}\cosh{(t)}$$

上式で、$\kappa=0\to t=-\infty,\,\kappa=\infty\to t=\infty$ となるから、下記の半無限積分を無限積分に置き換えることができる。

$$\int_0^{\infty}f(\kappa)d\kappa=\int_{-\infty}^{\infty}f(e^{2\sinh(t)})\,e^{2\sinh(t)}\cosh{(t)}\;dt \tag{6.2.111}$$

上記から (6.2.109) 式を下記の無限積分にして、

$$\alpha_1=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2\,e^{2\sinh(t)}\cosh{(t)}\;A\,B\,C}{\left(A^2+e^{2\sinh(t)}\right)^{\frac{3}{2}}\sqrt{B^2+e^{2\sinh(t)}}\sqrt{C^2+e^{2\sinh(t)}}}\,dt$$

$A=8.01,\,B=1,\,C=1$ とし、刻み幅：0.1 として、台形積分すると、下記となる。

$$\alpha_1=0.056737088992181$$

(6.2.108) 式に上記結果を代入すると、下記となり上記の結果と一致している。

$$k_1=0.029196815660294$$

[1]渡部　力、名取　亮、小国　力：Fortran77 による数値計算ソフトウェア、丸善、14.6 二重指数関数公式による 1 次元半無限区間積分

y 軸方向の運動

```
kill(all);
depends([x,y,z,\Phi],[\kappa,\mu,\nu]);
depends([d],[\kappa]);
assume(A^2+\kappa>0);
assume(B^2+\kappa>0);
assume(C^2+\kappa>0);
assume(A>0);
assume(B>0);
assume(C>0);
depends([\chi,g],[\kappa]);
DXK1:'diff(x,\kappa,1)=x/(2*(A^2+\kappa));
DYK1:'diff(y,\kappa,1)=y/(2*(B^2+\kappa));
DZK1:'diff(z,\kappa,1)=z/(2*(C^2+\kappa));
D11:d=sqrt(A^2+\kappa)*sqrt(B^2+\kappa)
 *sqrt(C^2+\kappa);
PH1:\Phi=y*\chi;
'diff(d*('diff(\Phi,\kappa,1)),\kappa,1)=0;
subst([PH1],%);
ev(%,diff);
expand(%);
rest(lhs(%),2)=0;
%-first(lhs(%));
expand(%/y);
'diff(d*('diff(chi,kappa,1)),\kappa,1)=
 rhs(%);
G0:subst([DYK1],%);
G1:g=('diff(chi,kappa,1))*d;
G2:solve(%,d)[1];
subst([G2],G0);
ode2(%,g,\kappa);
subst([G1],%);
%/d;
subst([D11],%);
PH11:1/denom(rhs(%));
\chi=%k1*'integrate(PH11,\kappa)+%k2;
PH12:\Phi=%k1*y*integrate(PH11,\kappa,
 \kappa,\inf);
```

y 軸方向に速度：U で運動する楕円体の運動エネルギーを求める。前述の「x 軸方向の運動」と同様にして、いま、Φ を下記とし、χ は κ のみの関数とする。

$$\Phi = \chi\, y \tag{6.2.112}$$

(6.2.94) 式に上式を代入し、χ は κ のみの関数であることを考慮すると、

$$\frac{d}{d\,\kappa}\left(\left(\frac{d}{d\,\kappa}\,\chi\right)\,d\right) = -\frac{2\,\left(\frac{d}{d\,\kappa}\,\chi\right)\,d\,\left(\frac{d}{d\,\kappa}\,y\right)}{y}$$

上式に (6.2.83) 式を代入すると、

$$\frac{d}{d\,\kappa}\left(\left(\frac{d}{d\,\kappa}\,\chi\right)\,d\right) = -\frac{\left(\frac{d}{d\,\kappa}\,\chi\right)\,d}{B^2+\kappa}$$

上式を ode2 関数で解くと、

$$\frac{d}{d\,\kappa}\,\chi = \frac{\%c}{\sqrt{A^2+\kappa}\,(B^2+\kappa)^{\frac{3}{2}}\,\sqrt{C^2+\kappa}}$$

更に上式を解くと、

$$\chi = \%k1\,\int \frac{1}{\sqrt{A^2+\kappa}\,(B^2+\kappa)^{\frac{3}{2}}\,\sqrt{C^2+\kappa}}d\kappa + \%k2$$

上式から (6.2.112) 式の Φ は、

$$\Phi = \%k1\,y\,\int_{\kappa}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{A^2+\kappa}\,(B^2+\kappa)^{\frac{3}{2}}\,\sqrt{C^2+\kappa}}d\kappa \tag{6.2.113}$$

```
PHN1:-'diff(\Phi,n,1)=U*cos(\theta[y]);
PHN11:'diff(\Phi,n,1)=1/h[1]*'diff(\Phi,
 \kappa,1);
PHN12:cos(\theta[y])=1/h[1]*'diff(y,
 \kappa,1);
subst([PHN11,PHN12],PHN1);
PHN13:-%*h[1];
PHN14:lhs(PHN13)=subst([DYK1,\kappa=0],
 rhs(PHN13));
DYK11:lhs(DYK1)=subst([\kappa=0],
 rhs(DYK1));
%k1*'diff(y,\kappa,1)*integrate(PH11,
 \kappa,0,inf)+%k1*y*'limit(PH11,
 \kappa,inf)-%k1*y*'limit(PH11,\kappa,0);
subst([DYK11],%);
PHN15:ev(%,limit);
AL20:\alpha[2]=A*B*C*integrate(PH11,
 \kappa,0,inf);
PHN151:%k1*y*\alpha[2]/2/B^3/A/C
 +last(PHN15);
rhs(PHN14)=PHN151;
K11:solve(%,%k1)[1];
PH13:subst([K11],PH12);
PH130:\Phi=\alpha[2]*y*U/(2-\alpha[2]);
PDPN1:\Phi*'diff(\Phi,n,1);
subst([-PHN1],%);
subst([PH130],%);
PDPN2:PDPN1=%;
T=-1/2*\rho*'integrate(PDPN1,S);
T=-1/2*\rho*'integrate(rhs(PDPN2),S);
subst([S=4/3*%pi*A*B*C/y/cos(\theta[y])],
 %);
K2:k[2]=\alpha[2]/(2-\alpha[2]);
```

境界面は、楕円面であるから、(6.2.77) 式で $\theta=\kappa$ であり、楕円体境界は $\kappa=0$ となる。境界条件は次式となる。

$$-\frac{d}{d\,n}\,\Phi=\cos\left(\theta_y\right)\,U\quad \text{at}\ \kappa=0 \tag{6.2.114}$$

ここで上式の左辺、右辺は、

$$\frac{d}{d\,n}\,\Phi=\frac{\frac{d}{d\,\kappa}\,\Phi}{h_1},\quad \cos\left(\theta_y\right)=\frac{\frac{d}{d\,\kappa}\,y}{h_1}$$

(6.2.114) 式に上式を代入し、整理すると、

$$\frac{d}{d\,\kappa}\,\Phi=-\left(\frac{d}{d\,\kappa}\,y\right)\,U\quad \kappa=0$$

(6.2.99) 式に $\kappa=0$ を代入すると、

$$\frac{d}{d\,\kappa}\,y=\frac{y}{2\,B^2}$$

上式の境界条件は次式となる。

$$\frac{d}{d\,\kappa}\,\Phi=-\frac{y\,U}{2\,B^2}\quad \text{at}\ \kappa=0$$

(6.2.113) 式から上式の境界条件式の $\kappa=0$ における $\frac{d}{d\,\kappa}\,\Phi$ を求めると、

$$\frac{d}{d\,\kappa}\,\Phi=\frac{\%k1\,y}{2\,B^2}\int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{A^2+\kappa}\,(B^2+\kappa)^{\frac{3}{2}}\,\sqrt{C^2+\kappa}}d\kappa-\frac{\%k1\,y}{A\,B^3\,C} \tag{6.2.115}$$

上式の積分を下記とする。

$$\alpha_2=A\,B\,C\int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{A^2+\kappa}\,(B^2+\kappa)^{\frac{3}{2}}\,\sqrt{C^2+\kappa}}d\kappa \tag{6.2.116}$$

上記の α_2 を使って境界条件式を表すと、

$$-\frac{y\,U}{2\,B^2}=\frac{d}{d\,\kappa}\,\Phi=\frac{\alpha_2\,\%k1\,y}{2\,A\,B^3\,C}-\frac{\%k1\,y}{A\,B^3\,C}$$

上式から、$\%k1$ を求めると、

$$\%k1=-\frac{A\,B\,C\,U}{\alpha_2-2}$$

(6.2.113) 式に上式を代入すると、速度ポテンシャル:Φは、

$$\Phi=-\frac{y\,A\,B\,C}{\alpha_2-2}\int_{\kappa}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{A^2+\kappa}\,(B^2+\kappa)^{\frac{3}{2}}\,\sqrt{C^2+\kappa}}d\kappa\,U \tag{6.2.117}$$

境界上の速度ポテンシャル : Φ は、上式に $\kappa=0$ を代入し、(6.2.116) 式から、

$$\Phi=\frac{\alpha_2\,y\,U}{2-\alpha_2}$$

上式と (6.2.114) 式から、

$$\Phi\left(\frac{d}{d\,n}\,\Phi\right)=-\frac{\alpha_2\,y\cos\left(\theta_y\right)\,U^2}{2-\alpha_2}$$

流体の運動エネルギーは (A.5.2) 式から、次式となり、上式から、

$$\begin{aligned}T=&-\frac{1}{2}\rho\iint\Phi\left(\frac{d}{d\,n}\,\Phi\right)dS\\=&\frac{\alpha_2\,\rho\,U^2}{2\,(2-\alpha_2)}\iint y\cos\left(\theta_y\right)dS\end{aligned}$$

上式の二重積分は楕円体の体積を表しており、二重積分 $=\frac{4}{3}\pi\,A\,B\,C$ であるから、

$$T=\frac{2\,\pi\,\alpha_2\,\rho\,A\,B\,C\,U^2}{3\,(2-\alpha_2)}=\frac{1}{2}\,k_2\,M\,U^2$$

ここで、k_2 : 付加質量係数、M : 楕円体と同体積 $=\rho\frac{4}{3}\pi\,A\,B\,C$ の流体質量とする。k_2 は上式より、

$$k_2=\frac{\alpha_2}{2-\alpha_2} \tag{6.2.118}$$

```
LI:[A=8.01,B=1,C=1];
subst(LI,AL20);
AL201:ev(%,integrate);
subst([AL201],K2);
float(%);
PL1:subst([LI],A*B*C*PH11);
plot2d(PL1,[\kappa,0,100]);
depends([\kappa],[t]);
KD1:\kappa=%e^(2*sinh(t));
DKD1:diff(KD1,t,1);
subst([KD1],PL1);
PL2:%*rhs(DKD1);
plot2d(PL2,[t,-10,10]);
DT1:DT=0.1;
subst([t=DT*n],PL2);
%*DT;
subst([DT1],%);
'sum(%,n,-100,100);
AL202:\alpha[2]=ev(%,sum);
subst([AL202],K2);
subst(LI,%);
float(%);
```

例として、楕円体で $A=8.01,\ B=C=1$ として、(6.2.116) 式の計算を Maxima で行うと下記となり、結果が得られない。

$$\alpha_2=8.01\int_0^{\infty}\frac{1}{\left(\kappa+1\right)^2\sqrt{\kappa+64.1601}}d\kappa$$

半無限積分を無限積分に変換する (6.2.111) 式の方法で α_2 を求めると、下記となり、

$$\alpha_2=0.97163145550391$$

(6.2.118) 式に上記結果を代入すると、下記となり、図 6.2.16(250 頁) の結果と一致している。

$$k_2=0.94482805868009$$

x 軸方向の回転運動

```
kill(all);
depends([x,y,z,\Phi],[\kappa,\mu,\nu]);
depends([d],[\kappa]);
assume(A^2+\kappa>0);
assume(B^2+\kappa>0);
assume(C^2+\kappa>0);
assume(A>0);
assume(B>0);
assume(C>0);
depends([\chi,g],[\kappa]);
DXK1:'diff(x,\kappa,1)=x/(2*(A^2+\kappa));
DYK1:'diff(y,\kappa,1)=y/(2*(B^2+\kappa));
DZK1:'diff(z,\kappa,1)=z/(2*(C^2+\kappa));
D11:d=sqrt(A^2+\kappa)*sqrt(B^2+\kappa)
 *sqrt(C^2+\kappa);
PH2:\Phi=y*z*\chi;
'diff(d*('diff(\Phi,\kappa,1)),\kappa,1)=0;
subst([PH2],%);
ev(%,diff);
expand(%);
first(rest(lhs(%),3))+rest(lhs(%),6)=0;
%-rest(lhs(%),-2);
factor(%);
subst([DYK1,DZK1],%);
G0:y*z*'diff(d*'diff(\chi,\kappa,1),
 \kappa,1)=rhs(%);
G1:g=('diff(chi,kappa,1))*d;
G2:solve(%,d)[1];
subst([G2],G0);
ode2(%,g,\kappa);
subst([G1],%);
%/d;
subst([D11],%);
PH21:1/denom(rhs(%));
\chi=%k1*'integrate(PH21,\kappa)+%k2;
PH22:\Phi=%k1*x*y*integrate(PH21,\kappa,
 \kappa,\inf);
```

x 軸方向に角速度：ω_x で回転する楕円体の運動エネルギーを求める。いま、Φ を下記とし、χ は κ のみの関数とする。

$$\Phi = \chi\, y\, z \tag{6.2.119}$$

(6.2.94) 式に上式を代入し、χ は κ のみの関数であることを考慮すると、

$$\begin{aligned}2\left(\frac{d}{d\,\kappa}\,\chi\right)\,d\,y\,\left(\frac{d}{d\,\kappa}\,z\right)+2\,\left(\frac{d}{d\,\kappa}\,\chi\right)\,d\,\left(\frac{d}{d\,\kappa}\,y\right)\,z\\+\left(\frac{d}{d\,\kappa}\,\chi\right)\,\left(\frac{d}{d\,\kappa}\,d\right)\,y\,z+\left(\frac{d^2}{d\,\kappa^2}\,\chi\right)\,d\,y\,z=0\end{aligned} \tag{6.2.120}$$

上式に (6.2.83) 式を代入し、整理すると、

$$\begin{aligned}&\left(\left(\frac{d}{d\,\kappa}\,\chi\right)\,\left(\frac{d}{d\,\kappa}\,d\right)+\left(\frac{d^2}{d\,\kappa^2}\,\chi\right)\,d\right)\,y\,z\\&\quad=-2\,\left(\frac{d}{d\,\kappa}\,\chi\right)\,d\,\left(\frac{y\,z}{2\,(C^2+\kappa)}+\frac{y\,z}{2\,(B^2+\kappa)}\right)\end{aligned}$$

左辺を変形すると、

$$\begin{aligned}&\left(\frac{d}{d\,\kappa}\,\left(\left(\frac{d}{d\,\kappa}\,\chi\right)\,d\right)\right)\,y\,z\\&\quad=-2\,\left(\frac{d}{d\,\kappa}\,\chi\right)\,d\,\left(\frac{y\,z}{2\,(C^2+\kappa)}+\frac{y\,z}{2\,(B^2+\kappa)}\right)\end{aligned} \tag{6.2.121}$$

次式の置き換えを行い、

$$g=\left(\frac{d}{d\,\kappa}\,\chi\right)\,d \tag{6.2.122}$$

(6.2.121) 式に代入すると、

$$\left(\frac{d}{d\,\kappa}\,g\right)\,y\,z=-2\,g\,\left(\frac{y\,z}{2\,(C^2+\kappa)}+\frac{y\,z}{2\,(B^2+\kappa)}\right)$$

上式を ode2 関数で解くと、

$$g=\frac{\%c}{(B^2+\kappa)\,(C^2+\kappa)}$$

(6.2.122) 式に上式を代入し、(6.2.84) 式を代入すると、

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\,\kappa}\,\chi=&\frac{\%c}{d\,(B^2+\kappa)\,(C^2+\kappa)}\\=&\frac{\%c}{\sqrt{A^2+\kappa}\,(B^2+\kappa)^{\frac{3}{2}}\,(C^2+\kappa)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

上式を ode2 関数で解くと、

$$\chi=\%k1\int\frac{1}{\sqrt{A^2+\kappa}\,(B^2+\kappa)^{\frac{3}{2}}\,(C^2+\kappa)^{\frac{3}{2}}}d\kappa$$

上式から (6.2.119) 式の Φ は、

$$\Phi=\%k1\,x\,y\,\int_{\kappa}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{A^2+\kappa}\,(B^2+\kappa)^{\frac{3}{2}}\,(C^2+\kappa)^{\frac{3}{2}}}d\kappa \tag{6.2.123}$$

```
PHN2:-'diff(\Phi,n,1)=(-z*cos(\theta[y])+
 y*cos(\theta[z]))*\omega[x];
PHN21:'diff(\Phi,n,1)=1/h[1]*'diff(\Phi,
 \kappa,1);
PHN22:cos(\theta[y])=1/h[1]*'diff(y,
 \kappa,1);
PHN23:cos(\theta[z])=1/h[1]*'diff(z,
 \kappa,1);
subst([PHN21,PHN22,PHN23],PHN2);
PHN24:factor(%*h[1]);
PHN25:subst([DYK1,DZK1],rhs(PHN24));
PHN26:%k1*'diff(y,\kappa,1)*z*'integrate(
 PH21,\kappa,0,inf);
PHN27:%k1*y*'diff(z,\kappa,1)*'integrate(
 PH21,\kappa,0,inf);
%k1*y*z*'limit(PH21,\kappa,inf)-%k1*y*z
 *'limit(PH21,\kappa,0);
PHN28:ev(%,limit);
-PHN25=PHN26+PHN27+PHN28;
PHN29:subst([DYK1,DZK1],%);
I21:I='integrate(PH21,\kappa,0,inf);
I22:'integrate(PH21,\kappa,0,inf)=I;
subst([I22,\kappa=0],PHN29);
K21:solve(%,%k1)[1];
```

境界面は、楕円面であるから、(6.2.77) 式で $\theta=\kappa$ であり、楕円体境界は $\kappa=0$ となる。境界条件は次式となる。

$$-\frac{d}{d\,n}\,\Phi=\omega_x\,\left(y\cos\left(\theta_z\right)-\cos\left(\theta_y\right)\,z\right)\quad \text{at }\kappa=0 \tag{6.2.124}$$

ここで上式の左辺、右辺は、

$$\frac{d}{d\,n}\,\Phi=\frac{\frac{d}{d\,\kappa}\,\Phi}{h_1},\quad \cos\left(\theta_y\right)=\frac{\frac{d}{d\,\kappa}\,y}{h_1},\quad \cos\left(\theta_z\right)=\frac{\frac{d}{d\,\kappa}\,z}{h_1}$$

(6.2.124) 式に上式を代入し、整理すると、

$$-\frac{d}{d\,\kappa}\,\Phi=\omega_x\,\left(y\,\left(\frac{d}{d\,\kappa}\,z\right)-\left(\frac{d}{d\,\kappa}\,y\right)\,z\right)$$

上式に (6.2.83) 式を代入すると、

$$-\frac{d}{d\,\kappa}\,\Phi=\omega_x\,\left(\frac{y\,z}{2\,\left(C^2+\kappa\right)}-\frac{y\,z}{2\,\left(B^2+\kappa\right)}\right)$$

(6.2.123) 式から上式の境界条件式の $\kappa=0$ における $\frac{d}{d\,\kappa}\,\Phi$ を求めると、

$$\begin{aligned}-\omega_x\,\left(\frac{y\,z}{2\,\left(C^2+\kappa\right)}-\frac{y\,z}{2\,\left(B^2+\kappa\right)}\right)=&\%k1\,y\,\left(\frac{d}{d\,\kappa}\,z\right)\int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{A^2+\kappa}\,\left(B^2+\kappa\right)^{\frac{3}{2}}\,\left(C^2+\kappa\right)^{\frac{3}{2}}}d\kappa\\&+\%k1\,\left(\frac{d}{d\,\kappa}\,y\right)\,z\int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{A^2+\kappa}\,\left(B^2+\kappa\right)^{\frac{3}{2}}\,\left(C^2+\kappa\right)^{\frac{3}{2}}}d\kappa-\frac{\%k1\,y\,z}{A\,B^3\,C^3}\end{aligned}$$

上式に (6.2.83) 式を代入すると、

$$\begin{aligned}-\omega_x\,\left(\frac{y\,z}{2\,\left(C^2+\kappa\right)}-\frac{y\,z}{2\,\left(B^2+\kappa\right)}\right)=&\frac{\%k1\,y\,z}{2\,\left(C^2+\kappa\right)}\int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{A^2+\kappa}\,\left(B^2+\kappa\right)^{\frac{3}{2}}\,\left(C^2+\kappa\right)^{\frac{3}{2}}}d\kappa\\&+\frac{\%k1\,y\,z}{2\,\left(B^2+\kappa\right)}\int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{A^2+\kappa}\,\left(B^2+\kappa\right)^{\frac{3}{2}}\,\left(C^2+\kappa\right)^{\frac{3}{2}}}d\kappa-\frac{\%k1\,y\,z}{A\,B^3\,C^3}\end{aligned} \tag{6.2.125}$$

上式の積分を下記のように置き、

$$I=\int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{A^2+\kappa}\,\left(B^2+\kappa\right)^{\frac{3}{2}}\,\left(C^2+\kappa\right)^{\frac{3}{2}}}d\kappa \tag{6.2.126}$$

(6.2.125) 式を上式の I で表し、表面の $\kappa=0$ を代入すると、境界条件式は次式となる。

$$-\omega_x\,\left(\frac{y\,z}{2\,C^2}-\frac{y\,z}{2\,B^2}\right)=\frac{\%k1\,y\,z\,I}{2\,C^2}+\frac{\%k1\,y\,z\,I}{2\,B^2}-\frac{\%k1\,y\,z}{A\,B^3\,C^3}$$

上式から、

$$\%k1=\frac{\omega_x\,A\,B\,C^3-\omega_x\,A\,B^3\,C}{\left(A\,B\,C^3+A\,B^3\,C\right)\,I-2} \tag{6.2.127}$$

```
I23:1/(B^2+\kappa)-1/(C^2+\kappa);
factor(%);
1/denom(%)=1/num(%)*I23;
lhs(%)=expand(rhs(%));
I24:lhs(%)=factor(first(rhs(%)))+
 factor(last(rhs(%)));
PH21=lhs(I24)/d;
lhs(%)=first(rhs(I24))/d+last(rhs(I24))/d;
subst([D11],%);
I25:I='integrate(first(rhs(%)),\kappa,0,
 inf)+'integrate(last(rhs(%)),\kappa,0,
 inf);
1/(B^2+\kappa)/d;
AL29:subst([D11],%);
AL20:\alpha[2]=A*B*C*integrate(%,\kappa,
 0,inf);
AL21:%/A/B/C;
1/(C^2+\kappa)/d;
AL39:subst([D11],%);
```

```
AL30:\alpha[3]=A*B*C*integrate(%,\kappa,
 0,inf);
AL31:%/A/B/C;
I26:I=\alpha[2]/A/B/C/(C-B)/(C+B)
 -\alpha[3]/A/B/C/(C-B)/(C+B);
subst([I26],K21);
K22:factor(%);
```

下記の関係があり、

$$\frac{1}{B^2+\kappa}-\frac{1}{C^2+\kappa}=\frac{(C-B)\,(C+B)}{(B^2+\kappa)\,(C^2+\kappa)}$$

下記のように変形できる。

$$\begin{aligned}&\frac{1}{(B^2+\kappa)\,(C^2+\kappa)}\\&\quad=\frac{1}{(B^2+\kappa)\,(C-B)\,(C+B)}\\&\qquad-\frac{1}{(C-B)\,(C+B)\,(C^2+\kappa)}\end{aligned}$$

上式を用いて (6.2.126) 式の被積分関数は次のように表せる。

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{A^2+\kappa}\,(B^2+\kappa)^{\frac{3}{2}}\,(C^2+\kappa)^{\frac{3}{2}}}=&\frac{1}{d\,(B^2+\kappa)\,(C^2+\kappa)}\\=&\frac{1}{d\,(B^2+\kappa)\,(C-B)\,(C+B)}-\frac{1}{d\,(C-B)\,(C+B)\,(C^2+\kappa)}\\=&\frac{1}{\sqrt{A^2+\kappa}\,(B^2+\kappa)^{\frac{3}{2}}\,(C-B)\,(C+B)\,\sqrt{C^2+\kappa}}\\&-\frac{1}{\sqrt{A^2+\kappa}\,\sqrt{B^2+\kappa}\,(C-B)\,(C+B)\,(C^2+\kappa)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

上式から (6.2.126) 式の I は、

$$\begin{aligned}I=&\frac{1}{(C-B)\,(C+B)}\int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{A^2+\kappa}\,(B^2+\kappa)^{\frac{3}{2}}\,\sqrt{C^2+\kappa}}d\kappa\\&-\frac{1}{(C-B)\,(C+B)}\int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{A^2+\kappa}\,\sqrt{B^2+\kappa}\,(C^2+\kappa)^{\frac{3}{2}}}d\kappa\end{aligned}\tag{6.2.128}$$

ここで $\alpha_2,\,\alpha_3$ を下記とする。

$$\alpha_2=A\,B\,C\int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{A^2+\kappa}\,(B^2+\kappa)^{\frac{3}{2}}\,\sqrt{C^2+\kappa}}d\kappa\tag{6.2.129}$$

$$\alpha_3=A\,B\,C\int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{A^2+\kappa}\,\sqrt{B^2+\kappa}\,(C^2+\kappa)^{\frac{3}{2}}}d\kappa\tag{6.2.130}$$

(6.2.128) 式に (6.2.129)、式 (6.2.130) 式を代入すると、I は、

$$I=\frac{\alpha_2}{A\,B\,C\,(C-B)\,(C+B)}-\frac{\alpha_3}{A\,B\,C\,(C-B)\,(C+B)}\tag{6.2.131}$$

(6.2.127) 式に上式を代入すると、

$$\%k1=-\frac{\omega_x\,A\,B\,C\,(C-B)^2\,(C+B)^2}{\alpha_3\,C^2-\alpha_2\,C^2+2\,C^2+\alpha_3\,B^2-\alpha_2\,B^2-2\,B^2}\tag{6.2.132}$$

```
\Phi=%k1*y*z*'integrate(PH21,\kappa,0,inf);
subst([I22],%);
subst([I26],%);
subst([K22],%);
PH23:factor(%);
\Phi*'diff(\Phi,n,1);
subst([-PHN2],%);
subst([PH23],%);
T2:T=-1/2*\rho*'integrate('integrate(%,y),
 z);
CT2:subst(['integrate(z*'integrate(y*(y*
 cos(\theta[z])-cos(\theta[y])*z),y),z)=1
 ],rhs(%));
```

```
IT2:'integrate(z*'integrate(y*(y*cos(
 \theta[z])-cos(\theta[y])*z),y),z)=
'integrate('integrate('integrate(y^2-z^2,
 x),y),z);
T3:T=CT2*(-(2*A*B*C*(2*%pi*C^2-2*%pi*B^2))
 /15);
T31:T=1/2*k[4]*I[x]*\omega[x]^2;
IZ1:I[x]=(4*%pi*rho*A*B*C*(C^2+B^2))/15;
rhs(T3)=rhs(T31);
subst([IZ1],%);
solve(%,k[4])[1];
K31:factor(%);
```

(6.2.123) 式で $\kappa=0$ とし、(6.2.126) 式から次式となり、更に (6.2.131) 式、(6.2.132) 式を代入すると、Φ は、

$$\begin{aligned}\Phi =&\%k1\,y\,z\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{A^2+\kappa}\,(B^2+\kappa)^{\frac{3}{2}}\,(C^2+\kappa)^{\frac{3}{2}}}d\kappa=\%k1\,y\,z\,I\\ =&\%k1\,y\,z\left(\frac{\alpha_2}{A\,B\,C\,(C-B)\,(C+B)}-\frac{\alpha_3}{A\,B\,C\,(C-B)\,(C+B)}\right)\\ =&\frac{(\alpha_3-\alpha_2)\,\omega_x\,y\,z\,(C-B)\,(C+B)}{\alpha_3\,C^2-\alpha_2\,C^2+2\,C^2+\alpha_3\,B^2-\alpha_2\,B^2-2\,B^2}\end{aligned}\tag{6.2.133}$$

ところで、$\Phi\left(\frac{d}{d\,n}\Phi\right)$ は、

$$\begin{aligned}\Phi\left(\frac{d}{d\,n}\Phi\right)=&-\Phi\,\omega_x\,\left(y\cos\left(\theta_z\right)-\cos\left(\theta_y\right)\,z\right)\\ =&-\frac{(\alpha_3-\alpha_2)\,\omega_x^2\,y\,z\,\left(y\cos\left(\theta_z\right)-\cos\left(\theta_y\right)\,z\right)\,(C-B)\,(C+B)}{\alpha_3\,C^2-\alpha_2\,C^2+2\,C^2+\alpha_3\,B^2-\alpha_2\,B^2-2\,B^2}\end{aligned}\tag{6.2.134}$$

流体の運動エネルギーは (A.5.2) 式から、次式となり、上式から、

$$\begin{aligned}T=&-\frac{1}{2}\rho\iint\Phi\left(\frac{d}{d\,n}\Phi\right)dS\\ =&\frac{(\alpha_3-\alpha_2)\,\rho\,\omega_x^2\,\,(C-B)\,(C+B)}{2\,(\alpha_3\,C^2-\alpha_2\,C^2+2\,C^2+\alpha_3\,B^2-\alpha_2\,B^2-2\,B^2)}\iint z\,y\,\left(y\cos\left(\theta_z\right)-\cos\left(\theta_y\right)\,z\right)dS\end{aligned}\tag{6.2.135}$$

Gauss の定理：(A.2.1) 式から、上式の二重積分は次式となり、(6.2.167) 式から下記の積分は、

$$\begin{aligned}\iint z\,y\,\left(y\cos\left(\theta_z\right)-\cos\left(\theta_y\right)\,z\right)dS=&\iiint\frac{d}{d\,z}\,y^2\,z-\frac{d}{d\,y}\,y\,z^2\,dV\\ =\iiint y^2-z^2\,dV=&-\frac{2\,A\,B\,C\,\left(2\,\pi\,C^2-2\,\pi\,B^2\right)}{15}\end{aligned}$$

(6.2.135) 式に上式を代入すると次式となる。ここで k_4：付加質量係数、I_x：流体と同じ質量の楕円体の x 軸回りの慣性モーメントとすると、

$$T=-\frac{(\alpha_3-\alpha_2)\,\rho\,\omega_x^2\,A\,B\,C\,(C-B)\,(C+B)\,\left(2\,\pi\,C^2-2\,\pi\,B^2\right)}{15\,(\alpha_3\,C^2-\alpha_2\,C^2+2\,C^2+\alpha_3\,B^2-\alpha_2\,B^2-2\,B^2)}=\frac{k_4\,\omega_x^2\,I_x}{2}\tag{6.2.136}$$

ここで I_x は (6.2.165) 式から、

$$I_x=\frac{4\,\pi\,\rho\,A\,B\,C\,\left(C^2+B^2\right)}{15}$$

(6.2.136) 式に上式を代入すると、

$$-\frac{(\alpha_3-\alpha_2)\,\rho\,\omega_x^2\,A\,B\,C\,(C-B)\,(C+B)\,\left(2\,\pi\,C^2-2\,\pi\,B^2\right)}{15\,(\alpha_3\,C^2-\alpha_2\,C^2+2\,C^2+\alpha_3\,B^2-\alpha_2\,B^2-2\,B^2)}=\frac{2\,\pi\,k_4\,\rho\,\omega_x^2\,A\,B\,C\,\left(C^2+B^2\right)}{15}$$

上式から k_4：付加質量係数を求めると、

$$k_4=-\frac{(\alpha_3-\alpha_2)\,(C-B)^2\,(C+B)^2}{(C^2+B^2)\,(\alpha_3\,C^2-\alpha_2\,C^2+2\,C^2+\alpha_3\,B^2-\alpha_2\,B^2-2\,B^2)}\tag{6.2.137}$$

```
LI:[A=2,B=2,C=1];
subst(LI,AL20);
AL201:ev(%,integrate);
subst(LI,AL30);
AL301:ev(%,integrate);
subst([AL201,AL301],K31);
subst(LI,%);
float(%);
ev(%,integrate);
```

例として、楕円体で $A=2, B=2, C=1$ として、(6.2.129) 式、(6.2.130) 式の計算を Maxima で行うと下記となる。

$$
\begin{aligned}
\alpha_2 =&4\int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\kappa+1}\,(\kappa+4)^2}d\kappa\\
=&4\left(\frac{\pi}{2\,3^{\frac{3}{2}}}-\frac{2\sqrt{3}\,\pi+9}{108}\right)\\
\alpha_3 =&4\int_0^{\infty}\frac{1}{(\kappa+1)^{\frac{3}{2}}\,(\kappa+4)}d\kappa\\
=&4\left(\frac{\sqrt{3}\,\pi+18}{27}-\frac{\pi}{3^{\frac{3}{2}}}\right)
\end{aligned}
$$

(6.2.137) 式に上記結果を代入すると、下記となる。

$$k_4=0.33857793042679$$

z 軸方向の回転運動

```
kill(all);
depends([x,y,z,\Phi],[\kappa,\mu,\nu]);
depends([d],[\kappa]);
assume(A^2+\kappa>0);
assume(B^2+\kappa>0);
assume(C^2+\kappa>0);
assume(A>0);
assume(B>0);
assume(C>0);
depends([\chi,g],[\kappa]);
DXK1:'diff(x,\kappa,1)=x/(2*(A^2+\kappa));
DYK1:'diff(y,\kappa,1)=y/(2*(B^2+\kappa));
DZK1:'diff(z,\kappa,1)=z/(2*(C^2+\kappa));
D11:d=sqrt(A^2+\kappa)*sqrt(B^2+\kappa)
 *sqrt(C^2+\kappa);
PH2:\Phi=x*y*\chi;
'diff(d*('diff(\Phi,\kappa,1)),\kappa,1)=0;
subst([PH2],%);
ev(%,diff);
expand(%);
first(rest(lhs(%),3))+rest(lhs(%),6)=0;
%-rest(lhs(%),-2);
factor(%);
subst([DYK1,DZK1,DXK1],%);
G0:x*y*'diff(d*'diff(\chi,\kappa,1),
 \kappa,1)=rhs(%);
G1:g=('diff(chi,kappa,1))*d;
G2:solve(%,d)[1];
subst([G2],G0);
ode2(%,g,\kappa);
subst([G1],%);
%/d;
subst([D11],%);
PH21:1/denom(rhs(%));
\chi=%k1*'integrate(PH21,\kappa)+%k2;
PH22:\Phi=%k1*x*y*integrate(PH21,\kappa,
 \kappa,\inf);
```

z 軸方向に角速度：ω_z で回転する楕円体の運動エネルギーを求める。いま、Φ を下記とし、χ は κ のみの関数とする。

$$\Phi = \chi\, x\, y \tag{6.2.138}$$

(6.2.94) 式に上式を代入し、χ は κ のみの関数であることを考慮すると、

$$\begin{aligned}2\left(\frac{d}{d\kappa}\chi\right)d\,x\left(\frac{d}{d\kappa}y\right)+2\left(\frac{d}{d\kappa}\chi\right)d\left(\frac{d}{d\kappa}x\right)y\\+\left(\frac{d}{d\kappa}\chi\right)\left(\frac{d}{d\kappa}d\right)x\,y+\left(\frac{d^2}{d\kappa^2}\chi\right)d\,x\,y=0\end{aligned} \tag{6.2.139}$$

上式に (6.2.83) 式を代入し、整理すると、

$$\begin{aligned}&\left(\left(\frac{d}{d\kappa}\chi\right)\left(\frac{d}{d\kappa}d\right)+\left(\frac{d^2}{d\kappa^2}\chi\right)d\right)x\,y\\&=-2\left(\frac{d}{d\kappa}\chi\right)d\left(\frac{x\,y}{2\,(B^2+\kappa)}+\frac{x\,y}{2\,(A^2+\kappa)}\right)\end{aligned}$$

左辺を変形すると、

$$\begin{aligned}&\left(\frac{d}{d\kappa}\left(\left(\frac{d}{d\kappa}\chi\right)d\right)\right)x\,y\\&=-2\left(\frac{d}{d\kappa}\chi\right)d\left(\frac{x\,y}{2\,(B^2+\kappa)}+\frac{x\,y}{2\,(A^2+\kappa)}\right)\end{aligned} \tag{6.2.140}$$

次式の置き換えを行い、

$$g=\left(\frac{d}{d\kappa}\chi\right)d \tag{6.2.141}$$

(6.2.140) 式に代入すると、

$$\left(\frac{d}{d\kappa}g\right)x\,y=-2\,g\left(\frac{x\,y}{2\,(B^2+\kappa)}+\frac{x\,y}{2\,(A^2+\kappa)}\right)$$

上式を ode2 関数で解くと、

$$g=\frac{\%c}{(A^2+\kappa)\,(B^2+\kappa)}$$

(6.2.141) 式に上式を代入し、(6.2.84) 式を代入すると、

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\kappa}\chi=&\frac{\%c}{d\,(A^2+\kappa)\,(B^2+\kappa)}\\=&\frac{\%c}{(A^2+\kappa)^{\frac{3}{2}}\,(B^2+\kappa)^{\frac{3}{2}}\,\sqrt{C^2+\kappa}}\end{aligned}$$

上式を ode2 関数で解くと、

$$\chi=\%k1\int\frac{1}{(A^2+\kappa)^{\frac{3}{2}}\,(B^2+\kappa)^{\frac{3}{2}}\,\sqrt{C^2+\kappa}}d\kappa$$

上式から (6.2.138) 式の Φ は、

$$\Phi=\%k1\,x\,y\int_{\kappa}^{\infty}\frac{1}{(A^2+\kappa)^{\frac{3}{2}}\,(B^2+\kappa)^{\frac{3}{2}}\,\sqrt{C^2+\kappa}}d\kappa \tag{6.2.142}$$

```
PHN2:-'diff(\Phi,n,1)=(-y*cos(\theta[x])+
 x*cos(\theta[y]))*\omega[z];
PHN21:'diff(\Phi,n,1)=1/h[1]*'diff(\Phi,
 \kappa,1);
PHN22:cos(\theta[y])=1/h[1]*'diff(y,
 \kappa,1);
PHN23:cos(\theta[x])=1/h[1]*'diff(x,
 \kappa,1);
subst([PHN21,PHN22,PHN23],PHN2);
PHN24:factor(%*h[1]);
PHN25:subst([DYK1,DZK1,DXK1],rhs(PHN24));
PHN26:%k1*'diff(x,\kappa,1)*y*'integrate(
 PH21,\kappa,0,inf);
PHN27:%k1*x*'diff(y,\kappa,1)*'integrate(
 PH21,\kappa,0,inf);
%k1*x*y*'limit(PH21,\kappa,inf)-%k1*x*y*
 'limit(PH21,\kappa,0);
PHN28:ev(%,limit);
-PHN25=PHN26+PHN27+PHN28;
PHN29:subst([DYK1,DZK1,DXK1],%);
I21:I='integrate(PH21,\kappa,0,inf);
I22:'integrate(PH21,\kappa,0,inf)=I;
subst([I22],PHN29);
subst([\kappa=0],%);
K21:solve(%,%k1)[1];
```

境界面は、楕円面であるから、(6.2.77) 式で $\theta=\kappa$ であり、楕円体境界は $\kappa=0$ となる。境界条件は次式となる。

$$-\frac{d}{d\,n}\,\Phi=\left(x\cos\left(\theta_y\right)-\cos\left(\theta_x\right)\,y\right)\,\omega_z\quad \text{at } \kappa=0 \tag{6.2.143}$$

ここで上式の左辺、右辺は、

$$\frac{d}{d\,n}\,\Phi=\frac{\frac{d}{d\,\kappa}\,\Phi}{h_1},\quad \cos\left(\theta_y\right)=\frac{\frac{d}{d\,\kappa}\,y}{h_1},\quad \cos\left(\theta_x\right)=\frac{\frac{d}{d\,\kappa}\,x}{h_1}$$

(6.2.143) 式に上式を代入し、整理すると、

$$-\frac{d}{d\,\kappa}\,\Phi=\left(x\,\left(\frac{d}{d\,\kappa}\,y\right)-\left(\frac{d}{d\,\kappa}\,x\right)\,y\right)\,\omega_z$$

上式に (6.2.83) 式を代入すると、

$$-\frac{d}{d\,\kappa}\,\Phi=\omega_z\,\left(\frac{x\,y}{2\,\left(B^2+\kappa\right)}-\frac{x\,y}{2\,\left(A^2+\kappa\right)}\right)$$

(6.2.142) 式から上式の境界条件式の $\kappa=0$ における $\frac{d}{d\,\kappa}\,\Phi$ を求めると、

$$\begin{aligned}-\omega_z\,\left(\frac{x\,y}{2\,\left(B^2+\kappa\right)}-\frac{x\,y}{2\,\left(A^2+\kappa\right)}\right)=&\%k1\,x\,\left(\frac{d}{d\,\kappa}\,y\right)\,\int_0^{\infty}\frac{1}{\left(A^2+\kappa\right)^{\frac{3}{2}}\,\left(B^2+\kappa\right)^{\frac{3}{2}}\,\sqrt{C^2+\kappa}}d\kappa\\&+\%k1\,\left(\frac{d}{d\,\kappa}\,x\right)\,y\,\int_0^{\infty}\frac{1}{\left(A^2+\kappa\right)^{\frac{3}{2}}\,\left(B^2+\kappa\right)^{\frac{3}{2}}\,\sqrt{C^2+\kappa}}d\kappa-\frac{\%k1\,x\,y}{A^3\,B^3\,C}\end{aligned}$$

上式に (6.2.83) 式を代入すると、

$$\begin{aligned}-\omega_z\,\left(\frac{x\,y}{2\,\left(B^2+\kappa\right)}-\frac{x\,y}{2\,\left(A^2+\kappa\right)}\right)=&\frac{\%k1\,x\,y}{2\,\left(B^2+\kappa\right)}\,\int_0^{\infty}\frac{1}{\left(A^2+\kappa\right)^{\frac{3}{2}}\,\left(B^2+\kappa\right)^{\frac{3}{2}}\,\sqrt{C^2+\kappa}}d\kappa\\&+\frac{\%k1\,x\,y}{2\,\left(A^2+\kappa\right)}\,\int_0^{\infty}\frac{1}{\left(A^2+\kappa\right)^{\frac{3}{2}}\,\left(B^2+\kappa\right)^{\frac{3}{2}}\,\sqrt{C^2+\kappa}}d\kappa-\frac{\%k1\,x\,y}{A^3\,B^3\,C}\end{aligned} \tag{6.2.144}$$

上式の積分を下記のように置き、

$$I=\int_0^{\infty}\frac{1}{\left(A^2+\kappa\right)^{\frac{3}{2}}\,\left(B^2+\kappa\right)^{\frac{3}{2}}\,\sqrt{C^2+\kappa}}d\kappa \tag{6.2.145}$$

(6.2.144) 式を上式の I で表し、表面の $\kappa=0$ を代入すると、境界条件式は次式となる。

$$-\omega_z\,\left(\frac{x\,y}{2\,B^2}-\frac{x\,y}{2\,A^2}\right)=\frac{\%k1\,x\,y\,I}{2\,B^2}+\frac{\%k1\,x\,y\,I}{2\,A^2}-\frac{\%k1\,x\,y}{A^3\,B^3\,C}$$

上式から、

$$\%k1=\frac{\left(\omega_z\,A\,B^3-\omega_z\,A^3\,B\right)\,C}{\left(A\,B^3+A^3\,B\right)\,C\,I-2} \tag{6.2.146}$$

```
I23:1/(A^2+\kappa)-1/(B^2+\kappa);
factor(%);
%/num(%)=I23/num(%);
lhs(%)=expand(rhs(%));
I24:lhs(%)=factor(first(rhs(%)))
 +factor(last(rhs(%)));
PH21=lhs(I24)/d;
lhs(%)=first(rhs(I24))/d+last(rhs(I24))/d;
subst([D11],%);
'integrate(lhs(%),\kappa,0,inf)='integrate
 (first(rhs(%)),\kappa,0,inf)+'integrate(
 last(rhs(%)),\kappa,0,inf);
I25:I=rhs(%);
1/(B^2+\kappa)/d;
AL29:subst([D11],%);
AL20:\alpha[2]=A*B*C*integrate(%,\kappa,0
 ,inf);
AL21:%/A/B/C;
1/(A^2+\kappa)/d;
AL19:subst([D11],%);
```

```
AL10:\alpha[1]=A*B*C*integrate(%,\kappa,0,
 inf);
AL11:%/A/B/C;
subst([AL11,AL21],I25);
I26:I=\alpha[1]/A/B/C/(B-A)/(B+A)
 -\alpha[2]/A/B/C/(B-A)/(B+A);
subst([I26],K21);
K22:factor(%);
```

下記の関係があり、

$$\frac{1}{A^2+\kappa}-\frac{1}{B^2+\kappa}=\frac{(B-A)\,(B+A)}{(A^2+\kappa)\,(B^2+\kappa)}$$

下記のように変形できる。

$$\begin{aligned}&\frac{1}{(A^2+\kappa)\,(B^2+\kappa)}\\&\quad=\frac{1}{(A^2+\kappa)\,(B-A)\,(B+A)}\\&\quad\;-\frac{1}{(B-A)\,(B+A)\,(B^2+\kappa)}\end{aligned}$$

上式を用いて (6.2.145) 式の被積分関数は次のように表せる。

$$\begin{aligned}\frac{1}{(A^2+\kappa)^{\frac{3}{2}}\,(B^2+\kappa)^{\frac{3}{2}}\,\sqrt{C^2+\kappa}}=&\frac{1}{d\,(A^2+\kappa)\,(B^2+\kappa)}\\=&\frac{1}{d\,(A^2+\kappa)\,(B-A)\,(B+A)}-\frac{1}{d\,(B-A)\,(B+A)\,(B^2+\kappa)}\\=&\frac{1}{(A^2+\kappa)^{\frac{3}{2}}\,(B-A)\,(B+A)\,\sqrt{B^2+\kappa}\sqrt{C^2+\kappa}}\\&-\frac{1}{\sqrt{A^2+\kappa}\,(B-A)\,(B+A)\,(B^2+\kappa)^{\frac{3}{2}}\,\sqrt{C^2+\kappa}}\end{aligned}$$

上式から (6.2.145) 式の I は、

$$\begin{aligned}I=&\frac{1}{(B-A)\,(B+A)}\int_0^{\infty}\frac{1}{(A^2+\kappa)^{\frac{3}{2}}\,\sqrt{B^2+\kappa}\sqrt{C^2+\kappa}}d\kappa\\&-\frac{1}{(B-A)\,(B+A)}\int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{A^2+\kappa}\,(B^2+\kappa)^{\frac{3}{2}}\,\sqrt{C^2+\kappa}}d\kappa\end{aligned}\tag{6.2.147}$$

ここで $\alpha_1,\,\alpha_2$ を下記とする。

$$\alpha_1=A\,B\,C\int_0^{\infty}\frac{1}{(A^2+\kappa)^{\frac{3}{2}}\,\sqrt{B^2+\kappa}\sqrt{C^2+\kappa}}d\kappa\tag{6.2.148}$$

$$\alpha_2=A\,B\,C\int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{A^2+\kappa}\,(B^2+\kappa)^{\frac{3}{2}}\,\sqrt{C^2+\kappa}}d\kappa\tag{6.2.149}$$

(6.2.147) 式に (6.2.148)、式 (6.2.149) 式を代入すると、I は、

$$I=\frac{\alpha_1}{A\,B\,(B-A)\,(B+A)\,C}-\frac{\alpha_2}{A\,B\,(B-A)\,(B+A)\,C}\tag{6.2.150}$$

(6.2.146) 式に上式を代入すると、

$$\%k1=-\frac{\omega_z\,A\,B\,(B-A)^2\,(B+A)^2\,C}{\alpha_2\,B^2-\alpha_1\,B^2+2\,B^2+\alpha_2\,A^2-\alpha_1\,A^2-2\,A^2}\tag{6.2.151}$$

```
\Phi=%k1*x*y*'integrate(PH21,\kappa,0,inf);
subst([I22],%);
subst([I26],%);
subst([K22],%);
PH23:factor(%);
\Phi*'diff(\Phi,n,1);
subst([-PHN2],%);
subst([PH23],%);
T2:T=-1/2*\rho*'integrate('integrate(%,y),
 x);
```

```
CT2:subst(['integrate(x*'integrate(y*(x*
 cos(theta[y])-cos(theta[x])*y),y),x)=1],
 rhs(%));
T3:T=CT2*(-(4*%pi*A*B*(B-A)*(B+A)*C)/15);
T31:T=1/2*k[6]*I[z]*\omega[z]^2;
IZ1:I[z]=(4*%pi*rho*A*B*(B^2+A^2)*C)/15;
rhs(T3)=rhs(T31);
subst([IZ1],%);
solve(%,k[6])[1];
K31:factor(%);
```

(6.2.142) 式で $\kappa=0$ とし、(6.2.145) 式から次とし、更に (6.2.150) 式、(6.2.151) 式を代入すると、Φ は、

$$\begin{aligned}\Phi =&\%k1\,x\,y\int_0^\infty \frac{1}{\left(A^2+\kappa\right)^{\frac{3}{2}}\left(B^2+\kappa\right)^{\frac{3}{2}}\sqrt{C^2+\kappa}}d\kappa = \%k1\,x\,y\,I\\ =&\%k1\,x\,y\left(\frac{\alpha_1}{A\,B\,\left(B-A\right)\,\left(B+A\right)\,C}-\frac{\alpha_2}{A\,B\,\left(B-A\right)\,\left(B+A\right)\,C}\right)\\ =&\frac{\left(\alpha_2-\alpha_1\right)\,x\,y\,\omega_z\,\left(B-A\right)\,\left(B+A\right)}{\alpha_2\,B^2-\alpha_1\,B^2+2\,B^2+\alpha_2\,A^2-\alpha_1\,A^2-2\,A^2}\end{aligned}\tag{6.2.152}$$

ところで、$\Phi\left(\frac{d}{d\,n}\,\Phi\right)$ は、

$$\begin{aligned}\Phi\,\left(\frac{d}{d\,n}\,\Phi\right)=&-\Phi\,\left(x\cos\left(\theta_y\right)-\cos\left(\theta_x\right)\,y\right)\,\omega_z\\ =&-\frac{\left(\alpha_2-\alpha_1\right)\,x\,y\,\left(x\cos\left(\theta_y\right)-\cos\left(\theta_x\right)\,y\right)\,\omega_z^2\,\left(B-A\right)\,\left(B+A\right)}{\alpha_2\,B^2-\alpha_1\,B^2+2\,B^2+\alpha_2\,A^2-\alpha_1\,A^2-2\,A^2}\end{aligned}\tag{6.2.153}$$

流体の運動エネルギーは (A.5.2) 式から、次式となり、上式から、

$$\begin{aligned}T=&-\frac{1}{2}\rho\iint\Phi\,\left(\frac{d}{d\,n}\,\Phi\right)\,dS\\ =&\frac{\left(\alpha_2-\alpha_1\right)\,\rho\,\omega_z^2\,\left(B-A\right)\,\left(B+A\right)}{2\,\left(\alpha_2\,B^2-\alpha_1\,B^2+2\,B^2+\alpha_2\,A^2-\alpha_1\,A^2-2\,A^2\right)}\iint x\,y\,\left(x\cos\left(\theta_y\right)-\cos\left(\theta_x\right)\,y\right)dS\end{aligned}\tag{6.2.154}$$

Gauss の定理：(A.2.1) 式から、上式の二重積分は次式となり、(6.2.168) 式から下記の積分は、

$$\begin{aligned}\iint x\,y\,\left(x\cos\left(\theta_y\right)-\cos\left(\theta_x\right)\,y\right)dS=&\iiint\frac{d}{d\,y}\,x^2\,y-\frac{d}{d\,x}\,x\,y^2\,dV\\ =&\iiint x^2-y^2\,dV=-\frac{4\,\pi\,A\,B\,C\,\left(B-A\right)\,\left(B+A\right)}{15}\end{aligned}$$

(6.2.154) 式に上式を代入すると次式となる。ここで k_6：付加質量係数、I_z：流体と同じ質量の楕円体の z 軸回りの慣性モーメントとすると、

$$T=-\frac{2\,\pi\,\left(\alpha_2-\alpha_1\right)\,\rho\,\omega_z^2\,A\,B\,\left(B-A\right)^2\left(B+A\right)^2C}{15\,\left(\alpha_2\,B^2-\alpha_1\,B^2+2\,B^2+\alpha_2\,A^2-\alpha_1\,A^2-2\,A^2\right)}=\frac{k_6\,\omega_z^2\,I_z}{2}\tag{6.2.155}$$

ここで I_z は (6.2.166) 式から、

$$I_z=\frac{4\,\pi\,\rho\,A\,B\,C\,\left(B^2+A^2\right)}{15}$$

(6.2.155) 式に上式を代入すると、

$$-\frac{2\,\pi\,\left(\alpha_2-\alpha_1\right)\,\rho\,\omega_z^2\,A\,B\,\left(B-A\right)^2\left(B+A\right)^2C}{15\,\left(\alpha_2\,B^2-\alpha_1\,B^2+2\,B^2+\alpha_2\,A^2-\alpha_1\,A^2-2\,A^2\right)}=\frac{2\,\pi\,k_6\,\rho\,\omega_z^2\,A\,B\,\left(B^2+A^2\right)\,C}{15}$$

上式から k_6：付加質量係数を求めると、

$$k_6=-\frac{\left(\alpha_2-\alpha_1\right)\,\left(B-A\right)^2\left(B+A\right)^2}{\left(B^2+A^2\right)\,\left(\alpha_2\,B^2-\alpha_1\,B^2+2\,B^2+\alpha_2\,A^2-\alpha_1\,A^2-2\,A^2\right)}\tag{6.2.156}$$

```
LI:[A=8.01,B=1,C=1];
subst(LI,AL20);
AL201:ev(%,integrate);
subst(LI,AL10);
AL101:ev(%,integrate);
subst([AL201,AL101],K31);
subst(LI,%);
float(%);
PL1:subst([LI],A*B*C*AL19);
%plot2d(PL1,[\kappa,0,100]);
depends([\kappa],[t]);
KD1:\kappa=%e^(2*sinh(t));
DKD1:diff(KD1,t,1);
subst([KD1],PL1);
PL2:%*rhs(DKD1);
%plot2d(PL2,[t,-10,10]);
DT1:DT=0.1;
subst([t=DT*n],PL2);
%*DT;
subst([DT1],%);
'sum(%,n,-100,100);
AL102:\alpha[1]=ev(%,sum);
PL1:subst([LI],A*B*C*AL29);
plot2d(PL1,[\kappa,0,100]);
subst([KD1],PL1);
PL2:%*rhs(DKD1);
plot2d(PL2,[t,-10,10]);
subst([t=DT*n],PL2);
%*DT;
subst([DT1],%);
'sum(%,n,-100,100);
AL202:\alpha[2]=ev(%,sum);
subst([AL202,AL102],K31);
subst(LI,%);
float(%);
```

例として、楕円体で $A=8.01$, $B=1$, $C=1$ として、(6.2.148) 式、(6.2.149) 式の計算を Maxima で行うと下記となり。結果が得られない。

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 =& 8.01 \int_0^{\infty} \frac{1}{(\kappa+1)\,(\kappa+64.1601)^{\frac{3}{2}}} d\kappa \\
=& 0.056737088992185 \\
\alpha_2 =& 8.01 \int_0^{\infty} \frac{1}{(\kappa+1)^2\sqrt{\kappa+64.1601}} d\kappa
\end{aligned}
$$

(6.2.111) 式の方法で、半無限積分を無限積分に変換し、α_1, α_2 を求めると下記となる。

$$\alpha_1 = 0.056737088992181$$

$$\alpha_2 = 0.97163145550391$$

(6.2.156) 式に上記結果を代入すると下記の結果を得る。これは図 6.2.16[1] の k' の結果と一致している。

$$k_6 = 0.83967764125432$$

a/b	k_1	k_2	k'
1	0.5	0.5	0
1.50	0.305	0.621	0.094
2.00	0.209	0.702	0.240
2.51	0.156	0.763	0.367
2.99	0.122	0.803	0.465
3.99	0.082	0.860	0.608
4.99	0.059	0.895	0.701
6.01	0.045	0.918	0.764
6.97	0.036	0.933	0.805
8.01	0.029	0.945	0.840
9.02	0.024	0.954	0.865
9.97	0.021	0.960	0.883
∞	0	1	1

図 6.2.16: 付加質量係数

[1] ラム：今井　功、橋本　英典訳：流体力学（1）、第 5 章　液体の渦なし運動：3 次元の問題　115. 24)

楕円体の体積・慣性モーメント

```
kill(all);
assume(A>0,B>0,C>0,sin(theta)>0);
depends([x,y,z],[o,p,q]);
depends([o,p,q],[r,\theta,\phi]);
EL2:x^2/(A^2)+y^2/(B^2)+z^2/(C^2)=1;
O1:x=A*o;
P1:y=B*p;
Q1:z=C*q;
EL3:subst([O1,P1,Q1],EL2);
h[1]^2=('diff(x,o,1))^2+('diff(y,o,1))^2
 +('diff(z,o,1))^2;
subst([O1,P1,Q1],%);
H11:ev(%,diff);
h[2]^2=('diff(x,p,1))^2+('diff(y,p,1))^2
 +('diff(z,p,1))^2;
subst([O1,P1,Q1],%);
H21:ev(%,diff);
h[3]^2=('diff(x,q,1))^2+('diff(y,q,1))^2
 +('diff(z,q,1))^2;
subst([O1,P1,Q1],%);
H31:ev(%,diff);
O2:o=r*sin(\theta)*cos(\phi);
P2:p=r*sin(\theta)*sin(\phi);
Q2:q=r*cos(\theta);
h[1]^2=('diff(o,r,1))^2+('diff(p,r,1))^2
 +('diff(q,r,1))^2;
subst([O2,P2,Q2],%);
ev(%,diff);
H12:trigsimp(%);
h[2]^2=('diff(o,\theta,1))^2+('diff(p,
 \theta,1))^2+('diff(q,\theta,1))^2;
subst([O2,P2,Q2],%);
ev(%,diff);
H22:trigsimp(%);
h[3]^2=('diff(o,\phi,1))^2+('diff(p,
 \phi,1))^2+('diff(q,\phi,1))^2;
subst([O2,P2,Q2],%);
ev(%,diff);
H32:trigsimp(%);
H11*H12*H21*H22*H31*H32;
H0:h=sqrt(rhs(%));
/* 体積 */
V='integrate('integrate('integrate(rhs(
 H0),r,0,1),\theta,0,%pi),\phi,0,2*%pi);
ev(%,integrate);
```

楕円体の体積、慣性モーメントなどを求める。楕円体を表す式は次式である。

$$\frac{z^2}{C^2}+\frac{y^2}{B^2}+\frac{x^2}{A^2}=1 \tag{6.2.157}$$

次式の変換を行うと、

$$x=o\,A,\quad y=p\,B,\quad z=q\,C \tag{6.2.158}$$

楕円体の (6.2.157) 式は、次式の球を表す式となる。

$$q^2+p^2+o^2=1 \tag{6.2.159}$$

$h_1,\, h_2\, h_3$ は (B.3.5) 式から次式となり、(6.2.158) 式を代入すると、

$$\begin{aligned}
h_1^2=&\left(\frac{d}{d\,o}\,z\right)^2+\left(\frac{d}{d\,o}\,y\right)^2+\left(\frac{d}{d\,o}\,x\right)^2=A^2\\
h_2^2=&\left(\frac{d}{d\,p}\,z\right)^2+\left(\frac{d}{d\,p}\,y\right)^2+\left(\frac{d}{d\,p}\,x\right)^2=B^2\\
h_3^2=&\left(\frac{d}{d\,q}\,z\right)^2+\left(\frac{d}{d\,q}\,y\right)^2+\left(\frac{d}{d\,q}\,x\right)^2=C^2
\end{aligned} \tag{6.2.160}$$

opq 座標を次の極座標の変換する。

$$o=\cos(\phi)\ r\sin(\theta)\,,\ p=\sin(\phi)\ r\sin(\theta)\,,\ q=r\cos(\theta) \tag{6.2.161}$$

$h_1,\, h_2\, h_3$ は (B.3.5) 式から次式となり、(6.2.161) 式を代入すると、

$$\begin{aligned}
h_1^2=&\left(\frac{d}{d\,r}\,q\right)^2+\left(\frac{d}{d\,r}\,p\right)^2+\left(\frac{d}{d\,r}\,o\right)^2=1\\
h_2^2=&\left(\frac{d}{d\,\theta}\,q\right)^2+\left(\frac{d}{d\,\theta}\,p\right)^2+\left(\frac{d}{d\,\theta}\,o\right)^2=r^2\\
h_3^2=&\left(\frac{d}{d\,\phi}\,q\right)^2+\left(\frac{d}{d\,\phi}\,p\right)^2+\left(\frac{d}{d\,\phi}\,o\right)^2=r^2\sin(\theta)^2
\end{aligned} \tag{6.2.162}$$

以上から、xyz 座標から opq 座標、極座標へ変換して積分するときには下記の修正を行う。

$$dxdydz \to A\,B\,C\,dodpdq \to r^2\sin(\theta)\ A\,B\,C\,drd\theta d\phi \tag{6.2.163}$$

以上から楕円体の体積：V は次式の極座標積分で行える。

$$\begin{aligned}
V=&A\,B\,C\int_0^{2\,\pi}\int_0^{\pi}\int_0^1 r^2\sin(\theta)\,dr\,d\theta\,d\phi\\
=&\frac{4\,\pi\,A\,B\,C}{3}
\end{aligned} \tag{6.2.164}$$

```
/* x 軸　楕円体の慣性モーメント */
IN1:y^2+z^2;
IX1:I[x]=\rho*'integrate('integrate(
 'integrate(IN1,x),y),z);
IN11:subst([O1,P1,Q1],IN1);
I[x]=\rho*A*B*C*'integrate(
 'integrate('integrate(IN11,o),p),q);
```

```
IN12:subst([O2,P2,Q2],IN11);
I[x]=\rho*A*B*C*'integrate('integrate(
 'integrate(IN12*r^2*sin(\theta),r,0,1),
 \theta,0,%pi),\phi,0,2*%pi);
ev(%,integrate);
factor(%);
```

x 軸回りの楕円体の慣性モーメントは次式で表せ、(6.2.158) 式、(6.2.161) 式を代入し、次の極座標積分で行える。

$$
\begin{aligned}
I_x =&\rho \iiint z^2+y^2 dxdydz \\
=&\rho\,A\,B\,C \iiint q^2\,C^2+p^2\,B^2 dodpdq \\
=&\rho\,A\,B\,C \int_0^{2\,\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1} r^2\sin\left(\theta\right)\,\left(r^2\cos\left(\theta\right)^2\,C^2+\sin\left(\phi\right)^2\,r^2\sin\left(\theta\right)^2\,B^2\right) drd\theta d\phi \\
=&\frac{4\,\pi\,\rho\,A\,B\,C\,\left(C^2+B^2\right)}{15}
\end{aligned}
\tag{6.2.165}
$$

```
/* z 軸　楕円体の慣性モーメント */
IN1:x^2+y^2;
IX1:I[z]=\rho*'integrate('integrate(
 'integrate(IN1,x),y),z);
IN11:subst([O1,P1,Q1],IN1);
I[z]=\rho*A*B*C*'integrate('integrate(
 'integrate(IN11,o),p),q);
```

```
IN12:subst([O2,P2,Q2],IN11);
I[z]=\rho*A*B*C*'integrate('integrate(
 'integrate(IN12*r^2*sin(\theta),r,0,1),
 \theta,0,%pi),\phi,0,2*%pi);
ev(%,integrate);
factor(%);
```

z 軸回りの楕円体の慣性モーメントは次式で表せ、(6.2.158) 式、(6.2.161) 式を代入し、次の極座標積分で行える。

$$
\begin{aligned}
I_z =&\rho \iiint y^2+x^2 dxdydz \\
=&\rho\,A\,B\,C \iiint p^2\,B^2+o^2\,A^2 dodpdq \\
=&\rho\,A\,B\,C \int_0^{2\,\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1} r^2\sin\left(\theta\right)\,\left(\sin\left(\phi\right)^2\,r^2\sin\left(\theta\right)^2\,B^2+\cos\left(\phi\right)^2\,r^2\sin\left(\theta\right)^2\,A^2\right) drd\theta d\phi \\
=&\frac{4\,\pi\,\rho\,A\,B\,C\,\left(B^2+A^2\right)}{15}
\end{aligned}
\tag{6.2.166}
$$

```
/* x 軸回転　積分 */
IN1:y^2-z^2;
IX1:I[x]='integrate('integrate(
 'integrate(IN1,x),y),z);
IN11:subst([O1,P1,Q1],IN1);
I[x]=A*B*C*'integrate('integrate(
 'integrate(IN11,o),p),q);
```

```
IN12:subst([O2,P2,Q2],IN11);
I[x]=A*B*C*'integrate('integrate(
 'integrate(IN12*r^2*sin(\theta),r,0,1),
 \theta,0,%pi),\phi,0,2*%pi);
ev(%,integrate);
factor(%);
```

x 軸回りの下記の積分は (6.2.158) 式、(6.2.161) 式を代入し、次式の極座標積分で行える。

$$
\begin{aligned}
I_x^{‘} =& \iiint y^2 - z^2 dxdydz \\
=& A\,B\,C\,\iiint p^2\,B^2 - q^2\,C^2 dodpdq \\
=& A\,B\,C\,\int_0^{2\,\pi}\int_0^{\pi}\int_0^1 r^2\sin\left(\theta\right)\,\left(\sin\left(\phi\right)^2\,r^2\sin\left(\theta\right)^2\,B^2 - r^2\cos\left(\theta\right)^2\,C^2\right)drd\theta d\phi \\
=& -\frac{4\,\pi\,A\,B\,C\,\left(C-B\right)\,\left(C+B\right)}{15}
\end{aligned}
\tag{6.2.167}
$$

```
/* z 軸回転　積分 */
IN1:x^2-y^2;
IX1:I[z]='integrate('integrate(
 'integrate(IN1,x),y),z);
IN11:subst([O1,P1,Q1],IN1);
I[z]=A*B*C*'integrate('integrate(
 'integrate(IN11,o),p),q);
```

```
IN12:subst([O2,P2,Q2],IN11);
I[z]=A*B*C*'integrate('integrate(
 'integrate(IN12*r^2*sin(\theta),r,0,1),
 \theta,0,%pi),\phi,0,2*%pi);
ev(%,integrate);
factor(%);
```

z 軸回りの下記の積分は (6.2.158) 式、(6.2.161) 式を代入し、次式の極座標積分で行える。

$$
\begin{aligned}
I_z{‘} =& \iiint x^2 - y^2 dxdydz \\
=& A\,B\,C\,\iiint o^2\,A^2 - p^2\,B^2 dodpdq \\
=& A\,B\,C\,\int_0^{2\,\pi}\int_0^{\pi}\int_0^1 r^2\sin\left(\theta\right)\,\left(\cos\left(\phi\right)^2\,r^2\sin\left(\theta\right)^2\,A^2 - \sin\left(\phi\right)^2\,r^2\sin\left(\theta\right)^2\,B^2\right)drd\theta d\phi \\
=& -\frac{4\,\pi\,A\,B\,C\,\left(B-A\right)\,\left(B+A\right)}{15}
\end{aligned}
\tag{6.2.168}
$$

例題 6.2.12　液中での大きい気泡の運動

気泡が小さいと表面張力の影響が大きくなり、球形の気泡が上昇する。気泡体積が 5cc 以上では気泡は下図のように傘状になって上昇する。この傘状の気泡の上昇速度：U を求める。

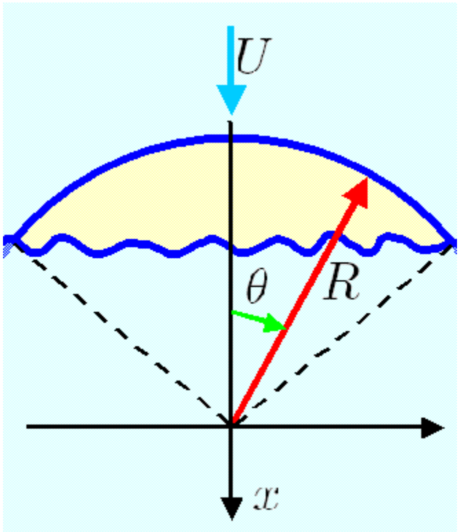


図 6.2.17: 液中での大きい気泡の運動

```
/* 液中での大きな気泡 */
kill(all);
assume(\theta>0);
P1:p[1]+1/2*\rho*v^2-\rho*g*x=p[0];
P10:p[1]=p[0];
subst([P10],P1);
VG1:solve(%,v)[2];
X1:x=R*(1-cos(\theta));
lhs(X1)=taylor(rhs(X1),\theta,0,4);
X2:subst([\theta^4=0],%);
VG2:subst([X2],VG1);
VH1:v=3/2*U*sin(\theta);
lhs(VH1)=taylor(rhs(VH1),\theta,0,4);
VH2:subst([\theta^3=0],%);
subst([VH2],VG2);
U1:solve(%,U)[1];
```

軸を気泡に固定する。気泡先端のよどみ点における圧力：p_0 とする。気泡表面の圧力：p は気泡内の圧力：p_1 と一致しなければならない。そこで泡の表面の流れは Bernoulli の定理から下記となる。

$$-g\,\rho\,x+\frac{\rho\,{v_1}^2}{2}+p_1=p_0$$

よどみ点も気泡の表面にあるから、

$$p_1=p_0$$

上記の二式から、気泡表面の流速：v_1 は、

$$v_1=\sqrt{2}\,\sqrt{g\,x}$$

気泡の先端形状が球面に近いとすると、x と R,θ の関係は Taylor 展開で高次の微少項を省略すると下記となる。

$$x=(1-\cos(\theta))\;R\approx\frac{R\,\theta^2}{2}-\frac{R\,\theta^4}{24}+...\approx\frac{\theta^2\,R}{2}$$

上式を流速に代入すると、

$$v_1=\theta\,\sqrt{g\,R}$$

また、球面の流速分布:v_2 は (6.2.25) 式、(209 ページ) から Taylor 展開で高次の微少項を省略すると下記となる。

$$v_2=\frac{3\sin(\theta)\;U}{2}\approx\frac{3\,U\,\theta}{2}-\frac{U\,\theta^3}{4}+...\approx\frac{3\,\theta\,U}{2}$$

$v_1=v_2$ から、

$$\frac{3\,\theta\,U}{2}=\theta\,\sqrt{g\,R}$$

以上から、気泡の上昇速度：U は、

$$U=\frac{2\,\sqrt{g\,R}}{3}$$

第7章　揚力

7.1　２次元翼

7.1.1　Kutta-Joukowski の定理

二次元の流場で、物体内にわき出し、二重わき出しや渦循環がある場合に物体に作用する力を求める

```
/* Kutta-Joukowski の定理＋平板翼　*/
kill(all);
declare(z,complex);
declare(F,complex);
declare(c,complex);
declare(\zeta,complex);
assume(a>0);
assume(b>0);
assume(z^2>A^2);
assume(A>0);
assume(\rho>0);
assume(U>0);
assume(\gamma>0);
M1:m*log(z-c);
G1:%i*\gamma/2/%pi*log(z-c);
LOG1:A[1]*log(z-c);
LOG2:A[1]*log(z*(1-c/z));
taylor(%,c,0,5);
MU1:\mu/(z-c);
MU2:\mu/z/(1-c/z);
taylor(%,c,0,5);
```

二次元流場で、c に位置するわき出しの複素ポテンシャルは (5.1.31) 式から、渦循環の複素ポテンシャルは (5.1.33) 式から、二重わき出しの複素ポテンシャルは (5.1.32) 式から、一般的に次式で表現できる。

$$\text{わき出し}:m\log(z-c) \qquad (m:\text{わき出し強さ})$$

$$\text{渦循環}:\frac{i\log(z-c)\,\Gamma}{2\,\pi} \qquad (\Gamma:\text{渦循環強さ})$$

$$\text{二重わき出し}:\frac{\mu}{z-c} \qquad (\mu:\text{二重わき出し強さ})$$

c が遠方の流場に比べ、小さいとして Taylor 展開すると、

$$A_1\log(z-c)=\log(z)\;A_1-\frac{A_1\,c}{z}-\frac{A_1\,c^2}{2\,z^2}-\frac{A_1\,c^3}{3\,z^3}-\frac{A_1\,c^4}{4\,z^4}-\frac{A_1\,c^5}{5\,z^5}+\ldots$$

$$\frac{\mu}{z-c}=\frac{\mu}{z}+\frac{\mu\,c}{z^2}+\frac{\mu\,c^2}{z^3}+\frac{\mu\,c^3}{z^4}+\frac{\mu\,c^4}{z^5}+\frac{\mu\,c^5}{z^6}+\ldots$$

```
F0:F=U*%e^(-%i*\alpha)*z+A[0]+m*log(z)
  +%i*\gamma/2/%pi*log(z)+A[2]/z
  +A[3]/z^2+A[4]/z^3;
DF0:'diff(F,z,1)=diff(rhs(F0),z,1);
DF02:lhs(DF0)^2=expand(rhs(DF0)^2);
FXY1:F[x]-%i*F[y]=%i*\rho/2
  *'integrate(lhs(DF02),z);
COFF1:coeff(rhs(DF02),z,-1);
lhs(FXY1)=%i*\rho/2*2*%pi*%i*COFF1;
FXY2:lhs(FXY1)=rectform(rhs(%));
FX1:F[x]=realpart(rhs(FXY2));
FY1:F[y]=-imagpart(rhs(FXY2));
FX2:subst([m=0],FX1);
FY2:subst([m=0],FY1);
L1:L=sqrt(rhs(FX2)^2+rhs(FY2)^2);
trigsimp(%);
ZDF02:expand(z*DF02);
MXY1:M+%i*N=-\rho/2*'integrate(lhs(ZDF02),
 z);
COFF2:coeff(rhs(ZDF02),z,-1);
MXY1:M+%i*N=-\rho/2*2*%pi*%i*COFF2;
MXY2:lhs(MXY1)=rectform(rhs(%));
M1:M=realpart(realpart(rhs(MXY2)));
subst([m=0],M1);
```

以上から、物体内にわき出し、二重わき出しや渦循環がある場合の複素ポテンシャルは下記のように表現できる。

$$F=\frac{i\log(z)\,\Gamma}{2\,\pi}+e^{-i\,\alpha}\,z\,U+m\log(z)+\frac{A_2}{z}+\frac{A_3}{z^2}+\frac{A_4}{z^3}+A_0+\ldots \tag{7.1.1}$$

上式を z で微分し、その二乗を求めると、

$$\frac{d}{d\,z}\,F=\frac{i\,\Gamma}{2\,\pi\,z}+e^{-i\,\alpha}\,U+\frac{m}{z}-\frac{A_2}{z^2}-\frac{2\,A_3}{z^3}-\frac{3\,A_4}{z^4}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{d}{d\,z}\,F\right)^2=&-\frac{\Gamma^2}{4\,\pi^2\,z^2}+\frac{i\,e^{-i\,\alpha}\,U\,\Gamma}{\pi\,z}+\frac{i\,m\,\Gamma}{\pi\,z^2}-\frac{i\,A_2\,\Gamma}{\pi\,z^3}-\frac{2\,i\,A_3\,\Gamma}{\pi\,z^4}-\frac{3\,i\,A_4\,\Gamma}{\pi\,z^5}+e^{-2\,i\,\alpha}\,U^2\\&+\frac{2\,e^{-i\,\alpha}\,m\,U}{z}-\frac{2\,A_2\,e^{-i\,\alpha}\,U}{z^2}-\frac{4\,A_3\,e^{-i\,\alpha}\,U}{z^3}-\frac{6\,A_4\,e^{-i\,\alpha}\,U}{z^4}+\frac{m^2}{z^2}+...\end{aligned}$$

物体に作用する力：F_x, F_y は、Blasius の定理：(5.1.59) 式から、積分を留数定理を用いて解き、

$$\begin{aligned}F_x-i\,F_y=&\frac{i\,\rho}{2}\int\left(\frac{d}{d\,z}\,F\right)^2 dz\\=&-\pi\,\rho\,\left(\frac{i\,e^{-i\,\alpha}\,U\,\Gamma}{\pi}+2\,e^{-i\,\alpha}\,m\,U\right)\\=&-\pi\,\rho\,\left(\frac{\sin(\alpha)\;U\,\Gamma}{\pi}+2\cos(\alpha)\;m\,U\right)-i\,\pi\,\rho\,\left(\frac{\cos(\alpha)\;U\,\Gamma}{\pi}-2\sin(\alpha)\;m\,U\right)\end{aligned}\tag{7.1.2}$$

上式より、

$$F_x=-\pi\,\rho\,\left(\frac{\sin(\alpha)\;U\,\Gamma}{\pi}+2\cos(\alpha)\;m\,U\right)$$

$$F_y=\pi\,\rho\,\left(\frac{\cos(\alpha)\;U\,\Gamma}{\pi}-2\sin(\alpha)\;m\,U\right)$$

わき出しの総和は一般に物体の外に出ないので、$m=0$ として、物体に作用する力：F_x, F_y は、

$$F_x=-\sin(\alpha)\;\rho\,U\,\Gamma,\quad F_y=\cos(\alpha)\;\rho\,U\,\Gamma,\quad L=\rho\,U\,\Gamma\tag{7.1.3}$$

物体に作用するモーメントについて、下記を求め、

$$\begin{aligned}z\left(\frac{d}{d\,z}\,F\right)^2=&-\frac{\Gamma^2}{4\,\pi^2\,z}+\frac{i\,e^{-i\,\alpha}\,U\,\Gamma}{\pi}+\frac{i\,m\,\Gamma}{\pi\,z}-\frac{i\,A_2\,\Gamma}{\pi\,z^2}-\frac{2\,i\,A_3\,\Gamma}{\pi\,z^3}-\frac{3\,i\,A_4\,\Gamma}{\pi\,z^4}+e^{-2\,i\,\alpha}\,z\,U^2\\&-\frac{2\,A_2\,e^{-i\,\alpha}\,U}{z}-\frac{4\,A_3\,e^{-i\,\alpha}\,U}{z^2}-\frac{6\,A_4\,e^{-i\,\alpha}\,U}{z^3}+2\,e^{-i\,\alpha}\,m\,U+\frac{m^2}{z}\\&-\frac{2\,A_2\,m}{z^2}-\frac{4\,A_3\,m}{z^3}+\frac{A_2^2}{z^3}+...\end{aligned}$$

物体に作用するモーメント：M は、Blasius の定理：(5.1.60) 式から、積分を留数定理を用いて解き、

$$\begin{aligned}i\,N+M=&-\frac{\rho}{2}\int z\left(\frac{d}{d\,z}\,F\right)^2 dz\\=&-i\,\pi\,\rho\,\left(-\frac{\Gamma^2}{4\,\pi^2}+\frac{i\,m\,\Gamma}{\pi}-2\,A_2\,e^{-i\,\alpha}\,U+m^2\right)\end{aligned}$$

以上から、物体に作用するモーメント：M は、

$$M=-\pi\,\rho\,\left(-\frac{m\,\Gamma}{\pi}-2\,A_2\sin(\alpha)\;U\right)$$

上記同様、$m=0$ として、

$$M=2\,\pi\,A_2\sin(\alpha)\;\rho\,U\tag{7.1.4}$$

7.1.2 二次元翼に作用する揚力(写像関数を用いた)

写像関数を用いて、二次元翼形状を円写像する場合、一様流中の翼の揚力性能について調べる。

なお、下記のプログラムは、前前項、前項に続いて実行する。

```
ZT1:z=\zeta+B[1]/\zeta+B[2]/\zeta^2
  +B[3]/\zeta^3+B[4]/\zeta^4;
ZT2:lhs(ZT1)=rhs(ZT1)-\zeta+Z;
solve(ZT2,Z)[1];
ZT3:expand(subst([Z=\zeta],%));
ZT30:rhs(ZT3)-z;
ZT301:-B[1]/zeta-B[2]/zeta^2-B[3]/zeta^3
  -B[4]/zeta^4=b;
ZT302:b=-B[1]/zeta-B[2]/zeta^2-B[3]/zeta^3
  -B[4]/zeta^4;
ZT31:1/\zeta;
ZT32:1/\zeta^2;
ZT33:1/\zeta^3;
subst([\zeta=b+z],ZT31);
taylor(%,b,0,2);
subst([ZT302],%);
expand(%);
ZT4:\zeta=z-B[1]/z-sum(C[n]/z^n,n,2,inf);
ZT41:\zeta=z-B[1]/z-C[2]/z^2-C[3]/z^3;
ZT42:\zeta=z*(1-B[1]/z^2-C[2]/z^3-C[3]
 /z^4);
ZT43:d=-B[1]/z^2-C[2]/z^3-C[3]/z^4;
ZT44:\zeta=z*(1+d);
```

翼より十分遠方では、翼を表す z 平面と写像円を表す ζ 平面とで $z \sim \zeta$ でなければならない。そこで円に写像する関数は、一般的に下記で表すことができる。

$$z=\zeta+\frac{B_1}{\zeta}+\frac{B_2}{\zeta^2}+\frac{B_3}{\zeta^3}+\frac{B_4}{\zeta^4}+... \tag{7.1.5}$$

ζ を z で表す式を求める。まず、上式から ζ を求め、右辺の z 以外を b とする。

$$\begin{aligned}\zeta&=-\frac{B_1}{\zeta}-\frac{B_2}{\zeta^2}-\frac{B_3}{\zeta^3}-\frac{B_4}{\zeta^4}+z\\ b&=-\frac{B_1}{\zeta}-\frac{B_2}{\zeta^2}-\frac{B_3}{\zeta^3}-\frac{B_4}{\zeta^4}\end{aligned} \tag{7.1.6}$$

$b << z$ であるので、b で Taylor 展開し、展開すると、

$$\begin{aligned}\frac{1}{\zeta}=&\frac{1}{z+b}\\ =&-\frac{-\frac{B_1}{\zeta}-\frac{B_2}{\zeta^2}-\frac{B_3}{\zeta^3}-\frac{B_4}{\zeta^4}}{z^2}\\ &+\frac{\left(-\frac{B_1}{\zeta}-\frac{B_2}{\zeta^2}-\frac{B_3}{\zeta^3}-\frac{B_4}{\zeta^4}\right)^2}{z^3}+\frac{1}{z}\\ =&\frac{B_1}{z^2\,\zeta}+\frac{B_2}{z^2\,\zeta^2}+\frac{B_1^2}{z^3\,\zeta^2}+\frac{B_3}{z^2\,\zeta^3}+\frac{2\,B_1\,B_2}{z^3\,\zeta^3}+\frac{1}{z}+...\end{aligned}$$

上式を (7.1.6) 式に代入し、更に、この作業を繰り返すと次の関係式が得られる。後にわかるが、ここの問題では C_n を明らかにする必要はない。

$$\zeta=-\left(\sum_{n=2}^{\infty}\frac{C_n}{z^n}\right)+z-\frac{B_1}{z} \tag{7.1.7}$$

上式で、C_3 までとし、

$$\zeta=z-\frac{B_1}{z}-\frac{C_2}{z^2}-\frac{C_3}{z^3}$$

下記のように表現する。

$$\zeta=(d+1)\,z,\quad (d=-\frac{B_1}{z^2}-\frac{C_2}{z^3}-\frac{C_3}{z^4}) \tag{7.1.8}$$

```
F1:%e^(-%i*\alpha)*U*\zeta;
F2:%e^(%i*\alpha)*U*R^2/\zeta;
F3:%i*\gamma/2/%pi*log(\zeta);
F0:F=F1+F2+F3;
F11:subst([ZT41],F1);
F12:expand(%);
F21:subst([ZT44],F2);
taylor(%,d,0,3);
subst([ZT43],%);
F22:expand(%);
F31:subst([ZT44],F3);
%i*\gamma/2/%pi*log(z)+%i*\gamma/2/%pi
  *log(1+d);
taylor(%,d,0,3);
subst([ZT43],%);
F32:expand(%);
```

渦循環がある一様流中の半径:R の円柱まわりの流れの複素ポテンシャルは、(5.3.10) 式から、

$$F=\frac{i\,\Gamma\log(\zeta)}{2\,\pi}+e^{-i\,\alpha}\,U\,\zeta+\frac{e^{i\,\alpha}\,R^2\,U}{\zeta} \tag{7.1.9}$$

(7.1.9) 式の右辺第二項に (7.1.8) 式の関係を代入し、展開すると、

$$\begin{aligned}e^{-i\,\alpha}\,U\,\zeta=&e^{-i\,\alpha}\left(z-\frac{B_1}{z}-\frac{C_2}{z^2}-\frac{C_3}{z^3}\right)U\\ =&e^{-i\,\alpha}\,z\,U-\frac{B_1\,e^{-i\,\alpha}\,U}{z}\\ &-\frac{C_2\,e^{-i\,\alpha}\,U}{z^2}-\frac{C_3\,e^{-i\,\alpha}\,U}{z^3}\end{aligned}$$

(7.1.9) 式の右辺第三項に (7.1.8) 式の関係を代入し、展開すると、

$$\begin{aligned}\frac{e^{i\,\alpha}\,R^2\,U}{\zeta}=&\frac{e^{i\,\alpha}\,R^2\,U}{(d+1)\,z}\\=&\frac{e^{i\,\alpha}\,R^2\,U}{z}-\frac{e^{i\,\alpha}\,R^2\,U\,d}{z}+\frac{e^{i\,\alpha}\,R^2\,U\,d^2}{z}-\frac{e^{i\,\alpha}\,R^2\,U\,d^3}{z}+...\\=&-\frac{e^{i\,\alpha}\left(-\frac{B_1}{z^2}-\frac{C_2}{z^3}-\frac{C_3}{z^4}\right)R^2\,U}{z}-\frac{e^{i\,\alpha}\left(-\frac{B_1}{z^2}-\frac{C_2}{z^3}-\frac{C_3}{z^4}\right)^3R^2\,U}{z}\\&+\frac{e^{i\,\alpha}\left(-\frac{B_1}{z^2}-\frac{C_2}{z^3}-\frac{C_3}{z^4}\right)^2R^2\,U}{z}+\frac{e^{i\,\alpha}\,R^2\,U}{z}\\=&\frac{e^{i\,\alpha}\,R^2\,U}{z}+\frac{B_1\,e^{i\,\alpha}\,R^2\,U}{z^3}+\frac{C_2\,e^{i\,\alpha}\,R^2\,U}{z^4}+\frac{C_3\,e^{i\,\alpha}\,R^2\,U}{z^5}+\frac{B_1^2\,e^{i\,\alpha}\,R^2\,U}{z^5}+\cdots\end{aligned}$$

(7.1.9) 式の右辺第一項に (7.1.8) 式の関係を代入し、展開すると、

$$\begin{aligned}\frac{i\log\left((d+1)\,z\right)\Gamma}{2\,\pi}=&\frac{i\log(z)\,\Gamma}{2\,\pi}+\frac{i\log(d+1)\,\Gamma}{2\,\pi}\\=&\frac{i\log(z)\,\Gamma}{2\,\pi}+\frac{i\,\Gamma\,d}{2\,\pi}-\frac{i\,\Gamma\,d^2}{4\,\pi}+\frac{i\,\Gamma\,d^3}{6\,\pi}+...\\=&\frac{i\log(z)\,\Gamma}{2\,\pi}+\frac{i\left(-\frac{B_1}{z^2}-\frac{C_2}{z^3}-\frac{C_3}{z^4}\right)\Gamma}{2\,\pi}+\frac{i\left(-\frac{B_1}{z^2}-\frac{C_2}{z^3}-\frac{C_3}{z^4}\right)^3\Gamma}{6\,\pi}-\frac{i\left(-\frac{B_1}{z^2}-\frac{C_2}{z^3}-\frac{C_3}{z^4}\right)^2\Gamma}{4\,\pi}+...\\=&\frac{i\log(z)\,\Gamma}{2\,\pi}-\frac{i\,B_1\,\Gamma}{2\,\pi\,z^2}-\frac{i\,C_2\,\Gamma}{2\,\pi\,z^3}-\frac{i\,C_3\,\Gamma}{2\,\pi\,z^4}+...\end{aligned}$$

```
F4:F=F12+F22+F32;
F41:coeff(rhs(F4),z,1);
F42:coeff(rhs(F4),log(z),1);
F43:coeff(rhs(F4),z,-1);
F44:coeff(rhs(F4),z,-2);
F45:F=F41*z+F42*log(z)+F43/z+F44/z^2;
DF45:'diff(F,z)=diff(rhs(F45),z,1);
DF451:expand(DF45^2);
COFF4:coeff(rhs(DF451),z,-1);
F[x]-%i*F[y]=%i*\rho/2*2*%pi*%i*COFF4;
FXY4:lhs(%)=rectform(rhs(%));
```

```
FX4:F[x]=realpart(rhs(FXY4));
FY4:F[y]=-imagpart(rhs(FXY4));
L=sqrt(rhs(FX2)^2+rhs(FY2)^2);
L1:trigsimp(%);
ZDF451:expand(z*DF451);
MXY1:M+%i*N=-\rho/2*'integrate(lhs(ZDF451)
  ,z);
COFF2:coeff(rhs(ZDF451),z,-1);
MXY1:M+%i*N=-\rho/2*2*%pi*%i*COFF2;
MXY2:lhs(MXY1)=rectform(rhs(%));
M1:M=realpart(realpart(rhs(MXY2)));
```

上式をまとめ、$1/z^2$ の項までを整理すると、

$$F=\frac{-\frac{i\,B_1\,\Gamma}{2\,\pi}-C_2\,e^{-i\,\alpha}\,U}{z^2}+\frac{i\log(z)\,\Gamma}{2\,\pi}+\frac{e^{i\,\alpha}\,R^2\,U-B_1\,e^{-i\,\alpha}\,U}{z}+e^{-i\,\alpha}\,z\,U \tag{7.1.10}$$

上式を微分し、その二乗は、

$$\frac{d}{d\,z}F=-\frac{2\left(-\frac{i\,B_1\,\Gamma}{2\,\pi}-C_2\,e^{-i\,\alpha}\,U\right)}{z^3}+\frac{i\,\Gamma}{2\,\pi\,z}-\frac{e^{i\,\alpha}\,R^2\,U-B_1\,e^{-i\,\alpha}\,U}{z^2}+e^{-i\,\alpha}\,U$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{d}{d\,z}F\right)^2=&-\frac{\Gamma^2}{4\,\pi^2\,z^2}-\frac{B_1\,\Gamma^2}{\pi^2\,z^4}-\frac{B_1^2\,\Gamma^2}{\pi^2\,z^6}-\frac{i\,e^{i\,\alpha}\,R^2\,U\,\Gamma}{\pi\,z^3}-\frac{2\,i\,B_1\,e^{i\,\alpha}\,R^2\,U\,\Gamma}{\pi\,z^5}+\frac{i\,e^{-i\,\alpha}\,U\,\Gamma}{\pi\,z}\\&+\frac{3\,i\,B_1\,e^{-i\,\alpha}\,U\,\Gamma}{\pi\,z^3}+...+e^{-2\,i\,\alpha}\,U^2\end{aligned}$$

翼に作用する力：F_x, F_y は、Blasius の定理：(5.1.59) 式から、積分を留数定理を用いて解き、

$$F_x-i\,F_y=\frac{i\,\rho}{2}\int\left(\frac{d}{d\,z}F\right)^2dz=-i\,e^{-i\,\alpha}\,\rho\,U\,\Gamma=-\sin(\alpha)\,\rho\,U\,\Gamma-i\cos(\alpha)\,\rho\,U\,\Gamma \tag{7.1.11}$$

上式から、揚力：L は、

$$F_x=-\sin(\alpha)\,\rho\,U\,\Gamma,\quad F_y=\cos(\alpha)\,\rho\,U\,\Gamma,\quad L=\rho\,U\,\Gamma \tag{7.1.12}$$

翼に作用するモーメントについて、下記を求め、

$$z\left(\frac{d}{d\,z}\,F\right)^2 = -\frac{\Gamma^2}{4\,\pi^2\,z} - \frac{B_1\,\Gamma^2}{\pi^2\,z^3} - \frac{B_1^2\,\Gamma^2}{\pi^2\,z^5} - \frac{i\,e^{i\,\alpha}\,R^2\,U\,\Gamma}{\pi\,z^2} - \frac{2\,i\,B_1\,e^{i\,\alpha}\,R^2\,U\,\Gamma}{\pi\,z^4} + \frac{3\,i\,B_1\,e^{-i\,\alpha}\,U\,\Gamma}{\pi\,z^2} + \frac{2\,i\,C_2\,e^{-i\,\alpha}\,U\,\Gamma}{\pi\,z^3}$$
$$+ \frac{2\,i\,B_1^2\,e^{-i\,\alpha}\,U\,\Gamma}{\pi\,z^4} + \frac{4\,i\,B_1\,C_2\,e^{-i\,\alpha}\,U\,\Gamma}{\pi\,z^5} + \frac{i\,e^{-i\,\alpha}\,U\,\Gamma}{\pi} + \frac{e^{2\,i\,\alpha}\,R^4\,U^2}{z^3} - \frac{2\,R^2\,U^2}{z} - \frac{2\,B_1\,R^2\,U^2}{z^3}$$
$$- \frac{4\,C_2\,R^2\,U^2}{z^4} + e^{-2\,i\,\alpha}\,z\,U^2 + \frac{2\,B_1\,e^{-2\,i\,\alpha}\,U^2}{z} + \frac{4\,C_2\,e^{-2\,i\,\alpha}\,U^2}{z^2} + \frac{B_1^2\,e^{-2\,i\,\alpha}\,U^2}{z^3} + \frac{4\,B_1\,C_2\,e^{-2\,i\,\alpha}\,U^2}{z^4}$$
$$+ \frac{4\,C_2^2\,e^{-2\,i\,\alpha}\,U^2}{z^5}$$

翼に作用するモーメント：M は、Blasius の定理：(5.1.60) 式から、積分を留数定理を用いて解き、

$$\begin{aligned} i\,N + M &= -\,i\,\pi\,\rho\left(-\frac{\Gamma^2}{4\,\pi^2} - 2\,R^2\,U^2 + 2\,B_1\,e^{-2\,i\,\alpha}\,U^2\right) \\ &= -\,i\,\pi\,\rho\left(-\frac{\Gamma^2}{4\,\pi^2} - 2\,R^2\,U^2 + 2\,B_1\cos(2\,\alpha)\;U^2\right) - 2\,\pi\,B_1\sin(2\,\alpha)\;\rho U^2 \end{aligned} \tag{7.1.13}$$

翼に作用するモーメント：M は、

$$M = -2\,\pi\,B_1\sin(2\,\alpha)\;\rho U^2 \tag{7.1.14}$$

例題 7.1.3　二次元平板翼

二次元平板翼の揚力特性を求める。

なお、下記のプログラムは、前前項、前項に続いて実行する。

```
B11:B[1]=A^2;
Z0:z=x+%i*y;
Z1:z=\zeta+A^2/\zeta;
ZT1:\zeta=\sigma*%e^(%i*\eta);
ZT2:\zeta=R*%e^(%i*\eta);

Z2:subst([ZT2,Z0],Z1);
X1:realpart(Z2);
Y1:imagpart(Z2);
CO1:solve(X1,cos(\eta))[1];
SI1:solve(Y1,sin(\eta))[1];
COSI1:cos(\eta)^2+sin(\eta)^2=1;
COSI2:subst([CO1,SI1],COSI1);
COSI3:x^2/a^2+y^2/b^2=1;
A1:first(lhs(COSI2))=last(lhs(COSI3));
B1:last(lhs(COSI2))=first(lhs(COSI3));
A2:solve(A1,a)[2];
B2:solve(B1,b)[2];
AB1:solve([A1,B1],[R,A])[2];
R2:AB1[1];
A2:AB1[2];
R3:subst([b=0],R2);
A3:subst([b=0],A2);
M2:subst([B11,A2],M1);
```

Joukowski 変換：(5.1.35) 式を用いて、半径：R の円を半軸：a, b の楕円 (平板を含む) に変換する。変換関数は下記となる。

$$z=\zeta+\frac{A^2}{\zeta} \tag{7.1.15}$$

ここで (7.1.5) 式の一般的な変換関数との関係は、

$$B_1=A^2,\quad B_n=0\quad (n=2\to\infty) \tag{7.1.16}$$

形状を求めるため、次式を上式に代入し、

$$z=i\,y+x,\quad \zeta=e^{i\,\eta}\,R$$

$$i\,y+x=e^{i\,\eta}\,R+\frac{e^{-i\,\eta}\,A^2}{R}$$

上式から、

$$x=\cos(\eta)\,R+\frac{\cos(\eta)\,A^2}{R}$$

$$y=\sin(\eta)\,R-\frac{\sin(\eta)\,A^2}{R}$$

また、下記の関係から、

$$\sin(\theta)^2+\cos(\theta)^2=1$$

次式の楕円の式と対照し、

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{x^2}{a^2}=1$$

次式の関係が得られる。

$$a=\frac{R^2+A^2}{R},\quad b=\frac{R^2-A^2}{R}$$

また、

$$R=\frac{b+a}{2},\quad A=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{2} \tag{7.1.17}$$

平板では、

$$R=\frac{a}{2},\quad A=\frac{a}{2} \tag{7.1.18}$$

```
F0;
DFZT1:'diff(F,\zeta,1)=diff(rhs(F0),\zeta,
 1);
DZZT1:'diff(z,\zeta,1)=diff(rhs(Z1),\zeta,
 1);
DFZ1:'diff(F,z,1)=rhs(DFZT1)/rhs(DZZT1);
DDFZ1:denom(rhs(DFZ1))=0;
solve(%,\zeta);
AZT1:%[2];
NDFZ1:num(rhs(DFZ1))=0;
subst([AZT1,R3,A3],%);
GM1:trigrat(solve(%,\gamma)[1]);
L2:subst([GM1],L1);
M3:subst([b=0],M2);
d=trigrat(rhs(M3)/rhs(L2)/cos(\alpha));
C[L]=rhs(L2)/(1/2*\rho*U^2*2*a);
```

渦循環がある一様流中の半径：R の円柱まわりの流れの複素ポテンシャルは、(5.3.10) 式から、

$$F=\frac{i\,\Gamma\log(\zeta)}{2\,\pi}+e^{-i\,\alpha}\,U\,\zeta+\frac{e^{i\,\alpha}\,R^2\,U}{\zeta} \tag{7.1.19}$$

翼まわりの流速を求めるため、下記の関係から、

$$\frac{d}{d\,\zeta}\,F=\frac{i\,\Gamma}{2\,\pi\,\zeta}-\frac{e^{i\,\alpha}\,R^2\,U}{\zeta^2}+e^{-i\,\alpha}\,U$$

$$\frac{d}{d\,\zeta}\,z=1-\frac{A^2}{\zeta^2}$$

翼まわりの流速は、

$$\frac{d}{d\,z}\,F=v_x-i\,v_y=\frac{\frac{i\,\Gamma}{2\,\pi\,\zeta}-\frac{e^{i\,\alpha}\,R^2\,U}{\zeta^2}+e^{-i\,\alpha}\,U}{1-\frac{A^2}{\zeta^2}} \tag{7.1.20}$$

上式は分母が零のとき、発散し、

$$1-\frac{A^2}{\zeta^2}=0$$

その場所は、下記で前縁と、後縁である。

$$\zeta=-A,\zeta=A$$

後縁で流速が有限であるように、分子も零とすると

$$\frac{i\,\Gamma}{2\,\pi\,\zeta}-\frac{e^{i\,\alpha}\,R^2\,U}{\zeta^2}+e^{-i\,\alpha}\,U=0$$

$\zeta=A$ を上記に代入し、

$$\frac{i\,\Gamma}{\pi\,a}-e^{i\,\alpha}\,U+e^{-i\,\alpha}\,U=0$$

以上から、後縁で流速が有限となる渦循環強さ：Γ が得られた。

$$\Gamma=2\,\pi\,a\sin(\alpha)\;U \qquad (7.1.21)$$

(7.1.12) 式から、二次元平板翼の揚力：L は、

$$L=2\,\pi\,a\sin(\alpha)\;\rho U^2 \qquad (7.1.22)$$

(7.1.14) 式に (7.1.16) 式、(7.1.18) 式を代入し、二次元平板翼のモーメントは、

$$M=-\frac{\pi\,a^2\sin(2\,\alpha)\;\rho U^2}{2}$$

揚力の翼に垂直な成分は $L\cos(\alpha)$ であるから、翼の作用点：d は

$$d=-\frac{a}{2}$$

前縁から 1/4 コード長さの位置である。揚力を無次元化すると、

$$C_L=\frac{L}{\frac{\rho\,U^2\,2\,a}{2}}=2\,\pi\sin(\alpha) \qquad (7.1.23)$$

```
P1:p=1-rhs(DFZ1)^2/U^2;
P2:subst([GM1,\zeta=R*%e^(%i*\theta),R3,A3,
  \theta=t],P1);
YT1:trigrat(%);
X1:subst([Z0,\zeta=R*%e^(%i*\theta),R3,A3,
  \theta=t],Z1);
X2:realpart(%);
YT3:subst([\alpha=%pi/6,a=1],rhs(YT1));
X3:subst([\alpha=%pi/6,a=1],rhs(X2));
plot2d([parametric,X3,-YT3,[t,0,%pi*2],
  [nticks,100]],[x,-2,2],[y,-2,10]);
```

翼まわりの圧力分布は、(7.1.20) 式の流速から、

$$\begin{aligned}p=&1-\frac{\mathrm{rhs}\left(\frac{d}{d\,z}\,F\right)^2}{U^2}\\=&1-\frac{\left(\frac{i\,\gamma}{2\,\pi\,\zeta}-\frac{e^{i\,\alpha}\,R^2\,U}{\zeta^2}+e^{-i\,\alpha}\,U\right)^2}{U^2\left(1-\frac{A^2}{\zeta^2}\right)^2}\\=&-\frac{\cos(t-2\,\alpha)-\cos(t)}{\cos(t)+1}\end{aligned}$$

$\alpha=\frac{\pi}{6},a=1$ で圧力分布を描くと、

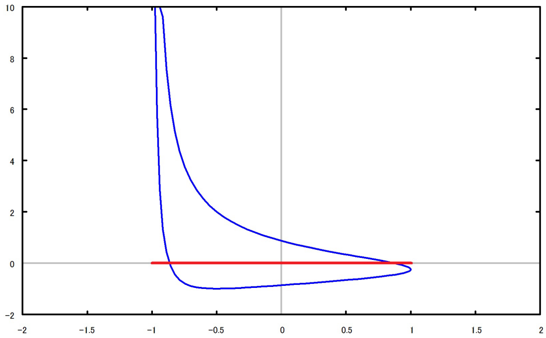


図 7.1.1: 二次元平板翼まわりの圧力分布

```
ZT20:solve(Z1,\zeta);
ZT21:ZT20[1];
ZT22:ZT20[2];
ZT23:(rhs(ZT21)*rhs(ZT22));
ZT23=expand(ZT23);
ZT24:%/rhs(ZT21)*2;
F40:subst([ZT22],F1);
F41:subst([ZT22],F2);
F42:subst([ZT24],%);
F45:subst([ZT22],F3);
F44:F=F40+F42+F45;
SQ1:sqrt(z^2-4*A^2)+z;
SQ11:SQ1=z*(1+sqrt(1-4*A^2/z^2));
SQ3:1/SQ1;
SQ5:sqrt(z^2-4*A^2)-z;
SQ51:SQ5=z*(sqrt(1-4*A^2/z^2)-1);
F401:subst([SQ11],F40);
F411:subst([SQ11],F41);
F421:subst([SQ51],F42);
F451:subst([SQ11],F45);
F441:F=F401+F421+F451;
PS2:\Psi=imagpart(subst([z=x+%i*y,R2,A2,
 GM1],rhs(F441)));
trigsimp(%);
subst([a=1,b=0,U=1,\alpha=%pi/6],PS2);
trigsimp(%);
```

(7.1.15) 式を ζ で解くと、

$$\zeta=-\frac{\sqrt{z^2-4\,A^2}-z}{2},\zeta=\frac{\sqrt{z^2-4\,A^2}+z}{2}$$

翼より十分遠方で $z\sim\zeta$ でなければならないので、次式を用いる。

$$\zeta=\frac{\sqrt{z^2-4\,A^2}+z}{2}$$

また、次式の関係式から、

$$-\frac{\left(\sqrt{z^2-4\,A^2}-z\right)\,\left(\sqrt{z^2-4\,A^2}+z\right)}{4}=A^2$$

次式が得られる。

$$\sqrt{z^2-4\,A^2}+z=-\frac{4\,A^2}{\sqrt{z^2-4\,A^2}-z}$$

これらの式を (7.1.15) 式に代入し、

$$F=\frac{i\log\left(\frac{\sqrt{z^2-4\,A^2}+z}{2}\right)\,\Gamma}{2\,\pi}-\frac{e^{i\,\alpha}\,\left(\sqrt{z^2-4\,A^2}-z\right)\,R^2\,U}{2\,A^2}+\frac{e^{-i\,\alpha}\,\left(\sqrt{z^2-4\,A^2}+z\right)\,U}{2}$$

z で整理し、

$$\sqrt{z^2-4\,A^2}+z=z\left(\sqrt{1-\frac{4\,A^2}{z^2}}+1\right)$$

$$\sqrt{z^2-4\,A^2}-z=z\left(\sqrt{1-\frac{4\,A^2}{z^2}}-1\right)$$

代入すると、

$$F=\frac{i\log\left(\frac{z\,\left(\sqrt{1-\frac{4\,A^2}{z^2}}+1\right)}{2}\right)\,\Gamma}{2\,\pi}-\frac{e^{i\,\alpha}\,z\,\left(\sqrt{1-\frac{4\,A^2}{z^2}}-1\right)\,R^2\,U}{2\,A^2}+\frac{e^{-i\,\alpha}\,z\,\left(\sqrt{1-\frac{4\,A^2}{z^2}}+1\right)\,U}{2}$$

上記の流れ関数は式が長くなるので省略する。上式から $a=1,b=0,U=1,\alpha=\pi/6$ における流線を下記に示す。

```
#!/gnuplot
set xrange [-3:3]
set yrange [-2:2]
set isosamples 150,150
set contour base
set cntrparam levels incremental -20,0.1,20
unset key
unset surface
set view map
splot ((y**4+2*x**2*y**2+x**4)**(0.25)*
 (log((sqrt(y**2+x**2)*sqrt(2*(y**4+2*
 x**2*y**2+x**4)**(0.75)*(y**4+(2*x**2
 +2)*y**2+x**4-2*x**2+1)**(0.25)*cos(
 atan2((2*x*y)/(y**4+2*x**2*y**2+x**4),
 (y**4+(2*x**2+1)*y**2+x**4-x**2)/(y**4
 +2*x**2*y**2+x**4))/2)+sqrt(y**4+2*x**2
 *y**2+x**4)*sqrt(y**4+(2*x**2+2)*y**2
 +x**4-2*x**2+1)+y**4+2*x**2*y**2+x**4))
 /(2*sqrt(y**4+2*x**2*y**2+x**4)))
 +1.7320508*y)+(y**4+(2*x**2+2)*y**2+x**4
 -2*x**2+1)**(0.25)*(y*sin(atan2((2*x*y)/(y
 **4+2*x**2*y**2+x**4),(y**4+(2*x**2+1)*
 y**2+x**4-x**2)/(y**4+2*x**2*y**2+x**4))
 /2)-x*cos(atan2((2*x*y)/(y**4+2*x**2*y**2
 +x**4),(y**4+(2*x**2+1)*y**2+x**4-x**2)/
 (y**4+2*x**2*y**2+x**4))/2)))/(2*(y**4
 +2*x**2*y**2+x**4)**(0.25))
#    EOF
```

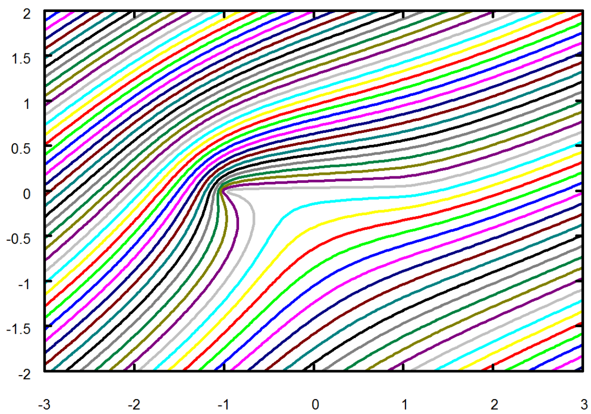


図 7.1.2: 二次元平板翼まわりの流れ

例題 7.1.4　キャンバー・翼厚を有する二次元翼 (Joukowski 変換)

二次元平板翼に比べ、キャンバーや翼厚がある場合の揚力特性を Joukowski 変換を用いて求める。

(1) 楕円

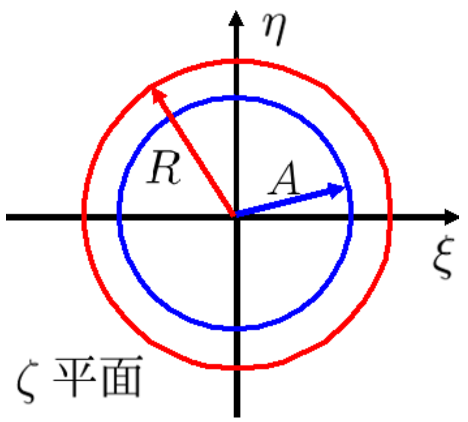


図 7.1.3: 楕円への写像

```
/* Joukowski 変換  */
kill(all);
declare(z,complex);
declare(F,complex);
declare(c,complex);
declare(\zeta,complex);
assume(A>0);
/* 楕円  */
Z1:z=\zeta+A^2/\zeta;
ZT1:\zeta=R*%e^(%i*\theta);
Z0:z=x+%i*y;
Z2:subst([ZT1,Z0],Z1);
X1:realpart(Z2);
Y1:imagpart(Z2);
CO1:solve(X1,cos(\theta))[1];
SI1:solve(Y1,sin(\theta))[1];
COSI1:cos(\theta)^2+sin(\theta)^2=1;
COSI2:subst([CO1,SI1],COSI1);
COSI3:x^2/a^2+y^2/b^2=1;
A1:first(lhs(COSI2))=last(lhs(COSI3));
B1:last(lhs(COSI2))=first(lhs(COSI3));
A2:solve(A1,a)[2];
B2:solve(B1,b)[2];
AB1:solve([A1,B1],[R,A])[2];
X2:subst([A=1.8,R=2,\theta=t],rhs(X1));
Y2:subst([A=1.8,R=2,\theta=t],rhs(Y1));
plot2d([parametric,X2,Y2,[t,0,2*%pi],
   [nticks,50]],[x,-4,4],[y,-2,2]);
```

ζ 平面で、下記の写像関数を用いて、半径：A の円を z 平面に写像すると、前項で示したように、平板に写像される。

$$z=\zeta+\frac{A^2}{\zeta} \tag{7.1.24}$$

ζ 平面で $R>A$ である下記の中心が原点にある半径：R の円では、

$$\zeta=e^{i\,\theta}\,R \tag{7.1.25}$$

上式を (7.1.24) 式に代入し、

$$i\,y+x=e^{i\,\theta}\,R+\frac{e^{-i\,\theta}\,A^2}{R}$$

上式の実部、虚部から、

$$x=\cos(\theta)\;R+\frac{\cos(\theta)\;A^2}{R}$$

$$y=\sin(\theta)\;R-\frac{\sin(\theta)\;A^2}{R}$$

上式より、

$$\cos(\theta)=\frac{x\,R}{R^2+A^2},\quad \sin(\theta)=\frac{y\,R}{R^2-A^2}$$

下記の関係から、

$$\sin(\theta)^2+\cos(\theta)^2=1$$

上式を代入し、

$$\frac{x^2\,R^2}{\left(R^2+A^2\right)^2}+\frac{y^2\,R^2}{\left(R^2-A^2\right)^2}=1$$

楕円の式は、

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{x^2}{a^2}=1$$

上記から、楕円の半軸：a,b と A,R との関係は、

$$a=\frac{R^2+A^2}{R},\quad b=\frac{R^2-A^2}{R}$$

$$R=\frac{b+a}{2},\quad A=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{2} \tag{7.1.26}$$

$A=1.8, R=2$ のときの形状を図示すると、

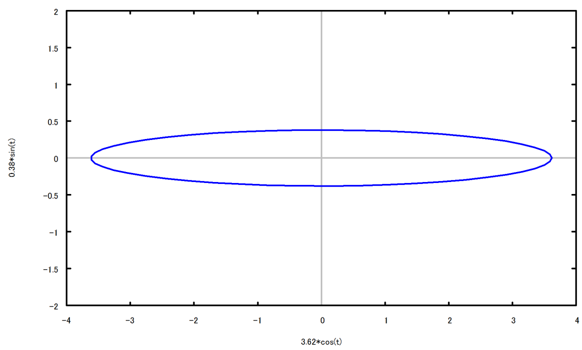


図 7.1.4: 楕円形状

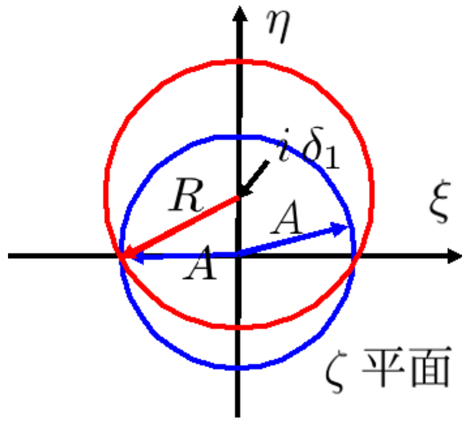


図 7.1.5: 円弧翼 (キャンバーあり) への写像

(2) 円弧翼 (キャンバーあり)

```
/* 円弧  */
RR1:R=sqrt(A^2+\delta[1]^2);
ZT2:\zeta=R*%e^(%i*\theta)+%i*\delta[1];
Z21:subst([ZT2,Z0,RR1],Z1);
X1:realpart(Z21);
Y1:imagpart(Z21);
X12:subst([\delta[1]^2=0],expand(X1));
Y12:subst([\delta[1]^2=0],expand(Y1));
X13:trigsimp(X12);
Y13:trigsimp(Y12);
X14:x=first(num(rhs(X13)))
  /first(denom(rhs(X13)));
Y14:y=first(num(rhs(Y13)))
  /first(denom(rhs(Y13)));
X15:trigsimp(factor(dx=rhs(X1)
  -subst([\theta=-\theta],rhs(X1))));
Y15:trigsimp(factor(dy=rhs(Y1)
  -subst([\theta=-\theta],rhs(Y1))));
C1:solve(X14,cos(\theta))[1];
XY6:subst([sin(\theta)^2=1-cos(\theta)^2
  ,C1],Y14);
factor(subst([\theta=0],X1));
subst([\delta[1]=0],%);
factor(subst([\theta=%pi/2],Y1));
X2:subst([A=1,\delta[1]=0.1,\theta=t],
  rhs(X1));
Y2:subst([A=1,\delta[1]=0.1,\theta=t],
  rhs(Y1));
plot2d([parametric,X2,Y2,[t,0,2*%pi],
 [nticks,50]],[x,-4,4],[y,-2,2]);
```

ζ 平面で、(7.1.24) 式の写像関数を用いて、円の中心が $\zeta = i\,\delta_1$ にあり、$\xi = \pm A$ の点を通る円を z 平面に写像する。ここで、$\delta_1 << A$ とする。このとき、半径：R、円を表す式は下記となる。

$$R = \sqrt{A^2 + \delta_1^2}, \quad \zeta = e^{i\,\theta}\,R + i\,\delta_1 \tag{7.1.27}$$

(7.1.24) 式の写像関数に代入し、

$$i\,y + x = \frac{A^2}{e^{i\,\theta}\,\sqrt{A^2+\delta_1^2} + i\,\delta_1} + e^{i\,\theta}\,\sqrt{A^2+\delta_1^2} + i\,\delta_1$$

上式の実部、虚部から、

$$x = \frac{\cos(\theta)\;A^2\,\sqrt{A^2+\delta_1^2}}{\left(\sin(\theta)\;\sqrt{A^2+\delta_1^2}+\delta_1\right)^2 + \cos(\theta)^2\;(A^2+\delta_1^2)} + \cos(\theta)\;\sqrt{A^2+\delta_1^2}$$

$$y = \frac{A^2\,\left(-\sin(\theta)\;\sqrt{A^2+\delta_1^2}-\delta_1\right)}{\left(\sin(\theta)\;\sqrt{A^2+\delta_1^2}+\delta_1\right)^2 + \cos(\theta)^2\;(A^2+\delta_1^2)} + \sin(\theta)\;\sqrt{A^2+\delta_1^2}+\delta_1$$

$\delta_1 << A$ とすると、

$$x = 2\cos(\theta)\;A, \quad y = 2\,\delta_1\sin(\theta)^2$$

上式から θ を消去すると、

$$y = 2\,\delta_1\left(1 - \frac{x^2}{4\,A^2}\right) \tag{7.1.28}$$

形状は円弧翼と言っているが、放物線である。$\theta = 0$ を代入し、$\delta_1 << A$ とすると、下記となり、コード長は $4A$ となる。

$$x = 2\,A$$

$\theta = \frac{\pi}{2}$ を代入し、キャンバーの高さは、

$$y = 2\,\delta_1$$

$A = 1, \delta_1 = 0.1$ を代入し、円弧翼形状を描くと、

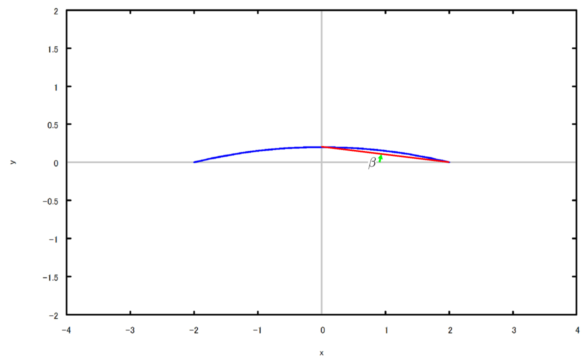


図 7.1.6: 円弧翼形状

```
F1:%e^(-%i*\alpha)*U*\zeta;
F2:%e^(%i*\alpha)*U*R^2/\zeta;
F3:%i*\gamma/2/%pi*log(\zeta);
F0:F=F1+F2+F3;
F01:subst([\zeta=\zeta-%i*\delta[1],RR1],
 F0);
DF01:'diff(F,\zeta,1)=diff(rhs(F01),\zeta,
 1);
DZ1:'diff(z,\zeta,1)=diff(rhs(Z1),\zeta,1);
DFZ1:'diff(F,z,1)=rhs(DF01)/rhs(DZ1);
DDFZ1:denom(rhs(DFZ1))=0;
solve(%,\zeta);
AZT1:%[2];
NDFZ1:num(rhs(DFZ1))=0;
subst([AZT1],%);
GM1:trigrat(solve(%,\gamma)[1]);
TBE1:tan(\beta)=2*\delta[1]/(2*A);
TBE2:solve(%,\delta[1])[1];
subst([TBE2],GM1);
GM2:trigrat(%);
L1:L=\rho*U*\gamma;
L2:subst([GM2],L1);
C[L]=rhs(L2)/(1/2*\rho*U^2*4*A);
```

ζ 平面で、流速：U、流向：α の一様流中に半径：R の円柱があり、渦循環強さ：Γ がある場合の複素ポテンシャルは、(5.3.10) 式から、

$$F=\frac{i\,\Gamma \log\left(\zeta\right)}{2\,\pi}+e^{-i\,\alpha}\,U\,\zeta+\frac{e^{i\,\alpha}\,R^2\,U}{\zeta} \qquad (7.1.29)$$

円の中心が $\zeta=i\,\delta_1$ にあり、$\xi=\pm A$ の点を通る円の場合の複素ポテンシャルを求めるには、上式に下記の関係を代入すればよい。

$$R\rightarrow\sqrt{A^2+\delta_1^2},\quad \zeta\rightarrow\zeta-i\,\delta_1$$

$$F=\frac{i\,\Gamma\log\left(\zeta-i\,\delta_1\right)}{2\,\pi}+\frac{e^{i\,\alpha}\,\left(A^2+\delta_1^2\right)\,U}{\zeta-i\,\delta_1}+e^{-i\,\alpha}\,U\,\left(\zeta-i\,\delta_1\right)$$

上式および z を ζ で微分し、

$$\frac{d}{d\,\zeta}\,F=\frac{i\,\Gamma}{2\,\pi\,\left(\zeta-i\,\delta_1\right)}-\frac{e^{i\,\alpha}\,\left(A^2+\delta_1^2\right)\,U}{\left(\zeta-i\,\delta_1\right)^2}+e^{-i\,\alpha}\,U$$

$$\frac{d}{d\,\zeta}\,z=1-\frac{A^2}{\zeta^2}$$

z 平面における流速は、

$$\frac{d}{d\,z}\,F=\frac{\frac{i\,\Gamma}{2\,\pi\,\left(\zeta-i\,\delta_1\right)}-\frac{e^{i\,\alpha}\,\left(A^2+\delta_1^2\right)\,U}{\left(\zeta-i\,\delta_1\right)^2}+e^{-i\,\alpha}\,U}{1-\frac{A^2}{\zeta^2}} \qquad (7.1.30)$$

上式は、分母が翼端：$\zeta=-A,\zeta=A$ で零となるため、翼後端で有限な流速とするため、$\zeta=A$ で次式のように分子も零とならねばならない。

$$\frac{i\,\Gamma}{2\,\pi\,\left(A-i\,\delta_1\right)}-\frac{e^{i\,\alpha}\,\left(A^2+\delta_1^2\right)\,U}{\left(A-i\,\delta_1\right)^2}+e^{-i\,\alpha}\,U=0$$

上式から渦循環強さ:Γ を求めると、

$$\Gamma=\left(4\,\pi\sin\left(\alpha\right)\,A+4\,\pi\,\delta_1\cos\left(\alpha\right)\right)\,U$$

翼端とキャンバー最高点を結んだ線の角度：β は下記の関係がある。

$$\tan\left(\beta\right)=\frac{2\,\delta_1}{2\,A},\quad \delta_1=\tan\left(\beta\right)\,A \qquad (7.1.31)$$

上式を使って渦循環強さ:Γ を表すと、

$$\Gamma=\frac{4\,\pi\sin\left(\beta+\alpha\right)\,A\,U}{\cos\left(\beta\right)}$$

(7.1.12) 式から、二次元翼の揚力：L は、

$$L=\rho\,U\,\Gamma=\frac{4\,\pi\sin\left(\beta+\alpha\right)\,\rho\,A\,U^2}{\cos\left(\beta\right)}$$

揚力をコード長で無次元化すると、

$$C_L=\frac{L}{\frac{\rho\,U^2\,4\,A}{2}}=\frac{2\,\pi\sin\left(\beta+\alpha\right)}{\cos\left(\beta\right)} \qquad (7.1.32)$$

翼まわりの圧力分布は、(7.1.30) 式の流速から、

$$p=1-\frac{\frac{d}{d\,z}\,F\,\overline{\frac{d}{d\,z}\,F}}{U^2}$$

$$x=\cos\left(\theta\right)\,\sqrt{A^2+\delta_1^2}+\frac{\cos\left(\theta\right)\,A^2}{\sqrt{A^2+\delta_1^2}}$$

$\alpha=\frac{\pi}{6},A=1,\delta_1=0.1,U=1$ で圧力分布を描くと、

```
P1:p=1-rhs(DFZ1)*conjugate(rhs(DFZ1))/U^2;
YT1:subst([GM1,\zeta=R*%e^(%i*\theta),RR1,
  \theta=t],P1);
X1:subst([Z0,\zeta=R*%e^(%i*\theta),RR1,
  \theta=t],Z1);
X2:realpart(%);
YT3:factor(rectform(subst([\alpha=%pi/6,
 A=1,\delta[1]=0.1,U=1],rhs(YT1))));
X3:subst([\alpha=%pi/6,A=1,\delta[1]=0.1,
  U=1],rhs(X2));
plot2d([parametric,X3,-YT3,[t,0,%pi*2],
  [nticks,100]],[x,-4,4],[y,-2,10]);
```

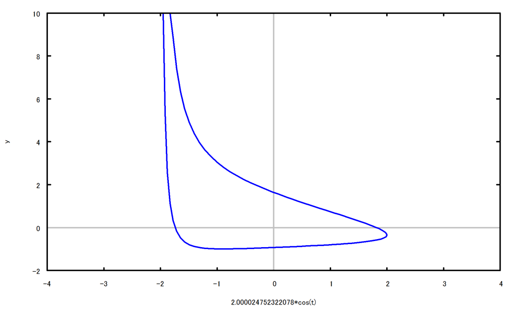


図 7.1.7: 円弧翼圧力分布

(3) 翼厚ありの翼

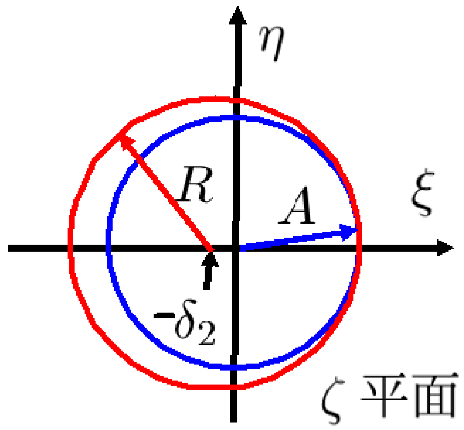


図 7.1.8: 翼厚ありの翼への写像

```
/* 翼厚  */
RR1:R=A+\delta[2];
ZT3:\zeta=R*%e^(%i*\theta)-\delta[2];
Z31:subst([ZT3,Z0,RR1],Z1);
X1:realpart(Z31);
Y1:imagpart(Z31);
X12:subst([\delta[1]^2=0],expand(X1));
Y12:subst([\delta[1]^2=0],expand(Y1));
X13:trigsimp(X12);
Y13:trigsimp(Y12);
X14:x=first(num(rhs(X13)))/first(denom(
  rhs(X13)));
Y14:y=factor(first(num(rhs(Y13)))/first
  (denom(rhs(Y13))));
diff(rhs(%),\theta,1);
trigsimp(%)=0;
subst([sin(\theta)^2=1-cos(\theta)^2],%);
solve(%,cos(\theta));
%[2];
T1:solve(%,\theta)[1];
YM15:y[max]=subst([T1],rhs(Y14));
XM15:x[max]=subst([T1],rhs(X14));
factor(subst([\theta=0],X1));
factor(subst([\theta=%pi],X1));
factor(subst([T1],Y1));
y[max]/l=2*3^(3/2)*delta[2]/2/4/A;
X2:subst([A=1,\delta[2]=0.1,\theta=t]
  ,rhs(X1));
Y2:subst([A=1,\delta[2]=0.1,\theta=t]
  ,rhs(Y1));
plot2d([parametric,X2,Y2,[t,0,2*%pi],
  [nticks,50]],[x,-4,4],[y,-2,2]);
```

ζ 平面で、(7.1.24) 式の写像関数を用いて、円の中心が $\zeta=-\delta_2$ にあり、$\xi=A$ の点を通る円を z 平面に写像する。ここで、$\delta_2 << A$ とする。このとき、半径：R、円を表す式は下記となる。

$$R=A+\delta_2,\quad \zeta=e^{i\,\theta}\,R-\delta_2$$

(7.1.24) 式の写像関数に代入し、

$$i\,y+x=\frac{A^2}{e^{i\,\theta}\,(A+\delta_2)-\delta_2}+e^{i\,\theta}\,(A+\delta_2)-\delta_2$$

上式の実部、虚部から、

$$x=\frac{A^2\,(\cos(\theta)\,(A+\delta_2)-\delta_2)}{(\cos(\theta)\,(A+\delta_2)-\delta_2)^2+\sin(\theta)^2\,(A+\delta_2)^2}+\cos(\theta)\,(A+\delta_2)-\delta_2$$

$$y=\sin(\theta)\,(A+\delta_2)-\frac{\sin(\theta)\,A^2\,(A+\delta_2)}{(\cos(\theta)\,(A+\delta_2)-\delta_2)^2+\sin(\theta)^2\,(A+\delta_2)^2}$$

$\delta_2 << A$ とすると、

$$x=2\cos(\theta)\,A,\quad y=-2\,\delta_2\,(\cos(\theta)-1)\,\sin(\theta)$$

最大の翼厚位置を求めるため、

$$\frac{d}{d\,\theta}\,y=4\,\delta_2\sin(\theta)^2+2\,\delta_2\cos(\theta)-2\,\delta_2=0$$

$$\cos(\theta)=-\frac{1}{2},\quad \theta=\frac{2\,\pi}{3}$$

以上から、

$$y_{max}=\frac{3^{\frac{3}{2}}\,\delta_2}{2} \tag{7.1.33}$$

その位置は、

$$x=-A$$

翼厚さとコード長さの比は、

$$\frac{y_{max}}{l}=\frac{3^{\frac{3}{2}}\,\delta_2}{4\,A}$$

$A=1,\delta_2=0.1$ として、翼形状を描くと、

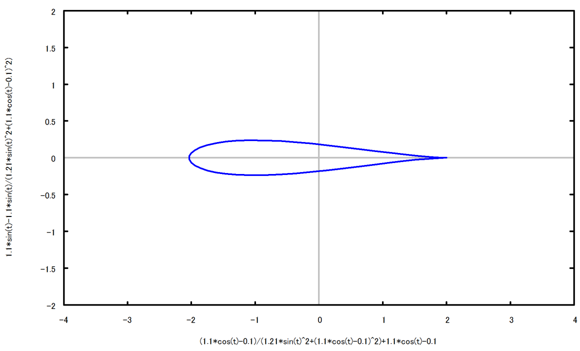


図 7.1.9: 翼厚ありの翼形状

```
F1:%e^(-%i*\alpha)*U*\zeta;
F2:%e^(%i*\alpha)*U*R^2/\zeta;
F3:%i*\gamma/2/%pi*log(\zeta);
F0:F=F1+F2+F3;
F01:subst([\zeta=\zeta+\delta[2],RR1],F0);
DF01:'diff(F,\zeta,1)=diff(rhs(F01),\zeta,
 1);
DZ1:'diff(z,\zeta,1)=diff(rhs(Z1),\zeta,1);
DFZ1:'diff(F,z,1)=rhs(DF01)/rhs(DZ1);
DDFZ1:denom(rhs(DFZ1))=0;
solve(%,\zeta);
AZT1:%[2];
NDFZ1:num(rhs(DFZ1))=0;
subst([AZT1],%);
GM1:trigrat(solve(%,\gamma)[1]);
L1:L=\rho*U*\gamma;
L2:subst([GM1],L1);
C[L]=rhs(L2)/(1/2*\rho*U^2*4*A);
factor(%);
```

ζ 平面で、流速：U、流向：α の一様流中に半径：R の円柱があり、渦循環強さ：Γ がある場合の複素ポテンシャルは (7.1.29) 式で表せる。円の中心が $\zeta=-\delta_2$ にあり、$\xi=A$ の点を通る円の場合の複素ポテンシャルを求めるには、(7.1.29) 式に下記の関係を代入すればよい。

$$R \to A+\delta_2, \quad \zeta \to \delta_2+\zeta$$

$$F=\frac{i\,\Gamma\log\left(\zeta+\delta_2\right)}{2\,\pi}+\frac{e^{i\,\alpha}\left(A+\delta_2\right)^2 U}{\zeta+\delta_2}+e^{-i\,\alpha}\,U\,\left(\zeta+\delta_2\right)$$

上式を ζ で微分し、

$$\frac{d}{d\,\zeta}\,F=\frac{i\,\Gamma}{2\,\pi\,\left(\zeta+\delta_2\right)}-\frac{e^{i\,\alpha}\left(A+\delta_2\right)^2 U}{\left(\zeta+\delta_2\right)^2}+e^{-i\,\alpha}\,U$$

z 平面における流速は、

$$\frac{d}{d\,z}\,F=\frac{\frac{i\,\Gamma}{2\,\pi\,(\zeta+\delta_2)}-\frac{e^{i\,\alpha}\,(A+\delta_2)^2\,U}{(\zeta+\delta_2)^2}+e^{-i\,\alpha}\,U}{1-\frac{A^2}{\zeta^2}}$$

上式は、分母が翼端：$\zeta=-A,\zeta=A$ で零となるため、翼後端で有限な流速とするため、$\zeta=A$ で次式のように分子も零とならねばならない。

$$\frac{i\,\Gamma}{2\,\pi\,\left(A+\delta_2\right)}-e^{i\,\alpha}\,U+e^{-i\,\alpha}\,U=0$$

上式から渦循環強さ:Γ を求めると、

$$\Gamma=\left(4\,\pi\sin\left(\alpha\right)\,A+4\,\pi\,\delta_2\sin\left(\alpha\right)\right)\,U$$

(7.1.12) 式から、二次元翼の揚力：L は、

$$L=\rho\,U\,\Gamma=\rho\,\left(4\,\pi\sin\left(\alpha\right)\,A+4\,\pi\,\delta_2\sin\left(\alpha\right)\right)\,U^2$$

揚力をコード長で無次元化すると、

$$\begin{aligned}C_L=&\frac{L}{\frac{\rho\,U^2\,4\,A}{2}}\\=&\frac{4\,\pi\sin\left(\alpha\right)\,A+4\,\pi\,\delta_2\sin\left(\alpha\right)}{2\,A}\\=&2\,\pi\sin\left(\alpha\right)\,\left(1+\frac{\delta_2}{A}\right)\end{aligned}\tag{7.1.34}$$

翼まわりの圧力分布は、上式の流速から、

$$p=1-\frac{\frac{d}{d\,z}\,F\,\overline{\frac{d}{d\,z}\,F}}{U^2}$$

$$x=\frac{\cos\left(\theta\right)\,A^2}{A+\delta_2}+\cos\left(\theta\right)\,\left(A+\delta_2\right)$$

$\alpha=\frac{\pi}{6},A=1,\delta_2=0.1,U=1$ で圧力分布を描くと、

```
P1:p=1-rhs(DFZ1)*conjugate(rhs(DFZ1))/U^2;
YT1:subst([GM1,\zeta=R*%e^(%i*\theta),RR1,
  \theta=t],P1);
X1:subst([Z0,\zeta=R*%e^(%i*\theta),RR1,
  \theta=t],Z1);
X2:realpart(%);
YT3:factor(rectform(subst([\alpha=%pi/6,
 A=1,\delta[2]=0.1,U=1],rhs(YT1))));
X3:subst([\alpha=%pi/6,A=1,\delta[2]=0.1,
  U=1],rhs(X2));
plot2d([parametric,X3,-YT3,[t,0,%pi*2],
  [nticks,100]],[x,-4,4],[y,-2,10]);
```

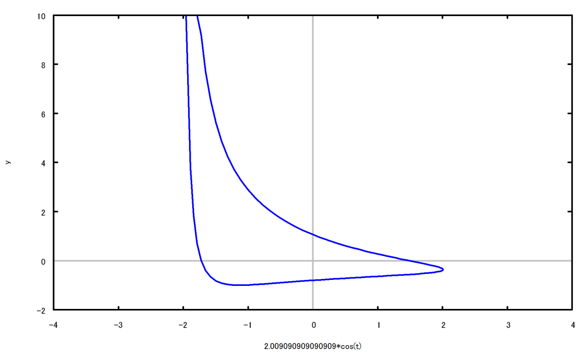


図 7.1.10: 翼厚ありの圧力分布

(4) 翼厚＋キャンバーありの翼

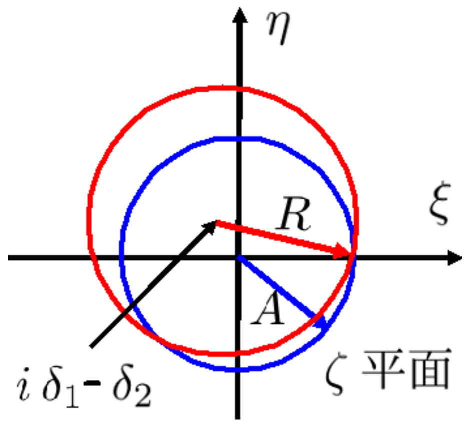


図 7.1.11: 翼厚＋キャンバーありの翼への写像

```
/* 翼厚＋キャンバー  */
RR1:R=sqrt((A+\delta[2])^2+\delta[1]^2);
ZT4:\zeta=R*%e^(%i*\theta)+%i*\delta[1]
  -\delta[2];
Z41:subst([ZT4,Z0,RR1],Z1);
X1:realpart(Z41);
Y1:imagpart(Z41);
factor(subst([\theta=0],X1));
factor(subst([\theta=%pi],X1));
factor(subst([\theta=%pi/2],Y1));
X2:subst([A=1,\delta[1]=0.1,\delta[2]=0.1
  ,\theta=t],rhs(X1));
Y2:subst([A=1,\delta[1]=0.1,\delta[2]=0.1
  ,\theta=t],rhs(Y1));
plot2d([parametric,X2,Y2,[t,0,2*%pi],
 [nticks,50]],[x,-4,4],[y,-2,2]);
```

ζ 平面で、(7.1.24) 式の写像関数を用いて、円の中心が $\zeta = i\,\delta_1 - \delta_2$ にあり、$\xi = A$ の点を通る円を z 平面に写像する。ここで、$\{delta_1 << A, \delta_2 << A$ とする。このとき、半径：R、円を表す式は下記となる。

$$R = \sqrt{(A+\delta_2)^2 + \delta_1^2},\quad \zeta = e^{i\,\theta}\,R - \delta_2 + i\,\delta_1$$

(7.1.24) 式の写像関数に代入し、

$$i\,y + x = \frac{A^2}{e^{i\,\theta}\sqrt{(A+\delta_2)^2 + \delta_1^2} - \delta_2 + i\,\delta_1} + e^{i\,\theta}\sqrt{(A+\delta_2)^2 + \delta_1^2} - \delta_2 + i\,\delta_1$$

上式の実部、虚部から、

$$x = \frac{A^2\left(\cos(\theta)\,\sqrt{(A+\delta_2)^2 + \delta_1^2} - \delta_2\right)}{\left(\sin(\theta)\,\sqrt{(A+\delta_2)^2 + \delta_1^2} + \delta_1\right)^2 + \left(\cos(\theta)\,\sqrt{(A+\delta_2)^2 + \delta_1^2} - \delta_2\right)^2} + \cos(\theta)\,\sqrt{(A+\delta_2)^2 + \delta_1^2} - \delta_2$$

$$y = \frac{A^2\left(-\sin(\theta)\,\sqrt{(A+\delta_2)^2 + \delta_1^2} - \delta_1\right)}{\left(\sin(\theta)\,\sqrt{(A+\delta_2)^2 + \delta_1^2} + \delta_1\right)^2 + \left(\cos(\theta)\,\sqrt{(A+\delta_2)^2 + \delta_1^2} - \delta_2\right)^2} + \sin(\theta)\,\sqrt{(A+\delta_2)^2 + \delta_1^2} + \delta_1$$

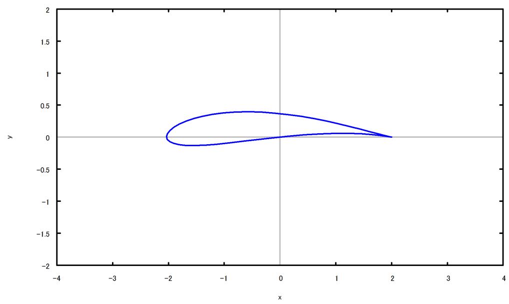


図 7.1.12: 翼厚＋キャンバーありの翼形状

```
F1:%e^(-%i*\alpha)*U*\zeta;
F2:%e^(%i*\alpha)*U*R^2/\zeta;
F3:%i*\gamma/2/%pi*log(\zeta);
F0:F=F1+F2+F3;
F01:subst([\zeta=\zeta-%i*\delta[1]
  +\delta[2],RR1],F0);
DF01:'diff(F,\zeta,1)=diff(rhs(F01),\zeta,
 1);
DZ1:'diff(z,\zeta,1)=diff(rhs(Z1),\zeta,1);
DFZ1:'diff(F,z,1)=rhs(DF01)/rhs(DZ1);
DDFZ1:denom(rhs(DFZ1))=0;
solve(%,\zeta);
AZT1:%[2];
NDFZ1:num(rhs(DFZ1))=0;
subst([AZT1],%);
GM1:expand(trigrat(solve(%,\gamma)[1]));
TBE1:tan(\beta)=2*\delta[1]/(2*A);
TBE2:solve(%,\delta[1])[1];
GM2:expand(subst([TBE2],GM1));
GM3:rhs(GM2)-last(rhs(GM2));
GM4:last(rhs(GM2));
L1:L=\rho*U*\gamma;
```

```
L2:trigrat(subst([\gamma=GM3],L1));
L3:subst([\gamma=GM4],L1);
C[L]=expand(rhs(L2+L3)/(1/2*\rho*U^2*4*A));
subst([A=A*cos(\beta),sin(\alpha)=sin(
  \alpha+\beta)],%);
factor(%);
```

ζ 平面で、流速：U、流向：α の一様流中に半径：R の円柱があり、渦循環強さ：Γ がある場合の複素ポテンシャルは (7.1.29) 式で表せる。円の中心が $\zeta = i\,\delta_1 - \delta_2$ にあり、$\xi = A$ の点を通る円の場合の複素ポテンシャルを求めるには、(7.1.29) 式に下記の関係を代入すればよい。

$$R \to \sqrt{(A+\delta_2)^2+\delta_1^2}, \quad \zeta \to \delta_2 - i\,\delta_1 + \zeta$$

$$\begin{aligned}F =&\frac{i\,\Gamma\log(\zeta+\delta_2-i\,\delta_1)}{2\,\pi} + \frac{e^{i\,\alpha}\left((A+\delta_2)^2+\delta_1^2\right)\,U}{\zeta+\delta_2-i\,\delta_1}\\&+e^{-i\,\alpha}\,U\,\left(\zeta+\delta_2-i\,\delta_1\right)\end{aligned}$$

上式を ζ で微分し、

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\,\zeta}\,F =&\frac{i\,\Gamma}{2\,\pi\,\left(\zeta+\delta_2-i\,\delta_1\right)} - \frac{e^{i\,\alpha}\left((A+\delta_2)^2+\delta_1^2\right)\,U}{\left(\zeta+\delta_2-i\,\delta_1\right)^2}\\&+e^{-i\,\alpha}\,U\end{aligned}$$

z 平面における流速は、

$$\frac{d}{d\,z}\,F = \frac{\frac{i\,\Gamma}{2\,\pi\,(\zeta+\delta_2-i\,\delta_1)} - \frac{e^{i\,\alpha}\left((A+\delta_2)^2+\delta_1^2\right)\,U}{(\zeta+\delta_2-i\,\delta_1)^2} + e^{-i\,\alpha}\,U}{1-\frac{A^2}{\zeta^2}}$$

上式は、分母が翼端：$\zeta = -A, \zeta = A$ で零となるため、翼後端で有限な流速とするため、$\zeta = A$ で次式のように分子も零とならねばならない。

$$\frac{i\,\Gamma}{2\,\pi\,\left(A+\delta_2-i\,\delta_1\right)} - \frac{e^{i\,\alpha}\left((A+\delta_2)^2+\delta_1^2\right)\,U}{\left(A+\delta_2-i\,\delta_1\right)^2} + e^{-i\,\alpha}\,U = 0$$

上式から渦循環強さ:Γ を求めると、

$$\Gamma = 4\,\pi\sin(\alpha)\,A\,U + 4\,\pi\,\delta_2\sin(\alpha)\,U + 4\,\pi\,\delta_1\cos(\alpha)\,U$$

(7.1.31) 式から、翼端とキャンバー高さ点を結んだ線の角度：β は下記の関係がある。

$$\tan(\beta) = \frac{\delta_1}{A}, \quad \delta_1 = \tan(\beta)\,A$$

上式から、

$$\Gamma = 4\,\pi\cos(\alpha)\,\tan(\beta)\,A\,U + 4\,\pi\sin(\alpha)\,A\,U + 4\,\pi\,\delta_2\sin(\alpha)\,U$$

(7.1.12) 式から、二次元翼の揚力：L は、

$$L = \frac{4\,\pi\sin(\beta+\alpha)\,\rho\,A\,U^2}{\cos(\beta)} + 4\,\pi\,\delta_2\sin(\alpha)\,\rho\,U^2$$

揚力をコード長で無次元化すると、

$$\begin{aligned}C_L =&\frac{2\,\pi\,\delta_2\sin(\alpha)}{A} + \frac{2\,\pi\sin(\beta+\alpha)}{\cos(\beta)}\\\approx&\frac{2\,\pi\sin(\beta+\alpha)}{\cos(\beta)}\left(1+\frac{\delta_2}{A}\right)\end{aligned} \tag{7.1.35}$$

翼まわりの圧力分布は、上式の流速から、

$$p = 1 - \frac{\frac{d}{d\,z}\,F\,\overline{\frac{d}{d\,z}\,F}}{U^2}$$

$$x = \cos(\theta)\,\sqrt{(A+\delta_2)^2+\delta_1^2} + \frac{\cos(\theta)\,A^2}{\sqrt{(A+\delta_2)^2+\delta_1^2}}$$

$\alpha = \frac{\pi}{6}, A = 1, \delta_1 = 0.1, \delta_2 = 0.1, U = 1$ で圧力分布を描くと、

```
P1:p=1-rhs(DFZ1)*conjugate(rhs(DFZ1))/U^2;
YT1:subst([GM1,\zeta=R*%e^(%i*\theta),RR1,
  \theta=t],P1);
X1:subst([Z0,\zeta=R*%e^(%i*\theta),RR1,
  \theta=t],Z1);
X2:realpart(%);
YT3:factor(rectform(subst([\alpha=%pi/6,
 A=1,\delta[1]=0.1,\delta[2]=0.1,U=1],
  rhs(YT1))));
X3:subst([\alpha=%pi/6,A=1,\delta[1]=0.1,
  \delta[2]=0.1,U=1],rhs(X2));
plot2d([parametric,X3,-YT3,[t,0,%pi*2],
  [nticks,100]],[x,-4,4],[y,-2,10]);
```

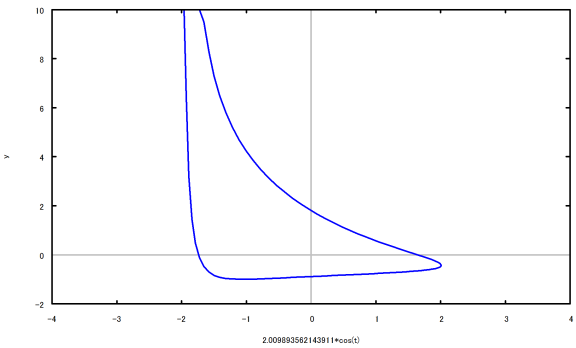


図 7.1.13: 翼厚＋キャンバーありの圧力分布

上図と平板翼の圧力分布：図 7.1.1 と比べると翼厚＋キャンバーの影響がよくわかる。

7.1.5 薄翼理論 (フーリエ変換)

二次元の翼型が薄く、反りも少ないものとする。下図に示すように翼型に沿って渦度 : $\gamma(s)$ を分布させる。翼のコード長さ:C、流速 : U、迎角 : α とする。

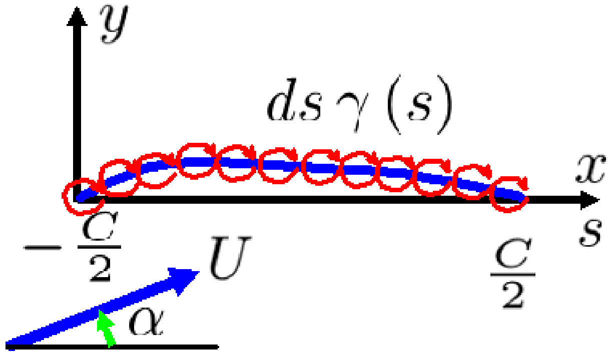


図 7.1.14: 薄翼理論

```
/* 薄翼理論 */
kill(all);
declare(z,complex);
declare(F,complex);
declare(a,complex);
assume(C>0);
F1:F=%i*\gamma(s)*ds*log(z-s)/2/%pi;
DF1:'diff(F,z,1)=diff(rhs(F1),z,1);
lhs(DF1)=subst([z=x+%i*y],rhs(DF1));
dv(x)=-imagpart(rhs(%));
DV1:lhs(%)=subst([y=0],rhs(%));
V1:v(x)='integrate(rhs(%)/ds,s,-C/2,C/2);
DYX0:'diff(y,x,1)=(U*sin(\alpha)+v(x))
  /(U*cos(\alpha)+u(x));
solve(DYX0,v(x))[1];
%/U;
subst([cos(\alpha)=1,sin(\alpha)=\alpha,
  u(x)=0],%);
G1:rhs(%)=subst([V1],lhs(%));
S1:s=C/2*(-cos(t));
subst([C=1],S1);
plot2d(rhs(%),[t,0,%pi],[x,-1,4],[y,-1,1]);
DS1:'diff(s,t,1)=diff(rhs(S1),t,1);
G20:A[n]*sin(n*t);
G2:\gamma(t)=2*U*(A[0]*cot(t/2)+sum(G20,n,1
  ,inf));
plot2d([cot(x/2),sin(x),sin(2*x),sin(3*x)],
  [x,0,%pi],[y,-1,5]);
```

```
G3:\gamma(s)*ds=rhs(DS1)*rhs(G2)*dt;
expand(rhs(%));
G31:\gamma[1](s)*ds=trigrat(last(%));
G4:\gamma[2](s)*ds=2*U*rhs(DS1)*(G20)*dt;
G34:\gamma(s)*ds=rhs(G31)+sum(rhs(G4),n,1,
  inf);
```

x 軸上 s における渦度分布 : $ds\gamma(s)$ による複素ポテンシャルは、(5.1.33) 式から、

$$F=\frac{i\,ds\,\gamma(s)\,\log(z-s)}{2\pi} \tag{7.1.36}$$

上式を z で微分し、流速成分を求めると、

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}F=&\frac{i\,ds\,\gamma(s)}{2\pi\,(z-s)}\\ =&\frac{i\,ds\,\gamma(s)}{2\pi\,(i\,y+x-s)}\end{aligned}$$

渦度分布 : $ds\gamma(s)$ による y 軸方向の速度成分 : $dv(x)$ は、上式の虚部から、$y<<C$ として、

$$\begin{aligned}\mathrm{dv}(x)&=-\frac{ds\,\gamma(s)\,(x-s)}{2\pi\left(y^2+(x-s)^2\right)}\\ &=-\frac{ds\,\gamma(s)}{2\pi\,(x-s)}\end{aligned}$$

上式をコード長さ分 : $-C/2\to C/2$ で積分すると、

$$\mathrm{v}(x)=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{C}{2}}^{\frac{C}{2}}\frac{\gamma(s)}{x-s}ds \tag{7.1.37}$$

境界条件として、翼の勾配が流速の勾配に一致するとして、x 軸方向の速度成分 : $u(x)$ とすると、

$$\frac{d}{dx}y=\frac{\sin(\alpha)\,U+\mathrm{v}(x)}{\cos(\alpha)\,U+\mathrm{u}(x)} \tag{7.1.38}$$

上式から $v(x)$ を求め、$u(x)<<U$ とすると、

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{v}(x)}{U}=&\frac{\left(\cos(\alpha)\,\left(\frac{d}{dx}y\right)-\sin(\alpha)\right)\,U+\mathrm{u}(x)\,\left(\frac{d}{dx}y\right)}{U}\\ =&\frac{d}{dx}y-\alpha\end{aligned}$$

上式に (7.1.37) 式を代入すると、

$$\frac{d}{dx}y-\alpha=-\frac{1}{2\pi U}\int_{-\frac{C}{2}}^{\frac{C}{2}}\frac{\gamma(s)}{x-s}ds \tag{7.1.39}$$

下記の式で s を t に変換する。積分範囲は $-C/2\to C/2$ から $0\to\pi$ に変換される。この関係を下図に示す。

$$s=-\frac{\cos(t)\,C}{2} \tag{7.1.40}$$

上式を t で微分すると、

$$\frac{d}{dt}s=\frac{\sin(t)\,C}{2} \tag{7.1.41}$$

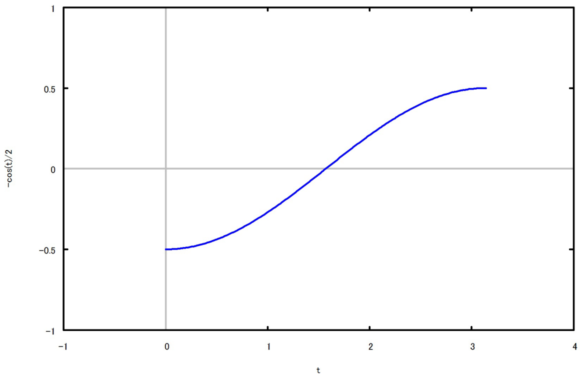


図 7.1.15: x 軸の変換関数

渦度分布：$\gamma(t)$ を下記の式で表現する。前縁では先端を回り込む流れから無限大となる $cot(t)$ とし、後端では渦度を零とし、後端の流速がなだらかに流れるように前後端の条件を満足する数式とする。これを図示すると下図となる。

$$\gamma(t) = 2\left(\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\,t)\right) + A_0 \cot\left(\frac{t}{2}\right)\right) U \tag{7.1.42}$$

(7.1.41) 式を上式に代入し、

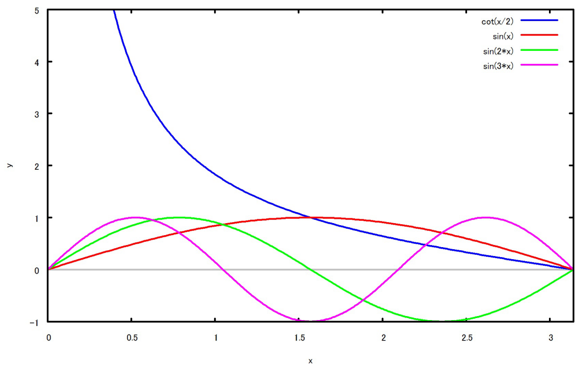


図 7.1.16: 渦度の関数表現

$$\begin{aligned}
ds\,\gamma(s) =& dt \sin(t)\left(\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\,t)\right)\right. \\
&\left. + A_0 \cot\left(\frac{t}{2}\right)\right) C\,U \\
=& dt \sin(t)\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\,t)\right) C\,U \\
&+ A_0\, dt \cot\left(\frac{t}{2}\right) \sin(t)\; C\,U \\
=& dt \sin(t)\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\,t)\right) C\,U \\
&+ dt\,\left(A_0 \cos(t) + A_0\,\right) C\,U
\end{aligned} \tag{7.1.43}$$

```
L1:L=\rho*U*'integrate(lhs(G3)/ds,s,-C/2,
  C/2);
L2:L[1]=\rho*U*'integrate(lhs(G31)/ds,s,
 -C/2,C/2);
L3:dL[2]=\rho*U*'integrate(lhs(G4)/ds,s,
 -C/2,C/2);
L21:rhs(L2)=\rho*U*'integrate(expand(
  rhs(G31)/dt),t,0,%pi);
rhs(%);
L211:lhs(L21)=ev(%,integrate);
L31:L[2]=sum(\rho*U*'integrate(expand(
  rhs(G4)/dt),t,0,%pi),n,1,5);
rhs(%);
L311:L[2]=ev(%,integrate);
L0:L=factor(rhs(L211)+rhs(L311));
G41:\Gamma=rhs(L0)/\rho/U;
CL1:C[L]=rhs(L0)/(1/2*\rho*U^2*C);
```

(7.1.3) 式から揚力は、

$$L = \rho \int_{-\frac{C}{2}}^{\frac{C}{2}} \gamma(s)\, ds\, U \tag{7.1.44}$$

(7.1.43) 式の第２項による (7.1.44) 式の揚力：L_1 は、

$$\begin{aligned}
L_1 =& \rho \int_{-\frac{C}{2}}^{\frac{C}{2}} \gamma_1(s)\, ds\, U \\
=& \rho\, U \int_0^{\pi} A_0 \cos(t)\; C\,U + A_0\, C\,U dt \\
=& \pi\, A_0\, \rho\, C\, U^2
\end{aligned} \tag{7.1.45}$$

(7.1.43) 式の第１項による (7.1.44) 式の揚力：L_2 は、

$$\begin{aligned}
L_2 =& \rho \int_{-\frac{C}{2}}^{\frac{C}{2}} \gamma_2(s)\, ds\, U \\
=& A_5\, \rho \int_0^{\pi} \sin(t)\; \sin(5\,t)\, dt\, C\, U^2 \\
&+ A_4\, \rho \int_0^{\pi} \sin(t)\; \sin(4\,t)\, dt\, C\, U^2 \\
&+ A_3\, \rho \int_0^{\pi} \sin(t)\; \sin(3\,t)\, dt\, C\, U^2 \\
&+ A_2\, \rho \int_0^{\pi} \sin(t)\; \sin(2\,t)\, dt\, C\, U^2 \\
&+ A_1\, \rho \int_0^{\pi} \sin(t)^2 dt\, C\, U^2 + \ldots \\
=& \frac{\pi\, A_1\, \rho\, C\, U^2}{2}
\end{aligned} \tag{7.1.46}$$

(7.1.45) 式、(7.1.46) 式から、渦度強さ：Γ、揚力：L は、

$$\Gamma = \frac{\pi\,\left(A_1 + 2\,A_0\right)\, C\,U}{2} \tag{7.1.47}$$

$$L = \frac{\pi\,\left(A_1 + 2\,A_0\right)\, \rho\, C\, U^2}{2} \tag{7.1.48}$$

上式をコード長さ：C で無次元化すると、

$$C_L=\frac{L}{\frac{\rho\,U^2\,C}{2}}=\pi\,\left(A_1+2\,A_0\right) \tag{7.1.49}$$

```
M0:M=\rho*U*'integrate(\gamma(s)*s,s,-C/2,
  C/2);
G5:\gamma(s)*s*ds=rhs(DS1)*rhs(S1)*rhs(G2)
  *dt;
G51:expand(rhs(%));
M1:first(G51);
M2:G51-M1;
M11:-(dt*cos(t)*sin(t)*((A[n]*sin(n*t)))
  *C^2*U)/2/dt;
sum('integrate(M11,t,0,%pi),n,1,5);
M12:ev(%,integrate);
'integrate(M2/dt,t,0,%pi);
M22:ev(%,integrate);
M01:M=factor(\rho*U*(M12+M22));
CM1:C[M]=factor(rhs(M01)/(1/2*\rho*U^2
 *C^2));
factor(M01/L0/C);
lhs(%)=taylor(rhs(%),A[1],0,1);
lhs(%)=expand(first(rhs(%)))+expand(last(
  rhs(%)));
lhs(%)=rhs(%)-first(rhs(%));
M[m]=rhs(M01)-rhs(L0)*x*C;
factor(%);
subst([x=-1/4],%);
```

翼の前縁を中心とした翼に作用するモーメントは次式で表現できる。

$$M=-\rho\int_{-\frac{C}{2}}^{\frac{C}{2}}s\,\gamma\left(s\right)ds\,U \tag{7.1.50}$$

上式の被積分項は、

$$\begin{aligned}ds\,s\,\gamma\left(s\right)=&-\frac{dt}{2}\cos\left(t\right)\,\sin\left(t\right)\,\left(\left(\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\left(n\,t\right)\right)\right.\\&\left.+A_0\cot\left(\frac{t}{2}\right)\right)C^2\,U\\=&-\frac{dt\cos\left(t\right)\,\sin\left(t\right)\,\left(\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\left(n\,t\right)\right)\,C^2\,U}{2}\\&-\frac{A_0\,dt\cot\left(\frac{t}{2}\right)\,\cos\left(t\right)\,\sin\left(t\right)\,C^2\,U}{2}\end{aligned} \tag{7.1.51}$$

上式を (7.1.50) 式に代入し、積分すると、

$$M=-\frac{\pi\,\left(A_2+2\,A_0\right)\,\rho C^2\,U^2}{8} \tag{7.1.52}$$

上式をコード長さ：C で無次元化すると、

$$C_M=\frac{M}{\frac{\rho\,U^2\,C^2}{2}}=-\frac{\pi\,\left(A_2+2\,A_0\right)}{4} \tag{7.1.53}$$

翼に作用するモーメントを揚力で割り、揚力の作用点を求め、$A_0>>A_1,A_2$ とし、コード長さ：C で無次元化すると、

$$\begin{aligned}\frac{M}{C\,L}&=-\frac{A_2+2\,A_0}{4\,\left(A_1+2\,A_0\right)}\\&=-\frac{A_2+2\,A_0}{8\,A_0}+\frac{\left(A_2+2\,A_0\right)\,A_1}{16\,A_0^2}+...\\&=-\frac{A_2}{8\,A_0}+\frac{A_1}{8\,A_0}-\frac{1}{4}\end{aligned} \tag{7.1.54}$$

揚力の作用点は、ほぼ前縁から $C/4$ の位置にある。

```
G1;
X1:subst([s=x,t=\theta],S1);
XS1:X1-S1;
G34/XS1;
rhs(G1)=-1/2/%pi/U*'integrate(factor(rhs(%)
  /dt),t,0,%pi);
'integrate(cos(n*t)/(cos(t)-cos(\theta)),t,
  0,%pi)=%pi*sin(n*\theta)/sin(\theta);
G50:'integrate(cos(n*t)/(cos(\theta)
 -cos(t))
  ,t,0,%pi)=-%pi*sin(n*\theta)/sin(\theta);
G500:subst([n=0],A[0]/%pi*G50);
G501:subst([n=1],A[0]/%pi*G50);
SN1:sin(t)*A[n]*sin(n*t)/(cos(\theta)
  -cos(t));
SN2:SN1=trigrat(%);
G51:'integrate(SN1/%pi,t,0,%pi)='integrate(
  rhs(SN2)/%pi,t,0,%pi);
%pi*A[n]/2/%pi*sin((n+1)*\theta)/sin(
 \theta)-%pi*A[n]/2/%pi*sin((n-1)*\theta)
  /sin(\theta);
G52:lhs(G51)=trigrat(%);
G53:lhs(G1)=lhs(G500)+lhs(G501)+sum(
 lhs(G52),n,1,inf);
G54:lhs(G1)=rhs(G500)+rhs(G501)+sum(
 rhs(G52),n,1,inf);
DYX1:%+\alpha;
A0:\alpha-A[0]=1/%pi*'integrate('diff(
  y(\theta),x,1),\theta,0,%pi);
AN:A[n]=2/%pi*'integrate('diff(y(\theta),
  x,1)*cos(n*\theta),\theta,0,%pi);
```

境界条件である (7.1.39) 式は、

$$\frac{d}{d\,x}\,y-\alpha=-\frac{1}{2\,\pi\,U}\int_{-\frac{C}{2}}^{\frac{C}{2}}\frac{\gamma\left(s\right)}{x-s}ds \tag{7.1.55}$$

(7.1.40) 式と同様 x についても、下記の変換を行う。

$$x=-\frac{\cos\left(\theta\right)\,C}{2} \tag{7.1.56}$$

上式と (7.1.40) 式から、

$$x-s=\frac{\cos(t)\,C}{2}-\frac{\cos(\theta)\,C}{2}$$

(7.1.55) 式の被積分関数は、(7.1.43) 式と上式から、

$$\frac{ds\,\gamma(s)}{x-s}=\frac{dt\sin(t)}{\frac{\cos(t)\,C}{2}-\frac{\cos(\theta)\,C}{2}}\left(\left(\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(n\,t)\right)C\,U\right.$$
$$\left.+\left(A_0\,dt\cos(t)+A_0\,dt\right)C\,U\right)$$

上式から (7.1.55) 式は、

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\,x}\,y-\alpha&=-\frac{1}{2\,\pi\,U}\int_{-\frac{C}{2}}^{\frac{C}{2}}\frac{\gamma(s)}{x-s}ds\\&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin(t)\,\left(\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(n\,t)\right)+A_0\cos(t)+A_0}{\cos(\theta)-\cos(t)}dt\end{aligned}\tag{7.1.57}$$

次式の積分公式から [1]、

$$\int_0^{\pi}\frac{\cos(n\,t)}{\cos(t)-\cos(\theta)}dt=\frac{\pi\sin(n\,\theta)}{\sin(\theta)}$$

上記、公式から

$$\int_0^{\pi}\frac{\cos(n\,t)}{\cos(\theta)-\cos(t)}dt=-\frac{\pi\sin(n\,\theta)}{\sin(\theta)}\tag{7.1.58}$$

(7.1.57) 式の積分内分子の第３項は、(7.1.58) 式に $n=0$ を代入し、

$$\frac{A_0}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{\cos(\theta)-\cos(t)}dt=0\tag{7.1.59}$$

(7.1.57) 式の積分内分子の第２項は、(7.1.58) 式に $n=1$ を代入し、

$$\frac{A_0}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\cos(t)}{\cos(\theta)-\cos(t)}dt=-A_0\tag{7.1.60}$$

(7.1.57) 式の積分内分子の第１項の和の要素は、

$$\begin{aligned}&\frac{A_n\sin(t)\,\sin(n\,t)}{\cos(\theta)-\cos(t)}\\&\quad=-\frac{A_n\cos((n+1)\,t)-A_n\cos((n-1)\,t)}{2\cos(\theta)-2\cos(t)}\end{aligned}$$

上式を積分し、

$$\begin{aligned}&\frac{A_n\,\int_0^{\pi}\frac{\sin(t)\sin(n\,t)}{\cos(\theta)-\cos(t)}dt}{\pi}\\&=-\frac{\int_0^{\pi}\frac{A_n\cos((n+1)\,t)-A_n\cos((n-1)\,t)}{2\cos(\theta)-2\cos(t)}dt}{\pi}\\&=\frac{A_n\sin((n+1)\,\theta)}{2\sin(\theta)}-\frac{A_n\sin((n-1)\,\theta)}{2\sin(\theta)}\\&=A_n\cos(n\,\theta)\end{aligned}\tag{7.1.61}$$

[1]森口　繁一、宇田川　久、一松　信：岩波数学公式１　微分積分・平面曲線、岩波書店　2003 [32)]　P.248

(7.1.58) 式、(7.1.59) 式、(7.1.60) 式を (7.1.57) 式に代入し、

$$\frac{d}{d\,x}\,y-\alpha=\left(\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos(n\,\theta)\right)-A_0\tag{7.1.62}$$

上式から、

$$\frac{d}{d\,x}\,y=\left(\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos(n\,\theta)\right)+\alpha-A_0\tag{7.1.63}$$

上式は、フーリエ級数の表現になっており、各係数は、

$$\alpha-A_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{y}(\theta)\,d\theta\tag{7.1.64}$$

$$A_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(n\,\theta)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{y}(\theta)\right)d\theta\tag{7.1.65}$$

例題 7.1.6　平板翼・円弧翼・フラップの揚力特性 (薄翼理論を用いた)

薄翼理論を用いて、平板翼・円弧翼・フラップの揚力特性を求める。コード長さ：C とし、迎角:α は十分小さいとする。

(1) 平板翼

薄翼理論を用い平板翼の揚力特性を求める。

```
/* 平板翼 */
DYX2:rhs(DYX1)=0;
A01:A[0]=\alpha;
AN0:A[n]=0;
CL2:subst([A0,A[1]=0],CL1);
CM2:subst([A0,A[1]=0,A[2]=0],CM1);
CM2/CL2;
```

上記プログラムは前節：薄翼理論に続いて実行する。平板翼であるから、

$$\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{y}=0$$

上式を (7.1.64) 式、(7.1.65) 式に代入し、

$$A_0=\alpha,\quad A_n=0$$

上式を (7.1.49) 式、(7.1.53) 式に代入し、平板翼に作用する揚力、モーメントの無次元化式は、

$$C_L=2\,\pi\,\alpha,\quad C_M=\frac{\pi\,\alpha}{2} \tag{7.1.66}$$

モーメントの作用点は、

$$\frac{C_M}{C_L}=\frac{1}{4} \tag{7.1.67}$$

上記の結果は、例題 7.1.3 二次元平板翼、(7.1.23) 式の迎角：α が小さい場合の結果と一致している。

(2) 円弧翼

薄翼理論を用い円弧翼の揚力特性を求める。迎角:α およびキャンバーは十分小さいとする。

```
/* 円弧翼 */
CY1:y=B*(x-C/2)*(x+C/2);
CY2:\beta*C/2=subst([x=0],rhs(CY1));
BT1:solve(CY2,B)[1];
CY3:subst([BT1],CY1);
DCY3:'diff(y,x,1)=expand(factor(diff(rhs
  (CY3),x,1)));
DCY31:lhs(DCY3)=factor(subst([X1],
  rhs(DCY3)));
A0;
lhs(A0)=1/%pi*'integrate(rhs(DCY31),\theta,
  0,%pi);
ev(%,integrate);
A02:solve(%,A[0])[1];
A[1]=2/%pi*'integrate(rhs(DCY31)*cos(
 \theta),\theta,0,%pi);
AN12:ev(%,integrate);
A[2]=2/%pi*'integrate(rhs(DCY31)*cos(2
  *\theta),\theta,0,%pi);
AN22:ev(%,integrate);
CL3:factor(subst([A02,AN12],CL1));
CM3:factor(subst([A02,AN12,AN22],CM1));
factor(CM3/CL3);
```

緩やかな円弧は例題 7.1.4 キャンバー・翼厚を有する二次元翼 (Joukowski 変換)、(7.1.28) 式から下記の放物線で表現できる。

$$y=B\,\left(x-\frac{C}{2}\right)\,\left(\frac{C}{2}+x\right)$$

翼端とキャンバー最高点を結んだ線の角度：β を導入し、下記の関係式がある。ここで β は十分小さいとする。

$$\frac{\beta\,C}{2}=-\frac{B\,C^2}{4}$$

上式から係数：B を求めると、

$$B=-\frac{2\,\beta}{C}$$

以上から、円弧翼の形状を次式で表す。

$$y=-\frac{2\,\beta\,\left(x-\frac{C}{2}\right)\,\left(\frac{C}{2}+x\right)}{C}$$

上式を x で微分し、(7.1.56) 式の変換式を導入すると、

$$\frac{d}{d\,x}\,y=2\,\beta\cos\left(\theta\right)$$

上式を (7.1.64) 式、(7.1.65) 式に代入し、

$$\alpha-A_0=\frac{2\,\beta\,\int_0^{\pi}\cos\left(\theta\right)d\theta}{\pi}=0$$

$$A_1=\frac{4\,\beta\,\int_0^{\pi}\cos\left(\theta\right)^2d\theta}{\pi}=2\,\beta$$

$$A_2=\frac{4\,\beta\,\int_0^{\pi}\cos\left(\theta\right)\,\cos\left(2\,\theta\right)d\theta}{\pi}=0$$

以上から、

$$A_0=\alpha,\quad A_1=2\,\beta,\quad A_2=0$$

上式を (7.1.49) 式、(7.1.53) 式に代入し、円弧翼に作用する揚力、モーメントの無次元化式は、

$$C_L=2\,\pi\,\left(\beta+\alpha\right),\quad C_M=-\frac{\pi\,\alpha}{2} \tag{7.1.68}$$

モーメントの作用点は、

$$\frac{C_M}{C_L}=-\frac{\alpha}{4\,\left(\beta+\alpha\right)} \tag{7.1.69}$$

上記の結果は、例題 7.1.4 キャンバー・翼厚を有する二次元翼 (Joukowski 変換)、(7.1.32) 式の迎角：α、β は十分小さい場合の結果と一致している。

(3) フラップ

薄翼理論を用い、平板の後端についたフラップの揚力特性を求める。迎角:α およびコード長さとフラップ長さの比:F、フラップ角度：δ は十分小さいとする。

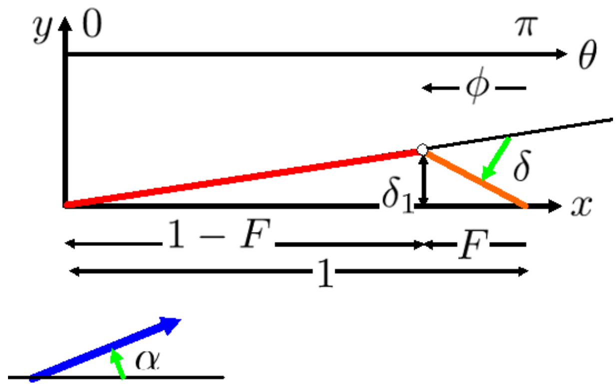


図 7.1.17: 平板の後端についたフラップ

```
/* フラップ */
assume(\phi>0 and \phi<%pi);
DE1:\delta[1]=F*tan(\delta)/((1-F)/F);
DE2:subst([tan(\delta)=\delta],DE1);
PH1:(1-F)*C=(cos(\phi)+1)*C/2;
PH2:solve(PH1,\phi)[1];
DXY1:\delta[1]/(1-F);
DXY2:-\delta[1]/F;
\alpha-A[0]=1/%pi*'integrate(DXY1,\theta,0,
  %pi-\phi)+1/%pi*'integrate(DXY2,\theta,
  %pi-\phi,%pi);
A03:-%+\alpha;
A[1]=2/%pi*'integrate(DXY1*cos(\theta),
  \theta,0,%pi-\phi)+2/%pi*'integrate(DXY2
  *cos(\theta),
  \theta,%pi-\phi,%pi);
AN13:factor(ev(%,integrate));
A[2]=2/%pi*'integrate(DXY1*cos(2*\theta),
  \theta,0,%pi-\phi)+2/%pi*'integrate(DXY2*
  cos(2*\theta),\theta,%pi-\phi,%pi);
AN23:factor(ev(%,integrate));
```

上図に示すように平板の後端についたフラップの形状を定義する。ヒンジ部分の高さ:δ_1 は、

$$\delta_1 = \frac{\tan(\delta)\ F^2}{1-F} \approx \delta_1 = \frac{\delta\ F^2}{1-F}$$

ヒンジ位置を (7.1.32) 式で表現し、$\theta \to \pi - \phi$ に置き換えて、

$$C\ (1-F) = \frac{(\cos(\phi)+1)\ C}{2}$$

上式から ϕ を求めると、

$$\phi = \pi - \operatorname{acos}(2\,F-1)$$

平板翼部分とフラップ部分の勾配はそれぞれ、

$$\frac{d}{d\,x}\,y_1 = \frac{\delta_1}{1-F},\qquad \frac{d}{d\,x}\,y_2 = -\frac{\delta_1}{F}$$

上式を (7.1.64) 式、(7.1.65) 式に代入し、

$$\begin{aligned}\alpha - A_0 =& \frac{1}{\pi}\int_{\pi-\phi}^{\pi}\frac{d}{d\,x}\,y_2\,d\theta + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi-\phi}\frac{d}{d\,x}\,y_1\,d\theta\\ =& \frac{\delta_1\ (\pi-\phi)}{\pi\ (1-F)} - \frac{\delta_1\,\phi}{\pi\,F}\end{aligned} \tag{7.1.70}$$

$$A_0 = \frac{\delta_1\,\phi}{\pi\,F} - \frac{\delta_1\ (\pi-\phi)}{\pi\ (1-F)} + \alpha \tag{7.1.71}$$

$$\begin{aligned}A_1 =& \frac{2\int_{\pi-\phi}^{\pi}\frac{d}{d\,x}\,y_2\cos(\theta)\,d\theta}{\pi} + \frac{2\int_0^{\pi-\phi}\frac{d}{d\,x}\,y_1\cos(\theta)\,d\theta}{\pi}\\ =& \frac{2\,\delta_1\int_0^{\pi-\phi}\cos(\theta)\,d\theta}{\pi\ (1-F)} - \frac{2\,\delta_1\int_{\pi-\phi}^{\pi}\cos(\theta)\,d\theta}{\pi\,F}\\ =& -\frac{2\,\delta_1\sin(\phi)}{\pi\ (F-1)\ F}\end{aligned} \tag{7.1.72}$$

$$\begin{aligned}A_2 =& \frac{2\int_{\pi-\phi}^{\pi}\frac{d}{d\,x}\,y_2\cos(2\,\theta)\,d\theta}{\pi} + \frac{2\int_0^{\pi-\phi}\frac{d}{d\,x}\,y_1\cos(2\,\theta)\,d\theta}{\pi}\\ =& \frac{2\,\delta_1\int_0^{\pi-\phi}\cos(2\,\theta)\,d\theta}{\pi\ (1-F)} - \frac{2\,\delta_1\int_{\pi-\phi}^{\pi}\cos(2\,\theta)\,d\theta}{\pi\,F}\\ =& \frac{\delta_1\sin(2\,\phi)}{\pi\ (F-1)\ F}\end{aligned} \tag{7.1.73}$$

```
CL4:partfrac(subst([A03,AN13,sin(\phi)
 =\phi],CL1),F);
CL41:last(rhs(CL4));
CL42:expand(rhs(CL4)-CL41);
subst([DE2,PH2],CL42);
taylor(%,F,0,3);
CL45:rest(%,-2);
CL5:lhs(CL4)=CL41+CL45;
```

上式の結果を (7.1.49) 式に代入し、フラップが後端についた平板に作用する揚力の無次元化式は、

$$\begin{aligned}C_L =& \frac{4\,\delta_1\,\phi}{F} + \frac{2\,\pi\,\delta_1 - 4\,\delta_1\,\phi}{F-1} + 2\,\pi\,\alpha\\ =& -\frac{4\,\delta_1\,\phi}{(F-1)\ F} + \frac{2\,\pi\,\delta_1}{F-1} + 2\,\pi\,\alpha\\ =& -\frac{4\,\delta\,F\ (\pi - \operatorname{acos}(2\,F-1))}{(1-F)\ (F-1)} + \frac{2\,\pi\,\delta\,F^2}{(1-F)\ (F-1)}\\ &+ 2\,\pi\,\alpha\\ \approx& -2\,\pi\,\delta\,F^2 + 8\,\delta\,F^{\frac{3}{2}} + 2\,\pi\,\alpha\end{aligned} \tag{7.1.74}$$

```
CM4:partfrac(subst([A03,AN13,AN23,sin(\phi)
  =\phi,sin(2*\phi)=2*\phi],CM1),F);
CM41:last(rhs(CM4));
CM42:rhs(CM4)-CM41;
subst([DE2,PH2],CM42);
taylor(%,F,0,3);
CM45:rest(%,-1);
CM5:lhs(CM4)=CM41+CM45;
lhs(CM4)/lhs(CL4)=partfrac((rhs(CM4)/
  rhs(CL4)),F);
CM51:subst([DE2,PH2],%);
CM52:first(rhs(CM51));
CM53:last(rhs(CM51));
taylor(CM52,F,0,3);
```

上式の結果を (7.1.53) 式に代入し、フラップが後端についた平板に作用するモメントの無次元化式は、

$$\begin{aligned}C_M &= -\frac{\pi\,\delta_1}{2\,(F-1)}-\frac{\pi\,\alpha}{2}\\ &= -\frac{\pi\,\delta\,F^2}{2\,(1-F)\,(F-1)}-\frac{\pi\,\alpha}{2}\\ &= -\frac{\pi\,\alpha}{2}+\frac{\pi\,\delta\,F^2}{2}+\pi\,\delta\,F^3+...\\ &\approx \frac{\pi\,\delta\,F^2}{2}-\frac{\pi\,\alpha}{2}\end{aligned} \tag{7.1.75}$$

上式からモーメントの作用点は、

$$\begin{aligned}\frac{C_M}{C_L} &= -\frac{\delta_1\,\phi}{2\,(\pi\,\alpha\,F^2+(\pi\,\delta_1-\pi\,\alpha)\,F-2\,\delta_1\,\phi)}-\frac{1}{4}\\ &= -\frac{\delta\,F^2\,(\pi-\mathrm{acos}\,(2\,F-1))}{2\,(1-F)\,\left(-\frac{2\,\delta\,F^2\,(\pi-\mathrm{acos}(2\,F-1))}{1-F}+F\,\left(\frac{\pi\,\delta\,F^2}{1-F}-\pi\,\alpha\right)+\pi\,\alpha\,F^2\right)}-\frac{1}{4}\\ &= -\frac{1}{4}+\frac{\delta\,F^{\frac{3}{2}}}{\pi\,\alpha}+\frac{13\,\delta\,F^{\frac{5}{2}}}{6\,\pi\,\alpha}-\frac{4\,\delta^2\,F^3}{\pi^2\,\alpha^2}+...\\ &\approx -\frac{1}{4}+\frac{\delta\,F^{\frac{3}{2}}}{\pi\,\alpha}\end{aligned} \tag{7.1.76}$$

例題 7.1.7　離散渦法による薄翼特性

二次元の翼型が薄く、反りも少ないものとする。下図に示すように翼型を N 枚のパネルで近似する。図のように渦糸：Γ_k を置き、その中間で翼の境界条件を満足させる。ここで翼のコード長さ:C、流速：U、迎角：α とする。

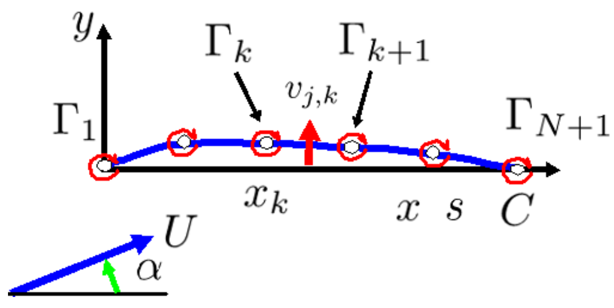


図 7.1.18: 離散渦法

```
/* 離散渦法 */
kill(all);
assume(C>0);
VXS1:v(x)=-\Gamma(s)/(2*%pi*(x-s));
VJK1:lhs(%)=subst([\Gamma(s)=\Gamma[k],
 x=1/2*(x[j]+x[j+1]),s=x[k]],rhs(%));
XK1:x[k]=d*(k-1);
XJ1:x[j]=d*(j-1);
XJ2:x[j+1]=d*j;
N:10;
D1:d=C/N;
VJK2:factor(subst([XK1,XJ1,XJ2,D1],VJK1));
AJK1:rhs(VJK2)/\Gamma[k];
a[m,n]:=block([b],
if m=N+1 then if n=N+1 then b:1 else b:0
else b:subst([k=n,j=m],AJK1), return(b));
AMAT1:genmatrix(a,N+1,N+1);
AINV1:invert(%);
VB1:vb[j]=U*('diff(y,x,1)-\alpha);
```

薄翼理論から、下記の (7.1.39) 式の積分を離散渦で解く。

$$\frac{d}{d\,x}\,y-\alpha=-\frac{1}{2\,\pi\,U}\int_{-\frac{C}{2}}^{\frac{C}{2}}\frac{\gamma\,(s)}{x-s}ds \tag{7.1.77}$$

s に置いた渦糸：Γ による z 位置における複素ポテンシャルは、

$$F=\frac{i\,\Gamma\log\,(z-s)}{2\,\pi}$$

上式を z で微分し、

$$\frac{d}{d\,z}\,F=\frac{i\,\Gamma}{2\,\pi\,(z-s)}$$

渦糸：Γ による誘導速度は、

$$u_{j,k}-i\,v_{j,k}=\frac{i\,\Gamma}{2\,\pi\,(z-s)}$$

上下速度成分は、

$$v_{j,k}=-\frac{\Gamma}{2\,\pi\,(z-s)}$$

j 点と $j+1$ 点との中間点を翼の境界条件を評価する位置とし、k 点に置いた渦糸：Γ_k による評価する位置の上下速度成分は、

$$v_{j,k}=-\frac{\Gamma_k}{2\,\pi\,\left(\frac{x_{j+1}+x_j}{2}-x_k\right)}$$

ここで、

$$x_k=d\,(k-1)\,,\quad x_j=d\,(j-1)\,,\quad x_{j+1}=d\,j,\quad d=\frac{C}{N}$$

$N=10$ とし、上式を代入すると、

$$v_{j,k}=\frac{10\,\Gamma_k}{\pi\,(2\,k-2\,j-1)\,C}$$

上記の N 個の境界条件と後端でスムースな流れとなる条件：$\Gamma_{N+1}=0$ を付加して、

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,N} & a_{1,N+1} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,N} & a_{2,N+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{N,1} & a_{N,2} & \dots & a_{N,N} & a_{N,N+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \vdots \\ \Gamma_N \\ \Gamma_{N+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} vb_1 \\ vb_2 \\ \vdots \\ vb_N \\ 0 \end{pmatrix} \tag{7.1.78}$$

ここで

$$a_{j,k}:=\frac{10}{\pi\,(2\,k-2\,j-1)\,C},\quad vb_j=\left(\frac{d}{d\,x}\,y-\alpha\right)\,U \tag{7.1.79}$$

上式から、Γ_k は $a_{j,k}$ の行列の逆行列を求め、

$$\begin{pmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \vdots \\ \Gamma_N \\ \Gamma_{N+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,N} & a_{1,N+1} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,N} & a_{2,N+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{N,1} & a_{N,2} & \dots & a_{N,N} & a_{N,N+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} vb_1 \\ vb_2 \\ \vdots \\ vb_N \\ 0 \end{pmatrix} \tag{7.1.80}$$

ここで、Maxima では上記の逆行列を変数を残したまま、求めることが出来る。

(1) 平板翼

```
/* 平板翼 */
VB2:subst(['diff(y,x,1)=0],VB1);
BK1:rhs(VB2);
vb1[m,n]:=block([f],
if m=N+1 then e:0 else e:BK1,
return(e));
BMAT1:genmatrix(vb1,N+1,1);
GMAT1:AINV1.BMAT1;
sum(GMAT1[k][1],k,1,N);
L1:L=%*\rho*U;
```

平板では、$\frac{d}{dx}y=0$ であるから、

$$vb_j=-\alpha U$$

上式から (7.1.78) 式で、$N=10$ として解いて、Γ_k を求める。以上から揚力:L は、下記となり薄翼理論で得られた (7.1.66) 式と一致する。

$$L=\rho U\sum_{k=1}^{N+1}\Gamma_k=\pi\,\alpha\,\rho\,C\,U^2,\quad C_L=\frac{L}{\frac{\rho\,U^2\,C}{2}}=2\,\pi\,\alpha$$

(2) 円弧翼

```
/* 円弧翼 */
Y1:y=-2*B*x*(x-C)/C;
DY1:'diff(y,x,1)=factor(diff(rhs(Y1),x,1));
subst([DY1,x=1/2*(x[j]+x[j+1])],VB1);
VB2:factor(subst([XJ1,XJ2,D1,N=10],%));
vc[m,n]:=block([e],
if m=N+1 then e:0 else e:subst([j=m],-((2*j
 *B-11*B+5*alpha)*U)/5),
return(e));
BMAT1:genmatrix(vc,N+1,1);
GMAT1:AINV1.BMAT1;
sum(GMAT1[k][1],k,1,N);
L1:L=factor(%*\rho*U);
expand(%);
```

円弧翼形状は、(7.1.28) 式から次の二次式で表現できる。

$$y=-\frac{2\,x\,\beta\,(x-C)}{C}$$

上式を微分し、

$$\frac{d}{d\,x}\,y=\frac{2\,\beta\,(C-2\,x)}{C}$$

(7.1.79) 式の vb_j に上式を代入し、

$$vb_j=\left(\frac{2\,\beta\,(C-x_{j+1}-x_j)}{C}-\alpha\right)U=-\frac{(2\,j\,\beta-11\,\beta+5\,\alpha)\,U}{5}$$

上式から (7.1.78) 式で、$N=10$ として解いて Γ_k を求め、揚力：L を求めると、

$$L=\rho U\sum_{k=1}^{N+1}\Gamma_k=\frac{9\,\pi\,\rho\,\beta\,C\,U^2}{10}+\pi\,\alpha\,\rho\,C\,U^2$$

$$C_L=2\,\pi\left(\frac{9}{10}\beta+\alpha\right)$$

上式は薄翼理論で得られた次式の (7.1.68) 式とは、概ね一致している。この相違は積分の厳密性によるものであろう。

$$C_L=\frac{L}{\frac{\rho\,U^2\,C}{2}}=2\,\pi\,(\beta+\alpha)$$

7.1.8 薄翼理論 (積分方程式)

二次元の翼型が薄く、反りも少ないものとする。下図に示すように翼型に沿って渦度：κ を分布させる。翼のコード長さ:$2A$、流速：U、迎角：α とする。

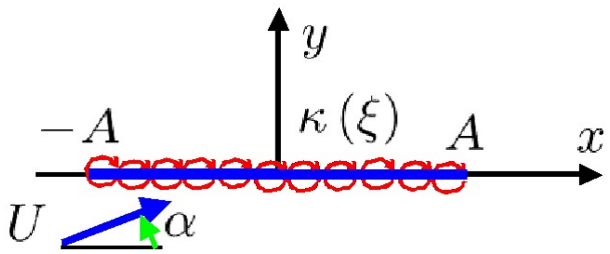


図 7.1.19: 薄翼理論

```
kill(all);
declare(z,complex);
declare(F,complex);
declare(\kappa,real);
depends([F],[z]);
depends([u,v],[x,y]);
assume(\epsilon>0,\delta>0);
assume(A>0);
F1:F=%i*\kappa(\xi)*log(z-\xi)/2/%pi;
diff(F1,z,1);
F11:lhs(%)=subst([z=x+%i*y],rhs(%));
lhs(%)=u(x,y)-%i*v(x,y);
U1:u(x,y)=realpart(rhs(F11));
V1:v(x,y)=-imagpart(rhs(F11));
U21:subst([y=\delta,\kappa(\xi)
 =\kappa(x)],U1);
u(x,+\delta)='integrate(rhs(U21),\xi,
 x-\epsilon,x+\epsilon);
ev(%,integrate);
lhs(%)=limit(rhs(%),\delta,0,plus);
U22:subst([y=-\delta,\kappa(\xi)=
 \kappa(x)],U1);
u(x,-\delta)='integrate(rhs(U22),\xi,
 x-\epsilon,x+\epsilon);
ev(%,integrate);
lhs(%)=limit(rhs(%),\delta,0,plus);
```

```
V21:subst([y=\delta,\kappa(\xi)=
 \kappa(x)],V1);
v(x,+\delta)='integrate(rhs(V21),\xi,
 x-\epsilon,x+\epsilon);
ev(%,integrate);
V22:subst([y=-\delta,\kappa(\xi)=
 \kappa(x)],V1);
v(x,-\delta)='integrate(rhs(V22),\xi,
 x-\epsilon,x+\epsilon);
ev(%,integrate);
```

x 軸上 ξ における渦度：$\kappa(\xi)$ による複素ポテンシャルは、(5.1.33) 式から次式となる。ここで右回りを渦度の正とする。

$$F=\frac{i\,\kappa(\xi)\,\log(z-\xi)}{2\,\pi}$$

上式を z で微分し、x,y 軸方向の流速:$\mathrm{u}(x,y),\mathrm{v}(x,y)$ を求めると、

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\,z}\,F =&\mathrm{u}(x,y)-i\,\mathrm{v}(x,y)\\ =&\frac{i\,\kappa(\xi)}{2\,\pi\,(i\,y-\xi+x)}\end{aligned}$$

上式より、

$$\mathrm{u}(x,y)=\frac{\kappa(\xi)\,y}{2\,\pi\,\left(y^2+(x-\xi)^2\right)} \tag{7.1.81}$$

$$\mathrm{v}(x,y)=-\frac{(x-\xi)\,\kappa(\xi)}{2\,\pi\,\left(y^2+(x-\xi)^2\right)} \tag{7.1.82}$$

渦近傍の流れについて調べる。x の位置の渦強さ:$\kappa(x)$ で δ だけ少し上の x 軸方向の流速は、

$$\begin{aligned}\mathrm{u}(x,\delta)=&\frac{\delta\,\kappa(x)}{2\,\pi}\int_{x-\epsilon}^{x+\epsilon}\frac{1}{(x-\xi)^2+\delta^2}d\xi\\ =&\frac{\mathrm{atan}\left(\frac{\epsilon}{\delta}\right)\,\kappa(x)}{\pi}=\frac{\kappa(x)}{2}\end{aligned} \tag{7.1.83}$$

同様に δ だけ少し下の x 軸方向の流速は、

$$\mathrm{u}(x,-\delta)=-\frac{\kappa(x)}{2}$$

x の位置の渦強さ：$\kappa(x)$ で δ だけ少し上の y 軸方向の流速は

$$\mathrm{v}(x,\delta)=-\frac{\kappa(x)}{2\,\pi}\int_{x-\epsilon}^{x+\epsilon}\frac{x-\xi}{(x-\xi)^2+\delta^2}d\xi=0$$

同様に δ だけ少し下の y 軸方向の流速は、

$$\mathrm{v}(x,-\delta)=0$$

```
subst([y=0],V1);
V3:lhs(%)='integrate(rhs(%),\xi,-A,A);
A1:a=x/A;
A11:solve(A1,x)[1];
B1:b=\xi/A;
v(a,0)=changevar(rhs(V3),lhs(B1)-rhs(B1),
 b,\xi);
subst([A11,\kappa(b*A)=\kappa(b)],%);
V31:factor(%);
IE1:'integrate(x(\xi)/(\xi-t),\xi,-1,1)/
 %pi=f(t);
XT1:x(t)=C/sqrt(1-t^2)-'integrate((
 sqrt(1-\xi^2)*f(\xi))/(\xi-t),\xi,-1,1)
 /(%pi*sqrt(1-t^2));
XT2:x(t)=C/sqrt(1-t^2)-(sqrt(t+1)*
 'integrate((sqrt(1-\xi)*f(\xi))/
 (sqrt(\xi+1)*(\xi-t)),\xi,-1,1))/
 (%pi*sqrt(1-t));
XT3:x(t)=C/sqrt(1-t^2)-(sqrt(1-t)*
 integrate((sqrt(\xi+1)*f(\xi))/
 (sqrt(1-\xi)*(\xi-t)),\xi,-1,1))/
 (%pi*sqrt(t+1));
subst([t=a,\xi=b],IE1);
subst([t=a,\xi=b],XT3);
subst([x(a)=\kappa(a),f(b)=2*v(b,0)],%);
G1:subst([C=0],%);
V1:v(x)=U*diff(z[a](x),x,1);
ZA1:z[a](x)=-\alpha*x;
subst([ZA1],V1);
V11:ev(%,diff);
V12:v(b,0)=rhs(%);
subst([V12],G1);
G2:\kappa(a)=(2*sqrt(1-a)*\alpha*
 I[2](a)*U)/(%pi*sqrt(a+1));
I2:I[2](a)='integrate(sqrt(b+1)/
 (sqrt(1-b)*(b-a)),b,-1,1);
I[2](a)='integrate((b+1)/
 (sqrt(1-b^2)*(b-a)),b,-1,1);
I[2](a)='integrate((b)/(sqrt(1-b^2)
 *(b-a)),b,-1,1)+'integrate((1)/
 (sqrt(1-b^2)*(b-a)),b,-1,1);
I[2](a)=%pi*sum(B[i]*t^(n-i-1),i,0,n-1);
subst([n=1],%);
ev(%,sum);
I21:subst([B[0]=1],%);
G21:subst([I21],G2);
```

$x=-A\sim A$ の薄翼で、この間に渦：$\kappa(\xi)$ が分布するとする。このとき x における翼位置の上下方向の流速：$\mathrm{v}(x,0)$ は、

$$\mathrm{v}(x,0)=-\frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A}\frac{\kappa(\xi)}{x-\xi}d\xi \tag{7.1.84}$$

下記の変数変換を行って、

$$a=\frac{x}{A},\quad b=\frac{\xi}{A}$$

上式は、

$$\mathrm{v}(a,0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\kappa(b)}{b-a}db \tag{7.1.85}$$

「特異核を持つ積分方程式　11.7.2 二次元薄翼理論（有限ヒルベルト変 換）[1],[2]」から、下記の積分方程式のとき、

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{x}(\xi)}{\xi-t}d\xi=\mathrm{f}(t) \tag{7.1.86}$$

上式の解は次式の三種のタイプに記述できる。

$$\mathrm{x}(t)=\frac{C}{\sqrt{1-t^2}}-\frac{\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-\xi^2}\,\mathrm{f}(\xi)}{\xi-t}d\xi}{\pi\sqrt{1-t^2}}$$

$$\mathrm{x}(t)=\frac{C}{\sqrt{1-t^2}}-\frac{\sqrt{t+1}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-\xi}\,\mathrm{f}(\xi)}{\sqrt{\xi+1}\,(\xi-t)}d\xi}{\pi\sqrt{1-t}}$$

$$\mathrm{x}(t)=\frac{C}{\sqrt{1-t^2}}-\frac{\sqrt{1-t}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{\xi+1}\,\mathrm{f}(\xi)}{\sqrt{1-\xi}\,(\xi-t)}d\xi}{\pi\sqrt{t+1}}$$

翼後端のクッタの条件：$t=1$ で $\mathrm{x}(1)=0$ から、$C=0$ とすると、最後の解が適合しているので、これを用いる。上式に $t=a,\xi=b,\mathrm{x}(a)=\kappa(a),\mathrm{f}(b)=2\,\mathrm{v}(b,0)$ を代入し、渦度分布：$\kappa(a)$ は、

$$\kappa(a)=-\frac{2\sqrt{1-a}}{\pi\sqrt{a+1}}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{b+1}\,\mathrm{v}(b,0)}{\sqrt{1-b}\,(b-a)}db \tag{7.1.87}$$

翼を平板翼とし、その境界条件から、上式に $\mathrm{v}(b,0)=-\alpha U$ を代入すると、

$$\kappa(a)=\frac{2\sqrt{1-a}\,\alpha U}{\pi\sqrt{a+1}}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{b+1}}{\sqrt{1-b}\,(b-a)}db \tag{7.1.88}$$

上式の積分を $I_2(a)$ とし、

$$\kappa(a)=\frac{2\sqrt{1-a}\,I_2(a)\,\alpha U}{\pi\sqrt{a+1}} \tag{7.1.89}$$

[1] 溝口純敏：Maxima を使った物理数学基礎演習ノート http://www9.plala.or.jp/prac-maxima/

[2] 7.4 翼理論の方程式 13)

$I_2(a)$ を求めると、

$$I_2(a) = \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{b+1}}{\sqrt{1-b}\,(b-a)} db$$
$$= \int_{-1}^{1} \frac{b+1}{(b-a)\,\sqrt{1-b^2}} db$$
$$= \int_{-1}^{1} \frac{b}{(b-a)\,\sqrt{1-b^2}} db$$
$$+ \int_{-1}^{1} \frac{1}{(b-a)\,\sqrt{1-b^2}} db$$

「特異核を持つ積分方程式　11.7.2 二次元薄翼理論（有限ヒルベルト変 換）[1]」の下記の有限ヒルベルト変換の結果から、

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{1}{(\xi-t)\,\sqrt{1-\xi^2}} d\xi = 0$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{\xi^n}{(\xi-t)\,\sqrt{1-\xi^2}} d\xi = \sum_{i=0}^{n-1} B_i\, t^{n-i-1}$$

$I_2(a)$ は、

$$I_2(a) = \pi \sum_{i=0}^{0} \frac{B_i}{t^i} = \pi\, B_0 = \pi$$

(7.1.89) 式に上記の結果を代入すると、

$$\kappa(a) = \frac{2\sqrt{1-a}\,\alpha\, U}{\sqrt{a+1}} \tag{7.1.90}$$

```
L1:L=\rho*U*'integrate(\kappa(x),x,-A,A);
L=changevar(rhs(L1),lhs(A11)-rhs(A11),
 a,x);
L11:subst([\kappa(a*A)=\kappa(a)],%);
subst([G21],L11);
L12:ev(%,integrate);
L121:subst([A=C[0]/2],L12);
L13:solve(L12,\alpha)[1];
M1:M=\rho*U*'integrate(\kappa(x)*x,x,-A,
 A);
M=changevar(rhs(M1),lhs(A11)-rhs(A11),a,
 x);
M11:subst([\kappa(a*A)=\kappa(a)],%);
subst([G21],%);
M12:ev(%,integrate);
subst([L13],M12);
factor(%);
CL1:C[L]=L/(1/2*\rho*U^2*C[0]);
lhs(%)=subst([L121],rhs(%));
```

[1]溝口純敏：Maxima を使った物理数学基礎演習ノート http://www9.plala.or.jp/prac-maxima/

```
G22:\kappa(t)=subst([a=-cos(t)],
 rhs(G21));
 G221:num(rhs(G22));
G222:denom(rhs(G22));
assume(sin(t)>0);
G221*G222;
2*\alpha*U*sqrt(1-cos(t)^2);
trigsimp(%);
lhs(G22)=%/G222^2;
trigrat(%);
subst([cos(t/2)=cot(t/2)*sin(t/2)],%);
```

翼の揚力：L は次式で得られる。

$$L = \rho \int_{-A}^{A} \kappa(x)\, dx\, U$$

上式を $a = \frac{x}{A}$ の変数変換を行って、(7.1.90) 式を代入し、積分すると下記となり、「2.1.3 二次元平板翼」の結果：(7.1.22) 式と一致する。

$$L = \int_{-1}^{1} \kappa(a)\, da\, \rho\, A\, U = 2\int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{a+1}} da\, \alpha\, \rho\, A\, U^2$$
$$= 2\,\pi\,\alpha\,\rho\, A\, U^2$$

また、翼中心のモーメントは次式で得られる。

$$M = \rho \int_{-A}^{A} x\,\kappa(x)\, dx\, U$$

上式を $a = \frac{x}{A}$ の変数変換を行って、(7.1.90) 式を代入し、積分すると下記となり、「2.1.3 二次元平板翼」の結果：(7.1.22) 式と一致する。

$$M = \int_{-1}^{1} a\,\kappa(a)\, da\, \rho\, A^2\, U = 2\int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-a}\,a}{\sqrt{a+1}} da\, \alpha\, \rho\, A^2\, U^2$$
$$= -\pi\,\alpha\,\rho\, A^2\, U^2 = -\frac{A\,L}{2}$$

揚力：L を翼弦長：C_0 で無次元化すると、

$$C_L = \frac{2\,L}{C_0\,\rho\, U^2} = 2\,\pi\,\alpha \tag{7.1.91}$$

「7.1.5 薄翼理論 (フーリエ変換)」の渦度分布と比較するため、(7.1.90) 式を $a = -\cos(t)$ で変数変換すると、

$$\kappa(t) = \frac{2\,\alpha\,\sqrt{\cos(t)+1}\, U}{\sqrt{1-\cos(t)}} = \frac{2\,\alpha\,\sin(t)\; U}{1-\cos(t)}$$
$$= \frac{2\,\alpha\,\cos\left(\frac{t}{2}\right)\; U}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} = 2\,\alpha\,\cot\left(\frac{t}{2}\right)\, U$$

上式から、(7.1.90) 式は「7.1.5 薄翼理論 (フーリエ変換)」の渦度分布と同じであることがわかる。

例題 7.1.9　一様でない流れの中の翼

翼が一様な速度でない流場にある場合について検討する。迎角：α で流速：U の一様流に、y 方向の $v_1\,x$ の流れが加わった流場を考える。

```
/* 一様でない流れの中の翼 */
CON1:'diff(u,x,1)+'diff(v,y,1)=0;
CURL1:'diff(v,x,1)-'diff(u,y,1)=0;
VC1:v=U*sin(\alpha)+v[1]*x;
DVC1:'diff(v,x,1)=diff(rhs(VC1),x,1);
subst([DVC1],CURL1);
-last(lhs(%))=first(lhs(%));
UC1:u=v[1]*y+U*cos(\alpha);
DYX0;
DYXC1:subst([v(x)=v(x)+last(rhs(VC1)),u(x)=
  u(x)+last(rhs(UC1))],DYX0);
DYXC2:lhs(DYX0)=expand(subst([cos(\alpha)=1
  ,sin(\alpha)=\alpha,u(x)=0,y=0],
  rhs(DYXC1)));
expand(solve(%,v(x))/U)[1];
subst([v[1]=v[1]/x*(-C/2*cos(\theta))],
  rhs(%)=subst([A=B],rhs(G54)));
DYX3:lhs(%)=(sum(B[n]*cos(n*\theta),n,2,
  inf))+B[1]*cos(\theta)-B[0];
DYX4:DYX3-first(lhs(DYX3))-last(lhs(DYX3));
A0;
B01:B[0]=A[0];
subst([n=1],AN);
AN16:A[1]=B[1]-first(lhs(DYX3))/
 cos(\theta);
AN17:expand(solve(AN16,B[1])[1]);
ANN6:AN;
BN2N:B[n]=A[n];
CL6:subst([A[0]=B[0],A[1]=B[1]],CL1);
CL61:subst([B01,AN17],CL6);
CL62:subst([A[0]=\alpha,A[1]=0],CL61);
CM6:subst([A[0]=B[0],A[1]=B[1],A[2]=B[2]]
  ,CM1);
CM61:subst([B01,B[2]=A[2]],CM6);
CM62:subst([A[0]=\alpha,A[2]=0],CM61);
```

流場では、質量保存の方程式：(2.2.1) 式から二次元の場合は次式、

$$\frac{d}{d\,y}\,v+\frac{d}{d\,x}\,u=0$$

および渦なし流れの条件：$curl(\overrightarrow{V})$ を満足する必要がある。

$$\frac{d}{d\,x}\,v-\frac{d}{d\,y}\,u=0$$

y 方向の流れ：v は、

$$v=\sin(\alpha)\,U+v_1\,x$$

質量保存の方程式から、

$$\frac{d}{d\,y}\,v=0,\quad \frac{d}{d\,x}\,u=0$$

渦なし流れの条件から、

$$\frac{d}{d\,x}\,v=v_1,\quad \frac{d}{d\,y}\,u=v_1$$

以上から x 方向の流れ：u は、

$$u=\cos(\alpha)\,U+v_1\,y$$

薄翼理論の境界条件：(7.1.38) 式は下記となる。ここで $u(x), v(x)$ は翼の渦循環による誘導速度である。

$$\frac{d}{d\,x}\,y=\frac{\sin(\alpha)\,U+\mathrm{v}(x)}{\cos(\alpha)\,U+\mathrm{u}(x)}$$

一様流に、y 方向の $v_1\,x$ の流れが加わったことにより、新たな薄翼理論の境界条件は、

$$\frac{d}{d\,x}\,y=\frac{\sin(\alpha)\,U+\mathrm{v}(x)+v_1\,x}{\cos(\alpha)\,U+v_1\,y+\mathrm{u}(x)}$$

迎角：α が小さく、$v_1\,x, v_1\,y << U$ とすると、薄翼理論の境界条件は、

$$\frac{d}{d\,x}\,y=\frac{\mathrm{v}(x)}{U}+\frac{v_1\,x}{U}+\alpha \tag{7.1.92}$$

上式から、

$$\frac{\mathrm{v}(x)}{U}=-\frac{v_1\,x}{U}+\frac{d}{d\,x}\,y-\alpha$$

(7.1.62) 式にならって、境界条件は下記のように表現できる。ここで、(7.1.56) 式による下記の変換を考慮し、

$$x=-\frac{\cos(\theta)\,C}{2}$$

$$\begin{aligned}\frac{v_1\cos(\theta)\,C}{2\,U}&+\frac{d}{d\,x}\,y-\alpha\\&=\left(\sum_{n=1}^{\infty}B_n\cos(n\,\theta)\right)-B_0\\&=\left(\sum_{n=2}^{\infty}B_n\cos(n\,\theta)\right)+B_1\cos(\theta)-B_0\end{aligned}$$

上式から、

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\,x}\,y=-\frac{v_1\cos(\theta)\,C}{2\,U}+\left(\sum_{n=2}^{\infty}B_n\cos(n\,\theta)\right)\\+B_1\cos(\theta)+\alpha-B_0\end{aligned} \tag{7.1.93}$$

上式は、フーリエ級数の表現になっており、各係数は、

$$\alpha-A_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{y}(\theta)\,d\theta,\quad B_0=A_0 \tag{7.1.94}$$

$$\begin{aligned}A_1=&\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(\theta)\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{y}(\theta)\right)d\theta\\A_1=&B_1-\frac{v_1\,C}{2\,U},\quad B_1=\frac{v_1\,C}{2\,U}+A_1\end{aligned} \tag{7.1.95}$$

$$A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(n\,\theta)\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{y}(\theta)\right)d\theta, \quad B_n = A_n \tag{7.1.96}$$

揚力は、(7.1.49) 式から、

$$\begin{aligned} C_L =& \pi\ (B_1 + 2\,B_0) \\ =& \pi\ \left(\frac{v_1\,C}{2\,U} + A_1 + 2\,A_0\right) \end{aligned}$$

平板翼では、

$$A_0 = \alpha, A_1 = 0$$

から、揚力は、

$$C_L = \pi\ \left(\frac{v_1\,C}{2\,U} + 2\,\alpha\right) \tag{7.1.97}$$

モーメントは、(7.1.53) 式から、

$$\begin{aligned} C_M =& -\frac{\pi\ (B_2 + 2\,B_0)}{4} \\ =& -\frac{\pi\ (A_2 + 2\,A_0)}{4} \end{aligned}$$

平板翼では、

$$A_0 = \alpha, A_2 = 0$$

から、モーメントは、

$$C_M = -\frac{\pi\,\alpha}{2} \tag{7.1.98}$$

例題 7.1.10　翼列

翼コード長さ：C の平板翼が等間隔：H で一直線上に無限に並んでいる翼列の揚力特性を求める。

(1) 翼間隔：$H >>$ 翼コード長さ：C の場合

翼間隔：$H >>$ 翼コード長さ：C であることから、各翼は単独翼の流れに近く、主流の流れが変わらないものと考える。翼を単独の渦糸で置き換え、無限に並んでいる渦糸から、原点における流場を求め、その流場での揚力特性を求める。

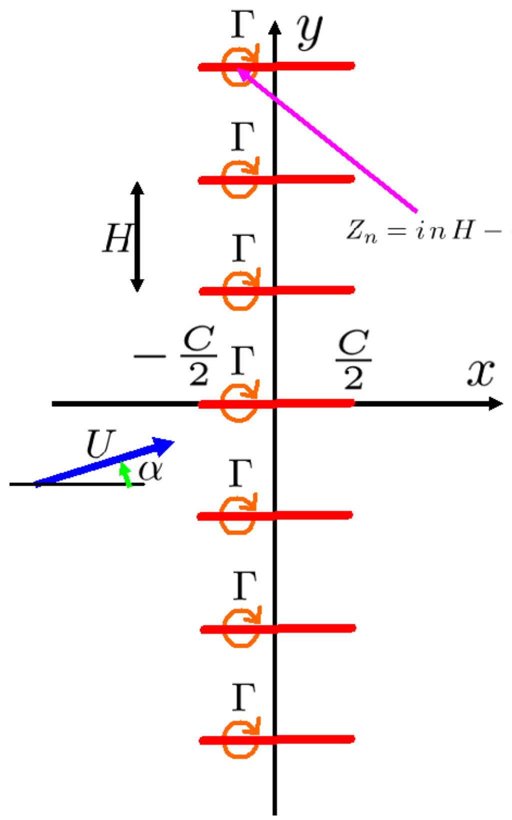


図 7.1.20: 翼列　$H >> C$

```
/* 翼列 H>>C の場合  */
Z7:Z[n]=-C/4+n*H*%i;
F7N1:%i*\Gamma/2/%pi*log(z-Z[n]);
F7N2:subst([Z7],F7N1);
F7N3:F7N2+subst([n=-n],F7N2);
logcontract(%);
expand(%);
F7:F=sum(%i*\Gamma/2/%pi*log(z-Z[n]),n,minf
  ,inf);
F71:subst([Z7],F7);
%i*\Gamma/2/%pi*log(n^2*H^2*(1-((C/4+z)/
  (%i*n*H))^2));
%i*\Gamma/2/%pi*log(n^2*H^2)+%i*\Gamma/2
  /%pi*log(1-((C/4+z)/(%i*n*H))^2);
```

```
F72:F=sum(%i*\Gamma/2/%pi*log(1-((C/4+z)
  /(%i*n*H))^2),n,1,inf)+%i*\Gamma/2/%pi
  *log(C/4+z);
F73:F=%i*\Gamma/2/%pi*log(product((1-(
  (C/4+z)/(%i*n*H))^2),n,1,inf))+%i*\Gamma
  /2/%pi*log(C/4+z);
F731:F=%i*\Gamma/2/%pi*log(product((1-(
  (C/4+z)/(%i*n*H))^2),n,1,inf))+%i*\Gamma
  /2/%pi*log((C/4+z)/(%i*H));
F74:F=%i*\Gamma/2/%pi*log((C/4+z)/(%i*H)
  *product((1-((C/4+z)/(%i*n*H))^2),n,1,
  inf));
```

平板翼の揚力の作用点が (7.1.67) 式から前縁から $C/4$ にあることから、ここに渦循環強さ：Γ の渦糸を置くことで代用できる。翼間隔を H とすると渦糸の位置は前に示す図から下記となる。

$$Z_n = i\,n\,H - \frac{C}{4}$$

これに基づく複素ポテンシャルは (5.1.33) 式から下記となる。

$$\begin{aligned} F =& \frac{i\,\Gamma}{2\,\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \log\left(z - Z_n\right) \\ =& \frac{i\,\Gamma}{2\,\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \log\left(-i\,n\,H + \frac{C}{4} + z\right) \end{aligned} \qquad (7.1.99)$$

n と $-n$ の項について、

$$\begin{aligned} &\frac{i\,\Gamma}{2\,\pi} \log\left(i\,n\,H + \frac{C}{4} + z\right) + \frac{i\,\Gamma}{2\,\pi} \log\left(-i\,n\,H + \frac{C}{4} + z\right) \\ &= \frac{i\,\Gamma}{2\,\pi} \log\left(n^2\,H^2 + \frac{C^2}{16} + \frac{z\,C}{2} + z^2\right) \\ &= \frac{i\,\Gamma}{2\,\pi} \log\left(n^2\,H^2 \left(1 - \left(\frac{z + \frac{C}{4}}{i\,n\,H}\right)^2\right)\right) \\ &= \frac{i\,\Gamma}{2\,\pi} \log\left(1 - \left(\frac{z + \frac{C}{4}}{i\,n\,H}\right)^2\right) + \frac{i\,\Gamma}{2\,\pi} \log\left(n^2\,H^2\right) \end{aligned}$$

上記、右辺第 2 項は定数であるため省略できる。$n = 1 \to \infty$ の項の和と $n = 0$ の項の和から、(7.1.99) 式の複素ポテンシャルは、

$$\begin{aligned} F =& \frac{i\,\Gamma}{2\,\pi} \log\left(z + \frac{C}{4}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i\,\Gamma}{2\,\pi} \log\left(1 - \left(\frac{z + \frac{C}{4}}{i\,n\,H}\right)^2\right) \\ =& \frac{i\,\Gamma}{2\,\pi} \log\left(z + \frac{C}{4}\right) + \frac{i\,\Gamma}{2\,\pi} \log\left(\prod_{n=1}^{\infty} 1 - \left(\frac{z + \frac{C}{4}}{i\,n\,H}\right)^2\right) \end{aligned}$$

(7.1.100)

定数を加え、log の中の項をそろえて、

$$\begin{aligned}F =&\frac{i\,\Gamma}{2\,\pi}\log\left(\frac{z+\frac{C}{4}}{i\,H}\right)+\frac{i\,\Gamma}{2\,\pi}\log\left(\prod_{n=1}^{\infty}1-\left(\frac{z+\frac{C}{4}}{i\,n\,H}\right)^2\right)\\ =&\frac{i\,\Gamma}{2\,\pi}\log\left(\frac{\left(z+\frac{C}{4}\right)}{i\,H}\prod_{n=1}^{\infty}1-\left(\frac{z+\frac{C}{4}}{i\,n\,H}\right)^2\right)\end{aligned} \tag{7.1.101}$$

```
SIN1:%pi*x*product((1-x^2/n^2),n,1,inf)=
  sin(%pi*x);
log(lhs(SIN1/%pi))=log(rhs(SIN1/%pi));
%i*\Gamma/2/%pi*subst([x=(z+C/4)/(%i*H)]
 ,%);
F40:F=rhs(%);
F41:F=%i*\Gamma/(2*%pi)*log(sin(%pi*(z+C/4)
  /(%i*H)))-%i*\Gamma/(2*%pi)*log(z+C/4);
DF41:'diff(F,z,1)=diff(rhs(F41),z,1);
ZZ1:Z=(z+C/4)/H;
ZZ2:solve(ZZ1,z)[1];
DF42:lhs(DF41)=subst([ZZ2],rhs(DF41));
expand(factor(%));
DF43:lhs(DF42)=taylor(rhs(%),Z,0,5);
DF44:subst([Z^3=0,Z^5=0,ZZ1],DF43);
DF45:u-%i*v=subst([z=x+%i*y],rhs(DF44));
V4:expand(-imagpart(%));
V41:v[0]=first(rhs(V4));
V42:v[1]=last(rhs(V4))/x;
AL1:\alpha[1]=(U*sin(\alpha)+v[0])/(U*cos(
  \alpha));
AL2:expand(subst([sin(\alpha)=\alpha,cos(
  \alpha)=1,V41],AL1));
GM71:expand(subst([\alpha=rhs(AL2),V42],
  \Gamma[1]=rhs(CL62)*C*U/2));
K1:k=rhs(GM71)/\Gamma;
K2:expand(subst([\Gamma=%pi*C*U*\alpha],
 K1));
```

下記の公式を用いて、

$$\pi\,x\prod_{n=1}^{\infty}1-\frac{x^2}{n^2}=\sin\left(\pi\,x\right)$$

log をとって、

$$\log\left(x\prod_{n=1}^{\infty}1-\frac{x^2}{n^2}\right)=\log\left(\frac{\sin\left(\pi\,x\right)}{\pi}\right)$$

上式から、渦循環強さ：Γ を $n=-\infty\to\infty$ だけ置いた (7.1.99) 式の複素ポテンシャルは、

$$F=\frac{i\,\Gamma}{2\,\pi}\log\left(\sin\left(\frac{\pi\,\left(\frac{C}{4}+z\right)}{i\,H}\right)\right) \tag{7.1.102}$$

原点に置いた翼近傍の流場を求めるには、原点に置いた翼の複素ポテンシャルを除く必要があり、下記となる。

$$F=\frac{i\,\Gamma}{2\,\pi}\log\left(\sin\left(\frac{\pi\,\left(\frac{C}{4}+z\right)}{i\,H}\right)\right)-\frac{i\,\Gamma}{2\,\pi}\log\left(\frac{C}{4}+z\right) \tag{7.1.103}$$

上式を z で微分し、流速を求めると、

$$\frac{d}{d\,z}\,F=\frac{i\,\Gamma\cosh\left(\frac{\pi\,\left(\frac{C}{4}+z\right)}{H}\right)}{2\sinh\left(\frac{\pi\,\left(\frac{C}{4}+z\right)}{H}\right)\,H}-\frac{i\,\Gamma}{2\,\pi\,\left(\frac{C}{4}+z\right)}$$

次式の置き換えを行って、

$$Z=\frac{\frac{C}{4}+z}{H}$$

原点の翼近傍では、$Z<<1$ であるから、Taylor 展開を行って、高次項を省略すると、

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\,z}\,F =&\frac{i\,\Gamma\cosh\left(\pi\,Z\right)}{2\,H\sinh\left(\pi\,Z\right)}-\frac{i\,\Gamma}{2\,\pi\,H\,Z}\\ =&\frac{i\,\pi\,\Gamma\,Z}{6\,H}-\frac{i\,\pi^3\,\Gamma\,Z^3}{90\,H}+\frac{i\,\pi^5\,\Gamma\,Z^5}{945\,H}+...\\ \approx&\frac{i\,\pi\,\Gamma\,\left(\frac{C}{4}+z\right)}{6\,H^2}\end{aligned} \tag{7.1.104}$$

以上から、原点近傍の流速は下記となる。

$$u-i\,v=\frac{i\,\pi\,\Gamma\,\left(\frac{C}{4}+i\,y+x\right)}{6\,H^2}$$

y 軸方向の流速：v は、

$$v=-\frac{\pi\,\Gamma\,C}{24\,H^2}-\frac{\pi\,\Gamma\,x}{6\,H^2}$$

定常項：v_0 および x に比例する項の係数：v_1 は下記となる。

$$v_0=-\frac{\pi\,\Gamma\,C}{24\,H^2},\quad v_1=-\frac{\pi\,\Gamma}{6\,H^2}$$

新たな迎角：α_1 は迎角が小さいとすると、

$$\alpha_1=\frac{\sin\left(\alpha\right)\,U+v_0}{\cos\left(\alpha\right)\,U}$$

$$\alpha_1=\alpha-\frac{\pi\,\Gamma\,C}{24\,H^2\,U}$$

一様でない流れの中の翼の揚力係数:(7.1.97) 式と (7.1.47) 式、(7.1.48) 式から、上記の流場における平板翼の渦循環強さ：Γ_1 は、

$$\Gamma_1=\pi\,\alpha\,C\,U-\frac{\pi^2\,\Gamma\,C^2}{12\,H^2}$$

平板翼単独での渦循環強さ：Γ との比：$k=\Gamma_1/\Gamma$、即ち、揚力の比は、

$$\begin{aligned}k =&\frac{\pi\,\alpha\,C\,U-\frac{\pi^2\,\Gamma\,C^2}{12\,H^2}}{\Gamma}\\ =&1-\frac{\pi^2\,C^2}{12\,H^2}\end{aligned} \tag{7.1.105}$$

(2) 翼間隔：H << 翼コード長さ：C の場合

翼間隔：H << 翼コード長さ：C であることから、翼により翼前後の主流の流速・流向が変化する場合を考える。

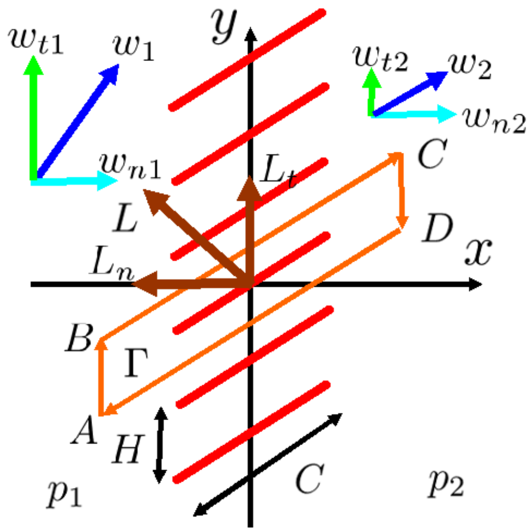


図 7.1.21: 翼列　$H << C$

```
/* 翼列 H<<C の場合 */
assume(\rho>0);
assume(w[0]>0);
assume(\Gamma>0);
assume(L>0);
W1:w[1]^2=w[t1]^2+w[n1]^2;
W11:w[1]=sqrt(rhs(W1));
W2:w[2]^2=w[t2]^2+w[n2]^2;
W21:w[2]=sqrt(rhs(W2));
WN1:w[n1]=w[n2];
GM8:\Gamma=(w[t1]-w[t2])*H;
WT1:solve(GM8,w[t1])[1];
WT2:w[t2]-w[t1];
GM81:WT2=expand(subst([WT1],WT2));
BN1:p[1]+1/2*\rho*w[1]^2=p[2]+1/2*\rho
  *w[2]^2;
BN2:solve(BN1,p[1])[1];
LN1:L[n]=(p[2]-p[1])*H;
LN2:factor(subst([BN2,W1,W2,WN1],LN1));
LN3:subst([GM81],LN2);
LT1:L[t]=\rho*w[n1]*H*(w[t1]-w[t2]);
LT2:expand(subst([WT1],LT1));
L1:L^2=L[t]^2+L[n]^2;
L2:subst([LT2,LN3],L1);
W0:w[0]^2=w[n1]^2+((w[t1]+w[t2])/2)^2;
W01:solve(W0,w[n1]^2)[1];
L3:factor(subst([W01],L2));
sqrt(L3);
```

翼列の上流側の流速:w_1、この x 軸方向の流速成分：w_{n1}、y 軸方向の流速成分：w_{t1} とする。また、翼列の下流側の流速:w_2、この x 軸方向の流速成分：w_{n2}、y 軸方向の流速成分：w_{t2} とする。このとき上流側の流速、下流側の流速で下記の関係がある。

$$w_1^2 = w_{t1}^2 + w_{n1}^2, \quad w_2^2 = w_{t2}^2 + w_{n2}^2 \tag{7.1.106}$$

また、上流側から下流側へ x 軸方向へ流れる流量は同じであるから、

$$w_{n1} = w_{n2} \tag{7.1.107}$$

$A \to B \to C \to D \to A$ に沿った循環強さ：Γ を求める。$B \to C$ と $D \to A$ は流速が同じで逆方向の積分であるからこの部分は零となり、$A \to B$ と $C \to D$ の部分による循環強さは下記となる。

$$\Gamma = (w_{t1} - w_{t2})\, H$$

これより下記の関係式を得る。

$$w_{t2} - w_{t1} = -\frac{\Gamma}{H} \tag{7.1.108}$$

翼列の上流側と下流側を Bernoulli の定理：(2.8.4) 式から、

$$\frac{w_1^2\,\rho}{2} + p_1 = \frac{w_2^2\,\rho}{2} + p_2 \tag{7.1.109}$$

上流側と下流側との圧力差から翼が受ける x 軸方向の力：L_n は、(7.1.108) 式、(7.1.109) 式から、

$$\begin{aligned} L_n =& (p_2 - p_1)\, H \\ =& -\frac{\rho\,(w_{t2} - w_{t1})\,(w_{t2} + w_{t1})\, H}{2} \\ =& \frac{\Gamma\,\rho\,(w_{t2} + w_{t1})}{2} \end{aligned} \tag{7.1.110}$$

上流側と下流側との運動量変化から翼が受ける y 軸方向の力：L_t は、(7.1.108) 式から、

$$\begin{aligned} L_t =& w_{n1}\,\rho\,(w_{t1} - w_{t2})\, H \\ =& \Gamma\, w_{n1}\,\rho \end{aligned} \tag{7.1.111}$$

x 軸方向の力：L_n と y 軸方向の力：L_t の合力：L は、(7.1.110) 式、(7.1.111) 式から、

$$L^2 = L_t^2 + L_n^2 = \frac{\Gamma^2\,\rho^2\,(w_{t2} + w_{t1})^2}{4} + \Gamma^2\, w_{n1}^2\,\rho^2 \tag{7.1.112}$$

次式で示す平均流速：w_0 を導入すると、

$$w_0^2 = \frac{(w_{t2} + w_{t1})^2}{4} + w_{n1}^2$$

翼に作用する力：L は、

$$L = w_0\,\Gamma\,\rho \tag{7.1.113}$$

7.1.11 二次元翼の非定常運動 (Theodorsen の方法)

一様流中で微小運動する二次元平板翼に作用する非定常力を Theodorsen の方法で求める。Theodorsen は翼面上のわき出し分布と翼内部と後流の渦度分布から求めている [1]。z 平面上の x 軸上に $-B$ から B(コード長さ：$2B$) にある平板翼を ζ 平面上の円に写像する。

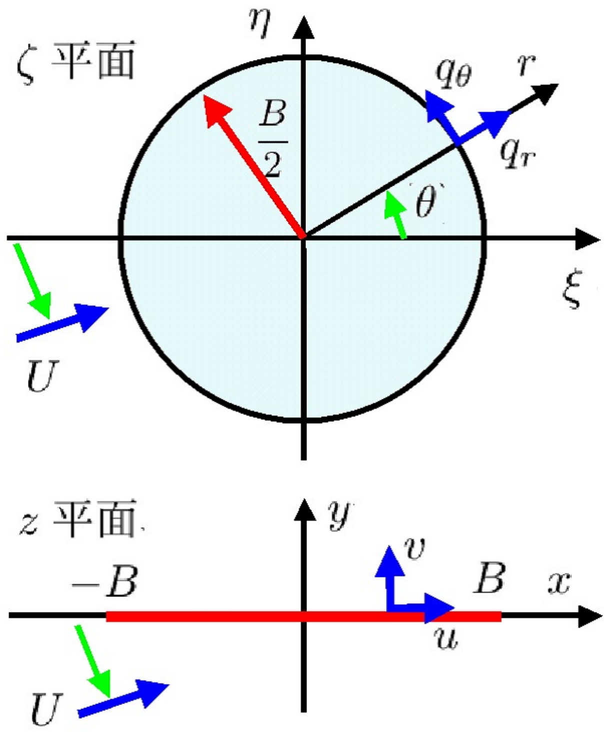


図 7.1.22: 二次元平板の円への写像

```
kill(all);
declare([z,\zeta,F],complex);
declare([\alpha,h,v,f,Q],real);
depends([F],[z,\zeta]);
depends([\Phi],[x,t]);
assume(B>0,f>0);
assume(B<2*f);
assume(\epsilon>0);
assume(R>0);
assume(\delta>0);
Z1:z=\zeta+A^2/\zeta;
F1:F=%e^(-%i*\alpha)*U*\zeta+%e^(%i*
 \alpha)*R^2*U/\zeta;
R1:R=(a+b)/2;
A1:A=sqrt(a^2-b^2)/2;
R2:subst([a=B,b=0],R1);
```

[1] Raymond L. Bisplinghoff, Holt Ashley, Robert L. Halfman, Aeroelasticity [22] 5-6 Thin airfoils oscillating in incompressible flow P.251 を主に参考にした

```
A2:subst([a=B,b=0],A1);
Z2:subst([R2,A2],Z1);
subst([\zeta=B/2*%e^(%i*s),z=x+%i*y],Z2);
Z21:realpart(%);
F2:subst([R2,A2],F1);
DF1:'diff(F,z,1)='diff(F,\zeta,1)
 *'diff(\zeta,z,1);
DZ1:'diff(lhs(Z1),\zeta,1)=
 diff(rhs(Z1),\zeta,1);
'diff(F,z,1)='diff(F,\zeta,1)
 /'diff(z,\zeta,1);
subst(['diff(F,z,1)=u-%i*v],%);
subst(['diff(F,\zeta,1)=q[x]-%i*q[y]],%);
subst([DZ1],%);
subst([\zeta=R*%e^(%i*\theta)],%);
DF2:subst([R2,A2],%);
DF21:num(rhs(DF2))*%e^(%i*\theta);
denom(rhs(DF2))*%e^(%i*\theta);
DF22:trigrat(%);
DF3:lhs(DF2)=DF21/DF22;
DF31:abs(%);
sqrt(u^2+v^2)=sqrt(q[x]^2+q[y]^2)/2
 /abs(sin(\theta));
sqrt(u^2+v^2)=sqrt(q[r]^2+q[\theta]^2)/2
 /abs(sin(\theta));
QT1:q[\theta]=-u*2*sin(\theta);
QR1:q[r]=v*2*sin(\theta);
```

「5.3.5 一様流中の楕円柱まわりの流れ・作用力・運動エネルギー (Joukowski 変換)」で、写像関数は (5.3.16) 式から、

$$z=\zeta+\frac{A^2}{\zeta} \tag{7.1.114}$$

流速：U の一様な流れに中に半径：R の円柱を置いたときの複素ポテンシャル：F は (5.3.17) 式から、

$$F=e^{-i\,\alpha}\,U\,\zeta+\frac{e^{i\,\alpha}\,R^2\,U}{\zeta} \tag{7.1.115}$$

いま、楕円の半径：a,b とすると、上式の A,R との関係は (5.3.18) 式から、

$$R=\frac{b+a}{2},\quad A=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{2}$$

上式から、コード長さ：$2B$ の平板翼を ζ 平面上の円に写像するには、

$$R=\frac{B}{2},\quad A=\frac{B}{2} \tag{7.1.116}$$

上式から、(7.1.114) 式の写像関数は、

$$z=\zeta+\frac{B^2}{4\,\zeta} \tag{7.1.117}$$

上式に $z=i\,y+x,\zeta=\frac{e^{i\,s}\,B}{2}$ を代入し、

$$i\,y+x=\frac{e^{i\,s}\,B}{2}+\frac{e^{-i\,s}\,B}{2}$$

上式の実部を取ると、x と s の関係式が得られる。

$$x=\cos\left(s\right)\,B \tag{7.1.118}$$

また、(7.1.115) 式の複素ポテンシャルは、

$$F=e^{-i\,\alpha}\,U\,\zeta+\frac{e^{i\,\alpha}\,B^2\,U}{4\,\zeta} \tag{7.1.119}$$

上記の関係式を基に z 平面の流速と ζ 平面の流速の関係を調べる。z 平面の x 軸方向の流速：u、y 軸方向の流速：v とすると、次式で得られる。

$$u-i\,v=\frac{d}{d\,z}\,F=\left(\frac{d}{d\,\zeta}\,F\right)\,\left(\frac{d}{d\,z}\,\zeta\right)$$

ζ 平面の x 軸方向の流速：q_x、y 軸方向の流速：q_y とすると、

$$u-i\,v=\frac{d}{d\,z}\,F=\frac{\frac{d}{d\,\zeta}\,F}{\frac{d}{d\,\zeta}\,z}=\frac{q_x-i\,q_y}{\frac{d}{d\,\zeta}\,z}$$

ここで、

$$\frac{d}{d\zeta}\,z=1-\frac{A^2}{\zeta^2}$$

上記から、次式となる。

$$u-i\,v=\frac{q_x-i\,q_y}{1-\frac{A^2}{\zeta^2}}$$

z 平面で翼面上、ζ 平面で円上の流速の関係は、上式に $\zeta=R\,e^{i\,\theta}$ を代入し、(7.1.116) 式の関係式から、

$$u-i\,v=\frac{q_x-i\,q_y}{1-\frac{e^{-2\,i\,\theta}\,A^2}{R^2}}=\frac{q_x-i\,q_y}{1-e^{-2\,i\,\theta}}$$

上式の分子、分母に $e^{i\,\theta}$ を掛けて、整理すると、

$$u-i\,v=-\frac{i\,e^{i\,\theta}\,\left(q_x-i\,q_y\right)}{2\sin\left(\theta\right)}$$

上式の絶対値をとると、

$$\left|i\,v-u\right|=\frac{\left|i\,q_y-q_x\right|}{2\,\left|\sin\left(\theta\right)\right|}$$

上式は、また、次式のように記述できる。

$$\sqrt{v^2+u^2}=\frac{\sqrt{q_y^2+q_x^2}}{2\,\left|\sin\left(\theta\right)\right|}=\frac{\sqrt{q_\theta^2+q_r^2}}{2\,\left|\sin\left(\theta\right)\right|}$$

$0\geq\theta\geq\pi$ とし、等角写像から u,v と q_r,q_θ の比は等しいから、z 平面の翼面上の u,v と ζ 平面の円上の q_r,q_θ の関係は、

$$q_\theta=-2\sin\left(\theta\right)\,u,\quad q_r=2\sin\left(\theta\right)\,v \tag{7.1.120}$$

```
F2:F=Q(s,t)/2/%pi*log(z-R*%e^(%i*s));
subst([z=r*%e^(%i*\theta)],%);
PH2:\Phi=realpart(rhs(%));
QR2:q[r]=diff(rhs(PH2),r,1);
subst([Q(s,t)=Q(\theta,t)],%);
subst([s=\theta+\mu],%);
subst([r=R+\delta],%);
trigrat(%);
subst([cos(\mu)=1-\mu^2/2],%);
factor(%);
lhs(%)='integrate(rhs(%)*R,\mu,
 -\epsilon,+\epsilon);
ev(%,integrate);
subst([R+\delta=R,2*R+\delta=2*R,
 \epsilon*R^2=0],%);
subst([2*delta*R^2=0,delta^2*R=0,
 \delta*\epsilon*R=0],%);
lhs(%)=limit(rhs(%),\delta,0,plus);
Q4:Q(r=B/2,\theta,t)=2*q[r];
Q41:subst([QR1],Q4);
```

z 平面の平板翼の境界条件を表面においたわき出し、吸いこみで表す。ζ 平面では、円周上にわき出しと吸いこみを置くことになる。

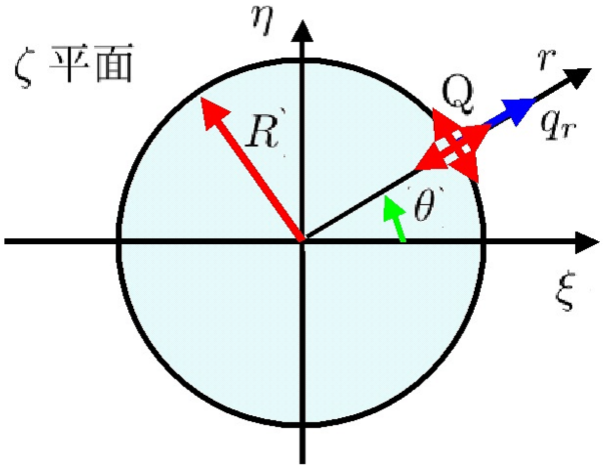


図 7.1.23: 円周上のわき出し

ζ 平面上の半径：R、θ の位置にわき出しを置いたとき、そのときのわき出しに近い位置での半径方向の流速：q_r を求める。ζ 平面上の半径：R、θ の位置にわき出しを置いたとき複素ポテンシャルは、

$$\begin{aligned}F=&\frac{\mathrm{Q}\left(s,t\right)}{2\,\pi}\log\left(z-e^{i\,s}\,R\right)\\=&\frac{\mathrm{Q}\left(s,t\right)}{2\,\pi}\log\left(r\,e^{i\,\theta}-e^{i\,s}\,R\right)\end{aligned}$$

上式の実部をとり、ポテンシャル：Φ は、

$$\Phi = \frac{Q(s,t)\ \log\left((r\sin(\theta) - \sin(s)\ R)^2 + (r\cos(\theta) - \cos(s)\ R)^2\right)}{4\pi}$$

上式を r で微分すると半径方向の流速：q_r が得られ、μ が θ にくらべ十分小さく、δ も R にくらべ十分小さいとして、$s = \theta + \mu,\ r = R + \delta$ を代入すると、

$$q_{R+\delta} = \frac{(\cos(\mu) - 1)\ Q(\theta,t)\ R - \delta\, Q(\theta,t)}{(4\pi\cos(\mu) - 4\pi)\ R^2 + (4\pi\delta\cos(\mu) - 4\pi\delta)\ R - 2\pi\delta^2}$$

μ が θ にくらべ十分小さいから、$cos(\mu) = 1 - \mu^2/2$ とすると、

$$q_{R+\delta} = \frac{Q(\theta,t)\ \left(\mu^2 R + 2\delta\right)}{4\pi\ (\mu^2 R^2 + \delta\mu^2 R + \delta^2)}$$

θ を中心に $\pm\epsilon$ の範囲で積分し、$\delta,\ \mu$ が十分小さいとして、

$$\begin{aligned} q_{R+\delta} =& \frac{Q(\theta,t)\ R}{4\pi} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{\mu^2 R + 2\delta}{\mu^2 R^2 + \delta\mu^2 R + \delta^2} d\mu \\ =& \frac{Q(\theta,t)\ R\ \left(\sqrt{R}\sqrt{R+\delta}\ (2R+\delta)\ \mathrm{atan}\left(\frac{\epsilon\sqrt{R}\sqrt{R+\delta}}{\delta}\right) + \epsilon R^2 + \delta\epsilon R\right)}{2\pi\ (R^3 + 2\delta R^2 + \delta^2 R)} = \frac{Q(\theta,t)\ \mathrm{atan}\left(\frac{\epsilon R}{\delta}\right)}{\pi} \end{aligned}$$

上式で $\delta \to 0$ とすると、

$$q_R = \frac{Q(\theta,t)}{2}$$

上記の結果と (7.1.120) 式から ζ 平面上の $r = \frac{B}{2}, \theta$ 位置におけるわき出し強さ：Q と z 平面上の v の関係は下記となる。

$$Q\left(r = \frac{B}{2}, \theta, t\right) = 2\,q_r = 4\sin(\theta)\ v \qquad (7.1.121)$$

```
F5:F=Q(s,t)/2/%pi*log(z-z[U])-Q(s,t)/2
 /%pi*log(z-z[L]);
Z5:z=B/2*%e^(%i*\theta);
Z5U:z[U]=B/2*%e^(%i*s);
Z5L:z[L]=B/2*%e^(-%i*s);
Q5:Q(s,t)=4*sin(s)*v(s,t);
subst([Z5U,Z5L,Z5],F5);
PH1:\Phi=realpart(rhs(%));
dq[\theta]=diff(rhs(PH1),\theta,1)/(B/2);
trigsimp(%);
DQT0:factor(%);
DQR1:dq[r]=diff(rhs(PH1),r,1);
DQT1:subst([Q5],DQT0);
QT1:q[\theta](\theta,t)='integrate(
 rhs(DQT1)*B/2,s,0,%pi);
```

ζ 平面上の円周上：$r = \frac{B}{2},\ \theta = \pm s$ の位置にわき出しと吸い込みを置いたとき複素ポテンシャルは、

$$F = \frac{Q(s,t)\ \log(z - z_U)}{2\pi} - \frac{Q(s,t)\ \log(z - z_L)}{2\pi}$$

ここで、

$$z = \frac{e^{i\theta} B}{2}, \quad z_U = \frac{e^{is} B}{2}, \quad z_L = \frac{e^{-is} B}{2}$$

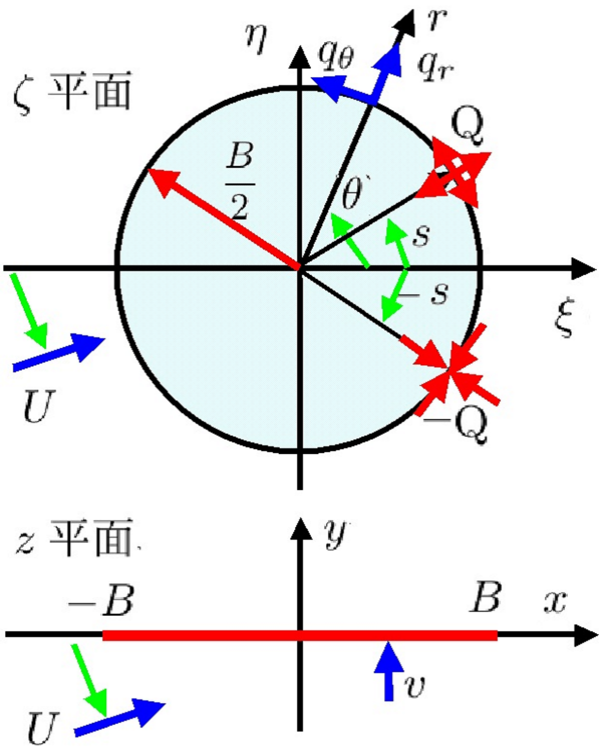


図 7.1.24: わき出しによる境界条件

上式の実部をとり、速度ポテンシャル：Φ を求めると、

$$\Phi = \frac{Q(s,t)\,\log\left(\left(\frac{\sin(\theta)\,B}{2}-\frac{\sin(s)\,B}{2}\right)^2+\left(\frac{\cos(\theta)\,B}{2}-\frac{\cos(s)\,B}{2}\right)^2\right)}{4\,\pi} - \frac{Q(s,t)\,\log\left(\left(\frac{\sin(\theta)\,B}{2}+\frac{\sin(s)\,B}{2}\right)^2+\left(\frac{\cos(\theta)\,B}{2}-\frac{\cos(s)\,B}{2}\right)^2\right)}{4\,\pi}$$

$Q, -Q$ による円周上の接線速度：dq_θ は次式により得られる。

$$dq_\theta = \frac{\frac{d}{d\,\theta}\,\Phi}{r} = -\frac{\sin(s)\;Q(s,t)}{\pi\,(\cos(\theta)-\cos(s))\,B} \qquad (7.1.122)$$

$Q, -Q$ による円周上の半径：r 方向の速度：dq_r は次式により得られる。

$$dq_r = \frac{d}{d\,r}\,\Phi = 0 \qquad (7.1.123)$$

上記の結果から $\theta \neq s$ では dq_r は零となり、Q による r 方向の速度と v の関係は一対一の関係となる。

(7.1.122) 式に (7.1.121) 式を代入すると、

$$dq_\theta = -\frac{4\sin(s)^2\,\mathrm{v}(s,t)}{\pi\,(\cos(\theta)-\cos(s))\,B}$$

上式を $0 \to \pi$ の範囲で積分すると、$\mathrm{v}(s,t)$ をもとに円周上に分布させた Q による円周上の接線速度：q_θ は下記となる。

$$q_\theta(\theta,t) = -\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin(s)^2\,\mathrm{v}(s,t)}{\cos(\theta)-\cos(s)}ds \qquad (7.1.124)$$

```
'diff(\Phi,x,1)=u;
\Phi[2]-\Phi[1]=-'integrate(u(x,y),x,
 x[1],x[2]);
lhs(%)='integrate(q[\theta](\theta,t)
 *B/2,\theta,\theta[1],\theta[2]);
\Phi(%pi,t)-\Phi[U](\theta,t)=
 ('integrate(q[\theta](\theta,t),
 \theta,\theta,%pi)*B)/2;
subst([\Phi(%pi,t)=0],%);
PHTU0:solve(%,\Phi[U](\theta,t))[1];
PHTU1:subst([QT1],PHTU0);
PHTL1:\Phi[L](-\theta,t)=-\Phi[U]
 (\theta,t);
P1:p-p[inf]=-\rho*('diff(\Phi,t,1)
 +U*'diff(\Phi,x,1));
P[U]-P[L]=-\rho*('diff(\Phi[U],t,1)
+U*'diff(\Phi[U],x,1))+\rho*(
'diff(\Phi[L],t,1)+U*'diff(\Phi[L],x,1));
subst([\Phi[L]=-\Phi[U]],%);
ev(%,diff);
factor(%);
```

```
L1:L=-'integrate(P[U](x,t)-P[L](x,t),x,
 -B,B);
L=2*\rho*'diff('integrate(\Phi[U](x,t),
 x,-B,B),t,1);
L=changevar(rhs(%),x-B*cos(\theta),
 \theta,x);
L2:subst([cos(theta)*B=\theta],%);
ZT1:z[a](t)=-h(t)-\alpha(t)*(x-B*B[a]);
V5:v(x,t)=diff(rhs(ZT1),t,1)-U*\alpha(t);
V51:v(s,t)=subst([Z21],rhs(V5));
V52:v[1](s,t)=-\alpha(t)*U-'diff(h(t),t,1);
v[2](s,t)=-('diff(alpha(t),t,1))*
 (cos(s)*B-B[a]*B);
V53:factor(%);
assume(\theta>0 and \theta<%pi);
assume(1-cos(\theta)^2>0);
assume(sin(\theta)>0);
assume(acos(cos(theta))-%pi>0);
subst([\Phi[U](theta,t)=\Phi[U1]
 (theta,t),v(s,t)=v[1](s,t)],PHTU1);
subst([V52],%);
ev(%,integrate);
PHTU21:factor(%);
subst([\Phi[U](theta,t)=\Phi[U2]
 (theta,t),v(s,t)=v[2](s,t)],PHTU1);
subst([V53],%);
ev(%,integrate);
trigexpand(%);
PHTU22:factor(%);
PHTU2:Phi[U](\theta,t)=rhs(PHTU21)
 +rhs(PHTU22);
subst([PHTU2],L2);
ev(%,integrate);
ev(%,diff);
L3:factor(%);
```

速度ポテンシャルと速度の関係は、その定義：(5.1.4) 式から、

$$\frac{d}{d\,x}\,\Phi = u, \quad \Phi_2-\Phi_1 = -\int_{x_1}^{x_2}\mathrm{u}(x,y)\,dx$$

ζ 平面上の半径：$r=\frac{B}{2}$ 上の積分を行い、速度ポテンシャルを求める。

$$\Phi_2-\Phi_1 = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} q_\theta(\theta,t)\,d\theta\,B$$

上式で上方の円周上で θ における速度ポテンシャル：$\Phi_U(\theta,t)$ は、

$$\Phi(\pi,t)-\Phi_U(\theta,t) = \frac{1}{2}\int_\theta^\pi q_\theta(\theta,t)\,d\theta\,B$$

$\theta=\pi$ の位置を基準として、その速度ポテンシャルを零とすると、

$$-\Phi_U(\theta,t)=\frac{1}{2}\int_{\theta}^{\pi} q_\theta(\theta,t)\,d\theta\,B \tag{7.1.125}$$

以上から、円周上の θ における速度ポテンシャル：$\Phi_U(\theta,t)$ は、(5.1.9) 式を代入し、

$$\begin{aligned}\Phi_U(\theta,t)=&-\frac{1}{2}\int_{\theta}^{\pi} q_\theta(\theta,t)\,d\theta\,B\\=&\frac{1}{\pi}\int_{\theta}^{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin(s)^2\,\mathrm{v}(s,t)}{\cos(\theta)-\cos(s)}ds d\theta\,B\end{aligned} \tag{7.1.126}$$

また、下記の関係がある。

$$\Phi_L(-\theta,t)=-\Phi_U(\theta,t)$$

速度ポテンシャルの Bernoulli の定理表記：(2.9.6) 式から、

$$p-p_\infty=-\rho\left(\left(\frac{d}{d\,x}\Phi\right)U+\frac{d}{d\,t}\Phi\right)$$

上式から、上部と下部の圧力差は、

$$\begin{aligned}P_U-P_L=&\rho\left(\left(\frac{d}{d\,x}\Phi_L\right)U+\frac{d}{d\,t}\Phi_L\right)\\&-\rho\left(U\left(\frac{d}{d\,x}\Phi_U\right)+\frac{d}{d\,t}\Phi_U\right)\\=&-2\,\rho\left(U\left(\frac{d}{d\,x}\Phi_U\right)+\frac{d}{d\,t}\Phi_U\right)\end{aligned} \tag{7.1.127}$$

上式を積分して揚力：L が得られ、(7.1.118) 式の $x=\cos(s)\,B$ で座標変換すると、

$$\begin{aligned}L=&-\int_{-B}^{B}P_U(x,t)-P_L(x,t)\,dx\\=&2\,\rho\left(\frac{d}{d\,t}\int_{-B}^{B}\Phi_U(x,t)\,dx\right)\\=&2\,\rho\left(\frac{d}{d\,t}\left(\int_0^{\pi}\sin(\theta)\,\Phi_U(\theta,t)\,d\theta\,B\right)\right)\end{aligned} \tag{7.1.128}$$

二次元平板翼が $\mathrm{h}(t)$ で上下運動し、$x=B_a\,B$ で $\alpha(t)$ で回転運動するとする。このとき翼の各点の上下運動：$z_a(t)$ は、

$$z_a(t)=-\alpha(t)\,(x-B_a\,B)-\mathrm{h}(t)$$

速度：$\mathrm{v}(x,t)$ は、上式を時間：t で微分し、

$$\mathrm{v}(x,t)=-\alpha(t)\,U-\left(\frac{d}{d\,t}\alpha(t)\right)(x-B_a\,B)-\frac{d}{d\,t}\mathrm{h}(t) \tag{7.1.129}$$

上式に (7.1.118) 式を代入し、

$$\begin{aligned}\mathrm{v}(s,t)=&-\alpha(t)\,U-\left(\frac{d}{d\,t}\alpha(t)\right)(\cos(s)\,B-B_a\,B)\\&-\frac{d}{d\,t}\mathrm{h}(t)\\=&\,v_1(s,t)+v_2(s,t)\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}v_1(s,t)=&-\alpha(t)\,U-\frac{d}{d\,t}\mathrm{h}(t)\\v_2(s,t)=&-\left(\frac{d}{d\,t}\alpha(t)\right)(\cos(s)\,B-B_a\,B)\end{aligned} \tag{7.1.130}$$

(7.1.126) 式に上式を代入し、

$$\begin{aligned}\Phi_{U1}(\theta,t)=&\frac{1}{\pi}\int_{\theta}^{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin(s)^2\,v_1(s,t)}{\cos(\theta)-\cos(s)}ds d\theta\,B\\=&\frac{1}{\pi}\int_{\theta}^{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin(s)^2}{\cos(\theta)-\cos(s)}ds d\theta\,B\\&\times\left(-\alpha(t)\,U-\frac{d}{d\,t}\mathrm{h}(t)\right)\\=&\sin(\theta)\,B\left(\alpha(t)\,U+\frac{d}{d\,t}\mathrm{h}(t)\right)\end{aligned} \tag{7.1.131}$$

$$\begin{aligned}\Phi_{U2}(\theta,t)=&\frac{1}{\pi}\int_{\theta}^{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin(s)^2\,v_2(s,t)}{\cos(\theta)-\cos(s)}ds d\theta\,B\\=&\frac{\left(\frac{d}{d\,t}\alpha(t)\right)}{\pi}\\&\times\int_{\theta}^{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin(s)^2\,(B_a-\cos(s))}{\cos(\theta)-\cos(s)}ds d\theta\,B^2\\=&-\frac{\left(\frac{d}{d\,t}\alpha(t)\right)(4\,\pi\sin(\theta)\,B_a-\pi\sin(2\,\theta))\,B^2}{4\,\pi}\\=&-\frac{\left(\frac{d}{d\,t}\alpha(t)\right)\sin(\theta)\,(2\,B_a-\cos(\theta))\,B^2}{2}\end{aligned} \tag{7.1.132}$$

(7.1.131) 式、(7.1.132) 式から、

$$\begin{aligned}\Phi_U(\theta,t)=&\Phi_{U1}(\theta,t)+\Phi_{U2}(\theta,t)\\=&\sin(\theta)\,B\left(\alpha(t)\,U+\frac{d}{d\,t}\mathrm{h}(t)\right)\\&-\frac{\left(\frac{d}{d\,t}\alpha(t)\right)\sin(\theta)\,(2\,B_a-\cos(\theta))\,B^2}{2}\end{aligned}$$

(7.1.128) 式に上式を代入し、

$$L = 2\,\rho\,\left(\frac{d}{d\,t}\,\left(B\,\int_{0}^{\pi}\sin\left(\theta\right)\,\left(\sin\left(\theta\right)\,B\,\left(\alpha\left(t\right)\,U+\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{h}\left(t\right)\right)-\frac{\left(\frac{d}{d\,t}\,\alpha\left(t\right)\right)\,\sin\left(\theta\right)\,\left(2\,B_a-\cos\left(\theta\right)\right)\,B^2}{2}\right)d\theta\right)\right)$$
$$= 2\,\rho\,\left(\frac{d}{d\,t}\,\frac{B\,\left(\pi\,\alpha\left(t\right)\,B\,U-\pi\,\left(\frac{d}{d\,t}\,\alpha\left(t\right)\right)\,B_a\,B^2+\pi\,\left(\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{h}\left(t\right)\right)\,B\right)}{2}\right)$$
$$= \pi\,\rho\,B^2\,\left(\left(\frac{d}{d\,t}\,\alpha\left(t\right)\right)\,U-\left(\frac{d^2}{d\,t^2}\,\alpha\left(t\right)\right)\,B_a\,B+\frac{d^2}{d\,t^2}\,\mathrm{h}\left(t\right)\right) \tag{7.1.133}$$

上記の結果は「5.3.5 一様流中の楕円柱まわりの流れ・作用力・運動エネルギー (Joukowski 変換)」の (5.3.30) 式の平板の付加質量の結果と一致している。

```
F6:F=-%i*\Gamma[0]/2/%pi*log(z-z[1])
 +%i*\Gamma[0]/2/%pi*log(z-z[2]);
Z61:z[1]=f;
Z62:z[2]=B^2/4/f;
subst([Z61,Z62,Z5],F6);
PH1:\Phi=realpart(rhs(%));
q[\theta](\theta,t)=diff(rhs(%),\theta,1)
 /(B/2);
trigsimp(%);
DGT1:factor(%);
subst([DGT1],PHTU0);
ev(%,integrate);
factor(%);
\Phi[U](\theta,t)=(\Gamma[0]*(atan((
 sin(theta)*(B+2*f))/((cos(theta)+1)
 *(B-2*f)))+%pi/2))/(%pi);
PHGU1:lhs(%)=(\Gamma[0]*(-atan(((cos(
 theta)+1)*(B-2*f))/(sin(theta)*
 (B+2*f)))))/(%pi);
PHGU11:subst([sin(\theta)=sqrt(1-
 cos(\theta))*sqrt(1+cos(\theta))],%);
Z1;
subst([z=x+%i*y,\zeta=\xi+%i*eta],%);
realpart(%);
Z7:subst([\eta=0],%);
sqrt(x-B)/sqrt(x+B);
%=subst([Z7,A2],%);
radcan(%);
subst([\xi=f],%);
rhs(%)=lhs(%);
BF1:denom(lhs(%))=num(lhs(%))*
 denom(rhs(%))/num(rhs(%));
subst([BF1],PHGU11);
PHGU2:factor(%);
```

```
P[U]-P[L]=-2*\rho*('diff(Phi[U]
 (\theta,t),t,1)-U/B/sin(\theta)
 *'diff(Phi[U](\theta,t),\theta,1));
subst(['diff(Phi[U](\theta,t),t,1)='diff(
 Phi[U](\theta,t),x,1)*'diff(x,t,1)],%);
subst(['diff(x,t,1)=U],%);
subst([PHGU2],%);
ev(%,diff);
radcan(%);
factor(%);
P2:P[U]-P[L]=-(Gamma[0]*rho*(cos(theta)*
 B+x)*U)/(%pi*sin(theta)*sqrt(x^2-B^2)*B);
L=-'integrate(rhs(P2)*B*sin(\theta),
 \theta,0,%pi);
L5:ev(%,integrate);
L51:lhs(L5)='integrate(subst([\Gamma[0]=
 -\kappa[w](x,t)],rhs(L5)),x,B,inf);
```

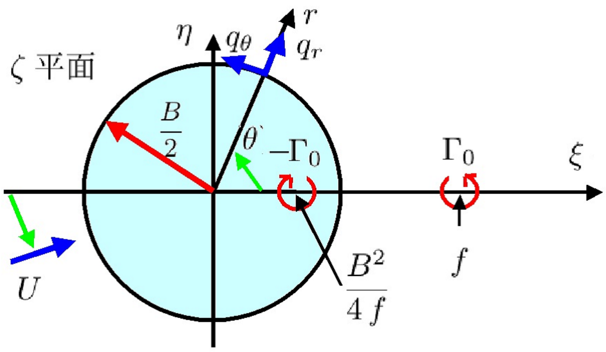


図 7.1.25: 渦の

翼から後方に流れて行く渦について調べる。ζ 平面で半径：$R=\frac{B}{2}$ の円の外に渦強さ：Γ_0 の渦を ξ 軸上の $z_1=f$ に置いた時、境界条件を満足させるには、「5.1.16 円定理」から、逆方向の渦を $z_2=\frac{B^2}{4\,f}$ に置く必要がある。この複素ポテンシャル：F は、

$$F = \frac{i\,\Gamma_0\,\log\left(z-z_2\right)}{2\,\pi}-\frac{i\,\Gamma_0\,\log\left(z-z_1\right)}{2\,\pi}$$
$$\text{ここで、}\quad z_1=f,\; z_2=\frac{B^2}{4\,f}$$

上記から円周上の複素ポテンシャル：F は、

$$F=\frac{i\,\Gamma_0\log\left(\frac{e^{i\,\theta}\,B}{2}-\frac{B^2}{4\,f}\right)}{2\,\pi}-\frac{i\,\Gamma_0\log\left(\frac{e^{i\,\theta}\,B}{2}-f\right)}{2\,\pi}$$

上式の実部をとって、円周上の速度ポテンシャル：Φ は、

$$\Phi=\frac{\Gamma_0\,\mathrm{atan2}\left(\frac{\sin(\theta)\,B}{2},\frac{\cos(\theta)\,B}{2}-f\right)}{2\,\pi}-\frac{\Gamma_0\,\mathrm{atan2}\left(\frac{\sin(\theta)\,B}{2},\frac{\cos(\theta)\,B}{2}-\frac{B^2}{4\,f}\right)}{2\,\pi}$$

$\Gamma_0,-\Gamma_0$ による円周上の接線速度：dq_θ は次式により得られる。

$$q_\theta\left(\theta,t\right)=\frac{\frac{d}{d\,\theta}\,\Phi}{r}=\frac{\Gamma_0\,\left(B-2\,f\right)\,\left(B+2\,f\right)}{\pi\,B\,\left(B^2-4\,f\cos\left(\theta\right)\,B+4\,f^2\right)}\tag{7.1.134}$$

上式の接線速度：dq_θ を積分し、円周上の速度ポテンシャル：Φ は、(7.1.125) 式から、

$$\begin{aligned}\Phi_U\left(\theta,t\right)=&-\frac{\Gamma_0\,\left(B-2\,f\right)\,\left(B+2\,f\right)}{2\,\pi}\\&\times\int_\theta^\pi\frac{1}{B^2-4\,f\cos\left(\theta\right)\,B+4\,f^2}d\theta\\=&-\frac{\Gamma_0\,\left(B-2\,f\right)\,\left(B+2\,f\right)}{2\,\pi}\\&\times\left(-\frac{2\,\mathrm{atan}\left(\frac{\sin(\theta)\,B+2\,f\,\sin(\theta)}{(\cos(\theta)+1)\,B-2\,f\,\cos(\theta)-2\,f}\right)}{B^2-4\,f^2}\right.\\&\left.-\frac{\pi}{B^2-4\,f^2}\right)\\=&\frac{\Gamma_0\,\left(2\,\mathrm{atan}\left(\frac{\sin(\theta)\,(B+2\,f)}{(\cos(\theta)+1)\,(B-2\,f)}\right)+\pi\right)}{2\,\pi}\\=&-\frac{\Gamma_0\,\mathrm{atan}\left(\frac{(\cos(\theta)+1)\,(B-2\,f)}{\sin(\theta)\,(B+2\,f)}\right)}{\pi}\\=&-\frac{\Gamma_0\,\mathrm{atan}\left(\frac{\sqrt{\cos(\theta)+1}\,(B-2\,f)}{\sqrt{1-\cos(\theta)}\,(B+2\,f)}\right)}{\pi}\end{aligned}\tag{7.1.135}$$

(7.1.114) 式に $z=x+i\,y,\zeta=\xi+i\,\eta$ を代入し、

$$i\,y+x=\frac{A^2}{\xi+i\,\eta}+\xi+i\,\eta$$

実部をとると、

$$x=\frac{\xi\,A^2}{\xi^2+\eta^2}+\xi$$

ζ 平面上の ξ 軸上では、

$$x=\frac{A^2}{\xi}+\xi$$

上式に (7.1.116) 式を代入し、その結果を次式左辺に代入すると、

$$\frac{\sqrt{x-B}}{\sqrt{B+x}}=\frac{\sqrt{\frac{B^2}{4\xi}-B+\xi}}{\sqrt{\frac{B^2}{4\xi}+B+\xi}}=\frac{B-2\,f}{B+2\,f}$$

(7.1.135) 式に上式を代入すると、

$$\Phi_U\left(\theta,t\right)=-\frac{\Gamma_0\,\mathrm{atan}\left(\frac{\sqrt{\cos(\theta)+1}\,\sqrt{x-B}}{\sqrt{1-\cos(\theta)}\,\sqrt{B+x}}\right)}{\pi}\tag{7.1.136}$$

(7.1.127) 式から、

$$\begin{aligned}P_U-P_L=&-2\,\rho\,\left(\frac{d}{d\,t}\,\Phi_U\left(\theta,t\right)-\frac{\left(\frac{d}{d\,\theta}\,\Phi_U\left(\theta,t\right)\right)\,U}{\sin\left(\theta\right)\,B}\right)\\=&-2\,\rho\,\left(\left(\frac{d}{d\,x}\,\Phi_U\left(\theta,t\right)\right)\,\left(\frac{d}{d\,t}\,x\right)\right.\\&\left.-\frac{\left(\frac{d}{d\,\theta}\,\Phi_U\left(\theta,t\right)\right)\,U}{\sin\left(\theta\right)\,B}\right)\\=&-2\,\rho\,\left(\left(\frac{d}{d\,x}\,\Phi_U\left(\theta,t\right)\right)\,U-\frac{\left(\frac{d}{d\,\theta}\,\Phi_U\left(\theta,t\right)\right)\,U}{\sin\left(\theta\right)\,B}\right)\end{aligned}$$

上式に (7.1.136) 式を代入し、

$$\begin{aligned}P_U-P_L=&-2\,\rho\,\left(\left(\frac{d}{d\,x}\,\left(-\frac{\Gamma_0\,\mathrm{atan}\left(\frac{\sqrt{\cos(\theta)+1}\,\sqrt{x-B}}{\sqrt{1-\cos(\theta)}\,\sqrt{B+x}}\right)}{\pi}\right)\right)\,U-\frac{\left(\frac{d}{d\,\theta}\,\left(-\frac{\Gamma_0\,\mathrm{atan}\left(\frac{\sqrt{\cos(\theta)+1}\,\sqrt{x-B}}{\sqrt{1-\cos(\theta)}\,\sqrt{B+x}}\right)}{\pi}\right)\right)\,U}{\sin\left(\theta\right)\,B}\right)\\=&-\frac{\sqrt{1-\cos\left(\theta\right)}\,\sqrt{B+x}\,\left(\Gamma_0\,\rho\cos\left(\theta\right)\,B+\Gamma_0\,\rho\,x\right)\,U}{\sqrt{\cos\left(\theta\right)+1}\,\sqrt{x-B}\,\left(\left(\pi\cos\left(\theta\right)-\pi\right)\,B^2+\left(\pi\cos\left(\theta\right)-\pi\right)\,x\,B\right)}\\=&-\frac{\Gamma_0\,\rho\,\sqrt{1-\cos\left(\theta\right)}\,\left(\cos\left(\theta\right)\,B+x\right)\,U}{\pi\,\left(\cos\left(\theta\right)-1\right)\,\sqrt{\cos\left(\theta\right)+1}\,\sqrt{x-B}\,B\,\sqrt{B+x}}\\=&-\frac{\Gamma_0\,\rho\,\left(\cos\left(\theta\right)\,B+x\right)\,U}{\pi\sin\left(\theta\right)\,B\,\sqrt{x^2-B^2}}\end{aligned}$$

上式を積分し、渦強さ：Γ_0 による揚力：L は、

$$L=\frac{\Gamma_0\,\rho\,\int_0^{\pi}\cos(\theta)\ B+xd\theta\,U}{\pi\sqrt{x^2-B^2}}=\frac{\Gamma_0\,\rho\,x\,U}{\sqrt{x^2-B^2}}$$

上式で渦強さ：Γ_0 を逆方向の渦度分布：$-\kappa_w(x,t)$ に置き換え、渦度分布の分布範囲の翼後端から無限後方までの積分をすると、

$$L=-\rho\int_B^{\infty}\frac{x\,\kappa_w(x,t)}{\sqrt{x^2-B^2}}dx\,U \tag{7.1.137}$$

```
QT1;
QT2:subst([\theta=0],QT1);
subst([BF1,\theta=0],DGT1);
factor(%);
GT2:lhs(%)='integrate(subst([\Gamma[0]=
 -\kappa[w](x,t)],rhs(%)),x,B,inf);
QT2+GT2;
rhs(%)=0;
last(lhs(%))=-first(lhs(%));
QT3:\tau=rhs(%);
OMG1:\omega=k*U/B;
L52:lhs(L51)=rhs(L51)*lhs(QT3)/rhs(QT3);
KG1:\kappa[w](x,t)=\kappa[w0]*%e^(%i*
 \omega*(t-x/U));
KG2:\kappa[w](x,t)=\kappa[w0]*%e^(%i*
 \omega*(-x/U));
subst([KG1],L52);
subst([KG2],L52);
subst([OMG1],%);
subst([\tau=\tau[0]*%e^(%i*\omega*t)],%);
lhs(%)=changevar(num(rhs(%)),a-x/B,a,x)/
 changevar(denom(rhs(%)),a-x/B,a,x);
L53:lhs(%)=subst([sqrt(a-1)=sqrt(a^2-1)/
 sqrt(a+1)],num(rhs(%)))/denom(rhs(%));
L=(%pi*\tau[0]*rho*%e^(%i*omega*t)*B*U)
 *C(k);
CK1:C(k)=hankel_2(1,k)/(hankel_2(1,k)
 +%i*hankel_2(0,k));
HK21:hankel_2(1,k)=bessel_j(1,k)
 - %i * bessel_y(1,k);
HK22:hankel_2(0,k)=bessel_j(0,k)
 - %i * bessel_y(0,k);
CK2:subst([HK21,HK22,k=t],CK1);
PLX:realpart(rhs(CK2));
PLY:imagpart(rhs(CK2));
```

```
plot2d([[parametric,PLX,PLY,[t,0.00001,
 0.1],[nticks, 2000]],[parametric,PLX,
 PLY,[t,0.1,0.5],[nticks, 2000]],
 [parametric,PLX,PLY,[t,0.5,1],
 [nticks, 2000]],
 [parametric,PLX,PLY,[t,1,100],
 [nticks, 2000]]],[x,0,1.2],[y,-0.3,0],
 [style,[lines,3,1],[lines,3,2],
 [lines,3,3],[lines,3,4]],
 [legend,"k=0-0.1","k=0.1-0.5",
 "k=0.5-1","k=1-100"]);
```

翼の運動の境界条件を満足するために円周上に分布した Q による円周上の接線速度：q_θ で翼後端における流速は (7.1.124) 式に $\theta=0$ を代入し、

$$q_0(0,t)=-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin(s)^2\,\mathrm{v}(s,t)}{1-\cos(s)}ds \tag{7.1.138}$$

また、翼後方に置いた渦強さ：Γ_0 による円周上の接線速度：q_θ で翼後端における流速は (7.1.134) 式に $\theta=0$ を代入し、

$$\begin{aligned}q_0(0,t)=&\frac{\Gamma_0\,(B-2\,f)^2\,\sqrt{B+x}}{\pi\sqrt{x-B}\,B\,(B^2-4\,f\,B+4\,f^2)}\\=&\frac{\Gamma_0\sqrt{B+x}}{\pi\sqrt{x-B}\,B}\end{aligned}$$

上式で渦強さ：Γ_0 を逆方向の渦度分布：$-\kappa_w(x,t)$ に置き換え、渦度分布の分布範囲の翼後端から無限後方までの積分をすると、

$$q_0(0,t)=-\frac{1}{\pi\,B}\int_B^{\infty}\frac{\kappa_w(x,t)\,\sqrt{B+x}}{\sqrt{x-B}}dx \tag{7.1.139}$$

(7.1.138) 式と (7.1.139) 式の和が翼後端の流速で、翼のクッタ条件から、これは零となり、

$$-\frac{1}{\pi\,B}\int_B^{\infty}\frac{\kappa_w(x,t)\,\sqrt{B+x}}{\sqrt{x-B}}dx-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin(s)^2\,\mathrm{v}(s,t)}{1-\cos(s)}ds=0$$

上式を左辺左辺第二項を τ とすると、

$$\tau=-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin(s)^2\,\mathrm{v}(s,t)}{1-\cos(s)}ds \tag{7.1.140}$$

また、

$$\tau=\frac{1}{\pi\,B}\int_B^{\infty}\frac{\kappa_w(x,t)\,\sqrt{B+x}}{\sqrt{x-B}}dx \tag{7.1.141}$$

(7.1.137) 式の右辺に (7.1.141) 式の左辺を掛け、(7.1.141) 式の右辺で割ると、

$$L=-\frac{\pi\,\rho\,\tau\,B\int_B^{\infty}\frac{x\,\kappa_w(x,t)}{\sqrt{x^2-B^2}}dx\,U}{\int_B^{\infty}\frac{\kappa_w(x,t)\,\sqrt{B+x}}{\sqrt{x-B}}dx} \tag{7.1.142}$$

翼の運動が円周波数：ω で周期運動するとすると、$\tau,\ \kappa_w\,(x,t)$ を下記のように表現できる。

$$\tau = \tau_0 e^{i\,\omega}, \quad \kappa_w\,(x,t) = \kappa_{w0}\,e^{i\,\omega\,\left(t-\frac{x}{U}\right)}$$

(7.1.142) 式に上式を代入し、$\omega = \frac{k\,U}{B}$ とすると、

$$\begin{aligned}
L &= -\frac{\pi\,\rho\,\tau\,B\,U\,\int_B^{\infty}\frac{x\,e^{i\,\omega\,\left(t-\frac{x}{U}\right)}}{\sqrt{x^2-B^2}}dx}{\int_B^{\infty}\frac{\sqrt{B+x}\,e^{i\,\omega\,\left(t-\frac{x}{U}\right)}}{\sqrt{x-B}}dx} \\
&= -\frac{\pi\,\rho\,\tau\,B\,U\,\int_B^{\infty}\frac{x\,e^{-\frac{i\,\omega\,x}{U}}}{\sqrt{x^2-B^2}}dx}{\int_B^{\infty}\frac{\sqrt{B+x}\,e^{-\frac{i\,\omega\,x}{U}}}{\sqrt{x-B}}dx} \\
&= -\frac{\pi\,\rho\,\tau\,B\,\int_B^{\infty}\frac{x\,e^{-\frac{i\,k\,x}{B}}}{\sqrt{x^2-B^2}}dx\,U}{\int_B^{\infty}\frac{\sqrt{B+x}\,e^{-\frac{i\,k\,x}{B}}}{\sqrt{x-B}}dx} \\
&= -\frac{\pi\,\tau_0\,\rho\,e^{i\,\omega\,t}\,B\,\int_B^{\infty}\frac{x\,e^{-\frac{i\,k\,x}{B}}}{\sqrt{x^2-B^2}}dx\,U}{\int_B^{\infty}\frac{\sqrt{B+x}\,e^{-\frac{i\,k\,x}{B}}}{\sqrt{x-B}}dx}
\end{aligned}$$

$a = \frac{x}{B}$ で座標変換し、積分範囲を $1 \to \infty$ とすると、

$$L = -\frac{\pi\,\tau_0\,\int_1^{\infty}\frac{a\,e^{-i\,a\,k}}{\sqrt{a^2-1}}da\,\rho\,e^{i\,\omega\,t}\,B\,U}{\int_1^{\infty}\frac{\sqrt{a+1}\,e^{-i\,a\,k}}{\sqrt{a-1}}da}$$

積分を Bessel 関数で表すと、

$$L = \pi\,\tau_0\,\mathrm{C}\,(k)\ \rho\,e^{i\,\omega\,t}\,B\,U$$

ここで、

$$\mathrm{C}\,(k) = \frac{\mathrm{hankel\_2}\,(1,k)}{\mathrm{hankel\_2}\,(1,k) + i\,\mathrm{hankel\_2}\,(0,k)}$$

上式の $\mathrm{C}\,(k)$ を図示すると、

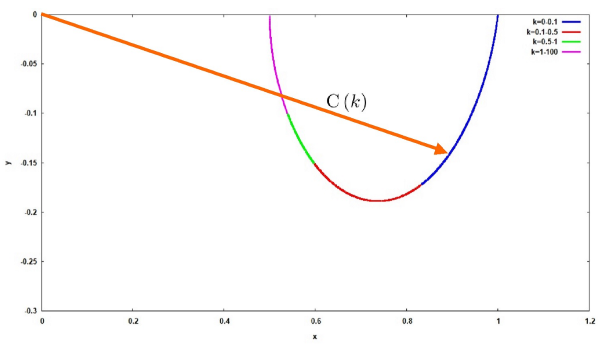


図 7.1.26: Theodorsen 関数

上図から、低周波数の運動では定常状態の揚力に近く、高周波数の運動では定常状態の揚力の 1/2 となる。

7.2 ３次元翼

7.2.1 わき出しと渦度による誘導速度

わき出し：Θ と渦度：$\overrightarrow{\omega}$ が与えられたとき、与えられた位置での流速を求める。

(1) わき出しによる誘導速度

```
/* わき出しと渦度による誘導速度 */
kill(all);
load("vect")
depends(u,[x,y,z]);
depends(v,[x,y,z]);
depends(w,[x,y,z]);
VV:matrix([u],[v],[w]);
/* わき出しによる誘導速度 */
DIV1:div(transpose(VV)[1])=\Theta;
DIV2:express(%);
ROT1:curl(transpose(VV)[1])=0;
ROT2:transpose(express(lhs(%)))=0;
grad(\Phi);
VV1:VV=transpose(express(%));
DIV3:div(transpose(rhs(VV1))[1]);
DIV31:express(%);
DIV4:DIV31=rhs(DIV1);
\Phi=-1/(4*%pi)*'integrate(\Theta/r(V),V);
grad(A)=matrix(['diff(A,\theta,1)/r],
  ['diff(A,\phi,1)/r/cos(\theta)],
  ['diff(A,r,1)]);
grad(\Theta/r)=matrix([0],[0],['diff(1/r,r,
  1)])*\Theta;
DPHI1:ev(%,diff);
```

流速：$\overrightarrow{v}$ を下記で表す。

$$\overrightarrow{v}=\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}$$

わき出し：Θ と流速：$\overrightarrow{v}$ は下記を満足するものとする。

$$\operatorname{div}(\overrightarrow{v})=\frac{d}{d\,z}\,w+\frac{d}{d\,y}\,v+\frac{d}{d\,x}\,u=\Theta \tag{7.2.1}$$

$$\operatorname{curl}(\overrightarrow{v})=\begin{pmatrix}\frac{d}{d\,y}\,w-\frac{d}{d\,z}\,v\\ \frac{d}{d\,z}\,u-\frac{d}{d\,x}\,w\\ \frac{d}{d\,x}\,v-\frac{d}{d\,y}\,u\end{pmatrix}=0 \tag{7.2.2}$$

上式から、(7.2.1) 式はわき出しを、(7.2.2) 式は渦なし流れを表している。いま、速度ポテンシャル:Φ を導入すると、下記の関係がある。

$$\overrightarrow{v}=\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{d}{d\,x}\,\Phi\\ \frac{d}{d\,y}\,\Phi\\ \frac{d}{d\,z}\,\Phi\end{pmatrix}=\operatorname{grad}(\Phi) \tag{7.2.3}$$

上式を (7.2.1) 式に代入すると、

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\overrightarrow{v})=&\operatorname{div}\left([\frac{d}{d\,x}\,\Phi,\frac{d}{d\,y}\,\Phi,\frac{d}{d\,z}\,\Phi]\right)\\ =&\frac{d^2}{d\,z^2}\,\Phi+\frac{d^2}{d\,y^2}\,\Phi+\frac{d^2}{d\,x^2}\,\Phi=\Theta\end{aligned}$$

これは Poisson の方程式であり、その解は下記となる。ここで $\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{r}$ とする。

$$\Phi_P=-\frac{1}{4\,\pi}\iiint\frac{\Theta_Q}{\mathrm{r}}dV \tag{7.2.4}$$

ところで、(B.2.7) 式、670 ページから、$grad$ の極座標表現は下記となり、

$$\operatorname{grad}(A)=\begin{pmatrix}\frac{\frac{d}{d\,\theta}\,A}{r}\\ \frac{\frac{d}{d\,\phi}\,A}{r\cos(\theta)}\\ \frac{d}{d\,r}\,A\end{pmatrix}$$

(7.2.3) 式から dV による速度は、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{dv}=&-\frac{1}{4\,\pi}\operatorname{grad}\left(\frac{\Theta_Q}{r}\right)dV\\ =&-\frac{1}{4\,\pi}\begin{pmatrix}0\\0\\\left(\frac{d}{d\,r}\,\frac{1}{r}\right)\,\Theta_Q\end{pmatrix}dV\\ =&-\frac{1}{4\,\pi}\begin{pmatrix}0\\0\\-\frac{\Theta_Q}{r^2}\end{pmatrix}dV\end{aligned}$$

以上から、わき出しによる誘導速度は次式で得られる。

$$\overrightarrow{v}=\frac{1}{4\,\pi}\iiint\frac{\Theta_Q\,\overrightarrow{r}}{\mathrm{r}^3}dV \tag{7.2.5}$$

(2) 渦度による誘導速度

```
/* 渦度による誘導速度 */
OM:matrix([\omega[x]],[\omega[y]]
  ,[\omega[z]]);
DIV6:div(transpose(VV)[1])=0;
DIV61:express(%);
ROT1:curl(transpose(VV)[1]);
ROT2:transpose(express(%))=OM;
DVOM1:dv=\Gamma*sin(\theta)*dx/(4*%pi*r^2);
SIN1:sin(\theta)=h/r;
R1:r=sqrt(h^2+x^2);
DVOM2:subst([SIN1,R1],DVOM1);
assume(h>0);
VOM1:v='integrate(rhs(DVOM2/dx),x,minf,
 inf);
ev(%,integrate);
```

渦度：$\overrightarrow{\omega}$ を下記で表す。

$$\overrightarrow{\omega}=\begin{pmatrix}\omega_x\\\omega_y\\\omega_z\end{pmatrix}$$

渦度：ω と流速：$\overrightarrow{v}$ は下記を満足するものとする。

$$\mathrm{div}\,(\overrightarrow{v}) = \frac{d}{d\,z}\,w + \frac{d}{d\,y}\,v + \frac{d}{d\,x}\,u = 0 \tag{7.2.6}$$

$$\mathrm{curl}\,(\overrightarrow{v}) = \begin{pmatrix} \frac{d}{d\,y}\,w - \frac{d}{d\,z}\,v \\ \frac{d}{d\,z}\,u - \frac{d}{d\,x}\,w \\ \frac{d}{d\,x}\,v - \frac{d}{d\,y}\,u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \overrightarrow{\omega} \tag{7.2.7}$$

上式から、(7.2.6) 式はわき出しがない流れを、(7.2.7) 式は渦度を表している。いま、次式で定義するベクトルポテンシャル:$\overrightarrow{A}$ を導入する。ここで $div(\overrightarrow{A}) = 0$ とする。

$$\overrightarrow{v} = \mathrm{curl}\,\overrightarrow{A} \tag{7.2.8}$$

上式を (7.2.7) 式に代入すると、

$$\mathrm{curl}\,\mathrm{curl}\,\overrightarrow{A} = \overrightarrow{\omega} \tag{7.2.9}$$

下記に定義する ∇ を使って、(C.3.7) 式、690 ページから、

$$\nabla = \frac{d}{d\,x}\,\overrightarrow{i} + \frac{d}{d\,y}\,\overrightarrow{j} + \frac{d}{d\,z}\,\overrightarrow{k}$$

$$\mathrm{curl}\,\mathrm{curl}\,\overrightarrow{A} = \nabla \times (\nabla \times \overrightarrow{A}) = \overrightarrow{\omega} \tag{7.2.10}$$

３ベクトルの外積の関係式:(C.2.7) 式、688 ページ、$grad$ の ∇ 表示式：(C.3.5) 式、690 ページ、div の ∇ 表示式：(C.3.6) 式から、上式は、

$$\begin{aligned}\nabla \times (\nabla \times \overrightarrow{A}) &= -\,(\nabla \cdot \nabla)\,\overrightarrow{A} + (\nabla \cdot \overrightarrow{A})\,\nabla \\ &= -\,\nabla^2\,\overrightarrow{A} + \nabla\,(\nabla \cdot \overrightarrow{A}) \\ &= -\,\nabla^2\,\overrightarrow{A} + grad\,(div\,\overrightarrow{A}) = \overrightarrow{\omega}\end{aligned}$$

以上から、

$$\nabla^2\,\overrightarrow{A} = -\overrightarrow{\omega} \tag{7.2.11}$$

(7.2.4) 式と同様に考えて、ベクトルポテンシャル:$\overrightarrow{A_P}$ は、

$$\overrightarrow{A_P} = \frac{1}{4\,\pi}\iiint \frac{\overrightarrow{\omega_Q}}{\mathrm{r}}dV \tag{7.2.12}$$

(7.2.8) 式から dV による誘導速度は、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{dv} =& \frac{1}{4\,\pi}\mathrm{curl}\left(\frac{\overrightarrow{\omega_Q}}{r}\right)dV \\ =& \frac{1}{4\,\pi}\mathrm{grad}\left(\frac{1}{r}\right) \times \overrightarrow{\omega_Q}dV \\ =& \frac{1}{4\,\pi}\overrightarrow{\omega_Q} \times \frac{\overrightarrow{r}}{r^3}dV\end{aligned} \tag{7.2.13}$$

以上から、渦度による誘導速度は次式で得られる。

$$\overrightarrow{v} = \frac{1}{4\,\pi}\iiint \overrightarrow{\omega_Q} \times \frac{\overrightarrow{r}}{r^3}dV \tag{7.2.14}$$

x 軸上に渦循環強さ:Γ による誘導速度:dv は、(7.2.13) 式で $\overrightarrow{\omega_Q}dV \to \Gamma\,\overrightarrow{ds}$ と書き換え、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{dv} =& \frac{\Gamma}{4\,\pi\,r^3}\overrightarrow{ds} \times \overrightarrow{r} \\ dv =& \frac{dx\,\Gamma\sin{(\theta)}}{4\,\pi\,r^2}\end{aligned} \tag{7.2.15}$$

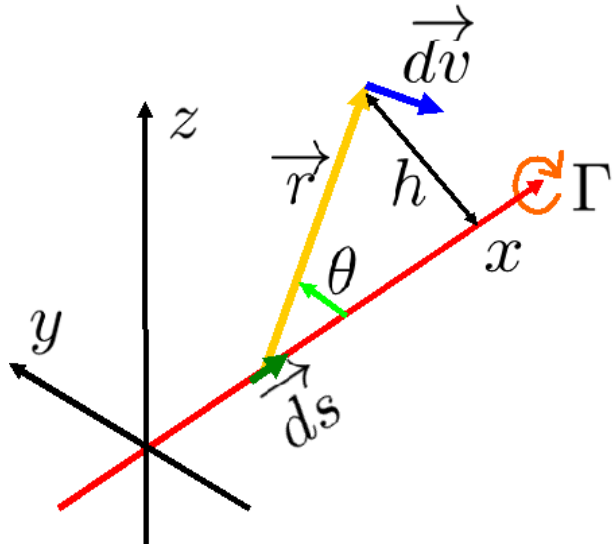


図 7.2.1: 渦循環による誘導速度

ここで、下記の関係式を上式に代入し、

$$\sin{(\theta)} = \frac{h}{r}, \quad r = \sqrt{x^2 + h^2}$$

$$dv = \frac{dx\,\Gamma\,h}{4\,\pi\,r^3} = \frac{dx\,\Gamma\,h}{4\,\pi\,(x^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{7.2.16}$$

x 軸上の無限長さの渦循環強さ:Γ による誘導速度は、上式を $-\infty \to \infty$ 積分し、

$$\begin{aligned}v =& \frac{1}{4\,\pi}\Gamma\,h\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(x^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}}dx \\ =& \frac{\Gamma}{2\,\pi\,h}\end{aligned} \tag{7.2.17}$$

7.2.2　揚力線理論 (フーリエ変換)

三次元の翼性能について調べる。一様流速：U の中に y 軸上に置かれた、迎角：α、翼の長さ：$2B$ の翼が左右に細長く、$x-z$ 断面まわりの流れは二次元の翼理論が適用できるとする。各翼断面の渦循環：$\Gamma(y)$ は翼断面ごとに異なり、翼で発生した渦は下図のように後方に一様流に沿って流れるものとする。このとき後方に流れた渦の誘導速度により翼面に下方の downwash：w が生じる。

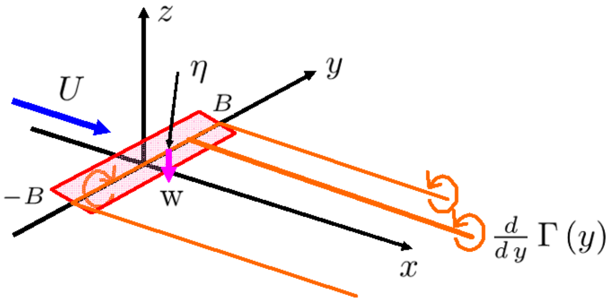


図 7.2.2: 揚力線理論

```
/* 揚力線理論 */
kill(all);
AL1:\alpha[i]=w(y)/U;
DL1:dL=\rho*U*\Gamma(y)*dy*cos(\alpha[i]);
DD1:dD=\rho*U*\Gamma(y)*dy*sin(\alpha[i]);
DL2:dL=\rho*U*\Gamma(y)*dy;
dD=\rho*U*\Gamma(y)*\alpha[i]*dy;
DD2:subst([AL1],%);
L1:L=integrate(rhs(DL2)/dy,y,-B,B);
D1:D=integrate(rhs(DD2)/dy,y,-B,B);
W1:dw(y)=-1/(4*%pi)*'diff(\Gamma(\eta),
  \eta,1)*d*\eta/(\eta-y);
assume(B>0);
W2:w(y)='integrate(rhs(W1)/d/\eta,\eta,
 -B,B);
```

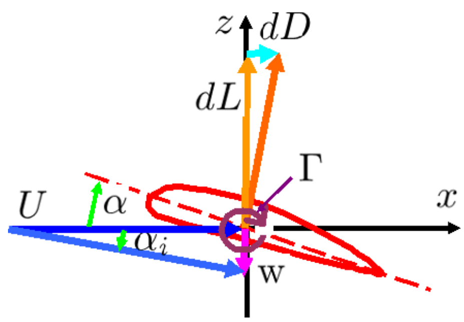


図 7.2.3: downwash と揚力・抵抗成分

翼の迎角：α は小さいとし、downwash：$w(y)$ も一様流速：U に比べ十分小さい。downwash：$w(y)$ による迎角の変化：α_i は下記となる。

$$\alpha_i = \frac{\mathrm{w}(y)}{U}$$

揚力は流向に直角に作用するので、ある断面の揚力の z 軸方向成分：dL と x 軸方法成分：dD は渦循環：$\Gamma(y)$ が与えられると下記となる。

$$dL = dy\cos(\alpha_i)\,\rho\,\Gamma(y)\,U, \quad dD = dy\sin(\alpha_i)\,\rho\,\Gamma(y)\,U$$

α_i が小さいとして、$\alpha_i \to w(y)$ に置き換えると、

$$dL = dy\,\rho\,\Gamma(y)\,U, \quad dD = dy\,\rho\,\Gamma(y)\,\mathrm{w}(y) \tag{7.2.18}$$

上式を翼の長さ:y 軸方向に積分し、翼の揚力:L、抵抗:D は、

$$L = \rho\int_{-B}^{B}\Gamma(y)\,dy\,U, \quad D = \rho\int_{-B}^{B}\Gamma(y)\,\mathrm{w}(y)\,dy \tag{7.2.19}$$

η で後方へ流出する渦による翼上 y における downwash：$dw(y)$ は、(7.2.17) 式の 1/2 となり、

$$\mathrm{dw}(y) = -\frac{d\,\eta\left(\frac{d}{d\,\eta}\Gamma(\eta)\right)}{4\,\pi\,(\eta-y)}$$

翼上 y における downwash：$w(y)$ は、上式を翼の長さ：y 軸方向に積分し、

$$\mathrm{w}(y) = -\frac{1}{4\,\pi}\int_{-B}^{B}\frac{\frac{d}{d\,\eta}\Gamma(\eta)}{\eta-y}d\eta \tag{7.2.20}$$

```
Y1:y=B*cos(\theta);
Y2:\eta=B*cos(t);
DY1:'diff(y,\theta,1)=diff(rhs(Y1),
 \theta,1);
NGY1:\Gamma[n]*sin(n*\theta);
GY1:\Gamma(\theta)=sum(NGY1,n,1,inf);
DGY1:'diff(lhs(GY1),y,1)*d*y=diff(
 rhs(GY1),\theta,1)*d*\theta;
DGY2:subst([y=\eta,\theta=t],DGY1);
W3:w(\theta)=1/(4*%pi)*'integrate(
 rhs(DGY2)/d/t/(B*cos(t)-
 B*cos(\theta)),t,0,%pi);
CSN0:'integrate(cos(n*t)/(cos(t)
 -cos(\theta)),t,0,%pi)=
 %pi*sin(n*\theta)/sin(\theta);
W4:w(\theta)=1/4/B*sum(\Gamma[n]*n
 *sin(n*\theta),n,1,inf)/sin(\theta);
L2:L=\rho*U*'integrate(sum((NGY1),n,1,inf)
 *rhs(DY1)*(-1),\theta,0,%pi);
L3:L=sum(\rho*U*'integrate(NGY1*rhs(DY1)
 *(-1),\theta,0,%pi),n,1,inf);
subst([inf=5],%);
ev(%,sum);
L4:ev(%,integrate);
```

```
W41:subst([n=m],W4);
D2:D=\rho*'integrate(sum((NGY1),n,1,inf)
 *rhs(W41)*rhs(DY1)*(-1),\theta,0,%pi);
subst([inf=5],%);
ev(%,sum);
ev(%,integrate);
D3:D=\rho/8*%pi*sum(n*\Gamma[n]^2,n,1,inf);
```

y 座標を下記の θ に変換する、

$$y=\cos(\theta)\ B,\quad \frac{d}{d\,\theta}\,y=-\sin(\theta)\ B \tag{7.2.21}$$

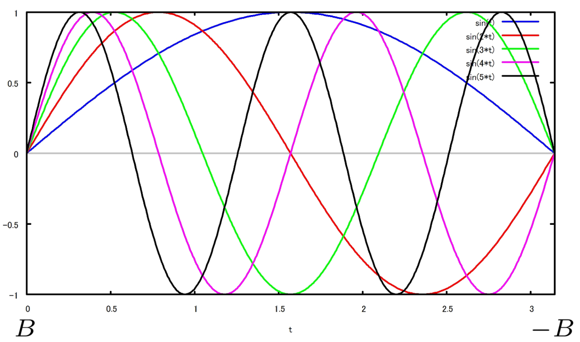


図 7.2.4: $sin(n\theta)$

翼の y 軸方向の分布を (7.2.21) 式で θ に置き換え、下記で表現する。この関数を上図に示す。ここで、翼端で常に Γ が零となるようになっている。

$$\Gamma(\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}\Gamma_n\sin(n\,\theta) \tag{7.2.22}$$

上式を θ で微分すると、

$$\frac{d}{d\,\theta}\,\Gamma_n(\theta)=n\,\Gamma_n\cos(n\,\theta)$$

$\frac{d}{d\,\eta}\,\Gamma(\eta)$ は下記となり、

$$d\,\eta\left(\frac{d}{d\,\eta}\,\Gamma(\eta)\right)=d\,t\sum_{n=1}^{\infty}n\,\Gamma_n\cos(n\,t)$$

(7.2.20) 式に上式および (7.2.22) 式の関係式を代入し、downwash : $w(y)$ は下記となる。ここで積分範囲 $-B\rightarrow B$ が $\pi\rightarrow 0$ となるので、これを考慮する。

$$\mathrm{w}(\theta)=\frac{1}{4\,\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sum_{n=1}^{\infty}n\,\Gamma_n\cos(n\,t)}{\cos(t)\ B-\cos(\theta)\ B}dt \tag{7.2.23}$$

次式の積分公式から [1]、

$$\int_0^{\pi}\frac{\cos(n\,t)}{\cos(t)-\cos(\theta)}dt=\frac{\pi\sin(n\,\theta)}{\sin(\theta)}$$

上記、公式から (7.2.23) 式は、

$$\mathrm{w}(\theta)=\frac{\sum_{n=1}^{\infty}n\,\Gamma_n\sin(n\,\theta)}{4\sin(\theta)\ B} \tag{7.2.24}$$

[1]森口　繁一、宇田川　久、一松　信 : 岩波数学公式 1　微分積分・平面曲線、岩波書店　2003 [32)]　P.248

揚力 : L は、(7.2.19) 式に渦分布 : (7.2.22) 式を代入し、(7.2.21) 式の関係から、

$$\begin{aligned}
L=&\rho\int_0^{\pi}\sin(\theta)\sum_{n=1}^{\infty}\Gamma_n\sin(n\,\theta)\,d\theta\,B\,U\\
=&\rho\left(\sum_{n=1}^{\infty}\Gamma_n\int_0^{\pi}\sin(\theta)\ \sin(n\,\theta)\,d\theta\right)\ B\,U\\
=&\Gamma_5\,\rho\int_0^{\pi}\sin(\theta)\ \sin(5\,\theta)\,d\theta\,B\,U\\
&+\Gamma_4\,\rho\int_0^{\pi}\sin(\theta)\ \sin(4\,\theta)\,d\theta\,B\,U\\
&+\Gamma_3\,\rho\int_0^{\pi}\sin(\theta)\ \sin(3\,\theta)\,d\theta\,B\,U\\
&+\Gamma_2\,\rho\int_0^{\pi}\sin(\theta)\ \sin(2\,\theta)\,d\theta\,B\,U\\
&+\Gamma_1\,\rho\int_0^{\pi}\sin(\theta)^2 d\theta\,B\,U+\ldots\\
=&\frac{\pi\,\Gamma_1\,\rho\,B\,U}{2}
\end{aligned} \tag{7.2.25}$$

抵抗：D は、(7.2.19) 式に渦分布：(7.2.22) 式、downwash：$w(\theta)$：(7.2.24) 式を代入し、(7.2.21) 式の関係から、

$$\begin{aligned}
D =& -\rho \int_0^{\pi} \frac{\left(\sum_{m=1}^{\infty} m\,\Gamma_m \sin(m\,\theta)\right)}{4\,sin(\theta)\,B} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \Gamma_n \sin(n\,\theta)\right) (-B\,sin(\theta))\,d\theta \\
=& \frac{\rho}{4} \int_0^{\pi} \left(\sum_{m=1}^{\infty} m\,\Gamma_m \sin(m\,\theta)\right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \Gamma_n \sin(n\,\theta)\right) d\theta \\
=& \frac{\rho}{4} \int_0^{\pi} \left(\cdots \Gamma_5 \sin(5\,\theta) + \Gamma_4 \sin(4\,\theta) + \Gamma_3 \sin(3\,\theta) + \Gamma_2 \sin(2\,\theta) + \Gamma_1 \sin(\theta)\right) \\
& \quad \times \left(\cdots 5\,\Gamma_5 \sin(5\,\theta) + 4\,\Gamma_4 \sin(4\,\theta) + 3\,\Gamma_3 \sin(3\,\theta) + 2\,\Gamma_2 \sin(2\,\theta) + \Gamma_1 \sin(\theta)\right) d\theta \\
=& \frac{\left(\cdots 5\,\pi\,\Gamma_5^2 + 4\,\pi\,\Gamma_4^2 + 3\,\pi\,\Gamma_3^2 + 2\,\pi\,\Gamma_2^2 + \pi\,\Gamma_1^2\right)\rho}{8}
\end{aligned}$$

以上から、

$$D = \frac{\pi\,\rho}{8} \left(\sum_{n=1}^{\infty} n\,\Gamma_n^2\right) \tag{7.2.26}$$

```
L41:subst([n=1],L4);
D41:D=\rho/4*%pi/2*(1*\Gamma[1]^2);
GY2:\Gamma=\Gamma[1]*sin(\theta);
GY3:subst([sin(\theta)=sqrt(B^2-y^2)/B],%);
W5:w=\Gamma[1]/4/B;
CL1:C[L]=rhs(L41)/(1/2*\rho*U^2*S);
CD1:C[D]=rhs(D41)/(1/2*\rho*U^2*S);
CM1:C[m]=S/2/B;
A1:A[cm]=2*B/C[m];
A2:subst([CM1],A1);
S2:solve(A2,S)[1];
solve(CL1,\Gamma[1])[1];
subst([%,S2],CD1);
```

抵抗が最小となるには、(7.2.26) 式で $n = 2 \to \infty$ の $\Gamma_n = 0$ の時である。このことから、最小抵抗の揚力と抵抗は、

$$L = \frac{\pi\,\Gamma_1\,\rho\,B\,U}{2}, \quad D = \frac{\pi\,\Gamma_1^2\,\rho}{8} \tag{7.2.27}$$

このときの渦分布は、

$$\Gamma = \Gamma_1 \sin(\theta)$$

から

$$\Gamma = \frac{\Gamma_1\,\sqrt{B^2 - y^2}}{B}$$

となり、楕円分布となる。また、downwash：w は下記となり、一定値となる。

$$w = \frac{\Gamma_1}{4\,B}$$

揚力、抵抗を翼面積：S で無次元化すると、

$$C_L = \frac{\pi\,\Gamma_1\,B}{S\,U}, \quad C_D = \frac{\pi\,\Gamma_1^2}{4\,S\,U^2}$$

平均コード長さ：C_m、平均コード長さを使った翼のアスペクト比 A_{cm} は下記となる。

$$C_m = \frac{S}{2\,B}, \quad A_{cm} = \frac{2\,B}{C_m} = \frac{4\,B^2}{S}$$

下記の関係式から、

$$S = \frac{4\,B^2}{A_{cm}}, \quad \Gamma_1 = \frac{C_L\,S\,U}{\pi\,B}$$

以上から、抵抗の無次元化は下記となる。

$$C_D = \frac{C_L^2}{\pi\,A_{cm}} \tag{7.2.28}$$

上記から、抵抗を小さくするには、翼のアスペクト比を大きくした方がよい。

7.2.3　揚力面理論の定式化

三次元の翼で厚さが薄く、反りも少ないものとする。この三次元翼の平面要素に渦度を分布させる揚力面理論の基礎方程式を導く [1]。下図に示すように翼型に沿って x 軸方向の渦度：κ_a、y 軸方向の渦度：κ_b を座標 (a,b) に分布させる。渦度の正方向はそれぞれの軸の右ねじ方向とする。また、翼形状を (x,y,z_a) で表し、翼のコード長さ：$2A$、翼のスパン：$2B$、流速は x 軸方向に U、迎角：α とする。

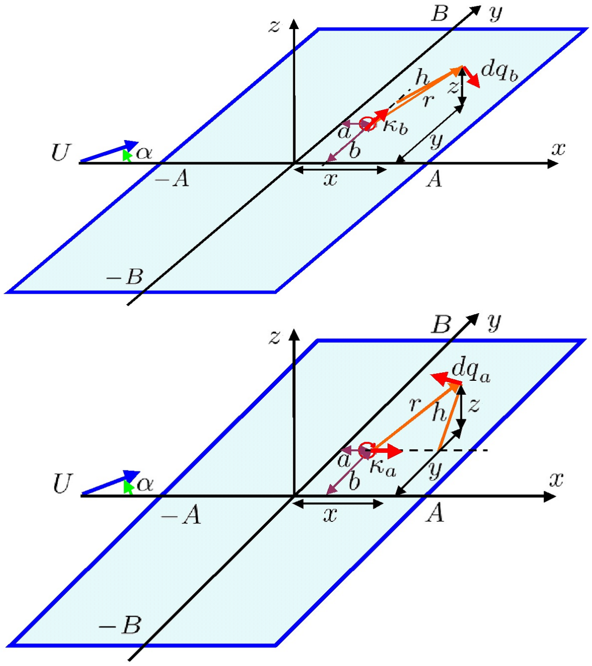


図 7.2.5: 渦度：κ_a、渦度：κ_b による誘導速度

```
kill(all);
assume(B>0);
assume(A>0);
u(x,y,+\epsilon)=+\kappa[b](x,y)/2;
v(x,y,+\epsilon)=-\kappa[a](x,y)/2;
'diff(v(x,y),x,1)-'diff(u(x,y),y,1)=0;
KC1:'diff(\kappa[a](x,y),x,1)+'diff(
 \kappa[b](x,y),y,1)=0;
subst([x=a,y=b],%);
KC2:%-first(lhs(%));
DQB1:dq[b]=sqrt((x-a)^2+z^2)*
 \kappa[b](a,b)*db/(4*%pi*(((x-a)^2
 +(y-b)^2+z^2)^(3/2)));
DWB1:dw[b]=-dq[b]*(x-a)/sqrt((x-a)^2+z^2);
DWB11:subst([DQB1],DWB1);
```

[1] Raymond L. Bisplinghoff, Holt Ashley, Robert L. Halfman, Aeroelasticity [22)] 5-5 Finite wings in steady motion flow P.221 を主に参考にした

```
DQA1:dq[a]=sqrt((y-b)^2+z^2)*
 \kappa[a](a,b)*da/(4*%pi*(((x-a)^2
 +(y-b)^2+z^2)^(3/2)));
DWA1:dw[a]=dq[a]*(y-b)/sqrt((y-b)^2+z^2);
DWA11:subst([DQA1],DWA1);
```

渦近傍の流速は (7.1.83) 式から、

$$\mathrm{u}\left(x,y,\epsilon\right)=\frac{\kappa_b\left(x,y\right)}{2}$$

$$\mathrm{v}\left(x,y,\epsilon\right)=-\frac{\kappa_a\left(x,y\right)}{2}$$

「8.1.4 渦度方程式 (x-y-z 座標系)」の (8.1.27) 式から z 軸方向の渦度：ω_z は理想流体であるから零となり、

$$\omega_z=\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{v}\left(x,y\right)-\frac{d}{d\,y}\,\mathrm{u}\left(x,y\right)=0$$

上式から下記の関係式が得られる。

$$\begin{aligned}&\frac{d}{d\,y}\,\kappa_b\left(x,y\right)+\frac{d}{d\,x}\,\kappa_a\left(x,y\right)=0\\&\frac{d}{d\,a}\,\kappa_a\left(a,b\right)=-\frac{d}{d\,b}\,\kappa_b\left(a,b\right)\end{aligned}\tag{7.2.29}$$

点：(x,y,z) における $\kappa_b\left(a,b\right)$ による誘導速度：dq_b は (7.2.16) 式から、

$$dq_b=\frac{\kappa_b\left(a,b\right)\,db\,\sqrt{z^2+\left(x-a\right)^2}}{4\,\pi\,\left(z^2+\left(y-b\right)^2+\left(x-a\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

この z 軸方向の速度：dw_b は、

$$\begin{aligned}dw_b&=-\frac{dq_b\,\left(x-a\right)}{\sqrt{z^2+\left(x-a\right)^2}}\\&=-\frac{\kappa_b\left(a,b\right)\,db\,\left(x-a\right)}{4\,\pi\,\left(z^2+\left(y-b\right)^2+\left(x-a\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}\tag{7.2.30}$$

点：(x,y,z) における $\kappa_a\left(a,b\right)$ による誘導速度：dq_a は (7.2.16) 式から、

$$dq_a=\frac{\kappa_a\left(a,b\right)\,da\,\sqrt{z^2+\left(y-b\right)^2}}{4\,\pi\,\left(z^2+\left(y-b\right)^2+\left(x-a\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

この z 軸方向の速度：dw_a は、

$$\begin{aligned}dw_a&=\frac{dq_a\,\left(y-b\right)}{\sqrt{z^2+\left(y-b\right)^2}}\\&=\frac{\kappa_a\left(a,b\right)\,da\,\left(y-b\right)}{4\,\pi\,\left(z^2+\left(y-b\right)^2+\left(x-a\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}\tag{7.2.31}$$

翼面上の渦及び翼から後方に流出する渦による翼面上：$(x,y,0)$ における z 軸方向の誘導速度は、$\kappa_b(a,b)$ によるものを $w_b(x,y,0)$、$\kappa_a(a,b)$ によるものを $w_{a1}(x,y,0)$、$\kappa_a(A,b)$ が後方に流出した渦によるものを $w_{a2}(x,y,0)$ とする。

```
DWB10:subst([z=0],DWB11);
WB1:w[b](x,y,0)='integrate('integrate(
 rhs(DWB10)/db,a,-A,A),b,-B,B);
assume(x-a>0);
IB1:rhs(DWB10)/db;
IB11:-\kappa[b](a,b);
IB11D:-'diff(\kappa[b](a,b),b,1);
IB12:IB1/IB11;
'integrate(IB12,b);
ev(%,integrate);
factor(%);
IB12I:-(y-b)/(4*%pi*(x-a)*sqrt((y-b)^2
 +(x-a)^2));
IB11*IB12I;
subst([\kappa[b](a,b)=\kappa[b](a,B),b-y=
 B-y,y-b=y-B],%)-subst([\kappa[b](a,b)=
 \kappa[b](a,-B),b-y=-B-y,y-b=y+B],%);
'integrate(%,a,-A,A);
WB11:w[b](x,y,0)=-'integrate('integrate(
 IB11D*IB12I,a,-A,A),b,-B,B);
```

$w_b(x,y,0)$ は (7.2.30) 式で $z=0$ とし、これを積分することで得られる。さらに、部分積分し、翼左右端部では $\kappa_b(a,-B)=0, \kappa_b(a,B)=0$ であるから、これを代入し、

$$
\begin{aligned}
w_b(x,y,0) =& -\frac{1}{4\pi}\int_{-B}^{B}\int_{-A}^{A}\frac{\kappa_b(a,b)\,(x-a)}{\left((y-b)^2+(x-a)^2\right)^{\frac{3}{2}}}dadb \\
=& \int_{-A}^{A}\frac{\kappa_b(a,-B)\,(-B-y)}{4\pi\,(x-a)\,\sqrt{(B+y)^2+(x-a)^2}}-\frac{\kappa_b(a,B)\,(B-y)}{4\pi\,(x-a)\,\sqrt{(y-B)^2+(x-a)^2}}da \\
&+\frac{1}{4\pi}\int_{-B}^{B}(b-y)\int_{-A}^{A}\frac{\frac{d}{d\,b}\kappa_b(a,b)}{(x-a)\,\sqrt{(y-b)^2+(x-a)^2}}dadb \\
=& \frac{1}{4\pi}\int_{-B}^{B}(b-y)\int_{-A}^{A}\frac{\frac{d}{d\,b}\kappa_b(a,b)}{(x-a)\,\sqrt{(y-b)^2+(x-a)^2}}dadb
\end{aligned}
\tag{7.2.32}
$$

```
DWA10:subst([z=0],DWA11);
WA1:w[a1](x,y,0)='integrate('integrate(
 rhs(DWA10)/da,b,-B,B),a,-A,A);
IA1:rhs(DWA10)/da;
IA11:\kappa[a](a,b);
IA11D:'diff(\kappa[a](a,b),a,1);
IA12:IA1/IA11;
assume(y-b>0);
'integrate(IA12,a);
ev(%,integrate);
factor(%);
IA12I:-(x-a)/(4*%pi*(y-b)*sqrt((y-b)^2
 +(x-a)^2));
IA11*IA12I;
subst([\kappa[a](a,b)=\kappa[a](A,b),a-x=
 A-x,x-a=x-A],%)-subst([\kappa[a](a,b)=
 \kappa[a](-A,b),a-x=-A-x,x-a=x+A],%);
'integrate(%,b,-B,B);
w[a1](x,y,0)=%-'integrate('integrate(
 IA11D*IA12I,b,-B,B),a,-A,A);
WA11:subst([\kappa[a](-A,b)=0],%);
```

$w_{a1}(x,y,0)$ は (7.2.31) 式で $z=0$ とし、これを積分することで得らる。さらに、部分積分し、翼前端部では $\kappa_a(-A,b)=0$、翼後端部では $\kappa_a(A,b)\neq 0$ であるから、

$$
\begin{aligned}
w_{a1}(x,y,0) =& \frac{1}{4\pi}\int_{-A}^{A}\int_{-B}^{B}\frac{\kappa_a(a,b)\,(y-b)}{\left((y-b)^2+(x-a)^2\right)^{\frac{3}{2}}}dbda \\
=& \int_{-B}^{B}\frac{(A-x)\,\kappa_a(A,b)}{4\pi\,(y-b)\,\sqrt{(x-A)^2+(y-b)^2}}-\frac{(-A-x)\,\kappa_a(-A,b)}{4\pi\,(y-b)\,\sqrt{(A+x)^2+(y-b)^2}}db \\
&-\frac{1}{4\pi}\int_{-A}^{A}(a-x)\int_{-B}^{B}\frac{\frac{d}{d\,a}\kappa_a(a,b)}{(y-b)\,\sqrt{(y-b)^2+(x-a)^2}}dbda \\
=& \frac{(A-x)}{4\pi}\int_{-B}^{B}\frac{\kappa_a(A,b)}{(y-b)\,\sqrt{(x-A)^2+(y-b)^2}}db \\
&-\frac{1}{4\pi}\int_{-A}^{A}(a-x)\int_{-B}^{B}\frac{\frac{d}{d\,a}\kappa_a(a,b)}{(y-b)\,\sqrt{(y-b)^2+(x-a)^2}}dbda
\end{aligned}
\tag{7.2.33}
$$

```
DWA20:subst([z=0,\kappa[a](a,b)=
 \kappa[a](A,b)],DWA11);
WA2:w[a2](x,y,0)='integrate('integrate(
 rhs(DWA20)/da,a,A,inf),b,-B,B);
DIA2:rhs(DWA20)/da/\kappa[a](A,b);
'integrate(DIA2,a);
ev(%,integrate);
factor(%);
IA2:-(x-a)/(4*%pi*(y-b)*sqrt((y-b)^2
 +(x-a)^2));
limit(IA2,a,inf);
IA21:factor(%);
IA22:subst([a=A],IA2);
IA20:IA21-IA22;
WA21:dw[a2](x,y,0)=\kappa[a](A,b)*IA20;
WA211:dw[a21](x,y,0)=\kappa[a](A,b)
 *first(IA20);
```

```
WA212:dw[a22](x,y,0)=\kappa[a](A,b)
 *last(IA20);
'integrate('diff(\kappa[a](a,b),a,1),a,
 -A,A)=\kappa[a](A,b)-\kappa[a](-A,b);
rhs(%)=lhs(%);
subst([\kappa[a](-A,b)=0],%);
subst([KC2],%);
WA22:subst([%],WA211);
lhs(WA22)=-'diff(\Gamma(b),b,1)/4/%pi/
 (y-b);
WA231:w[a21](x,y,0)='integrate(rhs(%),b,
 -B,B);
WA232:w[a22](x,y,0)='integrate(
 rhs(WA212),b,-B,B);
```

翼の後端から x 軸方向に流出した $\kappa_a(A,b)$ による点：(x,y,0) における誘導速度：$w_{a2}(x,y,0)$ は (7.2.31) 式で $z=0$ とし、a の積分を実施し、

$$
\begin{aligned}
w_{a2}(x,y,0) =& \frac{1}{4\pi}\int_{-B}^{B}(y-b)\int_{A}^{\infty}\frac{\kappa_a(A,b)}{\left((y-b)^2+(x-a)^2\right)^{\frac{3}{2}}}dadb \\
=& \int_{-B}^{B}\left(\frac{1}{4\pi\,(y-b)}-\frac{A-x}{4\pi\,(y-b)\,\sqrt{(x-A)^2+(y-b)^2}}\right)\kappa_a(A,b)\,db \\
=& \int_{-B}^{B}\frac{1}{4\pi\,(y-b)}\kappa_a(A,b)\,db-\int_{-B}^{B}\frac{A-x}{4\pi\,(y-b)\,\sqrt{(x-A)^2+(y-b)^2}}\kappa_a(A,b)\,db
\end{aligned}
\tag{7.2.34}
$$

上式の第一項：$w_{a21}(x,y,0)$、第二項：$w_{a22}(x,y,0)$ とすると、

$$
w_{a21}(x,y,0) = \int_{-B}^{B}\frac{1}{4\pi\,(y-b)}\kappa_a(A,b)\,db \tag{7.2.35}
$$

$$
w_{a22}(x,y,0) = -\frac{(A-x)}{4\pi}\int_{-B}^{B}\frac{\kappa_a(A,b)}{(y-b)\,\sqrt{(x-A)^2+(y-b)^2}}db \tag{7.2.36}
$$

ところで、

$$\int_{-A}^{A}\frac{d}{d\,a}\,\kappa_a\left(a,b\right)da=\kappa_a\left(A,b\right)-\kappa_a\left(-A,b\right)$$

翼の前縁で $\kappa_a\left(-A,b\right)=0$ で、(7.2.29) 式から、

$$\begin{aligned}\kappa_a\left(A,b\right)&=\int_{-A}^{A}\frac{d}{d\,a}\,\kappa_a\left(a,b\right)da\\&=-\int_{-A}^{A}\frac{d}{d\,b}\,\kappa_b\left(a,b\right)da\end{aligned}$$

また、$\Gamma\left(b\right)$ として下記とすると、

$$\Gamma\left(b\right)=\int_{-A}^{A}\kappa_b\left(a,b\right)da$$

$$\frac{d}{d\,b}\,\Gamma\left(b\right)=\int_{-A}^{A}\frac{d}{d\,b}\,\kappa_b\left(a,b\right)da$$

(7.2.35) 式に上記の関係式を代入すると、

$$\begin{aligned}w_{a21}\left(x,y,0\right)&=\int_{-B}^{B}\frac{1}{4\,\pi\,\left(y-b\right)}\,\kappa_a\left(A,b\right)db\\&=-\int_{-B}^{B}\frac{1}{4\,\pi\,\left(y-b\right)}\,\int_{-A}^{A}\frac{d}{d\,b}\,\kappa_b\left(a,b\right)dadb\\&=-\frac{1}{4\,\pi}\int_{-B}^{B}\frac{\frac{d}{d\,b}\,\Gamma\left(b\right)}{y-b}db\end{aligned}\tag{7.2.37}$$

```
WAB11:WB11+WA11+WA232;
subst([KC2],rhs(%));
-(x-a)*'diff(kappa[b](a,b),b,1)/((y-b)*
 sqrt((y-b)^2+(x-a)^2))/4/%pi
-(y-b)*'diff(kappa[b](a,b),b,1)/((x-a)*
 sqrt((y-b)^2+(x-a)^2))/4/%pi;
factor(%);
-(('diff(kappa[b](a,b),b,1))*sqrt((y-b)^2
 +(x-a)^2))/(4*%pi*(x-a)*(y-b));
WAB12:lhs(WAB11)='integrate(
 'integrate(%,b,-B,B),a,-A,A);
W1:w(x,y,0)=rhs(WAB12)+
 'integrate(rhs(WA22),b,-B,B);
W2:lhs(%)=rhs(WAB12)+rhs(WA231);
```

以上から、(7.2.32) 式、(7.2.33) 式、(7.2.36) 式、(7.2.37) 式の和から、$\mathrm{w}\left(x,y,0\right)$ を求めると、

$$\begin{aligned}\mathrm{w}\left(x,y,0\right)=&\frac{1}{4\,\pi}\int_{-B}^{B}\left(b-y\right)\,\int_{-A}^{A}\frac{\frac{d}{d\,b}\,\kappa_b\left(a,b\right)}{\left(x-a\right)\,\sqrt{\left(y-b\right)^2+\left(x-a\right)^2}}dadb\\&-\frac{1}{4\,\pi}\int_{-A}^{A}\left(a-x\right)\,\int_{-B}^{B}\frac{\frac{d}{d\,a}\,\kappa_a\left(a,b\right)}{\left(y-b\right)\,\sqrt{\left(y-b\right)^2+\left(x-a\right)^2}}dbda-\frac{1}{4\,\pi}\int_{-B}^{B}\frac{\frac{d}{d\,b}\,\Gamma\left(b\right)}{y-b}db\\=&-\frac{1}{4\,\pi}\int_{-A}^{A}\frac{\int_{-B}^{B}\frac{\left(\frac{d}{d\,b}\,\kappa_b\left(a,b\right)\right)\sqrt{\left(y-b\right)^2+\left(x-a\right)^2}}{y-b}db}{x-a}da-\frac{1}{4\,\pi}\int_{-B}^{B}\frac{\frac{d}{d\,b}\,\Gamma\left(b\right)}{y-b}db\end{aligned}\tag{7.2.38}$$

境界条件から、$\mathrm{w}\left(x,y,0\right)=\left(\frac{d}{d\,x}\,z_a\right)\,U$ を上式に代入すると下記となる。右辺第二項は「7.2.2 揚力線理論 (フーリエ変換)」の (7.2.20) 式に対応している。

$$\left(\frac{d}{d\,x}\,z_a\right)\,U=-\frac{1}{4\,\pi}\int_{-A}^{A}\int_{-B}^{B}\frac{\frac{d}{d\,b}\,\kappa_b\left(a,b\right)\,\sqrt{\left(y-b\right)^2+\left(x-a\right)^2}}{\left(x-a\right)\left(y-b\right)}dbda-\frac{1}{4\,\pi}\int_{-B}^{B}\frac{\frac{d}{d\,b}\,\Gamma\left(b\right)}{y-b}db\tag{7.2.39}$$

7.2.4　揚力線理論 (プラントルの積分方程式)

三次元の翼で厚さが薄く、反りも少なく、高アスペクト翼の場合を検討する [1]。図 7.2.5 の上図に示すように翼型に沿って y 軸方向の渦度：κ_b を座標 (a,b) に分布させる。渦度の正方向は軸の右ねじ方向とする。また、平板翼とし、翼のコード長さ:$2A$、翼のスパン:$2B$、流速は x 軸方向に U、迎角：α とする。ここで三次元翼で翼のスパン：$2B$ がコード長さ：$2A$ に比べ十分大きい：$B>>A$：高アスペクトとする。本節の下記のプログラムは前節に引き続き実行する。

```
UZ1:U*'diff(z[a],x,1)=rhs(W2);
forget(y-b>0);
WAB2:rhs(WAB12);
WAB21:'integrate((('diff(\kappa[b](a,b),
 b,1))*sqrt((y-b)^2+(x-a)^2))/(y-b),b,
 -B,B);
WAB21=subst([(y-b)^2+(x-a)^2=(y-b)^2],%);
```

```
lhs(%)='integrate((('diff(\kappa[b](a,b),
 b,1))*abs(y-b))/(y-b),b,-B,y)
 +'integrate((('diff(\kappa[b](a,b),b,1))
 *abs(y-b))/(y-b),b,y,B);
lhs(%)='integrate('diff(\kappa[b](a,b),
 b,1),b,-B,y)-'integrate(
 'diff(\kappa[b](a,b),b,1),b,y,B);
lhs(%)=(\kappa[b](a,y)-\kappa[b](a,-B))
 -(\kappa[b](a,B)-\kappa[b](a,y));
subst([\kappa[b](a,B)=0,\kappa[b](a,-B)
 =0],%);
WAB13:subst([%],WAB12);
UZ2:lhs(UZ1)=rhs(WAB13)+rhs(WA231);
```

前節の結果から渦度と境界条件の関係式：(7.2.39) 式は下記である。

$$\mathrm{w}\left(x,y,0\right)=\left(\frac{d}{d\,x}\,z_a\right)\,U=-\frac{1}{4\,\pi}\int_{-A}^{A}\int_{-B}^{B}\frac{\frac{d}{d\,b}\,\kappa_b\left(a,b\right)\,\sqrt{\left(y-b\right)^2+\left(x-a\right)^2}}{\left(x-a\right)\left(y-b\right)}dbda-\frac{1}{4\,\pi}\int_{-B}^{B}\frac{\frac{d}{d\,b}\,\Gamma\left(b\right)}{y-b}db \tag{7.2.40}$$

上式の右辺第一項の積分について、高アスペクト：$B>>A$ とすると $|y-b|>>|x-a|$ と仮定でき、$|x-a|$ の項を削除し、翼左右端で $\kappa_b\left(a,B\right)=0,\ \kappa_b\left(a,-B\right)=0$ とすると、

$$\begin{aligned}\int_{-B}^{B}\frac{\left(\frac{d}{d\,b}\,\kappa_b\left(a,b\right)\right)\,\sqrt{\left(y-b\right)^2+\left(x-a\right)^2}}{y-b}db&=\int_{-B}^{B}\frac{\left(\frac{d}{d\,b}\,\kappa_b\left(a,b\right)\right)\,\left|y-b\right|}{y-b}db\\&=\int_{-B}^{y}\frac{\left(\frac{d}{d\,b}\,\kappa_b\left(a,b\right)\right)\,\left|y-b\right|}{y-b}db+\int_{y}^{B}\frac{\left(\frac{d}{d\,b}\,\kappa_b\left(a,b\right)\right)\,\left|y-b\right|}{y-b}db\\&=\int_{-B}^{y}\frac{d}{d\,b}\,\kappa_b\left(a,b\right)db-\int_{y}^{B}\frac{d}{d\,b}\,\kappa_b\left(a,b\right)db\\&=-\kappa_b\left(a,B\right)-\kappa_b\left(a,-B\right)+2\,\kappa_b\left(a,y\right)=2\,\kappa_b\left(a,y\right)\end{aligned}$$

(7.2.40) 式に上式を代入すると、

$$\mathrm{w}\left(x,y,0\right)=\left(\frac{d}{d\,x}\,z_a\right)\,U=-\frac{1}{2\,\pi}\int_{-A}^{A}\frac{\kappa_b\left(a,y\right)}{x-a}da-\frac{1}{4\,\pi}\int_{-B}^{B}\frac{\frac{d}{d\,b}\,\Gamma\left(b\right)}{y-b}db \tag{7.2.41}$$

[1] Raymond L. Bisplinghoff, Holt Ashley, Robert L. Halfman, Aeroelasticity [22)] 5-5 Finite wings in steady motion flow (a)Lifting-line theory P.229 を主に参考にした

```
LKB1:\kappa[b](a,y)=sqrt(A-a)/sqrt(A+a)*K;
LG1:\Gamma(y)='integrate(lhs(%),a,-A,A);
subst([LKB1],%);
ev(%,integrate);
LG2:solve(%,K)[1];
WAB131:rhs(WAB13)=subst([LKB1],
 rhs(WAB13));
lhs(%)=changevar(rhs(%),a-A*c,c,a);
lhs(%)=subst([x=A*d],rhs(%));
factor(%);
lhs(%)=-('integrate((1-c)/(sqrt(1-c^2)*
 (d-c)),c,-1,1)*K)/(2*%pi);
lhs(%)=-('integrate((1)/(sqrt(1-c^2)*
 (d-c)),c,-1,1)*K)/(2*%pi)+-('integrate(
 (-c)/(sqrt(1-c^2)*(d-c)),c,-1,1)*K)
 /(2*%pi);
 lhs(%)=-1/2*K;
subst([LG2],%);
subst([%],UZ2);
```

```
subst(['diff(z[a],x,1)=-\alpha],%);
subst([A=C/2],%);
-%*C*%pi/2;
UZ4:expand(%);
```

「7.1.8 薄翼理論 (積分方程式)」から二次元平板翼の渦度分布：(7.1.90) 式を基に、コード方向の渦度分布を下記とする。

$$\kappa_b\,(a,y)=\frac{\sqrt{A-a}\,K}{\sqrt{A+a}} \tag{7.2.42}$$

上式をコード方向に積分すると、

$$\begin{aligned}\Gamma\,(y)=&\int_{-A}^{A}\kappa_b\,(a,y)\,da=\int_{-A}^{A}\frac{\sqrt{A-a}}{\sqrt{A+a}}da\,K\\=&\pi\,A\,K\end{aligned}$$

上式から、下記の関係式が得られる。

$$K=\frac{\Gamma\,(y)}{\pi\,A} \tag{7.2.43}$$

(7.2.41) 式の右辺第一項でコード方向の渦度分布が (7.2.42) 式になるとして、これを代入し、$x=A\,d,\,a=A\,c$ の変数変換を行い、「特異核を持つ積分方程式　11.7.2 二次元薄翼理論（有限ヒルベルト変 換）[1]」の有限ヒルベルト変換の結果を使い、(7.2.43) 式を代入すると、

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2\,\pi}\int_{-A}^{A}\frac{\kappa_b\,(a,y)}{x-a}da=&-\frac{1}{2\,\pi}\int_{-A}^{A}\frac{\sqrt{A-a}}{(x-a)\,\sqrt{A+a}}da\,K=-\frac{1}{2\,\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-c}}{\sqrt{c+1}\,(d-c)}dc\,K\\=&-\frac{1}{2\,\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1-c}{\sqrt{1-c^2}\,(d-c)}dc\,K\\=&\frac{1}{2\,\pi}\int_{-1}^{1}\frac{c}{\sqrt{1-c^2}\,(d-c)}dc\,K-\frac{1}{2\,\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-c^2}\,(d-c)}dc\,K=-\frac{K}{2}=-\frac{\Gamma\,(y)}{2\,\pi\,A}\end{aligned} \tag{7.2.44}$$

(7.2.41) 式に上式を代入し、翼として平板翼とすると $\frac{d}{d\,x}\,z_a=-\alpha$ となり、

$$\mathrm{w}\,(0,y,0)=-\alpha\,U=-\frac{\Gamma\,(y)}{2\,\pi\,A}-\frac{1}{4\,\pi}\int_{-B}^{B}\frac{\frac{d}{d\,b}\,\Gamma\,(b)}{y-b}db \tag{7.2.45}$$

上式に $A=\frac{C}{2}$ を代入し、翼のコード長さ：C で表すと、下記のプラントルの積分方程式が得られた。

$$\frac{\pi\,\alpha\,C\,U}{2}=\frac{1}{8}\int_{-B}^{B}\frac{\frac{d}{d\,b}\,\Gamma\,(b)}{y-b}db\,C+\frac{\Gamma\,(y)}{2} \tag{7.2.46}$$

[1]溝口純敏：Maxima を使った物理数学基礎演習ノート　　http://www9.plala.or.jp/prac-maxima/

```
B1:b=B*cos(\phi);
Y1:y=B*cos(\theta);
DB1:'diff(b,\phi,1)=diff(rhs(B1),\phi,1);
DGM1:'diff(\Gamma(b),b,1)='diff(\Gamma
 (\phi),\phi,1)/rhs(DB1);
UZ3L20:first(rhs(UZ4));
subst([DGM1],%);
changevar(%,lhs(B1)-rhs(B1),\phi,b);
subst([Y1],%);
UZ3L20=C*integrate(sin(\phi)/(cos(\phi)*B
 -cos(\theta)*B)*('diff(\Gamma(\phi),
 \phi,1))/sin(\phi),phi,0,%pi)/8;
UZ3L21:factor(%);
GP1:\Gamma(\phi)=U*B*sum(A[n]*sin(n*\phi)
 ,n,1,inf);
GP2:subst([\phi=\theta],GP1);
GP3:subst([n=m],%);
DGP1:'diff(\Gamma(\phi),\phi,1)=
 diff(rhs(GP1),\phi,1);
subst([DGP1],UZ3L21);
lhs(%)=-(sum('integrate(n*A[n]*cos(n*\phi)
 /(cos(\theta)-cos(\phi)),\phi,0,%pi),n,
 1,inf)*C*U)/8;
UZ3L22:subst(['integrate(cos(n*\phi)/
 (cos(\theta)-cos(\phi)),\phi,0,%pi)=
 -%pi*sin(n*\theta)/sin(\theta)],%);
subst([UZ3L22],UZ4);
UZ42:subst([\Gamma(y)/2=
 \Gamma(\theta)/2],%);
subst([GP2],UZ42);
%/(B*U/2);
UZ5:expand(%);
```

(7.2.46) 式を下記の変数変換を行う。

$$b=\cos(\phi)\ B,\quad y=\cos(\theta)\ B \tag{7.2.47}$$

上式から、

$$\frac{d}{d\,\phi}\,b=-\sin(\phi)\ B,\quad \frac{d}{d\,b}\,\Gamma(b)=-\frac{\frac{d}{d\,\phi}\,\Gamma(\phi)}{\sin(\phi)\ B}$$

上記の関係式から (7.2.46) 式の右辺第一項は、

$$\begin{aligned}&\frac{1}{8}\int_{-B}^{B}\frac{\frac{d}{d\,b}\,\Gamma(b)}{y-b}db\,C\\&\qquad=-\frac{1}{8\,B}\int_{0}^{\pi}\frac{\frac{d}{d\,\phi}\,\Gamma(\phi)}{\cos(\theta)-\cos(\phi)}d\phi\,C\end{aligned} \tag{7.2.48}$$

翼の左右端で $\Gamma=0$ であるから、Γ を下記のフーリエ級数で表す。

$$\Gamma(\phi)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(n\,\phi)\right)B\,U \tag{7.2.49}$$

上式から、

$$\frac{d}{d\,\phi}\,\Gamma(\phi)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}n\,A_n\cos(n\,\phi)\right)B\,U \tag{7.2.50}$$

(7.2.48) 式の右辺に (7.2.50) 式を代入し、積分と和の順序を変え、(7.1.58) 式の積分公式 [1] を適用すると、

$$\begin{aligned}&\frac{1}{8}\int_{-B}^{B}\frac{\frac{d}{d\,b}\,\Gamma(b)}{y-b}db\,C\\&\quad=-\frac{1}{8}\int_{0}^{\pi}\frac{\sum_{n=1}^{\infty}n\,A_n\cos(n\,\phi)}{\cos(\theta)-\cos(\phi)}d\phi\,C\,U\\&\quad=-\frac{1}{8}\left(\sum_{n=1}^{\infty}n\,A_n\int_{0}^{\pi}\frac{\cos(n\,\phi)}{\cos(\theta)-\cos(\phi)}d\phi\right)C\,U\\&\quad=\frac{\pi}{8\sin(\theta)}\left(\sum_{n=1}^{\infty}n\,A_n\sin(n\,\theta)\right)C\,U\end{aligned} \tag{7.2.51}$$

(7.2.46) 式に (7.2.49) 式、(7.2.51) 式を代入すると、

$$\begin{aligned}\frac{\pi\,\alpha\,C\,U}{2}=&\frac{\pi}{8\sin(\theta)}\left(\sum_{n=1}^{\infty}n\,A_n\sin(n\,\theta)\right)C\,U\\&+\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(n\,\theta)\right)B\,U\end{aligned}$$

上式を $B\,U$ で割ると、

$$\begin{aligned}\frac{\pi\,\alpha\,C}{B}=&\frac{\pi}{4\sin(\theta)\ B}\left(\sum_{n=1}^{\infty}n\,A_n\sin(n\,\theta)\right)C\\&+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(n\,\theta)\end{aligned} \tag{7.2.52}$$

[1]森口　繁一、宇田川　久、一松　信：岩波数学公式 1　微分積分・平面曲線、岩波書店　2003 [32)]　P.248

```
L1:L='integrate(\rho*U*\Gamma(y),y,-B,B);
changevar(%,lhs(Y1)-rhs(Y1),\theta,y);
subst([cos(theta)*B=\theta],%);
subst([GP2],%);
L=sum('integrate(sin(\theta)*A[n]*sin(n*
 \theta),\theta,0,%pi),n,1,inf)*\rho*B^2
 *U^2;
subst([inf=5],%);
ev(%,sum);
L2:ev(%,integrate);
L3:C[L]=rhs(%)/(1/2*\rho*U^2*S);
ACM1:A[R]=(2*B)^2/S;
ACM2:solve(%,S)[1];
L4:subst([ACM2],L3);
subst([inf=1],UZ5);
UZ51:ev(%,sum);
assume(sin(\theta)>0);
C=C[0]*sqrt(B^2-y^2)/B;
subst([y=B*cos(\theta)],%);
trigsimp(%);
subst([%],UZ51);
A11:solve(%,A[1])[1];
A12:num(rhs(A11))/2/C[0];
denom(rhs(A11))/2/C[0];
A13:expand(%);
A21:A[1]=A12/A13;
A[R]=(2*B)^2/(%pi/2*B*C[0]);
C00:solve(%,C[0])[1];
subst([A21,%],L4);
CL1:factor(%);
```

翼の揚力は次式で得られる。次式を (7.2.47) 式で変数変換し、(7.2.49) 式を代入すると、

$$\begin{aligned}L =&\rho \int_{-B}^{B}\Gamma(y)\,dy\,U\\ =&\rho \int_{0}^{\pi}\Gamma(\theta)\,\sin(\theta)\,d\theta\,B\,U\\ =&\rho \int_{0}^{\pi}\sin(\theta)\,\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(n\,\theta)\,d\theta\,B^2\,U^2\\ =&\rho\left(\sum_{n=1}^{\infty}A_n\int_{0}^{\pi}\sin(\theta)\,\sin(n\,\theta)\,d\theta\right)B^2\,U^2\\ =&\rho\left(\cdots+A_2\int_{0}^{\pi}\sin(\theta)\,\sin(2\,\theta)\,d\theta\right.\\ &\left.+A_1\int_{0}^{\pi}\sin(\theta)^2 d\theta\right)B^2\,U^2\\ =&\frac{\pi\,A_1\,\rho\,B^2\,U^2}{2}\end{aligned} \tag{7.2.53}$$

翼面積 : S として、上式の翼の揚力を $\frac{1}{2}\rho\,U^2\,S$ で無次元化すると、

$$C_L=\frac{\pi\,A_1\,B^2}{S}$$

翼のアスペクト比 : A_R の関係式は、

$$A_R=\frac{4\,B^2}{S},\quad S=\frac{4\,B^2}{A_R}$$

C_L を翼のアスペクト比 : A_R で表すと、

$$C_L=\frac{\pi\,A_1\,A_R}{4} \tag{7.2.54}$$

(7.2.53) 式の翼の揚力 : L が A_1 にのみ関係していることから渦分布 : Γ をフーリエ級数の初項 : A_1 のみで表すこととする。これは (7.2.47) 式の変換式から Γ が楕円分布となることを示している。このとき (7.2.52) 式は、

$$\frac{\pi\,\alpha\,C}{B}=\frac{\pi\,A_1\,C}{4\,B}+A_1\sin(\theta) \tag{7.2.55}$$

Γ が楕円分布とすると、翼のコード長さ : C も楕円分布と考えることができ、翼根部のコード長さ : C_0 とし、(7.2.47) 式で変数変換すると、

$$\begin{aligned}C =&\frac{C_0\sqrt{B^2-y^2}}{B}=\frac{C_0\sqrt{B^2-\cos(\theta)^2\,B^2}}{B}\\ =&C_0\sin(\theta)\end{aligned} \tag{7.2.56}$$

(7.2.55) 式に上式を代入すると、

$$\frac{\pi\,C_0\,\alpha\sin(\theta)}{B}=\frac{\pi\,C_0\,A_1\sin(\theta)}{4\,B}+A_1\sin(\theta)$$

上式から、A_1 を求めると、

$$A_1=\frac{2\,\pi\,\alpha}{\frac{2\,B}{C_0}+\frac{\pi}{2}}$$

また、アスペクト比 : A_R を C_0 を用いて表現すると、

$$A_R=\frac{8\,B}{\pi\,C_0},\quad C_0=\frac{8\,B}{\pi\,A_R}$$

(7.2.54) 式に上記の A_1, C_0 を代入すると次式となる。高アスペクト比の翼では、$A_R >> 2$ であるから次式は $2\,\pi\,\alpha$ となり「7.1.8 薄翼理論 (積分方程式)」の C_L : (7.1.91) 式と一致する。

$$C_L=\frac{2\,\pi\,\alpha\,A_R}{A_R+2}\approx 2\,\pi\,\alpha \tag{7.2.57}$$

```
D1:D=\rho*'integrate(\Gamma(y)*w(y),y,
 -B,B);
W1:w(y)=1/4/%pi*'integrate('diff(\Gamma(b)
 ,b,1)/(y-b),b,-B,B);
subst([UZ3L22*8/C],W1);
W2:subst([w(y)=w(cos(theta)*B)],%);
changevar(D1,lhs(Y1)-rhs(Y1),\theta,y);
subst([W2],%);
subst([cos(theta)*B=\theta],%);
subst([GP3],%);
subst([inf=1],%);
ev(%,sum);
ev(%,integrate);
C[D]=rhs(%)/(1/2*\rho*U^2*S);
subst([A21,ACM2,C00],%);
CD1:factor(%);
solve(CL1,\alpha)[1];
subst([%],CD1);
```

downwash : $\mathrm{w}(y)$ による抵抗 : D は「7.2.2 揚力線理論 (フーリエ変換)」、(7.2.19) 式から、

$$D=\rho\int_{-B}^{B}\Gamma(y)\ \mathrm{w}(y)\,dy \tag{7.2.58}$$

downwash : $\mathrm{w}(y)$ は (7.2.45) 式の第二項から次式となり (7.2.51) 式から、

$$\begin{aligned}\mathrm{w}(y)=&\frac{1}{4\pi}\int_{-B}^{B}\frac{\frac{d}{db}\Gamma(b)}{y-b}db\\=&\frac{1}{4\sin(\theta)}\left(\sum_{n=1}^{\infty}n\,A_n\sin(n\,\theta)\right)U\end{aligned} \tag{7.2.59}$$

(7.2.58) 式を (7.2.47) 式で変数変換し、(7.2.59) 式、(7.2.49) 式を代入すると、

$$\begin{aligned}D=&\frac{\rho}{4}\int_0^{\pi}\Gamma(\theta)\sum_{n=1}^{\infty}n\,A_n\sin(n\,\theta)\,d\theta\,B\,U\\=&\frac{\rho}{4}\int_0^{\pi}\left(\sum_{m=1}^{\infty}A_m\sin(m\,\theta)\right)\sum_{n=1}^{\infty}n\,A_n\sin(n\,\theta)\,d\theta\,B^2\,U^2\\=&\frac{\rho}{4}\int_0^{\pi}(\cdots+A_5\sin(5\,\theta)+A_4\sin(4\,\theta)+A_3\sin(3\,\theta)+A_2\sin(2\,\theta)+A_1\sin(\theta))\\&\quad\times\ (\cdots+5\,A_5\sin(5\,\theta)+4\,A_4\sin(4\,\theta)+3\,A_3\sin(3\,\theta)+2\,A_2\sin(2\,\theta)+A_1\sin(\theta))\,d\theta\,B^2\,U^2\\=&\frac{1}{8}\left(\cdots 5\,\pi\,A_5^2+4\,\pi\,A_4^2+3\,\pi\,A_3^2+2\,\pi\,A_2^2+\pi\,A_1^2\right)\,\rho\,B^2\,U^2\end{aligned} \tag{7.2.60}$$

抵抗が少ない渦分布 : Γ はそのフーリエ級数の初項 : A_1 のみのときで、上式は、

$$D=\frac{\pi\,A_1^2\,\rho\,B^2\,U^2}{8}$$

上式の翼の抗力を $\frac{1}{2}\rho\,U^2\,S$ で無次元化し、C_D を翼のアスペクト比 : A_R で表すと、

$$C_D=\frac{4\,\pi\,\alpha^2\,A_R}{(A_R+2)^2} \tag{7.2.61}$$

上式を C_L : (7.2.57) 式で表すと次式となる。

$$C_D=\frac{(C_L\,A_R+2\,C_L)^2}{\pi\,A_R\,(A_R+2)^2}=\frac{C_L^2}{\pi\,A_R}$$

7.2.5　翼が地面に及ぼす力

翼が地面に平行に一定速度：U で運動するとき、地面に作用する力について調べる。翼から出る渦の様子は前節の揚力線理論で表現できるとする。このとき、渦糸は下図に示すようにコ字型（馬蹄形）の形の渦糸が多数流出する。このうちの一つの渦糸について調査する。

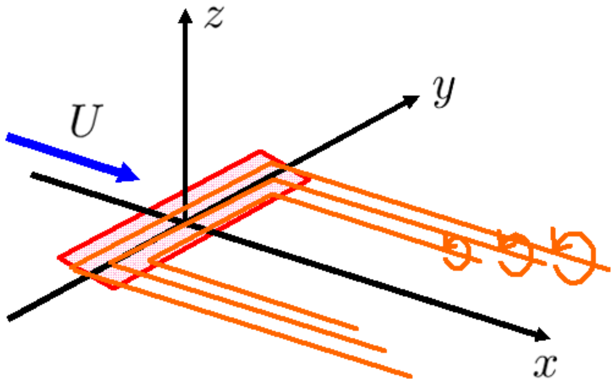


図 7.2.6: コ字型（馬蹄形）渦

```
kill(all);
/* 地面効果：揚力とは */
assume(H>0);
assume(HH>0);
P1:p+\rho/2*((U+u)^2+v^2+w^2)=p[inf]+\rho/2
  *U^2;
P2:-(P1-\rho/2*U^2-p);
P3:rhs(P2)=lhs(P2);
P4:dp=expand(rhs(P3));
P5:subst([u^2=0,v^2=0,w^2=0],%);
DS:matrix([0],[db],[0]);
R1:matrix([x],[y-b],[-H]);
R2:r=sqrt(R1.R1);
DV1:matrix([du],[dv],[dw]);
DV2:DV1=\Gamma/(4*%pi*rhs(R2)^3)*col(
 adjoint(transpose(addcol(DS,R1,matrix(
  [1],[1],[1])))),3);
DU1:lhs(DV2)[1][1]=rhs(DV2)[1][1];
DU2:u=integrate(rhs(DU1)/db,b,-B,B);
u=taylor(rhs(DU2),B,0,7);
subst([B^3=0,B^5=0,B^7=0],%);
DU3:factor(%);
DU4:u=rhs(DU3)*2;
P6:subst([DU4],P5);
P7:P='integrate('integrate(rhs(P6),x,minf,
  inf),y,minf,inf);
P8:ev(%,integrate);
```

渦による地面上の誘導速度を u,v,w とし、Bernoulli の定理：(2.8.4) 式から、

$$\frac{\rho\left((U+u)^2+w^2+v^2\right)}{2}+p=\frac{\rho\,U^2}{2}+p_{\infty}$$

地面に作用する力：dp は、$U>>u,v,w$ とすると、

$$\begin{aligned}p-p_{\infty}=dp=&\frac{\rho\,U^2}{2}-\frac{\rho\left((U+u)^2+w^2+v^2\right)}{2}\\&=-\rho\,u\,U-\frac{\rho\,w^2}{2}-\frac{\rho\,v^2}{2}-\frac{\rho\,u^2}{2}\\&\approx-\rho\,u\,U\end{aligned}\tag{7.2.62}$$

上式から、x 軸方向の渦糸の誘導速度を求める必要が

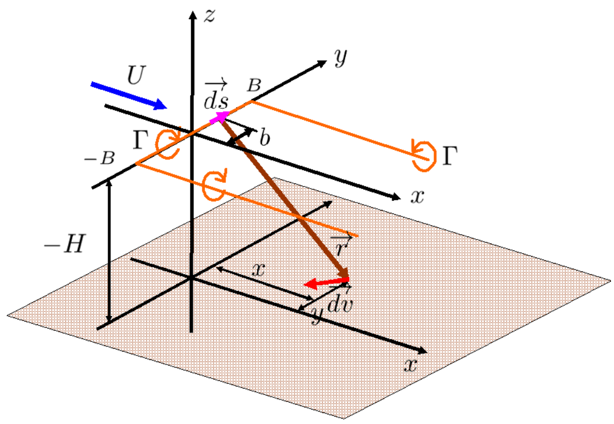


図 7.2.7: 地面における誘導速度

ある。x 軸方向の誘導速度は x 軸方向の渦糸では発生せず、y 軸方向の渦糸によるものである。渦の誘導速度は (7.2.15) 式から

$$\overrightarrow{dv}=\frac{\Gamma}{4\,\pi\,r^3}\overrightarrow{ds}\times\overrightarrow{r}$$

位置：$(x=0,y=b,z=0)$ における y 軸方向の要素渦糸：$\overrightarrow{ds}$ による渦糸より H 下方の位置：$(x,y,z=-H)$ における誘導速度は、要素渦糸から地面上の x,y へのベクトル：$\overrightarrow{r}$、地面上の x,y における誘導速度：$\overrightarrow{dv}$ とすると、

$$\overrightarrow{ds}=\begin{pmatrix}0\\db\\0\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{r}=\begin{pmatrix}x\\y-b\\-H\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{dv}=\begin{pmatrix}du\\dv\\dw\end{pmatrix}$$

$$r=\sqrt{H^2+(y-b)^2+x^2}$$

以上から、

$$\overrightarrow{dv}=\begin{pmatrix}du\\dv\\dw\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{db\,\Gamma\,H}{4\,\pi\left(H^2+(y-b)^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}\\0\\-\frac{db\,\Gamma\,x}{4\,\pi\left(H^2+(y-b)^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}\end{pmatrix}$$

x 軸方向の渦糸の誘導速度：du は、

$$du = -\frac{db\,\Gamma\,H}{4\,\pi\left(H^2+\left(y-b\right)^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

渦糸が y 軸上、$-B \to B$ まであるとして、上式を積分し、$H >> B$ とすると、y 軸方向の渦糸による地面上 x, y における x 軸方向の誘導速度は、

$$\begin{aligned}
u =& \int_{-B}^{B} -\frac{\Gamma\,H}{4\,\pi\left(H^2+\left(y-b\right)^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}db\\
=& -\frac{\Gamma\,H}{4\,\pi}\left(\frac{(B+y)\,\sqrt{H^2+B^2+2\,y\,B+y^2+x^2}}{H^4+\left(B^2+2\,y\,B+y^2+2\,x^2\right)\,H^2+x^2\,B^2+2\,x^2\,y\,B+x^2\,y^2+x^4}\right.\\
&\left.+\frac{(B-y)\,\sqrt{H^2+B^2-2\,y\,B+y^2+x^2}}{H^4+\left(B^2-2\,y\,B+y^2+2\,x^2\right)\,H^2+x^2\,B^2-2\,x^2\,y\,B+x^2\,y^2+x^4}\right)\\
\approx& -\frac{\Gamma\,B\,H}{2\,\pi\left(H^2+y^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned} \tag{7.2.63}$$

上式は地面より上方の渦糸による x 軸方向の誘導速度である。地面における境界条件：$w = 0$ を満足させる必要がある。このためには、鏡像位置に逆向きの渦糸を置けばよい。地面の境界条件を満足した x 軸方向の誘導速度は (7.2.63) 式を 2 倍すれば得られる。以上から、位置：(x, y) における地面に作用する力：dp は (7.2.62) 式に (7.2.63) 式 $\times 2$ を代入し、

$$dp = \frac{\Gamma\,\rho\,B\,H\,U}{\pi\left(H^2+y^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

上式を無限領域積分し、地面に作用する力：P は、

$$\begin{aligned}
P =& \frac{\Gamma\,\rho\,B\,H\,U}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\left(H^2+y^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}dxdy\\
=& 2\,\Gamma\,\rho\,B\,U
\end{aligned} \tag{7.2.64}$$

上記の結果は、(7.2.19) 式から $-B \to B$ に渦循環強さ：Γ を置いたときの揚力に一致している。このことは翼で発生した揚力は地面全体で支えていることを示している。上記は一つの渦糸について示したが、揚力線理論で表現するような多くの渦糸の集合についても、線形の関係にあるので、全く同じことが言える。

7.3 プロペラ

7.3.1 運動量理論

(1) 軸方向運動量理論

プロペラによる軸方向の回転流はないものとして、軸方向の運動量理論から、プロペラディスク面積:A、プロペラの前進速度：V のプロペラ効率を求める。

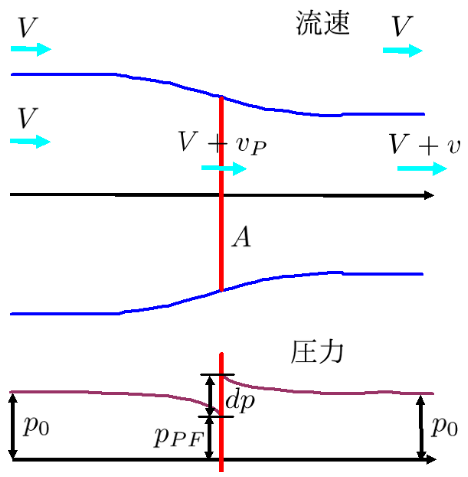


図 7.3.1: プロペラ軸方向運動量理論

```
/* プロペラ　軸方向運動量理論 */
kill(all);
BEF1:p[0]+1/2*\rho*V^2=p[PF]+1/2*\rho*(V
 +v[P])^2;
BER1:p[PF]+dp+1/2*\rho*(V+v[P])^2=p[0]
 +1/2*\rho*(V+v)^2;
BEF2:solve(BEF1,p[PF])[1];
subst([BEF2],BER1);
DP1:factor(solve(%,dp)[1]);
T[1]=A*dp;
T1:subst([DP1],%);
MDT1:m=\rho*A*(V+v[P]);
MTF1:m*V;
MTR1:m*(V+v);
T[2]=MTR1-MTF1;
subst([MDT1],%);
T2:factor(%);
rhs(T1)=rhs(T2);
VP1:solve(%,v[P])[1];
EF1:\eta[T]=(T*V)/(T*(V+v[P]));
EF2:subst([VP1],EF1);
T3:T=subst([VP1],rhs(T2));
```

```
CT1:C[T]=T/(1/2*\rho*A*V^2);
CT2:solve(CT1,T)[1];
subst([%],T3);
VCT1:solve(%,v)[2];
factor(subst([%],EF2));
```

プロペラ面内への流入速度:$V+v_P$、プロペラから十分離れた後方でのプロペラ後流速度:$V+v$ とする。プロペラから十分離れた前方および後方の圧力：p_0、プロペラ面前方の圧力:p_{PF}、プロペラ面後方の圧力:$p_{PF}+dp$ とする。プロペラ前方の流れに Bernoulli の定理:(2.8.4) 式を適用し、

$$\frac{\rho V^2}{2}+p_0=\frac{\rho\,(V+v_P)^2}{2}+p_{PF}$$

同様に、プロペラ後方の流れに Bernoulli の定理:(2.8.4) 式を適用し、

$$\frac{\rho\,(V+v_P)^2}{2}+p_{PF}+dp=\frac{\rho\,(V+v)^2}{2}+p_0$$

上式から、プロペラ前後面における圧力差：dp は、

$$dp=\frac{\rho\,v\,(2\,V+v)}{2}$$

上式から、Bernoulli の定理によるプロペラ推力：T_1 は、

$$T_1=dp\,A=\frac{\rho\,v\,A\,(2\,V+v)}{2} \tag{7.3.1}$$

一方、プロペラディスクに流入する流体質量：m は、

$$m=\rho\,A\,(V+v_P) \tag{7.3.2}$$

プロペラ前後部の運動量差から、プロペラ推力：T_2 は、

$$\begin{aligned}T_2=&m\,(V+v)-m\,V\\=&\rho\,A\,(V+v)\,(V+v_P)-\rho\,A\,V\,(V+v_P)\\=&\rho\,v\,A\,(V+v_P)\end{aligned} \tag{7.3.3}$$

$T_1=T_2$ であるから、

$$\frac{\rho\,v\,A\,(2\,V+v)}{2}=\rho\,v\,A\,(V+v_P)$$

以上から、次式の関係を得る。

$$v_P=\frac{v}{2} \tag{7.3.4}$$

プロペラの入力：$T\times(V+v_P)$ に対して、出力：$T\times V$ であるから、効率：η は、

$$\eta=\frac{T\times V}{T\times(V+v_P)}=\frac{V}{V+v_P}=\frac{V}{V+\frac{v}{2}} \tag{7.3.5}$$

また、(7.3.3) 式に (7.3.4) 式を代入し、

$$T=\rho\,v\,A\left(V+\frac{v}{2}\right)$$

推力を次式で無次元化し、

$$C_T=\frac{2\,T}{\rho\,A\,V^2} \tag{7.3.6}$$

上式を代入し、v を求めると、

$$v = \sqrt{C_T + 1}\,V - V \tag{7.3.7}$$

上式を効率の式:(7.3.5) 式に代入し、

$$\eta = \frac{2}{\sqrt{C_T + 1} + 1} \tag{7.3.8}$$

以上から、効率を上げるには、v_P を小さくする、即ち、大きなプロペラで、後流速度差がないようにすればよい。

```
ET1:T*(V+v[P])=m*(1/2*(V+v)^2-1/2*V^2);
subst([MDT1],ET1);
subst([T=rhs(T2)],%);
solve(%,v[P]);
VP2:%[1];
VP21:solve(VP2,v)[1];
```

上記は圧力差から推力：T を求めた。ここではエネルギー式からもとめる。プロペラのした仕事率が流体に与えたエネルギーに等しいことから次式が得られる。これにプロペラディスクに流入する流体質量：m の (7.3.2) 式を代入し、

$$\begin{aligned} T\,(V + v_P) =& m\left(\frac{(V+v)^2}{2} - \frac{V^2}{2}\right) \\ =& \rho\,A\,(V + v_P)\left(\frac{(V+v)^2}{2} - \frac{V^2}{2}\right) \end{aligned}$$

上式に、プロペラ前後部の運動量差から求めた推力：T の (7.3.3) 式を代入し、

$$\rho\,v\,A\,(V + v_P)^2 = \rho\,A\,(V + v_P)\left(\frac{(V+v)^2}{2} - \frac{V^2}{2}\right)$$

上式を整理し、次式を得る。これは上記で得られた (7.3.4) 式と同じである。

$$v_P = \frac{v}{2} \tag{7.3.9}$$

(2) 輪形部運動量

プロペラ面の半径 r における輪形部の運動量について調べる。ここで後流の縮流を無視する。輪形部の断面積：dA、輪形部の推力：dT、輪形部のトルク：dQ、プロペラの前方流速：V、プロペラ回転角速度：ω、プロペラ後流の軸方向流速：$V + v$、プロペラのねじれた回転方向の流速：w とし、プロペラ面における輪形部の軸方向流速：$V + v_P$、回転方向の流速：w_P とする。

```
DT1:subst([T[2]=dT,A=dA],T2);
DA1:dA=2*%pi*r*dr;
DRM1:dm=\rho*dA*(V+v[P]);
DQ1:dQ=dm*w*r;
DQ2:subst([DRM1,DA1],DQ1);
EQ1:dQ*w[P]/r=dm*1/2*w^2;
```

```
subst([DRM1,DA1],EQ1);
subst([DQ2],%);
WP1:solve(%,w[P])[1];
WP11:solve(WP1,w)[1];
VP3:lhs(VP2)=factor(subst([VCT1],
 rhs(VP2)));
solve(DQ2,w)[1];
lhs(WP1)=subst([%,VP3],rhs(WP1));
WP3:factor(%);
EF3:\eta[r]=(dT*V)/(dQ*\omega);
subst([DQ2,DT1,DA1],%);
EF31:subst([VP21,WP11],%);
VW1:v[P]/w[P]=(r*\omega-w[P])/(V+v[P]);
VW11:VW1*w[P];
EF4:subst([VW11],EF31);
solve(EF1,v[P])[1];
factor(subst([%],EF4));
```

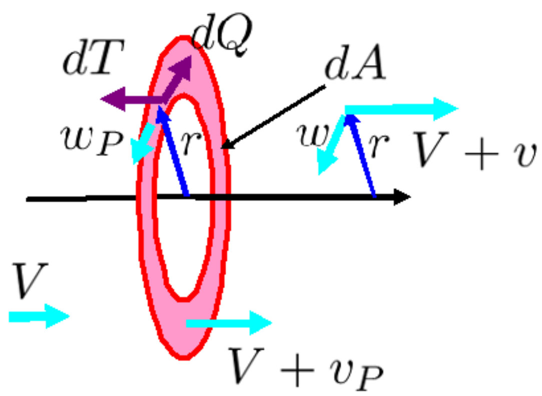


図 7.3.2: プロペラ輪形部運動量

推力：dT については流体の軸方向の運動量差の (7.3.3) 式から、

$$dT = \rho\,v\,dA\,(V + v_P) \tag{7.3.10}$$

半径 r における輪形部の面積：dA とそこを通過する質量 dm は、

$$dA = 2\,\pi\,dr\,r, \quad dm = \rho\,dA\,(V + v_P) \tag{7.3.11}$$

軸方向運動量理論におけるエネルギーの検討と同様にして、仕事率が流体に与えたエネルギーに等しいとして、

$$\begin{aligned} dT\,(V + v_P) =& dm\left(\frac{(V+v)^2}{2} - \frac{V^2}{2}\right) \\ =& \rho\,dA\,(V + v_P)\left(\frac{(V+v)^2}{2} - \frac{V^2}{2}\right) \end{aligned}$$

上式の推力：dT に、運動量差から求めた推力：dT の

(7.3.10) 式を代入し、

$$\rho\, v\, dA\, (V+v_P)^2 = \rho\, dA\ (V+v_P) \left(\frac{(V+v)^2}{2} - \frac{V^2}{2} \right)$$

上式を整理し、次式を得る。これは上記で得られた (7.3.4) 式と同じである。

$$v_P = \frac{v}{2}$$

流体の回転方向の運動量差から、輪形部に作用するトルクは下記となり、(7.3.11) 式を代入すると、

$$dQ = dm\, r\, w = 2\,\pi\, dr\, r^2\, \rho\, w\ (V+v_P) \qquad (7.3.12)$$

輪形部の仕事率と後流に与えたエネルギーは等しいとし、上式の dm を代入して、

$$\frac{dQ\, w_P}{r} = \frac{dm\, w^2}{2} = \pi\, dr\, r\, \rho\, w^2\ (V+v_P) \qquad (7.3.13)$$

(7.3.12) 式と (7.3.13) 式から、

$$2\,\pi\, dr\, r\, \rho\, w\, w_P\ (V+v_P) = \pi\, dr\, r\, \rho\, w^2\ (V+v_P)$$

整理すると、

$$w_P = \frac{w}{2} \qquad (7.3.14)$$

プロペラ面に流入する誘導速度:v_P, w_P を求める。(7.3.7) 式と (7.3.4) 式から、

$$v_P = \frac{\left(\sqrt{C_T+1}-1\right)\, V}{2} \qquad (7.3.15)$$

(7.3.13) 式から

$$w = \frac{dQ}{2\,\pi\, dr\, r^2\, \rho\, V + 2\,\pi\, dr\, r^2\, \rho\, v_P}$$

(7.3.15) 式と (7.3.14) 式から

$$w_P = \frac{dQ}{2\,\pi\, dr\, r^2\, \rho\ \left(\sqrt{C_T+1}+1\right)\ V} \qquad (7.3.16)$$

輪形部のプロペラ効率：η_r は出した推力による仕事率に対して、与えたトルクによる仕事率から次式となる。(7.3.10) 式と (7.3.12) 式を代入し、v, w を (7.3.9) 式と (7.3.14) 式から、

$$\eta_r = \frac{dT\, V}{\omega\, dQ} = \frac{v\, V}{\omega\, r\, w} = \frac{v_P\, V}{\omega\, r\, w_P} \qquad (7.3.17)$$

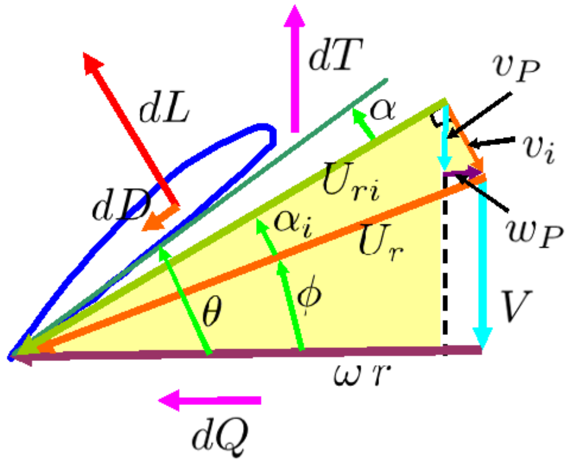


図 7.3.3: プロペラ翼素に流入する流れ

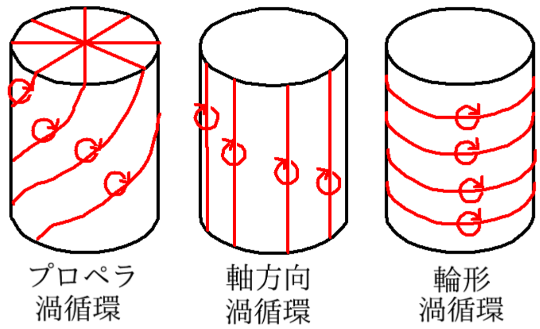


図 7.3.4: プロペラの渦循環

輪形部のプロペラ翼素に流入する流れ図を下記に示す。ここでプロペラで発生する渦循環の模式図をプロペラの渦循環に示す。後方に流出する渦循環はプロペラが回転しているのでらせん状に流出する。これは「7.2.2 揚力線理論」(298 ページ) で示されている後流渦と同様のものである。らせん状に流出する渦循環は軸方向渦循環と輪形渦循環に分けることが出来る。輪形渦循環は軸方向の誘導流速を発生し、軸方向運動量理論で求めた v_P に対応し、軸方向渦循環は回転方向の誘導流速を発生し、輪形部運動量理論で求めた w_P に対応する。

このことから上記の運動量で示された誘導速度：v_P, w_P はプロペラの後方流出渦循環によるものと同じものであり、その合速度：v_i は揚力理論から翼面下方に誘導される downwash に相当する。ここで翼流入速度：U_r にプロペラへの誘導速度を考慮した合成流入速度：U_{ri} とする。この v_i は合成流入速度：U_{ri} に対して直角方向となるため、上図の「プロペラ翼素に流入する流れ」の $v_P - w_P - v_i$ の三角形と $(V+v_P) - (\omega\, r - w_P) - U_{ri}$ の三角形とが相似形となる。これから下記の関係式を得る。

$$\frac{v_P}{w_P} = \frac{\omega\, r - w_P}{V + v_P}$$

上式を (7.3.17) 式に代入し、(7.3.5) 式の効率を η_T とすると、

$$\eta_r = \frac{(\omega\, r - w_P)\ V}{\omega\, r\ (V+v_P)} = \left(1 - \frac{w_P}{\omega\, r}\right)\ \eta_T$$

ここで $\frac{w_P}{\omega\, r}$ を回転干渉係数という。

7.3.2　プロペラ翼素理論

プロペラ翼素理論とは、プロペラ翼を半径方向に分割し、各半径における翼素の特性を二次元直進翼として解析する方法である。

(1) 単純翼素理論

プロペラの半径：r における断面の流速の関係から、プロペラ効率を求め、最適な速度関係をもとめる。プロペラが回転角速度：ω で回転し、速度：V で前進しているとする。ここで運動量理論などで示されているプロペラへの誘導速度は考慮しないで、単純な前進速度とプロペラ回転からプロペラ翼への流入流速を求め、解析する。

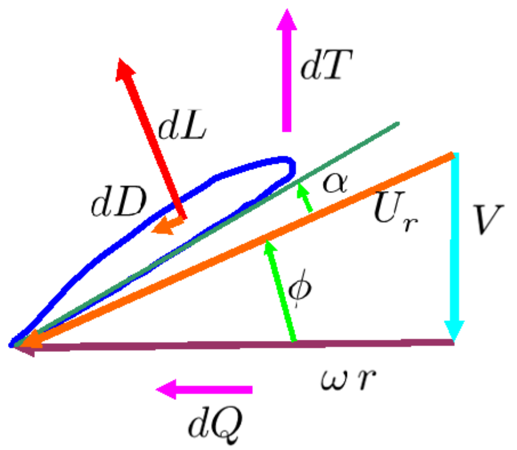


図 7.3.5: 単純翼素理論のプロペラ断面流速ダイアグラム

```
/* プロペラ　単純翼素理論 */
kill(all);
DL1:dL=1/2*C[L]*c(r)*U[r]^2*dr;
DD1:dD=1/2*C[D]*c(r)*U[r]^2*dr;
DT1:dT=dL*cos(\phi)-dD*sin(\phi);
DQ1:dQ=(dL*sin(\phi)+dD*cos(\phi))*r;
DT2:subst([DL1,DD1],DT1);
DQ2:subst([DL1,DD1],DQ1);
DEF1:\eta=(dT*V)/(\omega*dQ);
subst([DT2,DQ2,C[D]=C[DL]*C[L]],%);
DEF2:factor(subst([V=tan(\phi)*r*\omega,
 sin(\phi)=tan(\phi)*cos(\phi)],%));
DDEF2:factor('diff(\eta,\phi,1)
 =diff(rhs(DEF2),\phi,1));
num(rhs(%))=0;
PH1:solve(%,tan(\phi))[2];
taylor(rhs(%),C[DL],0,3);
PH2:lhs(PH1)=%;
subst([C[DL]=0],%);
PH3:solve(%,\phi)[1];
```

プロペラの半径：r における断面の流速の関係図を上図に示す。回転による速度：$\omega\, r$ と前進速度：V の合成から、プロペラ翼断面に流入する合流速：U_r となる。この半径：r におけるプロペラのコード長さ：$c(r)$ とする。このときの翼断面の揚力：dL、抗力：dD、揚力係数：C_L、抗力係数：C_D とすると、

$$dL = \frac{dr\,\mathrm{c}\,(r)\,U_r^2\,C_L}{2}, \quad dD = \frac{dr\,\mathrm{c}\,(r)\,U_r^2\,C_D}{2}$$

このときプロペラ翼素に作用する推力：dT、トルク：dQ は、

$$dT = \cos(\phi)\;dL - \sin(\phi)\;dD$$

$$dQ = r\;(\sin(\phi)\;dL + \cos(\phi)\;dD)$$

揚力：dL、抗力：dD の関係を上式に代入し、

$$dT = \frac{dr\cos(\phi)\;\mathrm{c}\,(r)\;U_r^2\,C_L}{2} - \frac{dr\sin(\phi)\;\mathrm{c}\,(r)\;U_r^2\,C_D}{2}$$

$$dQ = r\left(\frac{dr\sin(\phi)\;\mathrm{c}\,(r)\;U_r^2\,C_L}{2} + \frac{dr\cos(\phi)\;\mathrm{c}\,(r)\;U_r^2\,C_D}{2}\right)$$

プロペラ効率は次式で表現できる。上式の関係を代入し、

$$\begin{aligned}\eta =& \frac{dT\,V}{\omega\,dQ}\\ =& \frac{\left(\frac{dr\cos(\phi)\,\mathrm{c}(r)\,U_r^2\,C_L}{2} - \frac{dr\sin(\phi)\,\mathrm{c}(r)\,U_r^2\,C_{DL}\,C_L}{2}\right)\,V}{\omega\,r\;\left(\frac{dr\cos(\phi)\,\mathrm{c}(r)\,U_r^2\,C_{DL}\,C_L}{2} + \frac{dr\sin(\phi)\,\mathrm{c}(r)\,U_r^2\,C_L}{2}\right)}\end{aligned} \tag{7.3.18}$$

ここで下記の置き換えを行い、

$$C_{DL} = \frac{C_D}{C_L}, \quad \tan(\phi) = \frac{V}{r\,\omega}$$

上式を (7.3.18) 式に代入し、

$$\eta = -\frac{\tan(\phi)\;(\tan(\phi)\;C_{DL} - 1)}{C_{DL} + \tan(\phi)}$$

最適な効率の条件は、

$$\frac{d}{d\,\phi}\,\eta = -\frac{\sec(\phi)^2\,C_{DL}\;\left(2\tan(\phi)\;C_{DL} + \tan(\phi)^2 - 1\right)}{(C_{DL} + \tan(\phi))^2}$$

上式右辺の分子 $= 0$ から、

$$-\sec(\phi)^2\,C_{DL}\;\left(2\tan(\phi)\;C_{DL} + \tan(\phi)^2 - 1\right) = 0$$

上式から、$\tan(\phi)$ を解き、$C_{DL} << 1$ であるから、

$$\begin{aligned}\tan(\phi) =& \sqrt{C_{DL}^2 + 1} - C_{DL}\\ =& 1 - C_{DL} + \frac{C_{DL}^2}{2} + \ldots\\ \approx& 1\end{aligned}$$

上式から、下記の時、最適な効率となる。

$$\phi \approx \frac{\pi}{4}$$

(2) 運動量翼素理論

単純翼素理論ではプロペラ面の誘導流速を考慮していないが、ここではこれを考慮した特性を求める。プロペラの半径：r における翼断面の流速の関係から、誘導流速を考慮したプロペラ迎角を求める。プロペラ翼数：N でプロペラが回転角速度：ω で回転し、速度：V で前進しているとする。

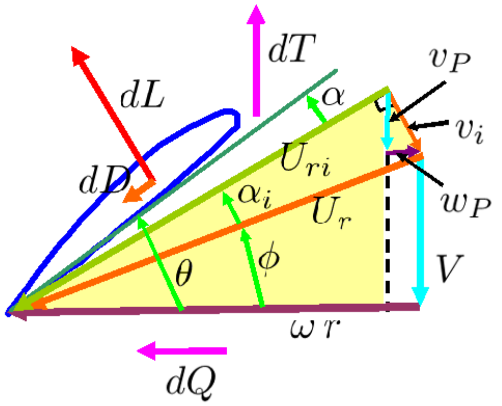


図 7.3.6: 運動量翼素理論のプロペラ断面流速ダイアグラム

```
/* プロペラ　運動量－翼素理論 */
kill(all);
PHI1:tan(\phi)=V/(r*\omega);
DL1:dL=1/2*\rho*C[L]*c(r)*U[ri]^2*dr;
DD1:dD=1/2*\rho*C[D]*c(r)*U[ri]^2*dr;
DT1:dT=dL*cos(\phi+\alpha[i])-dD*sin(\phi
 +\alpha[i]);
DQ1:dQ=(dL*sin(\phi+\alpha[i])+dD*cos(\phi
 +\alpha[i]))*r;
DT2:subst([dD=0],DT1);
DQ2:subst([dD=0],DQ1);
DM1:dm=\rho*2*%pi*r*dr*(V+v[P]);
DT3:N*dT=dm*v;
VP1:v[P]=v[i]*cos(\phi+\alpha[i]);
V1:v=2*v[P];
DT31:subst([DT2,V1,DM1],DT3);
SPH1:sin(\phi+\alpha[i])=(V+v[P])/U[ri];
SPH2:solve(SPH1,V)[1];
subst([SPH2,VP1],DT31);
VI1:solve(%,v[i])[1];
```

プロペラの半径：r における断面の流速の関係図を上図に示す。回転による速度：$\omega\, r$ と前進速度：V の合成から、合流速：U_r とする。また、プロペラの誘導流速を考慮した流入速度：U_{ri} とする。ここでプロペラ面の誘導流速で軸方向：v_P、回転方向：w_P とし、その合流速:v_i とする。

プロペラの半径：r における翼断面のコード長さ:$c(r)$、プロペラ角度：θ で、揚力係数：C_L、抗力係数：C_D とする。流入速度：U_{ri} として、プロペラ揚力：dL、抗力：dD は、

$$dL=\frac{dr\,c\,(r)\;\rho U_{ri}^2\,C_L}{2},\quad dD=\frac{dr\,c\,(r)\;\rho U_{ri}^2\,C_D}{2} \tag{7.3.19}$$

ϕ は下記の関係があり、誘導流速による迎角減少：α_i とすると、揚力：dL は流入速度：U_{ri} に直角に作用するので、推力：dT、トルク：dQ は、

$$\tan(\phi)=\frac{V}{\omega\, r} \tag{7.3.20}$$

$$\begin{aligned} dT&=\cos(\phi+\alpha_i)\;dL-\sin(\phi+\alpha_i)\;dD\\ dQ&=r\;(\sin(\phi+\alpha_i)\;dL+\cos(\phi+\alpha_i)\;dD)\end{aligned} \tag{7.3.21}$$

一般に翼では $dL>>dD$ であるから、dD を省略し、

$$dT=\cos(\phi+\alpha_i)\;dL,\quad dQ=\sin(\phi+\alpha_i)\;r\,dL \tag{7.3.22}$$

以下、輪形部運動量で示した方法と同様にプロペラ面の半径 r における輪形部の運動量について調べる。半径；r におけるプロペラ輪形部を通過する流体の質量：dm は、

$$dm=2\,\pi\,dr\,r\,\rho\;(V+v_P) \tag{7.3.23}$$

プロペラから十分離れた後方でのプロペラ後流速度:$V+v$ とすると、運動量差からプロペラ推力全体は (7.3.10) 式から、

$$dT\,N=dm\,v \tag{7.3.24}$$

前節、輪形部運動量で示したプロペラの運動量による誘導流速とプロペラ後流循環渦による誘導流速：v_i が同じものであることから、この v_i は翼流入速度：U_{ri} に対して直角方向となる。また、(7.3.9) 式から

$$v_P=v_i\cos(\phi+\alpha_i)\,,\quad v=2\,v_P$$

$$\sin(\phi+\alpha_i)=\frac{V+v_P}{U_{ri}} \tag{7.3.25}$$

プロペラ推力全体について、(7.3.24) 式左辺は、(7.3.22) 式から、

$$dT\,N=\cos(\phi+\alpha_i)\;dL\,N$$

(7.3.24) 式右辺は、(7.3.23) 式から、

$$dm\,v=4\,\pi\,dr\,r\,\rho\,v_P\;(V+v_P)$$

両式を等しいと置いて、

$$\cos(\phi+\alpha_i)\;dL\,N=4\,\pi\,dr\,r\,\rho\,v_P\;(V+v_P)$$

(7.3.25) 式から、

$$\cos(\phi+\alpha_i)\;dL\,N=4\,\pi\,dr\,v_i\cos(\phi+\alpha_i)\;\sin(\phi+\alpha_i)\;r\,\rho\,U_{ri}$$

上式から、v_i を求めると、

$$v_i=\frac{dL\,N}{4\,\pi\,dr\sin(\phi+\alpha_i)\;r\,\rho\,U_{ri}} \tag{7.3.26}$$

```
AL1:tan(\alpha[i])=v[i]/U[ri];
subst([VI1],AL1);
AL2:subst([DL1],%);
AL2*denom(rhs(AL2));
trigexpand(%);
subst([tan(\alpha[i])=\alpha[i],
 sin(\alpha[i])=\alpha[i],
 cos(\alpha[i])=1],%);
expand(%);
subst([\alpha[i]^2=0],%);
AL3:solve(%,\alpha[i])[1];
CL1:C[L]=C[L0]*(\alpha+\delta);
AL4:\alpha=\theta-\phi-\alpha[i];
lhs(AL3)=subst([CL1,AL4],rhs(AL3));
AL5:factor(solve(%,\alpha[i])[1]);
AL51:(num(rhs(AL5))/(c(r)*C[L0]*N));
AL52:expand(denom(rhs(AL5))/(c(r)*C[L0]
 *N));
lhs(AL5)=AL51/AL52;
URI1:U[ri]=U[r]*cos(\alpha[i]);
U1:U[r]=sqrt(V^2+(r*\omega)^2);
URI2:lhs(URI1)=subst([U1],rhs(URI1));
```

プロペラの半径：r における断面の流速の関係図から、α_i は下記となり、(7.3.26) 式と (7.3.19) 式から、

$$\begin{aligned}\tan(\alpha_i) =& \frac{v_i}{U_{ri}}\\ =& \frac{dL\,N}{4\,\pi\,dr\sin(\phi+\alpha_i)\;r\,\rho\,U_{ri}^2}\\ =& \frac{\mathrm{c}(r)\;C_L\,N}{8\,\pi\sin(\phi+\alpha_i)\;r}\end{aligned}$$

上式から、

$$8\,\pi\tan(\alpha_i)\;\sin(\phi+\alpha_i)\;r = \mathrm{c}(r)\;C_L\,N$$

α_i が小さいとして、

$$8\,\pi\,\alpha_i\;(\sin(\phi)+\alpha_i\cos(\phi))\;r = \mathrm{c}(r)\;C_L\,N$$

α_i の高次項を省略し、

$$8\,\pi\,\alpha_i\sin(\phi)\;r = \mathrm{c}(r)\;C_L\,N$$

α_i を求めると、

$$\alpha_i = \frac{\mathrm{c}(r)\;C_L\,N}{8\,\pi\sin(\phi)\;r} \tag{7.3.27}$$

ここで、翼の迎角：α とすると、揚力特性：C_L は、二次元平板翼では (7.1.23) 式から、

$$C_L = 2\,\pi\sin(\alpha)$$

また、翼厚＋キャンバーありの翼では (7.1.35) 式から、

$$C_L \approx \frac{2\,\pi\sin(\beta+\alpha)}{\cos(\beta)}\;\left(1+\frac{\delta_2}{A}\right)$$

以上から揚力特性として下記とする、

$$C_L = (\delta+\alpha)\;C_{L0} \tag{7.3.28}$$

迎角は下記となる。

$$\alpha = \theta-\phi-\alpha_i \tag{7.3.29}$$

上式を (7.3.27) 式に代入し、

$$\alpha_i = \frac{\mathrm{c}(r)\;(\theta-\phi-\alpha_i+\delta)\;C_{L0}\,N}{8\,\pi\sin(\phi)\;r}$$

改めて、α_i を求めると、

$$\alpha_i = \frac{\theta-\phi+\delta}{\dfrac{8\,\pi\sin(\phi)\;r}{\mathrm{c}(r)\;C_{L0}\,N}+1} \tag{7.3.30}$$

また、下記の関係から、

$$U_{ri} = \cos(\alpha_i)\;U_r, \quad U_r = \sqrt{V^2+\omega^2\,r^2}$$

次式を得る。

$$U_{ri} = \cos(\alpha_i)\;\sqrt{V^2+\omega^2\,r^2} \tag{7.3.31}$$

dT, dQ の (7.3.21) 式に、(7.3.19) 式、(7.3.20) 式、(7.3.28) 式、(7.3.29) 式、(7.3.30) 式、(7.3.31) 式を代入することにより、dT, dQ が得られる。これを半径方向に積分することによりプロペラ特性が得られる。

7.3.3　プロペラと船体との干渉

船体の後方に置かれたプロペラと船体との干渉力について調べる [1]。

```
/* プロペラと船体との干渉 */
kill(all);
assume(V>0);
T1:T=rho*v*A*(V+v[P]);
VP1:v[P]=v/2;
T2:subst([VP1],T1);
T3:subst([V=V[A0],v=\Gamma[0]],T2);
CT1:C[T]=T/(1/2*\rho*A*V^2);
CT2:lhs(%)=subst([T3],rhs(%));
GV1:solve(CT2,\Gamma[0])[2];
%/V;
GV2:factor(subst([V[A0]=VA0*V],%));
VA01:VA0=V[A0]/V;
GV3:subst([VA01],GV2);
```

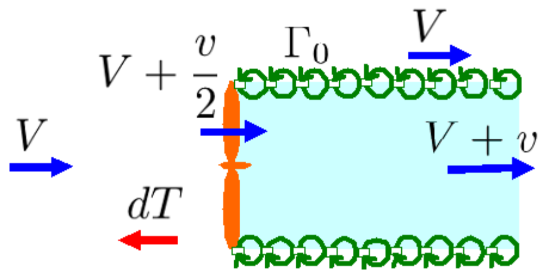


図 7.3.7: プロペラ渦円筒

プロペラ運動量理論から、推力：T、プロペラ前進速度：V、プロペラ後流速度：v とプロペラ流入速度：v_P の関係は、(7.3.3) 式と (7.3.4) 式から、

$$T=\rho\,v\,A\,(V+v_P)$$

$$v_P=\frac{v}{2}$$

上式から、

$$T=\rho\,v\,A\left(V+\frac{v}{2}\right)$$

プロペラ後流のプロペラディスクの円筒境界で内外部の流速差が v となっており、この境界流速差：v を渦円筒で表現でき、渦強さ：Γ_0 に比例するとして、$v\to\Gamma_0$ と置き換えることができる。また、プロペラの前進速度：V はプロペラが船体の後方にあることから、プロペラ面に流入する流速は一般的に船の前進速度より遅くなり、V_{A0} とする。これから上式で $V\to V_{A0}$ と置き換え、

$$T=\Gamma_0\,\rho\,A\left(V_{A0}+\frac{\Gamma_0}{2}\right)$$

[1] 足立宏之、菅井信夫「推力減少率について、－荷重度変更法による考察－、関西造船協会誌、第 171 号、昭和 53 年 12 月

推力：T を次式の様に無次元化し、

$$C_T=\frac{2\,T}{\rho\,A\,V^2}=\frac{2\,\Gamma_0\,\left(V_{A0}+\frac{\Gamma_0}{2}\right)}{V^2}$$

上式から Γ_0 を求め、

$$\Gamma_0=\sqrt{C_T\,V^2+V_{A0}^2}-V_{A0} \tag{7.3.32}$$

これを V で割って、

$$\frac{\Gamma_0}{V}=\frac{\sqrt{C_T\,V^2+V_{A0}^2}-V_{A0}}{V}=\sqrt{\frac{V_{A0}^2}{V^2}+C_T}-\frac{V_{A0}}{V}$$

```
PH1:\Phi(P)=-'integrate(m(Q)/r(P,Q),s(Q))
 +V*x+\Phi[P](P);
M1:m(Q)=m[H](Q)+m[P](Q);
DR1:dR=4*%pi*\rho*'integrate(m(Q)*v[XIP](Q)
 ,S(Q));
subst([M1],%);
subst([m[P](Q)=C[MP](Q)*\Gamma[0],v[XIP](Q)
 =C[XIP](Q)*\Gamma[0]],%);
DR2:expand(%);
DR3:dR=\rho*(B[H]*\Gamma[0]+B[P]
 *\Gamma[0]^2);
DR4:expand(%/(1/2*\rho*A*V^2));
DR41:first(rhs(DR4));
subst([GV1],%);
factor(subst([V[A0]=VA0*V],%));
DR411:subst([VA01],%);
DR42:last(rhs(DR4));
subst([GV1],%);
factor(subst([V[A0]=VA0*V],%));
DR412:subst([VA01],%);
lhs(DR4)=DR411+DR412;
lhs(DR4)=DR412;
DR5:subst([B[H]=B[H0]/2*A*V,V[A0]
 =(1-w[0])*V],%);
```

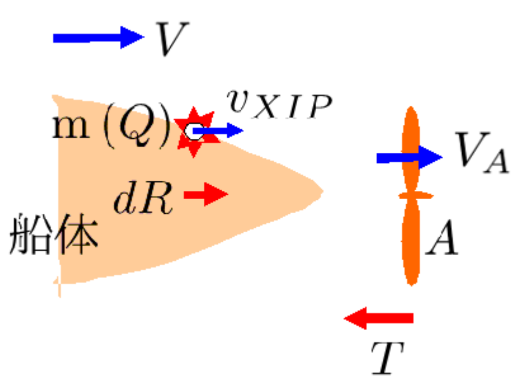


図 7.3.8: プロペラと船体との干渉力

速度：V で進む船のまわりの速度ポテンシャル:$\Phi\,(P)$ は、

船体表面条件を船体表面のわき出しで満足させることができる。このわき出し強さ:$m(Q)$ とし、プロペラによる速度ポテンシャル：Φ_P とすると、下記で、表現できる。

$$\Phi\left(P\right)=x\,V-\int\frac{\mathrm{m}\left(Q\right)}{\mathrm{r}\left(P,Q\right)}d\mathrm{s}\left(Q\right)+\Phi_P\left(P\right)$$

船体を表現するわき出し強さ:$m(Q)$ を一様流れ中の船体表面条件を満足させるわき出し強さ:$m_H\left(Q\right)$ とプロペラの撹乱により船体境界条件を満足させるわき出し強さ:$m_P\left(Q\right)$ にわけて考える。

$$\mathrm{m}\left(Q\right)=m_P\left(Q\right)+m_H\left(Q\right)$$

(6.1.66) 式、197 ページから、わき出しに作用する力は、次式で与えられる。ここで、わき出しに作用する船長方向の力: $\overrightarrow{F_i}$、わき出し強さ:m_i、わき出し位置における船長方向の流速：$\overrightarrow{v_{i0}}$ である。

$$\overrightarrow{F_i}=-4\pi\rho m_i\overrightarrow{v_{i0}}$$

プロペラと船体との干渉力：dR は、上式から、わき出し：$\mathrm{m}\left(Q\right)$ におけるプロペラによる船長方向の誘導速度：v_{XIP} とすると、

$$\begin{aligned}dR=&4\,\pi\,\rho\int\mathrm{m}\left(Q\right)\,v_{XIP}\left(Q\right)d\mathrm{S}\left(Q\right)\\=&4\,\pi\,\rho\int\left(m_P\left(Q\right)+m_H\left(Q\right)\right)\,v_{XIP}\left(Q\right)d\mathrm{S}\left(Q\right)\end{aligned}$$

プロペラによる船長方向の誘導速度：v_{XIP} はプロペラの渦強さ：Γ_0 に比例し、プロペラの撹乱によるわき出し強さ:$m_P\left(Q\right)$ もプロペラの渦強さ：Γ_0 に比例するので、$v_{XIP}=\Gamma_0\,C_{XIP}, m_P\left(Q\right)=\Gamma_0\,C_{MP}$ と置いて、

$$\begin{aligned}dR=&4\,\pi\,\rho\int\Gamma_0\,\left(\Gamma_0\,C_{MP}\left(Q\right)+m_H\left(Q\right)\right)\,C_{XIP}\left(Q\right)d\mathrm{S}\left(Q\right)\\=&4\,\pi\,\rho\,\Gamma_0^2\int C_{MP}\left(Q\right)\,C_{XIP}\left(Q\right)d\mathrm{S}\left(Q\right)\\&+4\,\pi\,\rho\,\Gamma_0\int m_H\left(Q\right)\,C_{XIP}\left(Q\right)d\mathrm{S}\left(Q\right)\\=&\rho\,\left(\Gamma_0^2\,B_P+\Gamma_0\,B_H\right)\end{aligned}$$

ここで、B_P, B_H は下記となり、船体とプロペラの関係で決まる。

$$B_P=4\,\pi\int C_{MP}\left(Q\right)\,C_{XIP}\left(Q\right)d\mathrm{S}\left(Q\right)$$

$$B_H=4\,\pi\int m_H\left(Q\right)\,C_{XIP}\left(Q\right)d\mathrm{S}\left(Q\right)$$

上式を無次元化すると、

$$\frac{2\,dR}{\rho\,A\,V^2}=\frac{2\,\Gamma_0^2\,B_P}{A\,V^2}+\frac{2\,\Gamma_0\,B_H}{A\,V^2}$$

一般に、船体位置におけるプロペラ誘導速度は船速より十分遅いので、$m_P << m_H$ の関係があり、B_P の項は省略でき、(7.3.32) 式を代入すると、

$$\begin{aligned}\frac{2\,dR}{\rho\,A\,V^2}=&\frac{2\,B_H\,\left(\sqrt{\frac{V_{A0}^2}{V^2}+C_T}-\frac{V_{A0}}{V}\right)}{A\,V}\\=&B_{H0}\,\left(\sqrt{C_T+\left(1-w_0\right)^2}+w_0-1\right)\\&\text{ここで、伴流係数 :}1-w_0=\frac{V_{A0}}{V},\\&B_{H0}=\frac{2\,B_H}{A\,V}\end{aligned}\tag{7.3.33}$$

上式で、船が風や波などで船体抵抗が増え、推力も増加する。このプロペラ荷重度を変化させたときの船体とプロペラの干渉力の特性を明らかに出来た。

```
VA1:V[A]=V[A0]+V[AP];
VA2:subst([V[AP]=C[\Gamma]*\Gamma[0]],VA1);
subst([GV1],VA2);
%/V;
subst([V[A]=(1-w)*V,V[A0]=(1-w[0])*V],%);
factor(%);
partfrac(%,C[\Gamma]);
VA3:subst([w[0]^2=2*w[0]-1+(1-w[0])^2],%);
```

次に、プロペラディスクに流入する速度とプロペラ荷重度の関係について調べる。プロペラディスクに流入する速度:V_A は、プロペラが無い状態での船体後方における流速：V_{A0} とプロペラにより誘引され流れてきた流速：V_{AP} に分けられる。

V_{AP} はプロペラの渦強さ：Γ_0 に比例するので、$V_{AP}=C_\Gamma\,\Gamma_0$ とし、(7.3.32) 式を代入すると、

$$\begin{aligned}V_A=&V_{AP}+V_{A0}\\=&V_{A0}+\Gamma_0\,C_\Gamma\\=&C_\Gamma\,\left(\sqrt{C_T\,V^2+V_{A0}^2}-V_{A0}\right)+V_{A0}\end{aligned}$$

上式を船速：V で割り、

$$\frac{V_A}{V}=\frac{C_\Gamma\,\left(\sqrt{C_T\,V^2+V_{A0}^2}-V_{A0}\right)+V_{A0}}{V}$$

伴流係数で表現すると、

$$1-w=C_\Gamma\,\left(\sqrt{C_T+\left(1-w_0\right)^2}+w_0-1\right)-w_0+1\tag{7.3.34}$$

7.4 細長体

7.4.1 細長体近似

物体形状が飛行機胴体や船体のように細長い形状の場合、下記のように速度ポテンシャル：Φ を近似できる。細長物体の長さ方向を z 軸、横方向に x 軸、下方向に y 軸とする。流速：$\overrightarrow{U}(U_x,U_z)$ が細長体に当たっているとする。また、$\overrightarrow{n}$ を物体表面の単位ベクトルとする。

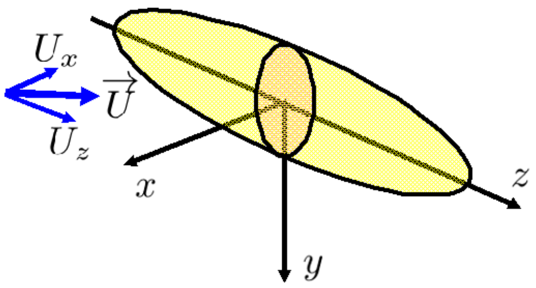


図 7.4.1: 細長体近似

```
/* 細長体 */
kill(all);
depends([\Phi,\phi],[x,y,z,t]);
BC1:'diff(\Phi,n,1)=0;
BC10:'diff(\Phi,x,1)*n[x]+'diff(\Phi,y,1)
 *n[y]+'diff(\Phi,z,1)*n[z]=0;
PH1:\Phi=U[z]*z-U[x]*x;
PH2:\Phi=U[z]*z-U[x]*x+\phi;
LA1:'diff(\Phi,x,2)+'diff(\Phi,y,2)
 +'diff(\Phi,z,2)=0;
subst([PH2],BC10);
BC2:ev(%,diff);
subst([PH2],LA1);
ev(%,diff);
LA2:subst(['diff(\phi,z,2)=0],%);
PH3:\phi=\phi[1]+\phi[2];
LA21:subst([\phi=\phi[1]],LA2);
LA22:subst([\phi=\phi[2]],LA2);
BC21:subst([\phi=\phi[1],n[x]=0,n[y]=0],
 BC2);
BC22:subst([\phi=\phi[2],n[z]=0],BC2);
P1:p/\rho+(diff(\Phi,x,1)^2+diff(\Phi,y,
 1)^2+diff(\Phi,z,1)^2)/2+diff(\Phi,t,1)
 =p[0]/\rho+(U[x]^2+U[z]^2)/2;
subst([PH2],P1);
ev(%,diff);
solve(%,p)[1];
expand(factor(%-p[0]));
```

物体表面条件は、$\overrightarrow{n}$ を物体表面の単位ベクトルの各コンポーネントを n_x,n_y,n_z とすると、

$$\left(\frac{d}{d\,z}\,\Phi\right)\,n_z+\left(\frac{d}{d\,y}\,\Phi\right)\,n_y+\left(\frac{d}{d\,x}\,\Phi\right)\,n_x=0 \quad (7.4.1)$$

速度ポテンシャル：Φ の質量保存の方程式は (2.9.5) 式、33 ページから下記となる。

$$\frac{d^2}{d\,z^2}\,\Phi+\frac{d^2}{d\,y^2}\,\Phi+\frac{d^2}{d\,x^2}\,\Phi=0 \quad (7.4.2)$$

細長体から十分離れたところでは、

$$\Phi\to z\,U_z-x\,U_x$$

以上から速度ポテンシャルは下記で表せる。ここで、ϕ は細長体による撹乱速度ポテンシャルである。

$$\Phi=z\,U_z-x\,U_x+\phi \quad (7.4.3)$$

(7.4.1) 式に (7.4.3) 式を代入し、細長体による撹乱速度ポテンシャルの物体表面条件は、

$$n_z\,\left(U_z+\frac{d}{d\,z}\,\phi\right)+\left(\frac{d}{d\,y}\,\phi\right)\,n_y+n_x\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\phi-U_x\right)=0 \quad (7.4.4)$$

(7.4.2) 式に (7.4.3) 式を代入し、質量保存の方程式は、

$$\frac{d^2}{d\,z^2}\,\phi+\frac{d^2}{d\,y^2}\,\phi+\frac{d^2}{d\,x^2}\,\phi=0 \quad (7.4.5)$$

(2.9.6) 式、34 ページに示す速度ポテンシャルの Bernoulli の定理から、下記を得る。

$$\frac{p}{\rho}+\frac{\left(\frac{d}{d\,z}\,\Phi\right)^2+\left(\frac{d}{d\,y}\,\Phi\right)^2+\left(\frac{d}{d\,x}\,\Phi\right)^2}{2}+\frac{d}{d\,t}\,\Phi=\frac{U_z^2+U_x^2}{2}+\frac{p_0}{\rho}$$

上式に (7.4.3) 式を代入し、圧力を撹乱速度ポテンシャルで表すと、

$$\begin{aligned}p-p_0=&-\left(\frac{d}{d\,z}\,\phi\right)\,\rho\,U_z+\left(\frac{d}{d\,x}\,\phi\right)\,\rho\,U_x\\&-\frac{\left(\frac{d}{d\,z}\,\phi\right)^2\rho}{2}-\frac{\left(\frac{d}{d\,y}\,\phi\right)^2\rho}{2}-\frac{\left(\frac{d}{d\,x}\,\phi\right)^2\rho}{2}\\&-\left(\frac{d}{d\,t}\,\phi\right)\,\rho\end{aligned} \quad (7.4.6)$$

ところで、細長体では、$\frac{d}{d\,z}\,\phi<<\frac{d}{d\,x}\,\phi,\frac{d}{d\,y}\,\phi$ であるから、(7.4.5) 式の $\frac{d^2}{d\,z^2}\,\phi$ の項を省略でき、下記の $x-y$ 平面の撹乱速度ポテンシャルで表現できる。

$$\frac{d^2}{d\,y^2}\,\phi+\frac{d^2}{d\,x^2}\,\phi=0 \quad (7.4.7)$$

7.4.2 縦方向の流れ

細長物体の縦方向の流れについて調べる[1]。細長物体に z 軸方向に流速：U_z が当たっている。断面を円で近似し、細長物体の長さ：L、半径：$R(z)$、面積：$S(z)$ とする。

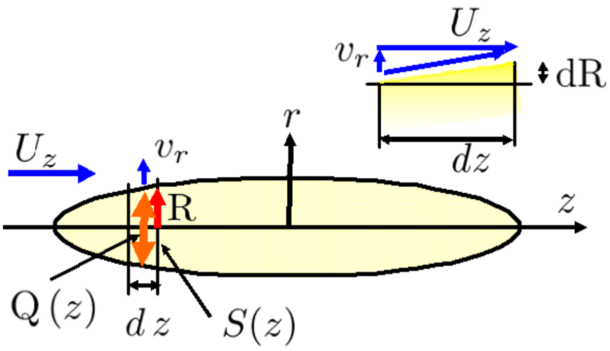


図 7.4.2: 細長体近似

```
/* 縦方向 */
kill(all);
VR1:v[r]=U[z]*dR(z)/dz;
Q1:Q(z)*dz=v[r]*2*%pi*R(z)*dz;
VR11:solve(Q1,v[r])[1];
Q2:subst([VR1],%);
S1:S(z)=%pi*R(z)^2;
DS1:diff(S1,z,1);
DS2:solve(DS1,R(z))[1];
subst([DS2,'diff(R(z),z,1)=dR(z)/dz],Q2);
Q3:solve(%,Q(z))[1];
PHL1:\phi[2]=Q(z)/(2*%pi)*log(r);
VR2:v[r]='diff(rhs(PHL1),r,1);
ev(%,diff);
subst([r=R(z)],%);
assume(r>0,L>0,z>0,L>z);
PHL2:\phi[3]=-Q(z)/4/%pi*dz/sqrt(z^2+r^2);
subst([z=0],%);
'diff(rhs(%),r,1);
v[r]=ev(%,diff);
PHL21:subst([Q(z)=Q(s),z=z-s],rhs(PHL2)/
 dz);
PHL3:\phi[3]='integrate(%,s,0,L);
```

物体表面の境界条件から、r 方向の流速：v_r は、

$$v_r = \frac{\mathrm{dR}\,(z)\ U_z}{dz}$$

dz 間で流出する流量：$Q(z)$ と流速：v_r の関係は、

$$dz\,\mathrm{Q}\,(z) = 2\,\pi\,dz\,v_r\,\mathrm{R}\,(z)\,, \quad v_r = \frac{\mathrm{Q}\,(z)}{2\,\pi\,\mathrm{R}\,(z)}$$

上記の二つの関係式から、

$$\frac{\mathrm{dR}\,(z)\ U_z}{dz} = \frac{\mathrm{Q}\,(z)}{2\,\pi\,\mathrm{R}\,(z)}$$

ところで、半径：$R(z)$ と断面積：$S(z)$ の関係は、

$$\mathrm{S}\,(z) = \pi\,\mathrm{R}\,(z)^2, \quad \frac{d}{d\,z}\,\mathrm{S}\,(z) = 2\,\pi\,\mathrm{R}\,(z)\left(\frac{d}{d\,z}\,\mathrm{R}\,(z)\right)$$

以上から、流量：$Q(z)$ と断面積：$S(z)$ の関係は、

$$\mathrm{Q}\,(z) = U_z\left(\frac{d}{d\,z}\,\mathrm{S}\,(z)\right) \tag{7.4.8}$$

前節から、細長体では横断面の二次元流場で表現できるので、(7.4.7) 式から、流量：$Q(z)$ の二次元速度ポテンシャル：ϕ_2 は、

$$\phi_2 = \frac{\log{(r)}\ \mathrm{Q}\,(z)}{2\,\pi} \tag{7.4.9}$$

確認のため、流速：v_r は前記の結果と一致している。

$$v_r = \frac{d}{d\,r}\,\frac{\log{(r)}\ \mathrm{Q}\,(z)}{2\,\pi} = \frac{\mathrm{Q}\,(z)}{2\,\pi\,r}$$

上式の ϕ_2 は、物体表面近傍で r 方向に有効であるが、z 軸方向（縦方向）の流れは U_z のみで、その変化は表現できていない。そこで、$Q(z)$ による三次元軸対象の速度ポテンシャル：ϕ_3 について調べる。流量：Q による三次元軸対象の速度ポテンシャル：ϕ_3 は、

$$\phi_3 = -\frac{dz\,\mathrm{Q}\,(z)}{4\,\pi\,\sqrt{z^2+r^2}} \tag{7.4.10}$$

上記から、z 軸上に分布する $Q(z)$ による三次元軸対象の速度ポテンシャル：ϕ_3 は、

$$\phi_3 = -\frac{1}{4\,\pi}\int_0^L \frac{\mathrm{Q}\,(s)}{\sqrt{(z-s)^2+r^2}}ds \tag{7.4.11}$$

```
DS1:1/(sqrt((z-s)^2+r^2));
DS2:a=(z-s)/r;
DS21:solve(DS2,z)[1];
'integrate(1/(sqrt(a^2+1)),a)=log(abs(a
 +sqrt(a^2+1)));
DS4:subst([DS2],rhs(%));
DS3:'diff(%,s)=factor(diff(%,s));
DS31:lhs(DS3);
integrate(f(x)*diff(g(x),x,1),x,a,b)=(f(x)
 *g(x))[a]^b-integrate(diff(f(x),x,1)*g(x)
 ,x,a,b);
PHL31:lhs(PHL3)=-integrate(diff(Q(s),s,1)
 /4/%pi*DS4,s,0,L);
```

[1] Marine Hydrodynamics, Chapter 7 Hydrodynamics of Slender Bodies, 7.2 Longitudinal Motion, P.335 [21)]

```
forget(z<s);
assume(z>s);
DS41:log(2*(z-s)/r);
DS410:log(2*(z-s))-log(r);
DS411:first(DS410);
DS412:last(DS410);
forget(z>s);
assume(z<s);
DS42:log(2*(s-z)/r);
DS420:log(2*(s-z))-log(r);
DS421:first(DS420);
DS422:last(DS420);
PHL4:lhs(PHL3)=-integrate(diff(Q(s),s,1)/4
 /%pi*DS411,s,0,z)
-integrate(diff(Q(s),s,1)/4/%pi*DS412,s,0,
 z)
+integrate(diff(Q(s),s,1)/4/%pi*DS421,s,z,
 L)
+integrate(diff(Q(s),s,1)/4/%pi*DS422,s,z,
 L);
PHL5:subst([Q(L)=0,Q(0)=0],%);
Q4:Q(s)=U[z]*diff(S(s),s,1);
subst([Q3,Q4],PHL5);
PHL6:\phi=ev(rhs(%),diff);
```

下記の積分公式から、

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+1}} da = \log\left(\left|\sqrt{a^2+1}+a\right|\right)$$

$a=\frac{z-s}{r}$ を上式右辺に代入し、これを微分すると、

$$\frac{d}{d\,s}\log\left(\left|\sqrt{\frac{(z-s)^2}{r^2}+1}+\frac{z-s}{r}\right|\right) = -\frac{1}{\sqrt{z^2-2\,s\,z+s^2+r^2}}$$

上記の関係を (7.4.11) 式に代入すると、

$$\phi_3 = \frac{1}{4\,\pi}\int_0^L \mathrm{Q}\left(s\right) \times \frac{d}{d\,s}\log\left(\left|\sqrt{\frac{(z-s)^2}{r^2}+1}+\frac{z-s}{r}\right|\right) ds \tag{7.4.12}$$

下記の部分積分を活用して、

$$\int_a^b \mathrm{f}\left(x\right)\left(\frac{d}{d\,x}\mathrm{g}\left(x\right)\right) dx = \left(\mathrm{f}\left(x\right)\,\mathrm{g}\left(x\right)\right)_a^b - \int_a^b \mathrm{g}\left(x\right)\left(\frac{d}{d\,x}\mathrm{f}\left(x\right)\right) dx$$

$\mathrm{f}(x)=Q(s)$ とし、$z=0,L$ では $Q(z)=0$ であるから、(7.4.12) 式は、

$$\phi_3 = -\frac{1}{4\,\pi}\int_0^L \left(\frac{d}{d\,s}\mathrm{Q}\left(s\right)\right) \times \log\left(\left|\sqrt{\frac{(z-s)^2}{r^2}+1}+\frac{z-s}{r}\right|\right) ds \tag{7.4.13}$$

$r << L$ とすると、

$$\log\left(\left|\sqrt{\frac{(z-s)^2}{r^2}+1}+\frac{z-s}{r}\right|\right) \approx \log\left(\left|2\,\frac{z-s}{r}\right|\right)$$

$z>s$ のときには、

$$\log\left(\frac{2\,(z-s)}{r}\right) = \log\left(2\,(z-s)\right) - \log\left(r\right)$$

$z<s$ のときには、

$$\log\left(\frac{2\,(s-z)}{r}\right) = \log\left(2\,(s-z)\right) - \log\left(r\right)$$

関数は奇関数であるはずであるから、$z>s$ と $z<s$ では正負が逆となることから、

$$\begin{aligned}\phi_3 = &-\frac{\log\left(r\right)\,\left(\mathrm{Q}\left(L\right)-\mathrm{Q}\left(z\right)\right)}{4\,\pi} \\ &-\frac{\int_0^z \left(\frac{d}{d\,s}\mathrm{Q}\left(s\right)\right)\log\left(2\,(z-s)\right) ds}{4\,\pi} \\ &+\frac{\log\left(r\right)\,\left(\mathrm{Q}\left(z\right)-\mathrm{Q}\left(0\right)\right)}{4\,\pi} \\ &+\frac{\int_z^L \left(\frac{d}{d\,s}\mathrm{Q}\left(s\right)\right)\log\left(2\,(s-z)\right) ds}{4\,\pi}\end{aligned}$$

$z=0,L$ では $Q(z)=0$ であるから、

$$\begin{aligned}\phi_3 = &-\frac{\int_0^z \left(\frac{d}{d\,s}\mathrm{Q}\left(s\right)\right)\log\left(2\,(z-s)\right) ds}{4\,\pi} \\ &+\frac{\log\left(r\right)\,\mathrm{Q}\left(z\right)}{2\,\pi} \\ &+\frac{\int_z^L \left(\frac{d}{d\,s}\mathrm{Q}\left(s\right)\right)\log\left(2\,(s-z)\right) ds}{4\,\pi}\end{aligned}$$

上記から $r << L$ の場合の三次元速度ポテンシャルが得られた。上記の右辺第二項は二次元の速度ポテンシャルと同じである。これにより細長体近似したときの z 近傍の速度ポテンシャル：ϕ が得られた。

$$\begin{aligned}\phi = &-\frac{\int_0^z \left(\frac{d}{d\,s}\mathrm{Q}\left(s\right)\right)\log\left(2\,(z-s)\right) ds}{4\,\pi} + \frac{\log\left(r\right)\,\mathrm{Q}\left(z\right)}{2\,\pi} \\ &+\frac{\int_z^L \left(\frac{d}{d\,s}\mathrm{Q}\left(s\right)\right)\log\left(2\,(s-z)\right) ds}{4\,\pi}\end{aligned}$$

上式に (7.4.8) 式を代入し、

$$\begin{aligned}\phi = &-\frac{U_z\int_0^z \left(\frac{d^2}{d\,s^2}\mathrm{S}\left(s\right)\right)\log\left(2\,(z-s)\right) ds}{4\,\pi} \\ &+\frac{\log\left(r\right)\,U_z\,\left(\frac{d}{d\,z}\mathrm{S}\left(z\right)\right)}{2\,\pi} \\ &+\frac{\int_z^L \left(\frac{d^2}{d\,s^2}\mathrm{S}\left(s\right)\right)\log\left(2\,(s-z)\right) ds\,U_z}{4\,\pi}\end{aligned} \tag{7.4.14}$$

```
PHL61:first(rhs(PHL6));
PHL71:log(2*(z-s));
PHL72:PHL71=diff(PHL71,z,1);
VZ1:subst([PHL72],PHL61);
PHL62:last(rhs(PHL6));
PHL81:log(2*(s-z));
PHL82:PHL81=diff(PHL81,z,1);
VZ2:subst([PHL82],PHL62);
VZ02:v[2]=VZ1+VZ2;
VZ021:lhs(VZ02)=subst([U[z]=U,z=L,L-s=
 abs(z-s),U=U[z]],VZ1);
DV02:-U[z]*'diff(S(s),s,2)/(4*%pi*
 abs(z-s));
assume(L-s>0,N>0);
diff(PHL21,z,1);
DVZ03:subst([r=0,Q4],%);
VZ031:v[3]='integrate(%,s,0,L);
S2:S[0]*1/2*(1-cos(2*%pi*s/L));
DS2:diff(S2,s,1);
DDS2:diff(S2,s,2);
DZ1:dz=L/N;
ZK1:z=(k-1)*dz;
SJ1:s=dz/2+(j-1)*dz;
ZK2:subst([DZ1],rhs(ZK1));
subst(['diff(S(s),s,1)=DS2],DVZ03*dz);
subst([U[z]=U,ZK1,SJ1,DZ1],%);
v[k]=factor(sum(%,j,1,N));
VK3:rhs(%);
subst(['diff(S(s),s,2)=DDS2],DV02*dz);
subst([U[z]=U,ZK1,SJ1,DZ1],%);
v[k]=factor(sum(%,j,1,N));
VK2:rhs(%);
N1:100;
IN1:[N=N1,L=1,S[0]=0.03,U=1];
ZK3:subst([IN1],ZK2);
subst([IN1],VK2);
VK21:ev(%,sum);
list1:[[float(subst([k=1],ZK3)),float(
 subst([k=1],VK21))]];
for m:2 thru N1+1 do(list1:append(list1,
 [[float(subst([k=m],ZK3)),float(subst(
 [k=m],VK21))]]));
subst([IN1],VK3);
VK31:ev(%,sum);
list2:[[float(subst([k=1],ZK3)),float(
 subst([k=1],VK31))]];
```

```
for m:2 thru N1+1 do(list2:append(list2,
 [[float(subst([k=m],ZK3)),float(subst([
 k=m],VK31))]]));
plot2d([[discrete,list1],[discrete,list2]],
 [x,-0.1,1.1]);
```

(7.4.14) 式で得られた速度ポテンシャルから細長体近似の場合の z 軸方向の速度を求める。z 軸方向の速度に関連する項は右辺第一項と右辺第三項である。これを z で微分し z 軸方向の速度を求めると下記となる。積分範囲と $z-s$ の正負を考慮してまとめると、

$$\begin{aligned} v_2 &= -\frac{U_z \int_0^z \frac{\frac{d^2}{d\,s^2}\,\mathrm{S}(s)}{z-s} ds}{4\,\pi} - \frac{\int_z^L \frac{\frac{d^2}{d\,s^2}\,\mathrm{S}(s)}{s-z} ds\,U_z}{4\,\pi} \\ &= -\frac{U_z \int_0^L \frac{\frac{d^2}{d\,s^2}\,\mathrm{S}(s)}{|z-s|} ds}{4\,\pi} \end{aligned} \tag{7.4.15}$$

(7.4.11) 式で得られた速度ポテンシャルから、細長体近似と同じわき出し流量を用いた三次元軸対象の速度ポテンシャルの場合の z 軸方向の速度を求めると下記となる。

$$v_3 = \frac{U_z \int_0^L \frac{\frac{d}{d\,s}\,\mathrm{S}(s)}{(z-s)\,|z-s|} ds}{4\,\pi} \tag{7.4.16}$$

上記の v_2, v_3 の比較を行う。細長体の断面積分布：$S(s)$ として次式とする。計算条件：$N = 100, L = 1, S_0 = 0.03, U = 1$ のときの比較図を下記に示す。両者、概ね一致しており、細長体近似の妥当性が示された。

$$S(s) = \frac{S_0\,\left(1 - \cos\left(\frac{2\,\pi\,s}{L}\right)\right)}{2}$$

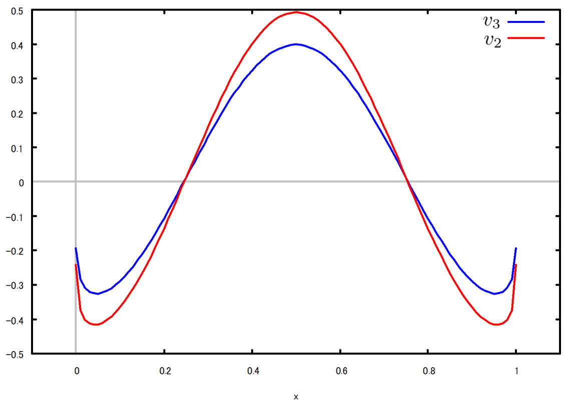


図 7.4.3: z 軸方向誘導流速比較

7.4.3　細長体に作用する横力

物体に作用する力を求める方法には、圧力を積分する方法と運動量変化から求める方法とがある。ここでは圧力を積分する方法から細長体に作用する横力を求める [1]。上図に示すような細長体と共に移動する物体固定の検査

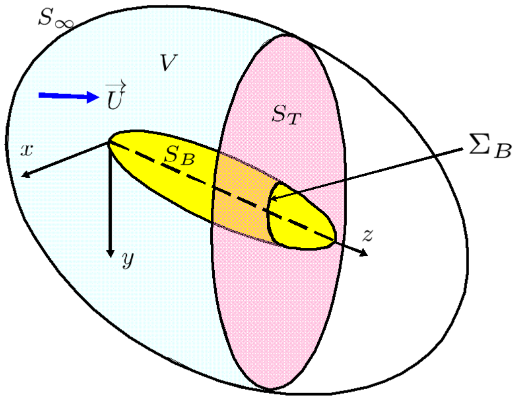


図 7.4.4: 積分領域

面を考える。この図で S_∞ は物体から十分離れた検査面、S_T は物体を横断する検査面でで、物体を除いた流体部分、S_B は S_T より前方の物体表面の検査面を表わす。V は S_∞, S_T, S_B で囲まれた体積を表す。撹乱速度ポテンシャル：ϕ とする。ここではベクトル表記しており、$\vec{U}$ は流速、$\vec{n}$ は物体表面に垂直な単位ベクトルで物体の内方向を正とする。∇ は下記の $gradient$ を表す。

$$\nabla = grad(A) = \begin{pmatrix} \frac{d}{dx}A \\ \frac{d}{dy}A \\ \frac{d}{dz}A \end{pmatrix}$$

このとき圧力は (7.4.6) 式を使う。物体先端から S_T まで即ち、物体表面：S_B に作用する力：$\vec{F}$ は圧力積分により次式で表わされる。

$$\vec{F} = -\rho \iint_{S_B} \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left\{ -2\vec{U}\nabla\phi + (\nabla\phi)^2 \right\} \right] \vec{n} dS \tag{7.4.17}$$

上式を下記のように分解し、

$$\vec{F} = \rho \iint_{S_B} (\vec{U}\nabla\phi)\vec{n} dS - \underline{\rho \iint_{S_B} \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 \right\} \vec{n} dS} \tag{7.4.18}$$

A.2 Gauss の定理（653 ページ ）を利用し、上式の下線部を次のように置き、下記のように分解する。

$$\iiint_V \nabla g dV = \iint_S g\vec{n} dS, \quad g = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2$$

$$\iiint_V \frac{\partial}{\partial t}\nabla\phi dV + \iiint_V \frac{1}{2}\nabla(\nabla\phi)^2 dV = \iint_{S_\infty + S_T} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 \right) \vec{n} dS + \underline{\iint_{S_B} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 \right) \vec{n} dS} \tag{7.4.19}$$

上式の下線部分を (7.4.18) 式の下線部分と入れ替えると、

$$\vec{F} = \rho \iint_{S_B} (\vec{U}\nabla\phi)\vec{n} dS + \rho \iint_{S_\infty + S_T} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 \right) \vec{n} dS - \underline{\rho \iiint_V \frac{\partial}{\partial t}\nabla\phi dV} - \rho \iiint_V \frac{1}{2}\nabla(\nabla\phi)^2 dV \tag{7.4.20}$$

[1] Marine Hydrodynamics, Chapter 7 Hydrodynamics of Slender Bodies, 7.3 The Lateral Force, P.338 [21)]

Transport Theorem を利用し、h を次のように置き、上式の下線部を下記のように分解する。

$$\frac{d}{dt}\iiint_V h dV=\iiint_V \frac{\partial h}{\partial t}dV+\iint_S h(\overrightarrow{U}\cdot\overrightarrow{n})dS,\quad h=\nabla\phi$$

$$\rho\frac{d}{dt}\iiint_V \nabla\phi dV=\underline{\rho\iiint_V \frac{\partial}{\partial t}\nabla\phi dV}+\rho\iint_{S_B+S_T+S_\infty}\nabla\phi(\overrightarrow{U}\cdot\overrightarrow{n})dS \tag{7.4.21}$$

上式の下線部分を (7.4.20) 式の下線部分と入れ替えると、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{F}=&\rho\iint_{S_B}(\overrightarrow{U}\nabla\phi)\overrightarrow{n}dS+\rho\iint_{S_T+S_\infty}\left\{\frac{\partial\phi}{\partial t}+\underline{\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2}\right\}\overrightarrow{n}dS-\overline{\rho\frac{d}{dt}\iiint_V\nabla\phi dV}\\&+\rho\iint_{S_B+S_T+S_\infty}\nabla\phi(\overrightarrow{U}\cdot\overrightarrow{n})dS-\underline{\frac{1}{2}\rho\iiint_V\nabla(\nabla\phi)^2dV}\end{aligned} \tag{7.4.22}$$

A.2 Gauss の定理（653 ページ ）を利用し、上式の下線部を次のように置き、下記のように分解する。

$$\rho\iiint_V\nabla g dV=\rho\iint_S g\overrightarrow{n}dS,\quad g=\phi,\quad g=(\nabla\phi)^2$$

$$\overline{\iiint_V\nabla\phi dV}=\iint_{S_\infty+S_T+S_B}\phi\overrightarrow{n}dS \tag{7.4.23}$$

$$\underline{\frac{1}{2}\rho\iiint_V\nabla(\nabla\phi)^2dV}=\frac{1}{2}\rho\iint_{S_\infty+S_T+S_B}(\nabla\phi)^2\overrightarrow{n}dS \tag{7.4.24}$$

(7.4.23) 式を (7.4.22) 式の上線部に代入し、(7.4.24) 式を (7.4.22) 式の下線部に代入し、(7.4.22) 式の面積分の S_T+S_∞ が打ち消され、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{F}=&\rho\iint_{S_B}(\overrightarrow{U}\nabla\phi)\overrightarrow{n}dS+\rho\iint_{S_T+S_\infty}\frac{\partial\phi}{\partial t}\overrightarrow{n}dS-\rho\frac{d}{dt}\iint_{S_B+S_T+S_\infty}\phi\overrightarrow{n}dS+\rho\iint_{\underline{S_B}+S_T+S_\infty}\nabla\phi(\overrightarrow{U}\cdot\overrightarrow{n})dS\\&\underline{-\frac{1}{2}\rho\iint_{S_B}(\nabla\phi)^2\overrightarrow{n}dS}\end{aligned} \tag{7.4.25}$$

物体表面上：S_B では、$\overrightarrow{U}\cdot\overrightarrow{n}=\frac{\partial\phi}{\partial n}$ であるから、上式の下線部分をまとめ、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{F}=&\rho\iint_{S_B}(\overrightarrow{U}\nabla\phi)\overrightarrow{n}dS+\rho\iint_{S_T+S_\infty}\frac{\partial\phi}{\partial t}\overrightarrow{n}dS-\rho\frac{d}{dt}\iint_{S_B+S_T+S_\infty}\phi\overrightarrow{n}dS+\rho\iint_{S_T+S_\infty}\nabla\phi(\overrightarrow{U}\cdot\overrightarrow{n})dS\\&+\underline{\rho\iint_{S_B}\left\{\nabla\phi\frac{\partial\phi}{\partial n}-\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2\overrightarrow{n}\right\}dS}\end{aligned} \tag{7.4.26}$$

特異点のない領域の境界に作用する定常力は零であるから、

$$\rho\iint_{S_B+S_T+S_\infty}\left\{\frac{\partial\phi}{\partial n}\nabla\phi-\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2\overrightarrow{n}\right\}dS=0 \tag{7.4.27}$$

上式から (7.4.26) 式の下線部の積分領域が変わり、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{F}=&\rho\iint_{S_B}(\overrightarrow{U}\nabla\phi)\overrightarrow{n}dS+\underline{\rho\iint_{S_T+S_\infty}\frac{\partial\phi}{\partial t}\overrightarrow{n}dS}-\rho\frac{d}{dt}\iint_{S_B+S_T+S_\infty}\phi\overrightarrow{n}dS+\underline{\rho\iint_{S_T+S_\infty}\nabla\phi(\overrightarrow{U}\cdot\overrightarrow{n})dS}\\&\underline{-\rho\iint_{S_T+S_\infty}\left\{\nabla\phi\frac{\partial\phi}{\partial n}-\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2\overrightarrow{n}\right\}dS}\end{aligned} \tag{7.4.28}$$

上式の下線部の積分領域が同じであるので、これをまとめて、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{F}=&\rho\iint_{S_B}(\overrightarrow{U}\nabla\phi)\overrightarrow{n}dS-\rho\frac{d}{\underline{dt}}\iint_{S_B+S_T+\underline{S_\infty}}\phi\overrightarrow{n}dS\\&+\rho\iint_{S_T+\underline{S_\infty}}\left\{\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}-\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2\right)\overrightarrow{n}+\nabla\phi\left(\overrightarrow{U}\cdot\overrightarrow{n}-\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)\right\}dS\end{aligned} \tag{7.4.29}$$

無限遠の領域：S_∞ では、$\phi=0$, $\frac{\partial\phi}{\partial t}=0$, $\nabla\phi=0$ であり、$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+\overrightarrow{U}\cdot\nabla$ であるから、上式の下線部は、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{F}=&\rho\iint_{S_B}(\overrightarrow{U}\nabla\phi)\overrightarrow{n}\,dS-\rho\left(\frac{\partial}{\partial t}+\overrightarrow{U}\cdot\nabla\right)\iint_{S_B+\underline{S_T}}\phi\overrightarrow{n}\,dS\\&+\rho\iint_{S_T}\left\{\underline{\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}-\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2\right)\overrightarrow{n}}+\nabla\phi\left(\overrightarrow{U}\cdot\overrightarrow{n}-\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)\right\}dS\end{aligned}\tag{7.4.30}$$

S_B に作用する横断面内の力 $\overrightarrow{Y}$ のみを求める。S_T 面の $\overrightarrow{n}$ 項は z 軸方向となるので、これを消去し、次式の下線部はお互い消去でき、物体が細長く、横流れ角が小さいとすると上線部の S_T の領域では $\overrightarrow{U}\cdot\overrightarrow{n}-\frac{\partial\phi}{\partial n}\approx-U_z$ と書き換えることができ、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{Y}=&\underline{\rho\iint_{S_B}(\overrightarrow{U}\nabla\phi)\overrightarrow{n}\,dS}-\rho\frac{\partial}{\partial t}\iint_{S_B}\phi\overrightarrow{n}\,dS-\underline{\rho\iint_{S_B}(\overrightarrow{U}\cdot\nabla\phi)\overrightarrow{n}\,dS}+\rho\iint_{S_T}\nabla\overline{\phi\left(\overrightarrow{U}\cdot\overrightarrow{n}-\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)}dS\\=&-\rho\frac{\partial}{\partial t}\iint_{S_B}\phi\overrightarrow{n}\,dS-\rho U_z\iint_{S_T}\nabla\phi\,dS\end{aligned}\tag{7.4.31}$$

また、A.2 Gauss の定理（653 ページ ）次の関係式がある。ここで Σ_B は S_T と S_B の交差線の線積分を表し、$\overrightarrow{\mathcal{L}}$ は横断面：S_T における横断面内の力を示す。

$$\iint_{S_T}\nabla\phi\,dS=\oint_{\Sigma_B}\phi\overrightarrow{n}\,d\ell,\quad \overrightarrow{Y}=\int_0^z\overrightarrow{\mathcal{L}}\,dz\tag{7.4.32}$$

(7.4.31) 式と (7.4.32) 式から、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathcal{L}}\,dz=&\overrightarrow{Y}_{S_B+\Delta S_B}(z+dz)-\overrightarrow{Y}_{S_B}(z)\\=&-\rho\frac{\partial}{\partial t}\iint_{S_B+\Delta S_B}\phi\overrightarrow{n}\,dS+\rho\frac{\partial}{\partial t}\iint_{S_B}\phi\overrightarrow{n}\,dS-\rho U_z\oint_{\Sigma_B\text{ at z+dz}}\phi\overrightarrow{n}\,d\ell+\rho U_z\oint_{\Sigma_B\text{ at z}}\phi\overrightarrow{n}\,d\ell\\=&-\rho\frac{\partial}{\partial t}\iint_{\Delta S_B}\phi\overrightarrow{n}\,dS-\rho U_z\,dz\,\frac{\partial}{\partial z}\oint_{\Sigma_B\text{ at z}}\phi\overrightarrow{n}\,d\ell\end{aligned}$$

上式の右辺第一項は dz を小さいとすると、ΔS_B の面積分は Σ_B の線積分となるので、

$$\overrightarrow{\mathcal{L}}\,dz=-\rho\,dz\,\frac{\partial}{\partial t}\oint_{\Sigma_B\text{ at z}}\phi\overrightarrow{n}\,d\ell-\rho U_z\,dz\,\frac{\partial}{\partial z}\oint_{\Sigma_B\text{ at z}}\phi\overrightarrow{n}\,d\ell\tag{7.4.33}$$

以上から、横断面内の力：$\overrightarrow{\mathcal{L}}$ は次式となる。ここで速度ポテンシャル：ϕ は横断面内のものであり、(7.4.7) 式から二次元横断面の速度ポテンシャル：ϕ_2 で表現できる。

$$\overrightarrow{\mathcal{L}}=-\rho\left(\frac{\partial}{\partial t}+U_z\,\frac{\partial}{\partial z}\right)\oint_{\Sigma_B\text{ at z}}\phi_2\overrightarrow{n}\,d\ell\tag{7.4.34}$$

今、横方向（x 軸方向）流速：$U_x(z,t)$ とする。二次元横断面の撹乱速度ポテンシャル：ϕ_2 を次式のように置き、このとき $\overrightarrow{n}$ は物体表面上で下記の関係となる。

$$\phi_2=U_x(z,t)\,\phi_2',\quad \overrightarrow{n}=\frac{\partial}{\partial n}\,\phi_2'$$

上式を (7.4.34) 式に代入し、横方向の力：F_x は、

$$F_x=-\rho\left(\frac{\partial}{\partial t}+U_z\,\frac{\partial}{\partial z}\right)U_x(z,t)\oint_{\Sigma_B\text{ at z}}\phi_2'\frac{\partial}{\partial n}\,\phi_2'd\ell\tag{7.4.35}$$

ここで上式の線積分は (A.5.3) 式（655 ページ）から、x 軸方向の付加質量：m_{xx} とすると、流体の運動エネルギーは、

$$T=\frac{\rho}{2}\,m_{xx}U_x^2=\frac{\rho}{2}\iint\left(\frac{d}{dy}\,\Phi\right)^2+\left(\frac{d}{dx}\,\Phi\right)^2dxdy=-\frac{\rho}{2}\oint\Phi\frac{d}{dn}\,\Phi\,d\ell$$

上式の Φ を ϕ_2' に置き換えると、上式は単位流速あたりの運動エネルギー：T となり、x 軸方向の付加質量：m_{xx} は、

$$m_{xx}=\rho\oint_{\Sigma_B\text{ at z}}\phi_2'\frac{\partial}{\partial n}\,\phi_2'd\ell$$

以上から、横方向の力：F_x は下記となり、x 軸方向の流体の付加質量×速度→流体の運動量の変化が横力になっている。

$$F_x=-\left(\frac{\partial}{\partial t}+U_z\,\frac{\partial}{\partial z}\right)U_x(z,t)\,m_{xx}\tag{7.4.36}$$

7.4.4 細長い三角翼

細長い平板三角翼に作用する揚力を前節で示した細長物体に作用する横力の (7.4.36) 式を活用して求める。三角翼の先端角度 : θ、翼の長さ : Z_0、翼の後端翼幅 : B_Z、翼の前進速度 : U、迎角 : α、三角翼の揚力 : L とする。

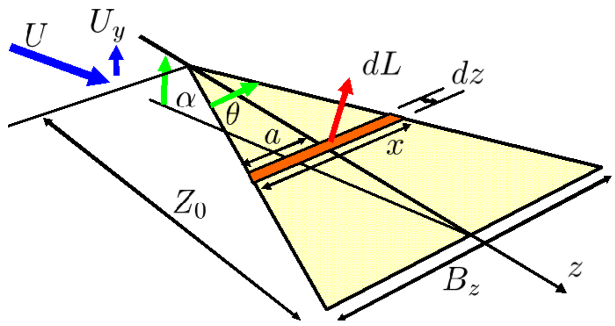


図 7.4.5: 細長い三角翼

```
/* 細長い三角翼 */
kill(all);
T1:T=%pi/2*\rho*(a^2*V[y]^2+b^2*V[x]^2);
T2:subst([V[x]=0],%);
T3:T=m*V[y]^2/2;
rhs(T2)=rhs(T3);
solve(%,m)[1];
MYY1:subst([m=m[yy](z)],%);
L1:dL=U*'diff(U[y]*m[yy](z),z,1);
UY1:U[y]=U*\alpha;
X0:a=x/2;
X1:x=\theta*z;
subst([UY1,MYY1,X0],L1);
subst([X1],%);
L2:ev(%,diff);
assume(Z[0]>0);
L3:L='integrate(rhs(L2),z,0,Z[0]);
L31:ev(%,integrate);
B1:B[z]=\theta*Z[0];
B2:solve(B1,\theta)[1];
subst([B2],L31);
```

長径 : a、短径 : b の楕円まわりの流体の運動エネルギー : T は (5.3.30) 式 (129 ページ) から下記となる。

$$T = \frac{\pi\,\rho\,\left(a^2\,V_y^2 + b^2\,V_x^2\right)}{2}$$

平板では $b = 0$ として、

$$T = \frac{\pi\,a^2\,\rho\,V_y^2}{2}$$

付加質量 : m と運動エネルギー : T の関係は、

$$T = \frac{m\,V_y^2}{2}$$

以上から、半幅 : a の平板の付加質量 : m は、

$$m = \pi\,a^2\,\rho$$

これを下記のように書き換えて、

$$m_{yy}(z) = \pi\,a^2\,\rho$$

平板三角翼の z における揚力 : dL は、前節の細長体に作用する横力の (7.4.36) 式から、下記のように書ける。

$$dL = \left(\frac{d}{d\,z}\,\left(U_y\,m_{yy}(z)\right)\right)\,U \tag{7.4.37}$$

ここで、下記の関係があり、

$$U_y = \alpha\,U, \quad a = \frac{x}{2}, \quad x = \theta\,z$$

上式を (7.4.37) 式に代入し、

$$\begin{aligned} dL =& U\,\left(\frac{d}{d\,z}\,\frac{\pi\,\alpha\,\rho\,x^2\,U}{4}\right) \\ =& U\,\left(\frac{d}{d\,z}\,\frac{\pi\,\alpha\,\rho\,\theta^2\,z^2\,U}{4}\right) \\ =& \frac{\pi\,\alpha\,\rho\,\theta^2\,z\,U^2}{2} \end{aligned}$$

上式を翼後端 : $z = Z_0$ まで積分し、三角翼の揚力 : L は、

$$\begin{aligned} L =& \frac{\pi}{2}\,\alpha\,\rho\,\theta^2\,\int_0^{Z_0} z dz\,U^2 \\ =& \frac{\pi\,Z_0^2\,\alpha\,\rho\,\theta^2\,U^2}{4} \end{aligned} \tag{7.4.38}$$

翼の後端翼幅 : $B_z = Z_0\,\theta$ で表現すると、

$$L = \frac{\pi\,\alpha\,\rho\,B_z^2\,U^2}{4} \tag{7.4.39}$$

第8章　粘性流体

8.1　Navier-Stokesの式等まとめ

非圧縮性流体の場合の各種座標系における Navier-Stokes の式、質量保存の方程式、変形速度ひずみの式を以降にまとめる。上記については、「2.6 Navier-Stokes の式 (23 頁)」に、「Navier-Stokes の式の座標変換」については「付録 B　座標変換 (660 頁)」に詳細に記述されているので、参照願う。

8.1.1　Navier-Stokesの式等 (x-y-z座標系)

$x-y-z$ 座標系の質量保存の方程式、変形速度と応力、Navier-Stokes の式をまとめる。$x-y-z$ 座標系の速度コンポーネントを u, v, w とする。圧力：p、密度：ρ、粘性係数：μ、動粘性係数：ν とする。

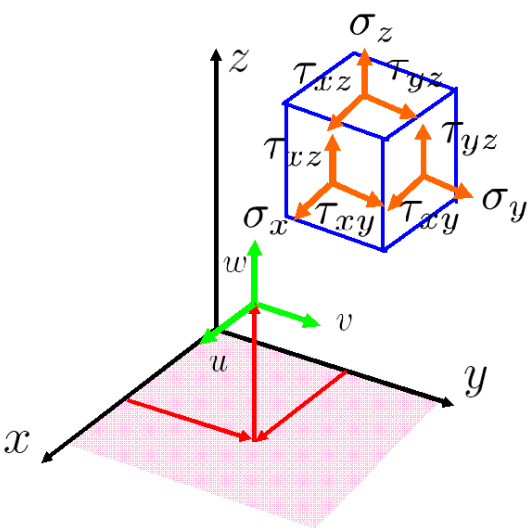


図 8.1.1: x-y-z 座標系

```
/* xyz座標の質量保存、ＮＳ方程式 */
kill(all);
load("vect")
V1:matrix([u,v,w]);
depends(u,[t,x,y,z]);
depends(v,[t,x,y,z]);
depends(w,[t,x,y,z]);
depends(p,[x,y,z]);
div(V1[1])=0;
MS1:express(%);
DT1:transpose(diff(V1,t,1));
grad(V1);
express(%);
ev(%,diff);
DM1:transpose(V1.%);
DD1:matrix(express(grad(u)),express(
 grad(v)),express(grad(w)));
DD:DD1+transpose(DD1);
STM1:matrix([\sigma[x],\tau[xy],\tau[xz]],
 [\tau[xy],\sigma[y],\tau[yz]],[\tau[xz],
 \tau[yz],\sigma[z]]);
STM2:STM1=\mu*DD;
div(DD[1]);
express(%);
PX1:ev(%,diff);
div(DD[2]);
express(%);
PX2:ev(%,diff);
div(DD[3]);
express(%);
PX3:ev(%,diff);
MSX1:diff(MS1,x,1);
MSX11:solve(%,'diff(w,x,1,z,1))[1];
MSY1:diff(MS1,y,1);
MSY11:solve(%,'diff(w,y,1,z,1))[1];
MSZ1:diff(MS1,z,1);
MSZ11:solve(%,'diff(v,y,1,z,1))[1];
DD2:matrix([subst([MSX11],PX1)],[subst(
 [MSY11],PX2)],[subst([MSZ11],PX3)]);
-grad(p);
PP1:transpose(express(%));
DT1+DM1=\nu*DD2+PP1/\rho;
```

流速：$\overrightarrow{V}$ はベクトル表記で下記となる。

$$\overrightarrow{V}=\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix} \tag{8.1.1}$$

上式の div をとることで、下記の質量保存の方程式が得られる。

$$\frac{d}{d\,z}\,w+\frac{d}{d\,y}\,v+\frac{d}{d\,x}\,u=0 \tag{8.1.2}$$

Navier-Stokes の式のベクトル表記は、「2.6 Navier-Stokes の式 (2.6.4) 式、24 頁」から、

$$\rho\left(\frac{d}{d\,t}\,\overrightarrow{V}+\left(\overrightarrow{V}\cdot grad\right)\overrightarrow{V}\right)=F-grad\left(p\right)+\mu\nabla^2\overrightarrow{V} \tag{8.1.3}$$

(2.6.2) 式から変形速度ひずみは下記となる。各速度コンポーネント：u,v,w の $grad$ をとり D とする。D とその転置行列：D^T の和から、変形速度ひずみが得られ、

$$D=\begin{pmatrix}\frac{d}{d\,x}\,u & \frac{d}{d\,y}\,u & \frac{d}{d\,z}\,u\\ \frac{d}{d\,x}\,v & \frac{d}{d\,y}\,v & \frac{d}{d\,z}\,v\\ \frac{d}{d\,x}\,w & \frac{d}{d\,y}\,w & \frac{d}{d\,z}\,w\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}e_{xe} & e_{xy} & e_{xz}\\ e_{xy} & e_{yy} & e_{yz}\\ e_{xz} & e_{yz} & e_{zz}\end{pmatrix}=D+D^T=\begin{pmatrix}2\,\left(\frac{d}{d\,x}\,u\right) & \frac{d}{d\,x}\,v+\frac{d}{d\,y}\,u & \frac{d}{d\,x}\,w+\frac{d}{d\,z}\,u\\ \frac{d}{d\,x}\,v+\frac{d}{d\,y}\,u & 2\,\left(\frac{d}{d\,y}\,v\right) & \frac{d}{d\,y}\,w+\frac{d}{d\,z}\,v\\ \frac{d}{d\,x}\,w+\frac{d}{d\,z}\,u & \frac{d}{d\,y}\,w+\frac{d}{d\,z}\,v & 2\,\left(\frac{d}{d\,z}\,w\right)\end{pmatrix} \tag{8.1.4}$$

応力テンソルは、上式に μ を掛け、

$$\begin{pmatrix}\sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz}\\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z\end{pmatrix}=\mu\,\left(D+D^T\right)=\begin{pmatrix}2\,\mu\,\left(\frac{d}{d\,x}\,u\right) & \mu\,\left(\frac{d}{d\,x}\,v+\frac{d}{d\,y}\,u\right) & \mu\,\left(\frac{d}{d\,x}\,w+\frac{d}{d\,z}\,u\right)\\ \mu\,\left(\frac{d}{d\,x}\,v+\frac{d}{d\,y}\,u\right) & 2\,\mu\,\left(\frac{d}{d\,y}\,v\right) & \mu\,\left(\frac{d}{d\,y}\,w+\frac{d}{d\,z}\,v\right)\\ \mu\,\left(\frac{d}{d\,x}\,w+\frac{d}{d\,z}\,u\right) & \mu\,\left(\frac{d}{d\,y}\,w+\frac{d}{d\,z}\,v\right) & 2\,\mu\,\left(\frac{d}{d\,z}\,w\right)\end{pmatrix} \tag{8.1.5}$$

次に、Navier-Stokes の式を求める。(8.1.3) 式左辺の慣性項について、次式で得られる。

$$\frac{d}{d\,t}\,\overrightarrow{V}+\left(\overrightarrow{V}\cdot grad\right)\overrightarrow{V}=\begin{pmatrix}\frac{d}{d\,t}\,u\\ \frac{d}{d\,t}\,v\\ \frac{d}{d\,t}\,w\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\left(\frac{d}{d\,z}\,u\right)\,w+\left(\frac{d}{d\,y}\,u\right)\,v+u\,\left(\frac{d}{d\,x}\,u\right)\\ \left(\frac{d}{d\,z}\,v\right)\,w+v\,\left(\frac{d}{d\,y}\,v\right)+u\,\left(\frac{d}{d\,x}\,v\right)\\ w\,\left(\frac{d}{d\,z}\,w\right)+v\,\left(\frac{d}{d\,y}\,w\right)+u\,\left(\frac{d}{d\,x}\,w\right)\end{pmatrix} \tag{8.1.6}$$

粘性力：P_x,P_y,P_z は、応力テンソルの div をとると得られ下記となる。

$$\begin{aligned}P_x=&\frac{d}{d\,x}\,\sigma_x+\frac{d}{d\,y}\,\tau_{xy}+\frac{d}{d\,z}\,\tau_{xz}=\mu\,\left(\frac{d^2}{d\,x\,d\,z}\,w+\frac{d^2}{d\,x\,d\,y}\,v+\frac{d^2}{d\,z^2}\,u+\frac{d^2}{d\,y^2}\,u+2\,\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,u\right)\right)\\ P_y=&\frac{d}{d\,x}\,\tau_{xy}+\frac{d}{d\,y}\,\sigma_y+\frac{d}{d\,z}\,\tau_{yz}=\mu\,\left(\frac{d^2}{d\,y\,d\,z}\,w+\frac{d^2}{d\,z^2}\,v+2\,\left(\frac{d^2}{d\,y^2}\,v\right)+\frac{d^2}{d\,x^2}\,v+\frac{d^2}{d\,x\,d\,y}\,u\right)\\ P_z=&\frac{d}{d\,x}\,\tau_{xz}+\frac{d}{d\,y}\,\tau_{yz}+\frac{d}{d\,z}\,\sigma_z=\mu\,\left(2\,\left(\frac{d^2}{d\,z^2}\,w\right)+\frac{d^2}{d\,y^2}\,w+\frac{d^2}{d\,x^2}\,w+\frac{d^2}{d\,y\,d\,z}\,v+\frac{d^2}{d\,x\,d\,z}\,u\right)\end{aligned}$$

上式に (8.1.2) 式の質量保存の方程式を用いると、(8.1.3) 式右辺第三項の粘性項が得られる。

$$\mu\nabla^2\overrightarrow{V}=\begin{pmatrix}P_x\\P_y\\P_z\end{pmatrix}=\mu\,\begin{pmatrix}\frac{d^2}{d\,z^2}\,u+\frac{d^2}{d\,y^2}\,u+\frac{d^2}{d\,x^2}\,u\\ \frac{d^2}{d\,z^2}\,v+\frac{d^2}{d\,y^2}\,v+\frac{d^2}{d\,x^2}\,v\\ \frac{d^2}{d\,z^2}\,w+\frac{d^2}{d\,y^2}\,w+\frac{d^2}{d\,x^2}\,w\end{pmatrix} \tag{8.1.7}$$

圧力項は、

$$-grad\left(p\right)=-\begin{pmatrix}\frac{d}{d\,x}\,p\\ \frac{d}{d\,y}\,p\\ \frac{d}{d\,z}\,p\end{pmatrix} \tag{8.1.8}$$

以上をまとめると、Navier-Stokes の式は次式となる。

$$\begin{pmatrix}\rho\,\left(\left(\frac{d}{d\,z}\,u\right)\,w+\left(\frac{d}{d\,y}\,u\right)\,v+u\,\left(\frac{d}{d\,x}\,u\right)+\frac{d}{d\,t}\,u\right)\\ \rho\,\left(\left(\frac{d}{d\,z}\,v\right)\,w+v\,\left(\frac{d}{d\,y}\,v\right)+u\,\left(\frac{d}{d\,x}\,v\right)+\frac{d}{d\,t}\,v\right)\\ \rho\,\left(w\,\left(\frac{d}{d\,z}\,w\right)+v\,\left(\frac{d}{d\,y}\,w\right)+u\,\left(\frac{d}{d\,x}\,w\right)+\frac{d}{d\,t}\,w\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}F_x+\mu\,\left(\frac{d^2}{d\,z^2}\,u+\frac{d^2}{d\,y^2}\,u+\frac{d^2}{d\,x^2}\,u\right)-\frac{d}{d\,x}\,p\\ F_y+\mu\,\left(\frac{d^2}{d\,z^2}\,v+\frac{d^2}{d\,y^2}\,v+\frac{d^2}{d\,x^2}\,v\right)-\frac{d}{d\,y}\,p\\ F_z+\mu\,\left(\frac{d^2}{d\,z^2}\,w+\frac{d^2}{d\,y^2}\,w+\frac{d^2}{d\,x^2}\,w\right)-\frac{d}{d\,z}\,p\end{pmatrix} \tag{8.1.9}$$

8.1.2 Navier-Stokes の式等 (円柱座標系)

円柱座標 $r-\theta-z$ 系の質量保存の方程式、変形速度と応力、Navier-Stokes の式をまとめる。$r-\theta-z$ 座標系の速度コンポーネントを v_r, v_θ, v_z とする。圧力：p、密度：ρ、粘性係数：μ、動粘性係数：ν とする。

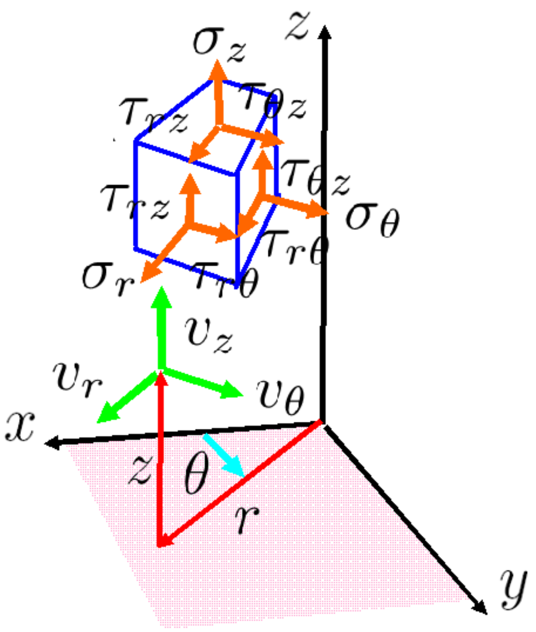


図 8.1.2: 円柱座標系

```
/* 円柱座標系 */
depends(r,[t,x,y]);
depends(\theta,[t,x,y]);
depends(z,[t]);
depends(f,[t,r,\theta,z]);
depends(g,[t,r,\theta,z]);
depends(h,[t,r,\theta,z]);
depends(q,[t,r,\theta,z]);
WRTZ:matrix([f],[g],[h]);
XR:x=r*cos(\theta);
YR:y=r*sin(\theta);
LXR1:diff(XR,x,1);
LYR1:diff(YR,x,1);
solve([LXR1,LYR1],['diff(r,x,1),
 'diff(\theta,x,1)]);
LXYR1:trigrat(%)[1];
LXR2:diff(XR,y,1);
LYR2:diff(YR,y,1);
solve([LXR2,LYR2],['diff(r,y,1),
 'diff(\theta,y,1)]);
LXYR2:trigrat(%)[1];
LXR11:diff(XR,x,2);
LYR11:diff(YR,x,2);
solve([LXR11,LYR11],['diff(r,x,2),
 'diff(\theta,x,2)]);
LXYR11:trigrat(%)[1];
LXR21:diff(XR,y,2);
LYR21:diff(YR,y,2);
solve([LXR21,LYR21],['diff(r,y,2),
 'diff(\theta,y,2)]);
LXYR21:trigrat(%)[1];
TR:matrix([cos(\theta),sin(\theta),0],
 [-sin(\theta),cos(\theta),0],[0,0,1]);
TR1:transpose(TR);
WRTZ1:transpose(V1)=TR1.WRTZ;
WA1:lhs(WRTZ1)[1][1]=rhs(WRTZ1)[1][1];
WB1:lhs(WRTZ1)[2][1]=rhs(WRTZ1)[2][1];
WC1:lhs(WRTZ1)[3][1]=rhs(WRTZ1)[3][1];
```

Maxima の処理の都合上、円柱座標 $r-\theta-z$ 系の速度コンポーネント：v_r, v_θ, v_z を表す f, g, h を導入する。ここで f, g, h は、r, θ, z の関数とする。

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} v_r \\ v_\theta \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix}$$

x, y, z と r, θ, z の関係は、

$$\begin{aligned}
x =& r\cos(\theta), \quad y = r\sin(\theta) \\
\frac{d}{dx} r =& \cos(\theta), \frac{d}{dx}\theta = -\frac{\sin(\theta)}{r} \\
\frac{d}{dy} r =& \sin(\theta), \frac{d}{dy}\theta = \frac{\cos(\theta)}{r} \\
\frac{d^2}{dx^2} r =& r\left(\frac{d}{dx}\theta\right)^2, \frac{d^2}{dx^2}\theta = -\frac{2\left(\frac{d}{dx}r\right)\left(\frac{d}{dx}\theta\right)}{r} \\
\frac{d^2}{dy^2} r =& r\left(\frac{d}{dy}\theta\right)^2, \frac{d^2}{dy^2}\theta = -\frac{2\left(\frac{d}{dy}r\right)\left(\frac{d}{dy}\theta\right)}{r}
\end{aligned} \tag{8.1.10}$$

$x-y-z$ 座標系から $r-\theta-z$ 座標系へ変換する変換マトリックス：TR は下記となる。

$$TR = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{8.1.11}$$

変換マトリックス TR の転置マトリックス：TR^T を使って、$x-y-z$ 座標系の流速：u, v, w と $r-\theta-z$ 座標系

の流速：f, g, h の関係は下記となる。

$$\overrightarrow{V} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = TR^T \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f\cos(\theta) - g\sin(\theta) \\ f\sin(\theta) + g\cos(\theta) \\ h \end{pmatrix} \tag{8.1.12}$$

```
subst([WA1,WB1,WC1],MS1);
ev(%,diff);
subst(LXYR1,%);
subst(LXYR2,%);
MSRTZ1:expand(trigsimp(%));
subst([f=v[r],g=v[\theta],h=v[z],q=p],%);
subst([WA1,WB1,WC1],DD);
ev(%,diff);
subst(LXYR1,%);
subst(LXYR2,%);
DDT:%;
DDT.TR1;
TR.%;
DDRTZ1:trigsimp(%);
DD11:subst([f=v[r],g=v[\theta],h=v[z],
 q=p],%);
DD12:subst([x=r,y=t,xy=rt,xz=rz,yz=tz],
 STM1)=\mu*%;
SG111:lhs(DD12)[1][1]=DD11[1][1];
SG121:lhs(DD12)[1][2]=DD11[1][2];
SG131:lhs(DD12)[1][3]=DD11[1][3];
SG221:lhs(DD12)[2][2]=DD11[2][2];
SG231:lhs(DD12)[2][3]=DD11[2][3];
SG331:lhs(DD12)[3][3]=DD11[3][3];
```

$x-y-z$ 座標系の質量保存の方程式：(8.1.2) 式に (8.1.12) 式を代入し、微分を実行し、(8.1.10) 式を代入すると、下記の $r-\theta-z$ 座標系の質量保存の方程式が得られる。

$$\frac{d}{d\,z}\,v_z + \frac{\frac{d}{d\,\theta}\,v_\theta}{r} + \frac{d}{d\,r}\,v_r + \frac{v_r}{r} = 0 \tag{8.1.13}$$

$x-y-z$ 座標系の変形速度ひずみ:(8.1.4) 式に (8.1.12) 式を代入し、微分を実行し、(8.1.10) 式を代入する。ここでテンソル：C の座標変換は、「付録 C　Maxima によるベクトルとテンソル演算　C.4.3 テンソルの座標変換 (695 頁)」に示されている $C' = TR.C.TR^T$ で得られる。結果を下記に示す。

$$\begin{pmatrix} 2\left(\frac{d}{d\,r}\,f\right) & \frac{\left(\frac{d}{d\,r}\,g\right)r-g+\frac{d}{d\,\theta}\,f}{r} & \frac{d}{d\,r}\,h+\frac{d}{d\,z}\,f \\ \frac{\left(\frac{d}{d\,r}\,g\right)r-g+\frac{d}{d\,\theta}\,f}{r} & \frac{2\left(\frac{d}{d\,\theta}\,g\right)+2\,f}{r} & \frac{\left(\frac{d}{d\,z}\,g\right)r+\frac{d}{d\,\theta}\,h}{r} \\ \frac{d}{d\,r}\,h+\frac{d}{d\,z}\,f & \frac{\left(\frac{d}{d\,z}\,g\right)r+\frac{d}{d\,\theta}\,h}{r} & 2\left(\frac{d}{d\,z}\,h\right) \end{pmatrix}$$

```
diff(rhs(WRTZ1),t,1);
subst(['diff(r,t,1)=f,'diff(theta,t,1)=g/r,
 'diff(z,t,1)=h,'diff(x,t,1)=0,
 'diff(y,t,1)=0],%);
TR.%;
DMRTZ1:expand(trigsimp(%));
subst([WA1,WB1,WC1],DD2);
ev(%,diff);
subst(LXYR11,%);
subst(LXYR21,%);
subst(LXYR1,%);
subst(LXYR2,%);
TR.%;
DD2RTZ1:expand(trigsimp(%));
subst([WA1,WB1,WC1,p=q],PP1);
ev(%,diff);
subst(LXYR1,%);
subst(LXYR2,%);
TR.%;
PPRTZ1:expand(trigsimp(%));
\rho*DMRTZ1=\mu*DD2RTZ1+PPRTZ1+matrix(
 [F[r]],[F[\theta]],[F[z]]);
NAV2:subst([f=v[r],g=v[\theta],h=v[z],
 q=p],%);
```

以上から、応力テンソルは次式となり、

$$\begin{pmatrix}\sigma_r & \tau_{r\theta} & \tau_{rz}\\ \tau_{r\theta} & \sigma_\theta & \tau_{\theta z}\\ \tau_{rz} & \tau_{\theta z} & \sigma_z\end{pmatrix} = \mu\begin{pmatrix}e_{rr} & e_{r\theta} & e_{rz}\\ e_{r\theta} & e_{\theta\theta} & e_{\theta z}\\ e_{rz} & e_{\theta z} & e_{zz}\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2\,\mu\,\left(\frac{d}{d\,r}\,v_r\right) & \frac{\mu\left(r\,\left(\frac{d}{d\,r}\,v_\theta\right)-v_\theta+\frac{d}{d\,\theta}\,v_r\right)}{r} & \mu\,\left(\frac{d}{d\,r}\,v_z+\frac{d}{d\,z}\,v_r\right)\\ \frac{\mu\left(r\,\left(\frac{d}{d\,r}\,v_\theta\right)-v_\theta+\frac{d}{d\,\theta}\,v_r\right)}{r} & \frac{\mu\left(2\,\left(\frac{d}{d\,\theta}\,v_\theta\right)+2\,v_r\right)}{r} & \frac{\mu\left(\frac{d}{d\,\theta}\,v_z+r\,\left(\frac{d}{d\,z}\,v_\theta\right)\right)}{r}\\ \mu\,\left(\frac{d}{d\,r}\,v_z+\frac{d}{d\,z}\,v_r\right) & \frac{\mu\left(\frac{d}{d\,\theta}\,v_z+r\,\left(\frac{d}{d\,z}\,v_\theta\right)\right)}{r} & 2\,\mu\,\left(\frac{d}{d\,z}\,v_z\right)\end{pmatrix}$$

変形速度ひずみ、応力テンソルの各項は下記となる。

$$\begin{aligned}\sigma_r =&\mu\,e_{rr}=2\,\mu\left(\frac{d}{d\,r}\,v_r\right),\quad \tau_{r\theta}=\mu\,e_{r\theta}=\mu\,\left(\frac{r\,\left(\frac{d}{d\,r}\,v_\theta\right)-v_\theta+\frac{d}{d\,\theta}\,v_r}{r}\right)\\ \tau_{rz} =&\mu\,e_{rz}=\mu\,\left(\frac{d}{d\,r}\,v_z+\frac{d}{d\,z}\,v_r\right),\quad \sigma_\theta=\mu\,e_{\theta\theta}=\mu\,\left(\frac{2\,\left(\frac{d}{d\,\theta}\,v_\theta\right)+2\,v_r}{r}\right)\\ \tau_{\theta z} =&\mu\,e_{\theta z}=\mu\,\left(\frac{\frac{d}{d\,\theta}\,v_z+r\,\left(\frac{d}{d\,z}\,v_\theta\right)}{r}\right),\quad \sigma_z=\mu\,e_{zz}=2\,\mu\left(\frac{d}{d\,z}\,v_z\right)\end{aligned} \tag{8.1.14}$$

Navier-Stokes の式の慣性項は物質微分を直接実行して求める。(8.1.12) 式を時間 : t で微分し、(8.1.10) 式および $\frac{d}{d\,t}\,r=f, \frac{d}{d\,t}\,\theta=g/r, \frac{d}{d\,t}\,z=h$ を代入し、変換マトリックス : TR を掛けて整理すると、下記の $r-\theta-z$ 座標系の慣性項が得られる。

$$\frac{d}{d\,t}\begin{pmatrix}f\cos(\theta)-g\sin(\theta)\\ f\sin(\theta)+g\cos(\theta)\\ h\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}-\frac{g^2}{r}+\frac{\left(\frac{d}{d\,\theta}\,f\right)g}{r}+\left(\frac{d}{d\,z}\,f\right)\,h+\frac{d}{d\,t}\,f+f\,\left(\frac{d}{d\,r}\,f\right)\\ \frac{g\left(\frac{d}{d\,\theta}\,g\right)}{r}+\frac{f\,g}{r}+\left(\frac{d}{d\,z}\,g\right)\,h+\frac{d}{d\,t}\,g+f\,\left(\frac{d}{d\,r}\,g\right)\\ \frac{g\left(\frac{d}{d\,\theta}\,h\right)}{r}+h\,\left(\frac{d}{d\,z}\,h\right)+\frac{d}{d\,t}\,h+f\,\left(\frac{d}{d\,r}\,h\right)\end{pmatrix}$$

同様に、$x-y-z$ 座標系の Navier-Stokes の式で粘性項 : (8.1.7) 式に (8.1.12) 式を代入し、微分を実行し、(8.1.10) 式を代入し、変換マトリックス : TR を掛けて整理すると、下記の $r-\theta-z$ 座標系の粘性項が得られる。

$$\text{粘性項 : (8.1.7) 式}\rightarrow\begin{pmatrix}\frac{\frac{d}{d\,r}\,f}{r}-\frac{2\left(\frac{d}{d\,\theta}\,g\right)}{r^2}+\frac{\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,f}{r^2}-\frac{f}{r^2}+\frac{d^2}{d\,z^2}\,f+\frac{d^2}{d\,r^2}\,f\\ \frac{\frac{d}{d\,r}\,g}{r}+\frac{\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,g}{r^2}-\frac{g}{r^2}+\frac{2\left(\frac{d}{d\,\theta}\,f\right)}{r^2}+\frac{d^2}{d\,z^2}\,g+\frac{d^2}{d\,r^2}\,g\\ \frac{\frac{d}{d\,r}\,h}{r}+\frac{\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,h}{r^2}+\frac{d^2}{d\,z^2}\,h+\frac{d^2}{d\,r^2}\,h\end{pmatrix}$$

$x-y-z$ 座標系の Navier-Stokes の式で圧力項 : (8.1.8) 式に $p\rightarrow q$ の置き換えを行ない、q を r,θ,z の関数とする。微分を実行し、(8.1.10) 式を代入し、変換マトリックス : TR を掛けて整理すると、下記の $r-\theta-z$ 座標系の圧力項が得られる。

$$\text{圧力項 : (8.1.8) 式}\rightarrow-\begin{pmatrix}\frac{d}{d\,r}\,q\\ \frac{\frac{d}{d\,\theta}\,q}{r}\\ \frac{d}{d\,z}\,q\end{pmatrix}$$

以上をまとめ、$f,g,h\rightarrow v_r,v_\theta,v_z$ の置き換えを行うと円柱座標 $r-\theta-z$ 系の Navier-Stokes の式が次式で得られる。

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix}\rho\,\left(\left(\frac{d}{d\,z}\,v_r\right)\,v_z-\frac{v_\theta^2}{r}+\frac{\left(\frac{d}{d\,\theta}\,v_r\right)v_\theta}{r}+\frac{d}{d\,t}\,v_r+v_r\,\left(\frac{d}{d\,r}\,v_r\right)\right)\\ \rho\,\left(\left(\frac{d}{d\,z}\,v_\theta\right)\,v_z+\frac{v_\theta\left(\frac{d}{d\,\theta}\,v_\theta\right)}{r}+\frac{d}{d\,t}\,v_\theta+v_r\,\left(\frac{d}{d\,r}\,v_\theta\right)+\frac{v_r\,v_\theta}{r}\right)\\ \rho\,\left(v_z\,\left(\frac{d}{d\,z}\,v_z\right)+\frac{v_\theta\left(\frac{d}{d\,\theta}\,v_z\right)}{r}+\frac{d}{d\,t}\,v_z+v_r\,\left(\frac{d}{d\,r}\,v_z\right)\right)\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}\mu\,\left(-\frac{2\left(\frac{d}{d\,\theta}\,v_\theta\right)}{r^2}+\frac{d^2}{d\,z^2}\,v_r+\frac{\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,v_r}{r^2}+\frac{d^2}{d\,r^2}\,v_r+\frac{\frac{d}{d\,r}\,v_r}{r}-\frac{v_r}{r^2}\right)+F_r-\frac{d}{d\,r}\,p\\ \mu\,\left(\frac{d^2}{d\,z^2}\,v_\theta+\frac{\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,v_\theta}{r^2}+\frac{d^2}{d\,r^2}\,v_\theta+\frac{\frac{d}{d\,r}\,v_\theta}{r}-\frac{v_\theta}{r^2}+\frac{2\left(\frac{d}{d\,\theta}\,v_r\right)}{r^2}\right)+F_\theta-\frac{\frac{d}{d\,\theta}\,p}{r}\\ \mu\,\left(\frac{d^2}{d\,z^2}\,v_z+\frac{\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,v_z}{r^2}+\frac{d^2}{d\,r^2}\,v_z+\frac{\frac{d}{d\,r}\,v_z}{r}\right)+F_z-\frac{d}{d\,z}\,p\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{8.1.15}$$

8.1.3 Navier-Stokes の式等 (極座標系)

極座標 $\theta-\phi-r$ 系の質量保存の方程式、変形速度と応力、Navier-Stokes の式をまとめる。$\theta-\phi-r$ 座標系の速度コンポーネントを v_θ, v_ϕ, v_r とする。圧力：p、密度：ρ、粘性係数：μ、動粘性係数：ν とする。

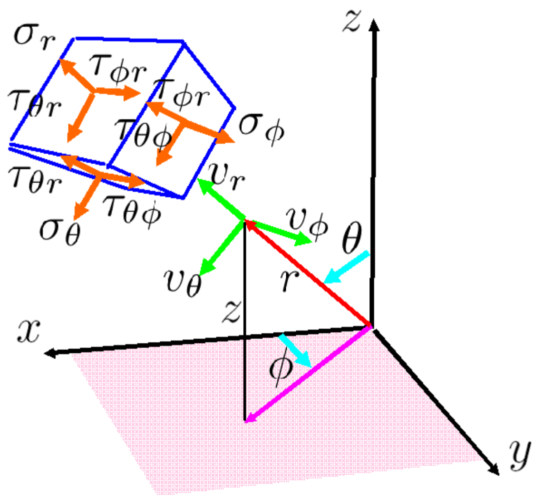


図 8.1.3: 極座標系

```
/* 極座標系 */
depends(r,[t,x,y,z]);
depends(\phi,[t,x,y,z]);
depends(\theta,[t,x,y,z]);
XR:x=r*sin(\theta)*cos(\phi);
YR:y=r*sin(\theta)*sin(\phi);
ZR:z=r*cos(\theta);
LXR1:diff(XR,x,1);
LYR1:diff(YR,x,1);
LZR1:diff(ZR,x,1);
solve([LXR1,LYR1,LZR1],['diff(r,x,1),
 'diff(\theta,x,1),'diff(\phi,x,1)]);
LXYZR1:trigsimp(%)[1];
LXR2:diff(XR,y,1);
LYR2:diff(YR,y,1);
LZR2:diff(ZR,y,1);
solve([LXR2,LYR2,LZR2],['diff(r,y,1),
 'diff(\theta,y,1),'diff(\phi,y,1)]);
LXYZR2:trigsimp(%)[1];
LXR3:diff(XR,z,1);
LYR3:diff(YR,z,1);
LZR3:diff(ZR,z,1);
solve([LXR3,LYR3,LZR3],['diff(r,z,1),
 'diff(\theta,z,1),'diff(\phi,z,1)]);
LXYZR3:trigsimp(%)[1];
LXR1:diff(XR,x,2);
LYR1:diff(YR,x,2);
LZR1:diff(ZR,x,2);
solve([LXR1,LYR1,LZR1],['diff(r,x,2),
 'diff(\theta,x,2),'diff(\phi,x,2)]);
LXYZR11:trigsimp(%)[1];
LXR2:diff(XR,y,2);
LYR2:diff(YR,y,2);
LZR2:diff(ZR,y,2);
solve([LXR2,LYR2,LZR2],['diff(r,y,2),
 'diff(\theta,y,2),'diff(\phi,y,2)]);
LXYZR21:trigsimp(%)[1];
LXR3:diff(XR,z,2);
LYR3:diff(YR,z,2);
LZR3:diff(ZR,z,2);
solve([LXR3,LYR3,LZR3],['diff(r,z,2),
 'diff(\theta,z,2),'diff(\phi,z,2)]);
LXYZR31:trigsimp(%)[1];
TR:matrix([cos(\theta)*cos(\phi),cos(
 \theta)*sin(\phi),-sin(\theta)],
 [-sin(\phi),cos(\phi),0],[sin(\theta)
 *cos(\phi),sin(\theta)*sin(\phi),
 cos(\theta)]);
TR1:transpose(TR);
depends(f,[t,r,\theta,\phi]);
depends(g,[t,r,\theta,\phi]);
depends(h,[t,r,\theta,\phi]);
depends(q,[t,r,\theta,\phi]);
WRTZ:matrix([f],[g],[h]);
WRTZ1:transpose(V1)=TR1.WRTZ;
WA1:lhs(WRTZ1)[1][1]=rhs(WRTZ1)[1][1];
WB1:lhs(WRTZ1)[2][1]=rhs(WRTZ1)[2][1];
WC1:lhs(WRTZ1)[3][1]=rhs(WRTZ1)[3][1];
```

Maxima の処理の都合上、$\theta-\phi-r$ 座標系の速度コンポーネント：v_θ, v_ϕ, v_r を表す f, g, h を導入する。ここで f, g, h は、θ, ϕ, r の関数とする。

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} v_\theta \\ v_\phi \\ v_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix}$$

x, y, z と θ, ϕ, r の関係は、

$$
\begin{aligned}
x =& \cos(\phi)\ r\sin(\theta), \quad y = \sin(\phi)\ r\sin(\theta) \\
z =& r\cos(\theta) \\
\frac{d}{d\,x}\,r =& \cos(\phi)\ \sin(\theta), \quad \frac{d}{d\,x}\,\theta = \frac{\cos(\phi)\ \cos(\theta)}{r}, \\
\frac{d}{d\,x}\,\phi =& -\frac{\sin(\phi)}{r\sin(\theta)}, \quad \frac{d}{d\,y}\,r = \sin(\phi)\ \sin(\theta), \\
\frac{d}{d\,y}\,\theta =& \frac{\sin(\phi)\ \cos(\theta)}{r}, \quad \frac{d}{d\,y}\,\phi = \frac{\cos(\phi)}{r\sin(\theta)} \\
\frac{d}{d\,z}\,r =& \cos(\theta), \quad \frac{d}{d\,z}\,\theta = -\frac{\sin(\theta)}{r}, \quad \frac{d}{d\,z}\,\phi = 0 \\
\frac{d^2}{d\,x^2}\,r =& r\left(\frac{d}{d\,x}\,\theta\right)^2 + \left(\frac{d}{d\,x}\,\phi\right)^2 r\sin(\theta)^2, \\
\frac{d^2}{d\,x^2}\,\theta =& -\frac{2\ \left(\frac{d}{d\,x}\,r\right)\ \left(\frac{d}{d\,x}\,\theta\right) - \left(\frac{d}{d\,x}\,\phi\right)^2 r\cos(\theta)\ \sin(\theta)}{r}, \\
\frac{d^2}{d\,x^2}\,\phi =& -\frac{2\ \left(\frac{d}{d\,x}\,\phi\right)\ r\cos(\theta)\ \left(\frac{d}{d\,x}\,\theta\right) + 2\ \left(\frac{d}{d\,x}\,\phi\right)\ \left(\frac{d}{d\,x}\,r\right)\ \sin(\theta)}{r\sin(\theta)} \\
\frac{d^2}{d\,y^2}\,r =& r\left(\frac{d}{d\,y}\,\theta\right)^2 + \left(\frac{d}{d\,y}\,\phi\right)^2 r\sin(\theta)^2, \\
\frac{d^2}{d\,y^2}\,\theta =& -\frac{2\ \left(\frac{d}{d\,y}\,r\right)\ \left(\frac{d}{d\,y}\,\theta\right) - \left(\frac{d}{d\,y}\,\phi\right)^2 r\cos(\theta)\ \sin(\theta)}{r}, \\
\frac{d^2}{d\,y^2}\,\phi =& -\frac{2\ \left(\frac{d}{d\,y}\,\phi\right)\ r\cos(\theta)\ \left(\frac{d}{d\,y}\,\theta\right) + 2\ \left(\frac{d}{d\,y}\,\phi\right)\ \left(\frac{d}{d\,y}\,r\right)\ \sin(\theta)}{r\sin(\theta)} \\
\frac{d^2}{d\,z^2}\,r =& r\left(\frac{d}{d\,z}\,\theta\right)^2 + \left(\frac{d}{d\,z}\,\phi\right)^2 r\sin(\theta)^2, \\
\frac{d^2}{d\,z^2}\,\theta =& -\frac{2\ \left(\frac{d}{d\,z}\,r\right)\ \left(\frac{d}{d\,z}\,\theta\right) - \left(\frac{d}{d\,z}\,\phi\right)^2 r\cos(\theta)\ \sin(\theta)}{r}, \\
\frac{d^2}{d\,z^2}\,\phi =& -\frac{2\ \left(\frac{d}{d\,z}\,\phi\right)\ r\cos(\theta)\ \left(\frac{d}{d\,z}\,\theta\right) + 2\ \left(\frac{d}{d\,z}\,\phi\right)\ \left(\frac{d}{d\,z}\,r\right)\ \sin(\theta)}{r\sin(\theta)}
\end{aligned}
\tag{8.1.16}
$$

$x-y-z$ 座標系から $\theta-\phi-r$ 座標系へ変換する変換マトリックス：TR は下記となる。

$$
TR = \begin{pmatrix} \cos(\phi)\ \cos(\theta) & \sin(\phi)\ \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ \cos(\phi)\ \sin(\theta) & \sin(\phi)\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}
\tag{8.1.17}
$$

変換マトリックス TR の転置マトリックス：TR^T を使って、$x-y-z$ 座標系の流速：u, v, w と $\theta-\phi-r$ 座標系の流速：f, g, h の関係は下記となる。

$$
\overrightarrow{V} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = TR^T \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h\cos(\phi)\ \sin(\theta) + f\cos(\phi)\ \cos(\theta) - g\sin(\phi) \\ h\sin(\phi)\ \sin(\theta) + f\sin(\phi)\ \cos(\theta) + g\cos(\phi) \\ h\cos(\theta) - f\sin(\theta) \end{pmatrix}
\tag{8.1.18}
$$

```
subst([WA1,WB1,WC1],MS1);
ev(%,diff);
subst(LXYZR1,%);
subst(LXYZR2,%);
subst(LXYZR3,%);
MSRTP1:expand(trigsimp(%));
subst([f=v[\theta],g=v[\phi],h=v[r],
 q=p],%);
subst([WA1,WB1,WC1],DD);
ev(%,diff);
subst(LXYZR1,%);
subst(LXYZR2,%);
subst(LXYZR3,%);
DDT:%;
DDT.TR1;
TR.%;
DDRTP1:expand(trigsimp(%));
DD21:subst([f=v[\theta],g=v[\phi],h=v[r],
 q=p],%);
DD22:subst([x=t,y=p,z=r,xy=tp,xz=tr,
 yz=pr],STM1)=\mu*%;
SG111:lhs(DD22)[1][1]=DD21[1][1];
SG121:lhs(DD22)[1][2]=DD21[1][2];
SG131:lhs(DD22)[1][3]=DD21[1][3];
SG221:lhs(DD22)[2][2]=DD21[2][2];
SG231:lhs(DD22)[2][3]=DD21[2][3];
SG331:lhs(DD22)[3][3]=DD21[3][3];
```

$x-y-z$ 座標系の質量保存の方程式:(8.1.2) 式に (8.1.18) 式を代入し、微分を実行し、(8.1.16) 式を代入すると、下記の $\theta-\phi-r$ 座標系の質量保存の方程式が得られる。

$$\frac{\frac{d}{d\,\theta}\,v_\theta}{r}+\frac{v_\theta\cos(\theta)}{r\sin(\theta)}+\frac{\frac{d}{d\,\phi}\,v_\phi}{r\sin(\theta)}+\frac{d}{d\,r}\,v_r+\frac{2\,v_r}{r}=0 \tag{8.1.19}$$

$x-y-z$ 座標系の変形速度ひずみ:(8.1.4) 式に (8.1.18) 式を代入し、微分を実行し、(8.1.16) 式を代入する。ここでテンソル : C の座標変換は、「付録 A　Maxima によるベクトルとテンソル演算　C.4.3 テンソルの座標変換 (695 頁)」に示されている $C'=TR.C.TR^T$ で得られる。結果を下記に示す。

```
diff(rhs(WRTZ1),t,1);
subst(['diff(r,t,1)=h,'diff(\theta,t,1)=
 f/r,'diff(\phi,t,1)=g/r/sin(\theta),
 'diff(x,t,1)=0,'diff(y,t,1)=0,
 'diff(z,t,1)=0],%);
TR.%;
DMRTP1:expand(trigsimp(%));
subst([WA1,WB1,WC1],DD2);
ev(%,diff);
subst(LXYZR11,%);
subst(LXYZR21,%);
subst(LXYZR31,%);
subst(LXYZR1,%);
subst(LXYZR2,%);
subst(LXYZR3,%);
TR.%;
DD2RTP1:expand(trigsimp(%));
subst([WA1,WB1,WC1,p=q],PP1);
ev(%,diff);
subst(LXYZR1,%);
subst(LXYZR2,%);
subst(LXYZR3,%);
TR.%;
PPRTP1:expand(trigsimp(%));
\rho*DMRTP1=\mu*DD2RTP1+PPRTP1+matrix(
 [F[\theta]],[F[\phi]],[F[r]]);
NAV3:subst([f=v[\theta],g=v[\phi],h=v[r],
 q=p],%);
```

$$\begin{pmatrix} \frac{2\,h}{r}+\frac{2\left(\frac{d}{d\,\theta}\,f\right)}{r} & -\frac{g\cos(\theta)}{r\sin(\theta)}+\frac{\frac{d}{d\,\phi}\,f}{r\sin(\theta)}+\frac{\frac{d}{d\,\theta}\,g}{r} & \frac{\frac{d}{d\,\theta}\,h}{r}-\frac{f}{r}+\frac{d}{d\,r}\,f \\ -\frac{g\cos(\theta)}{r\sin(\theta)}+\frac{\frac{d}{d\,\phi}\,f}{r\sin(\theta)}+\frac{\frac{d}{d\,\theta}\,g}{r} & \frac{2\,f\cos(\theta)}{r\sin(\theta)}+\frac{2\left(\frac{d}{d\,\phi}\,g\right)}{r\sin(\theta)}+\frac{2\,h}{r} & \frac{\frac{d}{d\,\phi}\,h}{r\sin(\theta)}-\frac{g}{r}+\frac{d}{d\,r}\,g \\ \frac{\frac{d}{d\,\theta}\,h}{r}-\frac{f}{r}+\frac{d}{d\,r}\,f & \frac{\frac{d}{d\,\phi}\,h}{r\sin(\theta)}-\frac{g}{r}+\frac{d}{d\,r}\,g & 2\,\left(\frac{d}{d\,r}\,h\right) \end{pmatrix}$$

以上から、応力テンソルは次式となり、

$$\begin{pmatrix} \sigma_\theta & \tau_{\theta\phi} & \tau_{\theta r} \\ \tau_{\theta\phi} & \sigma_\phi & \tau_{\phi r} \\ \tau_{\theta r} & \tau_{\phi r} & \sigma_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu\left(\frac{2\left(\frac{d}{d\,\theta}\,v_\theta\right)}{r}+\frac{2\,v_r}{r}\right) & \mu\left(\frac{\frac{d}{d\,\phi}\,v_\theta}{r\sin(\theta)}-\frac{v_\phi\cos(\theta)}{r\sin(\theta)}+\frac{\frac{d}{d\,\theta}\,v_\phi}{r}\right) & \mu\left(\frac{d}{d\,r}\,v_\theta-\frac{v_\theta}{r}+\frac{\frac{d}{d\,\theta}\,v_r}{r}\right) \\ \mu\left(\frac{\frac{d}{d\,\phi}\,v_\theta}{r\sin(\theta)}-\frac{v_\phi\cos(\theta)}{r\sin(\theta)}+\frac{\frac{d}{d\,\theta}\,v_\phi}{r}\right) & \mu\left(\frac{2\,v_\theta\cos(\theta)}{r\sin(\theta)}+\frac{2\left(\frac{d}{d\,\phi}\,v_\phi\right)}{r\sin(\theta)}+\frac{2\,v_r}{r}\right) & \mu\left(\frac{\frac{d}{d\,\phi}\,v_r}{r\sin(\theta)}-\frac{v_\phi}{r}+\frac{d}{d\,r}\,v_\phi\right) \\ \mu\left(\frac{d}{d\,r}\,v_\theta-\frac{v_\theta}{r}+\frac{\frac{d}{d\,\theta}\,v_r}{r}\right) & \mu\left(\frac{\frac{d}{d\,\phi}\,v_r}{r\sin(\theta)}-\frac{v_\phi}{r}+\frac{d}{d\,r}\,v_\phi\right) & 2\,\mu\,\left(\frac{d}{d\,r}\,v_r\right) \end{pmatrix}$$

変形速度ひずみ、応力テンソルの各項は下記となる。

$$\begin{aligned} \sigma_\theta =& \mu\,e_{\theta\theta}=\mu\left(\frac{2\,\left(\frac{d}{d\,\theta}\,v_\theta\right)}{r}+\frac{2\,v_r}{r}\right),\quad \tau_{\theta\phi}=\mu\,e_{\theta\phi}=\mu\left(\frac{\frac{d}{d\,\phi}\,v_\theta}{r\sin(\theta)}-\frac{v_\phi\cos(\theta)}{r\sin(\theta)}+\frac{\frac{d}{d\,\theta}\,v_\phi}{r}\right), \\ \tau_{\theta r} =& \mu\,e_{\theta r}=\mu\left(\frac{d}{d\,r}\,v_\theta-\frac{v_\theta}{r}+\frac{\frac{d}{d\,\theta}\,v_r}{r}\right),\quad \sigma_\phi=\mu\,e_{\phi\phi}=\mu\left(\frac{2\,v_\theta\cos(\theta)}{r\sin(\theta)}+\frac{2\,\left(\frac{d}{d\,\phi}\,v_\phi\right)}{r\sin(\theta)}+\frac{2\,v_r}{r}\right), \\ \tau_{\phi r} =& \mu\,e_{\phi r}=\mu\left(\frac{\frac{d}{d\,\phi}\,v_r}{r\sin(\theta)}-\frac{v_\phi}{r}+\frac{d}{d\,r}\,v_\phi\right),\quad \sigma_r=\mu\,e_{rr}=2\,\mu\left(\frac{d}{d\,r}\,v_r\right) \end{aligned} \tag{8.1.20}$$

Navier-Stokes の式の慣性項は物質微分を直接実行して求める。(8.1.18) 式を時間 : t で微分し、(8.1.16) 式および $\frac{d}{d\,t}\,r=h, \frac{d}{d\,t}\,\theta=f/r, \frac{d}{d\,t}\,\phi=g/(r\sin(\theta))$ を代入し、変換マトリックス : TR を掛けて整理すると、下記の $\theta-\phi-r$ 座標系の慣性項が得られる。また、粘性項 : (8.1.7) 式に (8.1.18) 式を代入し、微分を実行し、(8.1.16) 式を代入し、変換マトリックス : TR を掛けて整理すると、下記の $\theta-\phi-r$ 座標系の粘性項が得られる。

$$\frac{d}{d\,t}\begin{pmatrix} h\cos(\phi)\,\sin(\theta)+f\cos(\phi)\,\cos(\theta)-g\sin(\phi) \\ h\sin(\phi)\,\sin(\theta)+f\sin(\phi)\,\cos(\theta)+g\cos(\phi) \\ h\cos(\theta)-f\sin(\theta) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -\frac{g^2\cos(\theta)}{r\sin(\theta)}+\frac{\left(\frac{d}{d\,\phi}\,f\right)g}{r\sin(\theta)}+\frac{f\,h}{r}+\frac{f\left(\frac{d}{d\,\theta}\,f\right)}{r}+\left(\frac{d}{d\,r}\,f\right)\,h+\frac{d}{d\,t}\,f \\ \frac{f\,g\cos(\theta)}{r\sin(\theta)}+\frac{g\left(\frac{d}{d\,\phi}\,g\right)}{r\sin(\theta)}+\frac{g\,h}{r}+\frac{f\left(\frac{d}{d\,\theta}\,g\right)}{r}+\left(\frac{d}{d\,r}\,g\right)\,h+\frac{d}{d\,t}\,g \\ \frac{g\left(\frac{d}{d\,\phi}\,h\right)}{r\sin(\theta)}+\frac{f\left(\frac{d}{d\,\theta}\,h\right)}{r}-\frac{g^2}{r}-\frac{f^2}{r}+\frac{d}{d\,t}\,h+h\,\left(\frac{d}{d\,r}\,h\right) \end{pmatrix}$$

$$\text{粘性項 : (8.1.7) 式} \to \begin{pmatrix} \frac{\left(\frac{d}{d\,\theta}\,f\right)\cos(\theta)}{r^2\sin(\theta)}-\frac{2\left(\frac{d}{d\,\phi}\,g\right)\cos(\theta)}{r^2\sin(\theta)^2}+\frac{\frac{d^2}{d\,\phi^2}\,f}{r^2\sin(\theta)^2}-\frac{f}{r^2\sin(\theta)^2}+\frac{2\left(\frac{d}{d\,r}\,f\right)}{r}+\frac{2\left(\frac{d}{d\,\theta}\,h\right)}{r^2}+\frac{\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,f}{r^2}+\frac{d^2}{d\,r^2}\,f \\ \frac{\left(\frac{d}{d\,\theta}\,g\right)\cos(\theta)}{r^2\sin(\theta)}+\frac{2\left(\frac{d}{d\,\phi}\,h\right)}{r^2\sin(\theta)}+\frac{2\left(\frac{d}{d\,\phi}\,f\right)\cos(\theta)}{r^2\sin(\theta)^2}+\frac{\frac{d^2}{d\,\phi^2}\,g}{r^2\sin(\theta)^2}-\frac{g}{r^2\sin(\theta)^2}+\frac{2\left(\frac{d}{d\,r}\,g\right)}{r}+\frac{\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,g}{r^2}+\frac{d^2}{d\,r^2}\,g \\ \frac{\left(\frac{d}{d\,\theta}\,h\right)\cos(\theta)}{r^2\sin(\theta)}-\frac{2\,f\cos(\theta)}{r^2\sin(\theta)}-\frac{2\left(\frac{d}{d\,\phi}\,g\right)}{r^2\sin(\theta)}+\frac{\frac{d^2}{d\,\phi^2}\,h}{r^2\sin(\theta)^2}+\frac{2\left(\frac{d}{d\,r}\,h\right)}{r}+\frac{\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,h}{r^2}-\frac{2\,h}{r^2}-\frac{2\left(\frac{d}{d\,\theta}\,f\right)}{r^2}+\frac{d^2}{d\,r^2}\,h \end{pmatrix}$$

Navier-Stokes の式で圧力項 : (8.1.8) 式に $p\to q$ の置き換えを行ない、q を r,θ,z の関数とする。微分を実行し、(8.1.16) 式を代入し、変換マトリックス : TR を掛けて整理すると、下記の $\theta-\phi-r$ 座標系の圧力項が得られる。

$$\text{圧力項 : (8.1.8) 式} \to -\begin{pmatrix} \frac{\frac{d}{d\,\theta}\,q}{r} \\ \frac{\frac{d}{d\,\phi}\,q}{r\sin(\theta)} \\ \frac{d}{d\,r}\,q \end{pmatrix}$$

以上をまとめ、$f,g,h\to v_\theta,v_\phi,v_r$ の置き換えを行うと極座標 $\theta-\phi-r$ 系の Navier-Stokes の式は次式で得られる。

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \rho\left(\frac{v_\theta\left(\frac{d}{d\,\theta}\,v_\theta\right)}{r}+\frac{d}{d\,t}\,v_\theta+v_r\,\left(\frac{d}{d\,r}\,v_\theta\right)+\frac{v_\phi\left(\frac{d}{d\,\phi}\,v_\theta\right)}{r\sin(\theta)}-\frac{v_\phi^2\cos(\theta)}{r\sin(\theta)}+\frac{v_r\,v_\theta}{r}\right) \\ \rho\left(\frac{v_\phi\,v_\theta\cos(\theta)}{r\sin(\theta)}+\frac{v_\phi\left(\frac{d}{d\,\phi}\,v_\phi\right)}{r\sin(\theta)}+\frac{\left(\frac{d}{d\,\theta}\,v_\phi\right)v_\theta}{r}+\frac{v_\phi\,v_r}{r}+\left(\frac{d}{d\,r}\,v_\phi\right)\,v_r+\frac{d}{d\,t}\,v_\phi\right) \\ \rho\left(\frac{v_\phi\left(\frac{d}{d\,\phi}\,v_r\right)}{r\sin(\theta)}-\frac{v_\theta^2}{r}+\frac{\left(\frac{d}{d\,\theta}\,v_r\right)v_\theta}{r}+\frac{d}{d\,t}\,v_r+v_r\,\left(\frac{d}{d\,r}\,v_r\right)-\frac{v_\phi^2}{r}\right) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mu\left(\frac{\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,v_\theta}{r^2}+\frac{\cos(\theta)\left(\frac{d}{d\,\theta}\,v_\theta\right)}{r^2\sin(\theta)}+\frac{d^2}{d\,r^2}\,v_\theta+\frac{2\left(\frac{d}{d\,r}\,v_\theta\right)}{r}+\frac{\frac{d^2}{d\,\phi^2}\,v_\theta}{r^2\sin(\theta)^2}-\frac{v_\theta\cos(\theta)^2}{r^2\sin(\theta)^2}-\frac{2\left(\frac{d}{d\,\phi}\,v_\phi\right)\cos(\theta)}{r^2\sin(\theta)^2}-\frac{v_\theta}{r^2}+\frac{2\left(\frac{d}{d\,\theta}\,v_r\right)}{r^2}\right)+F_\theta-\frac{\frac{d}{d\,\theta}\,p}{r} \\ \mu\left(\frac{2\cos(\theta)\left(\frac{d}{d\,\phi}\,v_\theta\right)}{r^2\sin(\theta)^2}+\frac{\left(\frac{d}{d\,\theta}\,v_\phi\right)\cos(\theta)}{r^2\sin(\theta)}+\frac{2\left(\frac{d}{d\,\phi}\,v_r\right)}{r^2\sin(\theta)}+\frac{\frac{d^2}{d\,\phi^2}\,v_\phi}{r^2\sin(\theta)^2}-\frac{v_\phi}{r^2\sin(\theta)^2}+\frac{2\left(\frac{d}{d\,r}\,v_\phi\right)}{r}+\frac{\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,v_\phi}{r^2}+\frac{d^2}{d\,r^2}\,v_\phi\right)-\frac{\frac{d}{d\,\phi}\,p}{r\sin(\theta)}+F_\phi \\ \mu\left(-\frac{2\left(\frac{d}{d\,\theta}\,v_\theta\right)}{r^2}-\frac{2\,v_\theta\cos(\theta)}{r^2\sin(\theta)}+\frac{\left(\frac{d}{d\,\theta}\,v_r\right)\cos(\theta)}{r^2\sin(\theta)}-\frac{2\left(\frac{d}{d\,\phi}\,v_\phi\right)}{r^2\sin(\theta)}+\frac{\frac{d^2}{d\,\phi^2}\,v_r}{r^2\sin(\theta)^2}+\frac{\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,v_r}{r^2}+\frac{d^2}{d\,r^2}\,v_r+\frac{2\left(\frac{d}{d\,r}\,v_r\right)}{r}-\frac{2\,v_r}{r^2}\right)+F_r-\frac{d}{d\,r}\,p \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{8.1.21}$$

8.1.4 渦度方程式 (x-y-z 座標系)

Navier-Stokes の式から渦度方程式を求める。まず、$x-y-z$ 座標系について求める。流速の各コンポーネントを u,v,w、渦度の各コンポーネントを $\omega_x,\omega_y,\omega_z$ とする。

```
/*  Nav - vortex &  円柱・極座標表記 */
kill(all);
load("vect")
V1:matrix([u,v,w]);
WA:matrix([a,b,c]);
W1:matrix([\omega[x],\omega[y],\omega[z]]);
LISW:[a=\omega[x],b=\omega[y],c=\omega[z]];
depends(u,[t,x,y,z]);
depends(v,[t,x,y,z]);
depends(w,[t,x,y,z]);
depends(a,[t,x,y,z]);
depends(b,[t,x,y,z]);
depends(c,[t,x,y,z]);
depends(p,[t,x,y,z]);
/* DT */
curl(V1)[1];
express(%);
WXYZ1:W1=%;
WABC1:WA=W1;
WABC2:WA=rhs(WXYZ1);
transpose(W1)=transpose(rhs(WXYZ1));
A1:lhs(WABC2)[1][1]=rhs(WABC2)[1];
B1:lhs(WABC2)[1][2]=rhs(WABC2)[2];
C1:lhs(WABC2)[1][3]=rhs(WABC2)[3];
diff(WABC2,t,1);
WT1:ev(%,diff);
subst(LISW,WT1);
WT11:subst(['diff(z,t,1)=0],%);
WT11T:transpose(lhs(WT11));
diff(V1,t,1);
curl(%)[1];
express(%);
ev(%,diff);
WT2:subst(['diff(z,t,1)=0],%);
rhs(WT11)-WT2;
```

Navier-Stokes の式をベクトル表記すると、「2.6 Navier-Stokes の式 (2.6.4) 式、24 頁」から、

$$\rho\left(\frac{d}{d\,t}\overrightarrow{V}+\left(\overrightarrow{V}\cdot grad\right)\overrightarrow{V}\right)=F-grad\,(p)+\mu\nabla^2\overrightarrow{V} \tag{8.1.22}$$

「2.8 Bernoulli の定理、(2.8.2) 式、25 頁」から、上式左辺加速度項の第二項 : $\left(\overrightarrow{V}\cdot grad\right)\overrightarrow{V}$ を書き換えると、Navier-Stokes の式は下記のようにも表記できる。

$$\rho\left(\frac{d}{d\,t}\overrightarrow{V}-\overrightarrow{V}\times curl\,\overrightarrow{V}\right)=F-grad\left(\rho\,\frac{\overrightarrow{V}^2}{2}+p\right)+\mu\nabla^2\overrightarrow{V}$$

また、「B.1 円柱座標系への変換　(5) 粘性項　ベクトルの式、(B.1.23) 式、666 頁」から、上式の右辺第三項の粘性項 : $\mu\nabla^2\overrightarrow{V}$ を書き換えると、Navier-Stokes の式は下記のようにも表記できる。

$$\begin{aligned}&\rho\left(\frac{d}{d\,t}\overrightarrow{V}-\overrightarrow{V}\times curl\,\overrightarrow{V}\right)\\&\quad=F-grad\left(\rho\,\frac{\overrightarrow{V}^2}{2}+p\right)\\&\qquad+\mu\left(grad\left(div\left(\overrightarrow{V}\right)\right)-curl\left(curl\left(\overrightarrow{V}\right)\right)\right)\end{aligned} \tag{8.1.23}$$

Navier-Stokes の式は (8.1.9) 式から下記となる。

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix}\rho\left(\left(\frac{d}{d\,z}\,u\right)\,w+\left(\frac{d}{d\,y}\,u\right)\,v+u\,\left(\frac{d}{d\,x}\,u\right)+\frac{d}{d\,t}\,u\right)\\ \rho\left(\left(\frac{d}{d\,z}\,v\right)\,w+v\,\left(\frac{d}{d\,y}\,v\right)+u\,\left(\frac{d}{d\,x}\,v\right)+\frac{d}{d\,t}\,v\right)\\ \rho\left(w\,\left(\frac{d}{d\,z}\,w\right)+v\,\left(\frac{d}{d\,y}\,w\right)+u\,\left(\frac{d}{d\,x}\,w\right)+\frac{d}{d\,t}\,w\right)\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}X+\mu\,\left(\frac{d^2}{d\,z^2}\,u+\frac{d^2}{d\,y^2}\,u+\frac{d^2}{d\,x^2}\,u\right)-\frac{d}{d\,x}\,p\\ Y+\mu\,\left(\frac{d^2}{d\,z^2}\,v+\frac{d^2}{d\,y^2}\,v+\frac{d^2}{d\,x^2}\,v\right)-\frac{d}{d\,y}\,p\\ Z+\mu\,\left(\frac{d^2}{d\,z^2}\,w+\frac{d^2}{d\,y^2}\,w+\frac{d^2}{d\,x^2}\,w\right)-\frac{d}{d\,z}\,p\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{8.1.24}$$

渦度方程式は Navier-Stokes の式の $curl$ から得られる。ここでは Navier-Stokes の式の表記式として、(8.1.23) 式を用いる。∇ の定義式は下記である。

$$\begin{aligned}&\nabla\,f=grad\,(f)\,,\quad\nabla\cdot\overrightarrow{V}=div\left(\overrightarrow{V}\right),\\&\nabla\times\overrightarrow{V}=curl\left(\overrightarrow{V}\right)\end{aligned} \tag{8.1.25}$$

また、流速 : $\overrightarrow{V}$ と渦度 : $\overrightarrow{\omega}$ との関係は、

$$\nabla\times\overrightarrow{V}=\overrightarrow{\omega} \tag{8.1.26}$$

流速、渦度を流速の各コンポーネントで表現すると、

$$\begin{pmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{d}{d\,y}\,w-\frac{d}{d\,z}\,v\\ \frac{d}{d\,z}\,u-\frac{d}{d\,x}\,w\\ \frac{d}{d\,x}\,v-\frac{d}{d\,y}\,u\end{pmatrix} \tag{8.1.27}$$

(8.1.23) 式の左辺第一項の $curl$ をとって、

$$\frac{d}{d\,t}\,\nabla\times\overrightarrow{V}=\frac{d}{d\,t}\,\overrightarrow{\omega}=\begin{pmatrix}\frac{d}{d\,t}\,\omega_x\\ \frac{d}{d\,t}\,\omega_y\\ \frac{d}{d\,t}\,\omega_z\end{pmatrix} \tag{8.1.28}$$

```
/* DXU */
div(rhs(WABC2));
express(%);
ev(%,diff);
grad(WA);
express(%);
ev(%,diff);
DXU2:V1.%;
subst([LISW],%);
DXU2T:transpose(%);
grad(p+\rho/2*(V1.V1));
express(%);
ev(%,diff);
curl(%);
express(%);
ev(%,diff);
```

(8.1.23) 式の左辺第二項の $curl$ をとって、

$$\begin{aligned}-\nabla\times\overrightarrow{V}\times curl\,\overrightarrow{V}=&-\nabla\times\overrightarrow{V}\times\overrightarrow{\omega}\\=&\nabla\times\overrightarrow{\omega}\times\overrightarrow{V}\\=&\left(\nabla\cdot\overrightarrow{V}\right)\overrightarrow{\omega}-\left(\nabla\cdot\overrightarrow{\omega}\right)\overrightarrow{V}\end{aligned}\tag{8.1.29}$$

上式右辺第二項の $\nabla\cdot\overrightarrow{\omega}$ について、

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\overrightarrow{\omega}=&\mathrm{div}\left([\frac{d}{d\,y}\,w-\frac{d}{d\,z}\,v,\frac{d}{d\,z}\,u-\frac{d}{d\,x}\,w,\right.\\&\left.\frac{d}{d\,x}\,v-\frac{d}{d\,y}\,u]\right)\\=&\frac{d}{d\,x}\,\left(\frac{d}{d\,y}\,w-\frac{d}{d\,z}\,v\right)+\frac{d}{d\,y}\,\left(\frac{d}{d\,z}\,u-\frac{d}{d\,x}\,w\right)\\&+\frac{d}{d\,z}\,\left(\frac{d}{d\,x}\,v-\frac{d}{d\,y}\,u\right)\\=&0\end{aligned}$$

また、(8.1.29) 式の右辺第一項のカッコ内の積は前後入れ替えてもよいので、以上から (8.1.23) 式の左辺第二項の $curl$ は、

$$\begin{aligned}&-\nabla\times\overrightarrow{V}\times curl\,\overrightarrow{V}\\&=\left(\overrightarrow{V}\cdot\nabla\right)\overrightarrow{\omega}\\&=\begin{pmatrix}w\,\left(\frac{d}{d\,z}\,\omega_x\right)+v\,\left(\frac{d}{d\,y}\,\omega_x\right)+u\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\omega_x\right)\\w\,\left(\frac{d}{d\,z}\,\omega_y\right)+v\,\left(\frac{d}{d\,y}\,\omega_y\right)+u\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\omega_y\right)\\w\,\left(\frac{d}{d\,z}\,\omega_z\right)+v\,\left(\frac{d}{d\,y}\,\omega_z\right)+u\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\omega_z\right)\end{pmatrix}\end{aligned}\tag{8.1.30}$$

(8.1.28) 式と (8.1.30) 式の和は $\frac{d}{d\,t}\,\overrightarrow{\omega}$ の物質微分である。

(8.1.23) 式の右辺第二項は、

$$\begin{aligned}&grad\left(\rho\,\frac{\overrightarrow{V}^2}{2}+p\right)\\&=grad\left(\frac{\rho\,\left(w^2+v^2+u^2\right)}{2}+p\right)\\&=\begin{pmatrix}\rho\,w\,\left(\frac{d}{d\,x}\,w\right)+\rho\,v\,\left(\frac{d}{d\,x}\,v\right)+\rho\,u\,\left(\frac{d}{d\,x}\,u\right)+\frac{d}{d\,x}\,p\\\rho\,w\,\left(\frac{d}{d\,y}\,w\right)+\rho\,v\,\left(\frac{d}{d\,y}\,v\right)+\rho\,u\,\left(\frac{d}{d\,y}\,u\right)+\frac{d}{d\,y}\,p\\\rho\,w\,\left(\frac{d}{d\,z}\,w\right)+\rho\,v\,\left(\frac{d}{d\,z}\,v\right)+\rho\,u\,\left(\frac{d}{d\,z}\,u\right)+\frac{d}{d\,z}\,p\end{pmatrix}\end{aligned}$$

上式の $curl$ をとって、

$$\nabla\times grad\left(\rho\,\frac{\overrightarrow{V}^2}{2}+p\right)=0\tag{8.1.31}$$

```
/* NV1 */
div(V1[1]);
express(%);
grad(%);
express(%);
ev(%,diff);
curl(%);
express(%);
ev(%,diff);
/* NV2 */
curl(V1)[1];
express(%);
ev(%,diff);
curl(%);
express(%);
ev(%,diff);
curl(%);
express(%);
ev(%,diff);
NV21:-transpose(%);
A2:diff(a,x,2)+diff(a,y,2)+diff(a,z,2);
B2:diff(b,x,2)+diff(b,y,2)+diff(b,z,2);
C2:diff(c,x,2)+diff(c,y,2)+diff(c,z,2);
NV23:matrix([A2],[B2],[C2]);
subst([A1,B1,C1],%);
NV22:ev(%,diff);
NV21-NV22;
NV23T:subst(LISW,NV23);
NVW1:WT11T+DXU2T=\nu*NV23T;
```

(8.1.23) 式の右辺第三項の粘性項の第一項は、次式であり、

$$
\begin{aligned}
&grad\left(div\left(\overrightarrow{V}\right)\right)\\
&=grad\left(\frac{d}{d\,z}\,w+\frac{d}{d\,y}\,v+\frac{d}{d\,x}\,u\right)\\
&=\begin{pmatrix}\frac{d^2}{d\,x\,d\,z}\,w+\frac{d^2}{d\,x\,d\,y}\,v+\frac{d^2}{d\,x^2}\,u\\ \frac{d^2}{d\,y\,d\,z}\,w+\frac{d^2}{d\,y^2}\,v+\frac{d^2}{d\,x\,d\,y}\,u\\ \frac{d^2}{d\,z^2}\,w+\frac{d^2}{d\,y\,d\,z}\,v+\frac{d^2}{d\,x\,d\,z}\,u\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

上式の curl は、

$$\nabla\times grad\left(div\left(\overrightarrow{V}\right)\right)=0 \tag{8.1.32}$$

(8.1.23) 式の右辺第三項の粘性項の第二項の curl は、次式であり、

$$-\nabla\times curl\left(curl\left(\overrightarrow{V}\right)\right)=\begin{pmatrix}\frac{d^3}{d\,y^3}\,w+\frac{d^3}{d\,y\,d\,z^2}\,w+\frac{d^3}{d\,x^2\,d\,y}\,w-\frac{d^3}{d\,z^3}\,v-\frac{d^3}{d\,y^2\,d\,z}\,v-\frac{d^3}{d\,x^2\,d\,z}\,v\\ -\frac{d^3}{d\,x^3}\,w-\frac{d^3}{d\,x\,d\,z^2}\,w-\frac{d^3}{d\,x\,d\,y^2}\,w+\frac{d^3}{d\,z^3}\,u+\frac{d^3}{d\,y^2\,d\,z}\,u+\frac{d^3}{d\,x^2\,d\,z}\,u\\ \frac{d^3}{d\,x^3}\,v+\frac{d^3}{d\,x\,d\,z^2}\,v+\frac{d^3}{d\,x\,d\,y^2}\,v-\frac{d^3}{d\,y^3}\,u-\frac{d^3}{d\,y\,d\,z^2}\,u-\frac{d^3}{d\,x^2\,d\,y}\,u\end{pmatrix}$$

また、

$$\begin{pmatrix}\frac{d^2}{d\,z^2}\,\omega_x+\frac{d^2}{d\,y^2}\,\omega_x+\frac{d^2}{d\,x^2}\,\omega_x\\ \frac{d^2}{d\,z^2}\,\omega_y+\frac{d^2}{d\,y^2}\,\omega_y+\frac{d^2}{d\,x^2}\,\omega_y\\ \frac{d^2}{d\,z^2}\,\omega_z+\frac{d^2}{d\,y^2}\,\omega_z+\frac{d^2}{d\,x^2}\,\omega_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{d^3}{d\,y^3}\,w+\frac{d^3}{d\,y\,d\,z^2}\,w+\frac{d^3}{d\,x^2\,d\,y}\,w-\frac{d^3}{d\,z^3}\,v-\frac{d^3}{d\,y^2\,d\,z}\,v-\frac{d^3}{d\,x^2\,d\,z}\,v\\ -\frac{d^3}{d\,x^3}\,w-\frac{d^3}{d\,x\,d\,z^2}\,w-\frac{d^3}{d\,x\,d\,y^2}\,w+\frac{d^3}{d\,z^3}\,u+\frac{d^3}{d\,y^2\,d\,z}\,u+\frac{d^3}{d\,x^2\,d\,z}\,u\\ \frac{d^3}{d\,x^3}\,v+\frac{d^3}{d\,x\,d\,z^2}\,v+\frac{d^3}{d\,x\,d\,y^2}\,v-\frac{d^3}{d\,y^3}\,u-\frac{d^3}{d\,y\,d\,z^2}\,u-\frac{d^3}{d\,x^2\,d\,y}\,u\end{pmatrix}$$

上記の二式の右辺は同じであるから、

$$-\nabla\times curl\left(curl\left(\overrightarrow{V}\right)\right)=\begin{pmatrix}\frac{d^2}{d\,z^2}\,\omega_x+\frac{d^2}{d\,y^2}\,\omega_x+\frac{d^2}{d\,x^2}\,\omega_x\\ \frac{d^2}{d\,z^2}\,\omega_y+\frac{d^2}{d\,y^2}\,\omega_y+\frac{d^2}{d\,x^2}\,\omega_y\\ \frac{d^2}{d\,z^2}\,\omega_z+\frac{d^2}{d\,y^2}\,\omega_z+\frac{d^2}{d\,x^2}\,\omega_z\end{pmatrix} \tag{8.1.33}$$

(8.1.28) 式、(8.1.30) 式、(8.1.31) 式、(8.1.32) 式、(8.1.33) 式から、$x-y-z$ 座標系の渦度方程式が得られ、次式となる。

$$\begin{pmatrix}w\,\left(\frac{d}{d\,z}\,\omega_x\right)+v\,\left(\frac{d}{d\,y}\,\omega_x\right)+u\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\omega_x\right)+\frac{d}{d\,t}\,\omega_x\\ w\,\left(\frac{d}{d\,z}\,\omega_y\right)+v\,\left(\frac{d}{d\,y}\,\omega_y\right)+u\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\omega_y\right)+\frac{d}{d\,t}\,\omega_y\\ w\,\left(\frac{d}{d\,z}\,\omega_z\right)+v\,\left(\frac{d}{d\,y}\,\omega_z\right)+u\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\omega_z\right)+\frac{d}{d\,t}\,\omega_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\nu\,\left(\frac{d^2}{d\,z^2}\,\omega_x+\frac{d^2}{d\,y^2}\,\omega_x+\frac{d^2}{d\,x^2}\,\omega_x\right)\\ \nu\,\left(\frac{d^2}{d\,z^2}\,\omega_y+\frac{d^2}{d\,y^2}\,\omega_y+\frac{d^2}{d\,x^2}\,\omega_y\right)\\ \nu\,\left(\frac{d^2}{d\,z^2}\,\omega_z+\frac{d^2}{d\,y^2}\,\omega_z+\frac{d^2}{d\,x^2}\,\omega_z\right)\end{pmatrix} \tag{8.1.34}$$

8.1.5　渦度方程式 (円柱座標系)

$x-y-z$ 座標系の渦度方程式：(8.1.34) 式から円柱座標系の渦度方程式を求める。$x-y-z$ 座標系の流速の各コンポーネントを u, v, w、渦度の各コンポーネントを $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ とする。円柱座標系の $r-\theta-z$ は下図に示すとおりで、その流速の各コンポーネントを v_r, v_θ, v_z、渦度の各コンポーネントを $\omega_r, \omega_\theta, \omega_z$ とする。

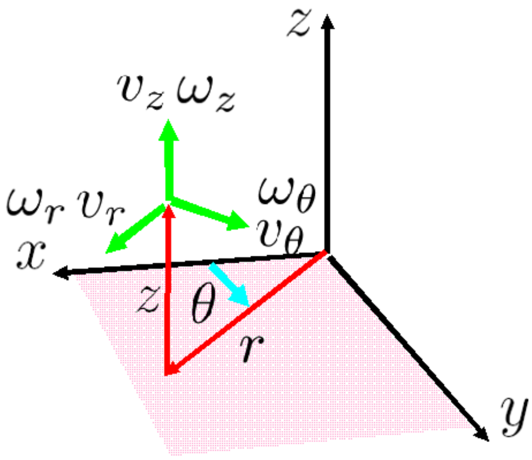


図 8.1.4: 円柱座標系

```
/* 円柱座標系 */
LISW1:[o=v[r],q=v[\theta],s=v[z],
 f=\omega[r],g=\omega[\theta],
 h=\omega[z]];
depends(r,[t,x,y]);
depends(\theta,[t,x,y]);
depends(z,[t]);
XR:x=r*cos(\theta);
YR:y=r*sin(\theta);
LXR1:diff(XR,x,1);
LYR1:diff(YR,x,1);
solve([LXR1,LYR1],['diff(r,x,1),
 'diff(\theta,x,1)]);
LXYR1:trigrat(%)[1];
LXR2:diff(XR,y,1);
LYR2:diff(YR,y,1);
solve([LXR2,LYR2],['diff(r,y,1),
 'diff(\theta,y,1)]);
LXYR2:trigrat(%)[1];
LXR11:diff(XR,x,2);
LYR11:diff(YR,x,2);
solve([LXR11,LYR11],['diff(r,x,2),
 'diff(\theta,x,2)]);
LXYR11:trigrat(%)[1];
```

```
LXR21:diff(XR,y,2);
LYR21:diff(YR,y,2);
solve([LXR21,LYR21],['diff(r,y,2),
 'diff(\theta,y,2)]);
LXYR21:trigrat(%)[1];
TR:matrix([cos(\theta),sin(\theta),0],
 [-sin(\theta),cos(\theta),0],[0,0,1]);
TR1:transpose(TR);
```

$x-y-z$ 座標系と円柱座標系の関係式は下記となる。

$$
\begin{aligned}
&x=r\cos(\theta),\quad y=r\sin(\theta)\\
&\frac{d}{dx}r=\cos(\theta),\ \frac{d}{dx}\theta=-\frac{\sin(\theta)}{r}\\
&\frac{d}{dy}r=\sin(\theta),\ \frac{d}{dy}\theta=\frac{\cos(\theta)}{r}\\
&\frac{d^2}{dx^2}r=r\left(\frac{d}{dx}\theta\right)^2,\ \frac{d^2}{dx^2}\theta=-\frac{2\left(\frac{d}{dx}r\right)\left(\frac{d}{dx}\theta\right)}{r}\\
&\frac{d^2}{dy^2}r=r\left(\frac{d}{dy}\theta\right)^2,\ \frac{d^2}{dy^2}\theta=-\frac{2\left(\frac{d}{dy}r\right)\left(\frac{d}{dy}\theta\right)}{r}
\end{aligned}
\tag{8.1.35}
$$

$x-y-z$ 座標から円柱座標への座標変換マトリックス：TR は、

$$
TR=\begin{pmatrix}\cos(\theta) & \sin(\theta) & 0\\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}
\tag{8.1.36}
$$

```
depends(f,[t,r,\theta,z]);
depends(g,[t,r,\theta,z]);
depends(h,[t,r,\theta,z]);
WRTZ:matrix([f],[g],[h]);
WRTZ1:transpose(WA)=TR1.WRTZ;
WA1:lhs(WRTZ1)[1][1]=rhs(WRTZ1)[1][1];
WB1:lhs(WRTZ1)[2][1]=rhs(WRTZ1)[2][1];
WC1:lhs(WRTZ1)[3][1]=rhs(WRTZ1)[3][1];
depends(o,[t,r,\theta,z]);
depends(q,[t,r,\theta,z]);
depends(s,[t,r,\theta,z]);
VRTZ:matrix([o],[q],[s]);
VRTZ1:transpose(V1)=TR1.VRTZ;
VA1:lhs(VRTZ1)[1][1]=rhs(VRTZ1)[1][1];
VB1:lhs(VRTZ1)[2][1]=rhs(VRTZ1)[2][1];
VC1:lhs(VRTZ1)[3][1]=rhs(VRTZ1)[3][1];
```

Maxima の処理の都合上、流速と渦度のコンポーネントを下記のように置き換える。ここで f, g, h と o, q, s は、t, r, θ, z の関数とする。

$$
\begin{pmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix},\quad
\begin{pmatrix}\omega_r\\ \omega_\theta\\ \omega_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f\\ g\\ h\end{pmatrix},\quad
\begin{pmatrix}v_r\\ v_\theta\\ v_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}o\\ q\\ s\end{pmatrix}
\tag{8.1.37}
$$

$x-y-z$ 座標と円柱座標の流速：$\overrightarrow{V}$ と渦度：$\overrightarrow{\omega}$ の関係は、

$$\overrightarrow{\omega}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=TR^T.\begin{pmatrix}f\\g\\h\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f\cos(\theta)-g\sin(\theta)\\f\sin(\theta)+g\cos(\theta)\\h\end{pmatrix}\tag{8.1.38}$$

$$\overrightarrow{V}=\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}=TR^T.\begin{pmatrix}o\\q\\s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}o\cos(\theta)-q\sin(\theta)\\o\sin(\theta)+q\cos(\theta)\\s\end{pmatrix}\tag{8.1.39}$$

```
diff(rhs(WRTZ1),t,1);
TR.%;
expand(trigsimp(%));
subst(['diff(r,t,1)=v[r],'diff(\theta,t,1)
 =v[\theta]/r,'diff(z,t,1)=v[z]],%);
WT4:subst(LISW1,%);
subst([WA1,WB1,WC1],NV23);
ev(%,diff);
```

```
subst(LXYR11,%);
subst(LXYR21,%);
subst(LXYR1,%);
subst(LXYR2,%);
TR.%;
expand(%);
NV24:trigsimp(%);
expand(subst(LISW,%));
NV241:subst(LISW1,%);
NV3:WT4=\nu*NV241;
transpose(rhs(WABC2));
subst([VA1,VB1,VC1],%);
ev(%,diff);
subst(LXYR1,%);
subst(LXYR2,%);
TR.%;
expand(%);
WRTZ=trigsimp(%);
WA3:subst(LISW1,%);
```

$x-y-z$ 座標系の渦度方程式：(8.1.34) 式の左辺は、物質微分を使って、次のようになる。(8.1.38) 式の右辺を時間：t で微分を実行し、(8.1.35) 式を代入し、(8.1.36) 式の座標変換マトリックス；TR を掛けて整理すると下記となる。

$$\frac{d}{d\,t}\begin{pmatrix}f\cos(\theta)-g\sin(\theta)\\f\sin(\theta)+g\cos(\theta)\\h\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\left(\frac{d}{d\,z}\,f\right)\,\left(\frac{d}{d\,t}\,z\right)-g\,\left(\frac{d}{d\,t}\,\theta\right)+\left(\frac{d}{d\,\theta}\,f\right)\,\left(\frac{d}{d\,t}\,\theta\right)+\left(\frac{d}{d\,r}\,f\right)\,\left(\frac{d}{d\,t}\,r\right)+\frac{d}{d\,t}\,f\\\left(\frac{d}{d\,z}\,g\right)\,\left(\frac{d}{d\,t}\,z\right)+\left(\frac{d}{d\,\theta}\,g\right)\,\left(\frac{d}{d\,t}\,\theta\right)+f\,\left(\frac{d}{d\,t}\,\theta\right)+\left(\frac{d}{d\,r}\,g\right)\,\left(\frac{d}{d\,t}\,r\right)+\frac{d}{d\,t}\,g\\\left(\frac{d}{d\,z}\,h\right)\,\left(\frac{d}{d\,t}\,z\right)+\left(\frac{d}{d\,\theta}\,h\right)\,\left(\frac{d}{d\,t}\,\theta\right)+\left(\frac{d}{d\,r}\,h\right)\,\left(\frac{d}{d\,t}\,r\right)+\frac{d}{d\,t}\,h\end{pmatrix}$$

上式で、$\frac{d}{d\,t}\,r=v_r,\frac{d}{d\,t}\,\theta=v_\theta/r,\frac{d}{d\,t}\,z=v_z$ とし、$f,g,h\to\omega_r,\omega_\theta,\omega_z$ の置き換えを行うと渦度方程式：(8.1.34) 式の左辺の円柱座標系表記が得られる。

$$\begin{pmatrix}\left(\frac{d}{d\,z}\,\omega_r\right)\,v_z-\frac{\omega_\theta\,v_\theta}{r}+\frac{\left(\frac{d}{d\,\theta}\,\omega_r\right)\,v_\theta}{r}+\frac{d}{d\,t}\,\omega_r+v_r\,\left(\frac{d}{d\,r}\,\omega_r\right)\\\left(\frac{d}{d\,z}\,\omega_\theta\right)\,v_z+\frac{v_\theta\,\left(\frac{d}{d\,\theta}\,\omega_\theta\right)}{r}+\frac{d}{d\,t}\,\omega_\theta+v_r\,\left(\frac{d}{d\,r}\,\omega_\theta\right)+\frac{\omega_r\,v_\theta}{r}\\v_z\,\left(\frac{d}{d\,z}\,\omega_z\right)+\frac{v_\theta\,\left(\frac{d}{d\,\theta}\,\omega_z\right)}{r}+\frac{d}{d\,t}\,\omega_z+v_r\,\left(\frac{d}{d\,r}\,\omega_z\right)\end{pmatrix}\tag{8.1.40}$$

$x-y-z$ 座標系の渦度方程式：(8.1.34) 式の右辺は、次のようになる。(8.1.38) 式を代入して、微分を実行し (8.1.35) 式を代入し、(8.1.36) 式の座標変換マトリックス；TR を掛けて整理すると下記となる。

$$\begin{pmatrix} \frac{d^2}{d\,z^2}\,a+\frac{d^2}{d\,y^2}\,a+\frac{d^2}{d\,x^2}\,a \\ \frac{d^2}{d\,z^2}\,b+\frac{d^2}{d\,y^2}\,b+\frac{d^2}{d\,x^2}\,b \\ \frac{d^2}{d\,z^2}\,c+\frac{d^2}{d\,y^2}\,c+\frac{d^2}{d\,x^2}\,c \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -\frac{2\left(\frac{d}{d\,\theta}\,\omega_\theta\right)}{r^2}+\frac{d^2}{d\,z^2}\,\omega_r+\frac{\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,\omega_r}{r^2}+\frac{d^2}{d\,r^2}\,\omega_r+\frac{\frac{d}{d\,r}\,\omega_r}{r}-\frac{\omega_r}{r^2} \\ \frac{d^2}{d\,z^2}\,\omega_\theta+\frac{\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,\omega_\theta}{r^2}+\frac{d^2}{d\,r^2}\,\omega_\theta+\frac{\frac{d}{d\,r}\,\omega_\theta}{r}-\frac{\omega_\theta}{r^2}+\frac{2\left(\frac{d}{d\,\theta}\,\omega_r\right)}{r^2} \\ \frac{d^2}{d\,z^2}\,\omega_z+\frac{\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,\omega_z}{r^2}+\frac{d^2}{d\,r^2}\,\omega_z+\frac{\frac{d}{d\,r}\,\omega_z}{r} \end{pmatrix} \tag{8.1.41}$$

(8.1.40) 式、(8.1.41) 式をまとめると、円柱座標系の渦度方程式は次式となる

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{d}{d\,z}\,\omega_r\right)\,v_z-\frac{\omega_\theta\,v_\theta}{r}+\frac{\left(\frac{d}{d\,\theta}\,\omega_r\right)\,v_\theta}{r}+\frac{d}{d\,t}\,\omega_r+v_r\,\left(\frac{d}{d\,r}\,\omega_r\right) \\ \left(\frac{d}{d\,z}\,\omega_\theta\right)\,v_z+\frac{v_\theta\,\left(\frac{d}{d\,\theta}\,\omega_\theta\right)}{r}+\frac{d}{d\,t}\,\omega_\theta+v_r\,\left(\frac{d}{d\,r}\,\omega_\theta\right)+\frac{\omega_r\,v_\theta}{r} \\ v_z\,\left(\frac{d}{d\,z}\,\omega_z\right)+\frac{v_\theta\,\left(\frac{d}{d\,\theta}\,\omega_z\right)}{r}+\frac{d}{d\,t}\,\omega_z+v_r\,\left(\frac{d}{d\,r}\,\omega_z\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu\,\left(-\frac{2\left(\frac{d}{d\,\theta}\,\omega_\theta\right)}{r^2}+\frac{d^2}{d\,z^2}\,\omega_r+\frac{\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,\omega_r}{r^2}+\frac{d^2}{d\,r^2}\,\omega_r+\frac{\frac{d}{d\,r}\,\omega_r}{r}-\frac{\omega_r}{r^2}\right) \\ \nu\,\left(\frac{d^2}{d\,z^2}\,\omega_\theta+\frac{\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,\omega_\theta}{r^2}+\frac{d^2}{d\,r^2}\,\omega_\theta+\frac{\frac{d}{d\,r}\,\omega_\theta}{r}-\frac{\omega_\theta}{r^2}+\frac{2\left(\frac{d}{d\,\theta}\,\omega_r\right)}{r^2}\right) \\ \nu\,\left(\frac{d^2}{d\,z^2}\,\omega_z+\frac{\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,\omega_z}{r^2}+\frac{d^2}{d\,r^2}\,\omega_z+\frac{\frac{d}{d\,r}\,\omega_z}{r}\right) \end{pmatrix} \tag{8.1.42}$$

渦度の円柱座標表記を求める。(8.1.27) 式に (8.1.38) 式を代入し、微分を実行し (8.1.35) 式を代入し、(8.1.36) 式の座標変換マトリックス：TR を掛けて整理すると渦度の円柱座標表記が得られる。

$$\begin{pmatrix} \omega_r \\ \omega_\theta \\ \omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\frac{d}{d\,\theta}\,v_z-r\,\left(\frac{d}{d\,z}\,v_\theta\right)}{r} \\ \frac{d}{d\,z}\,v_r-\frac{d}{d\,r}\,v_z \\ \frac{r\,\left(\frac{d}{d\,r}\,v_\theta\right)+v_\theta-\frac{d}{d\,\theta}\,v_r}{r} \end{pmatrix} \tag{8.1.43}$$

(1) 二次元極座標の渦度方程式

```
/* 二次元極座標系 */
lhs(NV3)[3][1]=rhs(NV3)[3][1];
subst(['diff(\omega[z],z,1)=0,'diff(
 \omega[z],z,2)=0,\omega[z]=\omega],%);
lhs(WA3)[3][1]=rhs(WA3)[3][1];
subst([\omega[z]=\omega],%);
```

二次元極座標の渦度方程式は、円柱座標系の渦度方程式：(8.1.42) 式の z 軸成分で、$\frac{d}{d\,z}\,\omega_z=0$、$\omega_z \to \omega$ を代入し、

$$\frac{\left(\frac{d}{d\,\theta}\,\omega\right)\,v_\theta}{r}+\left(\frac{d}{d\,r}\,\omega\right)\,v_r+\frac{d}{d\,t}\,\omega=\nu\,\left(\frac{\frac{d}{d\,r}\,\omega}{r}+\frac{\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,\omega}{r^2}+\frac{d^2}{d\,r^2}\,\omega\right) \tag{8.1.44}$$

渦度の二次元極座標表記は、渦度の円柱座標表記：(8.1.43) 式の z 軸成分で、$\omega_z \to \omega$ を代入し、

$$\omega=\frac{r\,\left(\frac{d}{d\,r}\,v_\theta\right)+v_\theta-\frac{d}{d\,\theta}\,v_r}{r} \tag{8.1.45}$$

8.1.6 渦度方程式 (極座標系)

$x-y-z$ 座標系の渦度方程式：(8.1.34) 式から極座標系の渦度方程式を求める。$x-y-z$ 座標系の流速の各コンポーネントを u,v,w、渦度の各コンポーネントを $\omega_x,\omega_y,\omega_z$ とする。極座標系の $\theta-\phi-r$ は下図に示すとおりで、その流速の各コンポーネントを v_θ,v_ϕ,v_r、渦度の各コンポーネントを $\omega_\theta,\omega_\phi,\omega_r$ とする。

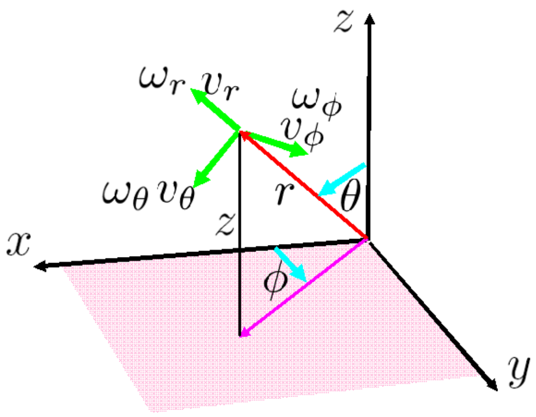


図 8.1.5: 極座標系

```
/* 極座標系 */
LISW2:[o=v[\theta],q=v[\phi],s=v[r],
 f=\omega[\theta],g=\omega[\phi],
 h=\omega[r]];
depends(r,[t,x,y,z]);
depends(\phi,[t,x,y,z]);
depends(\theta,[t,x,y,z]);
XR:x=r*sin(\theta)*cos(\phi);
YR:y=r*sin(\theta)*sin(\phi);
ZR:z=r*cos(\theta);
LXR1:diff(XR,x,1);
LYR1:diff(YR,x,1);
LZR1:diff(ZR,x,1);
solve([LXR1,LYR1,LZR1],['diff(r,x,1),
 'diff(\theta,x,1),'diff(\phi,x,1)]);
LXYZR1:trigsimp(%)[1];
LXR2:diff(XR,y,1);
LYR2:diff(YR,y,1);
LZR2:diff(ZR,y,1);
solve([LXR2,LYR2,LZR2],['diff(r,y,1),
 'diff(\theta,y,1),'diff(\phi,y,1)]);
LXYZR2:trigsimp(%)[1];
LXR3:diff(XR,z,1);
LYR3:diff(YR,z,1);
LZR3:diff(ZR,z,1);
solve([LXR3,LYR3,LZR3],['diff(r,z,1),
 'diff(\theta,z,1),'diff(\phi,z,1)]);
LXYZR3:trigsimp(%)[1];
LXR1:diff(XR,x,2);
LYR1:diff(YR,x,2);
LZR1:diff(ZR,x,2);
solve([LXR1,LYR1,LZR1],['diff(r,x,2),
 'diff(\theta,x,2),'diff(\phi,x,2)]);
LXYZR11:trigsimp(%)[1];
LXR2:diff(XR,y,2);
LYR2:diff(YR,y,2);
LZR2:diff(ZR,y,2);
solve([LXR2,LYR2,LZR2],['diff(r,y,2),
 'diff(\theta,y,2),'diff(\phi,y,2)]);
LXYZR21:trigsimp(%)[1];
LXR3:diff(XR,z,2);
LYR3:diff(YR,z,2);
LZR3:diff(ZR,z,2);
solve([LXR3,LYR3,LZR3],['diff(r,z,2),
 'diff(\theta,z,2),'diff(\phi,z,2)]);
LXYZR31:trigsimp(%)[1];
TR:matrix([cos(\theta)*cos(\phi),
 cos(\theta)*sin(\phi),-sin(\theta)],
 [-sin(\phi),cos(\phi),0],[sin(\theta)
 *cos(\phi),sin(\theta)*sin(\phi),
 cos(\theta)]);
TR1:transpose(TR);
```

$x-y-z$ 座標系と極座標系の関係式は下記となる。

$$
\begin{aligned}
& x=\cos(\phi)\, r\sin(\theta), \quad y=\sin(\phi)\, r\sin(\theta) \\
& z=r\cos(\theta) \\
& \frac{d}{dx}r=\cos(\phi)\,\sin(\theta), \frac{d}{dx}\theta=\frac{\cos(\phi)\,\cos(\theta)}{r}, \\
& \frac{d}{dx}\phi=-\frac{\sin(\phi)}{r\sin(\theta)}, \frac{d}{dy}r=\sin(\phi)\,\sin(\theta), \\
& \frac{d}{dy}\theta=\frac{\sin(\phi)\,\cos(\theta)}{r}, \frac{d}{dy}\phi=\frac{\cos(\phi)}{r\sin(\theta)} \\
& \frac{d}{dz}r=\cos(\theta), \frac{d}{dz}\theta=-\frac{\sin(\theta)}{r}, \frac{d}{dz}\phi=0 \\
& \frac{d^2}{dx^2}r=r\left(\frac{d}{dx}\theta\right)^2+\left(\frac{d}{dx}\phi\right)^2 r\sin(\theta)^2, \\
& \frac{d^2}{dx^2}\theta=\left(\frac{d}{dx}\phi\right)^2\cos(\theta)\,\sin(\theta) \\
& \qquad -\frac{2\left(\frac{d}{dx}r\right)\left(\frac{d}{dx}\theta\right)}{r}, \\
& \frac{d^2}{dx^2}\phi=-\frac{2\left(\frac{d}{dx}\phi\right)\cos(\theta)\left(\frac{d}{dx}\theta\right)}{\sin(\theta)} \\
& \qquad -\frac{2\left(\frac{d}{dx}\phi\right)\left(\frac{d}{dx}r\right)}{r}
\end{aligned}
\tag{8.1.46}
$$

$$\frac{d^2}{d\,y^2}\,r=r\left(\frac{d}{d\,y}\,\theta\right)^2+\left(\frac{d}{d\,y}\,\phi\right)^2 r\sin\left(\theta\right)^2,$$
$$\frac{d^2}{d\,y^2}\,\theta=\left(\frac{d}{d\,y}\,\phi\right)^2\cos\left(\theta\right)\,\sin\left(\theta\right)-\frac{2\,\left(\frac{d}{d\,y}\,r\right)\,\left(\frac{d}{d\,y}\,\theta\right)}{r},$$
$$\frac{d^2}{d\,y^2}\,\phi=-\frac{2\,\left(\frac{d}{d\,y}\,\phi\right)\,\cos\left(\theta\right)\,\left(\frac{d}{d\,y}\,\theta\right)}{\sin\left(\theta\right)}-\frac{2\,\left(\frac{d}{d\,y}\,\phi\right)\,\left(\frac{d}{d\,y}\,r\right)}{r} \tag{8.1.47}$$
$$\frac{d^2}{d\,z^2}\,r=r\left(\frac{d}{d\,z}\,\theta\right)^2+\left(\frac{d}{d\,z}\,\phi\right)^2 r\sin\left(\theta\right)^2,$$
$$\frac{d^2}{d\,z^2}\,\theta=\left(\frac{d}{d\,z}\,\phi\right)^2\cos\left(\theta\right)\,\sin\left(\theta\right)-\frac{2\,\left(\frac{d}{d\,z}\,r\right)\,\left(\frac{d}{d\,z}\,\theta\right)}{r},$$
$$\frac{d^2}{d\,z^2}\,\phi=-\frac{2\,\left(\frac{d}{d\,z}\,\phi\right)\,\cos\left(\theta\right)\,\left(\frac{d}{d\,z}\,\theta\right)}{\sin\left(\theta\right)}-\frac{2\,\left(\frac{d}{d\,z}\,\phi\right)\,\left(\frac{d}{d\,z}\,r\right)}{r}$$

$x-y-z$ 座標から極座標への座標変換マトリックス：TR は、

$$TR=\begin{pmatrix}\cos\left(\phi\right)\,\cos\left(\theta\right) & \sin\left(\phi\right)\,\cos\left(\theta\right) & -\sin\left(\theta\right)\\ -\sin\left(\phi\right) & \cos\left(\phi\right) & 0\\ \cos\left(\phi\right)\,\sin\left(\theta\right) & \sin\left(\phi\right)\,\sin\left(\theta\right) & \cos\left(\theta\right)\end{pmatrix} \tag{8.1.48}$$

```
depends(f,[t,r,\theta,\phi]);
depends(g,[t,r,\theta,\phi]);
depends(h,[t,r,\theta,\phi]);
WRTZ:matrix([f],[g],[h]);
WRTZ1:transpose(WA)=TR1.WRTZ;
WA1:lhs(WRTZ1)[1][1]=rhs(WRTZ1)[1][1];
WB1:lhs(WRTZ1)[2][1]=rhs(WRTZ1)[2][1];
WC1:lhs(WRTZ1)[3][1]=rhs(WRTZ1)[3][1];
depends(o,[t,r,\theta,\phi]);
depends(q,[t,r,\theta,\phi]);
depends(s,[t,r,\theta,\phi]);
VRTZ:matrix([o],[q],[s]);
VRTZ1:transpose(V1)=TR1.VRTZ;
VA1:lhs(VRTZ1)[1][1]=rhs(VRTZ1)[1][1];
VB1:lhs(VRTZ1)[2][1]=rhs(VRTZ1)[2][1];
VC1:lhs(VRTZ1)[3][1]=rhs(VRTZ1)[3][1];
```

流速と渦度のコンポーネントを下記のように置き換える。ここで f,g,h と o,q,s は、t,θ,ϕ,r の関数とする。

$$\begin{pmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\omega_\theta\\ \omega_\phi\\ \omega_r\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f\\ g\\ h\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}v_\theta\\ v_\phi\\ v_r\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}o\\ q\\ s\end{pmatrix} \tag{8.1.49}$$

$x-y-z$ 座標と極座標の流速：$\overrightarrow{V}$ と渦度：$\overrightarrow{\omega}$ の関係は、

$$\overrightarrow{\omega}=\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}=TR^T.\begin{pmatrix}f\\ g\\ h\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}h\cos\left(\phi\right)\,\sin\left(\theta\right)+f\cos\left(\phi\right)\,\cos\left(\theta\right)-g\sin\left(\phi\right)\\ h\sin\left(\phi\right)\,\sin\left(\theta\right)+f\sin\left(\phi\right)\,\cos\left(\theta\right)+g\cos\left(\phi\right)\\ h\cos\left(\theta\right)-f\sin\left(\theta\right)\end{pmatrix} \tag{8.1.50}$$

$$\overrightarrow{V}=\begin{pmatrix}u\\ v\\ w\end{pmatrix}=TR^T.\begin{pmatrix}o\\ q\\ s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\left(\phi\right)\,s\sin\left(\theta\right)+o\cos\left(\phi\right)\,\cos\left(\theta\right)-\sin\left(\phi\right)\,q\\ \sin\left(\phi\right)\,s\sin\left(\theta\right)+o\sin\left(\phi\right)\,\cos\left(\theta\right)+\cos\left(\phi\right)\,q\\ s\cos\left(\theta\right)-o\sin\left(\theta\right)\end{pmatrix} \tag{8.1.51}$$

```
diff(rhs(WRTZ1),t,1);
TR.%;
expand(trigsimp(%));
subst(['diff(r,t,1)=v[r],'diff(\theta,t,1)
 =v[\theta]/r,'diff(\phi,t,1)=v[\phi]/r/
 sin(\theta),'diff(z,t,1)=0],%);
WT4:subst(LISW2,%);
subst([WA1,WB1,WC1],NV23);
ev(%,diff);
subst(LXYZR11,%);
subst(LXYZR21,%);
subst(LXYZR31,%);
subst(LXYZR1,%);
subst(LXYZR2,%);
subst(LXYZR3,%);
TR.%;
expand(%);
NV24:trigsimp(%);
expand(subst(LISW,%));
NV241:subst(LISW2,%);
WT4=\nu*NV241;
transpose(rhs(WABC2));
subst([VA1,VB1,VC1],%);
ev(%,diff);
subst(LXYZR1,%);
subst(LXYZR2,%);
subst(LXYZR3,%);
TR.%;
expand(%);
WRTZ=trigsimp(%);
expand(subst(LISW2,%));
```

$x-y-z$ 座標系の渦度方程式：(8.1.34) 式の左辺は、物質微分を使って、次のようになる。(8.1.50) 式の右辺を時間：t で微分を実行し、(8.1.46) 式、(8.1.47) 式を代入し、(8.1.48) 式の座標変換マトリックス：TR を掛けて整理する。ここで、$\frac{d}{d\,t}\,r=v_r, \frac{d}{d\,t}\,\theta=v_\theta/r, \frac{d}{d\,t}\,\phi=v_\phi/(r\sin(\theta)), \frac{d}{d\,t}\,z=0$ とし、$f,g,h\rightarrow\omega_\theta,\omega_\phi,\omega_r$ の置き換えを行うと渦度方程式：(8.1.34) 式の左辺の極座標系表記が得られる。

$$
\begin{gathered}
\frac{d}{d\,t}\begin{pmatrix} h\cos(\phi)\,\sin(\theta)+f\cos(\phi)\,\cos(\theta)-g\sin(\phi) \\ h\sin(\phi)\,\sin(\theta)+f\sin(\phi)\,\cos(\theta)+g\cos(\phi) \\ h\cos(\theta)-f\sin(\theta) \end{pmatrix} \\
\rightarrow\begin{pmatrix} \frac{v_\theta\left(\frac{d}{d\,\theta}\,\omega_\theta\right)}{r}+\frac{d}{d\,t}\,\omega_\theta+v_r\,\left(\frac{d}{d\,r}\,\omega_\theta\right)+\frac{v_\phi\left(\frac{d}{d\,\phi}\,\omega_\theta\right)}{r\sin(\theta)}-\frac{\omega_\phi\,v_\phi\cos(\theta)}{r\sin(\theta)}+\frac{\omega_r\,v_\theta}{r} \\ \frac{v_\phi\,\omega_\theta\cos(\theta)}{r\sin(\theta)}+\frac{v_\phi\left(\frac{d}{d\,\phi}\,\omega_\phi\right)}{r\sin(\theta)}+\frac{\left(\frac{d}{d\,\theta}\,\omega_\phi\right)v_\theta}{r}+\left(\frac{d}{d\,r}\,\omega_\phi\right)\,v_r+\frac{v_\phi\,\omega_r}{r}+\frac{d}{d\,t}\,\omega_\phi \\ \frac{v_\phi\left(\frac{d}{d\,\phi}\,\omega_r\right)}{r\sin(\theta)}-\frac{\omega_\theta\,v_\theta}{r}+\frac{\left(\frac{d}{d\,\theta}\,\omega_r\right)v_\theta}{r}+\frac{d}{d\,t}\,\omega_r+v_r\,\left(\frac{d}{d\,r}\,\omega_r\right)-\frac{\omega_\phi\,v_\phi}{r} \end{pmatrix}
\end{gathered}
\tag{8.1.52}
$$

$x-y-z$ 座標系の渦度方程式：(8.1.34) 式の右辺は、次のようになる。(8.1.50) 式を代入して、微分を実行し、(8.1.46) 式、(8.1.47) 式を代入し、(8.1.48) 式の座標変換マトリックス：TR を掛けて $f,g,h\rightarrow\omega_\theta,\omega_\phi,\omega_r$ の置き換えを行い、整理すると下記となる。

$$
\begin{gathered}
\begin{pmatrix} \frac{d^2}{d\,z^2}\,a+\frac{d^2}{d\,y^2}\,a+\frac{d^2}{d\,x^2}\,a \\ \frac{d^2}{d\,z^2}\,b+\frac{d^2}{d\,y^2}\,b+\frac{d^2}{d\,x^2}\,b \\ \frac{d^2}{d\,z^2}\,c+\frac{d^2}{d\,y^2}\,c+\frac{d^2}{d\,x^2}\,c \end{pmatrix} \\
\rightarrow\begin{pmatrix} \frac{\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,\omega_\theta}{r^2}+\frac{\cos(\theta)\left(\frac{d}{d\,\theta}\,\omega_\theta\right)}{r^2\sin(\theta)}+\frac{d^2}{d\,r^2}\,\omega_\theta+\frac{2\left(\frac{d}{d\,r}\,\omega_\theta\right)}{r}+\frac{\frac{d^2}{d\,\phi^2}\,\omega_\theta}{r^2\sin(\theta)^2}-\frac{2\left(\frac{d}{d\,\phi}\,\omega_\phi\right)\cos(\theta)}{r^2\sin(\theta)^2}-\frac{\omega_\theta}{r^2\sin(\theta)^2}+\frac{2\left(\frac{d}{d\,\theta}\,\omega_r\right)}{r^2} \\ \frac{2\cos(\theta)\left(\frac{d}{d\,\phi}\,\omega_\theta\right)}{r^2\sin(\theta)^2}+\frac{\left(\frac{d}{d\,\theta}\,\omega_\phi\right)\cos(\theta)}{r^2\sin(\theta)}+\frac{2\left(\frac{d}{d\,\phi}\,\omega_r\right)}{r^2\sin(\theta)}+\frac{\frac{d^2}{d\,\phi^2}\,\omega_\phi}{r^2\sin(\theta)^2}-\frac{\omega_\phi}{r^2\sin(\theta)^2}+\frac{2\left(\frac{d}{d\,r}\,\omega_\phi\right)}{r}+\frac{\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,\omega_\phi}{r^2}+\frac{d^2}{d\,r^2}\,\omega_\phi \\ -\frac{2\left(\frac{d}{d\,\theta}\,\omega_\theta\right)}{r^2}-\frac{2\,\omega_\theta\cos(\theta)}{r^2\sin(\theta)}+\frac{\left(\frac{d}{d\,\theta}\,\omega_r\right)\cos(\theta)}{r^2\sin(\theta)}-\frac{2\left(\frac{d}{d\,\phi}\,\omega_\phi\right)}{r^2\sin(\theta)}+\frac{\frac{d^2}{d\,\phi^2}\,\omega_r}{r^2\sin(\theta)^2}+\frac{\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,\omega_r}{r^2}+\frac{d^2}{d\,r^2}\,\omega_r+\frac{2\left(\frac{d}{d\,r}\,\omega_r\right)}{r}-\frac{2\,\omega_r}{r^2} \end{pmatrix}
\end{gathered}
\tag{8.1.53}
$$

(8.1.51) 式、(8.1.52) 式、(8.1.53) 式をまとめると、極座標系の渦度方程式は次式となる

$$
\begin{gathered}
\begin{pmatrix} \frac{v_\theta\left(\frac{d}{d\,\theta}\,\omega_\theta\right)}{r}+\frac{d}{d\,t}\,\omega_\theta+v_r\,\left(\frac{d}{d\,r}\,\omega_\theta\right)+\frac{v_\phi\left(\frac{d}{d\,\phi}\,\omega_\theta\right)}{r\sin(\theta)}-\frac{\omega_\phi\,v_\phi\cos(\theta)}{r\sin(\theta)}+\frac{\omega_r\,v_\theta}{r} \\ \frac{v_\phi\,\omega_\theta\cos(\theta)}{r\sin(\theta)}+\frac{v_\phi\left(\frac{d}{d\,\phi}\,\omega_\phi\right)}{r\sin(\theta)}+\frac{\left(\frac{d}{d\,\theta}\,\omega_\phi\right)v_\theta}{r}+\left(\frac{d}{d\,r}\,\omega_\phi\right)\,v_r+\frac{v_\phi\,\omega_r}{r}+\frac{d}{d\,t}\,\omega_\phi \\ \frac{v_\phi\left(\frac{d}{d\,\phi}\,\omega_r\right)}{r\sin(\theta)}-\frac{\omega_\theta\,v_\theta}{r}+\frac{\left(\frac{d}{d\,\theta}\,\omega_r\right)v_\theta}{r}+\frac{d}{d\,t}\,\omega_r+v_r\,\left(\frac{d}{d\,r}\,\omega_r\right)-\frac{\omega_\phi\,v_\phi}{r} \end{pmatrix} \\
=\begin{pmatrix} \nu\,\left(\frac{\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,\omega_\theta}{r^2}+\frac{\cos(\theta)\left(\frac{d}{d\,\theta}\,\omega_\theta\right)}{r^2\sin(\theta)}+\frac{d^2}{d\,r^2}\,\omega_\theta+\frac{2\left(\frac{d}{d\,r}\,\omega_\theta\right)}{r}+\frac{\frac{d^2}{d\,\phi^2}\,\omega_\theta}{r^2\sin(\theta)^2}-\frac{2\left(\frac{d}{d\,\phi}\,\omega_\phi\right)\cos(\theta)}{r^2\sin(\theta)^2}-\frac{\omega_\theta}{r^2\sin(\theta)^2}+\frac{2\left(\frac{d}{d\,\theta}\,\omega_r\right)}{r^2}\right) \\ \nu\,\left(\frac{2\cos(\theta)\left(\frac{d}{d\,\phi}\,\omega_\theta\right)}{r^2\sin(\theta)^2}+\frac{\left(\frac{d}{d\,\theta}\,\omega_\phi\right)\cos(\theta)}{r^2\sin(\theta)}+\frac{2\left(\frac{d}{d\,\phi}\,\omega_r\right)}{r^2\sin(\theta)}+\frac{\frac{d^2}{d\,\phi^2}\,\omega_\phi}{r^2\sin(\theta)^2}-\frac{\omega_\phi}{r^2\sin(\theta)^2}+\frac{2\left(\frac{d}{d\,r}\,\omega_\phi\right)}{r}+\frac{\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,\omega_\phi}{r^2}+\frac{d^2}{d\,r^2}\,\omega_\phi\right) \\ \nu\,\left(-\frac{2\left(\frac{d}{d\,\theta}\,\omega_\theta\right)}{r^2}-\frac{2\,\omega_\theta\cos(\theta)}{r^2\sin(\theta)}+\frac{\left(\frac{d}{d\,\theta}\,\omega_r\right)\cos(\theta)}{r^2\sin(\theta)}-\frac{2\left(\frac{d}{d\,\phi}\,\omega_\phi\right)}{r^2\sin(\theta)}+\frac{\frac{d^2}{d\,\phi^2}\,\omega_r}{r^2\sin(\theta)^2}+\frac{\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,\omega_r}{r^2}+\frac{d^2}{d\,r^2}\,\omega_r+\frac{2\left(\frac{d}{d\,r}\,\omega_r\right)}{r}-\frac{2\,\omega_r}{r^2}\right) \end{pmatrix}
\end{gathered}
\tag{8.1.54}
$$

渦度の極座標表記を求める。(8.1.27) 式に (8.1.50) 式を代入して、微分を実行し (8.1.46) 式、(8.1.47) 式を代入し、(8.1.48) 式の座標変換マトリックスを掛けて整理すると渦度の極座標表記が得られる。

$$
\begin{pmatrix} \omega_\theta \\ \omega_\phi \\ \omega_r \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{\frac{d}{d\,\phi}\,v_r}{r\sin(\theta)}-\frac{v_\phi}{r}-\frac{d}{d\,r}\,v_\phi \\ \frac{d}{d\,r}\,v_\theta+\frac{v_\theta}{r}-\frac{\frac{d}{d\,\theta}\,v_r}{r} \\ -\frac{\frac{d}{d\,\phi}\,v_\theta}{r\sin(\theta)}+\frac{v_\phi\cos(\theta)}{r\sin(\theta)}+\frac{\frac{d}{d\,\theta}\,v_\phi}{r} \end{pmatrix}
\tag{8.1.55}
$$

8.2　定常な一方向の流れ

8.2.1　二枚の平板間の流れ (Couette Flow)

二枚の平板間の定常粘性流れを求める。x-y-z 座標軸の各速度コンポーネントを u, v, w とする。圧力：p、粘性係数：μ、x 方向の外力：X とする。

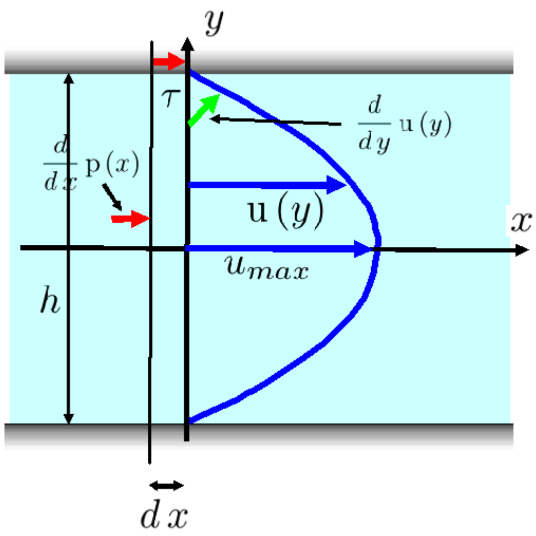


図 8.2.1: 二枚の平板間の流れ

```
kill(all);
MAS1:'diff(w,z,1)+'diff(v,y,1)+'diff(u,x,1)
 =0;
NAV1:matrix([\rho*(('diff(u,z,1))*w
 +('diff(u,y,1))*v+u*('diff(u,x,1))
 +'diff(u,t,1))],[\rho*(('diff(v,z,1))*w
 +v*('diff(v,y,1))+u*('diff(v,x,1))
 +'diff(v,t,1))],[\rho*(w*('diff(w,z,1))
+v*('diff(w,y,1))+u*('diff(w,x,1))
+'diff(w,t,1))])=matrix([X+mu*('diff(u,z,2)
+'diff(u,y,2)+'diff(u,x,2))-'diff(p,x,1)],
[Y+mu*('diff(v,z,2)+'diff(v,y,2)
+'diff(v,x,2))
-'diff(p,y,1)],[Z+mu*('diff(w,z,2)
+'diff(w,y,2)+'diff(w,x,2))-'diff(p,z,1)]);
lhs(NAV1)[1][1]=rhs(NAV1)[1][1];
subst([v=0,w=0,X=0,u=u(y),p=p(x)],%);
NAV3:ev(%,diff);
UY1:ode2(NAV3,u(y),y);
UY11:subst([u(y)=0,y=-h/2],UY1);
UY12:subst([u(y)=0,y=h/2],UY1);
solve([UY11,UY12],[%k1,%k2])[1];
UY2:subst([%],UY1);
```

```
subst([h=1,U=1,\mu=1,'diff(p(x),x,1)=1,
 y=x],rhs(UY2));
plot2d(-%,[x,-0.5,0.5],[y,-0.1,0.2]);
u[m]=1/h*'integrate(rhs(UY2),y,-h/2,h/2);
UYMEN1:ev(%,integrate);
DPX1:solve(UYMEN1,'diff(p(x),x,1))[1];
UYMAX1:u[max]=subst([y=0],rhs(UY2));
UYMAX2:subst([DPX1],UYMAX1);
DUY1:diff(UY2,y,1);
DUY2:lhs(DUY1)=subst([y=h/2],rhs(DUY1));
DUY3:subst([DPX1],DUY2);
TAU1:'diff(p(x),x,1)*h*dx=dx*2*\tau;
TAU2:\tau=\mu*'diff(u(y),y,1);
subst([TAU2],TAU1);
subst([DUY3],%);
solve(%,'diff(p(x),x,1))[1];
```

質量保存の方程式は (8.1.2) 式から、

$$\frac{d}{d\,z}\,w+\frac{d}{d\,y}\,v+\frac{d}{d\,x}\,u=0$$

x 軸方向の Navier-Stokes の式は (8.1.9) 式から、

$$\rho\,\left(\left(\frac{d}{d\,z}\,u\right)\,w+\left(\frac{d}{d\,y}\,u\right)\,v+u\,\left(\frac{d}{d\,x}\,u\right)+\frac{d}{d\,t}\,u\right)$$
$$=X+\mu\,\left(\frac{d^2}{d\,z^2}\,u+\frac{d^2}{d\,y^2}\,u+\frac{d^2}{d\,x^2}\,u\right)-\frac{d}{d\,x}\,p$$

$v=0, w=0, X=0$ で、u は y 方向のみ変化するから、$u=u(y)$ となる。これを上式に代入し、

$$\rho\,\left(\mathrm{u}\left(y\right)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{u}\left(y\right)\right)+\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{u}\left(y\right)\right)$$
$$=\mu\,\left(\frac{d^2}{d\,z^2}\,\mathrm{u}\left(y\right)+\frac{d^2}{d\,y^2}\,\mathrm{u}\left(y\right)+\frac{d^2}{d\,x^2}\,\mathrm{u}\left(y\right)\right)$$
$$-\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{p}\left(x\right)$$

定常状態を求めるから、時間変化、x 軸方向の変化はなく、$\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{u}(y)=0, \frac{d}{d\,t}\,\mathrm{u}(y)=0$ であるから、

$$0=\mu\,\left(\frac{d^2}{d\,y^2}\,\mathrm{u}\left(y\right)\right)-\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{p}\left(x\right)$$

上式を ode2 関数で解いて、

$$\mathrm{u}\left(y\right)=\frac{\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{p}\left(x\right)\right)\,y^2}{2\,\mu}+\%k2\,y+\%k1 \qquad (8.2.1)$$

(1) 側壁固定

両方の側壁が動かない場合、側壁の境界条件として、$y=-h/2, y=h/2$ で $u(y)=0$ であるから、

$$\%k1=-\frac{h^2\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{p}\left(x\right)\right)}{8\,\mu}, \%k2=0$$

上式を代入し、流速分布：$u(y)$ は下記の二次式となる。

$$\mathrm{u}(y)=\frac{\left(\frac{d}{dx}\,\mathrm{p}(x)\right)\,y^2}{2\,\mu}-\frac{h^2\,\left(\frac{d}{dx}\,\mathrm{p}(x)\right)}{8\,\mu} \tag{8.2.2}$$

平均流速：u_m は次式となり、

$$\begin{aligned}u_m=&\frac{1}{h}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\frac{\left(\frac{d}{dx}\,\mathrm{p}(x)\right)\,y^2}{2\,\mu}-\frac{h^2\,\left(\frac{d}{dx}\,\mathrm{p}(x)\right)}{8\,\mu}dy\\=&-\frac{h^2\,\left(\frac{d}{dx}\,\mathrm{p}(x)\right)}{12\,\mu}\end{aligned}$$

平均流速：u_m と圧力損出：$\frac{d}{dx}\,\mathrm{p}(x)$ の関係は、

$$\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{p}(x)=-\frac{12\,u_m\,\mu}{h^2} \tag{8.2.3}$$

最大流速：u_{max} は、

$$u_{max}=-\frac{h^2\,\left(\frac{d}{dx}\,\mathrm{p}(x)\right)}{8\,\mu}=\frac{3\,u_m}{2}$$

次に側壁に作用する摩擦力：τ から圧力勾配 (損失)：$\frac{d}{dx}\,\mathrm{p}(x)$ を求める。(8.2.2) 式を y で微分し、

$$\frac{d}{d\,y}\,\mathrm{u}(y)=\frac{\left(\frac{d}{dx}\,\mathrm{p}(x)\right)\,y}{\mu}$$

側壁の速度変化は、

$$\frac{d}{d\,y}\,\mathrm{u}(y)=\frac{h\,\left(\frac{d}{dx}\,\mathrm{p}(x)\right)}{2\,\mu}$$

上式を平均流速：u_m で表すと、

$$\frac{d}{d\,y}\,\mathrm{u}(y)=-\frac{6\,u_m}{h}$$

h に作用する圧力損失は次式左辺となり、側壁に作用する摩擦力は次式の右辺で、これらは等しいから、次式を得る。

$$dx\,h\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{p}(x)\right)=2\,dx\,\tau$$

ここで、摩擦力：τ は下記で得られる。

$$\tau=\mu\left(\frac{d}{d\,y}\,\mathrm{u}(y)\right)$$

上式を代入し、

$$dx\,h\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{p}(x)\right)=2\,dx\,\mu\left(\frac{d}{d\,y}\,\mathrm{u}(y)\right)$$

$$dx\,h\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{p}(x)\right)=-\frac{12\,dx\,u_m\,\mu}{h}$$

(8.2.3) 式と同じ結果が得られた。

$$\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{p}(x)=-\frac{12\,u_m\,\mu}{h^2}$$

(2) 一方の側壁が速度：U で移動

```
UY11:subst([u(y)=0,y=0],UY1);
UY12:subst([u(y)=U,y=h],UY1);
solve([UY11,UY12],[%k1,%k2])[1];
UY3:subst([%],UY1);
P1:'diff(p(x),x,1)=P*2*U*\mu/h^2;
solve(P1,P)[1];
expand(UY3/U);
subst([P1],%);
subst([h=1],rhs(%));
plot2d([subst([P=3],%),subst([P=2],%)
  ,subst([P=1],%),subst([P=0],%)
  ,subst([P=-1],%),subst([P=-2],%)
  ,subst([P=-3],%)],[y,0,1]);
```

一方の側壁が速度：U で x 方向に移動する場合、側壁の境界条件として、$y=0$ で $u(y)=0$、$y=h$ で $u(y)=U$ を (8.2.1) 式に代入し、各係数は、

$$\%k1=0,\%k2=\frac{2\,\mu\,U-h^2\,\left(\frac{d}{dx}\,\mathrm{p}(x)\right)}{2\,h\,\mu}$$

上式を (8.2.1) 式に代入し、流速分布は、

$$\mathrm{u}(y)=\frac{y\,\left(2\,\mu\,U-h^2\,\left(\frac{d}{dx}\,\mathrm{p}(x)\right)\right)}{2\,h\,\mu}+\frac{\left(\frac{d}{dx}\,\mathrm{p}(x)\right)\,y^2}{2\,\mu} \tag{8.2.4}$$

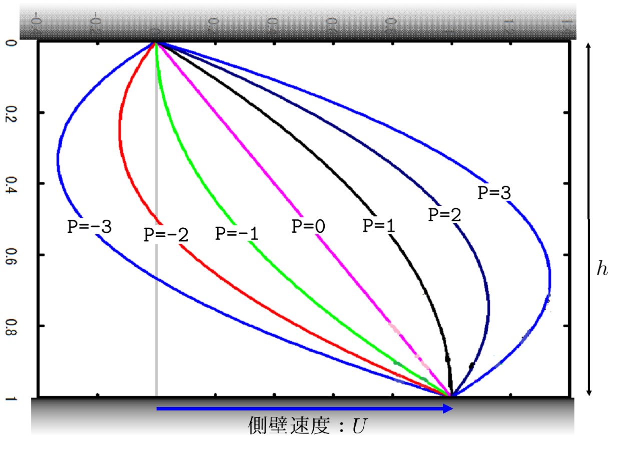


図 8.2.2: 一方の側壁が速度：U で移動する場合の流速分布

例題 8.2.2　円管内流れ (Hagen-Poiseuille Theory)

半径：R の円管内の定常粘性流れを求める。$r-\theta-z$ 座標軸の各速度コンポーネントを v_r, v_θ, v_z とする。圧力：p、粘性係数：μ、z 方向の外力：F_z とする。また、円管の摩擦抵抗の損出について調べる。

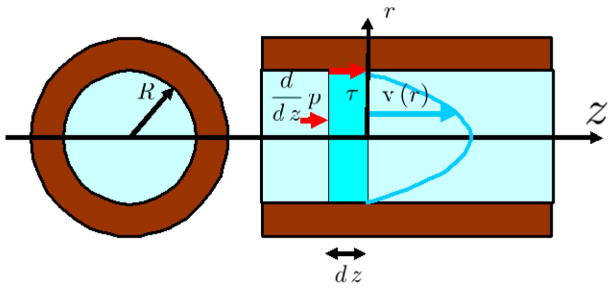


図 8.2.3: 円管内流れ

```
/* 円管内流れ */
kill(all);
'diff(p,z,1)*%pi*R^2=\tau*2*%pi*R;
DPZ:solve(%,'diff(p,z,1))[1];
h='diff(p,z,1)*L/\rho/g;
HFL1:subst([DPZ,R=D/2],%);
HFL2:h=l*L/D*v[m]^2/2/g;
rhs(HFL1)=rhs(HFL2);
solve(%,\tau)[1];
```

円管内の摩擦損失の関係を調べる。半径：R、圧力勾配：dp/dz、管壁の剪断応力：τ とすると、次の関係がある。

$$\pi\left(\frac{d}{d\,z}\,p\right)\,R^2=2\,\pi\,\tau\,R$$

整理すると、

$$\frac{d}{d\,z}\,p=\frac{2\,\tau}{R}$$

損失ヘッド：h で表し、摩擦損失係数：l を導入するとその関係は、

$$h=\frac{\left(\frac{d}{d\,z}\,p\right)\,L}{g\,\rho}=\frac{l\,v_m^2\,L}{2\,g\,D} \tag{8.2.5}$$

上式から管壁の剪断応力：τ は、

$$\tau=\frac{l\,v_m^2\,\rho}{8}$$

```
\rho*(v[z]*('diff(v[z],z,1))+(v[\theta]
 *('diff(v[z],\theta,1)))/r+'diff(v[z],t,1)
  +v[r]*('diff(v[z],r,1)))=mu*('diff(v[z],z
  ,2)+'diff(v[z],\theta,2)/r^2+'diff(v[z],r
  ,2)+'diff(v[z],r,1)/r)+F[z]-'diff(p,z,1);
rhs(%)=0;
```

```
EQN1:subst([F[z]=0,'diff(v[z],z,2)=0,
  'diff(v[z],\theta,2)=0],%);
EQN2:subst([v[z]=v(r)],EQN1);
atvalue(v(r),r=R,0);
atvalue(diff(v(r),r,1),r=0,0);
desolve(EQN2,v(r));
ANS1:ode2(EQN2,v(r),r);
DANS1:diff(ANS1,r,1);
K1:subst([%k1=0,r=R],rhs(ANS1)=0);
solve(%,%k2)[1];
ANS2:factor(subst([%k1=0,%],ANS1));
'integrate(rhs(ANS2)*2*\pi*r,r,0,R)/\pi
 /R^2;
VM:v[m]=ev(%,integrate);
DP:-solve(VM,'diff(p,z,1))[1];
h=rhs(DP)/\rho/g*L;
HFL3:subst([R=D/2],%);
rhs(HFL2)=rhs(HFL3);
LA1:solve(%,l)[1];
RN:R[e]=v[m]*D/\mu*\rho;
solve(RN,v[m])[1];
subst([%],LA1);
```

円柱座標系の z 軸方向の Navier-Stokes の式：(8.1.15) 式は、

$$\mu\left(\frac{d^2}{d\,z^2}\,v_z+\frac{\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,v_z}{r^2}+\frac{d^2}{d\,r^2}\,v_z+\frac{\frac{d}{d\,r}\,v_z}{r}\right)+F_z-\frac{d}{d\,z}\,p=0$$

定常状態で、v_z が r のみの関数となるから、$v_z=\mathrm{v}\,(r)$ として、上式は、

$$\mu\left(\frac{d^2}{d\,r^2}\,\mathrm{v}\,(r)+\frac{\frac{d}{d\,r}\,\mathrm{v}\,(r)}{r}\right)-\frac{d}{d\,z}\,p=0$$

この微分方程式を $ode2$ 関数で解き、r で微分すると、

$$\begin{aligned}\mathrm{v}\,(r)&=\frac{\%k1\log(r)}{\mu}+\frac{\left(\frac{d}{d\,z}\,p\right)\,r^2}{4\,\mu}+\%k2\\ \frac{d}{d\,r}\,\mathrm{v}\,(r)&=\frac{\left(\frac{d}{d\,z}\,p\right)\,r}{2\,\mu}+\frac{\%k1}{\mu\,r}\end{aligned} \tag{8.2.6}$$

$v(R)=0,\ \frac{d}{dr}\,v(0)=0$ の境界条件から、流速分布は下記の二次式となる。

$$\mathrm{v}\,(r)=-\frac{\left(\frac{d}{d\,z}\,p\right)\,(R-r)\,(R+r)}{4\,\mu} \tag{8.2.7}$$

上式から平均流速：v_m は、

$$\begin{aligned}v_m&=-\frac{1}{2\,\mu\,R^2}\left(\frac{d}{d\,z}\,p\right)\int_0^R r\,(R-r)\,(R+r)\,dr\\ &=-\frac{\left(\frac{d}{d\,z}\,p\right)\,R^2}{8\,\mu}\end{aligned} \tag{8.2.8}$$

上式を整理し、

$$-\frac{d}{d\,z}\,p=\frac{8\,v_m\,\mu}{R^2}$$

損失ヘッドで表すと、

$$h=\frac{32\,v_m\,\mu\,L}{g\,\rho\,D^2}$$

前記の (8.2.5) 式と比較して、次の関係を得る。

$$l=\frac{64\,\mu}{v_m\,\rho\,D}$$

レイノルズ数：R_e とすると、

$$\begin{aligned} R_e &= \frac{v_m\,\rho\,D}{\mu} \\ l &= \frac{64}{R_e} \end{aligned} \tag{8.2.9}$$

8.2.3　傾斜した板の上の流体層

傾斜した平板上で自由表面を有する二次元定常粘性流れを求める。x-y-z 座標軸の各速度コンポーネントを u, v, w とする。圧力：p、粘性係数：μ、平板に平行で主流方向を x 軸方向とし、平板の傾斜角：α、水位：h とする。

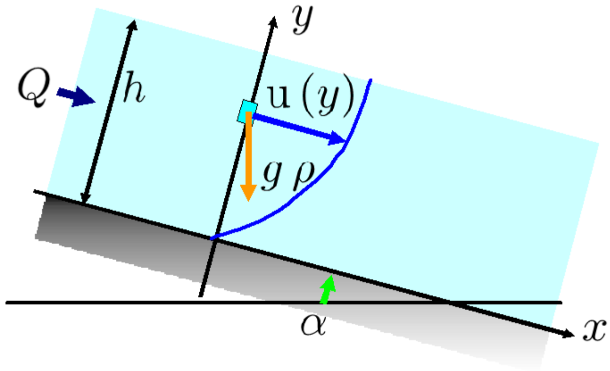


図 8.2.4: 傾斜した板の上の流体層

```
kill(all);
NAV1:matrix([\rho*(('diff(u,z,1))*w
 +('diff(u,y,1))*v+u*('diff(u,x,1))
 +'diff(u,t,1))],[\rho*(('diff(v,z,1))*w
 +v*('diff(v,y,1))+u*('diff(v,x,1))
 +'diff(v,t,1))],[\rho*(w*('diff(w,z,1))
+v*('diff(w,y,1))+u*('diff(w,x,1))
+'diff(w,t,1))])=matrix([X+mu*('diff(u,z,2)
+'diff(u,y,2)+'diff(u,x,2))-'diff(p,x,1)],
 [Y+mu*('diff(v,z,2)+'diff(v,y,2)
 +'diff(v,x,2))-'diff(p,y,1)],[Z
 +mu*('diff(w,z,2)+'diff(w,y,2)
 +'diff(w,x,2))-'diff(p,z,1)]);
NAV2:lhs(NAV1)[1][1]=rhs(NAV1)[1][1];
NAV3:lhs(NAV1)[2][1]=rhs(NAV1)[2][1];
subst([v=0,w=0,u=u(y),p=p(y),X=X(y),Y=Y(x)]
 ,NAV2);
ev(%,diff);
NAV21:subst([X(y)=\rho*g*sin(\alpha)],%);
subst([v=0,w=0,u=u(y),p=p(y),X=X(y),Y=Y(x)]
 ,NAV3);
ev(%,diff);
NAV31:subst([Y(x)=\rho*g*cos(\alpha)],%);
```

```
UY1:ode2(NAV21,u(y),y);
DUY1:diff(UY1,y,1);
K1:subst([y=0],rhs(UY1))=0;
TAU1:\tau=\mu*'diff(u(y),y,1);
rhs(TAU1)=0;
TAU2:solve(%,'diff(u(y),y,1))[1];
subst([TAU2,y=h],DUY1);
K2:solve(%,%k2)[1];
subst([K1,K2],UY1);
UY2:factor(%);
```

x 軸方向および y 軸方向の Navier-Stokes の式は (8.1.9) 式から、

$$\rho\left(\left(\frac{d}{d\,z}\,u\right)\,w+\left(\frac{d}{d\,y}\,u\right)\,v+u\,\left(\frac{d}{d\,x}\,u\right)+\frac{d}{d\,t}\,u\right)$$
$$=X+\mu\,\left(\frac{d^2}{d\,z^2}\,u+\frac{d^2}{d\,y^2}\,u+\frac{d^2}{d\,x^2}\,u\right)-\frac{d}{d\,x}\,p$$
$$\rho\left(\left(\frac{d}{d\,z}\,v\right)\,w+v\,\left(\frac{d}{d\,y}\,v\right)+u\,\left(\frac{d}{d\,x}\,v\right)+\frac{d}{d\,t}\,v\right)$$
$$=Y+\mu\,\left(\frac{d^2}{d\,z^2}\,v+\frac{d^2}{d\,y^2}\,v+\frac{d^2}{d\,x^2}\,v\right)-\frac{d}{d\,y}\,p$$

上記の仮定から、$v=0, w=0$ で、平板が角度：α だけ傾斜しているため、各流体要素には $X=\sin(\alpha)\,g\,\rho$、$Y=\cos(\alpha)\,g\,\rho$ の力が作用する。また、u, p は y のみの変数であるため、$u=u(y), p=p(y)$ となる。この関係を上記の Navier-Stokes の式に代入すると、

$$0=\mu\,\left(\frac{d^2}{d\,y^2}\,\mathrm{u}\,(y)\right)+\sin(\alpha)\,g\,\rho \tag{8.2.10}$$

$$0=\cos(\alpha)\,g\,\rho-\frac{d}{d\,y}\,\mathrm{p}\,(y) \tag{8.2.11}$$

(8.2.10) 式を $ode2$ 関数で解き、y で微分すると、

$$\mathrm{u}\,(y)=-\frac{\sin(\alpha)\,g\,\rho\,y^2}{2\,\mu}+\%k2\,y+\%k1 \tag{8.2.12}$$

$$\frac{d}{d\,y}\,\mathrm{u}\,(y)=\%k2-\frac{\sin(\alpha)\,g\,\rho\,y}{\mu} \tag{8.2.13}$$

境界条件、$y=0$ で $u(y)=0$、$y=h$ の自由表面境界では、剪断力：$\tau=0$ であるから、$\frac{d}{d\,y}\,\mathrm{u}\,(y)=0$ となる。この条件を (8.2.12) 式、(8.2.13) 式に代入すると、

$$\%k1=0,\quad \%k2=\frac{\sin(\alpha)\,g\,h\,\rho}{\mu}$$

以上から、流速分布：$u(y)$ は、

$$\mathrm{u}\,(y)=-\frac{\sin(\alpha)\,g\,\rho\,y\,(y-2\,h)}{2\,\mu} \tag{8.2.14}$$

```
Q='integrate(rhs(UY2),y,0,h);
Q1:ev(%,integrate);
solve(Q1,h);
%[3];
PL1:subst([\alpha=0.314,g=9.8,
 \rho=1,h=1,y=x],rhs(UY2));
plot2d(subst([\mu=1],PL1),[x,0,1]);
```

上式の速度分布を積分し、水位：h の時の流量：Q を求めると、

$$Q=-\frac{\sin(\alpha)\;g\,\rho}{2\,\mu}\int_{0}^{h}y\;(y-2\,h)\,dy=\frac{\sin(\alpha)\;g\,h^{3}\,\rho}{3\,\mu} \tag{8.2.15}$$

流量：Q から水位：h を求めると、

$$h=\left(\frac{3\,\mu\,Q}{\sin(\alpha)\;g\,\rho}\right)^{\frac{1}{3}} \tag{8.2.16}$$

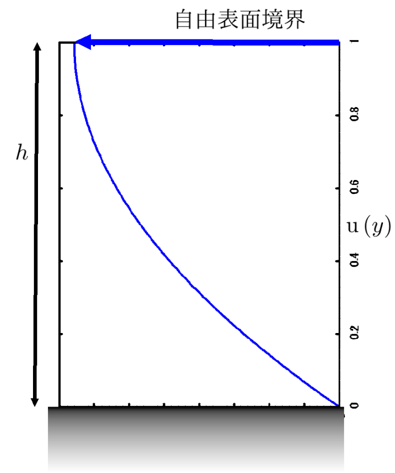


図 8.2.5: 傾斜した板の上の流体流速

8.2.4　二重円管間の流れ

二重円管間の定常粘性流れを求める。円柱座標軸の各速度コンポーネントを v_r, v_θ, v_z とする。圧力：p、粘性係数：μ とする。二重円管の外部管の半径：R_o、内部円管の半径：R_i とし、この間に流体が流れる。

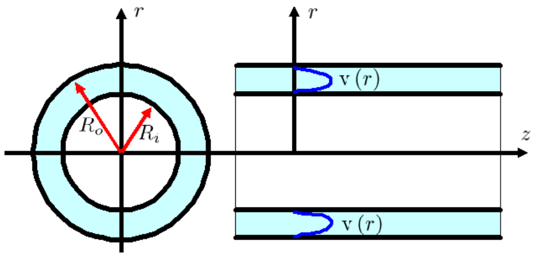


図 8.2.6: 二重円管間の流れ

```
/* 二重円管内の流れ */
kill(all);
\rho*(v[z]*('diff(v[z],z,1))+(v[\theta]
 *('diff(v[z],\theta,1)))/r+'diff(v[z],t,1)
  +v[r]*('diff(v[z],r,1)))=mu*('diff(v[z],z
  ,2)+'diff(v[z],\theta,2)/r^2+'diff(v[z],r
  ,2)+'diff(v[z],r,1)/r)+F[z]-'diff(p,z,1);
rhs(%)=0;
EQN1:subst([F[z]=0,'diff(v[z],z,2)=0,
  'diff(v[z],\theta,2)=0],%);
EQN2:subst([v[z]=v(r)],EQN1);
ANS1:ode2(EQN2,v(r),r);
BC1:subst([r=R[o]],rhs(ANS1))=0;
BC2:subst([r=R[i]],rhs(ANS1))=0;
solve([BC1,BC2],[%k1,%k2])[1];
subst([%],ANS1);
ANS2:factor(%);
C1:C='diff(p,z,1)/4/\mu;
C2:solve(C1,\mu);
subst([C2],ANS2);
logcontract(%);
factor(%);
ANS3:subst([C1],%);
PL1:subst([R[o]=2,R[i]=1,\mu=1,'diff(p,z,1)
 =1,r=x],rhs(ANS3));
plot2d(PL1,[x,1,2]);
```

z 軸方向の Navier-Stokes の式は (8.1.15) 式から、

$$
\begin{aligned}
&\rho \left(v_z \left(\frac{d}{d\,z}\, v_z \right) + \frac{v_\theta \left(\frac{d}{d\,\theta}\, v_z \right)}{r} + \frac{d}{d\,t}\, v_z + v_r \left(\frac{d}{d\,r}\, v_z \right) \right) \\
&= \mu \left(\frac{d^2}{d\,z^2}\, v_z + \frac{\frac{d^2}{d\,\theta^2}\, v_z}{r^2} + \frac{d^2}{d\,r^2}\, v_z + \frac{\frac{d}{d\,r}\, v_z}{r} \right) \\
&+ F_z - \frac{d}{d\,z}\, p
\end{aligned}
$$

上記の仮定から、$v_r = 0, v_\theta = 0$ で、各流体要素に働く力：$F_z = 0$ である。また、v_z は r のみの変数であるため、$v_z = \mathrm{v}(r)$ とする。この関係を上記の Navier-Stokes の式に代入すると、

$$
\mu \left(\frac{d^2}{d\,r^2}\, \mathrm{v}\,(r) + \frac{\frac{d}{d\,r}\, \mathrm{v}\,(r)}{r} \right) - \frac{d}{d\,z}\, p = 0 \tag{8.2.17}
$$

上式を $ode2$ 関数で解くと、

$$
\mathrm{v}\,(r) = \frac{\%k1 \log{(r)}}{\mu} + \frac{\left(\frac{d}{d\,z}\, p \right)\, r^2}{4\,\mu} + \%k2 \tag{8.2.18}
$$

境界条件として、$r = R_o$ で $\mathrm{v}(r) = 0$、$r = R_i$ で $\mathrm{v}(r) = 0$ であるから、上式に代入して、

$$
\frac{R_o^2 \left(\frac{d}{d\,z}\, p \right)}{4\,\mu} + \frac{\%k1 \log{(R_o)}}{\mu} + \%k2 = 0
$$

$$
\frac{R_i^2 \left(\frac{d}{d\,z}\, p \right)}{4\,\mu} + \frac{\%k1 \log{(R_i)}}{\mu} + \%k2 = 0
$$

上式を解いて、$\%k1, \%k2$ を求めると、

$$
\%k1 = -\frac{\left(R_o^2 - R_i^2 \right)\, \left(\frac{d}{d\,z}\, p \right)}{4 \log{(R_o)} - 4 \log{(R_i)}},
$$

$$
\%k2 = -\frac{\left(R_i^2 \log{(R_o)} - \log{(R_i)}\ R_o^2 \right)\, \left(\frac{d}{d\,z}\, p \right)}{4\,\mu \log{(R_o)} - 4 \log{(R_i)}\ \mu}
$$

上式を (8.2.18) 式に代入すると、流速分布：$v(r)$ が得られる。

$$
\begin{aligned}
\mathrm{v}\,(r) &= -\frac{\left(R_o^2 - R_i^2 \right)\, \left(\frac{d}{d\,z}\, p \right)\, \log{(r)}}{\mu\, \left(4 \log{(R_o)} - 4 \log{(R_i)} \right)} + \frac{\left(\frac{d}{d\,z}\, p \right)\, r^2}{4\,\mu} \\
&\quad - \frac{\left(R_i^2 \log{(R_o)} - \log{(R_i)}\ R_o^2 \right)\, \left(\frac{d}{d\,z}\, p \right)}{4\,\mu \log{(R_o)} - 4 \log{(R_i)}\ \mu} \\
&= \frac{\left(\frac{d}{d\,z}\, p \right) \left(R_o^2 \log\left(\frac{r}{R_i} \right) + \log\left(\frac{R_i}{R_o} \right) r^2 + R_i^2 \log\left(\frac{R_o}{r} \right) \right)}{4\mu \log\left(\frac{R_i}{R_o} \right)}
\end{aligned} \tag{8.2.19}
$$

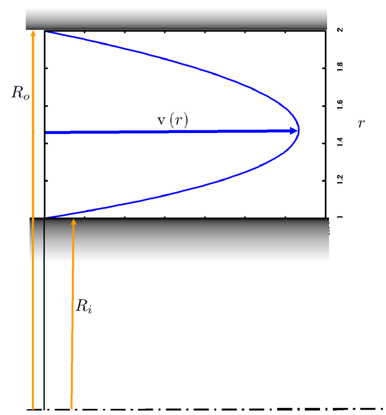


図 8.2.7: 二重円管間の流れ

8.2.5　楕円管内の流れ

楕円管内の定常粘性流れを求める。x-y-z 座標軸の各速度コンポーネントを u, v, w とする。圧力：p、粘性係数：μ、主流方向を z 軸方向とする。断面形状の楕円の長径、短径は x 軸方向を a、y 軸方向を b とする。

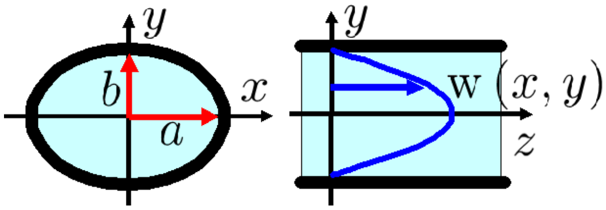


図 8.2.8: 楕円管内の流れ

```
/* 楕円管内の流れ */
kill(all);
MAS1:'diff(w,z,1)+'diff(v,y,1)+'diff(u,x,1)
 =0;
NAV1:matrix([\rho*(('diff(u,z,1))*w
 +('diff(u,y,1))*v+u*('diff(u,x,1))
 +'diff(u,t,1))],[\rho*(('diff(v,z,1))*w
 +v*('diff(v,y,1))+u*('diff(v,x,1))
 +'diff(v,t,1))],[\rho*(w*('diff(w,z,1))
 +v*('diff(w,y,1))+u*('diff(w,x,1))
 +'diff(w,t,1))]])=matrix([X+mu
 *('diff(u,z,2)+'diff(u,y,2)+'diff(u,x,2))
 -'diff(p,x,1)],[Y+mu*('diff(v,z,2)
 +'diff(v,y,2)+'diff(v,x,2))-'diff(p,y,1)],
 [Z+mu*('diff(w,z,2)+'diff(w,y,2)
 +'diff(w,x,2))-'diff(p,z,1)]);
lhs(NAV1)[3][1]=rhs(NAV1)[3][1];
subst([u=0,v=0,Z=0,w=w(x,y),p=p(z)],%);
NAV3:ev(%,diff);
W1:w(x,y)=A*x^2+B*y^2+C;
subst([W1],NAV3);
ev(%,diff);
W2:w(x,y)=C*(1-x^2/a^2-y^2/b^2);
subst([W2],NAV3);
ev(%,diff);
solve(%,C)[1];
W3:subst([%],W2);
subst([a=2,b=1,\mu=1,'diff(p(z),z,1)=1],
 rhs(%));
subst([x=0,a=2,b=1,\mu=1,'diff(p(z),z,1)=1,
 y=x],rhs(W3));
plot2d(%,[x,-1,1]);
```

z 軸方向の Navier-Stokes の式は (8.1.9) 式から、

$$\rho\left(w\left(\frac{d}{dz}w\right)+v\left(\frac{d}{dy}w\right)+u\left(\frac{d}{dx}w\right)+\frac{d}{dt}w\right)$$
$$=Z+\mu\left(\frac{d^2}{dz^2}w+\frac{d^2}{dy^2}w+\frac{d^2}{dx^2}w\right)-\frac{d}{dz}p$$

上記の仮定から、$u=0, v=0$ で、各流体要素に働く力：$Z=0$ である。また、w は x, y のみの変数であるため、$w=w(x,y)$ とする。この関係を上記の Navier-Stokes の式に代入すると、

$$0=\mu\left(\frac{d^2}{dy^2}\mathrm{w}(x,y)+\frac{d^2}{dx^2}\mathrm{w}(x,y)\right)-\frac{d}{dz}\mathrm{p}(z) \tag{8.2.20}$$

楕円形状から次式が上式を満足する解である。

$$\mathrm{w}(x,y)=C+y^2B+x^2A$$

上式を (8.2.20) 式に代入すると、下記となり、上式が解であることが確かめられた。

$$0=\mu\,(2B+2A)-\frac{d}{dz}\mathrm{p}(z)$$

境界が楕円形状であることから、流速分布は下記となり、境界の楕円形状では流速が零となるから、

$$\mathrm{w}(x,y)=\left(-\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}+1\right)C \tag{8.2.21}$$

解が上式の時、(8.2.20) 式に代入すると、次式が得られる。

$$0=\mu\left(-\frac{2C}{b^2}-\frac{2C}{a^2}\right)-\frac{d}{dz}\mathrm{p}(z)$$

上式から C を求めると、

$$C=-\frac{a^2b^2\left(\frac{d}{dz}\mathrm{p}(z)\right)}{(2b^2+2a^2)\,\mu}$$

上式を (8.2.21) 式に代入すると、下記の流速分布:$\mathrm{w}(x,y)$ が得られる。

$$\mathrm{w}(x,y)=-\frac{a^2b^2\left(-\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}+1\right)\left(\frac{d}{dz}\mathrm{p}(z)\right)}{(2b^2+2a^2)\,\mu} \tag{8.2.22}$$

断面形状の楕円の長径、短径が x 軸方向を $a=2$、y 軸方向を $b=1$ としたとき、$x=0$ 断面における流速分布を下記に示す。

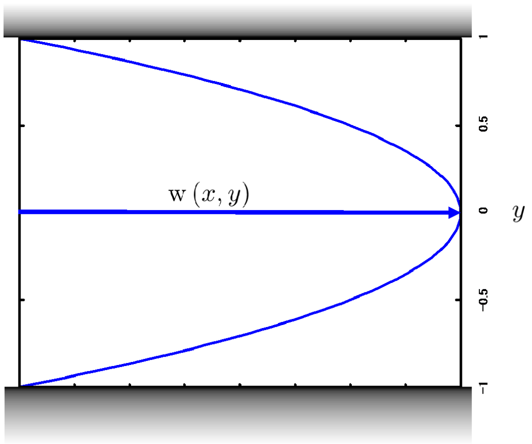


図 8.2.9: 楕円管内の流れ ($x=0$ 断面)

楕円断面の流速の等高線を下記の gnuplot を用いて描いた。

```
#!/gnuplot
set xrange [-2:2]
set yrange [-1:1]
set isosamples 150,150
set contour base
set cntrparam levels incremental -50,0.02
 ,0.02
unset key
unset surface
set view map
splot -(2*(-y**2-x**2/4+1))/5
# EOF
```

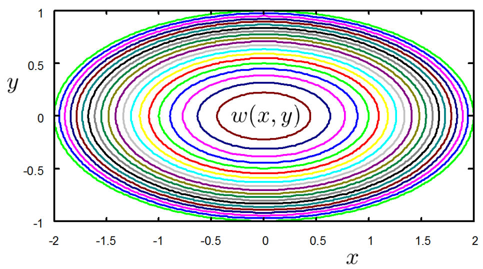


図 8.2.10: 楕円管内の流れ（等流速線図）

8.2.6 矩形管内の流れ

矩形管内の定常粘性流れを求める。x-y-z 座標軸の各速度コンポーネントを u, v, w とする。圧力：p、粘性係数：μ、主流方向を z 軸方向とする。断面形状の矩形の長辺、短辺は x 軸方向を a、y 軸方向を b とする。

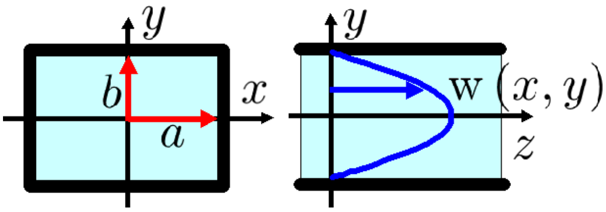


図 8.2.11: 矩形管内の流れ

```
/* 矩形管内の流れ */
kill(all);
MAS1:'diff(w,z,1)+'diff(v,y,1)+'diff(u,x,1)
 =0;
NAV1:matrix([\rho*(('diff(u,z,1))*w
 +('diff(u,y,1))*v+u*('diff(u,x,1))
 +'diff(u,t,1))],[\rho*(('diff(v,z,1))*w
 +v*('diff(v,y,1))+u*('diff(v,x,1))
 +'diff(v,t,1))],[\rho*(w*('diff(w,z,1))
 +v*('diff(w,y,1))+u*('diff(w,x,1))
 +'diff(w,t,1))])=matrix([X+mu
 *('diff(u,z,2)+'diff(u,y,2)+'diff(u,x,2))
 -'diff(p,x,1)],[Y+mu*('diff(v,z,2)
 +'diff(v,y,2)+'diff(v,x,2))-'diff(p,y,1)],
 [Z+mu*('diff(w,z,2)+'diff(w,y,2)
 +'diff(w,x,2))-'diff(p,z,1)]);
lhs(NAV1)[3][1]=rhs(NAV1)[3][1];
subst([u=0,v=0,Z=0,w=w(x,y),p=p(z)],%);
NAV3:ev(%,diff);
u(y)=(('diff(p(x),x,1))*y^2)/(2*mu)-(h^2
 *('diff(p(x),x,1)))/(8*mu);
W1:factor(subst([u(y)=w1(x,y),h=2*b,
 'diff(p(x),x,1)='diff(p(z),z,1)],%));
subst([w(x,y)=w1(x,y)],NAV3);
subst([W1],%);
ev(%,diff);
W2:w2(x,y)=f(x)*g(y);
subst([w(x,y)=w2(x,y),W2,
 'diff(p(z),z,1)=0],NAV3);
ev(%,diff);
W2EQ1:solve(%,'diff(f(x),x,2))[1]/f(x);
assume(C>0);
W2EQ2:lhs(W2EQ1)=C;
W2EQ3:rhs(W2EQ1)=C;
```

z 軸方向の Navier-Stokes の式は (8.1.9) 式から、

$$\rho\left(w\left(\frac{d}{d\,z}\,w\right)+v\left(\frac{d}{d\,y}\,w\right)+u\left(\frac{d}{d\,x}\,w\right)+\frac{d}{d\,t}\,w\right)$$
$$=Z+\mu\left(\frac{d^2}{d\,z^2}\,w+\frac{d^2}{d\,y^2}\,w+\frac{d^2}{d\,x^2}\,w\right)-\frac{d}{d\,z}\,p$$

上記の仮定から、$u=0, v=0$ で、各流体要素に働く力：$Z=0$ である。また、w は x, y のみの変数であるため、$w=w(x,y)$ とする。この関係を上記の Navier-Stokes の式に代入すると、

$$0=\mu\left(\frac{d^2}{d\,y^2}\,\mathrm{w}\,(x,y)+\frac{d^2}{d\,x^2}\,\mathrm{w}\,(x,y)\right)-\frac{d}{d\,z}\,\mathrm{p}\,(z) \tag{8.2.23}$$

「8.2.1 二枚の平板間の流れ (Couette Flow)」の結果：(8.2.2) 式から下記の二次式となり、これを $\mathrm{w1}\,(x,y)$ とする。次式を上式の Navier-Stokes の式に代入するとこれを満足していることが解る。

$$\mathrm{w1}\,(x,y)=\frac{(y-b)\,(y+b)\,\left(\frac{d}{d\,z}\,\mathrm{p}\,(z)\right)}{2\,\mu} \tag{8.2.24}$$

上記の結果を基に、流速分布：$\mathrm{w}\,(x,y)$ を下記のように仮定する。

$$\mathrm{w}\,(x,y)=\mathrm{w2}\,(x,y)+\mathrm{w1}\,(x,y) \tag{8.2.25}$$

ここで、$\mathrm{w2}\,(x,y)$ は下記のように変数分離出来るとする。

$$\mathrm{w2}\,(x,y)=\mathrm{f}\,(x)\;\mathrm{g}\,(y) \tag{8.2.26}$$

上式を Navier-Stokes の式：(8.2.23) 式に代入し、

$$0=\mu\left(\mathrm{f}\,(x)\left(\frac{d^2}{d\,y^2}\,\mathrm{g}\,(y)\right)+\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,\mathrm{f}\,(x)\right)\,\mathrm{g}\,(y)\right)$$

上式を整理して、

$$\frac{\frac{d^2}{d\,x^2}\,\mathrm{f}\,(x)}{\mathrm{f}\,(x)}=-\frac{\frac{d^2}{d\,y^2}\,\mathrm{g}\,(y)}{\mathrm{g}\,(y)}=C$$

```
ode2(W2EQ2,f(x),x);
FX1:f(x)=A*cosh(x*sqrt(C));
ode2(W2EQ3,g(y),y);
GY1:g(y)=cos(y*sqrt(C));
W21:subst([FX1,GY1],W2);
subst([y=b],rhs(W21))=0;
cos(b*sqrt(C))=0;
b*sqrt(C)=(n/2)*%pi;
solve(%,sqrt(C))[1];
W22:subst([%],W21);
W23:lhs(W22)=sum(A[n]*rhs(W22)/A,n,0,inf);
W0:w(x,y)=w1(x,y)+w2(x,y);
W01:subst([W1,W23],W0);
subst([W01],NAV3);
ev(%,diff);
W02:subst([W1,W23],W0);
```

上式を $ode2$ 関数で解くと、

$$\mathrm{f}\left(x\right)=\%k1\, e^{x\,\sqrt{C}}+\%k2\, e^{-x\,\sqrt{C}}$$

$$\mathrm{g}\left(y\right)=\%k1\sin\left(y\,\sqrt{C}\right)+\%k2\cos\left(y\,\sqrt{C}\right)$$

流速分布は x 軸、y 軸で対称であるから、上式は、

$$\mathrm{f}\left(x\right)=A\cosh\left(x\,\sqrt{C}\right),\quad \mathrm{g}\left(y\right)=\cos\left(y\,\sqrt{C}\right)$$

上式を (8.2.26) 式に代入し、

$$\mathrm{w2}\left(x,y\right)=A\cosh\left(x\,\sqrt{C}\right)\,\cos\left(y\,\sqrt{C}\right)$$

ここで y 軸方向の境界条件、$y=b$ で $\mathrm{w}\left(x,b\right)=0$ から、

$$A\cos\left(b\,\sqrt{C}\right)\,\cosh\left(x\,\sqrt{C}\right)=0$$

上式から、

$$\cos\left(b\,\sqrt{C}\right)=0$$

上式を解くと下記となり、ここで n は奇数が要求されが、このまま進める。

$$b\,\sqrt{C}=\frac{\pi\,n}{2},\quad \sqrt{C}=\frac{\pi\,n}{2\,b}$$

上式から $\mathrm{w2}\left(x,y\right)$ は、

$$\mathrm{w2}\left(x,y\right)=\cosh\left(\frac{\pi\,n\,x}{2\,b}\right)\,\cos\left(\frac{\pi\,n\,y}{2\,b}\right)\,A$$

上式を級数表現し、次式を得る。

$$\mathrm{w2}\left(x,y\right)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\cosh\left(\frac{\pi\,n\,x}{2\,b}\right)\,\cos\left(\frac{\pi\,n\,y}{2\,b}\right)\tag{8.2.27}$$

上式と (8.2.24) 式を (8.2.25) 式に代入し、流速分布：$\mathrm{w}\left(x,y\right)$ の級数表記が得られた。

$$\begin{aligned}\mathrm{w}\left(x,y\right)=&\frac{\left(y-b\right)\,\left(y+b\right)\,\left(\frac{d}{d\,z}\,\mathrm{p}\left(z\right)\right)}{2\,\mu}\\&+\sum_{n=0}^{\infty}A_n\cosh\left(\frac{\pi\,n\,x}{2\,b}\right)\,\cos\left(\frac{\pi\,n\,y}{2\,b}\right)\end{aligned}\tag{8.2.28}$$

```
BC1:subst([x=a],rhs(W02))=0;
BN1:B[n]=A[n]*cosh((%pi*a*n)/(2*b));
BN2:solve(%,A[n])[1];
-first(lhs(BC1))=last(lhs(BC1));
BC11:subst([BN2],%);
BC12:lhs(BC11);
BC13:-subst([y=y-2*b],BC12);
plot2d([subst([b=1,\mu=1,'diff(p(z),z,1)=1]
 ,BC12),subst([b=1,\mu=1,'diff(p(z),z,1)=1]
 ,BC13)],[y,-1,3]);
```

```
BN1:B[n]=1/(2*b)*'integrate(BC12*cos((%pi*n
 *y)/(2*b)),y,-b,b)+1/(2*b)*'integrate(BC13
 *cos((%pi*n*y)/(2*b)),y,b,3*b);
BN10:B[0]=1/(2*b)*'integrate(BC12,y,-b,b)
 +1/(2*b)*'integrate(BC13,y,b,3*b);
BN101:ev(%,integrate);
BN11:ev(BN1,integrate);
AN1N:subst([BN11],BN2);
AN1N1:subst([a=2,b=1,\mu=1,
 'diff(p(z),z,1)=1,n=1],(AN1N));
AN1N1:subst([a=2,b=1,\mu=1,
 'diff(p(z),z,1)=1,n=2],(AN1N));
AN1N1:subst([a=2,b=1,\mu=1,
 'diff(p(z),z,1)=1,n=3],(AN1N));
AN1N1:subst([a=2,b=1,\mu=1,
 'diff(p(z),z,1)=1,n=4],(AN1N));
W021:lhs(W02)=subst([0=1,AN1N],rhs(W02))
 +rhs(AN10);
```

ここで x 軸方向の境界条件、$x=a$ で $\mathrm{w}\left(a,y\right)=0$ から、この条件を (8.2.28) 式に代入し、

$$\begin{aligned}&\frac{\left(y-b\right)\,\left(y+b\right)\,\left(\frac{d}{d\,z}\,\mathrm{p}\left(z\right)\right)}{2\,\mu}\\&+\sum_{n=0}^{\infty}A_n\cosh\left(\frac{\pi\,a\,n}{2\,b}\right)\,\cos\left(\frac{\pi\,n\,y}{2\,b}\right)=0\end{aligned}\tag{8.2.29}$$

下記の置き換えを行い、

$$B_n=A_n\cosh\left(\frac{\pi\,a\,n}{2\,b}\right)\tag{8.2.30}$$

上式に代入し、

$$-\frac{\left(y-b\right)\,\left(y+b\right)\,\left(\frac{d}{d\,z}\,\mathrm{p}\left(z\right)\right)}{2\,\mu}=\sum_{n=0}^{\infty}B_n\cos\left(\frac{\pi\,n\,y}{2\,b}\right)\tag{8.2.31}$$

上式は Fourier 級数表記である。ここで上式で x 軸方向の境界条件、$x=a$ で $\mathrm{w}\left(a,y\right)=0$ の条件を満足するように B_n を Fourier 級数の関係式から求める。ここで n は奇数が要求されるので、n が偶数で係数：B_n が零となるように、上式の左辺を下記のようにする。この関係を図示すると下図となる。

$$-\frac{\left(y-b\right)\,\left(y+b\right)\,\left(\frac{d}{d\,z}\,\mathrm{p}\left(z\right)\right)}{2\,\mu}\qquad(-b<y<b)$$

$$\frac{\left(y-3\,b\right)\,\left(y-b\right)\,\left(\frac{d}{d\,z}\,\mathrm{p}\left(z\right)\right)}{2\,\mu}\qquad(b<y<3b)$$

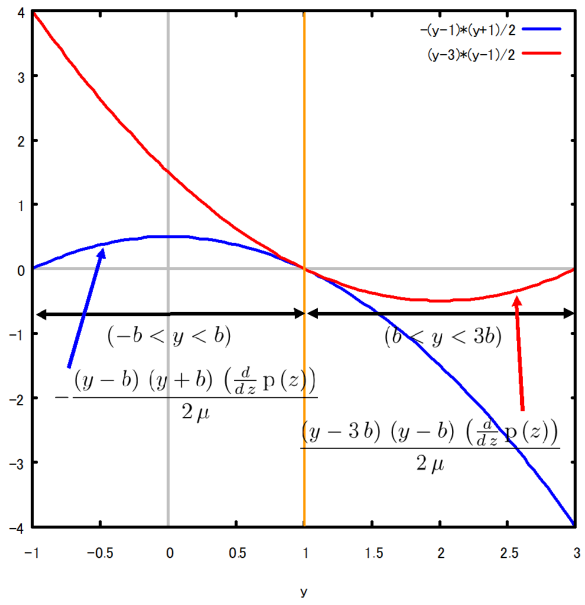


図 8.2.12: 積分範囲の関数形

以上から、係数：B_n は次式で得られる。

$$B_n = \frac{\int_b^{3\,b} (y-3\,b)\,(y-b)\,\cos\left(\frac{\pi\,n\,y}{2\,b}\right)dy\,\left(\frac{d}{d\,z}\,\mathrm{p}\,(z)\right)}{4\,b\,\mu} - \frac{\int_{-b}^{b} (y-b)\,(y+b)\,\cos\left(\frac{\pi\,n\,y}{2\,b}\right)dy\,\left(\frac{d}{d\,z}\,\mathrm{p}\,(z)\right)}{4\,b\,\mu}$$

上式の積分を実行し、

$$B_n = -\frac{4\,b^2\sin\left(\frac{3\,\pi\,n}{2}\right)\left(\frac{d}{d\,z}\,\mathrm{p}\,(z)\right)}{\pi^3\,\mu\,n^3} + \frac{2\,b^2\cos\left(\frac{3\,\pi\,n}{2}\right)\left(\frac{d}{d\,z}\,\mathrm{p}\,(z)\right)}{\pi^2\,\mu\,n^2} + \frac{12\,b^2\sin\left(\frac{\pi\,n}{2}\right)\left(\frac{d}{d\,z}\,\mathrm{p}\,(z)\right)}{\pi^3\,\mu\,n^3} - \frac{2\,b^2\cos\left(\frac{\pi\,n}{2}\right)\left(\frac{d}{d\,z}\,\mathrm{p}\,(z)\right)}{\pi^2\,\mu\,n^2}$$

上式を (8.2.30) 式の関係式に代入し、A_n を求めると、

$$A_n = -\frac{4\,b^2\sin\left(\frac{3\,\pi\,n}{2}\right)\left(\frac{d}{d\,z}\,\mathrm{p}\,(z)\right)}{\pi^3\,\mu\,n^3\cosh\left(\frac{\pi\,a\,n}{2\,b}\right)} + \frac{2\,b^2\cos\left(\frac{3\,\pi\,n}{2}\right)\left(\frac{d}{d\,z}\,\mathrm{p}\,(z)\right)}{\pi^2\,\mu\,n^2\cosh\left(\frac{\pi\,a\,n}{2\,b}\right)} + \frac{12\,b^2\sin\left(\frac{\pi\,n}{2}\right)\left(\frac{d}{d\,z}\,\mathrm{p}\,(z)\right)}{\pi^3\,\mu\,n^3\cosh\left(\frac{\pi\,a\,n}{2\,b}\right)} - \frac{2\,b^2\cos\left(\frac{\pi\,n}{2}\right)\left(\frac{d}{d\,z}\,\mathrm{p}\,(z)\right)}{\pi^2\,\mu\,n^2\cosh\left(\frac{\pi\,a\,n}{2\,b}\right)} \tag{8.2.32}$$

ここで n が偶数で係数：A_n が零になっていることを確かめると下記となり、満足していることが解る。

$$A_2 = 0, \quad A_4 = 0$$

(8.2.32) 式を (8.2.29) 式に代入し、流速分布：$\mathrm{w}\,(x,y)$ を得る。

$$\mathrm{w}\,(x,y) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} - \frac{4\,b^2\sin\left(\frac{3\,\pi\,n}{2}\right)\cosh\left(\frac{\pi\,n\,x}{2\,b}\right)\cos\left(\frac{\pi\,n\,y}{2\,b}\right)\left(\frac{d}{d\,z}\,\mathrm{p}\,(z)\right)}{\pi^3\,\mu\,n^3\cosh\left(\frac{\pi\,a\,n}{2\,b}\right)} + \frac{2\,b^2\cos\left(\frac{3\,\pi\,n}{2}\right)\cosh\left(\frac{\pi\,n\,x}{2\,b}\right)\cos\left(\frac{\pi\,n\,y}{2\,b}\right)\left(\frac{d}{d\,z}\,\mathrm{p}\,(z)\right)}{\pi^2\,\mu\,n^2\cosh\left(\frac{\pi\,a\,n}{2\,b}\right)} + \frac{12\,b^2\sin\left(\frac{\pi\,n}{2}\right)\cosh\left(\frac{\pi\,n\,x}{2\,b}\right)\cos\left(\frac{\pi\,n\,y}{2\,b}\right)\left(\frac{d}{d\,z}\,\mathrm{p}\,(z)\right)}{\pi^3\,\mu\,n^3\cosh\left(\frac{\pi\,a\,n}{2\,b}\right)} - \frac{2\,b^2\cos\left(\frac{\pi\,n}{2}\right)\cosh\left(\frac{\pi\,n\,x}{2\,b}\right)\cos\left(\frac{\pi\,n\,y}{2\,b}\right)\left(\frac{d}{d\,z}\,\mathrm{p}\,(z)\right)}{\pi^2\,\mu\,n^2\cosh\left(\frac{\pi\,a\,n}{2\,b}\right)}\right) + \frac{y^2\left(\frac{d}{d\,z}\,\mathrm{p}\,(z)\right)}{2\,\mu} - \frac{b^2\left(\frac{d}{d\,z}\,\mathrm{p}\,(z)\right)}{2\,\mu} \tag{8.2.33}$$

```
PL1:subst([a=2,b=1,\mu=1,'diff(p(z),z,1)=1
 ,inf=20],-rhs(W021));
plot3d(PL1,[x,-2,2],[y,-1,1]);

plot3d (PL1, [x, -2,2], [y, -1,1],
        [mesh_lines_color, false],
 [elevation, 0], [azimuth, 0],
 [colorbox, true], [grid, 150, 150])
```

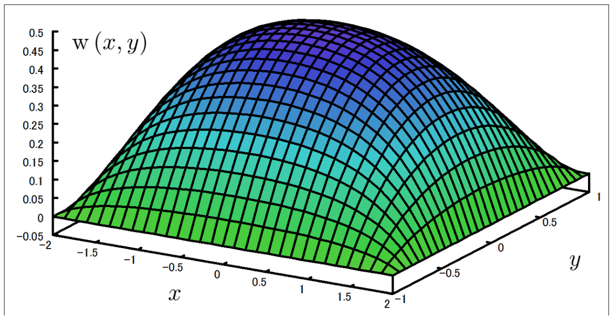


図 8.2.13: 矩形管内の流れ

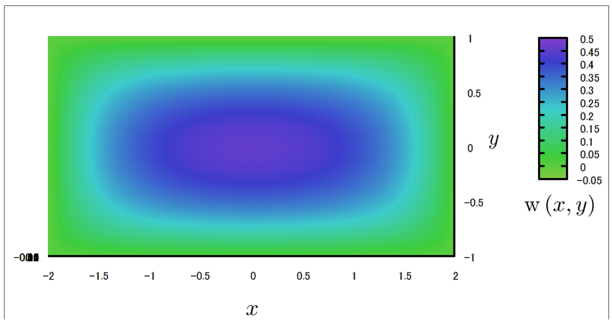


図 8.2.14: 矩形管内の流れ

8.2.7　回転する２円筒の中の流れ

同心の二つの円筒が回転し、その円筒間の定常粘性流れを求める。内部円筒の外径：R_1、外部円筒の内径：R_2 とし、内部円筒が Ω_1、外部円筒が Ω_2 で回転している。回転軸を z 軸とし、円柱座標系：$r-\theta-z$ 座標軸の各速度コンポーネントを v_r, v_θ, v_z とする。圧力：p、粘性係数：μ とする。

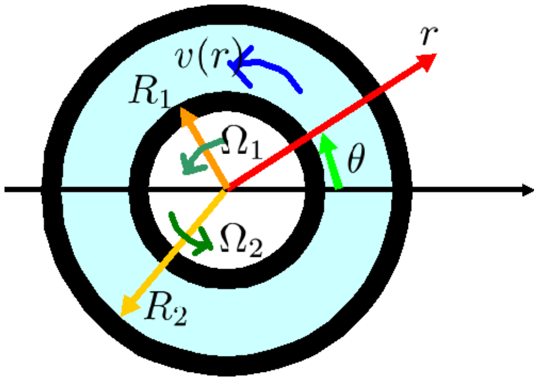


図 8.2.15: 楕円管内の流れ

```
/* 回転する２円筒の中の流れ */
kill(all);
MAS2:'diff(v[z],z,1)+'diff(v[theta],theta
 ,1)/r+'diff(v[r],r,1)+v[r]/r=0;
NAV2:matrix([rho*(('diff(v[r],z,1))*v[z]
 -v[theta]^2/r+(('diff(v[r],theta,1))
 *v[theta])/r+'diff(v[r],t,1)+v[r]
 *('diff(v[r],r,1)))],[rho*((
 'diff(v[theta],z,1))*v[z]+(v[theta]
 *('diff(v[theta],theta,1)))/r+'diff(
 v[theta],t,1)+v[r]*('diff(v[theta],r,1))
 +(v[r]*v[theta])/r)],[rho*(v[z]*('diff
 (v[z],z,1))+(v[theta]*('diff(v[z],
 theta,1)))/r+'diff(v[z],t,1)+v[r]*(
 'diff(v[z],r,1)))])=matrix([mu*(-(2*(
 'diff(v[theta],theta,1)))/r^2+'diff(
 v[r],z,2)+'diff(v[r],theta,2)/r^2+
 'diff(v[r],r,2)+'diff(v[r],r,1)/r
 -v[r]/r^2)+F[r]-'diff(p,r,1)],[mu*
 ('diff(v[theta],z,2)+'diff(v[theta],
 theta,2)/r^2+'diff(v[theta],r,2)
 +'diff(v[theta],r,1)/r-v[theta]/r^2
 +(2*('diff(v[r],theta,1)))/r^2)
 +F[theta]-'diff(p,theta,1)/r],[mu*
 ('diff(v[z],z,2)+'diff(v[z],theta,2)
 /r^2+'diff(v[z],r,2)+'diff(v[z],r,1)
 /r)+F[z]-'diff(p,z,1)]);
```

```
subst([v[z]=0,v[r]=0,v[\theta]=v(r),
 p=p(r)],NAV2);
NAV21:ev(%,diff);
lhs(NAV21)[1][1]=rhs(NAV21)[1][1];
NAV3:subst([F[r]=0],%);
lhs(NAV21)[2][1]=rhs(NAV21)[2][1];
subst([F[\theta]=0],%);
NAV4:%/\mu;
```

上記から、$v_z=0, v_r=0, v_\theta=v(r), p=p(r)$ とすると、Navier-Stokes の式は (8.1.15) 式から、

$$\begin{pmatrix} -\frac{v(r)^2\rho}{r} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_r - \frac{d}{dr}\,p(r) \\ F_\theta + \mu\left(\frac{d^2}{dr^2}\,v(r) + \frac{\frac{d}{dr}\,v(r)}{r} - \frac{v(r)}{r^2}\right) \\ F_z \end{pmatrix}$$

外力項を零とし、

$$-\frac{v(r)^2\rho}{r} = -\frac{d}{dr}\,p(r)$$

上式は、遠心力項と圧力の釣り合いの式であり、次式が流れを表す運動方程式となる。

$$0 = \mu\left(\frac{d^2}{dr^2}\,v(r) + \frac{\frac{d}{dr}\,v(r)}{r} - \frac{v(r)}{r^2}\right)$$

上式を μ で割り、

$$0 = \frac{d^2}{dr^2}\,v(r) + \frac{\frac{d}{dr}\,v(r)}{r} - \frac{v(r)}{r^2} \tag{8.2.34}$$

```
VR1:ode2(NAV4,v(r),r);
VR11:subst([v(r)=R[1]*\Omega[1],r=R[1]]
 ,VR1);
VR12:subst([v(r)=R[2]*\Omega[2],r=R[2]]
 ,VR1);
K12:solve([VR11,VR12],[%k1,%k2])[1];
VR2:subst([K12],VR1);
\tau[r\theta]=\mu*(1/r*'diff(v[r],\theta
 ,1)+'diff(v[\theta],r,1)-v[\theta]/r);
SIG1:subst([v[z]=0,v[r]=0,v[\theta]=v(r)
 ,p=p(r)],%);
DVR2:diff(VR2,r,1);
subst([DVR2,VR2,r=R[1]],SIG1);
SIG2:factor(%);
M1:M[1]=rhs(SIG2)*2*%pi*R[1]*R[1];
subst([DVR2,VR2,r=R[2]],SIG1);
SIG2:factor(%);
M1:M[2]=rhs(SIG2)*2*%pi*R[2]*R[2];
```

上式を $ode2$ 関数で解くと、

$$v(r) = \%k2\,r - \frac{\%k1}{2\,r} \tag{8.2.35}$$

境界条件として、$r=R_1$ で $v(r)=\Omega_1 R_1$、$r=R_2$ で $v(r)=\Omega_2 R_2$ であるから、

$$\Omega_1 R_1 = R_1\,\%k2 - \frac{\%k1}{2\,R_1}$$

$$\Omega_2\, R_2 = R_2\, \%k2 - \frac{\%k1}{2\, R_2}$$

上式を解いて、

$$[\%k1 = \frac{R_1^2\, \left(2\, \Omega_1\, R_2^2 - 2\, \Omega_2\, R_2^2\right)}{R_1^2 - R_2^2},$$
$$\%k2 = \frac{\Omega_1\, R_1^2 - \Omega_2\, R_2^2}{R_1^2 - R_2^2}]$$

上式を (8.2.35) 式に代入すると、

$$\begin{aligned} \mathrm{v}\,(r) =& \frac{\left(\Omega_1\, R_1^2 - \Omega_2\, R_2^2\right)\, r}{R_1^2 - R_2^2} \\ & - \frac{R_1^2\, \left(2\, \Omega_1\, R_2^2 - 2\, \Omega_2\, R_2^2\right)}{2\, \left(R_1^2 - R_2^2\right)\, r} \end{aligned} \tag{8.2.36}$$

次に円筒に作用するモーメントを求める。円柱座標系の変形速度ひずみは (8.1.14) 式、332 頁から、剪断力 : $\tau_{r\theta}$ は次式で得られる。

$$\tau_{r\theta} = \mu\, \left(\frac{d}{d\,r}\, v_\theta - \frac{v_\theta}{r} + \frac{\frac{d}{d\,\theta}\, v_r}{r}\right)$$

$v_r = 0, v_\theta = v(r)$ であるから、上式は、

$$\tau_{r\theta} = \mu\, \left(\frac{d}{d\,r}\, \mathrm{v}\,(r) - \frac{\mathrm{v}\,(r)}{r}\right) \tag{8.2.37}$$

(8.2.36) 式を r で微分し、

$$\frac{d}{d\,r}\, \mathrm{v}\,(r) = \frac{R_1^2\, \left(2\, \Omega_1\, R_2^2 - 2\, \Omega_2\, R_2^2\right)}{2\, \left(R_1^2 - R_2^2\right)\, r^2} + \frac{\Omega_1\, R_1^2 - \Omega_2\, R_2^2}{R_1^2 - R_2^2}$$

上式と (8.2.36) 式を (8.2.37) 式に代入し、$r = R_1$ とすると、内筒の剪断力が得られる。

$$\tau_{r\theta} = \frac{2\, \left(\Omega_2 - \Omega_1\right)\, R_2^2\, \mu}{\left(R_2 - R_1\right)\, \left(R_2 + R_1\right)}$$

内筒のモーメントは、

$$M_1 = \tau_{r\theta}\, 2\pi\, R_1^2 = \frac{4\, \pi\, R_1^2\, \left(\Omega_2 - \Omega_1\right)\, R_2^2\, \mu}{\left(R_2 - R_1\right)\, \left(R_2 + R_1\right)}$$

同様に、外筒の剪断力は、$r = R_2$ として、

$$\tau_{r\theta} = \frac{2\, R_1^2\, \left(\Omega_2 - \Omega_1\right)\, \mu}{\left(R_2 - R_1\right)\, \left(R_2 + R_1\right)}$$

外筒のモーメントは、

$$M_2 = \frac{4\, \pi\, R_1^2\, \left(\Omega_2 - \Omega_1\right)\, R_2^2\, \mu}{\left(R_2 - R_1\right)\, \left(R_2 + R_1\right)}$$

ここで、内筒のモーメントと外筒のモーメントは一致している。

8.3　流れ関数を使った厳密解

8.3.1　細い管の先から流出するジェット

細長い管の端から流体空間へ流体を一方向へ噴出させたときの粘性流場を求める [1]。ジェットの噴出方向を z 軸にとった極座標系を用い、z 軸に対称な流れとする。ここで三次元極座標系：$r-\theta-\phi$ の速度の各軸コンポーネントを v_r, v_θ, v_ϕ とする。

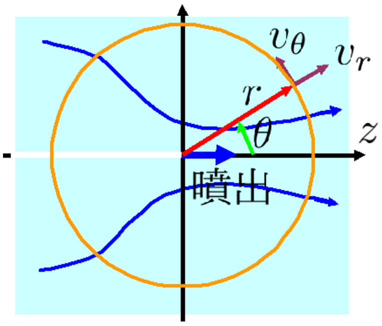


図 8.3.1: 細い管の先から流出するジェット

```
/* ジェット */
kill(all);
load("vector");
depends(\Psi,[r,\theta]);
depends(f,[\theta]);
depends(g,[\theta]);
MAS2:'diff(v[\theta],\theta,1)/r+(v[\theta]
 *cos(\theta))/(r*sin(\theta))+'diff(
 v[\phi],\phi,1)/(r*sin(\theta))+'diff(
 v[r],r,1)+(2*v[r])/r=0;
```

流れ関数：Ψ を導入する。三次元極座標では、「6.1.3 流れ関数の極座標・円柱座標表示　軸対称の極座標表記：(6.1.20) 式 181 頁から下記となる。

$$v_r = \frac{\frac{d}{d\,\theta}\,\Psi}{r^2 \sin(\theta)}, \quad v_\theta = -\frac{\frac{d}{d\,r}\,\Psi}{r \sin(\theta)} \tag{8.3.1}$$

下記の三次元極座標系の質量保存の方程式は (8.1.19) 式から下記となる。

$$\frac{\frac{d}{d\,\theta}\,v_\theta}{r} + \frac{v_\theta \cos(\theta)}{r \sin(\theta)} + \frac{\frac{d}{d\,\phi}\,v_\phi}{r \sin(\theta)} + \frac{d}{d\,r}\,v_r + \frac{2\,v_r}{r} = 0$$

上式に (8.3.1) 式を代入すると、次式となり、整理すると、当然ながら零となる。

$$\frac{\frac{\left(\frac{d}{d\,r}\,\Psi\right)\cos(\theta)}{r\sin(\theta)^2} - \frac{\frac{d^2}{d\,r\,d\,\theta}\,\Psi}{r\sin(\theta)}}{r} + \frac{\frac{d^2}{d\,r\,d\,\theta}\,\Psi}{r^2 \sin(\theta)} - \frac{\left(\frac{d}{d\,r}\,\Psi\right)\cos(\theta)}{r^2 \sin(\theta)^2} = 0$$

[1]エリ・ランダウ：流体力学　1 [17]、2-23、P.91 & G. K. Batchelor：入門　流体力学 [18]、4.6 P.206

```
NAV2:matrix([\rho*((v[\theta]*(
 'diff( v[\theta],\theta,1)))/r
 +'diff(v[\theta],t,1)+v[r]*(
 'diff(v[\theta],r,1))+(v[\phi]*(
 'diff(v[\theta],\phi,1)))/(r*sin(\theta))
 -(v[\phi]^2*cos(\theta))/(r*sin(\theta))
 +(v[r]*v[\theta])/r)],[\rho*((v[\phi]
 *v[\theta]*cos(\theta))/(r*sin(\theta))
 +(v[\phi]*('diff(v[\phi],\phi,1)))/(r*
 sin(\theta))+(('diff(v[\phi],\theta,1))
 *v[\theta])/r+(v[\phi]*v[r])/r+('diff(v
 [\phi],r,1))*v[r]+'diff(v[\phi],t,1))],
 [\rho*((v[\phi]*('diff(v[r],\phi,1)))/
 (r*sin(\theta))-v[\theta]^2/r+(('diff
 (v[r],\theta,1))*v[\theta])/r+
 'diff(v[r],t,1)+v[r]*('diff(v[r],r,1))
 -v[\phi]^2/r)])=matrix([mu*('diff(
 v[\theta],\theta,2)/r^2+(cos(\theta)
 *('diff(v[\theta],\theta,1)))/(r^2*
 sin(\theta))+'diff(v[\theta],r,2)
 +(2*('diff(v[\theta],r,1)))/r+'diff(
 v[\theta],\phi,2)/(r^2*sin(\theta)^2)
 -(v[\theta]*cos(\theta)^2)/(r^2*sin(
 \theta)^2)-(2*('diff(v[\phi],\phi,1))
 *cos(\theta))/(r^2*sin(\theta)^2)
 -v[\theta]/r^2+(2*('diff(v[r],\theta,1)
 ))/r^2)+F[\theta]-'diff(p,\theta,1)/r],
 [mu*((2*cos(\theta)*('diff(v[\theta],
 \phi,1)))/(r^2*sin(\theta)^2)+(('diff
 (v[\phi],\theta,1))*cos(\theta))/(r^2
 *sin(\theta))+(2*('diff(v[r],\phi,1)))
 /(r^2*sin(\theta))+'diff(v[\phi],
 \phi,2)/(r^2*sin(\theta)^2)-v[\phi]/
 (r^2*sin(\theta)^2)+(2*('diff(v[\phi]
 ,r,1)))/r+'diff(v[\phi],\theta,2)/r^2
 +'diff(v[\phi],r,2))-'diff(p,\phi,1)/
 (r*sin(\theta))+F[\phi]],[mu*(-(2*(
 'diff(v[\theta],\theta,1)))/r^2-(2*
 v[\theta]*cos(\theta))/(r^2*sin(
 \theta))+(('diff(v[r],\theta,1))*
 cos(\theta))/(r^2*sin(\theta))-(2*(
 'diff(v[\phi],\phi,1)))/(r^2*sin
 (\theta))+'diff(v[r],\phi,2)/(r^2*
 sin(\theta)^2)+'diff(v[r],\theta,2)/
 r^2+'diff(v[r],r,2)+(2*('diff(v[r],
 r,1)))/r-(2*v[r])/r^2)+F[r]
 -'diff(p,r,1)]);
```

```
VR1:v[r]='diff(\Psi,\theta,1)/
 (r^2*sin(\theta));
VT1:v[\theta]=-'diff(\Psi,r,1)/
 (r*sin(\theta));
subst([v[\phi]=0,VR1,VT1],MAS2);
ev(%,diff);
factor(%);
PS1:\Psi=r*\nu*f;
NAV21:lhs(NAV2)[1][1]=rhs(NAV2)[1][1];
NAV22:lhs(NAV2)[3][1]=rhs(NAV2)[3][1];
subst([VR1,VT1,v[\phi]=0,F[\theta]=0,
 p=p(r,\theta),\mu=\nu*\rho],NAV21);
subst([PS1],%);
ev(%,diff);
lhs(%)-rhs(%)=0;
trigsimp(%-last(lhs(%)));
NAV211:factor(%/\nu^2/\rho*r^3
 *sin(\theta)^3);
subst([VR1,VT1,v[\phi]=0,F[r]=0,
 p=p(r,\theta),\mu=\nu*\rho],NAV22);
subst([PS1],%);
ev(%,diff);
lhs(%)-rhs(%)=0;
trigsimp(%-last(lhs(%)));
NAV221:factor(%/\nu^2/\rho*r^3*
 sin(\theta)^3);
P1:p(r,\theta)=\rho*\nu^2*g/r^2;
subst([P1],NAV211);
NAV31:ev(%,diff);
subst([P1],NAV221);
NAV32:ev(%,diff);
NAV321:diff(NAV32,\theta,1);
```

原点を囲む球面の閉曲面を通る全運動量は常に同じでないといけない。運動量は速度の二乗に比例し、閉曲面の面積は半径 : r の二乗に比例するので、速度は r^{-1} に比例する必要がある。このことと速度と流れ関数 : Ψ との関係 : (8.3.1) 式から、Ψ は r に比例する下記の関係式とする。ここで、f は θ の関数、ν は動粘性係数とする。

$$\Psi = f\,\nu\,r \tag{8.3.2}$$

圧力については、速度の二乗に比例するので、圧力は r^{-2} に比例する必要があるから、下記のように定義する。ここで g は θ の関数、ν は動粘性係数、ρ は密度とする。

$$\mathrm{p}\left(r,\theta\right) = \frac{g\,\nu^2\,\rho}{r^2} \tag{8.3.3}$$

三次元極座標の Navier-Stokes の式 : (8.1.21) 式は、θ 軸方向では、

$$\begin{aligned}
&\rho\left(\frac{v_\theta\,\left(\frac{d}{d\,\theta}\,v_\theta\right)}{r}+\frac{d}{d\,t}\,v_\theta+v_r\,\left(\frac{d}{d\,r}\,v_\theta\right)+\frac{v_\phi\,\left(\frac{d}{d\,\phi}\,v_\theta\right)}{r\,\sin\left(\theta\right)}\right.\\
&\qquad\left.-\frac{v_\phi^2\cos\left(\theta\right)}{r\,\sin\left(\theta\right)}+\frac{v_r\,v_\theta}{r}\right)\\
&=\mu\left(\frac{\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,v_\theta}{r^2}+\frac{\cos\left(\theta\right)\,\left(\frac{d}{d\,\theta}\,v_\theta\right)}{r^2\,\sin\left(\theta\right)}+\frac{d^2}{d\,r^2}\,v_\theta\right.\\
&\qquad+\frac{2\,\left(\frac{d}{d\,r}\,v_\theta\right)}{r}+\frac{\frac{d^2}{d\,\phi^2}\,v_\theta}{r^2\,\sin\left(\theta\right)^2}-\frac{v_\theta\cos\left(\theta\right)^2}{r^2\,\sin\left(\theta\right)^2}\\
&\qquad\left.-\frac{2\,\left(\frac{d}{d\,\phi}\,v_\phi\right)\,\cos\left(\theta\right)}{r^2\,\sin\left(\theta\right)^2}-\frac{v_\theta}{r^2}+\frac{2\,\left(\frac{d}{d\,\theta}\,v_r\right)}{r^2}\right)\\
&\quad+F_\theta-\frac{\frac{d}{d\,\theta}\,p}{r}
\end{aligned}$$

r 軸方向では、

$$\begin{aligned}
&\rho\left(\frac{v_\phi\,\left(\frac{d}{d\,\phi}\,v_r\right)}{r\,\sin\left(\theta\right)}-\frac{v_\theta^2}{r}+\frac{\left(\frac{d}{d\,\theta}\,v_r\right)\,v_\theta}{r}+\frac{d}{d\,t}\,v_r\right.\\
&\qquad\left.+v_r\,\left(\frac{d}{d\,r}\,v_r\right)-\frac{v_\phi^2}{r}\right)\\
&=\mu\left(-\frac{2\,\left(\frac{d}{d\,\theta}\,v_\theta\right)}{r^2}-\frac{2\,v_\theta\cos\left(\theta\right)}{r^2\,\sin\left(\theta\right)}+\frac{\left(\frac{d}{d\,\theta}\,v_r\right)\,\cos\left(\theta\right)}{r^2\,\sin\left(\theta\right)}\right.\\
&\qquad-\frac{2\,\left(\frac{d}{d\,\phi}\,v_\phi\right)}{r^2\,\sin\left(\theta\right)}+\frac{\frac{d^2}{d\,\phi^2}\,v_r}{r^2\,\sin\left(\theta\right)^2}+\frac{\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,v_r}{r^2}+\frac{d^2}{d\,r^2}\,v_r\\
&\qquad\left.+\frac{2\,\left(\frac{d}{d\,r}\,v_r\right)}{r}-\frac{2\,v_r}{r^2}\right)\\
&\quad+F_r-\frac{d}{d\,r}\,p
\end{aligned}$$

$F_r = 0, F_\theta =$ とし、(8.3.2) 式と (8.3.3) 式を上記二式に代入し、

$$\begin{aligned}
&-\left(\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,f\right)\,\sin\left(\theta\right)^2+\left(\frac{d}{d\,\theta}\,f\right)\,\cos\left(\theta\right)\,\sin\left(\theta\right)\\
&\quad+f\,\left(\frac{d}{d\,\theta}\,f\right)\,\sin\left(\theta\right)-f^2\cos\left(\theta\right)\\
&=-\left(\frac{d}{d\,\theta}\,g\right)\,\sin\left(\theta\right)^3
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-\left(\frac{d^4}{d\,\theta^4}\,f\right)\,\sin\left(\theta\right)^2-\left(\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,f\right)\,\sin\left(\theta\right)^2\\
&\quad-\left(\frac{d^3}{d\,\theta^3}\,f\right)\,\cos\left(\theta\right)\,\sin\left(\theta\right)-f\,\left(\frac{d^3}{d\,\theta^3}\,f\right)\,\sin\left(\theta\right)\\
&\quad-3\,\left(\frac{d}{d\,\theta}\,f\right)\,\left(\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,f\right)\,\sin\left(\theta\right)\\
&\quad-3\,f\,\left(\frac{d}{d\,\theta}\,f\right)\,\sin\left(\theta\right)+\left(\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,f\right)\,\cos\left(\theta\right)^2\\
&\quad-f^2\cos\left(\theta\right)-\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,f\\
&=2\,\left(\frac{d}{d\,\theta}\,g\right)\,\sin\left(\theta\right)^3+6\,g\cos\left(\theta\right)\,\sin\left(\theta\right)^2
\end{aligned}
$$

```
depends(F,[\xi]);
depends(G,[\xi]);
depends(\xi,[\theta]);
DF1:'diff(F,\theta,1)=diff(F,\theta,1);
DF2:'diff(F,\theta,2)=diff(F,\theta,2);
DF3:'diff(F,\theta,3)=diff(F,\theta,3);
DF4:'diff(F,\theta,4)=diff(F,\theta,4);
DF11:subst([F=f],DF1);
DF21:subst([F=f],DF2);
DF31:subst([F=f],DF3);
DF41:subst([F=f],DF4);
GF1:'diff(G,\theta,1)=diff(G,\theta,1);
GF11:subst([G=g],GF1);
G1:\xi=cos(\theta);
G11:cos(\theta)=\xi;
G12:sin(\theta)=sqrt(1-\xi^2);
G2:diff(G1,\theta,1);
G3:diff(G1,\theta,2);
G4:diff(G1,\theta,3);
G5:diff(G1,\theta,4);
```

θ を次式で定義する ξ を導入する。

$$
\xi=\cos\left(\theta\right) \tag{8.3.4}
$$

上記では、f,g は θ の関数で、そのように宣言しているので、$f\to F,\quad g\to G$ に置き換え、F,G は ξ の関数と宣言する。下記などの変換を行って、上式に代入し、F の ξ の関数の関係式を求める。

$$
\frac{d}{d\,\theta}\,F=\left(\frac{d}{d\,\theta}\,\xi\right)\,\left(\frac{d}{d\,\xi}\,F\right)
$$

$$
\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,F=\left(\frac{d}{d\,\theta}\,\xi\right)^2\,\left(\frac{d^2}{d\,\xi^2}\,F\right)+\left(\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,\xi\right)\,\left(\frac{d}{d\,\xi}\,F\right)
$$

$$
\frac{d}{d\,\theta}\,G=\left(\frac{d}{d\,\theta}\,\xi\right)\,\left(\frac{d}{d\,\xi}\,G\right)
$$

```
subst([f=F,g=G],NAV31);
NAV41:subst([f=F,g=G,DF4,DF3,DF2,DF1,GF1,
 G5,G4,G3,G2,G11,G12],NAV31);
NAV42:subst([f=F,g=G,DF4,DF3,DF2,DF1,GF1,
 G5,G4,G3,G2,G11,G12],NAV32);
NAVG1:expand(solve(NAV41,'diff(G,\xi,1))
 [1]);
CNV412:factor(coeff(rhs(NAV411),
 'diff(F,\xi,2),1));
factor(rhs(NAV411)-(CNV412*'diff(F,\xi,2)
 ));
NAVG2:expand(solve(NAV42,G)[1]);
CNV423:factor(coeff(rhs(NAVG2),
 'diff(F,\xi,3),1));
CNV422:factor(coeff(rhs(NAVG2),
 'diff(F,\xi,2),1));
CNV421:factor(coeff(rhs(NAVG2),
 'diff(F,\xi,1)^2,1));
CNV420:factor(coeff(rhs(NAVG2),
 F^2,1));
NAVG21:G=CNV423*'diff(F,\xi,3)+CNV422*
 'diff(F,\xi,2)+CNV421*'diff(F,\xi,1)^2
 +CNV420*F^2;
diff(NAVG21,\xi,1);
lhs(%)-rhs(%)=0;
NAVG3:factor(subst([NAVG1],%)*2);
```

Navier-Stokes の式は下記の F,G と ξ の関係は、

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{d\,\xi}\,G=&-\frac{\xi^4\,\left(\frac{d^2}{d\,\xi^2}\,F\right)}{\xi^4-2\,\xi^2+1}+\frac{2\,\xi^2\,\left(\frac{d^2}{d\,\xi^2}\,F\right)}{\xi^4-2\,\xi^2+1}\\
&-\frac{\frac{d^2}{d\,\xi^2}\,F}{\xi^4-2\,\xi^2+1}+\frac{\xi^2\,F\,\left(\frac{d}{d\,\xi}\,F\right)}{\xi^4-2\,\xi^2+1}\\
&-\frac{F\,\left(\frac{d}{d\,\xi}\,F\right)}{\xi^4-2\,\xi^2+1}-\frac{\xi\,F^2}{\xi^4-2\,\xi^2+1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
G=&-\frac{\left(\xi-1\right)\,\left(\xi+1\right)\,\left(\frac{d^3}{d\,\xi^3}\,F\right)}{2}-\frac{\left(F+2\,\xi\right)\,\left(\frac{d^2}{d\,\xi^2}\,F\right)}{2}\\
&-\frac{\left(\frac{d}{d\,\xi}\,F\right)^2}{2}+\frac{F^2}{2\,\left(\xi-1\right)\,\left(\xi+1\right)}
\end{aligned}
$$

上式から G を省略すると、

$$
\begin{aligned}
&\xi^2\,\left(\frac{d^4}{d\,\xi^4}\,F\right)-\frac{d^4}{d\,\xi^4}\,F+F\,\left(\frac{d^3}{d\,\xi^3}\,F\right)+4\,\xi\,\left(\frac{d^3}{d\,\xi^3}\,F\right)\\
&\quad+3\,\left(\frac{d}{d\,\xi}\,F\right)\,\left(\frac{d^2}{d\,\xi^2}\,F\right)=0
\end{aligned}
\tag{8.3.5}
$$

```
FF4:diff(F,\xi,1)*(1-\xi^2);
DFF4:diff(FF4,\xi,3);
DFF41:solve(%,'diff(F,xi,4))[1];
FF2:F^2;
DFF2:diff(FF2,\xi,3);
DFF21:solve(%,F*('diff(F,xi,3)))[1];
subst([DFF41,DFF21],NAVG3);
FF1:F*\xi;
DFF1:diff(FF1,\xi,3);
DFF11:solve(%,'diff(F,xi,2))[1];
NAVG3;
A*DFF4+B*DFF2+C*DFF1;
expand(%);
subst([A=-1],%);
subst([B=1/2],%);
subst([C=-2],%);
NAVF4:-1*FF4+1/2*FF2-2*FF1=%c1*\xi^2
 +%c2*\xi+%c3;
diff(%,\xi,3);
```

上式で F の微分方程式が得られた。これを三回積分すると簡素化が図れそうなので、まず、(8.3.5) 式の第一, 第二項は三回積分すると下記の成分を持っているはずである。

$$\begin{aligned}&\left(1-\xi^2\right)\left(\frac{d}{d\,\xi}\,F\right)\quad\to \text{三回微分}\\&\left(1-\xi^2\right)\left(\frac{d^4}{d\,\xi^4}\,F\right)-6\,\xi\left(\frac{d^3}{d\,\xi^3}\,F\right)-6\left(\frac{d^2}{d\,\xi^2}\,F\right)\end{aligned}\tag{8.3.6}$$

第三項は三回積分すると下記の成分を持っているはずである。

$$\begin{aligned}&F^2\quad\to \text{三回微分}\\&2\,F\left(\frac{d^3}{d\,\xi^3}\,F\right)+6\left(\frac{d}{d\,\xi}\,F\right)\left(\frac{d^2}{d\,\xi^2}\,F\right)\end{aligned}\tag{8.3.7}$$

第四項は三回積分すると下記の成分を持っているはずである。

$$\begin{aligned}&\xi\,F\quad\to \text{三回微分}\\&\xi\left(\frac{d^3}{d\,\xi^3}\,F\right)+3\left(\frac{d^2}{d\,\xi^2}\,F\right)\end{aligned}\tag{8.3.8}$$

以上から、次式が (8.3.5) 式と等しいと置いて、

$$A\times(8.3.6)\text{ 式}+B\times(8.3.7)\text{ 式}+C\times(8.3.8)\text{ 式}=0$$

$A=-1, B=1/2, C=-2$ の関係を得て、次式を得る。

$$-\left(1-\xi^2\right)\left(\frac{d}{d\,\xi}\,F\right)+\frac{F^2}{2}-2\,\xi\,F=\%c1\,\xi^2+\%c2\,\xi+\%c3$$

対称軸 : z 軸上では、$v_\theta=0$ でないといけない。ここで、

$$v_\theta=-\frac{\frac{d}{d\,r}\,\Psi}{r\sin\left(\theta\right)}=-\frac{\nu\,F}{r\,\sqrt{1-\xi^2}}$$

から、$\%c1=0\,\%c2=0\,\%c3=0$ となる。以上から、

$$-\left(1-\xi^2\right)\left(\frac{d}{d\,\xi}\,F\right)+\frac{F^2}{2}-2\,\xi\,F=0\tag{8.3.9}$$

```
H1:F=(1-\xi^2)*h(\xi);
subst([H1,%c1=0,%c2=0,%c3=0],NAVF4);
NAVH1:factor(ev(%,diff));
NAVH2:2*('diff(h(xi),xi,1))-h(xi)^2=0;
ode2(%,h(\xi),\xi);
H2:solve(%,h(\xi))[1];
subst([H2],H1);
H11:subst([%c=-C-1],%);
C1:cos(\theta[0])=1/(1+C);
C2:solve(C1,C)[1];
H12:factor(subst([\xi=cos(\theta[0]),C2],
 H11));
PS2:trigsimp(subst([f=F,H11,G1],PS1));
```

ここで F を下記のように仮定する。

$$F=\left(1-\xi^2\right)\,\mathrm{h}\left(\xi\right)\tag{8.3.10}$$

(8.3.9) 式にニ (8.3.10) 式を代入し、

$$-\frac{\left(\xi-1\right)^2\left(\xi+1\right)^2\left(2\left(\frac{d}{d\,\xi}\,\mathrm{h}\left(\xi\right)\right)-\mathrm{h}\left(\xi\right)^2\right)}{2}=0$$

以上から、

$$2\left(\frac{d}{d\,\xi}\,\mathrm{h}\left(\xi\right)\right)-\mathrm{h}\left(\xi\right)^2=0$$

上式を $ode2$ 関数で解いて、

$$-\frac{2}{\mathrm{h}\left(\xi\right)}=\xi+\%c$$

$\mathrm{h}\left(\xi\right)$ で解いて、

$$\mathrm{h}\left(\xi\right)=-\frac{2}{\xi+\%c}$$

上式を (8.3.10) 式に代入し、

$$F=-\frac{2\,\left(1-\xi^2\right)}{\xi+\%c}$$

$1-\xi$ の形を作って、

$$F=-\frac{2\,\left(1-\xi^2\right)}{-C+\xi-1}\tag{8.3.11}$$

今、下記と置くと、

$$\cos\left(\theta_0\right)=\frac{1}{C+1}\tag{8.3.12}$$

上式を (8.3.11) 式に代入すると、

$$F = 2\cos(\theta_0)$$

(8.3.11) 式を (8.3.2) 式に代入し、流れ関数：Ψ は、

$$\Psi = \frac{2\,\nu\,r\sin(\theta)^2}{C-\cos(\theta)+1} \tag{8.3.13}$$

```
subst([PS2],VR1);
VR2:trigsimp(ev(%,diff));
subst([PS2],VT1);
VT2:trigsimp(ev(%,diff));
VR21:lhs(VR2)=trigsimp(subst([\theta=
 \theta[0],C2],rhs(VR2)));
VT21:lhs(VT2)=trigsimp(subst([\theta=
 \theta[0],C2],rhs(VT2)));
VY21:v[y0]=rhs(VT21)*cos(\theta[0])
 +rhs(VR21)*sin(\theta[0]);
subst([PS1],VR1);
VR3:trigsimp(ev(%,diff));
subst([PS1],VT1);
VT3:trigsimp(ev(%,diff));
F1:\rho*v[r]*(v[r]*cos(\theta)-v[\theta]
 *sin(\theta))*2*%pi*r^2;
subst([VR3,VT3],F1);
F11:expand(ev(%,diff));
SRR1:\sigma[rr]=-p(r,\theta)+2*\mu*e[rr];
SRT1:\sigma[rt]=2*\mu*e[rt];
ERR1:e[rr]='diff(v[r],r,1);
ERT1:e[rt]=r/2*'diff(v[\theta]/r,r,1)
 +1/2/r*'diff(v[r],\theta,1);
F2:-\sigma[rr]*cos(\theta)*2*%pi*r^2;
F3:\sigma[rt]*sin(\theta)*2*%pi*r^2;
subst([SRR1,SRT1,ERR1,ERT1,VR3,VT3,P1],F2);
F21:expand(ev(%,diff));
subst([SRR1,SRT1,ERR1,ERT1,VR3,VT3,P1],F3);
F31:expand(ev(%,diff));
expand((F11+F21+F31)/(2*%pi*\rho*\nu^2));
subst([f=F,g=G,\mu=\nu*\rho,NAVG21,DF2,
 DF1,G2,G3],%);
F4:subst([sin(\theta)^2=1-\xi^2,
 cos(\theta)=\xi],%);
```

(8.3.1) 式に (8.3.13) 式を代入すると、流速が得られ、

$$v_r = \frac{4\,\nu\cos(\theta)\,C-2\,\nu\cos(\theta)^2+4\,\nu\cos(\theta)-2\,\nu}{r\,C^2+(2\,r-2\,r\cos(\theta))\,C+r\cos(\theta)^2-2\,r\cos(\theta)+r}$$
$$v_\theta = -\frac{2\,\nu\sin(\theta)}{r\,C-r\cos(\theta)+r} \tag{8.3.14}$$

(8.3.12) 式を代入すると、

$$v_r = \frac{2\cos(\theta_0)^2\,\nu}{\sin(\theta_0)^2\,r}, \quad v_\theta = -\frac{2\cos(\theta_0)\,\nu}{\sin(\theta_0)\,r}$$

上式から $\theta=\theta_0$ における噴出方向：z 軸と直角方向の流速：v_{y0} は、

$$v_{y0} = v_r\cos(\theta_0)+v_\theta\sin(\theta_0) = 0$$

これは $\theta=\theta_0$ で流線の最下端を示す。

次に、原点を中心にした球面における運動量から得られる噴出方向：z 方向の力：F を求める。F は下記で与えられる。

$$F = 2\,\pi\,r^2\int_0^\pi \sin(\theta)\left(v_r\,\rho\,(v_r\cos(\theta)-v_\theta\sin(\theta)) - (\sigma_{rr}\cos(\theta)-\tau_{rt}\sin(\theta))\right)d\theta \tag{8.3.15}$$

ここで、(8.1.20) 式から、

$$v_r = \frac{\left(\frac{d}{d\,\theta}\,f\right)\,\nu}{r\sin(\theta)}, \quad v_\theta = -\frac{f\,\nu}{r\sin(\theta)}$$
$$\sigma_{rr} = \mu\,e_{rr}-\mathrm{p}(r,\theta), \quad \tau_{rt} = \mu\,e_{rt}$$
$$e_{rr} = 2\,\frac{d}{d\,r}\,v_r, \quad e_{rt} = r\,\left(\frac{d}{d\,r}\,\frac{v_\theta}{r}\right)+\frac{\frac{d}{d\,\theta}\,v_r}{r}$$

上式を (8.3.14) 式に代入し、変数を $\theta\to\xi$ に置き換え、

```
assume(C>0);
F5:F/(2*%pi*\rho*\nu^2)=-'integrate(-F4,
 \xi,-1,1);
lhs(%)=subst([H11],rhs(%));
ev(%,diff);
F51:expand(ev(%,integrate));
CF51:factor(coeff(rhs(F51),log(C+2),1));
CF52:factor(coeff(rhs(F51),log(C),1));
CF53:factor(rhs(F51)-CF51*log(C+2)-CF52
 *log(C));
F52:lhs(F51)=CF53+CF51*log(C+2)+CF52
 *log(C);
F53:lhs(F51)=CF53+CF52*log(C/(C+2));
CF531:trigsimp(factor(subst([C2],CF53)));
taylor(%,\theta[0],0,5);
CF532:first(%);
CF52*log(C/(C+2));
CF533:factor(subst([C2],%));
subst([cos(\theta[0])=1-\theta[0]/2],%);
F54:lhs(F51)=CF531+CF533;
F55:lhs(F51)=CF532;
PL1:subst([\theta[0]=t*%pi/180],rhs(F54));
PL2:subst([\theta[0]=t*%pi/180],rhs(F55));
plot2d([[parametric,t,PL1,[t,13,80],
 [nticks,50]],[parametric,t,PL2,[t,13,50],
 [nticks,50]]],[x,0,90]);
 solve(C1,\theta[0])[1];
C3:tan(%);
```

```
subst([C=0.1],C3);
subst([C=0.3],C3);
subst([C=0.03],C3);
```

$$
\begin{aligned}
\frac{F}{2\,\pi\,\nu^2\,\rho} =& -\int_{-1}^{1} -\xi\left(-\frac{(\xi-1)\,(\xi+1)\,\left(\frac{d^3}{d\,\xi^3}\,F\right)}{2}\right.\\
&-\frac{(F+2\,\xi)\,\left(\frac{d^2}{d\,\xi^2}\,F\right)}{2}-\frac{\left(\frac{d}{d\,\xi}\,F\right)^2}{2}\\
&\left.+\frac{F^2}{2\,(\xi-1)\,(\xi+1)}\right)\\
&-\left(1-\xi^2\right)\,\left(\frac{d^2}{d\,\xi^2}\,F\right)-\xi\,\left(\frac{d}{d\,\xi}\,F\right)^2\\
&+F\,\left(\frac{d}{d\,\xi}\,F\right)+2\,\xi\,\left(\frac{d}{d\,\xi}\,F\right)\\
&-2\,F d\xi\\
=&4\,(C+1)^2\log\left(\frac{C}{C+2}\right)\\
&+\frac{8\,(C+1)\,\left(3\,C^2+6\,C+4\right)}{3\,C\,(C+2)}
\end{aligned}
$$

上式から、積分の半径にかかわらず推力が一定であることが解る。上式の C を θ_0 で表現すると、

$$
\begin{aligned}
\frac{F}{2\,\pi\,\nu^2\,\rho} =& \frac{4\log\left(-\frac{\cos(\theta_0)-1}{\cos(\theta_0)+1}\right)}{\cos(\theta_0)^2}+\frac{8\cos(\theta_0)^2+24}{3\cos(\theta_0)\,\sin(\theta_0)^2}\\
\approx&\frac{32}{3\,\theta_0^2}
\end{aligned}
\tag{8.3.16}
$$

```
X1:x=r*cos(\theta);
Y1:y=r*sin(\theta);
R1:solve(Y1,r)[1];
SI1:sin(\theta)=y/sqrt(x^2+y^2);
CO1:cos(\theta)=x/sqrt(x^2+y^2);
subst([C=0.1,\nu=1,R1,SI1,CO1],rhs(PS2));
```

```
#!/gnuplot
set xrange [-2:4]
set yrange [0:3]
set isosamples 150,150
set contour base
set cntrparam levels incremental -1,0.2,100
unset key
unset surface
set view map
splot (2*y**2)/(sqrt(y**2+x**2)*(1.1
 -x/sqrt(y**2+x**2)))
# EOF
```

C を種々変えて流線を求めた結果を下記に示す。ここでは下記に示す gnuplot の等高線機能を使用して描いた。また、ジェット推力と流出半角：θ_0 の関係を下記に示す。

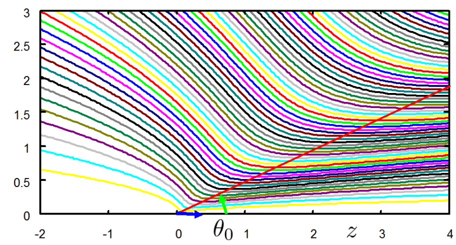


図 8.3.2: 細い管の先から流出するジェット $C=0.1$

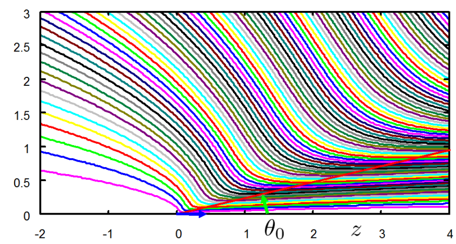


図 8.3.3: 細い管の先から流出するジェット $C=0.03$

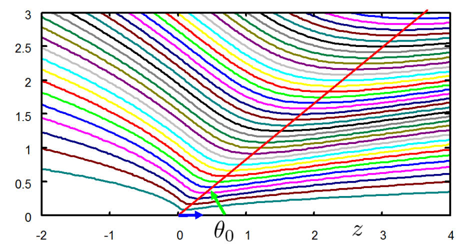


図 8.3.4: 細い管の先から流出するジェット $C=0.3$

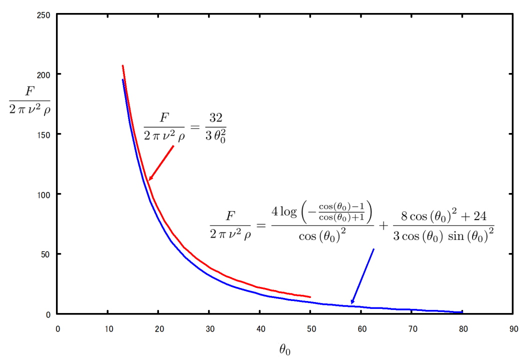


図 8.3.5: 細い管の先から流出するジェット　ジェット推力と半角：θ_0

8.3.2　二次元よどみ点

二次元のよどみ点近傍の粘性流れについて調べる[1]。流体は上方から流れ、底面の固定壁に当たり、左右に分かれる。

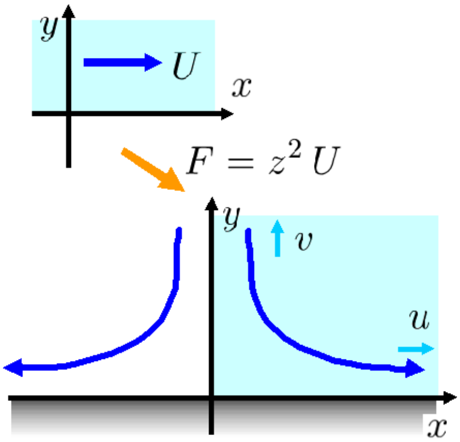


図 8.3.6: 二次元よどみ点

```
/* 二次元よどみ点 */
kill(all);
load("vector");
load("dynamics");
depends(u,[x,y,t]);
depends(v,[x,y,t]);
depends(p,[x,y,t]);
depends(\omega,[x,y,t]);
depends(\Psi,[x,f]);
depends(\eta,[x,y]);
depends(F,[\eta]);
depends(f,[y]);
OM1:\omega=diff(v,x,1)-diff(u,y,1);
VLNV1:('diff(\omega,y,1))*v+('diff(\omega,
 x,1))*u+'diff(\omega,t,1)=\nu*('diff(
 \omega,y,2)+'diff(\omega,x,2));
declare(F,complex);
declare(z,complex);
F1:F=z^2*U;
subst([z=x+%i*y],F1);
PS1:\Psi=imagpart(rhs(%));
U1:u='diff(\Psi,y,1);
V1:v=-'diff(\Psi,x,1);
subst([PS1],U1);
U2:ev(%,diff);
subst([PS1],V1);
V2:ev(%,diff);
```

[1] Dr Harmann Schlihting, Boundary Layer Theory 12)、V.b.8 Stagnation in plane flow、P.78

渦度方程式を使って解く。$x-y$ 座標の各速度成分：u,v とし、動粘性係数：ν とする。渦度：ω は (8.1.45) 式から、

$$\omega = \frac{d}{d\,x}\,v - \frac{d}{d\,y}\,u \tag{8.3.17}$$

渦度方程式は、(8.1.44) 式から、

$$\begin{aligned}\left(\frac{d}{d\,y}\,\omega\right)\,v + \left(\frac{d}{d\,x}\,\omega\right)\,u + \frac{d}{d\,t}\,\omega \\ = \nu\,\left(\frac{d^2}{d\,y^2}\,\omega + \frac{d^2}{d\,x^2}\,\omega\right)\end{aligned} \tag{8.3.18}$$

一様流の流速:U とすると、複素ポテンシャルは $F = zU$ で、それを 1/2 の角度にして、二次元よどみ点の完全流体の複素ポテンシャルは下記となる。(参照：5.1.14 写像：折れ曲がり直線 (Schwarz-Christoffel の公式))

$$F = z^2\,U = (i\,y + x)^2\,U$$

以上から、流れ関数：Ψ は上式の虚部をとり、

$$\Psi = 2\,x\,y\,U$$

流れ関数：Ψ と流速：u,v との関係は、

$$u = \frac{d}{d\,y}\,\Psi, \quad v = -\frac{d}{d\,x}\,\Psi$$

上記から、二次元よどみ点の完全流体の流れの流速は下記となる。

$$\begin{aligned} u &= \frac{d}{d\,y}\,(2\,x\,y\,U) = 2\,x\,U \\ v &= -\frac{d}{d\,x}\,(2\,x\,y\,U) = -2\,y\,U \end{aligned} \tag{8.3.19}$$

```
PS2:\Psi=x*f;
subst([PS2],U1);
U3:ev(%,diff);
subst([PS2],V1);
V3:ev(%,diff);
subst([U3,V3],OM1);
OM2:ev(%,diff);
subst([OM2,U3,V3],VLNV1);
expand(ev(%,diff)/x);
VLNV2:lhs(%)-rhs(%)=0;
DF1:'diff(f,y,3);
DF11:diff(DF1,y,1);
DF2:f*'diff(f,y,2);
DF21:diff(DF2,y,1);
DF3:'diff(f,y,1)^2;
DF31:diff(DF3,y,1);
A*DF11+B*DF21+C*DF31;
DF4:expand(%-lhs(VLNV2));
DF51:A-\nu=0;
```

```
DF52:B-1=0;
DF53:2*C+B+1=0;
VLNV3:A*DF1+B*DF2+C*DF3=%c;
solve([DF51,DF52,DF53],[A,B,C])[1];
VLNV31:subst([%],VLNV3);
```

上記を参考に、二次元よどみ点の流れ関数を下記とする。ここで f は y の関数とする。

$$\Psi = f\,x$$

上記から、流速：u, v は、

$$\begin{aligned} u =& \frac{d}{d\,y}\,(f\,x) = \left(\frac{d}{d\,y}\,f\right)\,x \\ v =& -\frac{d}{d\,x}\,(f\,x) = -f \end{aligned} \tag{8.3.20}$$

渦度：ω は上式を (8.3.17) 式に代入し、

$$\omega = \frac{d}{d\,x}\,(-f) - \frac{d}{d\,y}\,\left(\left(\frac{d}{d\,y}\,f\right)\,x\right) = -\left(\frac{d^2}{d\,y^2}\,f\right)\,x \tag{8.3.21}$$

上式の渦度：ω を渦度方程式：(8.3.18) 式に代入し、

$$\left(\frac{d^4}{d\,y^4}\,f\right)\,\nu + f\,\left(\frac{d^3}{d\,y^3}\,f\right) - \left(\frac{d}{d\,y}\,f\right)\,\left(\frac{d^2}{d\,y^2}\,f\right) = 0 \tag{8.3.22}$$

上式を積分する。各項の積分後の各項を下記のように想定し、それを微分すると矢印のようになる。

$$\frac{d^3}{d\,y^3}\,f \to \frac{d^4}{d\,y^4}\,f$$

$$f\,\left(\frac{d^2}{d\,y^2}\,f\right) \to f\,\left(\frac{d^3}{d\,y^3}\,f\right) + \left(\frac{d}{d\,y}\,f\right)\,\left(\frac{d^2}{d\,y^2}\,f\right)$$

$$\left(\frac{d}{d\,y}\,f\right)^2 \to 2\,\left(\frac{d}{d\,y}\,f\right)\,\left(\frac{d^2}{d\,y^2}\,f\right)$$

積分後の各項に係数：A, B, C を掛け、それを微分すると矢印のようになる。

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d}{d\,y}\,f\right)^2 C + f\,\left(\frac{d^2}{d\,y^2}\,f\right)\,B + \left(\frac{d^3}{d\,y^3}\,f\right)\,A = \%c \\ \to\quad & 2\,\left(\frac{d}{d\,y}\,f\right)\,\left(\frac{d^2}{d\,y^2}\,f\right)\,C + f\,\left(\frac{d^3}{d\,y^3}\,f\right)\,B \\ & + \left(\frac{d}{d\,y}\,f\right)\,\left(\frac{d^2}{d\,y^2}\,f\right)\,B + \left(\frac{d^4}{d\,y^4}\,f\right)\,A \\ & - \left(\frac{d^4}{d\,y^4}\,f\right)\,\nu - f\,\left(\frac{d^3}{d\,y^3}\,f\right) \\ & + \left(\frac{d}{d\,y}\,f\right)\,\left(\frac{d^2}{d\,y^2}\,f\right) \end{aligned} \tag{8.3.23}$$

上式と積分前の元の式：(8.3.22) 式と比較すると、各係数は下記となり、

$$[A = \nu, B = 1, C = -1]$$

積分後の渦度方程式は下記となる。

$$\left(\frac{d^3}{d\,y^3}\,f\right)\,\nu + f\,\left(\frac{d^2}{d\,y^2}\,f\right) - \left(\frac{d}{d\,y}\,f\right)^2 = \%c \tag{8.3.24}$$

```
OM2;
subst([\omega=0],%);
OBC1:'diff(f,y,2)=0;
OBC2:'diff(f,y,3)=0;
rhs(U2)=rhs(U3);
OBC3:'diff(f,y,1)=2*U;
OBC4:U=k/2;
subst([OBC1,OBC2,OBC3,OBC4],VLNV31);
solve(%,%c)[1];
VLNV32:subst([%],VLNV31);
Y1:y=(\nu/k)^(1/2)*\eta;
Y2:solve(%,\eta)[1];
Y21:diff(Y2,y,1);
Y22:diff(Y2,y,2);
Y23:diff(Y2,y,3);
F2:f=(\nu*k)^(1/2)*F;
F21:solve(%,F)[1];
subst([F2],VLNV32);
ev(%,diff);
subst([Y23,Y22,Y21],%);
radcan(%)/(-k^2);
VLNV4:expand(%);
PS3:subst([F2],PS2);
subst([F2],U3);
ev(%,diff);
subst([Y21],%);
U4:radcan(%);
V4:subst([F2],V3);
VLNV41:solve(VLNV4,'diff(F,\eta,3))[1];
VLNV42:subst(['diff(F,eta,1)=G,
 'diff(F,eta,2)=H],rhs(%));
```

境界条件として、壁面では、渦度は零であるから、(8.3.21) 式から、

$$0 = -\left(\frac{d^2}{d\,y^2}\,f\right)\,x \qquad \omega = 0 \quad \text{at } y = 0$$

故に、

$$\frac{d^2}{d\,y^2}\,f = 0, \quad \frac{d^3}{d\,y^3}\,f = 0$$

上式を (8.3.24) 式に代入すると、下記の関係を得る。

$$-\left(\frac{d}{d\,y}\,f\right)^2 = \%c$$

流速：u の (8.3.19) 式と (8.3.20) 式の関係から、

$$2\,x\,U = \left(\frac{d}{d\,y}\,f\right)\,x$$

下記の k を導入し、

$$\frac{d}{d\,y}\,f = 2\,U = k$$

下記の関係を得る。

$$-k^2 = \%c$$

以上から、渦度方程式は下記となる。

$$\left(\frac{d^3}{d\,y^3}\,f\right)\,\nu + f\,\left(\frac{d^2}{d\,y^2}\,f\right) - \left(\frac{d}{d\,y}\,f\right)^2 = -k^2 \quad (8.3.25)$$

上式を無次元化するため、下記の関係式の F, η を導入する。

$$y = \eta\sqrt{\frac{\nu}{k}}, \quad \eta = \frac{y}{\sqrt{\frac{\nu}{k}}}, \quad \frac{d}{d\,y}\,\eta = \frac{1}{\sqrt{\frac{\nu}{k}}}$$

$$f = \sqrt{k\,\nu}\,F, \quad F = \frac{f}{\sqrt{k\,\nu}}$$

上式を (8.3.25) 式に代入し、

$$-\frac{d^3}{d\,\eta^3}\,F - F\,\left(\frac{d^2}{d\,\eta^2}\,F\right) + \left(\frac{d}{d\,\eta}\,F\right)^2 = 1 \qquad (8.3.26)$$

また、流れ関数は下記となり、

$$\Psi = \sqrt{k\,\nu}\,x\,F \qquad (8.3.27)$$

各流速は、下記となる。

$$\begin{aligned} u &= x\,\left(\frac{d}{d\,y}\,\left(\sqrt{k\,\nu}\,F\right)\right) = k\,x\,\left(\frac{d}{d\,\eta}\,F\right) \\ v &= -\sqrt{k\,\nu}\,F \end{aligned} \qquad (8.3.28)$$

数値解析、Maxima の Runge-Kutta 法を用いて解くため、下記のように置き換える。

$$\frac{d^3}{d\,\eta^3}\,F = -F\,\left(\frac{d^2}{d\,\eta^2}\,F\right) + \left(\frac{d}{d\,\eta}\,F\right)^2 - 1$$

```
Tmax:10;
Tmin:0;
N:200;
DDF1:1.2325877;
dT:(Tmax-Tmin)/float(N);
sol:rk([VLNV42,H,G],[H,G,F],[DDF1,0,0],
  [t,Tmin,Tmax,dT]);
listF:[[sol[1][1],sol[1][4]]];
for J:2 thru N do(listF:append(listF,
   [[sol[J][1],sol[J][4]]]));
listdF:[[sol[1][1],sol[1][3]]];
for J:2 thru N do(listdF:append(listdF,
   [[sol[J][1],sol[J][3]]]));
listddF:[[sol[1][1],sol[1][2]]];
for J:2 thru N do(listddF:append(listddF,
   [[sol[J][1],sol[J][2]]]));
```

```
plot2d([[discrete,listF],[discrete,listdF],
 [discrete,listddF]],[x,0,5],[y,0,5]);
plot2d([[discrete,listF],[discrete,listdF],
 [discrete,listddF]],[x,0,5],[y,0,1.5]);
plot2d([[discrete,listF],[discrete,listdF],
 [discrete,listddF]],[x,0,10],
 [y,-0.001,0.001]);
plot2d([[discrete,listF],[discrete,listdF],
 [discrete,listddF]],[x,0,10],
 [y,0.999,1.001]);
```

境界条件として、$y = 0$ で $u = v = 0$、$y \to \infty$ で外界流：$u = 2\,x\,U = k\,U$ である。Runge-Kutta 法の初期条件として、壁面：$y = \eta = 0$ で流速：u, v は零であるから、(8.3.20) 式から、

$$\frac{d}{d\,\eta}\,F = 0, \quad F = 0$$

また、壁面から十分離れたところでは、外界流と一致するはずだから、(8.3.23) 式から、

$$\frac{d}{d\,\eta}\,F \to 1 \quad \text{at } \eta \to \infty$$

そこで上記になるように、$\frac{d^2}{d\,\eta^2}\,F$ の初期値を選ぶ必要がある。試行錯誤の結果、$\frac{d^2}{d\,\eta^2}\,F = 1.2325877$ で満足できる結果となった。下記に結果を示す。

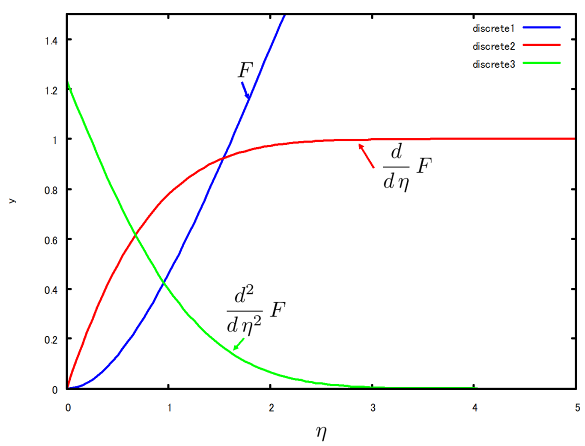


図 8.3.7: 二次元よどみ点数値計算結果

```
DE1:subst([y=\delta,\eta=0.24],Y1);
u/u[o]=rhs(U4)/rhs(U2);
U5:subst([OBC4],%);
v/v[o]=rhs(V4)/rhs(V2);
V5:radcan(subst([Y1,OBC4],%));
listV:[[sol[2][1],sol[2][4]/sol[2][1]]];
for J:3 thru N do(listV:append(listV,
  [[sol[J][1],sol[J][4]/sol[J][1]]]));
plot2d([[discrete,listdF],
 [discrete,listV]]);
S1:0.0;
S2:0.0;
S3:0.0;
for J:100 thru N do(S1:S1+sol[J][1],S2:S2
 +sol[J][4],S3:S3+1);
S4:S1/S3;
S5:S2/S3;
B1:b=S5-S4;
F3:F=\eta+rhs(B1);
DE2:\delta[1]=subst([0.24=-rhs(B1)],
 rhs(DE1));
```

各流速は外界流：u_0, v_0 で無次元化すると、

$$\frac{u}{u_o} = \frac{k\left(\frac{d}{d\eta}F\right)}{2U} = \frac{d}{d\eta}F \tag{8.3.29}$$

$$\frac{v}{v_o} = \frac{\sqrt{k\nu}\,F}{2yU} = \frac{F}{\eta}$$

図示すると下記となる。$\frac{u}{u_o} = 0.99$ を境界層の厚さとす

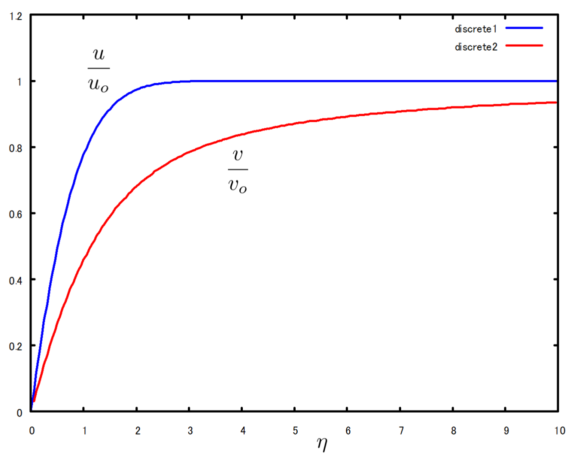


図 8.3.8: 二次元よどみ点流速分布

ると、計算結果から、下記となり、x 軸方向に一定の厚さとなっている。

$$\delta \approx 0.24\sqrt{\frac{\nu}{k}}$$

上記の計算結果で、固定壁から十分離れたとき、$\frac{d}{d\eta}F \to 1$ から、F は勾配：1 の直線となっており、そ

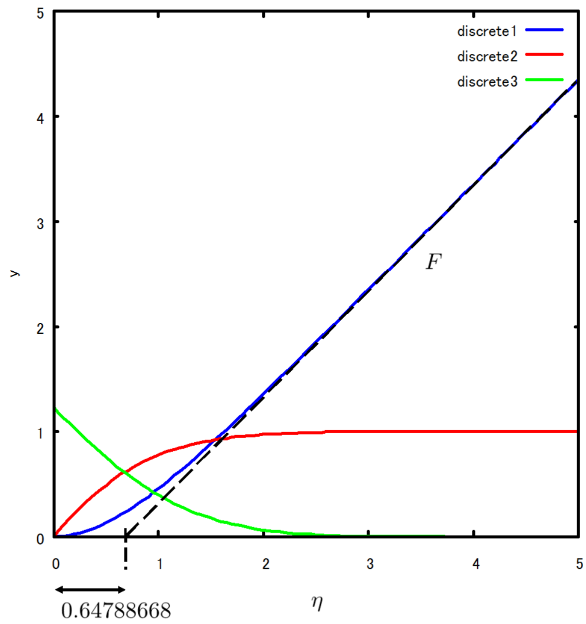


図 8.3.9: おしのけ厚さ

の直線と η 軸との交点はおしのけ厚さと考えることが出来る。

$$F = \eta - 0.64788668085351$$

おしのけ厚さ：δ_1 は、

$$\delta_1 \approx 0.648\sqrt{\frac{\nu}{k}} \tag{8.3.30}$$

```
Y21;
d*\eta/dy=rhs(%);
DY2:solve(%,dy)[1];
(1-u/u[0])*dy;
%=subst([DY2],%);
SS1:0;
for J:1 thru 100 do(SS1:SS1+(1-
 listdF[J][2])*dT);
\delta[1]=SS1*sqrt(\nu/k);
u/u[0]*(1-u/u[0])*dy;
%=subst([DY2],%);
SS2:0;
for J:1 thru 100 do(SS2:SS2+listdF[J][2]
 *(1-listdF[J][2])*dT);
\delta[2]=SS2*sqrt(\nu/k);
U6:solve(U5,u)[1];
\tau=\mu*'diff(u,y,1);
subst([U6],%);
\tau=\mu*rhs(Y21)*u[0]*diff(F,\eta,2);
subst(['diff(F,eta,2)=DDF1],%);
%/\mu/u[0]*sqrt(nu/k);
```

おしのけ厚さ：δ_1 と運動量厚さ：δ_2、底面の剪断力：τ を数値解析結果から求める。おしのけ厚さ：δ_1 は次式で定義される。

$$\delta_1 = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{u_0}\right) dy = \int_0^\infty \sqrt{\frac{\nu}{k}} \left(1 - \frac{u}{u_0}\right) d\,\eta$$

(8.3.29) 式から、$\frac{d}{d\,\eta}\,F$ の数値計算結果を上式に代入し、数値積分して次式が得られる。

$$\delta_1 \approx 0.673\sqrt{\frac{\nu}{k}} \tag{8.3.31}$$

運動量厚さ：δ_2 は次式で定義される。

$$\begin{aligned}\delta_2 &= \int_0^\infty \frac{u}{u_0} \left(1 - \frac{u}{u_0}\right) dy \\ &= \int_0^\infty \sqrt{\frac{\nu}{k}}\frac{u}{u_0} \left(1 - \frac{u}{u_0}\right) d\,\eta\end{aligned}$$

(8.3.29) 式から、$\frac{d}{d\,\eta}\,F$ の数値計算結果を上式に代入し、数値積分して次式が得られる。

$$\delta_2 \approx 0.292\sqrt{\frac{\nu}{k}} \tag{8.3.32}$$

底面の剪断力：τ は次式で得られる。

$$\tau = \mu \left(\frac{d}{d\,y}\,u\right) = \frac{u_0\,\mu\,\left(\frac{d^2}{d\,\eta^2}\,F\right)}{\sqrt{\frac{\nu}{k}}}$$

$\frac{d^2}{d\,\eta^2}\,F$ は $\eta \to 0$ の値、即ち、$\frac{d^2}{d\,\eta^2}\,F$ の初期値を代入することで得られ、

$$\tau = \frac{1.2325877\,u_0\,\mu}{\sqrt{\frac{\nu}{k}}}$$

以上から、

$$\frac{\sqrt{\frac{\nu}{k}}\,\tau}{u_0\,\mu} \approx 1.233 \tag{8.3.33}$$

ここで、おしのけ厚さ：δ_1 と運動量厚さ：δ_2 は x に無関係で、一定の厚さになっている。また、底面の剪断力：τ も x に無関係となっている。

8.3.3　三次元よどみ点

三次元のよどみ点近傍の定常粘性流れについて調べる [1]。流体は上方から流れ、底面の固定壁に当たり、四方に分かれ、z 軸対称の流れとなる。上方が z 軸の円柱座標系:$r-\theta-z$ を用い、各軸の流速を v_r, v_θ, v_z とし、密度：ρ、粘性係数：μ、動粘性係数：ν とする。

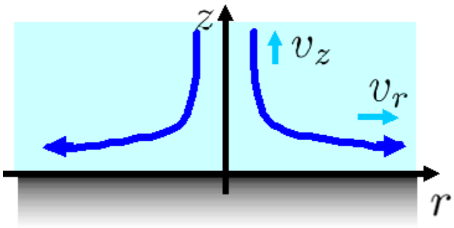


図 8.3.10: 三次元よどみ点

```
/* 三次元よどみ点 R-1 */
kill(all);
load("vector");
load("dynamics");
depends(f,[z]);
depends(g,[\zeta]);
depends(\zeta,[z]);
MAS2:'diff(v[z],z,1)+'diff(v[theta],theta
 ,1)/r+'diff(v[r],r,1)+v[r]/r=0;
```

質量保存の方程式は (8.1.13) 式から

$$\frac{d}{d\,z}\,v_z+\frac{\frac{d}{d\,\theta}\,v_\theta}{r}+\frac{d}{d\,r}\,v_r+\frac{v_r}{r}=0 \tag{8.3.34}$$

Navier-Stokes の式は (8.1.15) 式から r 方向は、

$$\begin{aligned}
&\rho\left(\left(\frac{d}{d\,z}\,v_r\right)\,v_z-\frac{v_\theta^2}{r}+\frac{\left(\frac{d}{d\,\theta}\,v_r\right)\,v_\theta}{r}\right.\\
&\qquad\left.+\frac{d}{d\,t}\,v_r+v_r\,\left(\frac{d}{d\,r}\,v_r\right)\right)\\
&\quad=\mu\left(-\frac{2\,\left(\frac{d}{d\,\theta}\,v_\theta\right)}{r^2}+\frac{d^2}{d\,z^2}\,v_r+\frac{\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,v_r}{r^2}+\frac{d^2}{d\,r^2}\,v_r\right.\\
&\qquad\left.+\frac{\frac{d}{d\,r}\,v_r}{r}-\frac{v_r}{r^2}\right)+F_r-\frac{d}{d\,r}\,p
\end{aligned} \tag{8.3.35}$$

z 方向は下記となり、z 軸対称から、θ 方向は不要である。

$$\begin{aligned}
&\rho\left(v_z\,\left(\frac{d}{d\,z}\,v_z\right)+\frac{v_\theta\,\left(\frac{d}{d\,\theta}\,v_z\right)}{r}\right.\\
&\qquad\left.+\frac{d}{d\,t}\,v_z+v_r\,\left(\frac{d}{d\,r}\,v_z\right)\right)\\
&\quad=\mu\left(\frac{d^2}{d\,z^2}\,v_z+\frac{\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,v_z}{r^2}+\frac{d^2}{d\,r^2}\,v_z+\frac{\frac{d}{d\,r}\,v_z}{r}\right)\\
&\qquad+F_z-\frac{d}{d\,z}\,p
\end{aligned} \tag{8.3.36}$$

```
NAV2:matrix([\rho*((v[\theta]*(
 'diff( v[\theta],\theta,1)))/r
 +'diff(v[\theta],t,1)+v[r]*(
 'diff(v[\theta],r,1))+(v[\phi]*(
 'diff(v[\theta],\phi,1)))/(r*sin(\theta))
 -(v[\phi]^2*cos(\theta))/(r*sin(\theta))
 +(v[r]*v[\theta])/r)],[\rho*((v[\phi]
 *v[\theta]*cos(\theta))/(r*sin(\theta))
 +(v[\phi]*('diff(v[\phi],\phi,1)))/(r*
 sin(\theta))+(('diff(v[\phi],\theta,1))
 *v[\theta])/r+(v[\phi]*v[r])/r+('diff(v
 [\phi],r,1))*v[r]+'diff(v[\phi],t,1))],
 [\rho*((v[\phi]*('diff(v[r],\phi,1)))/
 (r*sin(\theta))-v[\theta]^2/r+(('diff
 (v[r],\theta,1))*v[\theta])/r+
 'diff(v[r],t,1)+v[r]*('diff(v[r],r,1))
 -v[\phi]^2/r)])=matrix([mu*('diff(
 v[\theta],\theta,2)/r^2+(cos(\theta)
 *('diff(v[\theta],\theta,1)))/(r^2*
 sin(\theta))+'diff(v[\theta],r,2)
 +(2*('diff(v[\theta],r,1)))/r+'diff(
 v[\theta],\phi,2)/(r^2*sin(\theta)^2)
 -(v[\theta]*cos(\theta)^2)/(r^2*sin(
 \theta)^2)-(2*('diff(v[\phi],\phi,1))
 *cos(\theta))/(r^2*sin(\theta)^2)
 -v[\theta]/r^2+(2*('diff(v[r],\theta,1)
 ))/r^2)+F[\theta]-'diff(p,\theta,1)/r],
 [mu*((2*cos(\theta)*('diff(v[\theta],
 \phi,1)))/(r^2*sin(\theta)^2)+(('diff
 (v[\phi],\theta,1))*cos(\theta))/(r^2
 *sin(\theta))+(2*('diff(v[r],\phi,1)))
 /(r^2*sin(\theta))+'diff(v[\phi],
 \phi,2)/(r^2*sin(\theta)^2)-v[\phi]/
 (r^2*sin(\theta)^2)+(2*('diff(v[\phi]
 ,r,1)))/r+'diff(v[\phi],\theta,2)/r^2
```

[1] Dr Harmann Schlihting, Boundary Layer Theory [12]、V.b.9 Stagnation in three-dimensional flow、P.81

```
 +'diff(v[\phi],r,2))-'diff(p,\phi,1)/
 (r*sin(\theta))+F[\phi]],[mu*(-(2*(
 'diff(v[\theta],\theta,1)))/r^2-(2*
 v[\theta]*cos(\theta))/(r^2*sin(
 \theta))+(('diff(v[r],\theta,1))*
 cos(\theta))/(r^2*sin(\theta))-(2*(
 'diff(v[\phi],\phi,1)))/(r^2*sin
 (\theta))+'diff(v[r],\phi,2)/(r^2*
 sin(\theta)^2)+'diff(v[r],\theta,2)/
 r^2+'diff(v[r],r,2)+(2*('diff(v[r],
 r,1)))/r-(2*v[r])/r^2)+F[r]
 -'diff(p,r,1)]);
PS1:\Psi=-A*z*r^2;
VZ1:V[z]='diff(\Psi,r,1)/r;
VR1:V[r]=-'diff(\Psi,z,1)/r;
subst([PS1],VZ1);
VZ2:ev(%,diff);
subst([PS1],VR1);
VR2:ev(%,diff);
P1:p=-1/2*\rho*(V[r]^2+V[z]^2);
subst([VR2,VZ2],%);
PS2:\Psi=-f*r^2;
subst([PS2,V=v],VZ1);
VZ3:ev(%,diff);
subst([PS2,V=v],VR1);
VR3:ev(%,diff);
P2:p=-rho*A^2*(F(z)+r^2)/2;
subst([v[\theta]=0,VZ3,VR3],MAS2);
ev(%,diff);
NAV21:lhs(NAV2)[1][1]=rhs(NAV2)[1][1];
NAV23:lhs(NAV2)[3][1]=rhs(NAV2)[3][1];
subst([F[r]=0,v[\theta]=0,VZ3,VR3,\mu=\nu*
 \rho,P2],NAV21);
ev(%,diff)/\rho/r;
NAV31:expand(%);
subst([F[z]=0,v[\theta]=0,VZ3,VR3,\mu=\nu*
 \rho,P2],NAV23);
ev(%,diff)/\rho/2;
NAV33:expand(%);
```

三次元よどみ点を表す完全流体の流れ関数：Ψ は、下記となる。

$$\Psi=-r^2\,z\,A$$

流れ関数：Ψ と完全流体の各流速：V_r, V_z の関係は、

$$V_z=\frac{\frac{d}{d\,r}\,\Psi}{r},\quad V_r=-\frac{\frac{d}{d\,z}\,\Psi}{r}$$

上記から、完全流体の各流速：V_r, V_z は、

$$\begin{aligned}V_z&=\frac{\frac{d}{d\,r}\,\left(-r^2\,z\,A\right)}{r}=-2\,z\,A\\ V_r&=-\frac{\frac{d}{d\,z}\,\left(-r^2\,z\,A\right)}{r}=r\,A\\ p&=-\frac{\rho\,\left(V_z^2+V_r^2\right)}{2}=-\frac{\rho\,\left(4\,z^2\,A^2+r^2\,A^2\right)}{2}\end{aligned}\tag{8.3.37}$$

上記を参考に下記の流れ関数：Ψ を導入する。ここで f は z の関数とする。

$$\Psi=-f\,r^2$$

このとき各流速：v_r, v_z は、

$$\begin{aligned}v_z&=\frac{\frac{d}{d\,r}\,\left(-f\,r^2\right)}{r}=-2\,f\\ v_r&=-\frac{\frac{d}{d\,z}\,\left(-f\,r^2\right)}{r}=\left(\frac{d}{d\,z}\,f\right)\,r\\ p&=-\frac{\rho\,\left(\mathrm{F}\left(z\right)+r^2\right)\,A^2}{2}\end{aligned}\tag{8.3.38}$$

質量保存の方程式：(8.3.34) 式に (8.3.38) 式を代入し、

$$\frac{d}{d\,r}\,\left(\left(\frac{d}{d\,z}\,f\right)\,r\right)+\frac{d}{d\,z}\,f+\frac{d}{d\,z}\,\left(-2\,f\right)=0$$

整理すると当然ながら、零となる。

Navier-Stokes の式：(8.3.35) 式に (8.3.38) 式を代入し、

$$\left(\frac{d}{d\,z}\,f\right)^2-2\,f\,\left(\frac{d^2}{d\,z^2}\,f\right)=A^2+\left(\frac{d^3}{d\,z^3}\,f\right)\,\nu\tag{8.3.39}$$

Navier-Stokes の式：(8.3.36) 式に (8.3.38) 式を代入し、

$$2\,f\,\left(\frac{d}{d\,z}\,f\right)=\frac{\left(\frac{d}{d\,z}\,\mathrm{F}\left(z\right)\right)\,A^2}{4}-\left(\frac{d^2}{d\,z^2}\,f\right)\,\nu\tag{8.3.40}$$

```
G1:f=sqrt(A*\nu)*g;
ZT1:\zeta=sqrt(A/\nu)*z;
DZT1:'diff(lhs(ZT1),z,1)=diff(rhs(ZT1),z,
  1);
DZT2:'diff(lhs(ZT1),z,2)=diff(rhs(ZT1),z,
  2);
DZT3:'diff(lhs(ZT1),z,3)=diff(rhs(ZT1),z,
  3);
ZT2:solve(ZT1,z)[1];
subst([G1],NAV31);
ev(%,diff);
subst([DZT1,DZT2,DZT3],%);
radcan(%/A^2);
solve(%,'diff(g,zeta,3))[1];
```

f に代わり、下記の g を導入する。ここで g は ζ の関数である。

$$f=g\,\sqrt{\nu\,A}\tag{8.3.41}$$

また、z の代わりに下記の ζ を導入する。

$$\zeta = z\sqrt{\frac{A}{\nu}}, \quad z = \frac{\zeta}{\sqrt{\frac{A}{\nu}}}$$
$$\frac{d}{d\,z}\,\zeta = \sqrt{\frac{A}{\nu}}, \quad \frac{d^2}{d\,z^2}\,\zeta = 0, \quad \frac{d^3}{d\,z^3}\,\zeta = 0 \tag{8.3.42}$$

(8.3.39) 式に (8.3.41) 式、(8.3.42) 式を代入し、次式を得る。

$$\left(\frac{d}{d\,\zeta}\,g\right)^2 - 2\,g\left(\frac{d^2}{d\,\zeta^2}\,g\right) = \frac{d^3}{d\,\zeta^3}\,g + 1 \tag{8.3.43}$$

数値解析、Maxima の Runge-Kutta 法を用いて解くため、下記のように置き換える。

$$\frac{d^3}{d\,\zeta^3}\,g = -2\,g\left(\frac{d^2}{d\,\zeta^2}\,g\right) + \left(\frac{d}{d\,\zeta}\,g\right)^2 - 1$$

```
Tmax:10;
Tmin:0;
N:200;
dT:(Tmax-Tmin)/float(N);
sol:rk([-2*F2*F+F1^2-1,F2,F1],[F2,F1,F],
 [1.311938,0,0],[t,Tmin,Tmax,dT]);
listF:[[sol[1][1],sol[1][4]]];
for J:2 thru N do(listF:append(listF,
  [[sol[J][1],sol[J][4]]]));
listF1:[[sol[1][1],sol[1][3]]];
for J:2 thru N do(listF1:append(listF1,
  [[sol[J][1],sol[J][3]]]));
listF2:[[sol[1][1],sol[1][2]]];
for J:2 thru N do(listF2:append(listF2,
  [[sol[J][1],sol[J][2]]]));
plot2d([[discrete,listF],[discrete,listF1],
 [discrete,listF2]],[x,0,5],[y,0,5]);
plot2d([[discrete,listF],[discrete,listF1],
 [discrete,listF2]],[x,0,10],
 [y,-0.001,0.001]);
plot2d([[discrete,listF],[discrete,listF1],
 [discrete,listF2]],[x,0,10],
 [y,0.999,1.001]);
```

初期条件として、壁面：$z = \zeta = 0$ で流速：v_r, v_z は零であるから、(8.3.38) 式から、

$$\frac{d}{d\,\zeta}\,g = 0, \quad g = 0$$

また、壁面から十分離れたところでは、外界流と一致するはずだから、(8.3.37) 式から、

$$\frac{d}{d\,\zeta}\,g \to 1 \quad \text{at } \zeta \to \infty$$

そこで上記になるように、$\frac{d^2}{d\,\zeta^2}\,g$ の初期値を選ぶ必要がある。試行錯誤の結果、$\frac{d^2}{d\,\zeta^2}\,g = 1.311938$ で満足できる結果となった。下記に結果を示す。

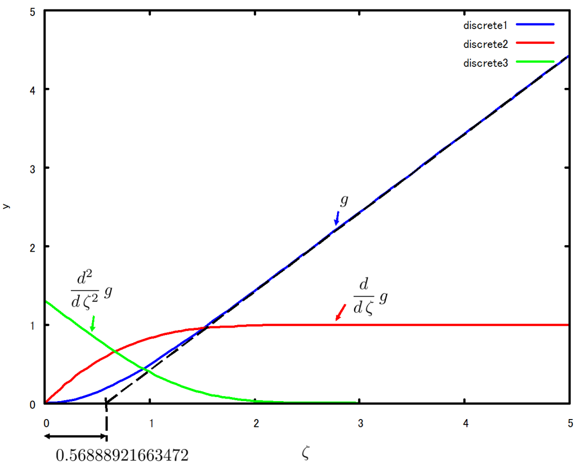


図 8.3.11: 三次元よどみ点数値計算結果

```
v[r]/V[r]=rhs(VR3)/rhs(VR2);
subst([G1],%);
ev(%,diff);
subst([DZT1,DZT2,DZT3],%);
VR4:radcan(%);
v[z]/V[z]=rhs(VZ3)/rhs(VZ2);
lhs(%)=subst([G1,ZT2],rhs(%));
VZ4:radcan(%);
DE1:subst([z=\delta,\zeta=1.95],ZT2);
listV:[[sol[2][1],sol[2][4]/sol[2][1]]];
for J:3 thru N do(listV:append(listV,
  [[sol[J][1],sol[J][4]/sol[J][1]]]));
plot2d([[discrete,listF1],[discrete,listV]]
 ,[x,0,5]);
S1:0.0;
S2:0.0;
S3:0.0;
for J:100 thru N do(S1:S1+sol[J][1],S2:S2
 +sol[J][4],S3:S3+1);
S4:S1/S3;
S5:S2/S3;
B1:b=S5-S4;
F3:G=\zeta+rhs(B1);
DE2:\delta[1]=subst([1.95=-rhs(B1)],
 rhs(DE1));
```

各流速は外界流で無次元化すると、

$$\frac{v_r}{V_r} = \frac{\frac{d}{d\,z}\,f}{A} = \frac{\frac{d}{d\,z}\left(g\,\sqrt{\nu\,A}\right)}{A} = \frac{d}{d\,\zeta}\,g$$

$$\frac{v_z}{V_z} = \frac{f}{z\,A} = \frac{g\,\sqrt{\frac{A}{\nu}}\,\sqrt{\nu\,A}}{A\,\zeta} = \frac{g}{\zeta}$$

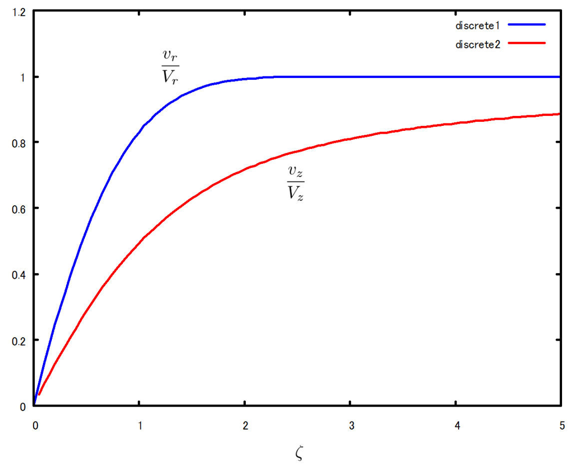


図 8.3.12: 三次元よどみ点流速分布

$\frac{v_r}{V_r}=0.99$ を境界層の厚さとすると、計算結果から、下記となり、r 軸方向に一定の厚さとなっている。二次元よどみ点の結果と比べ、$0.24 \rightarrow 1.95$ で三次元よどみ点の方が狭くなっている。

$$\delta \approx \frac{1.95}{\sqrt{\frac{A}{\nu}}}$$

上記の計算結果で、固定壁から十分離れたとき、$\frac{d}{d\zeta}g \rightarrow 1$ から、g は勾配 : 1 の直線となっており、その直線と ζ 軸との交点はおしのけ厚さと考えることが出来る。

$$g=\zeta-0.56888921663472$$

おしのけ厚さ : δ_1 は下記となり、二次元よどみ点の結果と比べ、$0.648 \rightarrow 0.569$ で三次元よどみ点の方が狭くなっている。

$$\delta_1 \approx \frac{0.569}{\sqrt{\frac{A}{\nu}}}$$

8.3.4 二次元拡大縮小平面流路

角度：α_0 で交わる平面壁間の二次元流で、壁の交点にわき出しまたは吸い込みを置いたときの定常粘性流について調べる [1]。ここで二次元極座標系：$r-\theta$ の流速の各軸コンポーネントを v_r, v_θ、動粘性係数：ν とする。

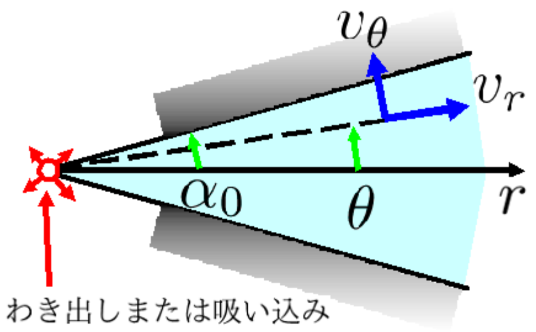


図 8.3.13: 二次元拡大縮小流路

```
/* 収束、発散する流路の中の二次元流 */
kill(all);
load("vector");
load("dynamics");
MAS1:'diff(v[z],z,1)+'diff(v[\theta],
 \theta,1)/r+'diff(v[r],r,1)+v[r]/r=0;
OM1:\omega=(r*('diff(v[\theta],r,1))
 +v[\theta]-'diff(v[r],\theta,1))/r;
OMNV1:(('diff(\omega,\theta,1))*v[\theta])
 /r+('diff(\omega,r,1))*v[r]+'diff(\omega,
 t,1)=(nu*('diff(\omega,r,1)))/r+(nu*(
 'diff(\omega,\theta,2)))/r^2+nu*(
 'diff(\omega,r,2));
V1:[v[z]=0,v[\theta]=0,v[r]=v(r,\theta)];
subst(V1,MAS1);
MAS2:ev(%,diff);
ode2(MAS2,v(r,\theta),r);
VR1:v(r,\theta)=F(\theta)/r;
VR11:v[MAX]=F[MAX]/r;
depends(f,[\eta]);
depends(\eta,[\theta]);
F1:f=F(\theta)/F[MAX];
F2:solve(F1,F(\theta))[1];
R1:R=v[MAX]*r/\nu;
R2:solve(%,v[MAX])[1];
subst([R2],VR11);
F21:solve(%,F[MAX])[1];
TH0:\theta/\alpha[0]=\eta;
```

[1] G. K. Batchelor：入門 流体力学 [18]、5.6 P.294 & Dr Harmann Schlihting, Boundary Layer Theory [12]、V.b.11 P.89

```
TH1:solve(TH0,\eta)[1];
DTH1:diff(TH1,\theta,1);
OM2:subst(V1,OM1);
subst([VR1],%);
OM21:ev(%,diff);
```

渦度：ω の $r-\theta$ 極座標表記は (8.1.45) 式から、

$$\omega=\frac{r\left(\frac{d}{dr}v_\theta\right)+v_\theta-\frac{d}{d\theta}v_r}{r} \tag{8.3.44}$$

渦度方程式の $r-\theta$ 極座標表記は (8.1.44) 式から、

$$\frac{\left(\frac{d}{d\theta}\omega\right)v_\theta}{r}+\left(\frac{d}{dr}\omega\right)v_r+\frac{d}{dt}\omega=\frac{\nu\left(\frac{d}{dr}\omega\right)}{r}+\frac{\nu\left(\frac{d^2}{d\theta^2}\omega\right)}{r^2}+\nu\left(\frac{d^2}{dr^2}\omega\right) \tag{8.3.45}$$

質量保存の方程式は円柱座標系の (8.1.13) 式から、流速：$\mathrm{v}(r,\theta)$ とすると、

$$\frac{d}{dr}\mathrm{v}(r,\theta)+\frac{\mathrm{v}(r,\theta)}{r}=0$$

上式を $ode2$ 関数で解いて次式を得る。

$$\mathrm{v}(r,\theta)=\frac{\%c}{r}$$

上式から流速:$\mathrm{v}(r,\theta)$ を次式のように記述し、関数:$\mathrm{F}(\theta)$ を導入する。流速：$\mathrm{v}(r,\theta)$ の最大値を v_{MAX} とし、関数：F_{MAX} についても下記のように定義する。

$$\mathrm{v}(r,\theta)=\frac{\mathrm{F}(\theta)}{r},\quad v_{MAX}=\frac{F_{MAX}}{r} \tag{8.3.46}$$

次式で定義される関数：f を導入する。ここで f は下記に示す η の関数とする。

$$f=\frac{\mathrm{F}(\theta)}{F_{MAX}},\quad \mathrm{F}(\theta)=f\,F_{MAX} \tag{8.3.47}$$

下記で定義されるレイノルズ数：R を導入する。これらの関係式は、

$$\begin{aligned} R=\frac{r\,v_{MAX}}{\nu},&\quad v_{MAX}=\frac{\nu R}{r}\\ \frac{\nu R}{r}=\frac{F_{MAX}}{r},&\quad F_{MAX}=\nu R \end{aligned} \tag{8.3.48}$$

θ を α_0 で無次元化し、下記の η を導入する。

$$\frac{\theta}{\alpha_0}=\eta,\quad \eta=\frac{\theta}{\alpha_0},\quad \frac{d}{d\theta}\eta=\frac{1}{\alpha_0} \tag{8.3.49}$$

渦度の (8.3.44) 式に (8.3.46) 式を代入し、

$$\omega=-\frac{\frac{d}{d\theta}\mathrm{v}(r,\theta)}{r}=-\frac{\frac{d}{d\theta}\frac{\mathrm{F}(\theta)}{r}}{r}=-\frac{\frac{d}{d\theta}\mathrm{F}(\theta)}{r^2} \tag{8.3.50}$$

```
OMNV2:subst(V1,OMNV1);
subst([VR1,OM21],%);
expand(ev(%,diff)*r^4);
OMNV21:lhs(%)-rhs(%)=0;
subst([F2],OMNV21);
ev(%,diff);
subst([DTH1,'diff(eta,theta,2)=0,
 'diff(eta,theta,3)=0],%);
OMNV22:expand(%*\alpha[0]^3/F[MAX]);
OMNV3:\alpha[0]^2*f^2*F[MAX]+('diff(f,\eta
 ,2))*\nu+4*\alpha[0]^2*f*\nu=%c1;
diff(%,\eta,1)-OMNV22;
OMNV31:expand(OMNV3*'diff(f,eta,1));
OMNV4:\alpha[0]^2*f^3/3*F[MAX]+('diff(f,
 \eta,1))^2/2*\nu+4*\alpha[0]^2*f^2/2*
 \nu=%c1*f+%c2;
diff(%,\eta,1)-OMNV31;
OMNV41:expand(solve(OMNV4,('diff(f,eta,1))
 ^2)[1]);
```

渦度方程式：(8.3.45) 式に渦度：(8.3.50) 式を代入し、

$$
\begin{aligned}
&2\,\mathrm{F}(\theta)\left(\frac{d}{d\theta}\,\mathrm{F}(\theta)\right)\\
&\qquad=-\nu\left(\frac{d^3}{d\theta^3}\,\mathrm{F}(\theta)\right)-4\,\nu\left(\frac{d}{d\theta}\,\mathrm{F}(\theta)\right)
\end{aligned}
$$

上式の右辺項を左辺に集約し、(8.3.47) 式と (8.3.49) 式を代入し、f と η で記述すると、

$$
\begin{aligned}
&2\,\alpha_0^2\,f\left(\frac{d}{d\eta}\,f\right)F_{MAX}+\left(\frac{d^3}{d\eta^3}\,f\right)\nu\\
&\qquad\qquad+4\,\alpha_0^2\left(\frac{d}{d\eta}\,f\right)\nu=0
\end{aligned}
$$

上式を積分し、

$$
\alpha_0^2\,f^2\,F_{MAX}+\left(\frac{d^2}{d\eta^2}\,f\right)\nu+4\,\alpha_0^2\,f\,\nu=\%c1
$$

上式に $\frac{d}{d\eta}\,f$ を掛け、

$$
\begin{aligned}
&\alpha_0^2\,f^2\left(\frac{d}{d\eta}\,f\right)F_{MAX}+\left(\frac{d}{d\eta}\,f\right)\left(\frac{d^2}{d\eta^2}\,f\right)\nu\\
&\qquad+4\,\alpha_0^2\,f\left(\frac{d}{d\eta}\,f\right)\nu=\%c1\left(\frac{d}{d\eta}\,f\right)
\end{aligned}
$$

上式を積分し、

$$
\begin{aligned}
&\frac{\alpha_0^2\,f^3\,F_{MAX}}{3}+\frac{\left(\frac{d}{d\eta}\,f\right)^2\nu}{2}+2\,\alpha_0^2\,f^2\,\nu\\
&\qquad=\%c1\,f+\%c2
\end{aligned}
$$

$\left(\frac{d}{d\eta}\,f\right)^2$ で整理すると、

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{d}{d\eta}\,f\right)^2=&-\frac{2\,\alpha_0^2\,f^3\,F_{MAX}}{3\,\nu}+\frac{2\,\%c1\,f}{\nu}\\
&+\frac{2\,\%c2}{\nu}-4\,\alpha_0^2\,f^2
\end{aligned}
\tag{8.3.51}
$$

```
F3:(A*f^2+B*f+C);
F30:(1-f)*F3;
F31:expand(%);
C3:-coeff(F31,f^3,1)=-coeff(rhs(OMNV41),
 f^3,1);
C0:C=(2*%c2)/\nu;
coeff(F31,f^2,1)=coeff(rhs(OMNV41),f^2,1);
subst([C3],%);
C2:solve(%,B)[1];
coeff(F31,f,1)=coeff(rhs(OMNV41),f,1);
subst([C2,C0],%);
C1:solve(%,%c1)[1];
subst([C3,C2,C1,C0,F21],F3);
subst([%c2=%c2*\nu/2],%);
F32:expand(factor(%));
OMNV42:lhs(OMNV41)=(1-f)*(F32);
assume('diff(f,eta,1)>0);
OMNV5:sqrt(OMNV42);
```

上式の境界条件として、壁面で $v_r=0$ であるから、$\eta=\pm 1$ で $f=0$、最大流速点で $\frac{d}{d\theta}\,v_r=0$ であるから、$f=1$ で $\frac{d}{d\eta}\,f=0$ であるから、(8.3.51) 式右辺は $(1-f)$ の項を有している。以上から (8.3.51) 式右辺は下記のように表記できる。

$$
(1-f)\left(C+f\,B+f^2\,A\right)
$$

上式を展開し、(8.3.51) 式右辺と照合すると、次式を得る。

$$
\begin{gathered}
A=\frac{2\,\alpha_0^2\,F_{MAX}}{3\,\nu},\quad C=\frac{2\,\%c2}{\nu}\\
A-B=-4\,\alpha_0^2,\quad \frac{2\,\alpha_0^2\,F_{MAX}}{3\,\nu}-B=-4\,\alpha_0^2\\
B=\frac{2\,\alpha_0^2\,F_{MAX}+12\,\alpha_0^2\,\nu}{3\,\nu},\quad B-C=\frac{2\,\%c1}{\nu}
\end{gathered}
$$

上式から、(8.3.51) 式右辺は、

$$
\frac{2\,\alpha_0^2\,f^2\,R}{3}+\frac{2\,\alpha_0^2\,f\,R}{3}+4\,\alpha_0^2\,f+\%c2
$$

以上から、(8.3.51) 式は、

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{d}{d\eta}\,f\right)^2=(1-f)\Bigg(&\frac{2\,\alpha_0^2\,f^2\,R}{3}+\frac{2\,\alpha_0^2\,f\,R}{3}\\
&+4\,\alpha_0^2\,f+\%c2\Bigg)
\end{aligned}
$$

以上から、

$$\frac{d}{d\eta}f = \sqrt{(1-f)\left(\frac{2\alpha_0^2 f^2 R}{3}+\frac{2\alpha_0^2 f R}{3}+4\alpha_0^2 f+\%c2\right)} \quad (8.3.52)$$

上式は楕円関数であるが、$\%c$ が与えられていないので解けない。そこで Runge-Kutta 法で解く。(8.3.49) 式から、$\eta=-1$ は壁面、$\eta=0$ は流路中央を表し、$\eta\to 1$ で解く。解法の初期値として、壁面 : $\eta=-1$ で流速零 : $f=0$ とし、解析結果の流路中央:$\eta=0$ で $\frac{d}{d\theta}v_r=0\to\frac{d}{d\theta}f=0$ となるような $\%c$ を選択する。

```
Tmax:0;
Tmin:-1;
N:500;
dT:(Tmax-Tmin)/float(N);
RK1:subst([R=10,\alpha[0]=%pi/30,%c2=3.86,
 f=H],rhs(OMNV5));
sol1:rk([RK1],[H],[0],[t,Tmin,Tmax,dT]);
plot2d([discrete,sol1]);
RK1:subst([R=100,\alpha[0]=%pi/30,%c2=3,
 f=H],rhs(OMNV5));
sol2:rk([RK1],[H],[0],[t,Tmin,Tmax,dT]);
plot2d([discrete,sol2]);
RK1:subst([R=500,\alpha[0]=%pi/30,%c2=0.75,
 f=H],rhs(OMNV5));
sol3:rk([RK1],[H],[0],[t,Tmin,Tmax,dT]);
plot2d([discrete,sol3]);
```

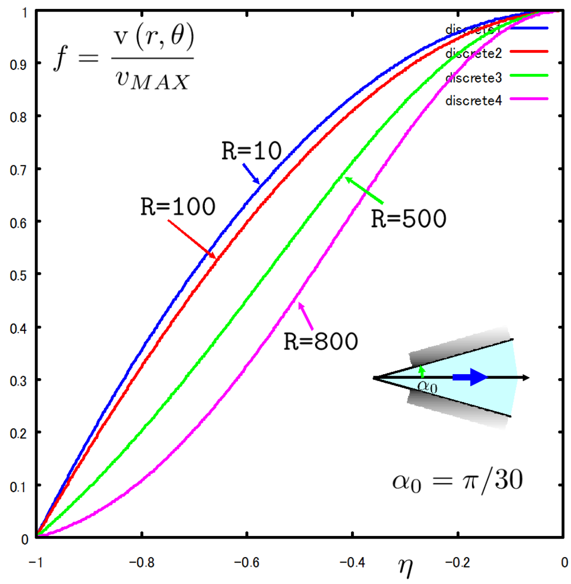


図 8.3.14: 二次元拡大流路流速分布　流速　$\alpha_0=\pi/30$

```
RK1:subst([R=800,\alpha[0]=%pi/30,
 %c2=0.0617, f=H],rhs(OMNV5));
sol8:rk([RK1],[H],[0],[t,Tmin,Tmax,dT]);
plot2d([discrete,sol8]);
plot2d([[discrete,sol1],[discrete,sol2],
 [discrete,sol3],[discrete,sol8]]);
RK1:subst([R=-10,\alpha[0]=%pi/30,%c2=4.01,
 f=H],rhs(OMNV5));
sol4:rk([RK1],[H],[0],[t,Tmin,Tmax,dT]);
plot2d([discrete,sol4]);
RK1:subst([R=-100,\alpha[0]=%pi/30,%c2=4.7,
 f=H],rhs(OMNV5));
sol5:rk([RK1],[H],[0],[t,Tmin,Tmax,dT]);
plot2d([discrete,sol5]);
RK1:subst([R=-1000,\alpha[0]=%pi/30,
 %c2=15.5, f=H],rhs(OMNV5));
sol6:rk([RK1],[H],[0],[t,Tmin,Tmax,dT]);
plot2d([discrete,sol6]);
RK1:subst([R=-5000,\alpha[0]=%pi/30,
 %c2=73.05, f=H],rhs(OMNV5));
sol7:rk([RK1],[H],[0],[t,Tmin,Tmax,dT]);
plot2d([discrete,sol7]);
plot2d([[discrete,sol4],[discrete,sol5],
 [discrete,sol6],[discrete,sol7]]);
```

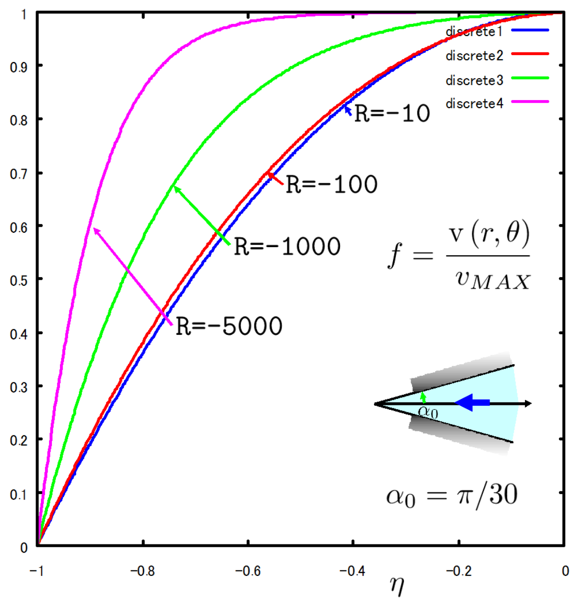


図 8.3.15: 二次元縮小流路流速分布　流速変化　$\alpha_0=\pi/30$

```
RK1:subst([R=-100,\alpha[0]=%pi/20,
 %c2=6.01, f=H],rhs(OMNV5));
sol9:rk([RK1],[H],[0],[t,Tmin,Tmax,dT]);
plot2d([discrete,sol9]);
RK1:subst([R=-100,\alpha[0]=%pi/15,%c2=7.8,
 f=H],rhs(OMNV5));
sola:rk([RK1],[H],[0],[t,Tmin,Tmax,dT]);
plot2d([discrete,sola]);
RK1:subst([R=-100,\alpha[0]=%pi/10,
 %c2=13.7, f=H],rhs(OMNV5));
solb:rk([RK1],[H],[0],[t,Tmin,Tmax,dT]);
plot2d([discrete,solb]);
plot2d([[discrete,sol5],[discrete,sol9],
 [discrete,sola],[discrete,solb]]);
```

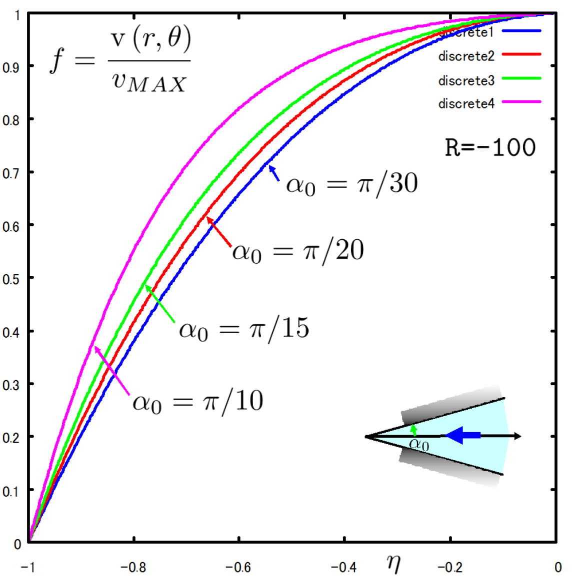


図 8.3.16:　二次元縮小平面流路流速分布　角度変化 R=-100

```
RK1:subst([R=100,\alpha[0]=%pi/20,%c2=2.1,
 f=H],rhs(OMNV5));
solc:rk([RK1],[H],[0],[t,Tmin,Tmax,dT]);
plot2d([discrete,solc]);
RK1:subst([R=100,\alpha[0]=%pi/15,%c2=1.1,
 f=H],rhs(OMNV5));
sold:rk([RK1],[H],[0],[t,Tmin,Tmax,dT]);
plot2d([discrete,sold]);
RK1:subst([R=100,\alpha[0]=%pi/10,%c2
 =0.000000001,f=H],rhs(OMNV5));
sole:rk([RK1],[H],[0],[t,Tmin,Tmax,dT]);
plot2d([discrete,sole]);
plot2d([[discrete,sol2],[discrete,solc],
 [discrete,sold],[discrete,sole]]);
assume(f>0,f-1<0);
subst([\alpha[0]=0],OMNV5);
'integrate(1/rhs(%),f,0,f)=\eta+%c3;
ev(%,integrate);
%*sqrt(%c2);
%-2;
%^2;
solve(%,f)[1];
```

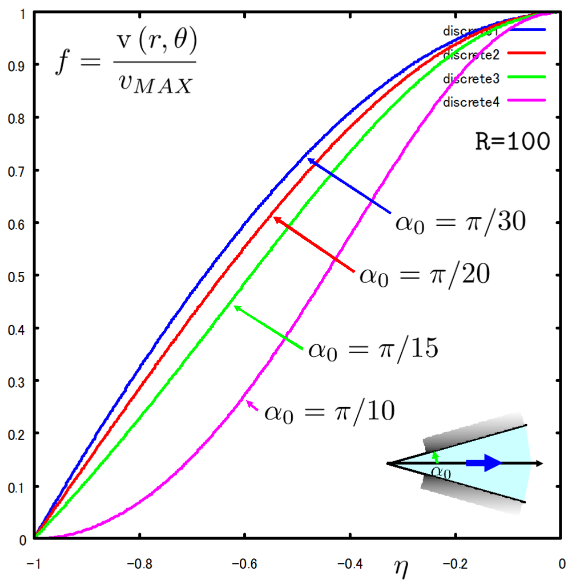


図 8.3.17:　二次元拡大平面流路流速分布　角度変化 R=100

8.3.5 回転円盤による流れ

円盤が一定の角速度：ω で回転している周りの定常粘性流れについて調べる[1]。ここで三次元円柱座標系：$r-\theta-z$ の流速の各軸コンポーネントを v_r, v_θ, v_z とする。流体の密度：ρ、粘性係数：μ、動粘性係数：ν とする。

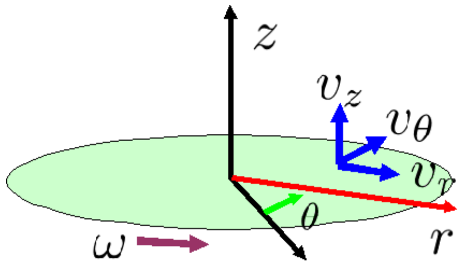


図 8.3.18: 回転円盤による流れ

```
/* 回転円盤による遠心流 */
kill(all);
load("vector");
load("dynamics");
MAS2:'diff(v[z],z,1)+'diff(v[theta],theta
 ,1)/r+'diff(v[r],r,1)+v[r]/r=0;
```

質量保存の方程式は (8.1.13) 式から

$$\frac{d}{d\,z}\,v_z+\frac{\frac{d}{d\,\theta}\,v_\theta}{r}+\frac{d}{d\,r}\,v_r+\frac{v_r}{r}=0 \tag{8.3.53}$$

Navier-Stokes の式は (8.1.15) 式から r 方向は、

$$\begin{aligned}\rho\Bigg(\left(\frac{d}{d\,z}\,v_r\right)v_z-\frac{v_\theta^2}{r}+\frac{\left(\frac{d}{d\,\theta}\,v_r\right)v_\theta}{r}\\ +\frac{d}{d\,t}\,v_r+v_r\left(\frac{d}{d\,r}\,v_r\right)\Bigg)\\ =\mu\left(-\frac{2\left(\frac{d}{d\,\theta}\,v_\theta\right)}{r^2}+\frac{d^2}{d\,z^2}\,v_r+\frac{\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,v_r}{r^2}+\frac{d^2}{d\,r^2}\,v_r\right.\\ \left.+\frac{\frac{d}{d\,r}\,v_r}{r}-\frac{v_r}{r^2}\right)+F_r-\frac{d}{d\,r}\,p\end{aligned} \tag{8.3.54}$$

θ 方向は、

$$\begin{aligned}\rho\Bigg(\left(\frac{d}{d\,z}\,v_\theta\right)v_z+\frac{v_\theta\left(\frac{d}{d\,\theta}\,v_\theta\right)}{r}+\frac{d}{d\,t}\,v_\theta\\ +v_r\left(\frac{d}{d\,r}\,v_\theta\right)+\frac{v_r\,v_\theta}{r}\Bigg)\\ =\mu\left(\frac{d^2}{d\,z^2}\,v_\theta+\frac{\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,v_\theta}{r^2}+\frac{d^2}{d\,r^2}\,v_\theta+\frac{\frac{d}{d\,r}\,v_\theta}{r}-\frac{v_\theta}{r^2}\right.\\ \left.+\frac{2\left(\frac{d}{d\,\theta}\,v_r\right)}{r^2}\right)+F_\theta-\frac{\frac{d}{d\,\theta}\,p}{r}\end{aligned} \tag{8.3.55}$$

```
NAV2:matrix([\rho*((v[\theta]*(
 'diff( v[\theta],\theta,1)))/r
 +'diff(v[\theta],t,1)+v[r]*(
 'diff(v[\theta],r,1))+(v[\phi]*(
 'diff(v[\theta],\phi,1)))/(r*sin(\theta))
 -(v[\phi]^2*cos(\theta))/(r*sin(\theta))
 +(v[r]*v[\theta])/r)],[\rho*((v[\phi]
 *v[\theta]*cos(\theta))/(r*sin(\theta))
 +(v[\phi]*('diff(v[\phi],\phi,1)))/(r*
 sin(\theta))+(('diff(v[\phi],\theta,1))
 *v[\theta])/r+(v[\phi]*v[r])/r+('diff(v
 [\phi],r,1))*v[r]+'diff(v[\phi],t,1))],
 [\rho*((v[\phi]*('diff(v[r],\phi,1)))/
 (r*sin(\theta))-v[\theta]^2/r+(('diff
 (v[r],\theta,1))*v[\theta])/r+
 'diff(v[r],t,1)+v[r]*('diff(v[r],r,1))
 -v[\phi]^2/r)])=matrix([mu*('diff(
 v[\theta],\theta,2)/r^2+(cos(\theta)
 *('diff(v[\theta],\theta,1)))/(r^2*
 sin(\theta))+'diff(v[\theta],r,2)
 +(2*('diff(v[\theta],r,1)))/r+'diff(
 v[\theta],\phi,2)/(r^2*sin(\theta)^2)
 -(v[\theta]*cos(\theta)^2)/(r^2*sin(
 \theta)^2)-(2*('diff(v[\phi],\phi,1))
 *cos(\theta))/(r^2*sin(\theta)^2)
 -v[\theta]/r^2+(2*('diff(v[r],\theta,1)
 ))/r^2)+F[\theta]-'diff(p,\theta,1)/r],
 [mu*((2*cos(\theta)*('diff(v[\theta],
 \phi,1)))/(r^2*sin(\theta)^2)+(('diff
 (v[\phi],\theta,1))*cos(\theta))/(r^2
 *sin(\theta))+(2*('diff(v[r],\phi,1)))
 /(r^2*sin(\theta))+'diff(v[\phi],
 \phi,2)/(r^2*sin(\theta)^2)-v[\phi]/
 (r^2*sin(\theta)^2)+(2*('diff(v[\phi]
 ,r,1)))/r+'diff(v[\phi],\theta,2)/r^2
 +'diff(v[\phi],r,2))-'diff(p,\phi,1)/
```

[1] Dr Harmann Schlihting, Boundary Layer Theory 12)、V.b.10 Flow near a rotating disk、P.83

```
(r*sin(\theta))+F[\phi]],[mu*(-(2*(
'diff(v[\theta],\theta,1)))/r^2-(2*
v[\theta]*cos(\theta))/(r^2*sin(
\theta))+(('diff(v[r],\theta,1))*
cos(\theta))/(r^2*sin(\theta))-(2*(
'diff(v[\phi],\phi,1)))/(r^2*sin
(\theta))+'diff(v[r],\phi,2)/(r^2*
sin(\theta)^2)+'diff(v[r],\theta,2)/
r^2+'diff(v[r],r,2)+(2*('diff(v[r],
r,1)))/r-(2*v[r])/r^2)+F[r]
-'diff(p,r,1)]);
```

z 方向は、

$$\begin{aligned}&\rho\left(v_z\,\left(\frac{d}{d\,z}\,v_z\right)+\frac{v_\theta\,\left(\frac{d}{d\,\theta}\,v_z\right)}{r}\right.\\&\qquad\left.+\frac{d}{d\,t}\,v_z+v_r\,\left(\frac{d}{d\,r}\,v_z\right)\right)\\&\quad=\mu\left(\frac{d^2}{d\,z^2}\,v_z+\frac{\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,v_z}{r^2}+\frac{d^2}{d\,r^2}\,v_z+\frac{\frac{d}{d\,r}\,v_z}{r}\right)\\&\qquad+F_z-\frac{d}{d\,z}\,p\end{aligned} \tag{8.3.56}$$

```
depends(\zeta,[z]);
depends(f,[\zeta]);
depends(g,[\zeta]);
depends(h,[\zeta]);
depends(P,[\zeta]);
VR1:v[r]=r*\omega*f;
VT1:v[\theta]=r*\omega*g;
VZ1:v[z]=sqrt(\nu*\omega)*h;
P1:p=\rho*\nu*\omega*P;
ZT1:\zeta=z*sqrt(\omega/\nu);
ZT2:solve(ZT1,z)[1];
DZT1:diff(ZT1,z,1);
subst([VR1,VT1,VZ1],MAS2);
ev(%,diff);
MAS3:radcan(subst([DZT1],%)/\omega);
```

ここで v_r, v_θ, v_z, p を下記のように定義し、f, g, h, P は ζ の関数とする。また、外力項：$F_r = F_\theta = F_z = 0$ とする。

$$\begin{aligned}&v_r=f\,\omega\,r,\quad v_\theta=g\,\omega\,r\\&v_z=h\,\sqrt{\nu\,\omega},\quad p=\nu\,\omega\,\rho\,P\end{aligned} \tag{8.3.57}$$

また ζ は下記のように定義する。

$$\zeta=\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}\,z,\quad z=\frac{\zeta}{\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}},\quad \frac{d}{d\,z}\,\zeta=\sqrt{\frac{\omega}{\nu}} \tag{8.3.58}$$

質量保存の方程式：(8.3.53) 式に (8.3.57) 式、(8.3.58) 式を代入し、

$$\frac{\frac{d}{d\,\theta}\,(g\,\omega\,r)}{r}+\frac{d}{d\,r}\,(f\,\omega\,r)+\frac{d}{d\,z}\,\left(h\,\sqrt{\nu\,\omega}\right)+f\,\omega=0$$

上式を整理して、

$$\frac{d}{d\,\zeta}\,h+2\,f=0$$

```
subst([VR1,VT1,VZ1,P1],NAV2);
ev(%,diff);
NAV3:radcan(subst([DZT1,F[r]=0,F[\theta]=0,
 F[z]=0,'diff(zeta,z,2)=0,\mu=\rho*\nu],
 %));
NAV31:lhs(NAV3)[1][1]-rhs(NAV3)[1][1]=0;
NAV32:lhs(NAV3)[2][1]-rhs(NAV3)[2][1]=0;
NAV33:lhs(NAV3)[3][1]-rhs(NAV3)[3][1]=0;
MAS3;
NAV41:expand(NAV31/r/\omega^2/\rho);
NAV42:expand(NAV32/r/\omega^2/\rho);
NAV43:expand(NAV33/sqrt(\nu)/\omega^(3/2)
 /\rho);
MAS5:solve(MAS3,f)[1];
subst([MAS5],NAV41);
NAV51:ev(%,diff);
subst([MAS5],NAV42);
NAV52:ev(%,diff);
```

Navier-Stokes の式：(8.3.54) 式、(8.3.55) 式、(8.3.56) 式に (8.3.57) 式、(8.3.58) 式を代入し、

$$\begin{aligned}&\left(\left(\frac{d}{d\,\zeta}\,f\right)\,h-g^2+f^2\right)\,\omega^2\,r\,\rho\\&\qquad-\left(\frac{d^2}{d\,\zeta^2}\,f\right)\,\omega^2\,r\,\rho=0\\&\left(\left(\frac{d}{d\,\zeta}\,g\right)\,h+2\,f\,g\right)\,\omega^2\,r\,\rho-\left(\frac{d^2}{d\,\zeta^2}\,g\right)\,\omega^2\,r\,\rho=0\\&h\,\left(\frac{d}{d\,\zeta}\,h\right)\,\sqrt{\nu}\,\omega^{\frac{3}{2}}\,\rho\\&\qquad-\sqrt{\nu}\,\sqrt{\omega}\,\left(\left(\frac{d^2}{d\,\zeta^2}\,h\right)\,\omega\,\rho-\omega\,\rho\,\left(\frac{d}{d\,\zeta}\,P\right)\right)=0\end{aligned}$$

上式を整理して、

$$\begin{aligned}&\frac{d}{d\,\zeta}\,h+2\,f=0\\&\left(\frac{d}{d\,\zeta}\,f\right)\,h-g^2-\frac{d^2}{d\,\zeta^2}\,f+f^2=0\\&\left(\frac{d}{d\,\zeta}\,g\right)\,h-\frac{d^2}{d\,\zeta^2}\,g+2\,f\,g=0\\&\frac{d}{d\,\zeta}\,P-\frac{d^2}{d\,\zeta^2}\,h+h\,\left(\frac{d}{d\,\zeta}\,h\right)=0\end{aligned} \tag{8.3.59}$$

上式に下記の関係を代入し、f を消去して、

$$f=-\frac{\frac{d}{d\zeta}h}{2}$$

Runge-Kutta 法に適用できる式にまとめると、

$$\frac{d^3}{d\zeta^3}h=h\left(\frac{d^2}{d\zeta^2}h\right)-\frac{\left(\frac{d}{d\zeta}h\right)^2}{2}+2g^2$$

$$\frac{d^2}{d\zeta^2}g=\left(\frac{d}{d\zeta}g\right)h-g\left(\frac{d}{d\zeta}h\right)$$

```
RK1:expand(solve(NAV51,'diff(h,zeta,3))
 [1]);
RK2:solve(NAV52,'diff(g,zeta,2))[1];
DH1:'diff(h,zeta,1)=h1;
DH11:'diff(h,zeta,2)=h2;
DH2:'diff(h1,zeta,1)=h2;
'diff(h,zeta,3)=h3;
'diff(h2,zeta,1)=h3;
DG1:'diff(g,zeta,1)=g1;
RK11:subst([DH1,DH11,DH2,G1],RK1);
RK21:subst([DH1,DH2,DG1],RK2);
DH1;
DH2;
DG1;
RK3:solve(MAS5,f)[1];
RK4:solve(NAV43,'diff(P,zeta,1))[1];
Tmax:50;
Tmin:0;
N:1000;
dT:(Tmax-Tmin)/float(N);
sol:rk([H*H2-H1^2/2+2*G^2,G1*H-G*H1,H2,H1,
 G1],[H2,G1,H1,H,G],
 [-1.020465,-0.615922,0,0,1],[t,Tmin,Tmax,
 dT]);
listH:[[sol[1][1],sol[1][5]]];
for J:2 thru N do(listH:append(listH,
  [[sol[J][1],sol[J][5]]]));
listG:[[sol[1][1],sol[1][6]]];
for J:2 thru N do(listG:append(listG,
  [[sol[J][1],sol[J][6]]]));
listddF:[[sol[1][1],sol[1][4]]];
for J:2 thru N do(listddF:append(listddF,
  [[sol[J][1],sol[J][4]]]));
plot2d([[discrete,listH],[discrete,listG]
 ,[discrete,listddF]],[x,0,10],[y,-1,1]);
 plot2d([[discrete,listH],[discrete,listG]
 ,[discrete,listddF]],[x,0,50],
 [y,-0.0001,0.0001]);
```

```
listF:[[sol[1][1],-sol[1][4]/2]];
for J:2 thru N do(listF:append(listF,
  [[sol[J][1],-sol[J][4]/2]]));
plot2d([[discrete,listF],[discrete,listG]
 ,[discrete,listH]],[x,0,10],
 [y,-1.0,1.0]);
```

上式を Runge-Kutta 法で解く。境界条件として、$z=0$ では、$v_r=0, v_\theta=r\,\omega, v_z=0$ で、これに対応して $\zeta=0$ では、$f=0, h=0, g=1, P=0$ である。また、$z\to\infty$ では、$v_r=0, v_\theta=0$ で、これに対応して $\zeta\to\infty$ では、$f=0, g=0$ である。初期条件として、上記の $\zeta=0$ の境界条件を与え、$\zeta\to\infty$ の境界条件を満足するように $\frac{d^2}{d\zeta^2}h$ と $\frac{d}{d\zeta}g$ の初期値を選ぶ。

```
listFG:[[-sol[1][4]/2,sol[1][6]]];
for J:2 thru N do(listFG:append(listFG,
  [[-sol[J][4]/2,sol[J][6]]]));
plot2d([[discrete,listFG],
[discrete,[[0,0],[-sol[6][4]/2,
sol[6][6]]]],
[discrete,[[0,0],[-sol[11][4]/2,
sol[11][6]]]],[discrete,[[0,0],
[-sol[16][4]/2,sol[16][6]]]],
[discrete,[[0,0],[-sol[21][4]/2,
sol[21][6]]]],[discrete,[[0,0],
[-sol[26][4]/2,sol[26][6]]]]],
[x,0,1],[y,0,1]);
,[discrete,[[0,0],[-sol[21][4]/2,
sol[21][6]]]]
DVR1Z:'diff(lhs(VR1),z,1)
 =diff(rhs(VR1),z,1);
DVT1Z:'diff(lhs(VT1),z,1)
 =diff(rhs(VT1),z,1);
tan(\phi[0])=-('diff(v[r],z,1))
 /('diff(v[theta],z,1));
subst([DVR1Z,DVT1Z],%);
\phi[0]=-float(180/%pi*atan(-sol[1][2]/2
 /sol[1][3]));
VR1/r/\omega;
VT1/r/\omega;
listH2:[[sol[1][1],sol[1][2]]];
for J:2 thru N do(listH2:append(listH2,
  [[sol[J][1],sol[J][2]]]));
listG1:[[sol[1][1],sol[1][3]]];
for J:2 thru N do(listG1:append(listG1,
  [[sol[J][1],sol[J][3]]]));
listS:[[sol[1][1],180/%pi/100*atan
 (-sol[1][2]/2/sol[1][3])]];
```

```
for J:2 thru N/2 do(listS:append(listS,
   [[sol[J][1],180/%pi/100*atan(
  -sol[J][2]/2/sol[J][3])]]));
plot2d([[discrete,listH2],
  [discrete,listG1],[discrete,listS]],
  [x,0,5],[y,-1.0,1.0]);
```

f,g,h の結果、即ち流速を下記に示す。ここで、

$$\frac{v_r}{\omega\, r} = f, \quad \frac{v_\theta}{\omega\, r} = g$$

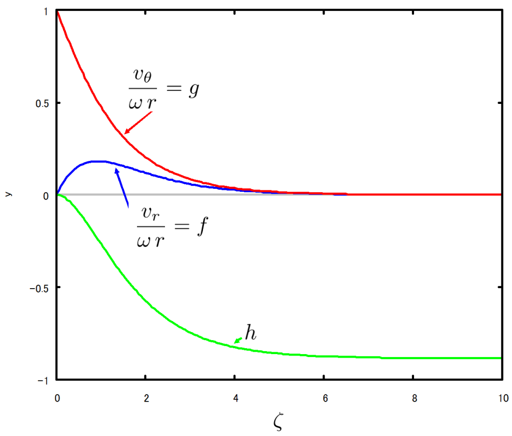


図 8.3.19: 回転円盤による流れ

円盤表面の流向：ϕ_0 は、剪断応力の方向から得られ、

$$\tan(\phi_0) = -\frac{\frac{d}{d\,z}\,v_r}{\frac{d}{d\,z}\,v_\theta} = -\frac{\frac{d}{d\,\zeta}\,f}{\frac{d}{d\,\zeta}\,g}$$

$\frac{d}{d\,\zeta}\,f, \frac{d}{d\,\zeta}\,g$ の初期値から、

$$\phi_0 = 39.6°$$

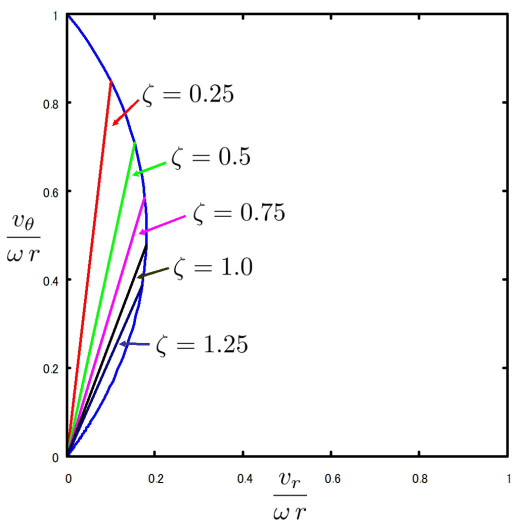


図 8.3.20: 回転円盤による流向

```
subst([\zeta=5.4],ZT1);
solve(%,z)[1];
float(subst([z=\delta],%));
SG1:\sigma=\mu*'diff(v[\theta],z,1);
subst([VT1],%);
ev(%,diff);
subst([DZT1],%);
subst(['diff(g,zeta,1)=0.615921,\mu=\nu
  *\rho],%);
SG2:float(radcan(%));
M='integrate(rhs(SG2)*2*%pi*r^2,r,0,R);
ev(%,integrate);
M=0.308*%pi*sqrt(nu)*omega^(3/2)*rho*R^4;
dQ=2*%pi*R*v[r]*dz;
subst([VR1,r=R],%);
DQ1:dQ=rhs(%)/dz/rhs(DZT1);
Q1:0;
for J:2 thru N do(Q1:Q1-(sol[J-1][4]/2
  +sol[J][4]/2)/2*dT);
Q1;
Q=0.442*radcan(rhs(DQ1)/f);
```

円盤の接線応力：$\tau_{\theta z}$ は (8.1.14) 式から、

$$\tau_{\theta z} = \mu\left(\frac{\frac{d}{d\,\theta}\,v_z + r\,\left(\frac{d}{d\,z}\,v_\theta\right)}{r}\right)$$

軸対称から $\frac{d}{d\,\theta}\,v_z = 0$ と (8.3.57) 式から、

$$\begin{aligned}\tau_{\theta z} =& \mu\left(\frac{d}{d\,z}\,v_\theta\right) = \mu\left(\frac{d}{d\,z}\,(g\,\omega\,r)\right)\\ =& \left(\frac{d}{d\,\zeta}\,g\right)\,\mu\,\omega\,\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}\,r\end{aligned}$$

$\frac{d}{d\,\zeta}\,g$ の初期値から、

$$\tau_{\theta z} = 0.61592100134263\,\sqrt{\nu}\,\omega^{\frac{3}{2}}\,r\,\rho$$

円盤半径：R の片面に作用するモーメント：M は、

$$\begin{aligned}M =& 2\,\pi\int_0^R \tau_{\theta z}\,r^2 dr\\ =& 2\times 0.6159\,\pi\,\rho\,\sqrt{\nu}\,\omega^{\frac{3}{2}}\int_0^R r^3 dr\\ M =& 0.308\,\pi\,\sqrt{\nu}\,\omega^{\frac{3}{2}}\,\rho\,R^4\end{aligned}$$

半径：R において外に出て行く流量：Q は、高さ：dz 間で、

$$dQ = 2\,\pi\,dz\,v_r\,R = 2\,\pi\,dz\,f\,\omega\,R^2 = \frac{2\,\pi\,f\,\omega\,R^2}{\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}}\,d\zeta$$

計算結果の f を数値積分すると、0.44212872822251 が得られ、

$$Q = 0.884\,\pi\,\sqrt{\nu}\,\sqrt{\omega}\,R^2$$

8.4 レイノルズ数の小さい流れ

8.4.1 潤滑の理論

二つの壁の間に流体の薄い層があるとき、お互いに容易に滑ることが出来る。また、ある条件では壁間の流体層に高い圧力が生じる。狭い間隔で二枚の壁があり、x 軸上にある下の壁は一定速度 : U で x 方向に移動し、上の壁は静止しているとする。上の静止壁は長さ : L、溝の幅:h とし、$x=0$ で溝の幅 : h_1、$x=L$ で溝の幅 : h_2、溝の勾配 : α とする。二次元座標軸の各速度コンポーネントを u, v、外力 : X、とし、圧力 : p、密度 : ρ、粘性係数 : μ とする。

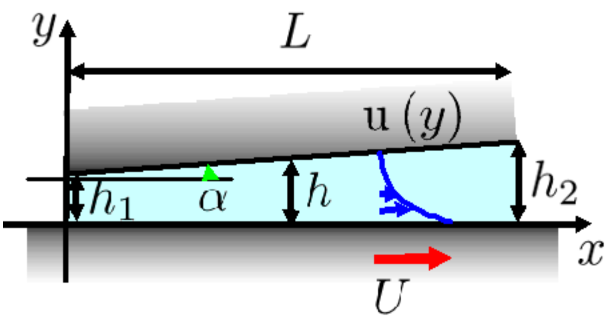


図 8.4.1: 潤滑の理論

```
/* 潤滑 */
kill(all);
MAS2:'diff(v[z],z,1)+'diff(v[theta],theta
 ,1)/r+'diff(v[r],r,1)+v[r]/r=0;
NAV2:matrix([rho*(('diff(v[r],z,1))*v[z]
 -v[theta]^2/r+(('diff(v[r],theta,1))
 *v[theta])/r+'diff(v[r],t,1)+v[r]
 *('diff(v[r],r,1)))],[rho*((
 'diff(v[theta],z,1))*v[z]+(v[theta]
 *('diff(v[theta],theta,1)))/r+'diff(
 v[theta],t,1)+v[r]*('diff(v[theta],r,1))
 +(v[r]*v[theta])/r)],[rho*(v[z]*('diff
 (v[z],z,1))+(v[theta]*('diff(v[z],
 theta,1)))/r+'diff(v[z],t,1)+v[r]*(
 'diff(v[z],r,1)))])=matrix([mu*(-(2*(
 'diff(v[theta],theta,1)))/r^2+'diff(
 v[r],z,2)+'diff(v[r],theta,2)/r^2+
 'diff(v[r],r,2)+'diff(v[r],r,1)/r
 -v[r]/r^2)+F[r]-'diff(p,r,1)],[mu*
 ('diff(v[theta],z,2)+'diff(v[theta],
  theta,2)/r^2+'diff(v[theta],r,2)
 +'diff(v[theta],r,1)/r-v[theta]/r^2
 +(2*('diff(v[r],theta,1)))/r^2)
 +F[theta]-'diff(p,theta,1)/r],[mu*
 ('diff(v[z],z,2)+'diff(v[z],theta,2)
 /r^2+'diff(v[z],r,2)+'diff(v[z],r,1)
 /r)+F[z]-'diff(p,z,1)]);
```

二次元の質量保存の方程式は (8.1.2) 式から、

$$\frac{d}{d\,y}\,v+\frac{d}{d\,x}\,u=0$$

x 軸方向の Navier-Stokes の式は (8.1.9) 式から、

$$\rho\left(\left(\frac{d}{d\,y}\,u\right)\,v+u\,\left(\frac{d}{d\,x}\,u\right)+\frac{d}{d\,t}\,u\right) = X+\mu\left(\frac{d^2}{d\,y^2}\,u+\frac{d^2}{d\,x^2}\,u\right)-\frac{d}{d\,x}\,p$$

```
lhs(NAV1)[1][1]=rhs(NAV1)[1][1];
subst([v=0,w=0,X=0,u=u(y),p=p(x)],%);
NAV3:ev(%,diff);
UY1:ode2(NAV3,u(y),y);
UY11:subst([u(y)=U,y=0],UY1);
UY12:subst([u(y)=0,y=h],UY1);
solve([UY11,UY12],[%k1,%k2])[1];
UY2:factor((subst([%],UY1)));
```

$X=0$ で、間隔が狭いため $v=0$ とし、u は y 方向のみ変化するとして、$u=u(y)$ となる。これを上式に代入し、定常状態を求めるので、時間変化はなく、$\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{u}(y)=0, \frac{d}{d\,t}\,\mathrm{u}(y)=0$ であるから、

$$0=\mu\left(\frac{d^2}{d\,y^2}\,\mathrm{u}\,(y)\right)-\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{p}\,(x)$$

上式を ode2 関数で解いて、

$$\mathrm{u}\,(y)=\frac{\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{p}\,(x)\right)\,y^2}{2\,\mu}+\%k2\,y+\%k1 \tag{8.4.1}$$

境界条件として、$y=0$ で $u(y)=U$、$y=h$ で $u(y)=0$ とすると、$\%k1, \%k2$ は、

$$[\%k1=U,\quad \%k2=-\frac{2\,\mu\,U+h^2\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{p}\,(x)\right)}{2\,h\,\mu}]$$

上式を (8.4.1) 式に代入し、壁間の流速分布は、

$$\mathrm{u}\,(y)=-\frac{(y-h)\,\left(2\,\mu\,U-h\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{p}\,(x)\right)\,y\right)}{2\,h\,\mu} \tag{8.4.2}$$

```
Q1:Q='integrate(u(y),y,0,h);
subst([UY2],%);
Q2:expand(ev(%,integrate));
assume(L>0);
assume(h[1]>0);
assume(h[2]>0);
assume(\alpha>0);
assume(x>0);
PX1:expand(solve(Q2,'diff(p(x),x,1))[1]);
```

```
H1:h=h[1]+\alpha*x;
PX11:subst([H1],PX1);
PX2:p=integrate(rhs(PX11),x,0,x)+%c1;
PX21:p[1]=factor(subst([x=0],rhs(PX2)));
PX22:p-p[1]=rhs(PX2)-%c1;
H2:h[2]=h[1]+\alpha*x;
H21:solve(%,x)[1];
p{2]-p[1]=subst([H21],rhs(PX22));
PX3:factor(%);
QU1:num(rhs(PX3))=0;
Q3:solve(%,Q)[1];
```

流速：$u(y)$ を y 軸方向に積分し、流量：Q を求める。(8.4.2) 式を次式に代入し、積分を実行し、

$$
\begin{aligned}
Q &= \int_0^h \mathrm{u}(y)\, dy \\
&= -\frac{1}{2\,h\,\mu} \int_0^h (y-h) \\
&\quad \times \left(2\,\mu\,U - h\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{p}(x)\right) y\right) dy \\
&= \frac{h\,U}{2} - \frac{h^3\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{p}(x)\right)}{12\,\mu}
\end{aligned}
\tag{8.4.3}
$$

上式の $\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{p}(x)$ を求めると、

$$\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{p}(x) = \frac{6\,\mu\,U}{h^2} - \frac{12\,\mu\,Q}{h^3}$$

壁の間隔は下記のように表現でき、

$$h = \alpha\,x + h_1$$

上式を代入し、

$$\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{p}(x) = \frac{6\,\mu\,U}{(\alpha\,x+h_1)^2} - \frac{12\,\mu\,Q}{(\alpha\,x+h_1)^3} \tag{8.4.4}$$

上式を積分すると、

$$
\begin{aligned}
p &= \int_0^x \frac{d}{d\,x}\,\mathrm{p}(x)\; dx \\
&= -\frac{(6\,\alpha\,\mu\,x + 6\,h_1\,\mu)\,U - 6\,\mu\,Q}{\alpha^3\,x^2 + 2\,h_1\,\alpha^2\,x + h_1^2\,\alpha} \\
&\quad + \frac{6\,h_1\,\mu\,U - 6\,\mu\,Q}{h_1^2\,\alpha} + \%c1
\end{aligned}
$$

$x=0$ で $p=p_1$ とすると、$\%c1$ は下記となる。

$$p_1 = \%c1$$

この関係を上式に代入し、

$$
\begin{aligned}
p - p_1 =& \frac{6\,h_1\,\mu\,U - 6\,\mu\,Q}{h_1^2\,\alpha} \\
&- \frac{(6\,\alpha\,\mu\,x + 6\,h_1\,\mu)\,U - 6\,\mu\,Q}{\alpha^3\,x^2 + 2\,h_1\,\alpha^2\,x + h_1^2\,\alpha}
\end{aligned}
\tag{8.4.5}
$$

$x=L$ では、$h=h_2$ の下記の関係があるから、

$$h_2 = \alpha\,x + h_1, \quad x = \frac{h_2 - h_1}{\alpha} \tag{8.4.6}$$

上式の関係を (8.4.5) 式に代入し、$p=p_2$ として、整理すると、

$$p_2 - p_1 = \frac{6\,(h_2-h_1)\,\mu\,(h_1\,h_2\,U - h_2\,Q - h_1\,Q)}{h_1^2\,h_2^2\,\alpha}$$

上の壁は流体の中に浸されており、壁間の両端の圧力は近似的に等しく、$p_2=p_1$ である。このとき、下記の関係が成り立ち、

$$6\,(h_2-h_1)\,\mu\,(h_1\,h_2\,U - h_2\,Q - h_1\,Q) = 0$$

上式から流量：Q を求めると、

$$Q = \frac{h_1\,h_2\,U}{h_2+h_1} \tag{8.4.7}$$

```
PX3:factor(subst([Q3],PX22));
P=integrate(rhs(PX3),x,0,x);
PX31:%/6/U*\alpha^2/\mu;
factor(subst([H21],%));
PX32:partfrac(%,log(h[2]));
PX32N:num(rhs(PX32));
PX32D:denom(rhs(PX32));
PX32N1:first(PX32N);
PX32N2:first(PX32N-PX32N1);
PX32N3:PX32N-PX32N1-PX32N2;
PX32N11:factor(PX32N1/PX32D);
PX32N21:factor(PX32N2/PX32D);
PX32N31:factor(PX32N3/PX32D);
PX32N11+PX32N21;
factor(%);
PX331:logcontract(%);
lhs(PX31)=PX331+PX32N31;
PX4:%*\mu*U*6/\alpha^2;
```

Q の関係式：(8.4.7) 式を (8.4.5) 式に代入し、

$$p - p_1 = \frac{6\,\mu\,x\,(\alpha\,x - h_2 + h_1)\,U}{(h_2+h_1)\,(\alpha\,x+h_1)^2}$$

上式を積分して、流体から受ける全垂直力、即ち壁のになう荷重：P を求めると、

$$
\begin{aligned}
P &= \int_0^x p - p_1 dx \\
&= \int_0^x \frac{6\,\mu\,x\,(\alpha\,x - h_2 + h_1)\,U}{(h_2+h_1)\,(\alpha\,x+h_1)^2} dx
\end{aligned}
$$

上式の積分を実行して、(8.4.6) 式を代入して、$x=0 \rightarrow L$ 間の荷重：P は、

$$
\begin{aligned}
\frac{\alpha^2\,P}{6\,\mu\,U} =& -\frac{h_2\log(h_2)}{h_2+h_1} - \frac{h_1\log(h_2)}{h_2+h_1} + \frac{h_2\log(h_1)}{h_2+h_1} \\
&+ \frac{h_1\log(h_1)}{h_2+h_1} + \frac{2\,h_2}{h_2+h_1} - \frac{2\,h_1}{h_2+h_1} \\
=& \log\left(\frac{h_1}{h_2}\right) + \frac{2\,(h_2-h_1)}{h_2+h_1}
\end{aligned}
$$

上式から、壁のになう荷重：P は、

$$P=\frac{6\,\left(\log\left(\frac{h_1}{h_2}\right)+\frac{2\,(h_2-h_1)}{h_2+h_1}\right)\,\mu\,U}{\alpha^2} \tag{8.4.8}$$

```
diff(UY2,y,1);
lhs(%)=subst([y=0],rhs(%));
\tau=\mu*rhs(%);
factor(subst([PX1,H1],%));
expand(%);
WX3:W=integrate(rhs(%),x,0,x);
subst([Q3,H21],%)/\mu/U*\alpha/4;
WX31:factor(%);
WX32:partfrac(%,log(h[2]));
WX32N:num(rhs(WX32));
WX32D:denom(rhs(WX32));
WX32N1:first(WX32N);
WX32N2:first(WX32N-WX32N1);
WX32N3:WX32N-WX32N1-WX32N2;
WX32N11:factor(WX32N1/WX32D);
WX32N21:factor(WX32N2/WX32D);
WX32N31:factor(WX32N3/WX32D);
WX32N11+WX32N21;
factor(%);
WX331:logcontract(%);
lhs(WX31)=WX331+WX32N31;
WX4:%*4*\mu*U/\alpha;
```

下の平面が流体から受ける剪断力：τ は、$\tau=\mu\,\frac{d}{d\,y}\,\mathrm{u}$ である。そこで、流速：$u(y)$ を y で微分して、

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\,y}\,\mathrm{u}\,(y)=&\frac{\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{p}\,(x)\right)\,(y-h)}{2\,\mu}\\&-\frac{2\,\mu\,U-h\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{p}\,(x)\right)\,y}{2\,h\,\mu}\end{aligned}$$

上式で、下の平面では $y=0$ であるから、上式にこれを代入し、

$$\frac{d}{d\,y}\,\mathrm{u}\,(y)=-\frac{U}{h}-\frac{h\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{p}\,(x)\right)}{2\,\mu}$$

上式から、下の平面が流体から受ける剪断力：τ は、次式となり、(8.4.4) 式を代入し、

$$\begin{aligned}\tau=&\mu\,\frac{d}{d\,y}\,\mathrm{u}\,(y)=\mu\,\left(-\frac{U}{h}-\frac{h\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{p}\,(x)\right)}{2\,\mu}\right)\\=&-\frac{2\,\mu\,(2\,\alpha\,x\,U+2\,h_1\,U-3\,Q)}{(\alpha\,x+h_1)^2}\end{aligned}$$

上式を積分して、$x=0\rightarrow L$ 間の下の面に作用する抵抗:W は、

$$\begin{aligned}W=&\int_0^x\tau\,dx=\int_0^x\mu\,\frac{d}{d\,y}\,\mathrm{u}\,(y)\;dx\\=&-\frac{4\,h_1\,\mu\log(\alpha\,x+h_1)\,U}{\alpha^2\,x+h_1\,\alpha}\\&-\frac{4\,\mu\,x\log(\alpha\,x+h_1)\,U}{\alpha\,x+h_1}+\frac{4\log(h_1)\,\mu\,U}{\alpha}\\&-\frac{6\,\mu\,Q}{\alpha^2\,x+h_1\,\alpha}+\frac{6\,\mu\,Q}{h_1\,\alpha}\end{aligned}$$

上式に Q の関係式：(8.4.7) 式を代入し、更に (8.4.6) 式を代入し、$x=0\rightarrow L$ 間の下の面に作用する抵抗:W は、

$$\begin{aligned}\frac{\alpha\,W}{4\,\mu\,U}=&-\frac{2\,h_2\log(h_2)}{2\,h_2+2\,h_1}-\frac{2\,h_1\log(h_2)}{2\,h_2+2\,h_1}\\&+\frac{2\,h_2\log(h_1)}{2\,h_2+2\,h_1}+\frac{2\,h_1\log(h_1)}{2\,h_2+2\,h_1}\\&+\frac{3\,h_2}{2\,h_2+2\,h_1}-\frac{3\,h_1}{2\,h_2+2\,h_1}\\=&\log\left(\frac{h_1}{h_2}\right)+\frac{3\,(h_2-h_1)}{2\,(h_2+h_1)}\end{aligned}$$

上式から、下の面に作用する抵抗:W は、

$$W=\frac{4\,\mu\,U}{\alpha}\left(\log\left(\frac{h_1}{h_2}\right)+\frac{3\,(h_2-h_1)}{2\,(h_2+h_1)}\right) \tag{8.4.9}$$

```
H3:k=h[1]/h[2];
H31:h[2]=subst([x=L],rhs(H1));
H32:solve([H3,H31],[h[1],h[2]])[1];
solve(H31,\alpha)[1];
H33:factor(subst([h[1]=k*h[2]],%));
subst([H32],PX4);
%/6/\mu/U*\alpha^2;
PX5:partfrac(%,log(k));
PX52N:num(rhs(PX5));
PX52D:denom(rhs(PX5));
PX52N1:first(PX52N);
PX52N2:PX52N-PX52N1;
PX51:lhs(PX5)=PX52N1/PX52D+factor(PX52N2
 /PX52D);
PX52:%*6*\mu*U/\alpha^2;
PXK1:subst([H33],%);
PXK11:%/6/\mu/L^2/U*h[2]^2;
PXK12:diff(rhs(PXK11),k,1);
subst([k=t],%);
K1:k=find_root(%,t,2.0,2.5);
K11:[[rhs(K1),-0.01],[rhs(K1),0.04]];
subst([K1],PXK1);
plot2d([rhs(PXK11),[discrete,K11]],
 [k,0.5,10],[y,-0.05,0.05],[x,0,3]);
```

次に示す k を導入する。

$$k=\frac{h_1}{h_2}$$

h_1, h_2 を k で表すと、次式と上式の k の定義式から、

$$h_2=\alpha L+h_1$$

$$[h_1=-\frac{\alpha\,k\,L}{k-1}, h_2=-\frac{\alpha\,L}{k-1}]$$

上式を (8.4.8) 式に代入し、

$$\begin{aligned}\frac{\alpha^2\,P}{6\,\mu\,U}=&\frac{2\left(\frac{\alpha\,k\,L}{k-1}-\frac{\alpha\,L}{k-1}\right)}{-\frac{\alpha\,k\,L}{k-1}-\frac{\alpha\,L}{k-1}}+\log(k)\\=&\frac{(k+1)\,\log(k)-2\,k+2}{k+1}\\=&\log(k)-\frac{2\,(k-1)}{k+1}\end{aligned}$$

上式から、

$$P=\frac{6\left(\log(k)-\frac{2\,(k-1)}{k+1}\right)\,\mu\,U}{\alpha^2}$$

ここで、α も下記のように k の関数であるから、

$$\alpha=\frac{h_2-h_1}{L},\quad \alpha=-\frac{h_2\,(k-1)}{L}$$

上式を代入し、P は k の関数で表現できた。

$$P=\frac{6\left(\log(k)-\frac{2\,(k-1)}{k+1}\right)\,\mu\,L^2\,U}{h_2^2\,(k-1)^2} \tag{8.4.10}$$

次式のように変換し、

$$\frac{h_2^2\,P}{6\,\mu\,L^2\,U}=\frac{\log(k)-\frac{2\,(k-1)}{k+1}}{(k-1)^2}$$

最大点を求めるため、右辺を微分して、零とおき、

$$\begin{aligned}\frac{h_2^2}{6\,\mu\,L^2\,U}\,\frac{d}{d\,k}\,P=&\frac{-\frac{2}{k+1}+\frac{2\,(k-1)}{(k+1)^2}+\frac{1}{k}}{(k-1)^2}\\&-\frac{2\left(\log(k)-\frac{2\,(k-1)}{k+1}\right)}{(k-1)^3}=0\end{aligned}$$

壁のになう荷重 : P が最大となる条件は、上式を Maxima の find-root 関数を使って数値解析で k を求めると、

$$k=2.18870479637006\approx 2.2$$

上式を (8.4.10) 式に代入し、その平面のになう最大荷重 : P は、

$$P=\frac{0.16024314133842\,\mu\,L^2\,U}{h_2^2}\approx\frac{0.16\,\mu\,L^2\,U}{h_2^2}$$

平面のになう荷重 : P の k に対する特性を下図に示す。下図から、$k=h_1/h_2>1$ で $P>0$ となり、$k\approx 2.2$ で最大荷重となっている。

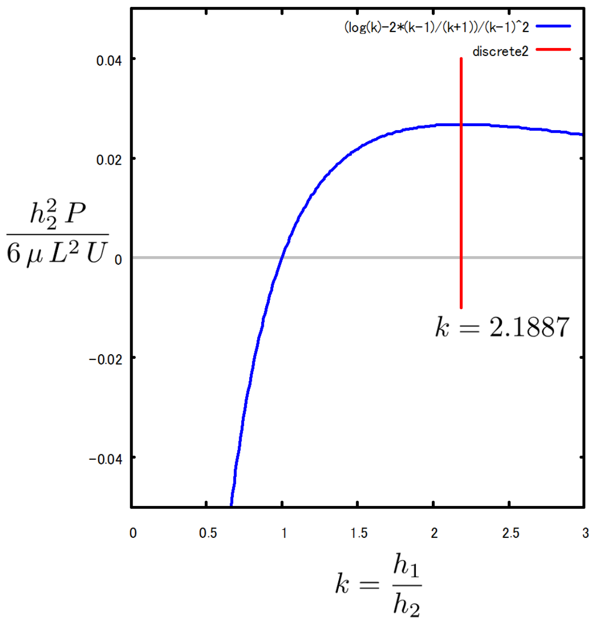


図 8.4.2: 平面のになう荷重 : P の k に対する特性

8.4.2 三次元軸対称の Stokes 流れ

流速の遅い流れの三次元軸対称物体まわりの流れについて調べる。流速が非常に遅いため、方程式の慣性項が無視できるものとする。座標系として $\theta-\phi-r$ の三次元極座標を用い z 軸対称とする。軸対称であるため、各速度コンポーネントを v_θ, v_r、渦度のコンポーネントは ω_ϕ のみである。圧力 : p、密度 : ρ、粘性係数 : μ とする。

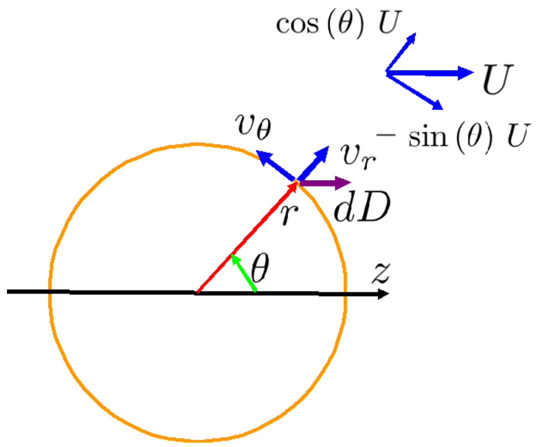


図 8.4.3: 三次元軸対称の Stokes 流れ

軸対称の三次元極座標における渦度と流速の関係は、(8.1.55) 式から、$v_\phi=0$、$\omega_\theta=0, \omega_r=0$、$\phi$ による微分を零として、次式が得られる。

$$\omega_\phi = \frac{d}{d\,r}\,v_\theta + \frac{v_\theta}{r} - \frac{\frac{d}{d\,\theta}\,v_r}{r} \tag{8.4.11}$$

三次元極座標における渦度方程式は、(8.1.54) 式で、流速が非常に遅いため、方程式の慣性項が無視できるものとして、左辺を零とし、軸対称から、$\omega_\theta=0, \omega_r=0$、$\phi$ による微分を零として、次式が得られる。

$$\begin{aligned}&\frac{\left(\frac{d}{d\,\theta}\,\omega_\phi\right)\cos(\theta)}{r^2\sin(\theta)} - \frac{\omega_\phi}{r^2\sin(\theta)^2} + \frac{2\left(\frac{d}{d\,r}\,\omega_\phi\right)}{r}\\ &+\frac{\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,\omega_\phi}{r^2} + \frac{d^2}{d\,r^2}\,\omega_\phi = 0\end{aligned} \tag{8.4.12}$$

三次元極座標における Navier-Stokes の式は (8.1.21) 式で、流速が非常に遅いため、方程式の慣性項が無視できるものとして、左辺を零とし、軸対称から $v_\phi=0$、$\omega_\theta=0, \omega_r=0$、$\phi$ による微分を零として、次式が得られる。

流れ関数 : Ψ を導入する。三次元極座標では、6.1.3 流れ関数の極座標・円柱座標表示　軸対称の極座標表記 (6.1.20) 式から下記となる。

$$v_r = \frac{\frac{d}{d\,\theta}\,\Psi}{r^2\sin(\theta)}, \quad v_\theta = -\frac{\frac{d}{d\,r}\,\Psi}{r\sin(\theta)} \tag{8.4.14}$$

```
kill(all);
load("vect")
depends(\Psi,[r,\theta]);
depends(f,[r]);
depends(g,[r]);
depends(p,[r,\theta]);
WP1:omega[phi]='diff(v[theta],r,1)
 +v[theta]/r-'diff(v[r],theta,1)/r;
OMP2:(('diff(omega[phi],theta,1))*cos(
 theta))/(r^2*sin(theta))-omega[phi]/(r^2
*sin(theta)^2)+(2*('diff(omega[phi],r,1)))
 /r+'diff(omega[phi],theta,2)/r^2+'diff(
 omega[phi],r,2)=0;
NV1:matrix([mu*('diff(v[theta],theta,2)
 /r^2+(cos(theta)*('diff(v[theta],theta,1
 )))/(r^2*sin(theta))+'diff(v[theta],r,2)
 +(2*('diff(v[theta],r,1)))/r-(v[theta]*
 cos(theta)^2)/(r^2*sin(theta)^2)-v[theta]
 /r^2+(2*('diff(v[r],theta,1)))/r^2)-'diff
 (p,theta,1)/r],[0],[mu*(-(2*('diff(
 v[theta],theta,1)))/r^2-(2*v[theta]*cos(
 theta))/(r^2*sin(theta))+(('diff(v[r],
 theta,1))*cos(theta))/(r^2*sin(theta))
 +'diff(v[r],theta,2)/r^2+'diff(v[r],r,2)
 +(2*('diff(v[r],r,1)))/r-(2*v[r])/r^2)
 -'diff(p,r,1)])=0;
VR1:v[r]=diff(\Psi,\theta,1)/r^2/
 sin(\theta);
VT1:v[\theta]=-diff(\Psi,r,1)/r/
 sin(\theta);
subst([VR1,VT1],WP1);
ev(%,diff);
WP11:factor(%);
```

$$\begin{pmatrix} \mu\left(\frac{\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,v_\theta}{r^2} + \frac{\cos(\theta)\left(\frac{d}{d\,\theta}\,v_\theta\right)}{r^2\sin(\theta)} + \frac{d^2}{d\,r^2}\,v_\theta + \frac{2\left(\frac{d}{d\,r}\,v_\theta\right)}{r} - \frac{v_\theta\cos(\theta)^2}{r^2\sin(\theta)^2} - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{2\left(\frac{d}{d\,\theta}\,v_r\right)}{r^2}\right) - \frac{\frac{d}{d\,\theta}\,p}{r} \\ 0 \\ \mu\left(-\frac{2\left(\frac{d}{d\,\theta}\,v_\theta\right)}{r^2} - \frac{2\,v_\theta\cos(\theta)}{r^2\sin(\theta)} + \frac{\left(\frac{d}{d\,\theta}\,v_r\right)\cos(\theta)}{r^2\sin(\theta)} + \frac{\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,v_r}{r^2} + \frac{d^2}{d\,r^2}\,v_r + \frac{2\left(\frac{d}{d\,r}\,v_r\right)}{r} - \frac{2\,v_r}{r^2}\right) - \frac{d}{d\,r}\,p \end{pmatrix} = 0 \tag{8.4.13}$$

渦度と流速の関係式：(8.4.11) 式に (8.4.14) 式を代入し、

$$\omega_{\phi}=-\frac{\left(\frac{d^2}{d\,r^2}\,\Psi\right)\,r^2\sin\left(\theta\right)+\left(\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,\Psi\right)\,\sin\left(\theta\right)-\left(\frac{d}{d\,\theta}\,\Psi\right)\,\cos\left(\theta\right)}{r^3\sin\left(\theta\right)^2} \tag{8.4.15}$$

```
PS1:\Psi=U*f*sin(\theta)^2;
subst([PS1],VR1);
VR2:ev(%,diff);
subst([PS1],VT1);
VT2:ev(%,diff);
subst([PS1],WP11);
ev(%,diff);
WP2:factor(%);
G1:g=('diff(f,r,2))-2*f/r^2;
G11:solve(%,'diff(f,r,2))[1];
WP21:subst([G11],WP2);
subst([WP21],OMP2);
ev(%,diff);
trigsimp(%);
G2:('diff(g,r,2))*r^2-2*g=0;
G21:ode2(G2,g,r);
rhs(G1)-lhs(G1)=0;
subst([G21],%);
F2:ode2(%,f,r);
F21:f=A*r^4+B*r^2+C*r+D/r;
```

流れ関数：Ψ を次式のように変数分離型とし、f は r の関数とする。

$$\Psi=f\sin\left(\theta\right)^2\,U \tag{8.4.16}$$

上式を (8.4.14) 式に代入し、

$$v_r=\frac{2\,f\cos\left(\theta\right)\,U}{r^2},\quad v_{\theta}=-\frac{\left(\frac{d}{d\,r}\,f\right)\,\sin\left(\theta\right)\,U}{r} \tag{8.4.17}$$

上式を渦度と流速の関係式：(8.4.15) 式に代入し、

$$\omega_{\phi}=-\frac{\left(\left(\frac{d^2}{d\,r^2}\,f\right)\,r^2-2\,f\right)\,\sin\left(\theta\right)\,U}{r^3} \tag{8.4.18}$$

g を下記のように置き、

$$g=\frac{d^2}{d\,r^2}\,f-\frac{2\,f}{r^2} \tag{8.4.19}$$

渦度と流速の関係式：(8.4.18) 式は、

$$\omega_{\phi}=-\frac{g\sin\left(\theta\right)\,U}{r} \tag{8.4.20}$$

上式を渦度方程式：(8.4.12) 式に代入し、整理すると、

$$-\frac{\left(\left(\frac{d^2}{d\,r^2}\,g\right)\,r^2-2\,g\right)\,\sin\left(\theta\right)\,U}{r^3}=0$$

上式から、

$$\left(\frac{d^2}{d\,r^2}\,g\right)\,r^2-2\,g=0$$

上式を $ode2$ 関数で解いて、

$$g=\%k2\,r^2-\frac{\%k1}{3\,r}$$

上式を (8.4.19) 式に代入し、

$$-\%k2\,r^2+\frac{\%k1}{3\,r}-\frac{2\,f}{r^2}+\frac{d^2}{d\,r^2}\,f=0$$

上式を $ode2$ 関数で解いて、

$$f=\frac{3\,\%k2\,r^4+5\,\%k1\,r}{30}+\%k2\,r^2-\frac{\%k1}{9\,r}$$

上式を一般的な形に書き換えて、

$$f=\frac{D}{r}+r\,C+r^2\,B+r^4\,A \tag{8.4.21}$$

```
PS2:\Psi=C*r*sin(\theta)^2;
subst([PS2],VR1);
VR3:ev(%,diff);
subst([PS2],VT1);
VT3:ev(%,diff);
subst([VR3,VT3],NV1);
NV2:factor(ev(%,diff));
NV31:lhs(NV2)[1][1]=0;
NV32:lhs(NV2)[3][1]=0;
solve(NV31,'diff(p,\theta,1))[1];
P11:ode2(%,p,\theta);
P3:p=rhs(%)-%c;
solve(NV32,'diff(p,r,1))[1];
ode2(%,p,r);
e[rr]=2*'diff(v[r],r,1);
subst([VR3,VT3],%);
ev(%,diff);
ERR1:factor(%);
e[tt]=2*(1/r*'diff(v[\theta],\theta,1)
 +v[r]/r);
subst([VR3,VT3],%);
ev(%,diff);
EPP1:factor(%);
e[pp]=2*(v[r]/r+v[\theta]/r*cot(\theta));
subst([VR3,VT3],%);
```

```
ev(%,diff);
EPP1:trigsimp(%);
e[tp]=0;
e[pr]=0;
e[rt]=r*'diff(v[\theta]/r,r,1)+1/r*'diff(
 v[r],\theta,1);
subst([VR3,VT3],%);
ev(%,diff);
PRR1:p[rr](\theta)=-rhs(P3)+\mu*rhs(ERR1);
DD1:dD=p[rr](\theta)*cos(\theta)*dS;
D='integrate(rhs(DD1)/dS*2*%pi*r*sin(
 \theta)*r,\theta,0,%pi);
subst([PRR1],%);
ev(%,integrate);
```

次に、抗力成分を求める。上式で、$r^4\,A$ の項は無限遠で発散するので、軸対称物体では不適切で、$A=0$ とする。$r^2\,B$ の項は、下記の流れ関数 : Ψ から 6.1.6 一様な流れ (6.1.37) 式 189 頁から一様流を表している。

$$\Psi = r^2\sin(\theta)^2\,B$$

$$v_r = 2\cos(\theta)\,B,\quad v_\theta = -2\sin(\theta)\,B$$

$\frac{D}{r}$ の項は、下記の流れ関数 : Ψ から 6.1.9 二重わき出し (6.1.45) 式 192 頁」から二重わき出しを表している。

$$\Psi = \frac{\sin(\theta)^2\,D}{r}$$

一様流や二重わき出しは渦無し流れであって、抗力は発生しない。次に下記の $r\,C$ について調べる。流れ関数 : Ψ は下記となる。

$$\Psi = r\sin(\theta)^2\,C \tag{8.4.22}$$

上式を (8.4.14) 式に代入し、流速は、

$$\begin{aligned} v_r &= \frac{\frac{d}{d\,\theta}\left(r\sin(\theta)^2\,C\right)}{r^2\sin(\theta)} = \frac{2\cos(\theta)\,C}{r} \\ v_\theta &= -\frac{\frac{d}{d\,r}\left(r\sin(\theta)^2\,C\right)}{r\sin(\theta)} = -\frac{\sin(\theta)\,C}{r} \end{aligned} \tag{8.4.23}$$

上式を (8.4.13) 式に代入し、

$$\begin{pmatrix} -\frac{2\,\mu\sin(\theta)\,C+\left(\frac{d}{d\,\theta}\,p\right)r^2}{r^3} \\ 0 \\ -\frac{4\,\mu\cos(\theta)\,C+\left(\frac{d}{d\,r}\,p\right)r^3}{r^3} \end{pmatrix} = 0$$

上式から、

$$\frac{d}{d\,\theta}\,p = -\frac{2\,\mu\sin(\theta)\,C}{r^2},\quad \frac{d}{d\,r}\,p = -\frac{4\,\mu\cos(\theta)\,C}{r^3}$$

上式を $ode2$ 関数で解いて、圧力は、

$$p - p_\infty = \frac{2\,\mu\cos(\theta)\,C}{r^2} \tag{8.4.24}$$

変形速度マトリックスの各項は、(8.1.20) 式から、

$$e_{rr} = 2\left(\frac{d}{d\,r}\,v_r\right) = -\frac{4\cos(\theta)\,C}{r^2}$$

$$e_{tt} = 2\left(\frac{\frac{d}{d\,\theta}\,v_\theta}{r} + \frac{v_r}{r}\right) = \frac{2\cos(\theta)\,C}{r^2}$$

$$e_{pp} = 2\left(\frac{v_\theta\cot(\theta)}{r} + \frac{v_r}{r}\right) = \frac{2\cos(\theta)\,C}{r^2}$$

$$e_{tp} = 0$$

$$e_{pr} = 0$$

$$e_{rt} = r\left(\frac{d}{d\,r}\,\frac{v_\theta}{r}\right) + \frac{\frac{d}{d\,\theta}\,v_r}{r} = 0$$

物体表面に作用する力 $p_{rr}(\theta)$ は、

$$p_{rr}(\theta) = -p + \mu\,e_{rr} = -\frac{6\,\mu\cos(\theta)\,C}{r^2}$$

物体表面の dS に作用する抗力成分 dD は、

$$dD = p_{rr}(\theta)\,\cos(\theta)\,dS$$

上式を積分して、r の関数でなくなっている。

$$\begin{aligned} D &= \int_0^\pi 2\,\pi\,r^2\,p_{rr}(\theta)\,\cos(\theta)\,\sin(\theta)\,d\theta \\ &= -\,12\,\pi\,\mu\int_0^\pi \cos(\theta)^2\sin(\theta)\,d\theta\,C \\ &= -\,8\,\pi\,\mu\,C \end{aligned} \tag{8.4.25}$$

上式は r の関数でなく、一定値となっている。

8.4.3 遅い一様流の中にある球のまわりの流れ

流速：U の遅い一様流の中にある半径：a の球のまわりの流れとその抗力について調べる [1]。流速が非常に遅いため、方程式の慣性項を無視できるものとする。座標系として $\theta-\phi-r$ の三次元極座標を用い z 軸対称とする。軸対称であるため、各速度コンポーネントは v_θ, v_r のみである。圧力：p、密度：ρ、粘性係数：μ とする。

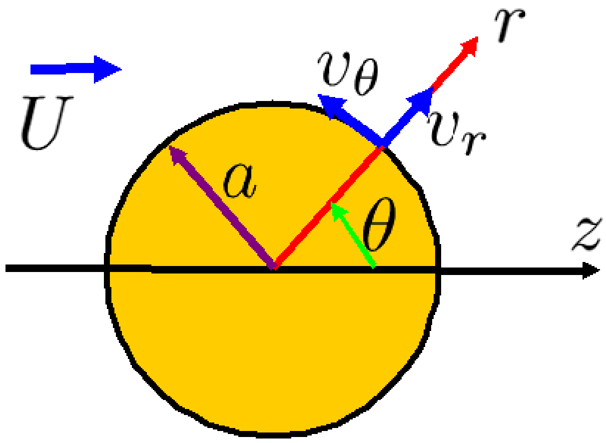


図 8.4.4: 遅い一様流中の球まわりの流れ

```
/* Stokes の流れ　球まわり */
kill(all);
load("vect")
depends(\Psi,[r,\theta]);
depends(f,[r]);
depends(g,[r]);
depends(p,[r,\theta]);
NV1:matrix([mu*('diff(v[theta],theta,2)
 /r^2+(cos(theta)*('diff(v[theta],theta,1
 )))/(r^2*sin(theta))+'diff(v[theta],r,2)
 +(2*('diff(v[theta],r,1)))/r-(v[theta]*
 cos(theta)^2)/(r^2*sin(theta)^2)-v[theta]
 /r^2+(2*('diff(v[r],theta,1)))/r^2)-'diff
 (p,theta,1)/r],[0],[mu*(-(2*('diff(
 v[theta],theta,1)))/r^2-(2*v[theta]*cos(
 theta))/(r^2*sin(theta))+(('diff(v[r],
 theta,1))*cos(theta))/(r^2*sin(theta))
 +'diff(v[r],theta,2)/r^2+'diff(v[r],r,2)
 +(2*('diff(v[r],r,1)))/r-(2*v[r])/r^2)
 -'diff(p,r,1)])=0;
PS1:\Psi=f*sin(\theta)^2;
F21:f=D/r+r*C+r^2*B+r^4*A;
VR1:v[r]=diff(\Psi,\theta,1)/r^2/
 sin(\theta);
VT1:v[\theta]=-diff(\Psi,r,1)/r/
 sin(\theta);
TAO:\tau=-\mu*(r*'diff(v[\theta]/r,r,1)
 +'diff(v[r],\theta,1)/r);
subst([PS1,F21],VR1);
VR21:ev(%,diff);
subst([PS1,F21],VT1);
VT21:ev(%,diff);
```

三次元軸対称の流速の遅い Stokes 流れでは、流れ関数：Ψ は、(8.4.16) 式と (8.4.21) 式から次式となる。

$$\begin{aligned}\Psi &= f\sin(\theta)^2\\ &\text{ここで、} f=\frac{D}{r}+r\,C+r^2\,B+r^4\,A\end{aligned}\tag{8.4.26}$$

流れ関数と流速の関係は (8.4.14) 式から、

$$v_r=\frac{\frac{d}{d\theta}\Psi}{r^2\sin(\theta)},\quad v_\theta=-\frac{\frac{d}{dr}\Psi}{r\sin(\theta)}$$

上式に (8.4.26) 式を代入し、流速は、

$$\begin{aligned}v_r &= \frac{2\cos(\theta)\,\left(\frac{D}{r}+r\,C+r^2\,B+r^4\,A\right)}{r^2}\\ v_\theta &= -\frac{\sin(\theta)\,\left(-\frac{D}{r^2}+C+2\,r\,B+4\,r^3\,A\right)}{r}\end{aligned}\tag{8.4.27}$$

```
rhs(VR21)=U*cos(\theta);
expand(%/U/cos(\theta));
rhs(VT21)=-U*sin(\theta);
expand(%/U/sin(\theta));
A1:A=0;
B1:B=1/2*U;
subst([r=a,A1,B1],rhs(VR21))=0;
VR22:(a^2*U)/2+D/a+a*C=0;
subst([r=a,A1,B1],rhs(VT21))=0;
VT22:a*U-D/a^2+C=0;
CD1:solve([VR22,VT22],[C,D])[1];
C1:CD1[1];
D1:CD1[2];
F3:subst([A1,B1,C1,D1],F21);
PS3:subst([F3],PS1);
VR3:factor(subst([A1,B1,C1,D1],VR21));
VT3:factor(subst([A1,B1,C1,D1],VT21));
```

境界条件として、$r\to\infty$ で一様流：$v_r=\cos(\theta)\,U$、$v_\theta=-\sin(\theta)\,U$ とし、$r=a$ で $v_r=v_\theta=0$ である。(8.4.27) 式に $v_r=\cos(\theta)\,U$、$v_\theta=-\sin(\theta)\,U$ を代入し、次式を得る。ここで $r\to\infty$ としたとき、

$$\frac{2\cos(\theta)\,\left(\frac{D}{r}+r\,C+r^2\,B+r^4\,A\right)}{r^2}=\cos(\theta)\,U$$

$$-\frac{\sin(\theta)\,\left(-\frac{D}{r^2}+C+2\,r\,B+4\,r^3\,A\right)}{r}=-\sin(\theta)\,U$$

[1] 今井　功：流体力学（前編）[19], P.318

A の項は発散するので $A=0$ とし、結果として、

$$A=0, \quad B=\frac{U}{2} \tag{8.4.28}$$

(8.4.27) 式に $v_r=v_\theta=0, r=a$ を代入し、次式を得る。

$$\frac{2\cos(\theta)\left(\frac{a^2 U}{2}+\frac{D}{a}+a\,C\right)}{a^2}=0$$
$$-\frac{\sin(\theta)\left(a\,U-\frac{D}{a^2}+C\right)}{a}=0$$

上式を解いて、

$$C=-\frac{3\,a\,U}{4}, \quad D=\frac{a^3\,U}{4} \tag{8.4.29}$$

(8.4.28) 式、(8.4.29) 式を (8.4.26) 式に代入し、流れ関数：Ψ は、

$$\Psi=\sin(\theta)^2\left(\frac{r^2\,U}{2}-\frac{3\,a\,r\,U}{4}+\frac{a^3\,U}{4\,r}\right) \tag{8.4.30}$$

(8.4.28) 式、(8.4.29) 式を (8.4.27) 式に代入し、流速は、

$$\begin{aligned} v_r=&\frac{(r-a)^2\,(2\,r+a)\,\cos(\theta)\,U}{2\,r^3}\\ v_\theta=&-\frac{(r-a)\,\left(4\,r^2+a\,r+a^2\right)\,\sin(\theta)\,U}{4\,r^3}\end{aligned} \tag{8.4.31}$$

```
subst([VR3,VT3],NV1);
NV2:factor(ev(%,diff));
NV31:lhs(NV2)[1][1]=0;
NV32:lhs(NV2)[3][1]=0;
solve(NV31,'diff(p,theta,1))[1];
ode2(%,p,\theta);
P11:subst([r=a],%);
solve(NV32,'diff(p,r,1))[1];
ode2(%,p,r);
subst([r=a],%);
P12:expand(%);
subst([%c=p[inf]],%);
P3:%-p[inf];
rhs(P3)*cos(\theta)*2*%pi*a*sin(\theta)*a;
'integrate(-%,\theta,0,%pi);
DP1:ev(%,integrate);
TA1:\tau=-\mu*(r*'diff(v[\theta]/r,r,1)
 +'diff(v[r],\theta,1)/r);
subst([VR3,VT3],%);
ev(%,diff);
TA2:factor(%);
TA3:subst([r=a],%);
```

```
rhs(TA3)*sin(\theta)*2*%pi*a*sin(\theta)*a;
'integrate(%,\theta,0,%pi);
DT1:ev(%,integrate);
D1:D=DT1+DP1;
D1/(\rho*U^2*S/2);
D11:lhs(%)=subst([S=%pi*a^2],rhs(%));
RN1:R[n]=U*(2*a)/\mu*\rho;
solve(RN1,\rho)[1];
lhs(D11)=subst([%],rhs(D11));
D=-8*%pi*\mu*C;
subst([C1],%);
factor(%);
```

(8.4.31) 式を (8.4.13) 式に代入し、粘性項と圧力項の関係式を得る。

$$\begin{pmatrix}\frac{3\,a\,\mu\sin(\theta)\,U-2\left(\frac{d}{d\,\theta}\,p\right)\,r^2}{2\,r^3}\\ 0\\ \frac{3\,a\,\mu\cos(\theta)\,U-\left(\frac{d}{d\,r}\,p\right)\,r^3}{r^3}\end{pmatrix}=0$$

上式から、

$$\frac{d}{d\,\theta}\,p=\frac{3\,a\,\mu\sin(\theta)\,U}{2\,r^2}, \quad \frac{d}{d\,r}\,p=\frac{3\,a\,\mu\cos(\theta)\,U}{r^3}$$

上式を $ode2$ 関数で解いて、球表面：$r=a$ の圧力は、

$$p-p_\infty=-\frac{3\,\mu\cos(\theta)\,U}{2\,a}$$

球表面要素：dS の圧力による抗力成分：dD_p は、

$$dD_p=\frac{3\,\mu\cos(\theta)^2\,U}{2\,a}dS$$

上記を球表面積分して、圧力による抗力成分：D_p は、

$$\begin{aligned} D_p=&\int_0^\pi dD_p\,2\pi\,a\sin(\theta)\,a\,d\theta\\ =&3\,\pi\,a\,\mu\int_0^\pi \cos(\theta)^2\sin(\theta)\,d\theta\,U=2\,\pi\,a\,\mu\,U\end{aligned} \tag{8.4.32}$$

摩擦力は (8.1.20) 式から次式で表現できる。

$$\tau=\mu\left(r\left(\frac{d}{d\,r}\,\frac{v_\theta}{r}\right)+\frac{\frac{d}{d\,\theta}\,v_r}{r}\right)$$

上式に (8.4.31) 式を代入し、球表面の摩擦力は $r=a$ を代入し、

$$\tau=\frac{3\,\mu\sin(\theta)\,U}{2\,a}$$

球表面要素：dS の摩擦力による抗力成分：dD_f は、

$$dD_f=\frac{3\,\mu\sin(\theta)^2\,U}{2\,a}dS$$

上記を球表面積分して、摩擦力による抗力成分：D_f は、

$$\begin{aligned} D_p=&\int_0^\pi dD_f\,2\pi\,a\sin(\theta)\,a\,d\theta\\ =&3\,\pi\,a\,\mu\int_0^\pi \sin(\theta)^3 d\theta\,U=4\,\pi\,a\,\mu\,U\end{aligned} \tag{8.4.33}$$

以上から、球に作用する抗力：D は、

$$D = D_p + D_f = 6\,\pi\,a\,\mu\,U$$

上式をレイノルズ数：R_n を用いて無次元化すると、

$$\frac{D}{\frac{1}{2}\rho\,S\,U^2} = \frac{24}{R_n}, \quad ここで\ R_n = \frac{2\,a\,\rho\,U}{\mu}$$

また、(8.4.25) 式に (8.4.29) 式を代入し、球に作用する抗力 : D を求めると、下記となり上記と同じ結果が得られる。

$$D = -8\,\pi\,\mu\,C = 6\,\pi\,a\,\mu\,U$$

(8.4.30) 式の流れ関数 : Ψ を用いて流線を gnuplot を用いて描くと下記となる。球の中の流れは二重わき出しによる流れが見られる。

```
#!/gnuplot
set xrange [-2:2]
set yrange [-2:2]
set isosamples 100,100
set contour base
set cntrparam levels incremental -1,0.002,1
unset key
unset surface
set view map
splot (y**2*(-(3*sqrt(y**2+x**2))/4+1/(4
 *sqrt(y**2+x**2))+(y**2+x**2)/2))/
 (y**2+x**2)
# EOF
```

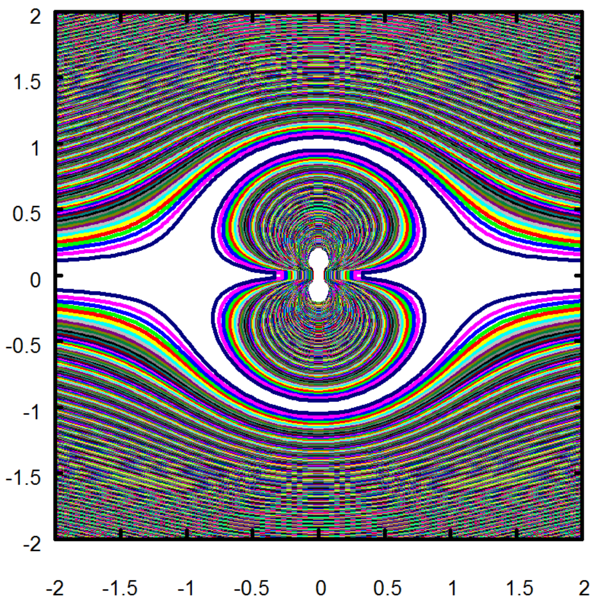


図 8.4.5: 遅い一様流中の球まわりの流れ

8.4.4 遅い一様流中の球形の液滴

流速：U の遅い一様流の中にある半径：a の球形の液滴まわりの流れについて調べる [1]。液滴の外部と内部は異なる流体であるとする。流速が非常に遅いため、方程式の慣性項を無視できるものとする。座標系として $\theta-\phi-r$ の三次元極座標を用い z 軸対称とする。軸対称であるため、各速度コンポーネントは v_θ, v_r のみである。圧力：p、外部流体の粘性係数：μ_1、内部流体の粘性係数：μ_2、とする。

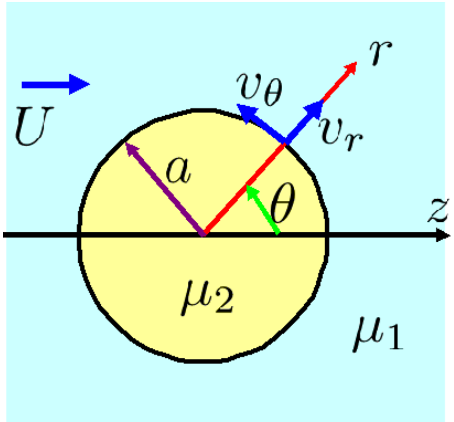


図 8.4.6: 遅い一様流中の球形の液滴

```
/* Stokes の流れ　球形の液滴 */
kill(all);
load("vect")
depends(\Psi,[r,\theta]);
depends(f,[r]);
depends(g,[r]);
depends(p,[r,\theta]);
NV1:matrix([mu*('diff(v[theta],theta,2)
 /r^2+(cos(theta)*('diff(v[theta],theta,1
 )))/(r^2*sin(theta))+'diff(v[theta],r,2)
 +(2*('diff(v[theta],r,1)))/r-(v[theta]*
 cos(theta)^2)/(r^2*sin(theta)^2)-v[theta]
 /r^2+(2*('diff(v[r],theta,1)))/r^2)-'diff
 (p,theta,1)/r],[0],[mu*(-(2*('diff(
 v[theta],theta,1)))/r^2-(2*v[theta]*cos(
 theta))/(r^2*sin(theta))+(('diff(v[r],
 theta,1))*cos(theta))/(r^2*sin(theta))
 +'diff(v[r],theta,2)/r^2+'diff(v[r],r,2)
 +(2*('diff(v[r],r,1)))/r-(2*v[r])/r^2)
 -'diff(p,r,1)])=0;
PS0:\Psi=f*sin(\theta)^2;
F0:f=D/r+r*C+r^2*B+r^4*A;
```

[1] G. K. Batchelor, : 入門　流体力学 18), 4.9 (b) 異なる流体の球滴 P.235 & 今井　功：流体力学（前編） 19), P.355

```
VR1:v[r]=diff(\Psi,\theta,1)/r^2
 /sin(\theta);
VT1:v[\theta]=-diff(\Psi,r,1)/r/sin(\theta);
TA0:\tau=-\mu*(r*'diff(v[\theta]/r,r,1)
 +'diff(v[r],\theta,1)/r);
subst([PS0,F0],VR1);
ev(%,diff);
expand(%);
subst([PS0,F0],VT1);
ev(%,diff);
expand(%);
```

三次元軸対称の流速の遅い Stokes 流れでは、流れ関数：Ψ は、(8.4.16) 式と (8.4.21) 式から次式となる。

$$\begin{aligned}&\Psi = f\sin(\theta)^2\\&\quad ここで、f=\frac{D}{r}+r\,C+r^2\,B+r^4\,A\end{aligned}\tag{8.4.34}$$

流れ関数と流速の関係は (8.4.14) 式から、

$$v_r=\frac{\frac{d}{d\,\theta}\,\Psi}{r^2\sin(\theta)},\quad v_\theta=-\frac{\frac{d}{d\,r}\,\Psi}{r\sin(\theta)}\tag{8.4.35}$$

上式に (8.4.34) 式を代入し、流速は、

$$\begin{aligned}v_r&=\frac{2\cos(\theta)\ D}{r^3}+\frac{2\cos(\theta)\ C}{r}+2\cos(\theta)\ B\\&\quad+2\,r^2\cos(\theta)\ A\\v_\theta&=\frac{\sin(\theta)\ D}{r^3}-\frac{\sin(\theta)\ C}{r}-2\sin(\theta)\ B\\&\quad-4\,r^2\sin(\theta)\ A\end{aligned}\tag{8.4.36}$$

```
F1:subst([A=0,B=U/2,C=C[1],D=D[1]],F0);
PS1:subst([F1],PS0);
F2:subst([A=A[2],B=B[2],C=0,D=0],F0);
PS2:subst([F2],PS0);
subst([PS1],VR1);
ev(%,diff);
VR10:expand(%);
factor(subst([r=a],rhs(%)));
VR11:a^3*U+2*C[1]*a^2+2*D[1]=0;
subst([PS2],VR1);
ev(%,diff);
VR20:expand(%);
factor(subst([r=a],rhs(%)));
VR21:A[2]*a^2+B[2]=0;
subst([PS1],VT1);
ev(%,diff);
VT10:expand(%);
VT11:factor(subst([r=a],%));
subst([PS2],VT1);
ev(%,diff);
VT20:expand(%);
VT21:factor(subst([r=a],%));
```

```
rhs(VT11)=rhs(VT21);
VT12:expand(%/sin(\theta));
subst([\tau=\tau[1],\mu=\mu[1],VR10,VT10]
 ,TA0);
ev(%,diff);
factor(%);
TA1:subst([r=a],%);
subst([\tau=\tau[2],\mu=\mu[2],VR20,VT20]
 ,TA0);
ev(%,diff);
factor(%);
TA2:subst([r=a],%);
rhs(TA1)=rhs(TA2);
TA12:%/sin(\theta);
ABCD1:solve([VR11,VR21,VT12,TA12]
 ,[C[1],D[1],A[2],B[2]])[1];
```

(8.4.36) 式から、球形の液滴の外部流：$r > a$ について、(8.4.28) 式の一様流の条件と $r \to \infty$ で、(8.4.34) 式の f および流れ関数：Ψ は、流速が有限であるから下記となる。

$$f = \frac{r^2\,U}{2} + C_1\,r + \frac{D_1}{r}$$

$$\Psi = \sin(\theta)^2\left(\frac{r^2\,U}{2} + C_1\,r + \frac{D_1}{r}\right) \tag{8.4.37}$$

(8.4.36) 式から、球形の液滴の内部流：$r < a$ について、流速が有限であるためには f および流れ関数：Ψ は下記となる。

$$f = A_2\,r^4 + B_2\,r^2$$

$$\Psi = \left(A_2\,r^4 + B_2\,r^2\right)\,\sin(\theta)^2 \tag{8.4.38}$$

(8.4.37) 式、(8.4.38) 式を (8.4.35) 式に代入し、v_r は、

$$v_r = \cos(\theta)\,U + \frac{2\,C_1\cos(\theta)}{r} + \frac{2\,D_1\cos(\theta)}{r^3} \quad \text{for　外部流}$$

$$v_r = 2\,A_2\,r^2\cos(\theta) + 2\,B_2\cos(\theta) \quad \text{for　内部流} \tag{8.4.39}$$

上式から、境界条件として、球面：$r = a$ では、$v_r = 0$ であるから、

$$a^3\,U + 2\,C_1\,a^2 + 2\,D_1 = 0, \quad A_2\,a^2 + B_2 = 0 \tag{8.4.40}$$

(8.4.37) 式、(8.4.38) 式を (8.4.35) 式に代入し、v_θ は、

$$v_\theta = -\frac{\left(4\,A_2\,r^3 + 2\,B_2\,r\right)\,\sin(\theta)}{r} \quad \text{for　外部流}$$

$$v_\theta = -\frac{\left(4\,A_2\,r^3 + 2\,B_2\,r\right)\,\sin(\theta)}{r} \quad \text{for　内部流} \tag{8.4.41}$$

上式から、境界条件として、球面：$r = a$ で外部流速：v_θ と液滴の内部流速：v_θ は等しいから、

$$-\frac{\sin(\theta)\,\left(a^3\,U + C_1\,a^2 - D_1\right)}{a^3} = -2\,\left(2\,A_2\,a^2 + B_2\right)\,\sin(\theta)$$

以上から、

$$-U - \frac{C_1}{a} + \frac{D_1}{a^3} = -4\,A_2\,a^2 - 2\,B_2 \tag{8.4.42}$$

剪断力は (8.1.20) 式から、

$$\tau_{\theta r} = \tau = -\mu\left(r\left(\frac{d}{d\,r}\,\frac{v_\theta}{r}\right) + \frac{\frac{d}{d\,\theta}\,v_r}{r}\right)$$

(8.4.39) 式、(8.4.41) 式を上式に代入し、剪断力は、

$$\tau_1 = \frac{6\,\mu_1\,D_1\sin(\theta)}{r^4} \quad \text{for　外部流}$$

$$\tau_2 = 6\,\mu_2\,A_2\,r\sin(\theta) \quad \text{for　内部流}$$

境界条件として、球面：$r = a$ で外部剪断力：τ_1 と液滴の内部剪断力：τ_2 は等しいから

$$\frac{6\,\mu_1\,D_1}{a^4} = 6\,\mu_2\,A_2\,a \tag{8.4.43}$$

境界条件：(8.4.40) 式、(8.4.42) 式、(8.4.43) 式を解いて、

$$C_1 = -\frac{\left(3\,\mu_2 + 2\,\mu_1\right)\,a\,U}{4\,\mu_2 + 4\,\mu_1}, D_1 = \frac{\mu_2\,a^3\,U}{4\,\mu_2 + 4\,\mu_1},$$
$$A_2 = \frac{\mu_1\,U}{\left(4\,\mu_2 + 4\,\mu_1\right)\,a^2}, B_2 = -\frac{\mu_1\,U}{4\,\mu_2 + 4\,\mu_1} \tag{8.4.44}$$

```
PS12:factor(subst(ABCD1,PS1));
PS22:factor(subst(ABCD1,PS2));
VR3:factor(subst(ABCD1,VR10));
VT3:factor(subst(ABCD1,VT10));
VR31:lhs(VR3)=subst([r=a],rhs(VR3));
VT31:subst([r=a],VT3);
VR4:factor(subst(ABCD1,VR20));
VT4:factor(subst(ABCD1,VT20));
VR41:lhs(VR4)=subst([r=a],rhs(VR4));
VT41:subst([r=a],VT4);
subst([\mu=\mu[1],VR3,VT3],NV1);
NV2:factor(ev(%,diff));
NV31:lhs(NV2)[1][1]=0;
NV32:lhs(NV2)[3][1]=0;
solve(NV31,'diff(p,theta,1))[1];
ode2(%,p,\theta);
P11:subst([r=a],%);
solve(NV32,'diff(p,r,1))[1];
ode2(%,p,r);
subst([r=a],%);
P12:expand(%);
subst([%c=p[inf]],%);
P3:factor(%-p[inf]);
D=-8*%pi*\mu[1]*C[1];
```

```
subst([ABCD1],%);
D1:factor(%);
lhs(D1)=limit(rhs(D1),\mu[2],inf);
lhs(D1)=limit(rhs(D1),\mu[2],0);
B1:B=4/3*a^3*(\rho[1]-\rho[2])*g;
rhs(D1)=rhs(B1);
solve(%,U)[1];
factor(%);
R1:r=sqrt(x^2+y^2);
T1:\theta=atan2(y,x);
subst([a=1,U=1,\mu[1]=10,\mu[2]=1,R1,T1]
 ,PS12);
```

以上から、外部流の流れ関数、流速は、

$$\Psi = \frac{(r-a)\left(2\mu_2 r^2 + 2\mu_1 r^2 - \mu_2 a r - \mu_2 a^2\right)\sin(\theta)^2 U}{4(\mu_2+\mu_1) r}$$

$$v_r = \frac{(r-a)\left(2\mu_2 r^2 + 2\mu_1 r^2 - \mu_2 a r - \mu_2 a^2\right)\cos(\theta) U}{2(\mu_2+\mu_1) r^3}$$

$$v_\theta = -\frac{\left(4\mu_2 r^3 + 4\mu_1 r^3 - 3\mu_2 a r^2 - 2\mu_1 a r^2 - \mu_2 a^3\right)\sin(\theta) U}{4(\mu_2+\mu_1) r^3}$$

以上から、内部流の流れ関数、流速は、

$$\Psi = \frac{\mu_1 r^2 (r-a)(r+a)\sin(\theta)^2 U}{4(\mu_2+\mu_1) a^2}$$

$$v_r = \frac{\mu_1 (r-a)(r+a)\cos(\theta) U}{2(\mu_2+\mu_1) a^2}$$

$$v_\theta = -\frac{\mu_1\left(2r^2 - a^2\right)\sin(\theta) U}{2(\mu_2+\mu_1) a^2}$$

球形の液滴に作用する抗力は、(8.4.25) 式から、

$$D = -8\pi\mu_1 C_1 = \frac{2\pi\mu_1 (3\mu_2 + 2\mu_1) a U}{\mu_2+\mu_1}$$

球形の液滴の内部が固体では、$\mu_2 \to \infty$ として、下記となり、前節の結果と一致する。

$$D = 6\pi\mu_1 a U$$

また、球形の液滴の内部が空気のように外部流に比べ、$\mu_1 >> \mu_2$ とすると、$\mu_2 \to 0$ とし、

$$D = 4\pi\mu_1 a U$$

今、外部流体の密度：ρ_1、内部流体の密度：ρ_2 とすると、球形の液滴に作用する浮力：B は、

$$B = \frac{4(\rho_1-\rho_2) a^3 g}{3}$$

上式の抗力と浮力が等しいとして、U を求めると下記となり、これは微小な球形の液滴が上昇する定常速度である。

$$U = -\frac{2(\mu_2+\mu_1)(\rho_2-\rho_1) a^2 g}{3\pi\mu_1(3\mu_2+2\mu_1)}$$

球形の液滴の内外の流線は、次式を流れ関数：Ψ に代入し、下記の図が得られた。

$$r = \sqrt{y^2+x^2}, \quad \theta = \mathrm{atan2}(y,x)$$

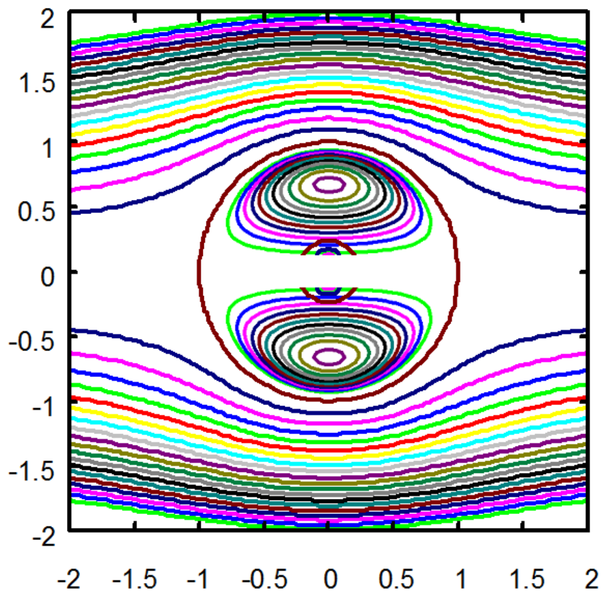


図 8.4.7: 遅い一様流中の球形の液滴

```
#!/gnuplot
set xrange [-2:2]
set yrange [-2:2]
set isosamples 100,100
set contour base
set cntrparam levels incremental 0,0.05,1
unset key
unset surface
set view map
splot (y**2*(-sqrt(y**2+x**2)+22*(y**2
 +x**2)-1)*(sqrt(y**2+x**2)-1))/(44*
 (y**2+x**2)**(1.5))
# EOF

#!/gnuplot
set xrange [-2:2]
set yrange [-2:2]
set isosamples 100,100
set contour base
set cntrparam levels incremental -1,0.005,0
unset key
unset surface
set view map
splot (5*y**2*(sqrt(y**2+x**2)-1)
 *(sqrt(y**2+x**2)+1))/22
# EOF
```

8.5　レイノルズ数の大きい流れ

8.5.1　境界層の方程式

固体表面に接する層では、粘性の影響を強く受ける境界層が生成される。この層から離れたところでは、渦度は零で、粘性の影響を受けない。今、レイノルズ数：R が大きく、粘性の影響を強く受けている境界層の厚さが十分薄いときには、二次元 $x-y$ 座標系の Navier-Stokes の方程式は以下のように簡素化できる。x-y 座標軸の各速度コンポーネントを u, v とする。圧力：p、粘性係数：μ、動粘性係数：ν、x 方向の外力、y 方向の外力は零とする。

```
/* R が大きい二次元 NAV */
kill(all);
load("vector");
depends(u,[x,y,t]);
depends(U,[x]);
depends(v,[x,y,t]);
depends(p,[x,y]);
depends(ud,[xd,yd,td]);
depends(vd,[xd,yd,td]);
depends(pd,[xd,yd]);
depends(xd,[x]);
depends(yd,[y]);
depends(td,[t]);
MAS1:’diff(w,z,1)+’diff(v,y,1)+’diff(u,x,1)
 =0;
NAV1:matrix([\rho*((’diff(u,z,1))*w
 +(’diff(u,y,1))*v+u*(’diff(u,x,1))
 +’diff(u,t,1))],[\rho*((’diff(v,z,1))*w
 +v*(’diff(v,y,1))+u*(’diff(v,x,1))
 +’diff(v,t,1))],[\rho*(w*(’diff(w,z,1))
+v*(’diff(w,y,1))+u*(’diff(w,x,1))
+’diff(w,t,1))])=matrix([X+mu*(’diff(u,z,2)
+’diff(u,y,2)+’diff(u,x,2))-’diff(p,x,1)],
[Y+mu*(’diff(v,z,2)+’diff(v,y,2)
+’diff(v,x,2))
-’diff(p,y,1)],[Z+mu*(’diff(w,z,2)
+’diff(w,y,2)+’diff(w,x,2))-’diff(p,z,1)]);
subst([w=0,X=0,Y=0],MAS1);
MAS2:ev(%,diff);
subst([w=0,X=0,Y=0,Z=0],NAV1);
NAV2:ev(%,diff);
```

二次元の質量保存の方程式は (8.1.2) 式から、

$$\frac{d}{d\,y}\,v+\frac{d}{d\,x}\,u=0$$

二次元の Navier-Stokes の式は (8.1.9) 式から、

$$\begin{pmatrix}\rho\,\left(\left(\frac{d}{d\,y}\,u\right)\,v+u\,\left(\frac{d}{d\,x}\,u\right)+\frac{d}{d\,t}\,u\right)\\ \rho\,\left(v\,\left(\frac{d}{d\,y}\,v\right)+u\,\left(\frac{d}{d\,x}\,v\right)+\frac{d}{d\,t}\,v\right)\\ 0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\mu\,\left(\frac{d^2}{d\,y^2}\,u+\frac{d^2}{d\,x^2}\,u\right)-\frac{d}{d\,x}\,p\\ \mu\,\left(\frac{d^2}{d\,y^2}\,v+\frac{d^2}{d\,x^2}\,v\right)-\frac{d}{d\,y}\,p\\ 0\end{pmatrix}$$

```
assume(\delta<L);
R1:R=U*L/\nu;
D2:\delta/L=1/sqrt(R);
XD1:xd=x/L;
XD2:solve(XD1,x)[1];
DXD1:diff(XD1,x,1);
DXD2:diff(XD1,x,2);
YD1:yd=y/L*sqrt(R);
YD2:solve(YD1,y)[1];
DYD1:diff(YD1,y,1);
DYD2:diff(YD1,y,2);
UD1:ud=u/U;
UD2:solve(UD1,u)[1];
VD1:vd=v/U*sqrt(R);
VD2:solve(VD1,v)[1];
P1:pd=p/\rho/U^2;
P2:solve(%,p)[1];
T1:td=t*U/L;
T2:solve(%,t)[1];
DT1:diff(T1,t,1);
```

粘性の影響を受けている境界層の厚さ：δ は物体長さ:L に比べ、$L >> \delta$ とする。境界層の外部の流速：U とすると、レイノルズ数：R は

$$R=\frac{L\,U}{\nu}$$

以上を基に、境界層の厚さが $\sqrt{R}$ に比例することから、x, y, u, v, p, t を無次元化し、xd, yd, ud, vd, pd, td は下記のように表現できる。

$$\begin{aligned}xd=&\frac{x}{L},\quad yd=\frac{y\,\sqrt{R}}{L}\\ ud=&\frac{u}{U},\quad vd=\frac{v\,\sqrt{R}}{U}\\ pd=&\frac{p}{\rho\,U^2},\quad td=\frac{t\,U}{L}\end{aligned}\tag{8.5.1}$$

```
subst([UD2,VD2],MAS2);
ev(%,diff);
subst([DXD1,DYD1],%);
MAS3:expand(%*L/U);
subst([UD2,VD2,P2],NAV2);
ev(%,diff);
subst([DXD1,DYD1,DXD2,DYD2,DT1],%);
%/\rho*L/U^2;
NAV3:subst([U=R*\mu/\rho/L],expand(%));
lhs(NAV3)[1][1]=rhs(NAV3)[1][1];
NAV31:lhs(%)=rest(rhs(%),1);
expand(lhs(NAV3)[2][1]/sqrt(R)=rhs(NAV3)
 [2][1]/sqrt(R));
NAV32:0=last(rhs(%));
MAS4:subst([ud=u,vd=v,xd=x,yd=y],MAS3);
NAV4:subst([ud=u,vd=v,xd=x,yd=y,pd=p,
 td=t],lhs(NAV31)=\nu*first(rhs(NAV31))
 +1/\rho*last(rhs(NAV31)));
```

質量保存の方程式に上式 (8.5.1) 式を代入し、

$$\frac{\left(\frac{d}{d\,yd}\,vd\right)\,\left(\frac{d}{d\,y}\,yd\right)\,U}{\sqrt{R}}+\left(\frac{d}{d\,xd}\,ud\right)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,xd\right)\,U=0$$

整理すると、

$$\frac{d}{d\,yd}\,vd+\frac{d}{d\,xd}\,ud=0$$

$ud\rightarrow u, vd\rightarrow v$ に変換し、質量保存の方程式は下記となり、元と変わりない。

$$\frac{d}{d\,y}\,v+\frac{d}{d\,x}\,u=0 \tag{8.5.2}$$

Navier-Stokes の式に上式 (8.5.1) 式を代入し、

$$\begin{aligned}
&\rho\left(\frac{\left(\frac{d}{d\,yd}\,ud\right)\,vd\,\left(\frac{d}{d\,y}\,yd\right)\,U^2}{\sqrt{R}}\right.\\
&\quad+ud\,\left(\frac{d}{d\,xd}\,ud\right)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,xd\right)\,U^2\\
&\quad\left.+\left(\frac{d}{d\,t}\,td\right)\,\left(\frac{d}{d\,td}\,ud\right)\,U\right)\\
&=\mu\left(\left(\frac{d}{d\,yd}\,ud\right)\,\left(\frac{d^2}{d\,y^2}\,yd\right)\,U\right.\\
&\quad+\left(\frac{d^2}{d\,yd^2}\,ud\right)\,\left(\frac{d}{d\,y}\,yd\right)^2\,U\\
&\quad+\left(\frac{d}{d\,xd}\,ud\right)\,\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,xd\right)\,U\\
&\quad\left.+\left(\frac{d^2}{d\,xd^2}\,ud\right)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,xd\right)^2\,U\right)\\
&\quad-\left(\frac{d}{d\,xd}\,pd\right)\,\rho\,\left(\frac{d}{d\,x}\,xd\right)\,U^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\rho\left(\frac{ud\,\left(\frac{d}{d\,xd}\,vd\right)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,xd\right)\,U^2}{\sqrt{R}}\right.\\
&\quad+\frac{vd\,\left(\frac{d}{d\,yd}\,vd\right)\,\left(\frac{d}{d\,y}\,yd\right)\,U^2}{R}\\
&\quad\left.+\frac{\left(\frac{d}{d\,t}\,td\right)\,\left(\frac{d}{d\,td}\,vd\right)\,U}{\sqrt{R}}\right)\\
&=\mu\left(\frac{\left(\frac{d}{d\,yd}\,vd\right)\,\left(\frac{d^2}{d\,y^2}\,yd\right)\,U}{\sqrt{R}}\right.\\
&\quad+\frac{\left(\frac{d^2}{d\,yd^2}\,vd\right)\,\left(\frac{d}{d\,y}\,yd\right)^2\,U}{\sqrt{R}}\\
&\quad+\frac{\left(\frac{d}{d\,xd}\,vd\right)\,\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,xd\right)\,U}{\sqrt{R}}\\
&\quad\left.+\frac{\left(\frac{d^2}{d\,xd^2}\,vd\right)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,xd\right)^2\,U}{\sqrt{R}}\right)\\
&\quad-\left(\frac{d}{d\,yd}\,pd\right)\,\rho\,\left(\frac{d}{d\,y}\,yd\right)\,U^2
\end{aligned}$$

整理すると、

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{d}{d\,yd}\,ud\right)\,vd+ud\,\left(\frac{d}{d\,xd}\,ud\right)+\frac{d}{d\,td}\,ud\\
&\qquad=\frac{\frac{d^2}{d\,xd^2}\,ud}{R}+\frac{d^2}{d\,yd^2}\,ud-\frac{d}{d\,xd}\,pd\\
&\frac{vd\,\left(\frac{d}{d\,yd}\,vd\right)}{R}+\frac{ud\,\left(\frac{d}{d\,xd}\,vd\right)}{R}+\frac{\frac{d}{d\,td}\,vd}{R}\\
&\qquad=\frac{\frac{d^2}{d\,yd^2}\,vd}{R}+\frac{\frac{d^2}{d\,xd^2}\,vd}{R^2}-\frac{d}{d\,yd}\,pd
\end{aligned}$$

レイノルズ数：R が十分大きいとして、微少項を省略すると、

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{d}{d\,yd}\,ud\right)\,vd+ud\,\left(\frac{d}{d\,xd}\,ud\right)+\frac{d}{d\,td}\,ud\\
&\qquad=\frac{d^2}{d\,yd^2}\,ud-\frac{d}{d\,xd}\,pd\\
&\qquad 0=-\frac{d}{d\,yd}\,pd
\end{aligned}$$

$ud\rightarrow u, vd\rightarrow v, pd\rightarrow p, td\rightarrow t$ に変換し、境界層の方程式は下記となる。

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{d}{d\,y}\,u\right)\,v+u\,\left(\frac{d}{d\,x}\,u\right)+\frac{d}{d\,t}\,u\\
&\qquad=\nu\,\left(\frac{d^2}{d\,y^2}\,u\right)-\frac{\frac{d}{d\,x}\,p}{\rho}
\end{aligned} \tag{8.5.3}$$

```
assume(\delta<L);
subst([u=U],NAV4);
NAVU1:ev(%,diff);
DP1:solve(%,'diff(p,x,1))[1];
```

x 軸方向の主流を U とし、定常状態では、$u \to U$ を上記の簡素化された境界層の方程式：(8.5.3) 式に代入し整理すると、圧力項は下記のように記述できる。

$$\frac{d}{d\,x}\,p = -\rho U\,\left(\frac{d}{d\,x}\,U\right) \tag{8.5.4}$$

以上から、定常状態で外部流速が与えられたときには、境界層の方程式は下記で近似できる。

$$\left(\frac{d}{d\,y}\,u\right)\,v + u\,\left(\frac{d}{d\,x}\,u\right) = U\,\left(\frac{d}{d\,x}\,U\right) + \nu\,\left(\frac{d^2}{d\,y^2}\,u\right) \tag{8.5.5}$$

8.5.2 柱状体の境界層の方程式

三次元の流場で柱状体が斜航状態の時の境界層の方程式を求める。レイノルズ数：R が大きく、粘性の影響を強く受けている境界層の厚さが十分薄いときには、三次元 $x-y-z$ 座標系の Navier-Stokes の方程式は以下のように簡素化できる。x 軸を柱状体の横断面方向で、物体の沿った方向とし、y 軸は物体の鉛直上方、z 軸を柱状体の縦方向とする。x-y-z 座標軸の各速度コンポーネントを u,v,w とする。圧力：p、粘性係数：μ、動粘性係数：ν、物体長さ：L、x 軸方向の外界流速：U、z 軸方向の外界流速：W とし、x 方向の外力：X、y 方向の外力：Y、z 方向の外力：Z は零とする。

```
/* R が大きい三次元 NAV */
kill(all);
load("vector");
depends(u,[x,y,t]);
depends(v,[x,y,z,t]);
depends(w,[x,y,t]);
depends(p,[x,y]);
depends(ud,[xd,yd,td]);
depends(vd,[xd,yd,zd,td]);
depends(wd,[xd,yd,td]);
depends(pd,[xd,yd]);
depends(xd,[x]);
depends(yd,[y]);
depends(zd,[z]);
depends(td,[t]);
MAS1:'diff(w,z,1)+'diff(v,y,1)+'diff(u,x,1)
 =0;
NAV1:matrix([\rho*(('diff(u,z,1))*w
 +('diff(u,y,1))*v+u*('diff(u,x,1))
 +'diff(u,t,1))],[\rho*(('diff(v,z,1))*w
 +v*('diff(v,y,1))+u*('diff(v,x,1))
 +'diff(v,t,1))],[\rho*(w*('diff(w,z,1))
+v*('diff(w,y,1))+u*('diff(w,x,1))
+'diff(w,t,1))])=matrix([X+mu*('diff(u,z,2)
+'diff(u,y,2)+'diff(u,x,2))-'diff(p,x,1)],
[Y+mu*('diff(v,z,2)+'diff(v,y,2)
+'diff(v,x,2))
-'diff(p,y,1)],[Z+mu*('diff(w,z,2)
+'diff(w,y,2)+'diff(w,x,2))-'diff(p,z,1)]);
subst([w=0,X=0,Y=0],MAS1);
subst([X=0,Y=0],MAS1);
MAS2:ev(%,diff);
subst([X=0,Y=0,Z=0],NAV1);
NAV2:ev(%,diff);
```

質量保存の方程式は (8.1.2) 式から、

$$\frac{d}{d\,z}\,w+\frac{d}{d\,y}\,v+\frac{d}{d\,x}\,u=0$$

Navier-Stokes の式は (8.1.9) 式から、

$$\begin{pmatrix}\rho\,\left(\left(\frac{d}{d\,z}\,u\right)\,w+\left(\frac{d}{d\,y}\,u\right)\,v+u\,\left(\frac{d}{d\,x}\,u\right)+\frac{d}{d\,t}\,u\right)\\ \rho\,\left(\left(\frac{d}{d\,z}\,v\right)\,w+v\,\left(\frac{d}{d\,y}\,v\right)+u\,\left(\frac{d}{d\,x}\,v\right)+\frac{d}{d\,t}\,v\right)\\ \rho\,\left(w\,\left(\frac{d}{d\,z}\,w\right)+v\,\left(\frac{d}{d\,y}\,w\right)+u\,\left(\frac{d}{d\,x}\,w\right)+\frac{d}{d\,t}\,w\right)\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}X+\mu\,\left(\frac{d^2}{d\,z^2}\,u+\frac{d^2}{d\,y^2}\,u+\frac{d^2}{d\,x^2}\,u\right)-\frac{d}{d\,x}\,p\\ Y+\mu\,\left(\frac{d^2}{d\,z^2}\,v+\frac{d^2}{d\,y^2}\,v+\frac{d^2}{d\,x^2}\,v\right)-\frac{d}{d\,y}\,p\\ Z+\mu\,\left(\frac{d^2}{d\,z^2}\,w+\frac{d^2}{d\,y^2}\,w+\frac{d^2}{d\,x^2}\,w\right)-\frac{d}{d\,z}\,p\end{pmatrix}$$

流速：u,w および圧力：p は柱状体であることから、z 軸方向の変化はなく、x,y,t の関数となる。このことを考慮すると、質量保存の方程式は、

$$\frac{d}{d\,y}\,v+\frac{d}{d\,x}\,u=0 \tag{8.5.6}$$

Navier-Stokes の式は、

$$\begin{pmatrix}\rho\,\left(\left(\frac{d}{d\,y}\,u\right)\,v+u\,\left(\frac{d}{d\,x}\,u\right)+\frac{d}{d\,t}\,u\right)\\ \rho\,\left(\left(\frac{d}{d\,z}\,v\right)\,w+v\,\left(\frac{d}{d\,y}\,v\right)+u\,\left(\frac{d}{d\,x}\,v\right)+\frac{d}{d\,t}\,v\right)\\ \rho\,\left(v\,\left(\frac{d}{d\,y}\,w\right)+u\,\left(\frac{d}{d\,x}\,w\right)+\frac{d}{d\,t}\,w\right)\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\mu\,\left(\frac{d^2}{d\,y^2}\,u+\frac{d^2}{d\,x^2}\,u\right)-\frac{d}{d\,x}\,p\\ \mu\,\left(\frac{d^2}{d\,z^2}\,v+\frac{d^2}{d\,y^2}\,v+\frac{d^2}{d\,x^2}\,v\right)-\frac{d}{d\,y}\,p\\ \mu\,\left(\frac{d^2}{d\,y^2}\,w+\frac{d^2}{d\,x^2}\,w\right)\end{pmatrix} \tag{8.5.7}$$

```
D1:\delta=sqrt(\nu*t);
assume(\delta<L);
R1:R=U*L/\nu;
D2:\delta/L=1/sqrt(R);
XD1:xd=x/L;
XD2:solve(XD1,x)[1];
DXD1:diff(XD1,x,1);
DXD2:diff(XD1,x,2);
YD1:yd=y/L*sqrt(R);
YD2:solve(YD1,y)[1];
DYD1:diff(YD1,y,1);
DYD2:diff(YD1,y,2);
ZD1:zd=z/L;
ZD2:solve(ZD1,z)[1];
DZD1:diff(ZD1,z,1);
DZD2:diff(ZD1,z,2);
UD1:ud=u/U;
UD2:solve(UD1,u)[1];
VD1:vd=v/U*sqrt(R);
VD2:solve(VD1,v)[1];
```

```
WD1:wd=w/W;
WD2:solve(WD1,w)[1];
WD3:'diff(W,z,1)=0;
P1:pd=p/\rho/U^2;
P2:solve(%,p)[1];
T1:td=t*U/L;
T2:solve(%,t)[1];
DT1:diff(T1,t,1);
```

レイノルズ数：R を下記とし、レイノルズ数が十分大きく、境界層厚さ：δ は物体長さ：L に比べ薄く、$\delta \propto \sqrt{\nu\, t}$ とする。

$$R = \frac{L\,U}{\nu}$$

このとき下記の関係が得られる。

$$\frac{\delta}{L} \propto \frac{1}{\sqrt{R}}$$

上記のことを考慮し、x, y, z, u, v, w, t を下記の関係式で $xd, yd, zd, ud, vd, zd, td$ に置き換える。

$$xd = \frac{x}{L}, \quad yd = \frac{y\,\sqrt{R}}{L}, \quad zd = \frac{z}{L}$$

$$ud = \frac{u}{U}, \quad vd = \frac{v\,\sqrt{R}}{U}, \quad wd = \frac{w}{W}$$

$$pd = \frac{p}{\rho\,U^2}, \quad t = \frac{td\,L}{U}, \quad \frac{d}{d\,t}\,td = \frac{U}{L}$$

```
subst([UD2,VD2,WD2],MAS2);
ev(%,diff);
subst([DXD1,DYD1,DZD1,WD3],%);
MAS3:expand(%*L/U);
subst([UD2,VD2,WD2,P2],NAV2);
ev(%,diff);
subst([DXD1,DYD1,DXD2,DYD2,DZD1,DZD2,DT1]
 ,%);
%/\rho*L/U^2;
NAV3:subst([U=R*\mu/\rho/L],expand(%));
lhs(NAV3)[1][1]=rhs(NAV3)[1][1];
NAV31:lhs(%)=rest(rhs(%),1);
expand(lhs(NAV3)[2][1]/sqrt(R)=
 rhs(NAV3)[2][1]/sqrt(R));
NAV32:0=last(rhs(%));
lhs(NAV3)[3][1]=rhs(NAV3)[3][1];
expand(%/\rho/L/W*\mu*R);
NAV33:lhs(%)=last(rhs(%));
MAS5:subst([ud=u,vd=v,wd=w,xd=x,yd=y,zd=z,
 td=t,pd=p],MAS3);
NAV41:subst([ud=u,vd=v,wd=w,xd=x,yd=y,zd=z,
 td=t,pd=p],lhs(NAV31)=\nu*
 first(rhs(NAV31))+1/\rho*last(
 rhs(NAV31)));
NAV53:subst([ud=u,vd=v,wd=w,xd=x,yd=y,zd=z,
 td=t,pd=p],lhs(NAV33)=\nu*rhs(NAV33));
depends(U,[x]);
P3:p=-1/2*\rho*(U^2+W^2);
diff(P3,x,1);
NAV51:subst([%],NAV41);
MAS5;
NAV51;
NAV53;
```

上記の関係式を (8.5.7) 式に代入すると、

$$\left(\frac{d}{d\,yd}\,ud\right)\,vd + ud\,\left(\frac{d}{d\,xd}\,ud\right) + \frac{d}{d\,td}\,ud = \frac{\frac{d^2}{d\,xd^2}\,ud}{R} + \frac{d^2}{d\,yd^2}\,ud - \frac{d}{d\,xd}\,pd$$

$$\frac{\rho\,\left(\frac{d}{d\,zd}\,vd\right)\,wd\,L\,W}{\mu\,R^2} + \frac{vd\,\left(\frac{d}{d\,yd}\,vd\right)}{R} + \frac{ud\,\left(\frac{d}{d\,xd}\,vd\right)}{R} + \frac{\frac{d}{d\,td}\,vd}{R} = \frac{\frac{d^2}{d\,yd^2}\,vd}{R} + \frac{\frac{d^2}{d\,zd^2}\,vd}{R^2} + \frac{\frac{d^2}{d\,xd^2}\,vd}{R^2} - \frac{d}{d\,yd}\,pd$$

$$vd\,\left(\frac{d}{d\,yd}\,wd\right) + ud\,\left(\frac{d}{d\,xd}\,wd\right) + \frac{d}{d\,td}\,wd = \frac{\frac{d^2}{d\,xd^2}\,wd}{R} + \frac{d^2}{d\,yd^2}\,wd$$

レイノルズ数：R が大きいとして、微少項を省略すると、

$$\left(\frac{d}{d\,yd}\,ud\right)\,vd + ud\,\left(\frac{d}{d\,xd}\,ud\right) + \frac{d}{d\,td}\,ud = \frac{d^2}{d\,yd^2}\,ud - \frac{d}{d\,xd}\,pd$$

$$0 = -\frac{d}{d\,yd}\,pd$$

$$vd\,\left(\frac{d}{d\,yd}\,wd\right) + ud\,\left(\frac{d}{d\,xd}\,wd\right) + \frac{d}{d\,td}\,wd = \frac{d^2}{d\,yd^2}\,wd$$

圧力：p については次式となり、これを上式に代入し、x, y, z, u, v, w に戻すと、質量保存の方程式、境界層の方程式は下記となる。

$$p = -\frac{\rho\,\left(W^2 + U^2\right)}{2}, \quad \frac{d}{d\,x}\,p = -\rho\,U\,\left(\frac{d}{d\,x}\,U\right)$$

$$\frac{d}{d\,y}\,v + \frac{d}{d\,x}\,u = 0$$

$$\left(\frac{d}{d\,y}\,u\right)\,v + u\,\left(\frac{d}{d\,x}\,u\right) + \frac{d}{d\,t}\,u = U\,\left(\frac{d}{d\,x}\,U\right) + \nu\,\left(\frac{d^2}{d\,y^2}\,u\right)$$

$$v\,\left(\frac{d}{d\,y}\,w\right) + u\,\left(\frac{d}{d\,x}\,w\right) + \frac{d}{d\,t}\,w = \nu\,\left(\frac{d^2}{d\,y^2}\,w\right) \tag{8.5.8}$$

8.5.3　平板上の境界層

薄い平板を一様流れ、流速 : U の中に、流向に沿っておいたとき、平板周りの境界層の様子を調べる。ここでレイノルズ数 : R は十分大きいとし、二次元 $x-y$ 座標系の境界層の方程式を用いる。x-y 座標軸の各速度コンポーネントを u, v とする。粘性係数 : μ、動粘性係数 : ν とし、圧力、外力は零とする。

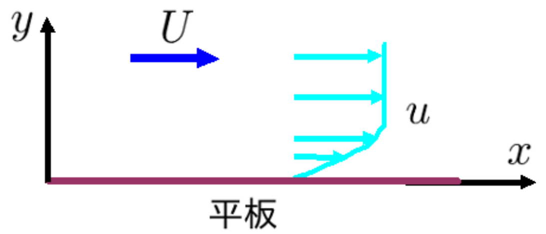


図 8.5.1: 平板上の境界層

```
/* 平板上の境界層 */
kill(all);
load("vector");
load("dynamics");
MAS1:'diff(v,y,1)+'diff(u,x,1)=0;
NAV1:('diff(u,y,1))*v+u*('diff(u,x,1))=\nu
 *('diff(u,y,2));
depends(\Psi,[x,f]);
depends(\eta,[x,y]);
depends(f,[\eta]);
U1:u='diff(\Psi,y,1);
V1:v=-'diff(\Psi,x,1);
ET1:\eta=sqrt(U/\nu/x)*y;
ET2:diff(ET1,y,1);
ET3:diff(ET1,x,1);
ET4:solve(ET1,y)[1];
ET5:diff(ET1,y,2);
```

レイノルズ数 : R が十分大きく、平板では x 方向の圧力変化はない場合、二次元の質量保存の方程式 : (8.5.2) 式と定常状態の境界層の方程式 : (8.5.3) 式は下記となる。

$$\frac{d}{d\,y}\,v+\frac{d}{d\,x}\,u=0 \tag{8.5.9}$$

$$\left(\frac{d}{d\,y}\,u\right)\,v+u\,\left(\frac{d}{d\,x}\,u\right)=\nu\,\left(\frac{d^2}{d\,y^2}\,u\right) \tag{8.5.10}$$

ここで流れ関数 : Ψ を導入し、各流速は、

$$u=\frac{d}{d\,y}\,\Psi,\quad v=-\frac{d}{d\,x}\,\Psi \tag{8.5.11}$$

境界層厚さ : δ は下記の関係で発達するので、

$$\delta\propto\sqrt{\frac{\nu\,x}{U}}$$

y の下記の無次元表記の η を導入する。その関係式は下記となる。

$$\begin{aligned}
&\eta=y\,\sqrt{\frac{U}{\nu\,x}},\quad y=\frac{\eta}{\sqrt{\frac{U}{\nu\,x}}}\\
&\frac{d}{d\,y}\,\eta=\sqrt{\frac{U}{\nu\,x}},\quad \frac{d}{d\,x}\,\eta=-\frac{y\,U}{2\,\nu\,x^2\,\sqrt{\frac{U}{\nu\,x}}},\\
&\frac{d^2}{d\,y^2}\,\eta=0
\end{aligned} \tag{8.5.12}$$

```
PS1:\Psi=sqrt(\nu*U*x)*f;
subst([PS1],U1);
ev(%,diff);
U2:radcan(subst([ET2],%));
subst([PS1],V1);
ev(%,diff);
radcan(subst([ET3],%));
V2:radcan(subst([ET4],%));
NDU1:U2/U;
NDV1:V2/U;
assume(R>0,\nu>0,x>0);
R1:R=U*x/\nu;
R3:solve(%,x)[1];
NDV2:subst([%],NDV1);
NDV3:%*sqrt(R);
subst([U2,V2],MAS1);
ev(%,diff);
radcan(subst([ET2,ET3,ET4],%));
subst([U2,V2],NAV1);
ev(%,diff);
radcan(subst([ET5,ET2,ET3,ET4],%));
lhs(%)-rhs(%)=0;
NAV2:expand(-%/U^2*x);
```

下記の流れ関数 : Ψ を導入する。f は η の関数とする。

$$\Psi=f\,\sqrt{\nu\,x\,U} \tag{8.5.13}$$

上式を (8.5.11) 式に代入し、流速 : u, v を f で表現し、(8.5.12) 式を代入すると、

$$\begin{aligned}
u=&\frac{d}{d\,y}\,\left(f\,\sqrt{\nu\,x\,U}\right)\\
=&\left(\frac{d}{d\,y}\,\eta\right)\,\left(\frac{d}{d\,\eta}\,f\right)\,\sqrt{\nu\,x\,U}\\
=&\left(\frac{d}{d\,\eta}\,f\right)\,U
\end{aligned} \tag{8.5.14}$$

$$\begin{aligned}
v=&-\frac{d}{d\,x}\,\left(f\,\sqrt{\nu\,x\,U}\right)\\
=&-\left(\frac{d}{d\,x}\,\eta\right)\,\left(\frac{d}{d\,\eta}\,f\right)\,\sqrt{\nu\,x\,U}-\frac{f\,\nu\,U}{2\,\sqrt{\nu\,x\,U}}\\
=&\frac{\left(\eta\,\left(\frac{d}{d\,\eta}\,f\right)-f\right)\,\sqrt{\nu}\,\sqrt{U}}{2\,\sqrt{x}}
\end{aligned} \tag{8.5.15}$$

下記のレイノルズ数：R を用いて、上記の u,v を無次元化すると、

$$R=\frac{x\,U}{\nu}$$

$$\frac{u}{U}=\frac{d}{d\,\eta}\,f \tag{8.5.16}$$

$$\frac{v}{U}=\frac{\eta\,\left(\frac{d}{d\,\eta}\,f\right)-f}{2\,\sqrt{R}}$$

$$\frac{v\,\sqrt{R}}{U}=\frac{\eta\,\left(\frac{d}{d\,\eta}\,f\right)-f}{2} \tag{8.5.17}$$

質量保存の方程式：(8.5.9) 式に、(8.5.14) 式、(8.5.15) 式、(8.5.12) 式を代入すると、下記となり、これを整理すると零となり、当然ながら質量保存の方程式は満足されている。

$$\left(\frac{d}{d\,x}\,\eta\right)\,\left(\frac{d^2}{d\,\eta^2}\,f\right)\,U+\frac{\eta\,\left(\frac{d}{d\,y}\,\eta\right)\,\left(\frac{d^2}{d\,\eta^2}\,f\right)\,\sqrt{\nu}\,\sqrt{U}}{2\,\sqrt{x}}=0$$

境界層の方程式：(8.5.10) 式に、(8.5.14) 式、(8.5.15) 式、(8.5.12) 式を代入すると、下記となり、

$$\left(\frac{d}{d\,x}\,\eta\right)\,\left(\frac{d}{d\,\eta}\,f\right)\,\left(\frac{d^2}{d\,\eta^2}\,f\right)\,U^2+\frac{\left(\frac{d}{d\,y}\,\eta\right)\,\left(\eta\,\left(\frac{d}{d\,\eta}\,f\right)-f\right)\,\left(\frac{d^2}{d\,\eta^2}\,f\right)\,\sqrt{\nu}\,U^{\frac{3}{2}}}{2\,\sqrt{x}}$$
$$=\nu\,\left(\left(\frac{d}{d\,y}\,\eta\right)^2\,\left(\frac{d^3}{d\,\eta^3}\,f\right)\,U+\left(\frac{d^2}{d\,y^2}\,\eta\right)\,\left(\frac{d^2}{d\,\eta^2}\,f\right)\,U\right)$$

上式を整理して、

$$-\frac{f\,\left(\frac{d^2}{d\,\eta^2}\,f\right)\,U^2}{2\,x}=\frac{\left(\frac{d^3}{d\,\eta^3}\,f\right)\,U^2}{x}$$

右辺を左辺に移動して、整理し、

$$\frac{d^3}{d\,\eta^3}\,f+\frac{f\,\left(\frac{d^2}{d\,\eta^2}\,f\right)}{2}=0 \tag{8.5.18}$$

```
Tmax:10;
Tmin:0;
N:200;
DDF1:0.3320575;
dT:(Tmax-Tmin)/float(N);
sol:rk([-1/2*F*H,H,G],[H,G,F],[DDF1,0,0],
 [t,Tmin,Tmax,dT]);
```

```
listF:[[sol[1][1],sol[1][4]*0.1]];
for J:2 thru N do(listF:append(listF,
  [[sol[J][1],sol[J][4]*0.1]]));
listdF:[[sol[1][1],sol[1][3]]];
for J:2 thru N do(listdF:append(listdF,
  [[sol[J][1],sol[J][3]]]));
listddF:[[sol[1][1],sol[1][2]]];
for J:2 thru N do(listddF:append(listddF,
  [[sol[J][1],sol[J][2]]]));
plot2d([[discrete,listF],[discrete,listdF]
 ,[discrete,listddF]]);
listV:[[sol[1][1],1/2*(sol[1][1]*sol[1][3]
 -sol[1][4])]];
for J:2 thru N do(listV:append(listV,
  [[sol[J][1],1/2*(sol[J][1]*sol[J][3]
 -sol[J][4])]]));
plot2d([[discrete,listdF],[discrete,
 listV]]);
```

(8.5.18) 式を数値解析、Maxima の Runge-Kutta 法を用いて解く。ここで、下記のように置き換える。

$$f=F,\quad \frac{d}{d\,\eta}\,f=G,\quad \frac{d^2}{d\,\eta^2}\,f=H$$

境界条件として、$y=0$ で $u=0,v=0$ と $y\to\infty$ で $u\to U$ である。
Runge-Kutta 法の初期条件として、前記の境界条件に対応し、物体表面では $\eta=0$ で、$u=0$ は (8.5.14) 式から $\frac{d}{d\,\eta}\,f=0$、また、$v=0$ は (8.5.15) 式から $f=0$ となる。$y\to\infty$ で $u\to U$ に対応する条件として、$\eta\to\infty$ で $\frac{u}{U}=\frac{d}{d\,\eta}\,f\to 1$ となる。$\eta\to\infty$ は Runge-Kutta 法の初期条件として、与えられないので、$\frac{d^2}{d\,\eta^2}\,f$ を適当に与え、$\eta\to\infty$ で $\frac{d}{d\,\eta}\,f\to 1$ となる初期値を求めることになる。結果として初期値：$\frac{d^2}{d\,\eta^2}\,f=0.3320575$ が得られた。下記に (8.5.18) 式を数値解析した結果および速度分布を下記に示す。

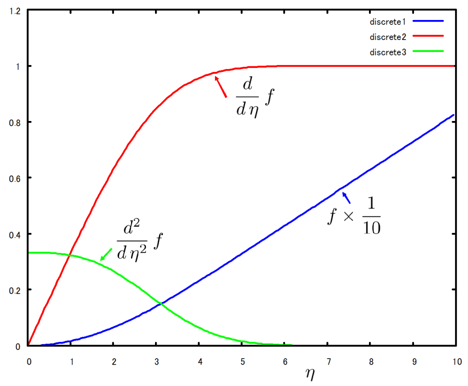


図 8.5.2: 数値解析結果

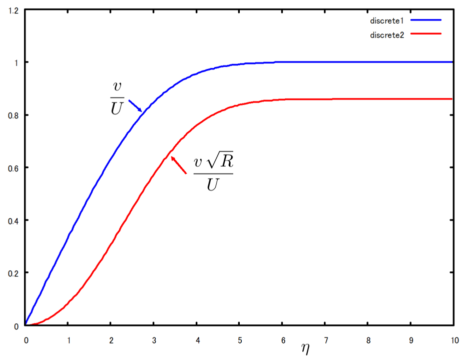


図 8.5.3: 流速分布

```
TW1:\tau=\mu*'diff(u,y,1);
'diff(lhs(U2),y,1)=diff(rhs(U2),y,1);
subst([ET2],%);
subst([%],TW1);
TW2:subst(['diff(f,eta,2)=DDF1],%);
assume(x>0,U>0);
D1:D=2*integrate(rhs(TW2),x,0,x);
D2:D1/(\rho*U^2*x);
RH1:\mu=\nu*\rho;
D3:lhs(D2)=subst([%,RH1],rhs(D2));
C[f]=rhs(%);
subst([R3,RH1],TW2);
TW3:%/\rho/U^2;
TW31:subst([R=t],rhs(TW3));
DE3:subst([\eta=4.91,y=\delta],ET4);
subst([R3],%)/\nu*U;
U3:1-U2/U;
ET2;
d*\eta/dy=rhs(ET2);
DET2:solve(%,dy)[1];
U3*%;
U31:rhs(%)/d/\eta;
S:0;
for J:2 thru N do(S:S+(1-(sol[J-1][3]
 +sol[J][3])/2)*sol[2][1]);
DE1:\delta[1]=subst([1-'diff(f,eta,1)=S]
 ,U31);
U4:U2/U*(1-U2/U);
U4*DET2;
U41:rhs(%)/d/\eta;
S3:0;
for J:2 thru N do(S3:S3+(1-(sol[J-1][3]
 +sol[J][3])/2)*sol[2][1]);
```

```
DE1:\delta[1]=subst([1-'diff(f,eta,1)=S3]
 ,U31);
DE11:subst([R3,R=t],%)/\nu*U;
S4:0;
for J:2 thru N do(S4:S4+(sol[J-1][3]*(1-
 sol[J-1][3])+sol[J][3]*(1-sol[J][3]))
 /2*sol[2][1]);
DE2:\delta[2]=S4*sqrt(nu)/sqrt(U/x);
DE21:subst([R3,R=t],%)/\nu*U;
plot2d([TW31,rhs(DE11),rhs(DE21)],
 [t,0.01,2],[x,0,2],[legend,"tau",
 "delta1","delta2"]);
```

平板に作用する剪断応力：τ は次式で得られる。

$$\tau=\mu\left(\frac{d}{d\,y}\,u\right)$$

ここで、

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\,y}\,u&=\left(\frac{d}{d\,y}\,\eta\right)\left(\frac{d^2}{d\,\eta^2}\,f\right)\,U\\&=\left(\frac{d^2}{d\,\eta^2}\,f\right)\,U\,\sqrt{\frac{U}{\nu\,x}}\end{aligned}$$

上式を剪断応力式に代入し、$\eta=0$ の $\frac{d^2}{d\,\eta^2}\,f$、即ち、初期値：$\frac{d^2}{d\,\eta^2}\,f=0.3320575$ を代入すれば、

$$\begin{aligned}\tau=&\left(\frac{d^2}{d\,\eta^2}\,f\right)\,\mu\,U\,\sqrt{\frac{U}{\nu\,x}}\\\approx&0.332\,\mu\,U\,\sqrt{\frac{U}{\nu\,x}}\end{aligned}\tag{8.5.19}$$

上式を無次元化し、

$$\frac{\tau}{\rho\,U^2}\approx\frac{0.332}{\sqrt{R}}\tag{8.5.20}$$

平板の両面の抗力は上式を積分し、

$$D=2\int_0^x\tau\,dx=\frac{1.32823\,\mu\,\sqrt{x}\,U^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\nu}}$$

上式を無次元化し、

$$\frac{D}{\rho\,x\,U^2}=\frac{1.328}{\sqrt{R}}\tag{8.5.21}$$

境界層厚さとして、$0.99U$ の位置とすると、数値解析結果から、$\eta=4.91$ となり、(8.5.12) 式から、

$$\delta\approx 4.91\sqrt{\frac{\nu\,x}{U}}\tag{8.5.22}$$

おしのけ厚さ：δ_1 は、下記で定義され、それを数値積分すると、

$$\delta_1 = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy = \int_0^\infty \frac{\left(1 - \frac{d}{d\eta} f\right) \sqrt{\nu}}{\sqrt{\frac{U}{x}}} d\eta$$
$$= \frac{1.720853866546068 \sqrt{\nu}}{\sqrt{\frac{U}{x}}}$$
$$\approx 1.721 \sqrt{\frac{\nu x}{U}} \tag{8.5.23}$$

上式を無次元化し、

$$\frac{\delta_1 U}{\nu} \approx 1.721 \sqrt{R}$$

運動量厚さ : δ_2 は、下記で定義され、それを数値積分すると、

$$\delta_2 = \int_0^\infty \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy$$
$$= \int_0^\infty \frac{\left(1 - \frac{d}{d\eta} f\right) \left(\frac{d}{d\eta} f\right) \sqrt{\nu} \sqrt{x}}{\sqrt{U}} d\eta \tag{8.5.24}$$
$$= \frac{0.66404313214512 \sqrt{\nu} \sqrt{x}}{\sqrt{U}}$$
$$\approx 0.664 \sqrt{\frac{\nu x}{U}}$$

上式を無次元化し、

$$\frac{\delta_2 U}{\nu} \approx 0.664 \sqrt{R}$$

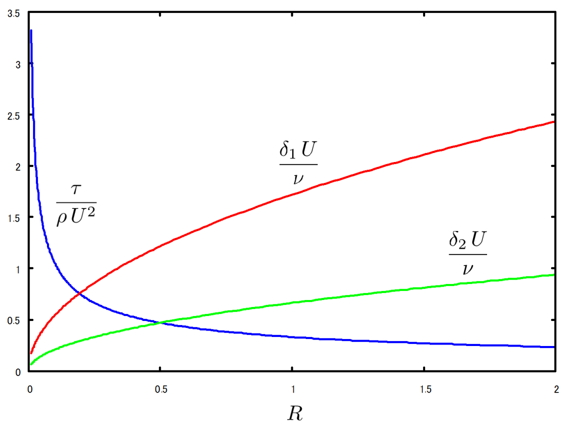


図 8.5.4: 剪断応力・おしのけ厚さ・運動量厚さの分布

以上の結果から、境界層の厚さは距離の平方根に比例する。剪断応力は距離の平方根に逆比例し、前方で大きな剪断力が発生する。

8.5.4 オリフィスからの二次元ジェット

流体が壁の細いオリフィス（隙間）から周囲も同じ流体の中に噴出する二次元粘性流れについて調べる [1]。低レイノルズ数では、噴流は全ての方向に広がる。高レイノルズ数では x 軸周辺の細長い噴流となる。そこで、ここではこの高レイノルズ数の細長い噴流について調べる。

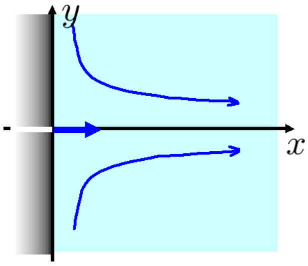


図 8.5.5: オリフィスからの二次元ジェット

```
/* 二次元ジェット */
kill(all);
load("vector");
MAS2:'diff(v(x,y),y,1)+'diff(u(x,y),x,1)=0;
NAV2:v(x,y)*('diff(u(x,y),y,1))+u(x,y)
 *('diff(u(x,y),x,1))=nu*('diff(u(x,y),y
 ,2));
F1:F=\rho*'integrate(u(x,y)^2,y,minf,inf);
depends(f,[a]);
depends(a,[x,y]);
Y1:a=y/x^n;
Y2:diff(Y1,y,1);
Y3:diff(Y1,y,2);
Y4:diff(Y1,x,1);
Y5:solve(Y1,y)[1];
PS1:\Psi=6*\nu*x^m*f;
U1:u(x,y)='diff(\Psi,y,1);
V1:v(x,y)=-'diff(\Psi,x,1);
subst([PS1],U1);
ev(%,diff);
U2:subst([Y2],%);
subst([PS1],V1);
ev(%,diff);
V2:lhs(%)=subst([Y4],rhs(%));
```

噴流の方向を x 軸とする。x-y 座標軸の各速度コンポーネントを u, v とし、動粘性係数：ν、圧力、外力は零とする。質量保存の方程式：(8.5.2) 式とレイノルズ数の大きい流れの二次元 $x-y$ 座標系の定常状態の境界層の方程式：(8.5.3) 式を用いる。

$$\frac{d}{d\,y}\,\mathrm{v}\,(x,y)+\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{u}\,(x,y)=0 \tag{8.5.25}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{v}\,(x,y)\,\left(\frac{d}{d\,y}\,\mathrm{u}\,(x,y)\right)+\mathrm{u}\,(x,y)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{u}\,(x,y)\right)\\=\nu\,\left(\frac{d^2}{d\,y^2}\,\mathrm{u}\,(x,y)\right)\end{aligned} \tag{8.5.26}$$

また、ある断面の噴流のよる流体の力：F は一定でないといけない。

$$F=\rho\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{u}\,(x,y)^2dy \tag{8.5.27}$$

ここで流れ関数：Ψ を導入すると、質量保存の方程式：(8.5.25) 式は満足される。次に関数の形として、各断面で速度分布が相似になる下記の変数分離型とする。

$$\Psi\,\propto\,x^m f\left(\frac{y}{x^n}\right)$$

以上から、流れ関数を下記とする。

$$\Psi=6\,f\,\nu\,x^m\qquad f=f\left(\frac{y}{x^n}\right) \tag{8.5.28}$$

下記の a を導入し、その関係式は、

$$\begin{aligned}&a=\frac{y}{x^n},\quad y=a\,x^n,\quad \frac{d}{d\,y}\,a=\frac{1}{x^n}\\&\frac{d^2}{d\,y^2}\,a=0,\quad \frac{d}{d\,x}\,a=-n\,x^{-n-1}\,y\end{aligned} \tag{8.5.29}$$

流速：u, v は下記で得られる。

$$\mathrm{u}\,(x,y)=\frac{d}{d\,y}\,\Psi,\quad \mathrm{v}\,(x,y)=-\frac{d}{d\,x}\,\Psi$$

上式に、(8.5.28) 式、(8.5.29) 式を代入し、

$$\begin{aligned}\mathrm{u}\,(x,y)&=\frac{d}{d\,y}\,(6\,f\,\nu\,x^m)\\&=6\,\left(\frac{d}{d\,y}\,a\right)\,\left(\frac{d}{d\,a}\,f\right)\,\nu\,x^m\\&=6\,\left(\frac{d}{d\,a}\,f\right)\,\nu\,x^{m-n}\end{aligned} \tag{8.5.30}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{v}\,(x,y)&=-\frac{d}{d\,x}\,(6\,f\,\nu\,x^m)\\&=-6\,\left(\frac{d}{d\,x}\,a\right)\,\left(\frac{d}{d\,a}\,f\right)\,\nu\,x^m-6\,f\,m\,\nu\,x^{m-1}\\&=6\,\left(\frac{d}{d\,a}\,f\right)\,n\,\nu\,x^{-n+m-1}\,y-6\,f\,m\,\nu\,x^{m-1}\end{aligned} \tag{8.5.31}$$

[1] Dr Harmann Schlihting : Boundary Layer Theory [12], 9.g The two-dimensional jet, P.164 & G. K. Batchelor : 入門　流体力学 [18]、5.12(a) P.344

```
subst([U2,V2],MAS2);
ev(%,diff);
MAS3:factor(subst([Y2,Y3,Y4],%));
subst([U2,V2],NAV2);
ev(%,diff);
NAV3:factor(subst([Y2,Y3,Y4],%));
MN1:-2*n+2*m-1=m-3*n;
'u(x,y)^2*dy=u(x,y)^2/'diff(a,y,1)*da;
lhs(%)=subst([U2,Y2],rhs(%));
MN2:n+2*(m-n)=0;
MN3:solve([MN1,MN2],[m,n])[1];
```

質量保存の方程式：(8.5.25) 式に u, v の (8.5.30) 式、(8.5.31) 式を代入し、

$$\frac{d}{d\,y}\left(6\left(\frac{d}{d\,a}\,f\right)\,n\,\nu\,x^{-n+m-1}\,y-6\,f\,m\,\nu\,x^{m-1}\right)+\frac{d}{d\,x}\left(6\left(\frac{d}{d\,a}\,f\right)\,\nu\,x^{m-n}\right)=0$$

上式を (8.5.29) 式を用いて整理すると、左辺が零となり、質量保存の方程式は当然ながら満足されている。
境界層の方程式:(8.5.26) 式に u, v の (8.5.30) 式、(8.5.31) 式を代入し、

$$\begin{aligned}&\left(\frac{d}{d\,y}\left(6\left(\frac{d}{d\,a}\,f\right)\,\nu\,x^{m-n}\right)\right)\\&\times\left(6\left(\frac{d}{d\,a}\,f\right)\,n\,\nu\,x^{-n+m-1}\,y-6\,f\,m\,\nu\,x^{m-1}\right)\\&+6\left(\frac{d}{d\,a}\,f\right)\,\nu\,x^{m-n}\left(\frac{d}{d\,x}\left(6\left(\frac{d}{d\,a}\,f\right)\,\nu\,x^{m-n}\right)\right)\\&=\nu\left(\frac{d^2}{d\,y^2}\left(6\left(\frac{d}{d\,a}\,f\right)\,\nu\,x^{m-n}\right)\right)\end{aligned}$$

上式を (8.5.29) 式を用いて整理すると、

$$\begin{aligned}&-36\left(\left(\frac{d}{d\,a}\,f\right)^2 n+f\left(\frac{d^2}{d\,a^2}\,f\right)m\right.\\&\qquad\left.-\left(\frac{d}{d\,a}\,f\right)^2 m\right)\nu^2\,x^{-2\,n+2\,m-1}\\&=6\left(\frac{d^3}{d\,a^3}\,f\right)\nu^2\,x^{m-3\,n}\end{aligned}\tag{8.5.32}$$

以上から、x の次数を合わせて、下記の関係を得る。

$$-2\,n+2\,m-1=m-3\,n\tag{8.5.33}$$

流体の力：(8.5.27) 式の要素式に u の (8.5.30) 式を代入し、

$$\begin{aligned}dy\,\mathrm{u}\,(x,y)^2=&\frac{da\,\mathrm{u}\,(x,y)^2}{\frac{d}{d\,y}\,a}\\=&36\,da\left(\frac{d}{d\,a}\,f\right)^2\nu^2\,x^{n+2\,(m-n)}\end{aligned}$$

ここで、F は x に依存しないから、下記の関係を得る。

$$n+2\,(m-n)=0\tag{8.5.34}$$

(8.5.33) 式、(8.5.34) 式を解いて、

$$m=\frac{1}{3},n=\frac{2}{3}\tag{8.5.35}$$

```
PS2:subst([MN3],PS1);
YPS2:subst([MN3],Y1);
YA1:solve(%,y)[1];
U3:subst([MN3],U2);
diff(U3,y,1);
subst([Y2],%);
DU3:subst([MN3],%);
subst([MN3],V2);
V3:lhs(%)=factor(subst([YA1],rhs(%)));
subst([MN3],NAV3);
factor(lhs(%)-rhs(%))=0;
NAV4:-%/6/\nu^2*x^(5/3);
diff(f,a,2)+2*f*diff(f,a,1)=%c1;
NAV5:subst([%c1=0],%);
diff(%,a,1)-NAV4;
NAV6:diff(f,a,1)+f^2=1;
diff(%,a,2)-NAV4;
```

(8.5.35) 式の結果を (8.5.28) 式、(8.5.29) 式、(8.5.30) 式、(8.5.32) 式に代入すると、

$$\Psi=6\,f\,\nu\,x^{\frac{1}{3}}\tag{8.5.36}$$

$$\begin{aligned}&a=\frac{y}{x^{\frac{2}{3}}},\quad y=a\,x^{\frac{2}{3}}\\&\mathrm{u}\,(x,y)=\frac{6\,\left(\frac{d}{d\,a}\,f\right)\,\nu}{x^{\frac{1}{3}}}\quad\frac{d}{d\,y}\,\mathrm{u}\,(x,y)=\frac{6\,\left(\frac{d^2}{d\,a^2}\,f\right)\,\nu}{x}\\&\mathrm{v}\,(x,y)=\frac{2\,\left(2\,a\,\left(\frac{d}{d\,a}\,f\right)-f\right)\,\nu}{x^{\frac{2}{3}}}\end{aligned}\tag{8.5.37}$$

境界層の方程式：(8.5.32) 式は、

$$-\frac{36\left(\frac{f\,\left(\frac{d^2}{d\,a^2}\,f\right)}{3}+\frac{\left(\frac{d}{d\,a}\,f\right)^2}{3}\right)\nu^2}{x^{\frac{5}{3}}}=\frac{6\,\left(\frac{d^3}{d\,a^3}\,f\right)\,\nu^2}{x^{\frac{5}{3}}}$$

上式を整理し、

$$\frac{d^3}{d\,a^3}\,f+2\,f\left(\frac{d^2}{d\,a^2}\,f\right)+2\left(\frac{d}{d\,a}\,f\right)^2=0$$

上式を積分し、

$$\frac{d^2}{d\,a^2}\,f+2\,f\left(\frac{d}{d\,a}\,f\right)=\%c1$$

ここで、境界条件として、$y=0$ で $\mathrm{v}=0$ は、$a=0$ で、(8.5.37) 式から、$f=0$ となる。また、$y=0$ で u の x

軸対称性から、$\frac{d}{d\,y}\,\mathrm{u}=0$ は、$a=0$ で $\frac{d^2}{d\,a^2}\,f=0$ となり、$\%c1=0$ となる。これから、

$$\frac{d^2}{d\,a^2}\,f+2\,f\,\left(\frac{d}{d\,a}\,f\right)=0$$

上式を更に積分し、

$$\frac{d}{d\,a}\,f+f^2=\%c2$$

ここで、x 軸上では、$y=0$ で $\mathrm{v}=0$ は、$a=0$ で、(8.5.37) 式から、$f=0$ となる。また、$y=0$ で $\mathrm{u}=\mathrm{u}_{MAX}\neq 0$ で、$\frac{d}{d\,a}\,f\neq 0$ で、$\%c2\neq 0$ で $\%c2=1$ と仮にする。

$$\frac{d}{d\,a}\,f+f^2=1 \tag{8.5.38}$$

```
subst([f=g(a)],NAV6);
ode2(%,g(a),a);
logcontract(%);
subst([%c=0],%);
atanh(g(a))=a;
solve(%,g(a))[1];
FANS1:f=A*subst([a=A*a],rhs(%));
subst([FANS1,Y1],PS1);
PS3:subst([MN3],%);
subst([PS3],U1);
U4:ev(%,diff);
F2:subst([U4],F1);
D1:h=(y*A)/x^(2/3);
D2:solve(%,y)[1];
D3:'diff(lhs(D1),y,1)=diff(rhs(D1),y,1);
subst([D2],rhs(U4));
\rho*%^2/rhs(D3);
F='integrate(%,h,minf,inf);
ev(%,integrate);
```

上式を $f\rightarrow \mathrm{g}\,(a)$ と置き換えて、

$$\frac{d}{d\,a}\,\mathrm{g}\,(a)+\mathrm{g}\,(a)^2=1$$

$ode2$ 関数で解くと、

$$\frac{\log\left(\mathrm{g}\,(a)+1\right)-\log\left(\mathrm{g}\,(a)-1\right)}{2}=a+\%c$$

上式は次式のように書き換えることが出来、

$$\mathrm{atanh}\left(\mathrm{g}\,(a)\right)=a \quad \rightarrow \quad \mathrm{g}\,(a)=\tanh\left(a\right)$$

以上から、定数を考慮し、f は、

$$f=A\tanh\left(a\,A\right)$$

(8.5.36) 式から流れ関数：Ψ は、

$$\Psi=6\,\nu\,x^{\frac{1}{3}}\,A\tanh\left(\frac{y\,A}{x^{\frac{2}{3}}}\right) \tag{8.5.39}$$

$\mathrm{u}\,(x,y)$ は、(8.5.37) 式から

$$\mathrm{u}\,(x,y)=\frac{6\,\nu\,A^2\,\mathrm{sech}\left(\frac{y\,A}{x^{\frac{2}{3}}}\right)^2}{x^{\frac{1}{3}}} \tag{8.5.40}$$

断面の噴流のよる流体の力：F は上式を (8.5.27) 式に代入し、

$$F=\frac{36\,\nu^2\,\rho\,A^4}{x^{\frac{2}{3}}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{sech}\left(\frac{y\,A}{x^{\frac{2}{3}}}\right)^4 dy$$

下記の置き換えを行って、

$$h=\frac{y\,A}{x^{\frac{2}{3}}},\quad y=\frac{h\,x^{\frac{2}{3}}}{A},\quad \frac{d}{d\,y}\,h=\frac{A}{x^{\frac{2}{3}}}$$

上式を (8.5.40) 式に代入し、

$$\mathrm{u}\,(x,y)=\frac{6\,\mathrm{sech}\,(h)^2\,\nu\,A^2}{x^{\frac{1}{3}}}$$

$$\frac{\rho\,\mathrm{u}\,(x,y)^2}{\frac{d}{d\,y}\,h}=36\,\mathrm{sech}\,(h)^4\,\nu^2\,\rho\,A^3$$

上式から、断面の噴流のよる流体の力：F は下記となり、主流：x 軸方向により変化していない。

$$F=36\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{sech}\,(h)^4 dh\,\nu^2\,\rho\,A^3=48\,\nu^2\,\rho\,A^3 \tag{8.5.41}$$

```
subst([D2],rhs(PS3));
subst([tanh(h)=(%e^h-%e^(-h))/(%e^h
 +%e^(-h))],%);
subst([D1],%);
subst([A=1,\nu=1],%);
```

流線は (8.5.39) 式を使って、下記の gnuplot で描いた。

```
#!/gnuplot
set xrange [0:6]
set yrange [-3:3]
set isosamples 150,150
set contour base
set cntrparam levels incremental
  -100,0.5,100
unset key
unset surface
set view map
splot 0.6*10*x**(0.333)*tanh((0.1*10*y)/x
 **(0.66666))
# EOF
```

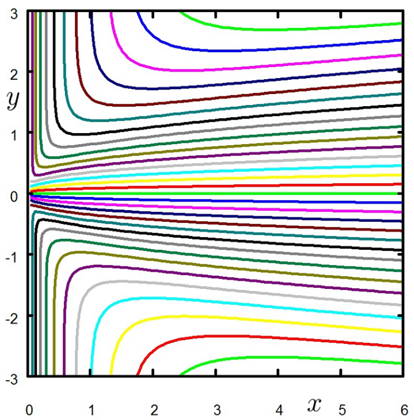


図 8.5.6: 二次元ジェット流線　$A = 1, \nu = 1$

8.5.5　二次元物体後方の流れ

一様流速：U_0 の中に置かれた二次元物体後方には、伴流が生じる。この伴流と物体抵抗との関係を調べる [1]。一様流方向を x 軸、後流の評価を行う場所：x に y 軸を置く。x における流速分布：$u(x,y)$、伴流の半幅:$b(x)$、検査面の深さ:H とする。

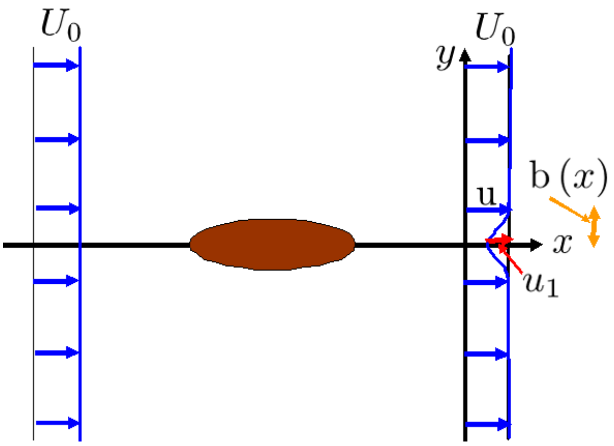


図 8.5.7: 二次元物体後方の流れ

```
/* 二次元物体後方の流れ  */
kill(all);
load("vector");
depends(\eta,[y,x]);
depends(f,[\eta]);
U11:u[1](x,y)=U[0]-u(x,y);
U12:solve(%,u(x,y))[1];
D1:D=H*\rho*'integrate(u(x,y)*(U[0]-u(x,y))
 ,y,minf,inf);
D11:subst([U12],%);
expand(%);
D2:subst([u[1](x,y)^2=0],%);
subst([D=1/2*\rho*U[0]^2*C[D]*C[0]*H],%);
D3:%/\rho/H/U[0];
ML1:\tau(x,y)=\rho*L[MIX]^2*'diff(u(x,y),y
 ,1)^2;
DML1:diff(%,y,1);
TA1:\tau(x,y)=\mu*'diff(u(x,y),y,1);
TA2:'diff(lhs(%),y,1)=diff(rhs(%),y,1);
TA21:solve(%,'diff(u(x,y),y,2))[1];
```

x における一様流速：U_0 と流速分布：$u(x,y)$ の差を下記の $u_1(x,y)$ とする。

$$u_1(x,y) = U_0 - \mathrm{u}(x,y) \tag{8.5.42}$$

単位時間に失った運動量は、物体より十分前方の検査面では、流速は一様流と一致し、運動量損失はない。x における後方検査面では、運動量損失は次式となり、物体抵抗に等しい。上式を代入し、$u_1(x,y)^2$ は他項に比べ十分小さいので省略し、下記となる。

$$\begin{aligned} D =& \rho \int_{-\infty}^{\infty} (U_0 - \mathrm{u}(x,y))\, \mathrm{u}(x,y)\, dy\, H \\ =& \rho \int_{-\infty}^{\infty} (U_0 - u_1(x,y))\, u_1(x,y)\, dy\, H \\ =& \rho \int_{-\infty}^{\infty} U_0\, u_1(x,y) - u_1(x,y)^2 dy\, H \\ =& U_0\, \rho \int_{-\infty}^{\infty} u_1(x,y)\, dy\, H \end{aligned}$$

抵抗係数：C_D、物体長さ:C_0 として、抵抗：D と置き換えると、

$$\frac{C_0\, U_0^2\, \rho\, C_D\, H}{2} = U_0\, \rho \int_{-\infty}^{\infty} u_1(x,y)\, dy\, H$$

上式より、

$$\frac{C_0\, U_0\, C_D}{2} = \int_{-\infty}^{\infty} u_1(x,y)\, dy \tag{8.5.43}$$

混合距離：L_{MIX} とすると、下記の関係がある。

$$\tau(x,y) = \rho \left(\frac{d}{d\,y} \mathrm{u}(x,y) \right)^2 L_{MIX}^2 \tag{8.5.44}$$

上式から、

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\,y} \tau(x,y) =& 2\,\rho \left(\frac{d}{d\,y} \mathrm{u}(x,y) \right) \\ & \times \left(\frac{d^2}{d\,y^2} \mathrm{u}(x,y) \right) L_{MIX}^2 \end{aligned} \tag{8.5.45}$$

剪断力は次式で与えられる。

$$\tau(x,y) = \mu \left(\frac{d}{d\,y} \mathrm{u}(x,y) \right)$$

上式から次の関係が得られる。

$$\frac{d}{d\,y} \tau(x,y) = \mu \left(\frac{d^2}{d\,y^2} \mathrm{u}(x,y) \right)$$

$$\frac{d^2}{d\,y^2} \mathrm{u}(x,y) = \frac{\frac{d}{d\,y} \tau(x,y)}{\mu} \tag{8.5.46}$$

```
'diff(v,y,1)+'diff(u,x,1)=0;
MAS1:subst([u=u(x,y),v=v(x,y)],%);
('diff(u,y,1))*v+u*('diff(u,x,1))+'diff(u,
 t,1)=nu*('diff(u,y,2))-'diff(p,x,1)/rho;
NAV1:subst([u=u(x,y),v=v(x,y)],%);
subst(['diff(u(x,y),t,1)=0,'diff(p,x,1)=0]
 ,NAV1);
subst([U12],%);
expand(ev(%,diff));
NAV11:last(lhs(%))=rhs(%);
```

[1]Dr Harmann Schlihting : Boundary Layer Theory [12)], 13.c.3 Two-dimensional wake behind a single body, P.600

```
assume(L[MIX]>0);
subst(['diff(u(x,y),t,1)=0,'diff(p,x,1)=0
 ,TA21,\nu=\mu/\rho,DML1],NAV1);
subst([U12],%);
expand(ev(%,diff));
NAV2:last(lhs(%))=rhs(%);
B1:b(x)=\alpha*x^m;
ET1:\eta=y/b(x);
ET2:'diff(lhs(ET1),y,1)=diff(rhs(ET1),y,1);
ET3:'diff(lhs(ET1),y,2)=diff(rhs(ET1),y,2);
ET4:'diff(lhs(ET1),x,1)=diff(rhs(ET1),x,1);
ET5:solve(ET1,y)[1];
```

x 軸方向の Navier-Stokes の式：(8.1.9) 式で、定常状態で、x における後方検査面では、圧力変化はなく次式となる。

$$\mathrm{v}(x,y)\left(\frac{d}{dy}\mathrm{u}(x,y)\right)+\mathrm{u}(x,y)\left(\frac{d}{dx}\mathrm{u}(x,y)\right)=\nu\left(\frac{d^2}{dy^2}\mathrm{u}(x,y)\right) \tag{8.5.47}$$

上式に、(8.5.42) 式を代入し、

$$\begin{aligned}&\mathrm{v}(x,y)\left(\frac{d}{dy}\left(U_0-u_1(x,y)\right)\right)\\&\quad+\left(U_0-u_1(x,y)\right)\left(\frac{d}{dx}\left(U_0-u_1(x,y)\right)\right)\\&=\nu\left(\frac{d^2}{dy^2}\left(U_0-u_1(x,y)\right)\right)\end{aligned}$$

展開して、

$$\begin{aligned}&-\mathrm{v}(x,y)\left(\frac{d}{dy}u_1(x,y)\right)\\&+u_1(x,y)\left(\frac{d}{dx}u_1(x,y)\right)-U_0\left(\frac{d}{dx}u_1(x,y)\right)\\&=-\nu\left(\frac{d^2}{dy^2}u_1(x,y)\right)\end{aligned}$$

微少項を省略し、次式を得る。

$$-U_0\left(\frac{d}{dx}u_1(x,y)\right)=-\nu\left(\frac{d^2}{dy^2}u_1(x,y)\right) \tag{8.5.48}$$

x 軸方向の Navier-Stokes の式の (8.5.47) 式に (8.5.46) 式を代入し、更に (8.5.45) 式を代入すると、混合距離：L_{MIX} を使った表記式を得る。

$$\begin{aligned}&\mathrm{v}(x,y)\left(\frac{d}{dy}\mathrm{u}(x,y)\right)+\mathrm{u}(x,y)\left(\frac{d}{dx}\mathrm{u}(x,y)\right)\\&\quad=2\left(\frac{d}{dy}\mathrm{u}(x,y)\right)\left(\frac{d^2}{dy^2}\mathrm{u}(x,y)\right)L_{MIX}^2\end{aligned}$$

上式に、(8.5.42) 式を代入し、展開して、

$$\begin{aligned}&-\mathrm{v}(x,y)\left(\frac{d}{dy}u_1(x,y)\right)\\&\quad+u_1(x,y)\left(\frac{d}{dx}u_1(x,y)\right)-U_0\left(\frac{d}{dx}u_1(x,y)\right)\\&=2\left(\frac{d}{dy}u_1(x,y)\right)\left(\frac{d^2}{dy^2}u_1(x,y)\right)L_{MIX}^2\end{aligned}$$

微少項を省略し、次式を得る。

$$\begin{aligned}-U_0\left(\frac{d}{dx}u_1(x,y)\right)=&2\left(\frac{d}{dy}u_1(x,y)\right)\\&\times\left(\frac{d^2}{dy^2}u_1(x,y)\right)L_{MIX}^2\end{aligned} \tag{8.5.49}$$

```
U2:u[1](x,y)=U[0]*\beta*x^n*f;
DUX2:diff(U2,x,1);
diff(U2,y,1);
DUY2:subst([ET2,B1],%);
diff(U2,y,2);
DUY3:subst([ET2,ET3,B1],%);
subst([DUX2,DUY2,DUY3,ET4,ET5,B1],NAV11);
factor(ev(%,diff));
u[1](x,y)*dy;
subst([dy=d*\eta*b(x)],%);
subst([B1,U2],%);
MN1:n-1=n-2*m;
MN2:m+n=0;
MN3:solve([MN1,MN2],[m,n])[1];
subst([MN3],B1);
B3:subst([\alpha=B[0]*sqrt(C[D]*C[0])],%);
B31:solve(B3^2,x)[1];
subst([MN3],U2);
U3:subst([\beta=sqrt(C[D]*C[0])],%);
```

下記の η を導入する。

$$\begin{aligned}&\eta=\frac{y}{\mathrm{b}(x)},\quad \frac{d}{dy}\eta=\frac{1}{\mathrm{b}(x)}\\&\frac{d^2}{dy^2}\eta=0,\quad \frac{d}{dx}\eta=-\frac{\left(\frac{d}{dx}\mathrm{b}(x)\right)y}{\mathrm{b}(x)^2}\end{aligned} \tag{8.5.50}$$

$\mathrm{b}(x)$ および $u_1(x,y)$ を下記のように x のべき乗で変化するとする。また、α,β は定数、f は η の関数とする。

$$\mathrm{b}(x)=\alpha\,x^m,\quad u_1(x,y)=U_0\,\beta\,f\,x^n \tag{8.5.51}$$

上式の $u_1(x,y)$ の x および y による微分結果は、

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}u_1(x,y)=&U_0\,\beta\left(\frac{d}{dx}\eta\right)\left(\frac{d}{d\eta}f\right)x^n\\&+U_0\,\beta\,f\,n\,x^{n-1}\end{aligned}$$

$$\frac{d}{d\,y}\,u_1\,(x,y)=U_0\,\beta\,\left(\frac{d}{d\,y}\,\eta\right)\,\left(\frac{d}{d\,\eta}\,f\right)\,x^n$$
$$=\frac{U_0\,\beta\,\left(\frac{d}{d\,\eta}\,f\right)\,x^{n-m}}{\alpha}$$
$$\frac{d^2}{d\,y^2}\,u_1\,(x,y)=U_0\,\beta\,\left(\frac{d}{d\,y}\,\eta\right)^2\,\left(\frac{d^2}{d\,\eta^2}\,f\right)\,x^n+U_0\,\beta\,\left(\frac{d^2}{d\,y^2}\,\eta\right)\,\left(\frac{d}{d\,\eta}\,f\right)\,x^n$$
$$=\frac{U_0\,\beta\,\left(\frac{d^2}{d\,\eta^2}\,f\right)\,x^{n-2\,m}}{\alpha^2}$$

上式の結果を Navier-Stokes の式である (8.5.48) 式に代入し、

$$-U_0^2\,\beta\,\left(f\,n-\eta\,\left(\frac{d}{d\,\eta}\,f\right)\,m\right)\,x^{n-1}=-\frac{U_0\,\beta\,\left(\frac{d^2}{d\,\eta^2}\,f\right)\,\nu\,x^{n-2\,m}}{\alpha^2} \tag{8.5.52}$$

抵抗の式である (8.5.43) 式の被積分関数は次式となり、$y\to\eta$ で表現し、(8.5.51) 式を代入し、

$$dy\,u_1\,(x,y)=d\,\eta\,\mathrm{b}\,(x)\,\,u_1\,(x,y)=U_0\,\alpha\,\beta\,d\,\eta\,f\,x^{n+m} \tag{8.5.53}$$

(8.5.52) 式で右辺、左辺の x の次数は等しいこと、(8.5.53) 式で抵抗は x に依存しないことから、次式を得る。

$$n-1=n-2\,m,\quad n+m=0$$

上式を解き、

$$[m=\frac{1}{2},n=-\frac{1}{2}] \tag{8.5.54}$$

上式の結果を (8.5.51) 式を代入し、$\mathrm{b}(x)$ と $u_1(x,y)$ の形が得られた。

$$\mathrm{b}\,(x)=\alpha\,\sqrt{x},\quad x=\frac{\mathrm{b}\,(x)^2}{\alpha^2} \tag{8.5.55}$$

$$u_1\,(x,y)=\frac{U_0\,\beta\,f}{\sqrt{x}} \tag{8.5.56}$$

```
K1:k=L[MIX]/b(x);
K2:solve(%,L[MIX])[1];
subst([U3],NAV2);
expand(ev(%,diff));
subst([ET2,ET3,ET4,ET5],%);
subst([B3],%);
ev(%,diff);
expand(%/U[0]^2*x^(3/2)*2/\beta);
FF1:subst([B31,K2],%);
```

```
FF2:\eta*f=2*k^2*'diff(f,\eta,1)^2*\beta
 /\alpha+%c1;
diff(%,\eta);
%-FF1;
FF21:subst([%c1=0],FF2);
solve(%,'diff(f,\eta,1))[1];
radcan(%/sqrt(f));
integrate(lhs(%)/'diff(f,eta,1),f)=
 integrate(rhs(%),\eta)+%c2;
FF3:%^2/4;
subst([f=0,\eta=1],%);
solve(%,%c2)[1];
FF31:subst([%],FF3);
FF32:f=((sqrt(2)*sqrt(\alpha/\beta))/
 (3*k))^2/4*(1-\eta^(3/2))^2;
factor(FF31-FF32);
```

(8.5.49) 式に (8.5.56) 式を代入し、Navier-Stokes の式の L_{MIX} 表記式は、

$$-U_0\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\frac{U_0\,\beta\,f}{\sqrt{x}}\right)=2\,\left(\frac{d}{d\,y}\,\frac{U_0\,\beta\,f}{\sqrt{x}}\right)\times\left(\frac{d^2}{d\,y^2}\,\frac{U_0\,\beta\,f}{\sqrt{x}}\right)\,L_{MIX}^2$$

微分を実行して、

$$\frac{U_0^2\,\beta\,f}{2\,x^{\frac{3}{2}}}-\frac{U_0^2\,\beta\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\eta\right)\,\left(\frac{d}{d\,\eta}\,f\right)}{\sqrt{x}}=\frac{2\,U_0^2\,\beta^2\,\left(\frac{d}{d\,y}\,\eta\right)^3\,\left(\frac{d}{d\,\eta}\,f\right)\,\left(\frac{d^2}{d\,\eta^2}\,f\right)\,L_{MIX}^2}{x}+\frac{2\,U_0^2\,\beta^2\,\left(\frac{d}{d\,y}\,\eta\right)\,\left(\frac{d^2}{d\,y^2}\,\eta\right)\,\left(\frac{d}{d\,\eta}\,f\right)^2\,L_{MIX}^2}{x}$$

(8.5.50) 式を代入し、

$$\frac{U_0^2\,\beta\,\eta\,\left(\frac{d}{d\,\eta}\,f\right)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{b}\,(x)\right)}{\sqrt{x}\,\mathrm{b}\,(x)}+\frac{U_0^2\,\beta\,f}{2\,x^{\frac{3}{2}}}=\frac{2\,U_0^2\,\beta^2\,\left(\frac{d}{d\,\eta}\,f\right)\,\left(\frac{d^2}{d\,\eta^2}\,f\right)\,L_{MIX}^2}{x\,\mathrm{b}\,(x)^3}$$

(8.5.55) 式を代入し、

$$\frac{U_0^2\,\beta\,\eta\,\left(\frac{d}{d\,\eta}\,f\right)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,(\alpha\,\sqrt{x})\right)}{\alpha\,x}+\frac{U_0^2\,\beta\,f}{2\,x^{\frac{3}{2}}}=\frac{2\,U_0^2\,\beta^2\,\left(\frac{d}{d\,\eta}\,f\right)\,\left(\frac{d^2}{d\,\eta^2}\,f\right)\,L_{MIX}^2}{\alpha^3\,x^{\frac{5}{2}}}$$

微分を実行して、整理すると、

$$\eta\,\left(\frac{d}{d\,\eta}\,f\right)+f=\frac{4\,\beta\,\left(\frac{d}{d\,\eta}\,f\right)\,\left(\frac{d^2}{d\,\eta^2}\,f\right)\,L_{MIX}^2}{\alpha^3\,x}$$

伴流の幅：b(x) の中では、混合距離：L_{MIX} が一定であるとして、下記の k を導入する。この関係式を上式に代入し、

$$k=\frac{L_{MIX}}{\mathrm{b}\left(x\right)},\quad L_{MIX}=k\,\mathrm{b}\left(x\right)$$

$$\eta\left(\frac{d}{d\,\eta}\,f\right)+f=\frac{4\,\beta\,\left(\frac{d}{d\,\eta}\,f\right)\,\left(\frac{d^2}{d\,\eta^2}\,f\right)\,k^2}{\alpha}$$

上式を積分し、

$$\eta\,f=\frac{2\,\beta\,\left(\frac{d}{d\,\eta}\,f\right)^2\,k^2}{\alpha}+\%c1$$

$\eta=0$ では、流速分布の対称性から $\frac{d}{d\,\eta}\,f=0$ であるから、$\%c1=0$ となり、

$$\eta\,f=\frac{2\,\beta\,\left(\frac{d}{d\,\eta}\,f\right)^2\,k^2}{\alpha}$$

上式を整理し、

$$\frac{d}{d\,\eta}\,f=-\frac{\sqrt{\frac{\alpha\,\eta\,f}{\beta}}}{\sqrt{2}\,k}\rightarrow\frac{df}{\sqrt{f}}=-\frac{\sqrt{\alpha}\,\sqrt{\eta}}{\sqrt{2}\,\sqrt{\beta}\,k}\,d\eta$$

上式を積分し、

$$2\,\sqrt{f}=\%c2-\frac{\sqrt{2}\,\sqrt{\alpha}\,\eta^{\frac{3}{2}}}{3\,\sqrt{\beta}\,k}$$

f を求めると、

$$f=\frac{\left(\%c2-\frac{\sqrt{2}\,\sqrt{\alpha}\,\eta^{\frac{3}{2}}}{3\,\sqrt{\beta}\,k}\right)^2}{4}$$

$\eta=1$ で、$f=0$ であるから、$\%c2$ は次式となる。

$$0=\frac{\left(\%c2-\frac{\sqrt{2}\,\sqrt{\alpha}}{3\,\sqrt{\beta}\,k}\right)^2}{4},\quad \%c2=\frac{\sqrt{2}\,\sqrt{\alpha}}{3\,\sqrt{\beta}\,k}$$

上式から、f は次式となる。

$$f=\frac{\alpha\left(1-\eta^{\frac{3}{2}}\right)^2}{18\,\beta\,k^2}\tag{8.5.57}$$

```
assume(\eta>0 and \eta<1);
U4:subst([FF32],U3);
D3;
lhs(D3)=(\alpha*U[0])/(18*k^2*sqrt(x))*b(x)
 *'integrate((1-\eta^(3/2))^2,\eta,0,1)*2;
ev(%,integrate);
subst([B3],%);
B00:solve(%,\alpha)[2];
subst([B00],B3);
subst([B00,ET1],U4)/U[0];
subst([C[D]=1,C[0]=1,b(x)=1,k=1,x=1,
 y=abs(t)],rhs(%))*18/sqrt(10);
plot2d(%,[t,-1,1]);
```

(8.5.57) 式を (8.5.56) 式に代入し、

$$u_1\left(x,y\right)=\frac{U_0\,\alpha\left(1-\eta^{\frac{3}{2}}\right)^2}{18\,k^2\,\sqrt{x}}\tag{8.5.58}$$

(8.5.43) 式から、抵抗と流速分布の関係は、

$$\frac{C_0\,U_0\,C_D}{2}=\int_{-\infty}^{\infty}u_1\left(x,y\right)dy$$

上記、二式から次式となり、積分を実行し、(8.5.55) 式を代入して、

$$\begin{aligned}\frac{C_0\,U_0\,C_D}{2}&=\frac{U_0\,\alpha\,\mathrm{b}\left(x\right)}{9\,k^2\,\sqrt{x}}\int_0^1\left(1-\eta^{\frac{3}{2}}\right)^2d\eta\\&=\frac{U_0\,\alpha\,\mathrm{b}\left(x\right)}{20\,k^2\,\sqrt{x}}\\&=\frac{U_0\,\alpha^2}{20\,k^2}\end{aligned}$$

上式から、α が得られる。

$$\alpha=\sqrt{10}\,k\,\sqrt{C_0\,C_D}$$

上式の結果を (8.5.55) 式、(8.5.58) 式に代入し、下記の伴流の幅と流速分布が得られた。伴分布の幅：b (x) は $\sqrt{x}$ に比例して広がる。

$$\mathrm{b}\left(x\right)=\sqrt{10}\,k\,\sqrt{x}\,\sqrt{C_0\,C_D}\tag{8.5.59}$$

$$\frac{u_1\left(x,y\right)}{U_0}=\frac{\sqrt{10}\left(1-\left(\frac{y}{\mathrm{b}(x)}\right)^{\frac{3}{2}}\right)^2\sqrt{C_0\,C_D}}{18\,k\,\sqrt{x}}\tag{8.5.60}$$

後流の流速分布は下図となる。

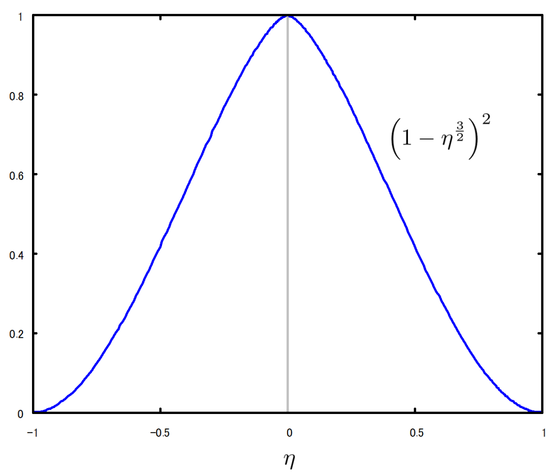


図 8.5.8: 後流流速分布

8.5.6 二次元くさび形の外部流れ (外部流速 : $U = x^m U_0$)

先端半角 : α_0 の二次元くさび形の外部の粘性流れについて調べる。くさび形の流速分布は $U = x^m U_0$ となっている。この外部流速分布の時のレイノルズ数 : R が高い場合の境界層流れについて調べる[1]。下図のようにくさび表面に沿った二次元 $x-y$ 座標系の境界層の方程式を用いる。x 軸を表面、後流方向とし、y 軸を x 軸に直角、上方とする。$x-y$ 座標軸の各速度コンポーネントを u, v とする。粘性係数 : μ、動粘性係数 : ν、外力は零とする。

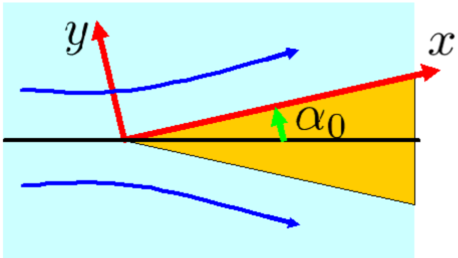


図 8.5.9: 二次元くさび形の外部流れ

```
/* くさび形の外部流れ */
kill(all);
load("vector");
depends(u,[x,y]);
depends(p,[x]);
depends(U,[x]);
depends(f,[\eta]);
depends(\eta,[x,y]);
declare(F,complex);
declare(z,complex);
F1:F=z^n*U;
subst([z=x+%i*y],F1);
PS1:\Psi=imagpart(rhs(%));
U1:u='diff(\Psi,y,1);
V1:v=-'diff(\Psi,x,1);
assume(x>0);
subst([PS1],U1);
ev(%,diff);
U2:subst([y=0],%);
AL1:\alpha[0]=%pi-%pi/n;
n-1=m;
solve(%,n)[1];
AL2:factor(subst([%],AL1));
U01:U=U[0]*x^m;
```

[1] Dr Harmann Schlihting : Boundary Layer Theory 12), 9.a Flow past a wedge, P.143 & G. K. Batchelor : 入門　流体力学 18)、5.9(a) P.316

```
NAV1:('diff(u,y,1))*v+u*('diff(u,x,1))=U*
 ('diff(U,x,1))+nu*('diff(u,y,2));
```

くさび形状の流速 : U の一様流れの写像から得られ、その複素ポテンシャル : F は「5.1.14 写像 : 折れ曲がり直線 (Schwarz-Christoffel の公式)」から下記となる。

$$F = z^n U = (i\,y + x)^n U$$

上式の虚部が流れ関数であり、下記となる。

$$\Psi = \left(y^2 + x^2\right)^{\frac{n}{2}} \sin\left(n \operatorname{atan2}(y, x)\right) U \tag{8.5.61}$$

上式を用いて、流速 : u, v は、

$$u = \frac{d}{d\,y}\,\Psi, \quad v = -\frac{d}{d\,x}\,\Psi \tag{8.5.62}$$

上式から、u は、

$$\begin{aligned} u =& \frac{d}{d\,y}\left(\left(y^2 + x^2\right)^{\frac{n}{2}} \sin\left(n \operatorname{atan2}(y, x)\right) U\right) \\ =& n\,y\left(y^2 + x^2\right)^{\frac{n}{2}-1} \sin\left(n \operatorname{atan}\left(\frac{y}{x}\right)\right) U \\ &+ \frac{n\left(y^2 + x^2\right)^{\frac{n}{2}} \cos\left(n \operatorname{atan}\left(\frac{y}{x}\right)\right) U}{x\left(\frac{y^2}{x^2} + 1\right)} \end{aligned} \tag{8.5.63}$$

くさびの表面では $y = 0$ であるから、上式から、表面流速は次式となる。

$$u = n\,x^{n-1}\,U$$

先端角度 : α_0 は次式で得られる。

$$\alpha_0 = \pi - \frac{\pi}{n}$$

また、n と m の関係は下記となる。

$$n = m + 1 \tag{8.5.64}$$

以上から、先端角度 : α_0 と m の関係は、

$$\alpha_0 = \frac{\pi\,m}{m + 1} \tag{8.5.65}$$

外部流速 : U は次式となる。

$$U = U_0\,x^m \tag{8.5.66}$$

レイノルズ数 : R が高い場合で、定常状態で外部流速が与えられたときの境界層の方程式は (8.5.5) 式から

$$\left(\frac{d}{d\,y}\,u\right) v + u\left(\frac{d}{d\,x}\,u\right) = U\left(\frac{d}{d\,x}\,U\right) + \nu\left(\frac{d^2}{d\,y^2}\,u\right) \tag{8.5.67}$$

```
PS2:\Psi=sqrt(\nu*U*x)*f;
ET1:\eta=sqrt(U/\nu/x)*y;
ET2:solve(%,y)[1];
DETY1:'diff(\eta,y,1)=diff(rhs(ET1),y,1);
```

```
DETY2:'diff(\eta,y,2)=diff(rhs(ET1),y,2);
DETY3:'diff(\eta,y,3)=diff(rhs(ET1),y,3);
DETX1:'diff(\eta,x,1)=diff(rhs(ET1),x,1);
DETXY1:'diff(eta,x,1,y,1)=diff(rhs(%),y,1);
subst([PS2],U1);
ev(%,diff);
subst([DETY1],%);
U2:radcan(%);
U3:U2/U;
subst([U1,V1,PS2],NAV1);
ev(%,diff);
subst([DETY1,DETY2,DETY3,DETX1,DETXY1],%);
radcan(%*x);
subst([U01],%);
ev(%,diff);
subst(['diff(U[0],x,1)=0],%);
radcan(%/x^(2*m)/U[0]^2);
NAV2:expand(%);
expand(solve(%,'diff(f,eta,3))[1]);
```

境界層を表す流れ関数：Ψ として、f は η の関数とする。

$$\Psi = f\,\sqrt{x}\,\sqrt{\nu\,U} \tag{8.5.68}$$

y を下記のように変換する。また、その関連式も記すと、

$$\eta = \frac{y\,\sqrt{\frac{U}{\nu}}}{\sqrt{x}}, \quad y = \frac{\eta\,\sqrt{x}}{\sqrt{\frac{U}{\nu}}}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{d\,y}\,\eta = \frac{\sqrt{\frac{U}{\nu}}}{\sqrt{x}}, \quad \frac{d^2}{d\,y^2}\,\eta = 0, \quad \frac{d^3}{d\,y^3}\,\eta = 0\\
&\frac{d}{d\,x}\,\eta = \frac{y\,\left(\frac{d}{d\,x}\,U\right)}{2\,\nu\,\sqrt{x}\,\sqrt{\frac{U}{\nu}}} - \frac{y\,\sqrt{\frac{U}{\nu}}}{2\,x^{\frac{3}{2}}}\\
&\frac{d^2}{d\,x\,d\,y}\,\eta = \frac{\frac{d}{d\,x}\,U}{2\,\nu\,\sqrt{x}\,\sqrt{\frac{U}{\nu}}} - \frac{\sqrt{\frac{U}{\nu}}}{2\,x^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned} \tag{8.5.69}$$

(8.5.62) 式に (8.5.68) 式を代入して、微分し、上式を代入して、流速：u, v は、

$$\begin{aligned}
u =& \frac{d}{d\,y}\,\left(f\,\sqrt{x}\,\sqrt{\nu\,U}\right)\\
=& \left(\frac{d}{d\,y}\,\eta\right)\,\left(\frac{d}{d\,\eta}\,f\right)\,\sqrt{x}\,\sqrt{\nu\,U}\\
=& \left(\frac{d}{d\,\eta}\,f\right)\,U
\end{aligned}$$

$$v = -\frac{d}{d\,x}\,\left(f\,\sqrt{x}\,\sqrt{\nu\,U}\right)$$

u を外界流速：U で無次元化すると、

$$\frac{u}{U} = \frac{d}{d\,\eta}\,f$$

(8.5.67) 式に上式を代入し、

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{d^2}{d\,x\,d\,y}\,\left(f\,\sqrt{x}\,\sqrt{\nu\,U}\right)\right)\,\left(\frac{d}{d\,y}\,\left(f\,\sqrt{x}\,\sqrt{\nu\,U}\right)\right)\\
&\quad - \left(\frac{d}{d\,x}\,\left(f\,\sqrt{x}\,\sqrt{\nu\,U}\right)\right)\,\left(\frac{d^2}{d\,y^2}\,\left(f\,\sqrt{x}\,\sqrt{\nu\,U}\right)\right)\\
&\quad = \nu\,\left(\frac{d^3}{d\,y^3}\,\left(f\,\sqrt{x}\,\sqrt{\nu\,U}\right)\right) + U\,\left(\frac{d}{d\,x}\,U\right)
\end{aligned}$$

上式を整理し、(8.5.69) 式、(8.5.66) 式を代入し、

$$\begin{aligned}
&-\frac{f\,\left(\frac{d^2}{d\,\eta^2}\,f\right)\,m}{2} + \left(\frac{d}{d\,\eta}\,f\right)^2\,m - \frac{f\,\left(\frac{d^2}{d\,\eta^2}\,f\right)}{2}\\
&\quad = m + \frac{d^3}{d\,\eta^3}\,f
\end{aligned} \tag{8.5.70}$$

Runge-Kutta 法で解く形式に変更して、

$$\begin{aligned}
\frac{d^3}{d\,\eta^3}\,f =& -\frac{f\,\left(\frac{d^2}{d\,\eta^2}\,f\right)\,m}{2} + \left(\frac{d}{d\,\eta}\,f\right)^2\,m\\
&- m - \frac{f\,\left(\frac{d^2}{d\,\eta^2}\,f\right)}{2}
\end{aligned}$$

上式を Runge-Kutta 法を用いて解く。境界条件として、$y = 0$ で $u = v = 0$ で、$y \to \infty$ で u は外界流速：U となる。以上から、Runge-Kutta 法の初期条件は、$\eta = 0$ で $f = \frac{d}{d\,\eta}\,f = 0$ となる。また、$y \to \infty$ で $f = 1$ となるように、$\frac{d^2}{d\,\eta^2}\,f$ の初期値を選択する。$m = 4 \to -0.09$ に対する速度分布を下記に示す。

```
Tmax:10;
Tmin:0;
N:500;
dT:(Tmax-Tmin)/float(N);
GG1:-G*G2*m/2+G1^2*m-m-G*G2/2;
GG2:subst([m=0],GG1);
G2I:0.33206;
sol:rk([GG2,G2,G1],[G2,G1,G],[G2I,0,0],
 [t,Tmin,Tmax,dT]);
listU1:[[sol[1][1],sol[1][3]]];
for J:2 thru N do(listU1:append(listU1,
  [[sol[J][1],sol[J][3]]]));
plot2d([discrete,listU1],[x,0,10],[y,0,2]);
plot2d([discrete,listU1],[x,0,10],[y,0.999,
 1.001]);
GG2:subst([m=1/9],GG1);
G2I:0.51184;
sol:rk([GG2,G2,G1],[G2,G1,G],[G2I,0,0],
 [t,Tmin,Tmax,dT]);
listU2:[[sol[1][1],sol[1][3]]];
for J:2 thru N do(listU2:append(listU2,
  [[sol[J][1],sol[J][3]]]));
```

```
plot2d([discrete,listU2],[x,0,10],[y,0,2]);
plot2d([discrete,listU2],[x,0,10],[y,0.999,
 1.001]);
GG2:subst([m=1/3],GG1);
G2I:0.757448;
sol:rk([GG2,G2,G1],[G2,G1,G],[G2I,0,0],
 [t,Tmin,Tmax,dT]);
listU3:[[sol[1][1],sol[1][3]]];
for J:2 thru N do(listU3:append(listU3,
  [[sol[J][1],sol[J][3]]]));
plot2d([discrete,listU2],[x,0,10],[y,0,2]);
plot2d([discrete,listU2],[x,0,10],[y,0.999,
 1.001]);
GG2:subst([m=1],GG1);
G2I:1.2325878;
sol:rk([GG2,G2,G1],[G2,G1,G],[G2I,0,0],[t,
 Tmin,Tmax,dT]);
listU4:[[sol[1][1],sol[1][3]]];
for J:2 thru N do(listU4:append(listU4,
  [[sol[J][1],sol[J][3]]]));
plot2d([discrete,listU4],[x,0,10],[y,0,2]);
plot2d([discrete,listU4],[x,0,10],[y,0.999,
 1.001]);
GG2:subst([m=4],GG1);
G2I:2.4057248061;
sol:rk([GG2,G2,G1],[G2,G1,G],[G2I,0,0],[t,
 Tmin,Tmax,dT]);
listU5:[[sol[1][1],sol[1][3]]];
for J:2 thru N do(listU5:append(listU5,
  [[sol[J][1],sol[J][3]]]));
plot2d([discrete,listU5],[x,0,10],[y,0,2]);
plot2d([discrete,listU5],[x,0,10],[y,0.999,
 1.001]);
Tmax:20;
Tmin:0;
N:500;
dT:(Tmax-Tmin)/float(N);
GG2:subst([m=-0.06],GG1);
G2I:0.182555;
sol:rk([GG2,G2,G1],[G2,G1,G],[G2I,0,0],[t,
 Tmin,Tmax,dT]);
listU6:[[sol[1][1],sol[1][3]]];
for J:2 thru N do(listU6:append(listU6,
  [[sol[J][1],sol[J][3]]]));
plot2d([discrete,listU6],[x,0,20],[y,0,2]);
plot2d([discrete,listU6],[x,0,20],[y,0.999,
 1.001]);
```

```
Tmax:20;
Tmin:0;
N:500;
dT:(Tmax-Tmin)/float(N);
GG2:subst([m=-0.09],GG1);
G2I:0.019;
sol:rk([GG2,G2,G1],[G2,G1,G],[G2I,0,0],[t,
 Tmin,Tmax,dT]);
listU7:[[sol[1][1],sol[1][3]]];
for J:2 thru N do(listU7:append(listU7,
  [[sol[J][1],sol[J][3]]]));
plot2d([discrete,listU7],[x,0,20],[y,0,2]);
plot2d([discrete,listU7],[x,0,20],[y,0.999,
 1.001]);
plot2d([[discrete,listU5],[discrete,listU4]
 ,[discrete,listU3],[discrete,listU2],
 [discrete,listU1],[discrete,listU6],
 [discrete,listU7]],[x,0,10],[y,0,1]);
```

各 m における外部境界層の流速分布を以下に示す。

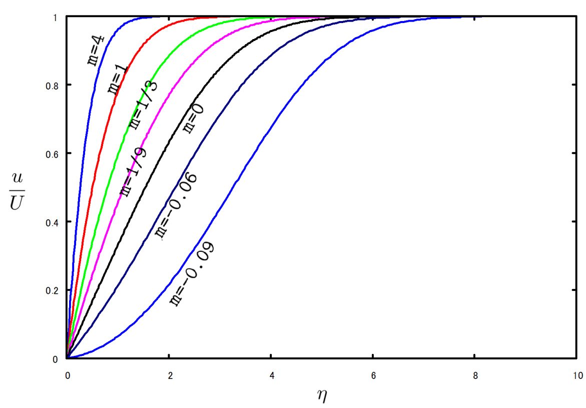


図 8.5.10: 二次元くさび形の外部境界層流速分布

```
subst([n=3/2,U=1],PS1);
(y^2+x^2)^(3/4)*sin((3*atan2(y,x))/2);
subst([n=2,U=1],PS1);
(y^2+x^2)*sin(2*atan2(y,x));
subst([n=4/3,U=1],PS1);
(y^2+x^2)^(2/3)*sin((4*atan2(y,x))/3);
subst([n=10/9,U=1],PS1);
(y^2+x^2)^(5/9)*sin((10*atan2(y,x))/9);
subst([n=1-0.09,U=1],PS1);
(y^2+x^2)^0.455*sin(0.91*atan2(y,x));
```

下記にくさび形状周りの外部流れを gunuplot を使って求めた結果を示す。

```
#!/gnuplot
set xrange [-50:50]
set yrange [-50:50]
set isosamples 150,150
set contour base
set cntrparam levels incremental -100,5,100
unset key
unset surface
set view map
splot (y**2+x**2)**(0.55556)*sin((10*
 atan2(y,x))/9)
# EOF
```

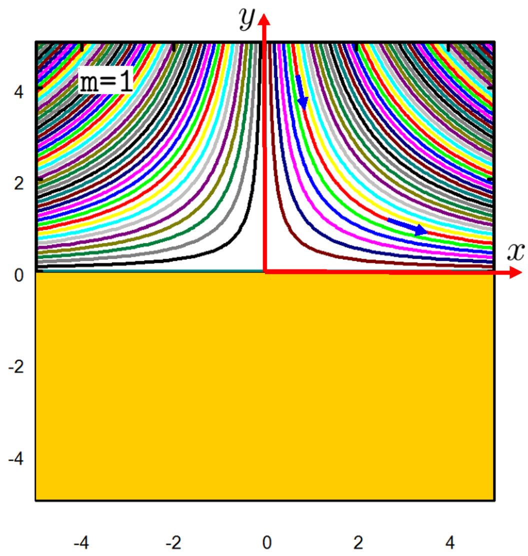


図 8.5.11: 二次元くさび形の外部流れ $(m=1)$

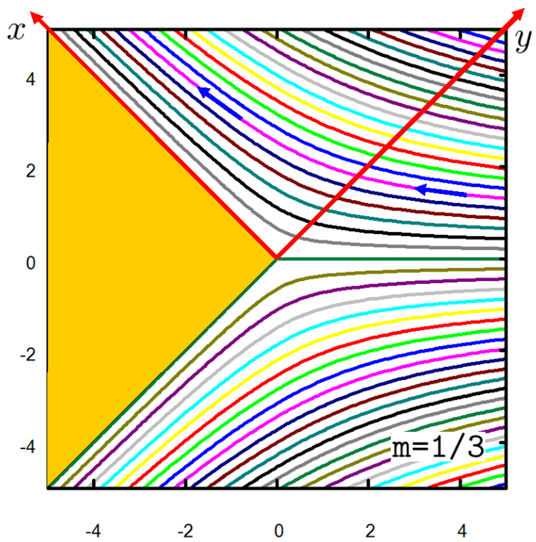


図 8.5.12: 二次元くさび形の外部流れ $(m=1/3)$

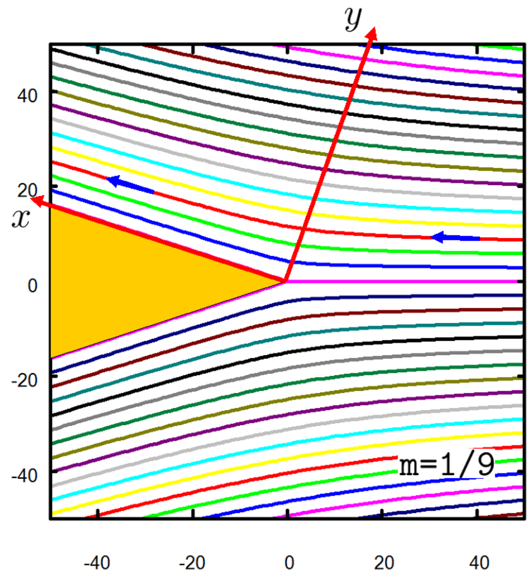


図 8.5.13: 二次元くさび形の外部流れ $(m=1/9)$

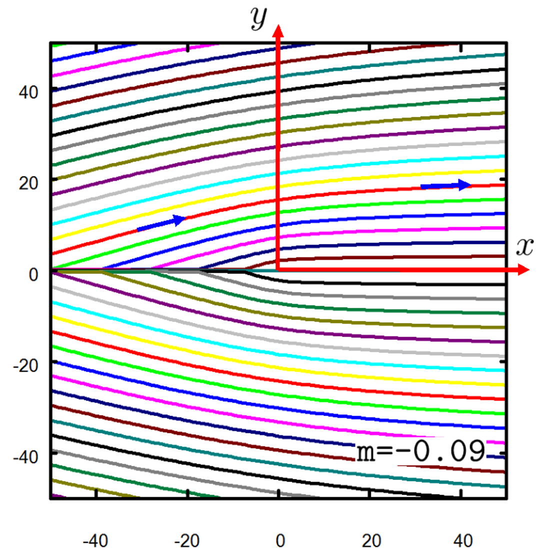


図 8.5.14: 二次元くさび形の外部流れ $(m=-0.09)$

8.5.7　斜航円柱まわりの粘性流

流れに対して斜めに置かれた半径：R の円柱まわりの粘性流について調べる [1]。流れに対して α の角度で円柱が置かれ、円柱の横断面方向の流速：U_0 とする。今、レイノルズ数：R_n が大きく、粘性の影響を強く受けている境界層の厚さが十分薄いとする。境界層の座標として、円柱の横断面方向の流速：U_0 で、円柱表面に沿った方向を x 軸とする。円柱表面上方を y 軸、円柱の縦方向を z 軸とする。$x-y-z$ 座標軸の各速度コンポーネントを u,v,w とし、x 軸方向の円柱外部流速：U、密度：ρ、粘性係数：μ、動粘性係数：ν とし、各軸の外力は零とする。

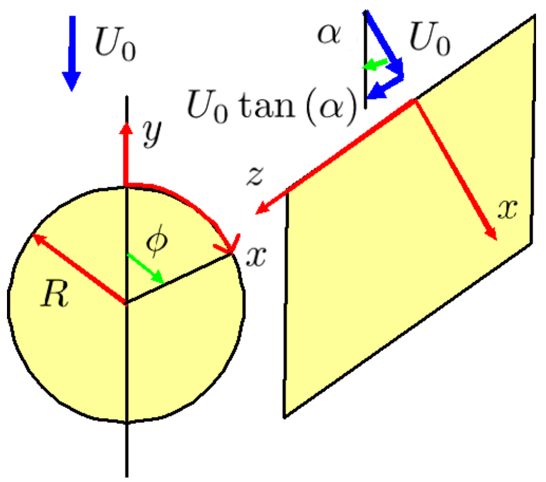


図 8.5.15: 斜航円柱まわりの粘性流

```
/* Yawed シリンダー 11 次式 */
kill(all);
load("vector");
load("dynamics");
depends(u,[x,y,t]);
depends(v,[x,y,z,t]);
depends(w,[x,y,t]);
depends(p,[x,y]);
depends(U,[x]);
depends(\Psi,[x,\eta]);
depends(\eta,[y]);
depends(f,[\eta]);
depends(g,[\eta]);
MAS1:'diff(v,y,1)+'diff(u,x,1)=0;
NAV11:('diff(u,y,1))*v+u*('diff(u,x,1))
 +'diff(u,t,1)=U*('diff(U,x,1))
 +nu*('diff(u,y,2));
```

```
NAV13:v*('diff(w,y,1))+u*('diff(w,x,1))
 +'diff(w,t,1)=nu*('diff(w,y,2));
U0:U=a[1]*x+a[3]*x^3+a[5]*x^5+a[7]*x^7
 +a[9]*x^9+a[11]*x^11;
```

「8.5.2 柱状体の境界層の方程式」の (8.5.8) 式から質量保存の方程式、境界層の方程式は、

$$\frac{d}{d\,y}\,v+\frac{d}{d\,x}\,u=0 \tag{8.5.71}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{d}{d\,y}\,u\right)\,v+u\,\left(\frac{d}{d\,x}\,u\right)+\frac{d}{d\,t}\,u\\ =U\,\left(\frac{d}{d\,x}\,U\right)+\nu\,\left(\frac{d^2}{d\,y^2}\,u\right)\end{aligned} \tag{8.5.72}$$

$$v\,\left(\frac{d}{d\,y}\,w\right)+u\,\left(\frac{d}{d\,x}\,w\right)+\frac{d}{d\,t}\,w=\nu\,\left(\frac{d^2}{d\,y^2}\,w\right) \tag{8.5.73}$$

x 軸方向の円柱外界流速：U を次式の 11 次式で表現する。

$$U=a_{11}\,x^{11}+a_9\,x^9+a_7\,x^7+a_5\,x^5+a_3\,x^3+a_1\,x \tag{8.5.74}$$

```
ET1:\eta=y*sqrt(a[1]/\nu);
ET2:diff(ET1,y,1);
ET4:solve(ET1,y)[1];
ET5:diff(ET1,y,2);
PS1:\Psi=sqrt(\nu/a[1])*(a[1]*x*f[1]
 +4*a[3]*x^3*f[3]+6*a[5]*x^5*f[5]
 +8*a[7]*x^7*f[7]+10*a[9]*x^9*f[9]
 +12*a[11]*x^11*f[11]);
U1:u=diff(\Psi,y,1);
V1:v=-diff(\Psi,x,1);
subst([PS1],U1);
expand(%);
ev(%,diff);
subst([ET2],%);
U2:radcan(%);
subst([PS1],V1);
expand(%);
ev(%,diff);
V2:factor(%);
subst([U2,V2,U0],MAS1);
ev(%,diff);
subst([ET2],%);
factor(%);
radcan(%);
```

[1] Dr Harmann Schlihting : Boundary Layer Theory [12)], Chapter 9 Exact solutions of the steady-state boundary layer equations, c. Flow past a cylinder, symmetrical case (the Blasius series), Chapter 10 Axially symmetrical and three-dimensional boundary layers b. Three-dimensional layers, the boundary layer on a yawed cylinder

流れ関数：Ψ を下記で表現する。

$$\Psi =\sqrt{\frac{\nu}{a_1}}\left(12\,a_{11}\,f_{11}\,x^{11}+10\,a_9\,f_9\,x^9+8\,a_7\,f_7\,x^7+6\,a_5\,f_5\,x^5+4\,a_3\,f_3\,x^3+a_1\,f_1\,x\right) \tag{8.5.75}$$

ここで、f は y 軸方向に変化し、下記の η の関数とする。

$$\eta=\sqrt{\frac{a_1}{\nu}}\,y,\quad \frac{d}{d\,y}\,\eta=\sqrt{\frac{a_1}{\nu}},\quad \frac{d^2}{d\,y^2}\,\eta=0 \tag{8.5.76}$$

このとき、流速：u,v は下記となる。

$$u=\left(\frac{d}{d\,y}\,\eta\right)\left(\frac{d}{d\,\eta}\,\Psi\right),\quad v=-\frac{d}{d\,x}\,\Psi$$

上式に (8.5.75) 式、(8.5.76) 式を代入すると流速：u,v は、

$$u=12\,a_{11}\left(\frac{d}{d\,\eta}\,f_{11}\right)x^{11}+10\,a_9\left(\frac{d}{d\,\eta}\,f_9\right)x^9+8\,a_7\left(\frac{d}{d\,\eta}\,f_7\right)x^7+6\,a_5\left(\frac{d}{d\,\eta}\,f_5\right)x^5+4\,a_3\left(\frac{d}{d\,\eta}\,f_3\right)x^3+a_1\left(\frac{d}{d\,\eta}\,f_1\right)x \tag{8.5.77}$$

$$v=-132\,a_{11}\,f_{11}\sqrt{\frac{\nu}{a_1}}\,x^{10}-90\,a_9\,f_9\sqrt{\frac{\nu}{a_1}}\,x^8-56\,a_7\,f_7\sqrt{\frac{\nu}{a_1}}\,x^6-30\,a_5\,f_5\sqrt{\frac{\nu}{a_1}}\,x^4-12\,a_3\,f_3\sqrt{\frac{\nu}{a_1}}\,x^2-a_1\,f_1\sqrt{\frac{\nu}{a_1}} \tag{8.5.78}$$

```
subst([U2,V2,U0],NAV11);
ev(%,diff);
subst([ET2,ET5],%);
NAV21:expand(lhs(%)-rhs(%)=0);
coeff(NAV21,x,1)/a[1]^2;
NAVF1:radcan(%);
coeff(NAV21,x,3)/4/a[1]/a[3];
NAVF3:radcan(%);
coeff(NAV21,x,5);
NAVF5:expand(radcan(%)/6/a[1]/a[5]);
coeff(NAV21,x,7);
NAVF7:expand(radcan(%)/8/a[1]/a[7]);
coeff(NAV21,x,9);
NAVF9:expand(radcan(%)/10/a[1]/a[9]);
coeff(NAV21,x,11);
NAVFA:expand(radcan(%)/12/a[1]/a[11]);
NAVF10:solve(NAVF1,'diff(f[1],eta,3))[1];
NAVF30:solve(NAVF3,'diff(f[3],eta,3))[1];
NAVF50:expand(solve(NAVF5,'diff(f[5],eta,
 3))[1]);
NAVF70:expand(solve(NAVF7,'diff(f[7],eta,
 3))[1]);
NAVF90:expand(solve(NAVF9,'diff(f[9],eta,
 3))[1]);
NAVFA0:expand(solve(NAVFA,'diff(f[11],eta,
 3))[1]);
```

x 軸方向の境界層の方程式：(8.5.72) 式の右辺を左辺に移動し、右辺を零とする。これに u,v の (8.5.77) 式、(8.5.78) 式、円柱外界流速：U の式：(8.5.74) 式を代入し、x、x^3、x^5、x^7、x^9、x^{11} の項の係数を求め、右辺を零と置くと次式を得る。

$$\begin{aligned}
&-\frac{d^3}{d\,\eta^3}\,f_1-f_1\left(\frac{d^2}{d\,\eta^2}\,f_1\right)+\left(\frac{d}{d\,\eta}\,f_1\right)^2-1=0\\
&-\frac{d^3}{d\,\eta^3}\,f_3-f_1\left(\frac{d^2}{d\,\eta^2}\,f_3\right)+4\left(\frac{d}{d\,\eta}\,f_1\right)\left(\frac{d}{d\,\eta}\,f_3\right)-3\,f_3\left(\frac{d^2}{d\,\eta^2}\,f_1\right)-1=0\\
&-\frac{d^3}{d\,\eta^3}\,f_5-f_1\left(\frac{d^2}{d\,\eta^2}\,f_5\right)+6\left(\frac{d}{d\,\eta}\,f_1\right)\left(\frac{d}{d\,\eta}\,f_5\right)-\frac{8\,a_3^2\,f_3\left(\frac{d^2}{d\,\eta^2}\,f_3\right)}{a_1\,a_5}+\frac{8\,a_3^2\left(\frac{d}{d\,\eta}\,f_3\right)^2}{a_1\,a_5}\\
&\qquad-5\,f_5\left(\frac{d^2}{d\,\eta^2}\,f_1\right)-\frac{a_3^2}{2\,a_1\,a_5}-1=0\\
&-\frac{d^3}{d\,\eta^3}\,f_7-f_1\left(\frac{d^2}{d\,\eta^2}\,f_7\right)+8\left(\frac{d}{d\,\eta}\,f_1\right)\left(\frac{d}{d\,\eta}\,f_7\right)-\frac{9\,a_3\,f_3\,a_5\left(\frac{d^2}{d\,\eta^2}\,f_5\right)}{a_1\,a_7}+\frac{24\,a_3\,a_5\left(\frac{d}{d\,\eta}\,f_3\right)\left(\frac{d}{d\,\eta}\,f_5\right)}{a_1\,a_7}\\
&\qquad-\frac{15\,a_3\,a_5\,f_5\left(\frac{d^2}{d\,\eta^2}\,f_3\right)}{a_1\,a_7}-7\,f_7\left(\frac{d^2}{d\,\eta^2}\,f_1\right)-\frac{a_3\,a_5}{a_1\,a_7}-1=0\\
&-\frac{d^3}{d\,\eta^3}\,f_9-f_1\left(\frac{d^2}{d\,\eta^2}\,f_9\right)+10\left(\frac{d}{d\,\eta}\,f_1\right)\left(\frac{d}{d\,\eta}\,f_9\right)-\frac{48\,a_3\,f_3\,a_7\left(\frac{d^2}{d\,\eta^2}\,f_7\right)}{5\,a_1\,a_9}+\frac{32\,a_3\,a_7\left(\frac{d}{d\,\eta}\,f_3\right)\left(\frac{d}{d\,\eta}\,f_7\right)}{a_1\,a_9}\\
&\qquad-\frac{18\,a_5^2\,f_5\left(\frac{d^2}{d\,\eta^2}\,f_5\right)}{a_1\,a_9}+\frac{18\,a_5^2\left(\frac{d}{d\,\eta}\,f_5\right)^2}{a_1\,a_9}-\frac{112\,a_3\,a_7\,f_7\left(\frac{d^2}{d\,\eta^2}\,f_3\right)}{5\,a_1\,a_9}-9\,f_9\left(\frac{d^2}{d\,\eta^2}\,f_1\right)\\
&\qquad-\frac{a_3\,a_7}{a_1\,a_9}-\frac{a_5^2}{2\,a_1\,a_9}-1=0
\end{aligned} \tag{8.5.79}$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{d^3}{d\,\eta^3}\,f_{11}-f_1\,\left(\frac{d^2}{d\,\eta^2}\,f_{11}\right)+12\,\left(\frac{d}{d\,\eta}\,f_1\right)\,\left(\frac{d}{d\,\eta}\,f_{11}\right)\\
&\quad-\frac{10\,a_3\,f_3\,a_9\,\left(\frac{d^2}{d\,\eta^2}\,f_9\right)}{a_1\,a_{11}}\\
&\quad+\frac{40\,a_3\,a_9\,\left(\frac{d}{d\,\eta}\,f_3\right)\,\left(\frac{d}{d\,\eta}\,f_9\right)}{a_1\,a_{11}}\\
&\quad-\frac{20\,a_5\,f_5\,a_7\,\left(\frac{d^2}{d\,\eta^2}\,f_7\right)}{a_1\,a_{11}}\\
&\quad+\frac{48\,a_5\,a_7\,\left(\frac{d}{d\,\eta}\,f_5\right)\,\left(\frac{d}{d\,\eta}\,f_7\right)}{a_1\,a_{11}}\\
&\quad-\frac{28\,a_5\,a_7\,f_7\,\left(\frac{d^2}{d\,\eta^2}\,f_5\right)}{a_1\,a_{11}}\\
&\quad-\frac{30\,a_3\,a_9\,f_9\,\left(\frac{d^2}{d\,\eta^2}\,f_3\right)}{a_1\,a_{11}}-11\,f_{11}\,\left(\frac{d^2}{d\,\eta^2}\,f_1\right)\\
&\quad-\frac{a_3\,a_9}{a_1\,a_{11}}-\frac{a_5\,a_7}{a_1\,a_{11}}-1=0
\end{aligned}
\tag{8.5.80}
$$

```
W2:w=tan(\alpha)*U[0]*(g[0]+a[3]/a[1]*x^2
 *g[2]);
subst([U2,V2,W2],NAV13);
ev(%,diff);
subst([ET2,ET5,'diff(U[0],x,1)=0],%);
NAV22:expand(lhs(%)-rhs(%)=0);
coeff(NAV22,x,0)/U[0]/a[1];
NAVG0:radcan(%);
coeff(NAV22,x,2)/U[0]/a[3];
NAVG2:radcan(%);
NAVG00;solve(NAVG0,'diff(g[0],eta,2))[1];
NAVG20;solve(NAVG2,'diff(g[2],eta,2))[1];
```

流速：w を次式で表現する。ここで、g は y 軸方向に変化し、η の関数とする。

$$
w=U_0\tan\left(\alpha\right)\,\left(\frac{g_2\,a_3\,x^2}{a_1}+g_0\right)\tag{8.5.81}
$$

z 軸方向の境界層の方程式：(8.5.73) 式の右辺を左辺に移動し、右辺を零とする。これに上式を代入し、定数項、x^2 の項の係数を求め、右辺を零と置くと次式を得る。

$$
\begin{aligned}
&\left(-\frac{d^2}{d\,\eta^2}\,g_0-f_1\,\left(\frac{d}{d\,\eta}\,g_0\right)\right)\,\tan\left(\alpha\right)=0\\
&\left(-\frac{d^2}{d\,\eta^2}\,g_2-f_1\,\left(\frac{d}{d\,\eta}\,g_2\right)+2\,g_2\,\left(\frac{d}{d\,\eta}\,f_1\right)\right.\\
&\qquad\left.-12\,f_3\,\left(\frac{d}{d\,\eta}\,g_0\right)\right)\,\tan\left(\alpha\right)=0
\end{aligned}
\tag{8.5.82}
$$

```
/* 11次式 円柱*/
assume(R>0);
X11:\phi=x/R;
X21:solve(%,x)[1];
U01C:U=2*U[0]*sin(\phi);
lhs(%)=taylor(rhs(%),\phi,0,11);
U02C:subst([X11],%);
A1:a[1]=coeff(rhs(U02C),x,1);
A3:a[3]=coeff(rhs(U02C),x,3);
A5:a[5]=coeff(rhs(U02C),x,5);
A7:a[7]=coeff(rhs(U02C),x,7);
A9:a[9]=coeff(rhs(U02C),x,9);
A11:a[11]=coeff(rhs(U02C),x,11);
LISA:[A1,A3,A5,A7,A9,A11,R=1.0,U[0]=1.0,
 \alpha[0]=45];
U01:subst([A1,A3,A5,A7,A9,A11,U[0]=1,X21,
 R=1,\phi=t/180*%pi],rhs(U0));
U02:subst([A1,A3,A5,A7,A9,a[11]=0,U[0]=1,
 X21,R=1,\phi=t/180*%pi],rhs(U0));
U03:subst([A1,A3,A5,A7,a[9]=0,a[11]=0,
 U[0]=1,X21,R=1,\phi=t/180*%pi],rhs(U0));
U04:subst([A1,A3,A5,a[7]=0,a[9]=0,a[11]=0
 ,U[0]=1,X21,R=1,\phi=t/180*%pi],rhs(U0));
U05:subst([A1,A3,a[5]=0,a[7]=0,a[9]=0,
 a[11]=0,U[0]=1,X21,R=1,\phi=t/180*%pi]
 ,rhs(U0));
plot2d([U01,U02,U03,U04,U05],[t,0,180],
 [y,0,2.2],[legend,"power series up to
 11th power","up to 9th power",
 "up to 7th power","up to 5th power",
 "up to 3rd power"]);
```

「例題 5.3.4 一様流中の円柱まわりの流れ、(5.3.15) 式、123 頁」から、完全流体の円柱まわりの流速：U は、次式で表現できる。

$$
U=2\,U_0\sin\left(\phi\right),\quad \phi=\frac{x}{R}
$$

上式を x で Taylor 展開し、x^{11} の項までを記述すると、

$$
\begin{aligned}
U=&\frac{2\,U_0\,x}{R}-\frac{U_0\,x^3}{3\,R^3}+\frac{U_0\,x^5}{60\,R^5}-\frac{U_0\,x^7}{2520\,R^7}\\
&+\frac{U_0\,x^9}{181440\,R^9}-\frac{U_0\,x^{11}}{19958400\,R^{11}}
\end{aligned}
\tag{8.5.83}
$$

以上から、(8.5.74) 式の係数を求めると下記となる。

$$
\begin{aligned}
&a_1 = \frac{2\,U_0}{R}, \quad a_3 = -\frac{U_0}{3\,R^3}, \quad a_5 = \frac{U_0}{60\,R^5} \\
&a_7 = -\frac{U_0}{2520\,R^7}, \quad a_9 = \frac{U_0}{181440\,R^9} \\
&a_{11} = -\frac{U_0}{19958400\,R^{11}}
\end{aligned}
\tag{8.5.84}
$$

3 次から 11 次までで、円柱まわりの流速 : U を表現すると、下記となる。7 次以上になると円柱まわりの流速 : U を十分表現している。

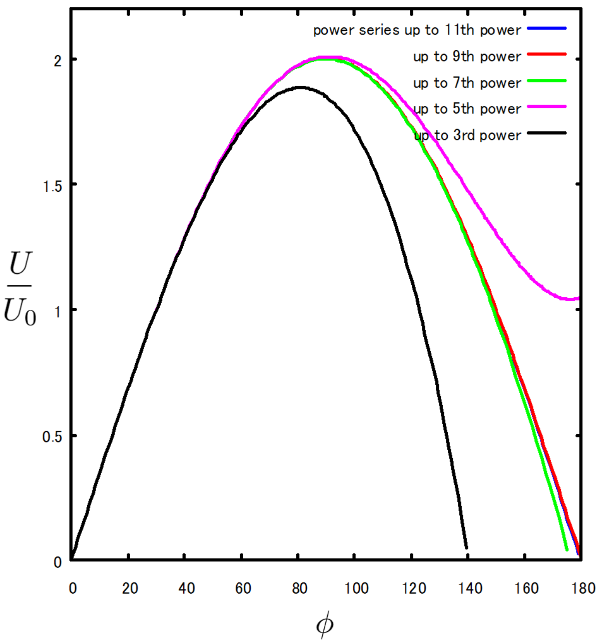


図 8.5.16: 円柱の外界流れ

f の式 : (8.5.79) 式、(8.5.80) 式と g の式 : (8.5.82) 式に円柱まわりの流速 : U を表す係数 : (8.5.84) 式を代入し、Runge-Kutta 法で解きやすいように次式の表現とする。

$$
\begin{aligned}
\frac{d^3}{d\,\eta^3}\,f_1 =& -f_1\left(\frac{d^2}{d\,\eta^2}\,f_1\right)+\left(\frac{d}{d\,\eta}\,f_1\right)^2-1 \\
\frac{d^3}{d\,\eta^3}\,f_3 =& -f_1\left(\frac{d^2}{d\,\eta^2}\,f_3\right)+4\left(\frac{d}{d\,\eta}\,f_1\right)\left(\frac{d}{d\,\eta}\,f_3\right) \\
&-3\,f_3\left(\frac{d^2}{d\,\eta^2}\,f_1\right)-1 \\
\frac{d^3}{d\,\eta^3}\,f_5 =& -f_1\left(\frac{d^2}{d\,\eta^2}\,f_5\right)+6\left(\frac{d}{d\,\eta}\,f_1\right)\left(\frac{d}{d\,\eta}\,f_5\right) \\
&-\frac{80\,f_3\left(\frac{d^2}{d\,\eta^2}\,f_3\right)}{3}+\frac{80\left(\frac{d}{d\,\eta}\,f_3\right)^2}{3} \\
&-5\,f_5\left(\frac{d^2}{d\,\eta^2}\,f_1\right)-\frac{8}{3} \\
\frac{d^3}{d\,\eta^3}\,f_7 =& -f_1\left(\frac{d^2}{d\,\eta^2}\,f_7\right)+8\left(\frac{d}{d\,\eta}\,f_1\right)\left(\frac{d}{d\,\eta}\,f_7\right) \\
&-63\,f_3\left(\frac{d^2}{d\,\eta^2}\,f_5\right) \\
&+168\left(\frac{d}{d\,\eta}\,f_3\right)\left(\frac{d}{d\,\eta}\,f_5\right) \\
&-105\,f_5\left(\frac{d^2}{d\,\eta^2}\,f_3\right) \\
&-7\,f_7\left(\frac{d^2}{d\,\eta^2}\,f_1\right)-8 \\
\frac{d^3}{d\,\eta^3}\,f_9 =& -f_1\left(\frac{d^2}{d\,\eta^2}\,f_9\right)+10\left(\frac{d}{d\,\eta}\,f_1\right)\left(\frac{d}{d\,\eta}\,f_9\right) \\
&-\frac{576\,f_3\left(\frac{d^2}{d\,\eta^2}\,f_7\right)}{5} \\
&+384\left(\frac{d}{d\,\eta}\,f_3\right)\left(\frac{d}{d\,\eta}\,f_7\right) \\
&-\frac{2268\,f_5\left(\frac{d^2}{d\,\eta^2}\,f_5\right)}{5} \\
&+\frac{2268\left(\frac{d}{d\,\eta}\,f_5\right)^2}{5}-\frac{1344\,f_7\left(\frac{d^2}{d\,\eta^2}\,f_3\right)}{5} \\
&-9\,f_9\left(\frac{d^2}{d\,\eta^2}\,f_1\right)-\frac{128}{5} \\
\frac{d^3}{d\,\eta^3}\,f_{11} =& -f_1\left(\frac{d^2}{d\,\eta^2}\,f_{11}\right)+12\left(\frac{d}{d\,\eta}\,f_1\right)\left(\frac{d}{d\,\eta}\,f_{11}\right) \\
&-\frac{550\,f_3\left(\frac{d^2}{d\,\eta^2}\,f_9\right)}{3} \\
&+\frac{2200\left(\frac{d}{d\,\eta}\,f_3\right)\left(\frac{d}{d\,\eta}\,f_9\right)}{3} \\
&-1320\,f_5\left(\frac{d^2}{d\,\eta^2}\,f_7\right) \\
&+3168\left(\frac{d}{d\,\eta}\,f_5\right)\left(\frac{d}{d\,\eta}\,f_7\right) \\
&-1848\,f_7\left(\frac{d^2}{d\,\eta^2}\,f_5\right)-550\,f_9\left(\frac{d^2}{d\,\eta^2}\,f_3\right) \\
&-11\,f_{11}\left(\frac{d^2}{d\,\eta^2}\,f_1\right)-\frac{256}{3}
\end{aligned}
\tag{8.5.85}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{d^2}{d\,\eta^2}\,g_0 = -\,f_1\,\left(\frac{d}{d\,\eta}\,g_0\right)\\
&\frac{d^2}{d\,\eta^2}\,g_2 = -\,f_1\,\left(\frac{d}{d\,\eta}\,g_2\right) + 2\,g_2\,\left(\frac{d}{d\,\eta}\,f_1\right)\\
&\qquad\qquad -\,12\,f_3\,\left(\frac{d}{d\,\eta}\,g_0\right)
\end{aligned}
\tag{8.5.86}
$$

```
NAVF11:subst(LISA,NAVF10);
NAVF31:subst(LISA,NAVF30);
NAVF51:subst(LISA,NAVF50);
NAVF71:subst(LISA,NAVF70);
NAVF91:subst(LISA,NAVF90);
NAVFA1:subst(LISA,NAVFA0);
Tmax:20;
Tmin:0;
N:1000;
dT:(Tmax-Tmin)/float(N);
F12I:1.2325867;
F32I:0.72444726;
F52I:1.031974791;
F72I:2.03806691128;
F92I:0.28666105194;
FA2I:67.3351948828;
G01I:0.5704712;
G21I:0.521032;
sol:rk([-F10*F12+F11^2-1,F12,F11,
       -F10*F32+4*F11*F31-3*F30*F12-1,F32,
 F31,
       -F10*F52+6*F11*F51-80/3*F30*F32
 +80/3*F31^2-5*F50*F12-8/3,F52,F51,
       -F10*F72+8*F11*F71-63*F30*F52
 +168*F31*F51-105*F50*F32-7*F70*F12-8,
 F72,F71,
       -F10*F92+10*F11*F91-576/5*F30*F72
 +384*F31*F71-2268/5*F50*F52+2268/5*F51^2
 -1344/5*F70*F32-9*F90*F12-128/5,F92,F91,
       -F10*FA2+12*F11*FA1-550/3*F30*F92
 +2200/3*F31*F91-1320*F50*F72+3168*F51*F71
 -1848*F70*F52-550*F90*F32-11*FA0*F12
 -256/3,FA2,FA1,
       -F10*G01,G01,
       -F10*G21+2*G20*F11-12*F30*G01,G21],
        [F12,F11,F10,F32,F31,F30, F52,F51,
 F50, F72,F71,F70, F92,F91,F90, FA2,FA1,
 FA0,G01,G00,G21,G20],
        [F12I,0,0,F32I,0,0,F52I,0,0,F72I,0,
 0,F92I,0,0,FA2I,0,0,G01I,0,G21I,0],
 [t,Tmin,Tmax,dT]);
```

```
listF11:[[sol[1][1],sol[1][3]]];
for J:2 thru N do(listF11:append(listF11,
  [[sol[J][1],sol[J][3]]]));
listF10:[[sol[1][1],sol[1][4]]];
for J:2 thru N do(listF10:append(listF10,
  [[sol[J][1],sol[J][4]]]));
listF31:[[sol[1][1],sol[1][6]]];
for J:2 thru N do(listF31:append(listF31,
  [[sol[J][1],sol[J][6]]]));
listF30:[[sol[1][1],sol[1][7]]];
for J:2 thru N do(listF30:append(listF30,
  [[sol[J][1],sol[J][7]]]));
listF51:[[sol[1][1],sol[1][9]]];
for J:2 thru N do(listF51:append(listF51,
  [[sol[J][1],sol[J][9]]]));
listF50:[[sol[1][1],sol[1][10]]];
for J:2 thru N do(listF50:append(listF50,
  [[sol[J][1],sol[J][10]]]));
listF71:[[sol[1][1],sol[1][12]]];
for J:2 thru N do(listF71:append(listF71,
  [[sol[J][1],sol[J][12]]]));
listF70:[[sol[1][1],sol[1][13]]];
for J:2 thru N do(listF70:append(listF70,
  [[sol[J][1],sol[J][13]]]));
listF91:[[sol[1][1],sol[1][15]]];
for J:2 thru N do(listF91:append(listF91,
  [[sol[J][1],sol[J][15]]]));
listF90:[[sol[1][1],sol[1][16]]];
for J:2 thru N do(listF90:append(listF90,
  [[sol[J][1],sol[J][16]]]));
listFA1:[[sol[1][1],sol[1][18]]];
for J:2 thru N do(listFA1:append(listFA1,
  [[sol[J][1],sol[J][18]]]));
listFA0:[[sol[1][1],sol[1][19]]];
for J:2 thru N do(listFA0:append(listFA0,
  [[sol[J][1],sol[J][19]]]));
listG01:[[sol[1][1],sol[1][20]]];
for J:2 thru N do(listG01:append(listG01,
  [[sol[J][1],sol[J][20]]]));
listG00:[[sol[1][1],sol[1][21]]];
for J:2 thru N do(listG00:append(listG00,
  [[sol[J][1],sol[J][21]]]));
listG21:[[sol[1][1],sol[1][22]]];
for J:2 thru N do(listG21:append(listG21,
  [[sol[J][1],sol[J][22]]]));
listG20:[[sol[1][1],sol[1][23]]];
for J:2 thru N do(listG20:append(listG20,
  [[sol[J][1],sol[J][23]]]));
```

```
plot2d([[discrete,listF10],
 [discrete,listF11],[discrete,listF30],
 [discrete,listF31],[discrete,listF50],
 [discrete,listF51]],[x,0,20],
 [y,-1.5,1.5],[legend,"F1","dF1","F3",
 "dF3","F5","dF5"]);
plot2d([[discrete,listF70],
 [discrete,listF71],[discrete,listF90],
 [discrete,listF91],[discrete,listFA0],
 [discrete,listFA1]],[x,0,20],
 [y,-10,10],[legend,"F7","dF7","F9",
 "dF9","F11","dF11"]);
plot2d([[discrete,listF70],
 [discrete,listF71],[discrete,listF90],
 [discrete,listF91],[discrete,listFA0],
 [discrete,listFA1]],[x,0,20],
 [legend,"F7","dF7","F9","dF9","F11",
 "dF11"]);
plot2d([[discrete,listG00],
 [discrete,listG01],[discrete,listG20],
 [discrete,listG21]],[x,0,20],
 [y,-1.5,1.5],[legend,"G0","dG0","G2",
 "dG2"]);
plot2d([[discrete,listF10],
 [discrete,listF11],[discrete,listF30],
 [discrete,listF31],[discrete,listF50],
 [discrete,listF51]],[x,0,6],[y,0,1.2],
 [legend,"F1","dF1","F3","dF3","F5",
 "dF5"]);
plot2d([[discrete,listF70],
 [discrete,listF71],[discrete,listF90],
 [discrete,listF91]],[x,0,6],[y,-15,5],
 [legend,"F7","dF7","F9","dF9"]);
plot2d([[discrete,listFA0],
 [discrete,listFA1]],[x,0,6],
 [legend,"F11","dF11"]);
F11INF:[[0,1],[20,1]];
plot2d([[discrete,listF11],
 [discrete,F11INF]],[y,0.95,1.05],
 [legend,"dF1"]);
F31INF:[[0,1/4],[20,1/4]];
plot2d([[discrete,listF31],
 [discrete,F31INF]],[y,0.20,0.30],
 [legend,"dF3"]);
F51INF:[[0,1/6],[20,1/6]];
plot2d([[discrete,listF51],
 [discrete,F51INF]],[y,0.10,0.20],
 [legend,"dF5"]);
```

```
F71INF:[[0,1/8],[20,1/8]];
plot2d([[discrete,listF71],
 [discrete,F71INF]],[y,0.10,0.20],
 [legend,"dF7"]);
F91INF:[[0,1/10],[20,1/10]];
plot2d([[discrete,listF91],
 [discrete,F91INF]],[y,0.0,0.2],
 [legend,"dF9"]);
FA1INF:[[0,1/12],[20,1/12]];
plot2d([[discrete,listFA1],
 [discrete,FA1INF]],[y,-0.5,0.5],
 [legend,"dF11"]);
plot2d([[discrete,listG00],
 [discrete,F11INF]],[y,0.95,1.05],
 [legend,"G0"]);
plot2d([[discrete,listG20]],
 [y,-0.05,0.05],[legend,"G2"]);
```

f の式：(8.5.85) 式と g の式：(8.5.86) 式を Runge-Kutta 法で解く。境界条件として、物体表面：$y=0$ で $u=v=w=0$ である。これは (8.5.77) 式、(8.5.78) 式、(8.5.82) 式から、$\eta=0$ の時、$f_1=f_3=f_5=f_7=f_9=0$、$f_{11}=0, \frac{d}{d\eta}f_1=\frac{d}{d\eta}f_3=\frac{d}{d\eta}f_5=\frac{d}{d\eta}f_7=0$、$\frac{d}{d\eta}f_9=\frac{d}{d\eta}f_{11}=0$、$g_0=g_2=0$ となる。また、外界流条件として、$y=\infty$ のとき外界流速となる。これは (8.5.77) 式から、$\eta=\infty$ のとき、$\frac{d}{d\eta}f_1=1, \frac{d}{d\eta}f_3=1/4$,、
$\frac{d}{d\eta}f_5=1/6, \frac{d}{d\eta}f_7=1/8, \frac{d}{d\eta}f_9=1/10, \frac{d}{d\eta}f_{11}=1/12, g_0=1, g_2=0$ となる。$\frac{d^2}{d\eta^2}f_1$ の初期値を $\eta=\infty$ の条件となるように求め、順次、$\frac{d^2}{d\eta^2}f_3 \to \frac{d^2}{d\eta^2}f_{11}$、$\frac{d}{d\eta}g_0, \frac{d}{d\eta}g_2$ の初期値を求め、解を求める。結果を以下に示す。

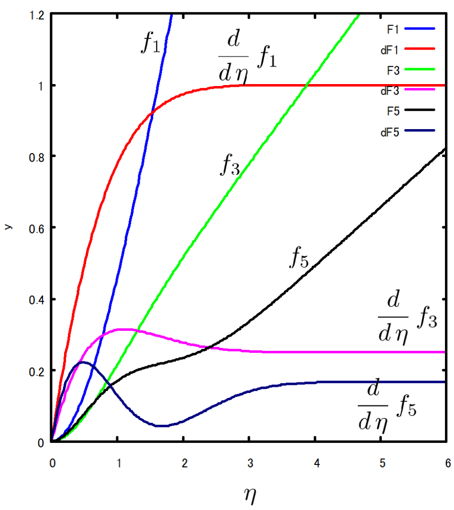


図 8.5.17: f_1, f_3, f_5 の計算結果

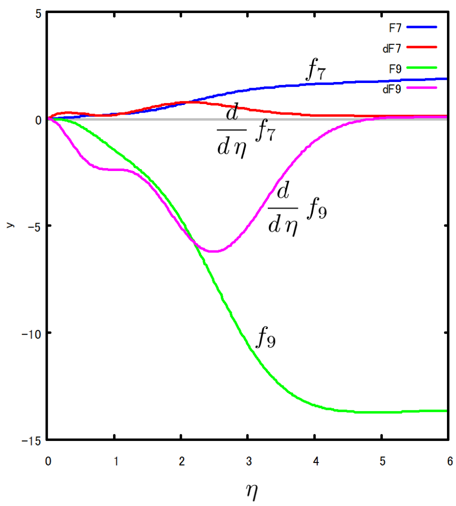


図 8.5.18: f_7, f_9 の計算結果

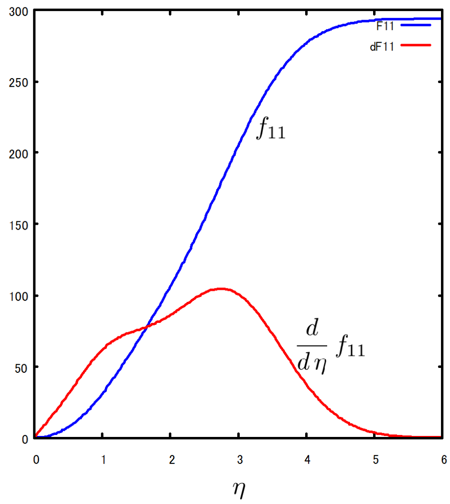


図 8.5.19: f_{11} の計算結果

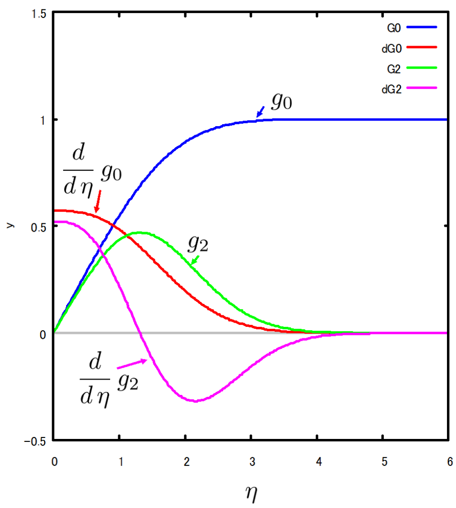


図 8.5.20: g_0, g_2 の計算結果

(1)x 軸方向剪断応力分布とはく離点

```
/* tau */
RN0:R[n]=U[0]*(R)/\nu;
RN1:solve(%,\nu)[1];
TAU1:\tau=\mu*'diff(u,y,1);
diff(U2,y,1);
DU2Y1:subst([ET2],%);
subst([A1,A3,A5,A7,A9,A11,X21],%);
subst([%],TAU1);
%/\rho/U[0]^2*sqrt(R[n]);
TAU2:subst([\mu=\nu*\rho,RN1],expand(%));
TAU21:subst(['diff(f[1],eta,2)=F12I,
 'diff(f[3],eta,2)=F32I,'diff(f[5],eta,2)
 =F52I,'diff(f[7],eta,2)=F72I,'diff(f[9],
 eta,2)=F92I,'diff(f[11],eta,2)=FA2I],%);
XSEP1:\phi=find_root(rhs(%)=0,\phi,1,3);
PSEP1:lhs(%)=float(rhs(%)*180/%pi);
```

レイノルズ数：R_n を円柱の半径：R を用いて、次式で定義する。

$$R_n = \frac{U_0\,R}{\nu} \tag{8.5.87}$$

x 軸方向の円柱表面の剪断応力を求める。剪断応力：τ は次式で得られる。

$$\tau = \mu \left(\frac{d}{d\,y}\,u\right)$$

上式に流速：u の (8.5.77) 式、(8.5.76) 式および (8.5.84) 式を代入し、無次元化して整理すると、

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{R_n}\,\tau}{U_0^2\,\rho} = &-\frac{\left(\frac{d^2}{d\,\eta^2}\,f_{11}\right)\,\phi^{11}}{51975\,2^{\frac{9}{2}}} + \frac{\left(\frac{d^2}{d\,\eta^2}\,f_9\right)\,\phi^9}{567\,2^{\frac{9}{2}}} \\ &-\frac{\sqrt{2}\,\left(\frac{d^2}{d\,\eta^2}\,f_7\right)\,\phi^7}{315} + \frac{\left(\frac{d^2}{d\,\eta^2}\,f_5\right)\,\phi^5}{5\,\sqrt{2}} \\ &-\frac{2^{\frac{5}{2}}\,\left(\frac{d^2}{d\,\eta^2}\,f_3\right)\,\phi^3}{3} + 2^{\frac{3}{2}}\,\left(\frac{d^2}{d\,\eta^2}\,f_1\right)\,\phi\end{aligned} \tag{8.5.88}$$

上式で、物体表面：$\eta=0$ の $\frac{d^2}{d\,\eta^2}\,f_1 \sim \frac{d^2}{d\,\eta^2}\,f_{11}$ の値が要求される。これは Runge-Kutta 法の計算結果の初期値として得られており、これを代入し、右辺を零として解くとはく離点が得られる。以上から、はく離点：$\phi = 1.898 rad. = 108.76 deg.$ となる。

(2) 境界層内流速分布

```
LISB:[R[n]=1000,\phi[x]=100];
subst([\phi=\phi[x]/180*%pi],X21);
subst(LISA,%);
X22:subst(LISB,%);
subst(LISB,RN1);
RN11:subst(LISA,%);
subst(LISA,rhs(U2)/rhs(U0));
U3:subst([X22],%);
listU31:[[sol[1][1],float(subst(['diff(f[1]
 ,\eta,1)=listF11[1][2],'diff(f[3],\eta,1)
 =listF31[1][2],'diff(f[5],\eta,1)=listF51
 [1][2],'diff(f[7],\eta,1)=listF71[1][2],
 'diff(f[9],\eta,1)=listF91[1][2],
 'diff(f[11],\eta,1)=listFA1[1][2]],U3))]];
for J:2 thru N do(listU31:append(listU31,
 [[sol[J][1],float(subst(['diff(f[1],\eta,
   1)=listF11[J][2],'diff(f[3],\eta,1)=
   listF31[J][2],'diff(f[5],\eta,1)=listF51
   [J][2],'diff(f[7],\eta,1)=listF71[J][2],
   'diff(f[9],\eta,1)=listF91[J][2],
   'diff(f[11],\eta,1)=listFA1[J][2]],U3))
   ]]));
listU32:[[sol[1][1],float(subst(['diff(f[1]
  ,\eta,1)=listF11[1][2],'diff(f[3],\eta,1)
  =listF31[1][2],'diff(f[5],\eta,1)=listF51
   [1][2],'diff(f[7],\eta,1)=listF71[1][2],
   'diff(f[9],\eta,1)=listF91[1][2],
   'diff(f[11],\eta,1)=0],U3))]];
for J:2 thru N do(listU32:append(listU32,
 [[sol[J][1],float(subst(['diff(f[1],\eta,
   1)=listF11[J][2],'diff(f[3],\eta,1)=
   listF31[J][2],'diff(f[5],\eta,1)=listF51
   [J][2],'diff(f[7],\eta,1)=listF71[J][2],
   'diff(f[9],\eta,1)=listF91[J][2],
   'diff(f[11],\eta,1)=0],U3))]]));
listU33:[[sol[1][1],float(subst(['diff(f[1]
 ,\eta,1)=listF11[1][2],'diff(f[3],\eta,1)
 =listF31[1][2],'diff(f[5],\eta,1)=listF51
 [1][2],'diff(f[7],\eta,1)=listF71[1][2],
 'diff(f[9],\eta,1)=0,'diff(f[11],\eta,1)
 =0],U3))]];
for J:2 thru N do(listU33:append(listU33,
 [[sol[J][1],float(subst(['diff(f[1],\eta,
 1)=listF11[J][2],'diff(f[3],\eta,1)=
 listF31[J][2],'diff(f[5],\eta,1)=listF51
 [J][2],'diff(f[7],\eta,1)=listF71[J][2],
 'diff(f[9],\eta,1)=0,'diff(f[11],\eta,1)
 =0],U3))]]));
listU34:[[sol[1][1],float(subst(['diff(f[1]
 ,\eta,1)=listF11[1][2],'diff(f[3],\eta,1)
 =listF31[1][2],'diff(f[5],\eta,1)=listF51
 [1][2],'diff(f[7],\eta,1)=0,'diff(f[9],
 \eta,1)=0,'diff(f[11],\eta,1)=0],U3))]];
for J:2 thru N do(listU34:append(listU34,
 [[sol[J][1],float(subst(['diff(f[1],\eta,
 1)=listF11[J][2],'diff(f[3],\eta,1)=
 listF31[J][2],'diff(f[5],\eta,1)=listF51
 [J][2],'diff(f[7],\eta,1)=0,'diff(f[9],
 \eta,1)=0,'diff(f[11],\eta,1)=0],U3))]]));
listU35:[[sol[1][1],float(subst(['diff(f[1]
 ,\eta,1)=listF11[1][2],'diff(f[3],\eta,1)
 =listF31[1][2],'diff(f[5],\eta,1)=0,
 'diff(f[7],\eta,1)=0,'diff(f[9],\eta,1)=0
 ,'diff(f[11],\eta,1)=0],U3))]];
for J:2 thru N do(listU35:append(listU35,
 [[sol[J][1],float(subst(['diff(f[1],\eta,
 1)=listF11[J][2],'diff(f[3],\eta,1)=
 listF31[J][2],'diff(f[5],\eta,1)=0,
 'diff(f[7],\eta,1)=0,'diff(f[9],\eta,1)=0
 ,'diff(f[11],\eta,1)=0],U3))]]));
plot2d([[discrete,listU31],
 [discrete,listU32],[discrete,listU33],
 [discrete,listU34],[discrete,listU35]],
 [x,0,5],[y,-0.6,1.2],[legend, "u power
 series up to 11th power","up to 9th
 power","up to 7th power","up to 5th
 power","up to 3rd power"],[xlabel,
 "eta"]);
subst([A1],ET1)/sqrt(2);
for J:1 thru 500 step 5 do(
if J=1 then listUU:[[float(listU31[J][1]
 /sqrt(2)),listU31[J][2]]] else listUU:
 append(listUU, [[float(listU31[J][1]
 /sqrt(2)),listU31[J][2]]]));
write_data(listUU,"M:\listUU100.cvs");
subst(LISA,rhs(V2));
V3:subst([X22,RN11],%);
subst([X22,\alpha=\alpha[0]/180*%pi],
 rhs(W2));
W3:subst(LISA,%);
listV31:[[sol[1][1],float(subst([f[1]
 =listF10[1][2],f[3]=listF30[1][2],f[5]
 =listF50[1][2],f[7]=listF70[1][2],f[9]
 =listF90[1][2],f[11]=listFA0[1][2]],V3))
 ]];
```

```
for J:2 thru N do(listV31:append(listV31,
 [[sol[J][1],float(subst([f[1]=listF10
 [J][2],f[3]=listF30[J][2],f[5]=listF50
 [J][2],f[7]=listF70[J][2],f[9]=listF90
 [J][2],f[11]= listFA0[J][2]],V3))]]));
listV32:[[sol[1][1],float(subst([f[1]
 =listF10[1][2],f[3]=listF30[1][2],f[5]
 =listF50[1][2],f[7]=listF70[1][2],f[9]
 =listF90[1][2],f[11]=0],V3))]];
for J:2 thru N do(listV32:append(listV32,
 [[sol[J][1],float(subst([f[1]=listF10
 [J][2],f[3]=listF30[J][2],f[5]=listF50
 [J][2],f[7]=listF70[J][2],f[9]=listF90
 [J][2],f[11]=0],V3))]]));
listV33:[[sol[1][1],float(subst([f[1]
 =listF10[1][2],f[3]=listF30[1][2],f[5]
 =listF50[1][2],f[7]=listF70[1][2],f[9]=0,
 f[11]=0],V3))]];
for J:2 thru N do(listV33:append(listV33,
 [[sol[J][1],float(subst([f[1]=listF10
 [J][2],f[3]=listF30[J][2],f[5]=listF50
 [J][2],f[7]=listF70[J][2],f[9]=0,f[11]=0]
 ,V3))]]));
listV34:[[sol[1][1],float(subst([f[1]
 =listF10[1][2],f[3]=listF30[1][2],f[5]
 =listF50[1][2],f[7]=0,f[9]=0,f[11]=0],
 V3))]];
for J:2 thru N do(listV34:append(listV34,
 [[sol[J][1],float(subst([f[1]=listF10
 [J][2],f[3]=listF30[J][2],f[5]=listF50
 [J][2],f[7]=0,f[9]=0,f[11]=0],V3))]]));
listV35:[[sol[1][1],float(subst([f[1]
 =listF10[1][2],f[3]=listF30[1][2],f[5]=0,
 f[7]=0,f[9]=0,f[11]=0],V3))]];
for J:2 thru N do(listV35:append(listV35,
 [[sol[J][1],float(subst([f[1]=listF10
 [J][2],f[3]=listF30[J][2],f[5]=0,f[7]=0
 ,f[9]=0,f[11]=0],V3))]]));
listW1:[[sol[1][1],float(subst([g[0]
 =listG00[1][2],g[2]=listG20[1][2]],W3))]];
for J:2 thru N do(listW1:append(listW1,
 [[sol[J][1],float(subst([g[0]=listG00
 [J][2],g[2]=listG20[J][2]],W3))]]));
plot2d([[discrete,listV31],
 [discrete,listV32],[discrete,listV33],
 [discrete,listV34],[discrete,listV35],
 [discrete,listW1]],[x,0,5],[y,-0.6,1.2],
 [legend, "v power series up to 11th
power","up to 9th power","up to
 7th power","up to 5th power",
"up to 3rd power","w"]);
```

レイノルズ数：$R_n = 1000$、$\alpha = 45$deg. の斜航状態の円柱の境界層内の u, v, w の流速分布を求める。(8.5.77) 式、(8.5.78) 式、(8.5.81) 式に (8.5.84) 式を代入し、f, g の計算結果を用いて求める。ここで次数の影響についても示している。上流の加速流近傍：$\phi = 40deg.$ では次数の影響はなく、3 次式でも近似できる。しかし、はく離点近傍：$\phi = 108.76deg.$ では、3 次、5 次式では満足できない形状となっている。

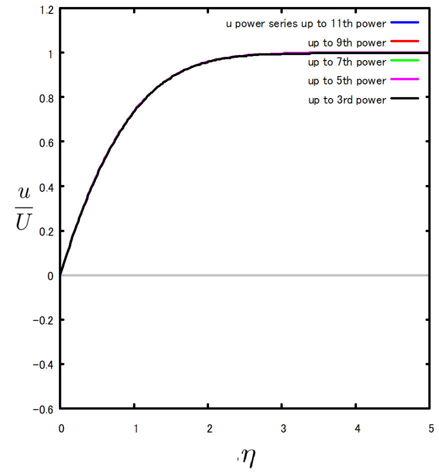


図 8.5.21: u 流速分布 (次数の影響)　$\phi = 40$deg. $R_n = 1000$、$\alpha = 45$deg.

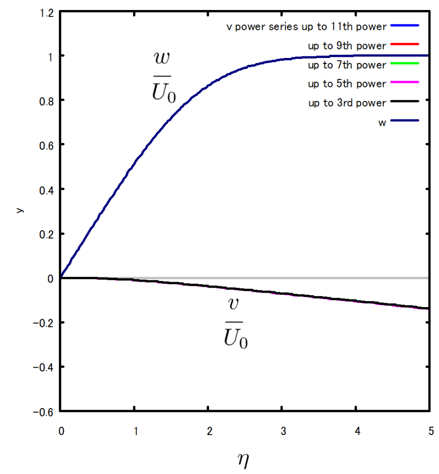


図 8.5.22: v, w 流速分布 (次数の影響)　$\phi = 40$deg. $R_n = 1000$、$\alpha = 45$deg.

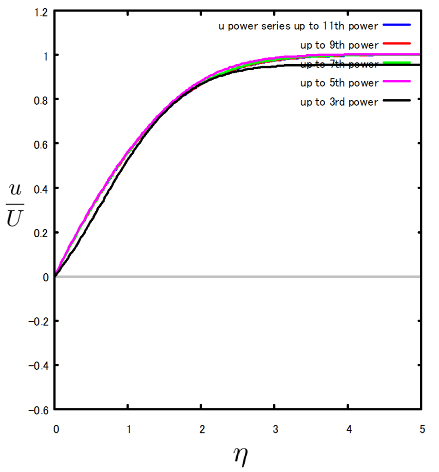


図 8.5.23: u 流速分布 (次数の影響)　$\phi = 80$deg. $R_n = 1000$、$\alpha = 45$deg.

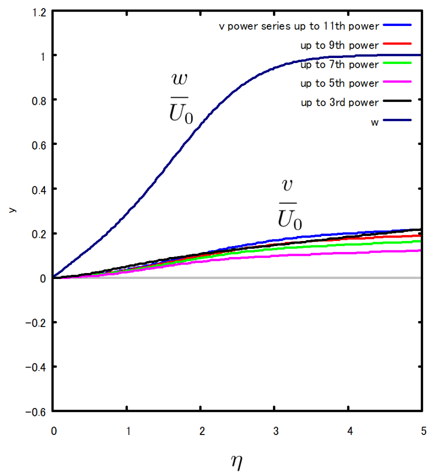


図 8.5.26: v, w 流速分布 (次数の影響)　$\phi = 108.76$deg. $R_n = 1000$、$\alpha = 45$deg.

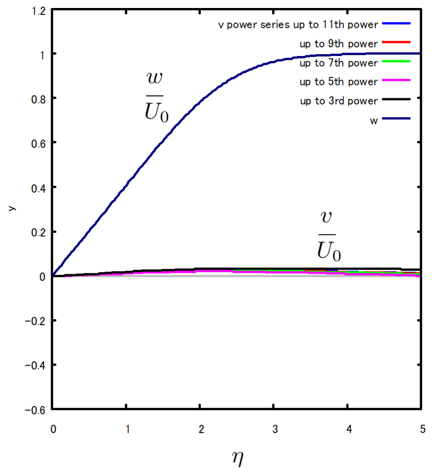


図 8.5.24: v, w 流速分布 (次数の影響)　$\phi = 80$deg. $R_n = 1000$、$\alpha = 45$deg.

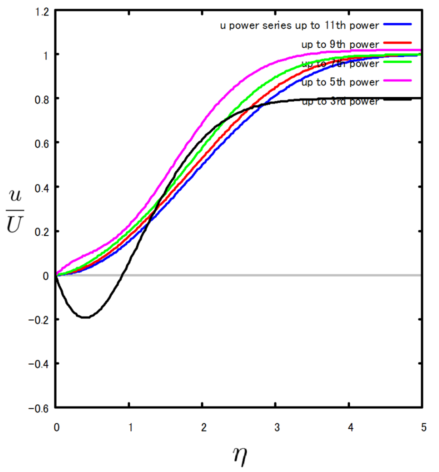


図 8.5.25: u 流速分布 (次数の影響)　$\phi = 108.76$deg. $R_n = 1000$、$\alpha = 45$deg.

(3) 物体表面流向

```
'diff(lhs(U2),y,1)=diff(rhs(U2),y,1);
subst([ET2,X21],%);
subst(LISA,%);
DU3:subst([RN11],%);
subst([\alpha=\alpha[0]/180*%pi],W2);
'diff(lhs(%),y,1)=diff(rhs(%),y,1);
subst([ET2,X21],%);
subst(LISA,%);
DW3:subst([RN11],%);
TH1:\theta[1]=atan2(rhs(DW3),rhs(DU3));
TH11:subst(['diff(f[11],\eta,2)=FA2I,
 'diff(f[9],\eta,2)=F92I,'diff(f[7],\eta,2)
 =F72I,'diff(f[5],\eta,2)=F52I,'diff(f[3],
 \eta,2)=F32I,'diff(f[1],\eta,2)=F12I,
 'diff(g[0],\eta,1)=G01I,'diff(g[2],\eta,1)
 =G21I,'diff(c[5],\eta,2)=0,'diff(d[5],
 \eta,2)=0,\phi=t/180*%pi],%);
listTH1:[[0,90],[180,90]];
listTH2:[[108.76,60],[108.76,120]];
plot2d([rhs(TH11)*180/%pi,
 [discrete,listTH1],[discrete,listTH2]],
 [t,0,140],[x,0,180],[y,0,200],
 [legend,"limit streamline","90deg",
 "108.76deg"]);
```

レイノルズ数：$R_n = 1000$、$\alpha = 45$deg. の斜航状態の円柱の物体表面の流向：β は次式で得られる。

$$\beta = tan^{-1}\left(\frac{\frac{d}{dy}\,u}{\frac{d}{dy}\,w}\right)$$

上式の $\frac{d}{dy}\,u$, $\frac{d}{dy}\,w$ は u, w の流速分布：(8.5.77) 式、(8.5.81) 式を代入し、(8.5.76) 式および (8.5.84) 式を代

入し次式を得る。

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\,y}\,u =&12\,a_{11}\,\left(\frac{d^2}{d\,\eta^2}\,f_{11}\right)\,\sqrt{\frac{a_1}{\nu}}\,\phi^{11}\,R^{11}\\&+10\,a_9\,\left(\frac{d^2}{d\,\eta^2}\,f_9\right)\,\sqrt{\frac{a_1}{\nu}}\,\phi^{9}\,R^{9}\\&+8\,a_7\,\left(\frac{d^2}{d\,\eta^2}\,f_7\right)\,\sqrt{\frac{a_1}{\nu}}\,\phi^{7}\,R^{7}\\&+6\,a_5\,\left(\frac{d^2}{d\,\eta^2}\,f_5\right)\,\sqrt{\frac{a_1}{\nu}}\,\phi^{5}\,R^{5}\\&+4\,a_3\,\left(\frac{d^2}{d\,\eta^2}\,f_3\right)\,\sqrt{\frac{a_1}{\nu}}\,\phi^{3}\,R^{3}\\&+a_1\,\left(\frac{d^2}{d\,\eta^2}\,f_1\right)\,\sqrt{\frac{a_1}{\nu}}\,\phi\,R\end{aligned} \tag{8.5.89}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\,y}\,w =&U_0\tan\left(\frac{\pi\,\alpha}{180}\right)\left(\frac{a_3\,\left(\frac{d}{d\,\eta}\,g_2\right)\,\sqrt{\frac{a_1}{\nu}}\,\phi^2\,R^2}{a_1}\right.\\&\left.+\left(\frac{d}{d\,\eta}\,g_0\right)\,\sqrt{\frac{a_1}{\nu}}\right)\end{aligned} \tag{8.5.90}$$

上式で、物体表面：$\eta=0$ の $\frac{d^2}{d\,\eta^2}\,f_1 \sim \frac{d^2}{d\,\eta^2}\,f_{11}$ の値が要求される。これは Runge-Kutta 法の計算結果の初期値として得られており、これを代入し、流向：β を求めると下図となる。$\phi=0deg.$ 近傍では、x 軸方向の流れは、よどみ点近傍の流れとなっており、z 軸方向の流れ：w の流れが主になり、$\beta=90deg.$ となる。$\phi=40\rightarrow 90deg.$ では、U が早くなり、$\alpha=45$deg. であるが β はより小さい角度となっている。はく離点：$\phi=108.76deg.$ 近傍では、z 軸方向の流れ：w の流れが主になり、$\beta=90deg.$ となる。翼などでは一部分ではく離し、z 軸方向の流れが生じると、他の部分にも影響を与え、はく離域が大幅に広がる場合があり、注意を要する。

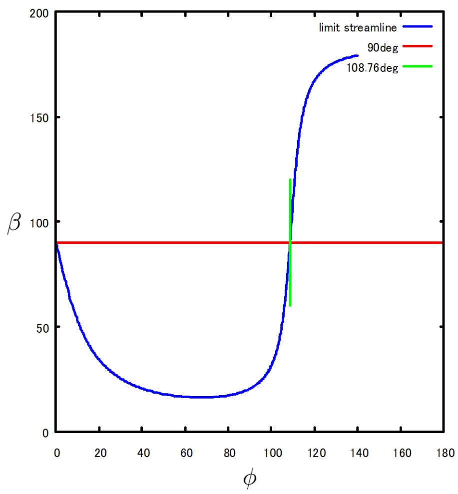


図 8.5.27: 限界流線の角度:β　　$R_n=1000$、$\alpha=45$deg.

(4) 境界層厚さ

```
\delta[1]='integrate(1-u(y)/U,y,0,inf);
ET2;
d*\eta/dy=rhs(ET2);
DET1:solve(%,dy)[1];
U2/U0;
(1-%)*DET1;
subst(['diff(f[1],\eta,1)='diff(f[12],\eta,
 1)+1,'diff(f[3],\eta,1)='diff(f[32],\eta,
 1)+1/4,'diff(f[5],\eta,1)='diff(f[52],
 \eta,1)+1/6,'diff(f[7],\eta,1)='diff(f[72]
 ,\eta,1)+1/8,'diff(f[9],\eta,1)=
 'diff(f[92],\eta,1)+1/10,'diff(f[11],\eta
 ,1)='diff(f[112],\eta,1)+1/12],%);
subst([A1,A3,A5,A7,A9,A11,X21],%);
DLT11:factor(%/R*sqrt(U[0]*R/\nu));
DLT12:\delta[1]/R*sqrt(U[0]*R/\nu)=
 'integrate(rhs(DLT11)/d/\eta,\eta,0,inf);
DLT13:subst(['diff(f[12],\eta,1)='diff(f[1]
 ,\eta,1)-1,'diff(f[32],\eta,1)='diff(f[3]
 ,\eta,1)-1/4,'diff(f[52],\eta,1)='diff(
 f[5],\eta,1)-1/6,'diff(f[72],\eta,1)=
 'diff(f[7],\eta,1)-1/8,'diff(f[92],\eta,
 1)='diff(f[9],\eta,1)-1/10,'diff(f[112],
 \eta,1)='diff(f[11],\eta,1)-1/12],%);
DLT14:subst(['diff(f[12],\eta,1)='diff(f[1]
 ,\eta,1)-1,'diff(f[32],\eta,1)='diff(f[3]
 ,\eta,1)-1/4,'diff(f[52],\eta,1)='diff(
 f[5],\eta,1)-1/6,'diff(f[72],\eta,1)=
 'diff(f[7],\eta,1)-1/8,'diff(f[92],\eta,
 1)='diff(f[9],\eta,1)-1/10,'diff(f[112],
 \eta,1)='diff(f[11],\eta,1)-1/12],
 rhs(DLT11/d/\eta));
```

おしのけ厚さ：δ_1 は次式で定義される。

$$\delta_1=\int_0^{\infty}1-\frac{\mathrm{u}\,(y)}{U}dy$$

(8.5.77) 式と (8.5.83) 式から、

$$\begin{aligned}\frac{u}{U} =&\left(12\,a_{11}\,\left(\frac{d}{d\,\eta}\,f_{11}\right)\,x^{11}+10\,a_9\,\left(\frac{d}{d\,\eta}\,f_9\right)\,x^9\right.\\&+8\,a_7\,\left(\frac{d}{d\,\eta}\,f_7\right)\,x^7+6\,a_5\,\left(\frac{d}{d\,\eta}\,f_5\right)\,x^5\\&\left.+4\,a_3\,\left(\frac{d}{d\,\eta}\,f_3\right)\,x^3+a_1\,\left(\frac{d}{d\,\eta}\,f_1\right)\,x\right)\\&/\left(a_{11}\,x^{11}+a_9\,x^9+a_7\,x^7+a_5\,x^5\right.\\&\left.+a_3\,x^3+a_1\,x\right)\end{aligned} \tag{8.5.91}$$

上式をおしのけ厚さの定義式に代入し、円柱の外界流速の係数の (8.5.84) 式を代入し、無次元化すると円柱のおしのけ厚さの分布式を得る。

$$\begin{aligned}\frac{\delta_1\sqrt{R_n}}{R} = -&\left(2^{\frac{3}{2}}\int_0^\infty 3\left(\frac{d}{d\eta}f_{11}-\frac{1}{12}\right)\phi^{10}\right.\\&-275\left(\frac{d}{d\eta}f_9-\frac{1}{10}\right)\phi^8\\&+15840\left(\frac{d}{d\eta}f_7-\frac{1}{8}\right)\phi^6\\&-498960\left(\frac{d}{d\eta}f_5-\frac{1}{6}\right)\phi^4\\&+6652800\left(\frac{d}{d\eta}f_3-\frac{1}{4}\right)\phi^2\\&\left.-9979200\left(\frac{d}{d\eta}f_1-1\right)d\eta\right)\\&/\left(\phi^{10}-110\phi^8+7920\phi^6-332640\phi^4\right.\\&\left.+6652800\phi^2-39916800\right)\end{aligned} \tag{8.5.92}$$

```
\delta[2]='integrate(u(y)/U*(1-u(y)/U),y,0
 ,inf);
U2/U0*(1-U2/U0)*DET1;
subst(['diff(f[1],\eta,1)='diff(f[12],\eta
 ,1)+1,'diff(f[3],\eta,1)='diff(f[32],\eta
 ,1)+1/4,'diff(f[5],\eta,1)='diff(f[52],
 \eta,1)+1/6,'diff(f[7],\eta,1)='diff(f[72]
 ,\eta,1)+1/8,'diff(f[9],\eta,1)='diff(
 f[92],\eta,1)+1/10,'diff(f[11],\eta,1)=
 'diff(f[112],\eta,1)+1/12],%);
subst([A1,A3,A5,A7,A9,A11,X21],%);
DLT21:factor(%/R*sqrt(U[0]*R/\nu));
DLT22:\delta[2]/R*sqrt(U[0]*R/\nu)=
 'integrate(rhs(DLT21)/d/\eta,\eta,0,inf);
DLT23:subst(['diff(f[12],\eta,1)='diff(f[1]
 ,\eta,1)-1,'diff(f[32],\eta,1)='diff(f[3]
 ,\eta,1)-1/4,'diff(f[52],\eta,1)='diff(
 f[5],\eta,1)-1/6,'diff(f[72],\eta,1)=
 'diff(f[7],\eta,1)-1/8,'diff(f[92],\eta,1)
 ='diff(f[9],\eta,1)-1/10,'diff(f[112],
 \eta,1)='diff(f[11],\eta,1)-1/12],%);
DLT24:subst(['diff(f[12],\eta,1)='diff(
 f[1],\eta,1)-1,'diff(f[32],\eta,1)=
 'diff(f[3],\eta,1)-1/4,'diff(f[52],\eta
 ,1)='diff(f[5],\eta,1)-1/6,'diff(f[72],
 \eta,1)='diff(f[7],\eta,1)-1/8,'diff(
 f[92],\eta,1)='diff(f[9],\eta,1)-1/10,
 'diff(f[112],\eta,1)='diff(f[11],\eta,1)
 -1/12],rhs(DLT21/d/\eta));
```

運動量厚さ：δ_2 は次式で定義される。

$$\delta_2 = \int_0^\infty \frac{\mathrm{u}(y)}{U}\left(1-\frac{\mathrm{u}(y)}{U}\right)dy$$

上式に (8.5.91) 式を代入し、おしのけ厚さと同様に処理し、円柱の運動量厚さの分布式を得ることができる。ここでは記述式が長くなるので式の記述を削除する。

```
for K:1 thru 109 do(
L:K,
DLT10:0.0,
DLT20:0.0,
DLTPH:\phi=L*%pi/180,
for J:1 thru 500 do(
DLT1KJ:subst([DLTPH,'diff(f[1],\eta,1)=
 listF11[J][2],'diff(f[3],\eta,1)=
 listF31[J][2],'diff(f[5],\eta,1)=
 listF51[J][2],'diff(f[7],\eta,1)=
 listF71[J][2],'diff(f[9],\eta,1)=
 listF91[J][2],'diff(f[11],\eta,1)=
 listFA1[J][2]],DLT14),
DLT10:float(DLT10+DLT1KJ*dT),
DLT2KJ:subst([DLTPH,'diff(f[1],\eta,1)=
 listF11[J][2],'diff(f[3],\eta,1)=
 listF31[J][2],'diff(f[5],\eta,1)=
 listF51[J][2],'diff(f[7],\eta,1)=
 listF71[J][2],'diff(f[9],\eta,1)=
 listF91[J][2],'diff(f[11],\eta,1)=
 listFA1[J][2]],DLT24),
DLT20:float(DLT20+DLT2KJ*dT)),
if K=1 then listDLT2:[[L,DLT20]] else
 listDLT2:append(listDLT2, [[L,DLT20]]),
if K=1 then listDLT1:[[L,DLT10]] else
 listDLT1:append(listDLT1, [[L,DLT10]]));
write_data(listDLT2,"M:\listDLT2.cvs");
write_data(listDLT1,"M:\listDLT1.cvs");
TAU22:subst([\phi=t*%pi/180],rhs(TAU21));
plot2d([TAU22,[discrete,listDLT2],
 [discrete,listDLT1]],[t,0,109],
 [legend,"tau","delta2","delta1"],
 [xlabel,"phi"]);
```

f, g の計算結果から、(8.5.92) 式などの数値積分を行い、円柱の x 軸方向のおしのけ厚さと運動量厚さの分布を以下に示す。また、(8.5.88) 式による円柱の x 軸方向の剪断応力分布も以下に示す。

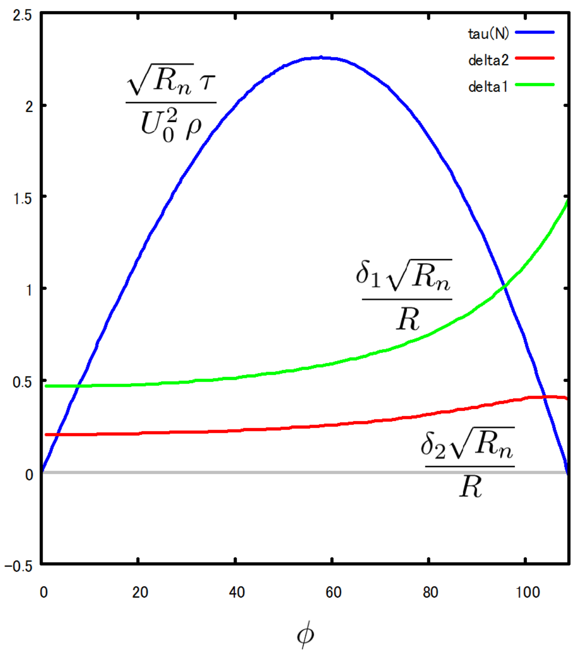


図 8.5.28: 剪断力、境界層厚さの分布　$R_n = 1000$

```
/* 速度分布 */
list:read_list("M:\listUU20.cvs");
for J:1 thru 100 do(
if J=1 then listUU20:[[list[1],list[2]]]
 else listUU20:append(listUU20,
 [[list[2*J-1],list[2*J]]]));
list:read_list("M:\listUU40.cvs");
for J:1 thru 100 do(
if J=1 then listUU40:[[list[1],list[2]]]
 else listUU40:append(listUU40,
 [[list[2*J-1],list[2*J]]]));
list:read_list("M:\listUU60.cvs");
for J:1 thru 100 do(
if J=1 then listUU60:[[list[1],list[2]]]
 else listUU60:append(listUU60,
 [[list[2*J-1],list[2*J]]]));
list:read_list("M:\listUU80.cvs");
for J:1 thru 100 do(
if J=1 then listUU80:[[list[1],list[2]]]
 else listUU80:append(listUU80,
 [[list[2*J-1],list[2*J]]]));
```

```
list:read_list("M:\listUU100.cvs");
for J:1 thru 100 do(
if J=1 then listUU100:[[list[1],list[2]]]
 else listUU100:append(listUU100,
 [[list[2*J-1],list[2*J]]]));
list:read_list("M:\listUU108.cvs");
for J:1 thru 100 do(
if J=1 then listUU108:[[list[1],list[2]]]
 else listUU108:append(listUU108,
 [[list[2*J-1],list[2*J]]]));
plot2d([[discrete,listUU20],
 [discrete,listUU40],[discrete,listUU60],
 [discrete,listUU80],[discrete,listUU100],
 [discrete,listUU108]],[x,0,5], [legend,
 "phi=20deg","phi=40deg",
 "phi=60deg","phi=80deg","phi=100deg",
 "phi=108.76deg"],[y,0,1.2],
 [xlabel,"y*sqrt(Rn)/R"]);
```

また、境界層内の流速分布を下記に示す。

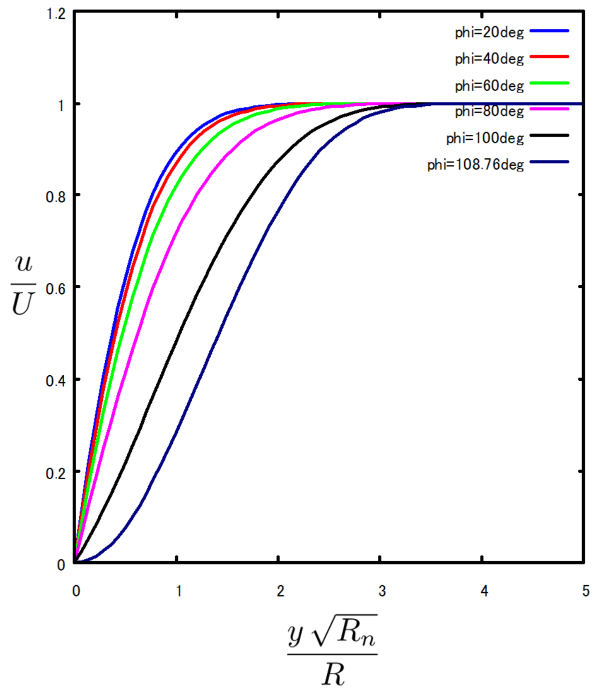


図 8.5.29: 流速：u の分布　$R_n = 1000$

剪断応力の最大値は 60 度近辺で、最大流速の 90 度より前にある。そして、60 度近辺以降から、境界層厚さは急激に増す。

8.5.8　境界層の運動量方程式

境界層の方程式を主流方向：x 軸方向に運動量の法則を適用するため、境界層厚さ方向：y 方向に積分し、剪断応力：τ_0、おしのけ厚さ：δ_1、運動量厚さ：δ_2 の関係式を得る。二次元の $x-y$ 座標系で、流速の各コンポーネント：u,v、圧力：p、密度：ρ、動粘性係数：ν とする。

```
/* 境界層方程式  */
kill(all);
load("vector");
MAS0:'diff(v,y,1)+'diff(u,x,1)=0;
NAV1:('diff(u,y,1))*v+u*('diff(u,x,1))
 +'diff(u,t,1)=\nu*('diff(u,y,2))
 -'diff(p,x,1)/\rho;
NAV0:U*('diff(U,x,1))+'diff(U,t,1)=
 -'diff(p,x,1)/\rho;
assume(\delta(x,t)>0);
MAS1:subst([u=u(x,y,t),v=v(x,y,t)],MAS0);
assume(y>0);
MAS11:first(lhs(MAS1))=-last(lhs(MAS1));
integrate(%,y,0,y);
MAS12:subst([v(x,0,t)=0],%);
assume(y[i]>0);
NAV1-NAV0;
subst([u=u(x,y,t),U=U(x,t),v=v(x,y,t)],%);
NAV11:rhs(%)=lhs(%);
'integrate(lhs(NAV11),y,0,y[i]);
ev(%,integrate);
MO11:subst([limit('diff(u(x,y,t),y,1),y,
 y[i],minus)=0,limit('diff(u(x,y,t),y,1),
 y,0,plus)=\tau[0](x)/\mu,\nu=\mu/\rho],%);
```

二次元の質量保存の方程式は、(8.5.2) 式から、

$$\frac{d}{d\,y}\,v+\frac{d}{d\,x}\,u=0 \tag{8.5.93}$$

「8.5.1 境界層の方程式」から、境界層の方程式は、(8.5.3) 式から、

$$\begin{aligned}&\left(\frac{d}{d\,y}\,u\right)\,v+u\,\left(\frac{d}{d\,x}\,u\right)+\frac{d}{d\,t}\,u\\&=\nu\,\left(\frac{d^2}{d\,y^2}\,u\right)-\frac{\frac{d}{d\,x}\,p}{\rho}\end{aligned} \tag{8.5.94}$$

また、外界流：U と圧力との関係は、(8.5.5) 式から

$$U\,\left(\frac{d}{d\,x}\,U\right)+\frac{d}{d\,t}\,U=-\frac{\frac{d}{d\,x}\,p}{\rho} \tag{8.5.95}$$

(8.5.93) 式を $u\to \mathrm{u}\,(x,y,t)$、$v\to \mathrm{v}\,(x,y,t)$ に置き換えて、

$$\frac{d}{d\,y}\,\mathrm{v}\,(x,y,t)=-\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{u}\,(x,y,t)$$

上式を y 方向に積分して、

$$\mathrm{v}\,(x,y,t)-\mathrm{v}\,(x,0,t)=-\int_0^y\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{u}\,(x,y,t)\,dy \tag{8.5.96}$$

(8.5.95) 式を (8.5.94) 式に代入し、$u\to \mathrm{u}\,(x,y,t)$、$v\to \mathrm{v}\,(x,y,t)$ に置き換えて、

$$\begin{aligned}&\mathrm{v}\,(x,y,t)\,\left(\frac{d}{d\,y}\,\mathrm{u}\,(x,y,t)\right)\\&\quad+\mathrm{u}\,(x,y,t)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{u}\,(x,y,t)\right)+\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{u}\,(x,y,t)\\&\quad-\mathrm{U}\,(x,t)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{U}\,(x,t)\right)-\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{U}\,(x,t)\\&\quad=\nu\,\left(\frac{d^2}{d\,y^2}\,\mathrm{u}\,(x,y,t)\right)\end{aligned} \tag{8.5.97}$$

上式の左右項を入れ替えて、下記の下線部分の 2 項は以降の式の展開をスムースに行うために付加する。

$$\begin{aligned}\nu\,\left(\frac{d^2}{d\,y^2}\,\mathrm{u}\,(x,y,t)\right)^{(\mathrm{a})}=&\mathrm{v}\,(x,y,t)\,\left(\frac{d}{d\,y}\,\mathrm{u}\,(x,y,t)\right)^{(\mathrm{d})}\\&+\mathrm{u}\,(x,y,t)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{u}\,(x,y,t)\right)^{(\mathrm{e})}\\&+\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{u}\,(x,y,t)^{(\mathrm{b})}\\&-\mathrm{U}\,(x,t)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{U}\,(x,t)\right)^{(\mathrm{c})}\\&\underline{+\mathrm{u}\,(x,t)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{U}\,(x,t)\right)^{(\mathrm{c})}}\\&\underline{-\mathrm{u}\,(x,t)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{U}\,(x,t)\right)^{(\mathrm{e})}}\\&-\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{U}\,(x,t)^{(\mathrm{b})}\end{aligned} \tag{8.5.98}$$

(8.5.98) 式の左辺を y 方向に $0\to\delta$ 境界層厚さまで積分して、物体表面の $y=0$ で $\mu\,\frac{d}{d\,y}\,\mathrm{u}=\tau_0$、境界層暑さの $y=\delta$ で $\frac{d}{d\,y}\,\mathrm{u}=0$ であるから、

$$\begin{aligned}&\nu\,\int_0^\delta\frac{d^2}{d\,y^2}\,\mathrm{u}\,(x,y,t)^{(\mathrm{a})}\,dy\\&=\nu\,\left(\lim_{y\to\delta-}\frac{d}{d\,y}\,\mathrm{u}\,(x,y,t)-\lim_{y\to 0+}\frac{d}{d\,y}\,\mathrm{u}\,(x,y,t)\right)\\&=-\frac{\tau_0\,(x)^{(\mathrm{a})}}{\rho}\end{aligned} \tag{8.5.99}$$

```
DLT1:\delta[1](x,t)='integrate((1-u(x,y,t)
 /U(x,t)),y,0,\delta(x,t));
lhs(%)*U(x,t)='integrate((U(x,t)-u(x,y,t))
 ,y,0,\delta(x,t));
DLT2:rhs(%)=lhs(%);
DLT3:'integrate(u(x,y,t)-U(x,t),y,0,
 \delta(x,t))=-\delta[1](x)*U(x,t);
THE1:\delta[2](x,t)='integrate(u(x,y,t)
 /U(x,t)*(1-u(x,y,t)/U(x,t)),y,0,
 \delta(x,t));
THE2:rhs(%)=lhs(%);
THE3:'integrate(u(x,y,t)*(U(x,t)-u(x,y,t))
 ,y,0,\delta(x,t))=\delta[2](x,t)*U(x,t)^2;
MOR0:rhs(NAV11);
MO21:-'diff(U(x,t),t,1)+'diff(u(x,y,t),t
 ,1);-'diff('integrate(U(x,t)-u(x,y,t),y,0,
 \delta(x,t)),t,1);
MO22:subst([DLT2],%);
```

次に、おしのけ厚さ:δ_1、運動量厚さ：δ_2 について準備しておく。おしのけ厚さ：$\delta_1(x,t)$ は次のように定義される。ここで $\delta(x,t)$ は境界層厚さである。

$$\delta_1(x,t)=\int_0^{\delta(x,t)}1-\frac{\mathrm{u}(x,y,t)}{\mathrm{U}(x,t)}dy$$

上式を変形して、

$$\delta_1(x,t)\ \mathrm{U}(x,t)=\int_0^{\delta(x,t)}\mathrm{U}(x,t)-\mathrm{u}(x,y,t)\,dy$$

上式から、

$$\int_0^{\delta(x,t)}\mathrm{u}(x,y,t)-\mathrm{U}(x,t)\,dy=-\delta_1(x)\ \mathrm{U}(x,t) \tag{8.5.100}$$

運動量厚さ：$\delta_2(x,t)$ は次のように定義される。

$$\delta_2(x,t)=\int_0^{\delta(x,t)}\frac{\mathrm{u}(x,y,t)}{\mathrm{U}(x,t)}\left(1-\frac{\mathrm{u}(x,y,t)}{\mathrm{U}(x,t)}\right)dy$$

上式を変形して、

$$\begin{aligned}&\int_0^{\delta(x,t)}(\mathrm{U}(x,t)-\mathrm{u}(x,y,t))\ \mathrm{u}(x,y,t)\,dy\\&\quad=\delta_2(x,t)\ \mathrm{U}(x,t)^2\end{aligned} \tag{8.5.101}$$

(8.5.98) 式の右辺第三項 $^{(b)}$、右辺第七項 $^{(b)}$ について y 方向に積分し、(8.5.100) 式から、

$$\begin{aligned}&\frac{d}{d\,t}\mathrm{u}(x,y,t)^{(\mathrm{b})}-\frac{d}{d\,t}\mathrm{U}(x,t)^{(\mathrm{b})}\\&\to-\frac{d}{d\,t}\int_0^{\delta(x,t)}\mathrm{U}(x,t)-\mathrm{u}(x,y,t)\,dy\\&=-\frac{d}{d\,t}\left(\delta_1(x,t)\ \mathrm{U}(x,t)\right)^{(\mathrm{b})}\end{aligned} \tag{8.5.102}$$

```
MOR0-MO21;
MO41:last(%)+u(x,y,t)*'diff(U(x,t),x,1);
factor(MO41);
'integrate(%,y,0,\delta(x,t));
MO42:subst([DLT3],%);
MO51:MOR0-MO21-MO41;
MO61:first(MO51);
MO71:MO51-MO61;
subst([MAS12],MO61);
'integrate(%,y,0,\delta(x,t));
-((limit(u(x,y,t)*'integrate('diff(u(x,y,t)
 ,x,1),y,0,y),y,\delta(x,t))-limit(u(x,y,t)
 *'integrate('diff(u(x,y,t),x,1),y,0,y),y,
 0,plus))-'integrate(u(x,y,t)*diff(u(x,y,t)
 ,x,1),y,0,\delta(x,t)));
MO62:-((U(x,t)*'integrate('diff(u(x,y,t),x,
 1),y,0,\delta(x,t)))-'integrate(u(x,y,t)
 *diff(u(x,y,t),x,1),y,0,\delta(x,t)));
%+'integrate(first(MO71),y,0,\delta(x,t))
 +'integrate(last(MO71),y,0,\delta(x,t));
-'integrate((U(x,t)-u(x,y,t))*'diff(
 u(x,y,t),x,1),y,0,\delta(x,t))-'integrate(
 'diff((U(x,t)-u(x,y,t)),x,1)*u(x,y,t),y,
 0,\delta(x,t));
-'integrate('diff((U(x,t)-u(x,y,t))
 *u(x,y,t),x,1),y,0,\delta(x,t));
-'diff('integrate(((U(x,t)-u(x,y,t))
 *u(x,y,t)),y,0,\delta(x,t)),x,1);
MO52:subst([THE3],%);
MO11=MO22+MO42+MO52;
MOA1:expand(-%);
subst([\delta[2](x,t)=\delta[2](x),
 \delta[1](x,t)=\delta[1](x),U(x,t)=U(x)]
 ,%);
lhs(%)=ev(rhs(%),diff);
MOA2:lhs(%)=partfrac(rhs(%),U(x)*(
 'diff(U(x),x,1)));
```

(8.5.98) 式の右辺第四項 $^{(c)}$、右辺第五項 $^{(c)}$ について y 方向に積分し、(8.5.100) 式から、

$$\begin{aligned}&\mathrm{u}(x,y,t)\left(\frac{d}{d\,x}\mathrm{U}(x,t)\right)-\mathrm{U}(x,t)\left(\frac{d}{d\,x}\mathrm{U}(x,t)\right)\\&\to\left(\frac{d}{d\,x}\mathrm{U}(x,t)\right)\int_0^{\delta(x,t)}\mathrm{u}(x,y,t)-\mathrm{U}(x,t)\,dy\\&=-\,\delta_1(x)\ \mathrm{U}(x,t)\left(\frac{d}{d\,x}\mathrm{U}(x,t)\right)^{(\mathrm{c})}\end{aligned} \tag{8.5.103}$$

(8.5.98) 式の右辺第一項 $^{(d)}$ の $\mathrm{v}(x,y,t)$ に (8.5.96) 式を代入すると次式となる。これを y 方向に積分し、部分

積分を活用する。ここで $y \to \delta(x,t)$ では $\mathrm{u}(x,y,t) \to U(x,t)$ となり、$y \to 0+$ では $\mathrm{u}(x,y,t) \to 0$ となり、次式となる。

$$\begin{aligned}
&\mathrm{v}(x,y,t)\left(\frac{d}{d\,y}\,\mathrm{u}(x,y,t)\right)^{(\mathrm{d})}\\
&= -\left(\frac{d}{d\,y}\,\mathrm{u}(x,y,t)\right)\int_0^y \frac{d}{d\,x}\,\mathrm{u}(x,y,t)\,dy\\
&\to \int_0^{\delta(x,t)}\left(\frac{d}{d\,y}\,\mathrm{u}(x,y,t)\right)\int_0^y \frac{d}{d\,x}\,\mathrm{u}(x,y,t)\,dydy\\
&= -\lim_{y\to\delta(x,t)}\mathrm{u}(x,y,t)\int_0^y \frac{d}{d\,x}\,\mathrm{u}(x,y,t)\,dy\\
&\quad + \lim_{y\to 0+}\mathrm{u}(x,y,t)\int_0^y \frac{d}{d\,x}\,\mathrm{u}(x,y,t)\,dy\\
&\quad + \int_0^{\delta(x,t)}\mathrm{u}(x,y,t)\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{u}(x,y,t)\right)dy\\
&= \int_0^{\delta(x,t)}\mathrm{u}(x,y,t)\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{u}(x,y,t)\right)^{(\mathrm{d})}dy\\
&\quad -\mathrm{U}(x,t)\int_0^{\delta(x,t)}\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{u}(x,y,t)^{(\mathrm{d})}\,dy
\end{aligned} \tag{8.5.104}$$

(8.5.98) 式の右辺第二項 $^{(e)}$、右辺第六項 $^{(e)}$ について y 方向に積分し、上式 $^{(d)}$ と合わせ、更に (8.5.101) 式を代入し、

$$\begin{aligned}
&2\int_0^{\delta(x,t)}\mathrm{u}(x,y,t)\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{u}(x,y,t)\right)^{(\mathrm{d})(\mathrm{e})}dy\\
&\quad -\mathrm{U}(x,t)\int_0^{\delta(x,t)}\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{u}(x,y,t)^{(\mathrm{d})}dy\\
&\quad -\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{U}(x,t)\right)\int_0^{\delta(x,t)}\mathrm{u}(x,y,t)^{(\mathrm{e})}dy\\
&= -\int_0^{\delta(x,t)}\left(\mathrm{U}(x,t)-\mathrm{u}(x,y,t)\right)\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{u}(x,y,t)\right)dy\\
&\quad -\int_0^{\delta(x,t)}\mathrm{u}(x,y,t)\left(\frac{d}{d\,x}\left(\mathrm{U}(x,t)-\mathrm{u}(x,y,t)\right)\right)dy\\
&= -\int_0^{\delta(x,t)}\frac{d}{d\,x}\left(\left(\mathrm{U}(x,t)-\mathrm{u}(x,y,t)\right)\mathrm{u}(x,y,t)\right)dy\\
&= -\frac{d}{d\,x}\int_0^{\delta(x,t)}\left(\mathrm{U}(x,t)-\mathrm{u}(x,y,t)\right)\mathrm{u}(x,y,t)\,dy\\
&= -\frac{d}{d\,x}\left(\delta_2(x,t)\,\mathrm{U}(x,t)^2\right)^{(\mathrm{d})(\mathrm{e})}
\end{aligned} \tag{8.5.105}$$

(8.5.98) 式を各項に分けて y 方向に積分した結果:(8.5.99) 式、(8.5.102) 式、(8.5.103) 式、(8.5.105) 式から下記の境界層の運動量方程式が得られた。

$$\begin{aligned}
\frac{\tau_0(x)^{(\mathrm{a})}}{\rho} =& \frac{d}{d\,x}\left(\delta_2(x,t)\,\mathrm{U}(x,t)^2\right)^{(\mathrm{d})(\mathrm{e})}\\
&+\frac{d}{d\,t}\left(\delta_1(x,t)\,\mathrm{U}(x,t)\right)^{(\mathrm{b})}\\
&+\delta_1(x)\,\mathrm{U}(x,t)\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{U}(x,t)\right)^{(\mathrm{c})}
\end{aligned} \tag{8.5.106}$$

定常状態では、下記の境界層の運動量方程式となる。

$$\begin{aligned}
\frac{\tau_0(x)}{\rho} =& \left(2\,\delta_2(x)+\delta_1(x)\right)\mathrm{U}(x)\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{U}(x)\right)\\
&+\mathrm{U}(x)^2\left(\frac{d}{d\,x}\,\delta_2(x)\right)
\end{aligned} \tag{8.5.107}$$

8.5.9 運動量方程式の近似解法

Bohlen & Walz の運動量方程式の近似解法を以下に示す。ここで定常状態を扱うとして、前節同様 $x-y$ 座標系を用い、主流方向に x 軸、物体表面から垂直上方に y 軸とする。

```
kill(all);
load("vector");
depends(\eta,[y]);
NAV11:\nu*('diff(u(x,y,t),y,2))=v(x,y,t)
 *('diff(u(x,y,t),y,1))+u(x,y,t)*('diff(
 u(x,y,t),x,1))+'diff(u(x,y,t),t,1)-U(x,t)
 *('diff(U(x,t),x,1))-'diff(U(x,t),t,1);
MOA2:\tau[0](x)/\rho=(2*\delta[2](x)
 +\delta[1](x))*U(x)*('diff(U(x),x,1))
 +U(x)^2*('diff(\delta[2](x),x,1));
U1:u(x,y)/U(x)=A[1]*\eta+A[2]*\eta^2+A[3]
 *\eta^3+A[4]*\eta^4;
U2:U1*U(x);
LA1:\Lambda(x)=\delta(x)^2/\nu*
 'diff(U(x),x,1);
ET1:\eta=y/\delta(x);
ET2:diff(ET1,y,1);
ET3:diff(ET1,y,2);
diff(U2,y,1);
DU2:factor(subst([ET2],%));
diff(U2,y,2);
DDU2:factor(subst([ET2,ET3],%));
LA2:solve(LA1,'diff(U(x),x,1))[1];
NAV10:subst([u(x,y,t)=u(x,y)],lhs(NAV11))
 =subst([v(x,y,t)=0,u(x,y,t)=0,U(x,t)=
 U(x),'diff(U(x),t,1)=0],rhs(NAV11));
subst([DDU2,LA2,\eta=0],%);
AA1:solve(%,A[2])[1];
AA2:subst([u(x,y)=U(x),\eta=1],U2);
AA3:subst([\eta=1],rhs(DU2))=0;
AA4:subst([\eta=1],rhs(DDU2))=0;
AA0:solve([AA1,AA2,AA3,AA4],[A[1],A[2],
 A[3],A[4]])[1];
subst([AA0],U1);
U11:partfrac(%,\Lambda);
F1:f(\eta)=-(-6*\eta^4+12*\eta^3-12*\eta)
 /6;
G1:g(\eta)=-(\eta^4-3*\eta^3+3*\eta^2
 -\eta)/6;
U12:lhs(U11)=f(\eta)+\Lambda(x)*g(\eta);
subst([F1,G1],U12);
U13:U12*U(x);
```

境界層の外界流速：$\mathrm{U}\,(x)$、境界層厚さ：$\delta\,(x)$ で、境界層内の流速分布：$\mathrm{u}\,(x,y)$ を下記の 4 次式で表現し、η の関数とする。

$$\frac{\mathrm{u}\,(x,y)}{\mathrm{U}\,(x)}=A_4\,\eta^4+A_3\,\eta^3+A_2\,\eta^2+A_1\,\eta \tag{8.5.108}$$

ここで、物体表面:$y=0$ で $\eta=0$、境界層厚さ:$y=\delta(x)$ で $\eta=1$ とすると、

$$\eta=\frac{y}{\delta\,(x)},\quad \frac{d}{d\,y}\,\eta=\frac{1}{\delta\,(x)},\quad \frac{d^2}{d\,y^2}\,\eta=0 \tag{8.5.109}$$

境界条件として、$y=0\quad(\eta=0)$ で、$\lim_{y\to 0+}\mathrm{u}\,(x,y)=0$、$\lim_{y\to 0+}\mathrm{v}\,(x,y)=0$ である。この関係を境界層の方程式:(8.5.3) 式に代入し整理すると

$$\nu\,\left(\lim_{y\to 0+}\frac{d^2}{d\,y^2}\,\mathrm{u}\,(x,y)\right)=-\mathrm{U}\,(x)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{U}\,(x)\right) \tag{8.5.110}$$

また、$y=\delta(x)\quad(\eta=1)$ で、
$\lim_{y\to\delta(x)-}\mathrm{u}\,(x,y)=U(x)$、
$\lim_{y\to\delta(x)-}\frac{d}{d\,y}\,\mathrm{u}\,(x,y)=0$、$\lim_{y\to\delta(x)-}\frac{d^2}{d\,y^2}\,\mathrm{u}\,(x,y)=0$ である。この関係を境界層の方程式:(8.5.3) 式に代入し整理すると $\mathrm{U}\,(x)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{U}\,(x)\right)=\mathrm{U}\,(x)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{U}\,(x)\right)$ で既に満足している。
ここで、下記の $\Lambda\,(x)$ を導入する。

$$\Lambda\,(x)=\frac{\delta\,(x)^2\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{U}\,(x)\right)}{\nu} \tag{8.5.111}$$

$\frac{d}{d\,y}\,\mathrm{u}\,(x,y)$、$\frac{d^2}{d\,y^2}\,\mathrm{u}\,(x,y)$ は (8.5.108) 式を微分し、(8.5.109) 式を代入し、下記となる。

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\,y}\,\mathrm{u}\,(x,y)=&\left(4\,A_4\,\eta^3\,\left(\frac{d}{d\,y}\,\eta\right)+3\,A_3\,\eta^2\,\left(\frac{d}{d\,y}\,\eta\right)\right.\\&\left.+2\,A_2\,\eta\,\left(\frac{d}{d\,y}\,\eta\right)+A_1\,\left(\frac{d}{d\,y}\,\eta\right)\right)\mathrm{U}\,(x)\\=&\frac{\left(4\,A_4\,\eta^3+3\,A_3\,\eta^2+2\,A_2\,\eta+A_1\right)\,\mathrm{U}\,(x)}{\delta\,(x)}\end{aligned} \tag{8.5.112}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{d\,y^2}\,\mathrm{u}\,(x,y)=&\left(4\,A_4\,\eta^3\,\left(\frac{d^2}{d\,y^2}\,\eta\right)\right.\\&+3\,A_3\,\eta^2\,\left(\frac{d^2}{d\,y^2}\,\eta\right)+2\,A_2\,\eta\,\left(\frac{d^2}{d\,y^2}\,\eta\right)\\&+A_1\,\left(\frac{d^2}{d\,y^2}\,\eta\right)+12\,A_4\,\eta^2\left(\frac{d}{d\,y}\,\eta\right)^2\\&\left.+6\,A_3\,\eta\left(\frac{d}{d\,y}\,\eta\right)^2+2\,A_2\left(\frac{d}{d\,y}\,\eta\right)^2\right)\\=&\frac{2\,\left(6\,A_4\,\eta^2+3\,A_3\,\eta+A_2\right)\,\mathrm{U}\,(x)}{\delta\,(x)^2}\end{aligned} \tag{8.5.113}$$

次に (8.5.108) 式の A_n を求める。(8.5.110) 式の境界条件式に、(8.5.113) 式に $\eta=0$ を代入した式を代入し、

(8.5.111) 式を更に代入して、

$$\frac{2\,A_2\,\nu\,\mathrm{U}\,(x)}{\delta\,(x)^2}=-\frac{\nu\,\Lambda\,(x)\;\mathrm{U}\,(x)}{\delta\,(x)^2}$$

上式から、

$$A_2=-\frac{\Lambda\,(x)}{2} \tag{8.5.114}$$

$y=\delta(x)\quad(\eta=1)$ で $\lim_{y\to\delta(x)-}\mathrm{u}\,(x,y)=U(x)$ から、(8.5.108) 式より、

$$\mathrm{U}\,(x)=(A_4+A_3+A_2+A_1)\;\mathrm{U}\,(x) \tag{8.5.115}$$

$y=\delta(x)\quad(\eta=1)$ で $\lim_{y\to\delta(x)-}\frac{d}{d\,y}\mathrm{u}\,(x,y)=0$ から、(8.5.112) 式より、

$$\frac{(4\,A_4+3\,A_3+2\,A_2+A_1)\;\mathrm{U}\,(x)}{\delta\,(x)}=0 \tag{8.5.116}$$

$y=\delta(x)\quad(\eta=1)$ で $\lim_{y\to\delta(x)-}\frac{d^2}{d\,y^2}\mathrm{u}\,(x,y)=0$ から、(8.5.113) 式より、

$$\frac{2\;(6\,A_4+3\,A_3+A_2)\;\mathrm{U}\,(x)}{\delta\,(x)^2}=0 \tag{8.5.117}$$

上記の (8.5.114) 式から (8.5.117) 式の連立方程式を解いて、

$$\begin{aligned}A_1&=\frac{\Lambda\,(x)+12}{6},A_2=-\frac{\Lambda\,(x)}{2},\\ A_3&=\frac{\Lambda\,(x)-4}{2},A_4=-\frac{\Lambda\,(x)-6}{6}\end{aligned} \tag{8.5.118}$$

上記を (8.5.108) 式式に代入し、境界層内の流速分布：$\mathrm{u}\,(x,y)$ を外界流速変化：$\Lambda\,(x)$ で表現できた。

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{u}\,(x,y)}{\mathrm{U}\,(x)}=&\frac{\left(-\eta^4+3\,\eta^3-3\,\eta^2+\eta\right)\;\Lambda\,(x)}{6}\\ &+\frac{6\,\eta^4-12\,\eta^3+12\,\eta}{6}\\ \frac{\mathrm{u}\,(x,y)}{\mathrm{U}\,(x)}=&\mathrm{g}\,(\eta)\;\Lambda\,(x)+\mathrm{f}\,(\eta)\\ \mathrm{f}\,(\eta)=&\frac{6\,\eta^4-12\,\eta^3+12\,\eta}{6}\\ \mathrm{g}\,(\eta)=&\frac{-\eta^4+3\,\eta^3-3\,\eta^2+\eta}{6}\end{aligned} \tag{8.5.119}$$

```
DLT1;
(1-u(x,y)/U(x))*dy;
subst([U12,dy=\delta(x)*d*\eta],%);
\delta[1](x)='integrate(%/d/\eta,\eta,0,1);
DLT4:%/\delta(x);
subst([F1,G1],%);
DLT5:expand(ev(%,integrate));
DLT6:factor(solve(DLT5,\delta[1](x))[1]);
```

```
THE1;
u(x,y)/U(x)*(1-u(x,y)/U(x))*dy;
subst([U13,dy=\delta(x)*d*\eta],%);
\delta[2](x)='integrate(%/d/\eta,\eta,0,1);
THE4:%/delta(x);
subst([F1,G1],%);
THE5:expand(ev(%,integrate));
THE6:factor(solve(THE5,\delta[2](x))[1]);
TAU1:\tau[0](x)=limit(\nu*\rho*'diff(u(x,y)
 ,y,1),y,0);
'diff(u(x,y),y,1)=subst([U13,F1,G1],
 'diff(u(x,y),y,1));
ev(%,diff);
subst([ET2,\eta=0],%);
subst([%],TAU1);
TAU2:expand(%/U(x)*\delta(x)/\mu);
TAU6:factor(solve(TAU2,\tau[0](x))[1]);
```

(8.5.119) 式の境界層内の流速分布を用いて、境界層厚さや剪断力を求める。おしのけ厚さ：$\delta_1\,(x,t)$ は次式で定義される。

$$\delta_1\,(x,t)=\int_0^{\delta(x,t)}1-\frac{\mathrm{u}\,(x,y,t)}{\mathrm{U}\,(x,t)}dy$$

ここで、積分を η で行うので、(8.5.109) 式から被積分関数は次の関係がある。

$$\begin{aligned}&dy\;\left(1-\frac{\mathrm{u}\,(x,y)}{\mathrm{U}\,(x)}\right)\\ =&d\,\eta\,\delta\,(x)\;(-\mathrm{g}\,(\eta)\;\Lambda\,(x)-\mathrm{f}\,(\eta)+1)\end{aligned}$$

以上から、

$$\begin{aligned}\frac{\delta_1\,(x)}{\delta\,(x)}=&\int_0^1-\mathrm{g}\,(\eta)\;\Lambda\,(x)-\mathrm{f}\,(\eta)+1d\eta\\ =&\frac{3}{10}-\frac{\Lambda\,(x)}{120}\end{aligned} \tag{8.5.120}$$

運動量厚さ：$\delta_2\,(x,t)$ は次式で定義される。

$$\delta_2\,(x,t)=\int_0^{\delta(x,t)}\frac{\mathrm{u}\,(x,y,t)}{\mathrm{U}\,(x,t)}\;\left(1-\frac{\mathrm{u}\,(x,y,t)}{\mathrm{U}\,(x,t)}\right)dy$$

ここで、積分を η で行うので、(8.5.109) 式から被積分関数は次の関係がある。

$$\begin{aligned}&\frac{dy\,\mathrm{u}\,(x,y)}{\mathrm{U}\,(x)}\;\left(1-\frac{\mathrm{u}\,(x,y)}{\mathrm{U}\,(x)}\right)\\ =&d\,\eta\,\delta\,(x)\;(-\mathrm{g}\,(\eta)\;\Lambda\,(x)-\mathrm{f}\,(\eta)+1)\\ &\times\;(\mathrm{g}\,(\eta)\;\Lambda\,(x)+\mathrm{f}\,(\eta))\end{aligned}$$

以上から、

$$\frac{\delta_2(x)}{\delta(x)} = \int_0^1 (-\mathrm{g}(\eta)\,\Lambda(x) - \mathrm{f}(\eta) + 1) \times (\mathrm{g}(\eta)\,\Lambda(x) + \mathrm{f}(\eta))\,d\eta = -\frac{\Lambda(x)^2}{9072} - \frac{\Lambda(x)}{945} + \frac{37}{315} \tag{8.5.121}$$

物体表面に作用する剪断応力：τ_0 は、

$$\tau_0(x) = \nu\,\rho\left(\lim_{y\to 0}\frac{d}{d\,y}\mathrm{u}(x,y)\right)$$

(8.5.119) 式の境界層内の流速分布：$\mathrm{u}(x,y)$ を y で微分すると、

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\,y}\mathrm{u}(x,y) = &-\frac{2\,\eta^3\left(\frac{d}{d\,y}\eta\right)\Lambda(x)\,\mathrm{U}(x)}{3} + \frac{3\,\eta^2\left(\frac{d}{d\,y}\eta\right)\Lambda(x)\,\mathrm{U}(x)}{2} - \eta\left(\frac{d}{d\,y}\eta\right)\Lambda(x)\,\mathrm{U}(x) \\ &+ \frac{\left(\frac{d}{d\,y}\eta\right)\Lambda(x)\,\mathrm{U}(x)}{6} + 4\,\eta^3\left(\frac{d}{d\,y}\eta\right)\mathrm{U}(x) - 6\,\eta^2\left(\frac{d}{d\,y}\eta\right)\mathrm{U}(x) + 2\left(\frac{d}{d\,y}\eta\right)\mathrm{U}(x)\end{aligned}$$

上式に、(8.5.109) 式の関係式と $\eta = 0$ を代入し、上記の剪断応力の式に代入すると、

$$\tau_0(x) = \nu\,\rho\left(\frac{\Lambda(x)}{6\,\delta(x)} + \frac{2}{\delta(x)}\right)\mathrm{U}(x)$$

上式から、

$$\frac{\tau_0(x)\;\delta(x)}{\mu\,\mathrm{U}(x)} = \frac{\Lambda(x)}{6} + 2 \tag{8.5.122}$$

```
/* Bohlen & Walz */
LA8:k(x)=\delta[2](x)^2/\nu*'diff(U(x),x
 ,1);
K1:z(x)=\delta[2](x)^2/\nu;
K2:solve(K1,\delta[2](x)^2)[1];
K11:solve(LA8,delta[2](x)^2)[1];
diff(K2,x,1);
DK2:solve(%,'diff(delta[2](x),x,1))[1];
LA81:subst([K2],LA8);
LA82:solve(LA81,z(x))[1];
```

```
K3:subst([LA2,K1,THE6],LA81);
\delta[1](x)/\delta[2](x);
DLT7:%=subst([DLT6,THE6],%);
DLT71:lhs(%)=f[1];
DLT711:solve(%,delta[1](x))[1];
DLT72:f[1]=rhs(DLT7);
\tau[0](x)*\delta[2](x)/\nu/\rho/U(x);
TAU7:%=subst([TAU6,THE6],%);
TAU71:lhs(%)=f[2];
TAU711:solve(%,tau[0](x))[1];
TAU72:f[2]=rhs(TAU7);
```

下記の $\mathrm{k}(x)$、$\mathrm{z}(x)$ を導入する。

$$\mathrm{k}(x) = \frac{\delta_2(x)^2\left(\frac{d}{d\,x}\mathrm{U}(x)\right)^{(a)}}{\nu} \tag{8.5.123}$$

$$\mathrm{z}(x) = \frac{\delta_2(x)^2}{\nu} \tag{8.5.124}$$

$$\mathrm{k}(x) = \mathrm{z}(x)\left(\frac{d}{d\,x}\mathrm{U}(x)\right) \tag{8.5.125}$$

(8.5.123) 式に (8.5.111) 式と (8.5.121) 式を代入し、$\Lambda(x)$ の関数の式にすると、

$$\mathrm{k}(x) = \frac{\Lambda(x)\left(5\,\Lambda(x)^2 + 48\,\Lambda(x) - 5328\right)^2}{2057529600} \tag{8.5.126}$$

$\frac{\delta_1(x)}{\delta_2(x)}$ は、(8.5.120) 式と (8.5.121) 式から、

$$\begin{aligned}\frac{\delta_1(x)}{\delta_2(x)} &= \frac{378\,(\Lambda(x) - 36)}{5\,\Lambda(x)^2 + 48\,\Lambda(x) - 5328} \\ &= f_1^{(b)} \\ f_1 &= \frac{378\,(\Lambda(x) - 36)}{5\,\Lambda(x)^2 + 48\,\Lambda(x) - 5328}\end{aligned} \tag{8.5.127}$$

$\frac{\tau_0(x)\,\delta_2(x)}{\nu\,\rho\,\mathrm{U}(x)}$ は、(8.5.121) 式と (8.5.122) 式から、

$$\begin{aligned}\frac{\tau_0(x)\;\delta_2(x)}{\nu\,\rho\,\mathrm{U}(x)} &= -\frac{(\Lambda(x) + 12)}{272160} \times \left(5\,\Lambda(x)^2 + 48\,\Lambda(x) - 5328\right) \\ &= f_2^{(c)} \\ f_2 &= -\frac{(\Lambda(x) + 12)}{272160} \times \left(5\,\Lambda(x)^2 + 48\,\Lambda(x) - 5328\right)\end{aligned} \tag{8.5.128}$$

(8.5.124) 式から、$\delta_2(x)^2$ を x で微分して、下記の関係式を得る。

$$\begin{aligned}\delta_2(x)^2 &= \nu\,\mathrm{z}(x) \\ 2\,\delta_2(x)\left(\frac{d}{d\,x}\delta_2(x)\right) &= \nu\left(\frac{d}{d\,x}\mathrm{z}(x)\right)^{(d)}\end{aligned} \tag{8.5.129}$$

定常状態の運動量方程式は (8.5.107) 式から、

$$\frac{\tau_0(x)}{\rho} = (2\,\delta_2(x) + \delta_1(x))\,\mathrm{U}(x)\left(\frac{d}{d\,x}\mathrm{U}(x)\right) + \mathrm{U}(x)^2\left(\frac{d}{d\,x}\delta_2(x)\right)$$

上式に $\frac{\delta_2(x)}{\nu\,\mathrm{U}(x)}$ を掛け、

$$\frac{\tau_0(x)\,\delta_2(x)^{(c)}}{\nu\,\rho\,\mathrm{U}(x)} = \frac{2\,\delta_2(x)^2\,\left(\frac{d}{d\,x}\mathrm{U}(x)\right)^{(a)}}{\nu} + \frac{\delta_1(x)\,\delta_2(x)\,\left(\frac{d}{d\,x}\mathrm{U}(x)\right)^{(a)(b)}}{\nu} + \frac{\delta_2(x)\,\mathrm{U}(x)\,\left(\frac{d}{d\,x}\delta_2(x)\right)^{(d)}}{\nu}$$

(8.5.123) 式 $^{(a)}$、(8.5.127) 式 $^{(b)}$、(8.5.128) 式 $^{(c)}$、(8.5.129) 式 $^{(d)}$ を上式に代入し、

$$f_2^{(c)} = \frac{\mathrm{U}(x)\,\left(\frac{d}{d\,x}\mathrm{z}(x)\right)^{(d)}}{2} + f_1\,\mathrm{k}(x)^{(a)(b)} + 2\,\mathrm{k}(x)^{(a)}$$

```
MOA3:expand(MOA2*\delta[2](x)/\nu/U(x));
subst([DLT711,K11,TAU711,DK2],%);
MOA31:U(x)*solve(%,'diff(z(x),x,1))[1];
MOA32:lhs(%)=f;
F0:f=2*f[2]-(2*f[1]+4)*k(x);
F01:factor(subst([DLT72,TAU72,K3],%));
K3PL:subst([\Lambda(x)=t],rhs(K3));
F0PL:subst([\Lambda(x)=t],rhs(F01));
F1PL:subst([\Lambda(x)=t],rhs(DLT72));
F2PL:subst([\Lambda(x)=t],rhs(TAU72));
plot2d([K3PL,F0PL,F1PL,F2PL],[t,-15,15],
 [legend, "K","F","F1","F2"],
 [xlabel,"Lambda"]);
plot2d(F0PL,[t,-15,15],[legend, "F"]);
LAF0:\Lambda(x)=find_root(F0PL=0,t,-15,15);
K0:subst([LAF0],K3);
F00:subst([LAF0],F01);
F10:subst([LAF0],DLT72);
F20:subst([LAF0],TAU72);
F02:float(subst([\Lambda(x)=0],F01));
-F02/K0;
FD0:f=0.47-6.0*k(x);
FD0PL:subst([k(x)=x],rhs(FD0));
plot2d([FD0PL,[parametric,K3PL,F0PL,
 [t,-15,15],[nticks,50]]],[x,-0.2,0.1],
 [legend, "F1","F"],[xlabel,"k(x)"]);
```

上式を整理すると次式となる。

$$\mathrm{U}(x)\left(\frac{d}{d\,x}\mathrm{z}(x)\right) = 2\,f_2 - (2\,f_1 + 4)\,\mathrm{k}(x)$$

$$\mathrm{U}(x)\left(\frac{d}{d\,x}\mathrm{z}(x)\right) = f$$

$$f = -\frac{\left(5\,\Lambda(x)^2 + 48\,\Lambda(x) - 5328\right)}{514382400} \times \left(5\,\Lambda(x)^3 + 237\,\Lambda(x)^2 - 8352\,\Lambda(x) + 45360\right) \tag{8.5.130}$$

$\mathrm{k}(x), f, f_1, f_2$ は $\Lambda(x)$ の関数であり、その結果を下図に示す。よどみ点では $U(x) = 0$ であり、$f = 0$ となる。このときの $\Lambda(x), \mathrm{k}(x)$ は根を Maxima の関数：find_root で求め、下記となる。

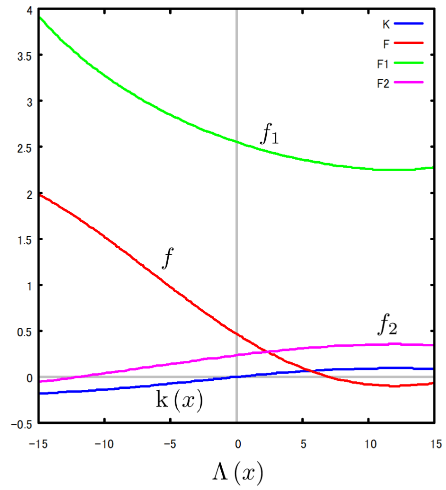


図 8.5.30: $\mathrm{k}(x), f, f_1, f_2$

$$\Lambda(x) = 7.052323, \quad \mathrm{k}(x) = 0.07703562 \quad \text{at f=0}$$

また、平板のように $\frac{d}{d\,x}\mathrm{U}(x) = 0$ では、(8.5.125) 式から、$\mathrm{k}(x) = 0$ となり、このとき f は下記となる。

$$f = 0.46984126984127$$

はく離点は (8.5.128) 式から、$\tau_0 = 0$ の時で、$\Lambda(x) = -12$ である。よって、$\Lambda(x) = 7.052 \to -12$、$\mathrm{k}(x) = 0.0770 \to -0.1567$ の範囲で変動すると考えられる。次に、f と $\mathrm{k}(x)$ の関係を下図に示す。ここで、f を次の直線近似：$f = a\,\mathrm{k}(x) + b$ で表現する。よどみ点である $f = 0$ の点と $\frac{d}{d\,x}\mathrm{U}(x) = \mathrm{k}(x) = 0$ の点を通る直線とすると、

$$b = f = 0.4670, \quad a = -\frac{f}{\mathrm{k}(x)} = -6.0$$

以上から f を次式で近似する。次式は、よどみ点から $\frac{d}{d\,x}\mathrm{U}(x) = 0$ 近傍まではよく表現しているが、

$\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{U}\,(x)=0$ 近傍からはく離点に至る部分で近似度は悪くなる。

$$f=0.470-6.0\,\mathrm{k}\,(x) \tag{8.5.131}$$

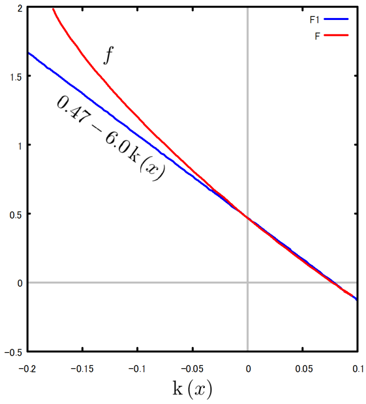


図 8.5.31: f の $\mathrm{k}\,(x)$ による近似

```
/* Initial Condition */
MOA4:MOA32/U(x);
MOA41:lhs(MOA4)='diff(f,k(x),1)*'diff(k(x)
 ,x,1)/diff(U(x),x,1);
DF01:'diff(lhs(F01),k(x),1)='diff(lhs(F01)
 ,\Lambda(x),1)/'diff(k(x),\Lambda(x),1);
DF011:'diff(lhs(F01),\Lambda(x),1)=
 diff(rhs(F01),\Lambda(x),1);
DK31:'diff(lhs(K3),\Lambda(x),1)=
 diff(rhs(K3),\Lambda(x),1);
DK32:diff(LA81,x,1);
subst([DK32],MOA41);
solve(%,'diff(z(x),x,1))[1];
lhs(%)=subst([LA82,DF01],rhs(%));
subst([DF011,DK31,K3],%);
DZX0:subst([LAF0],%);
subst([K3],LA82);
ZX0:subst([LAF0],%);
```

(8.5.130) 式から次式の微分方程式が得られた。

$$\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{z}\,(x)=\frac{f}{\mathrm{U}\,(x)}$$

上式の初期値は、右辺を $x\to 0$ にすれば得られるが、分子、分母ともに零となり、得られない。そこで、分子、分母を x で微分し、下記の式で求めることになる。ここで f は $\mathrm{k}\,(x)$ の関数とする。

$$\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{z}\,(x)=\frac{\left(\frac{d}{d\,\mathrm{k}(x)}\,f\right)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{k}\,(x)\right)}{\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{U}\,(x)} \tag{8.5.132}$$

ここで、

$$\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{k}\,(x)=\mathrm{z}\,(x)\,\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,\mathrm{U}\,(x)\right)+\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{z}\,(x)\right)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{U}\,(x)\right)$$

上式を (8.5.132) 式に代入し、

$$\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{z}\,(x)=\frac{\left(\frac{d}{d\,\mathrm{k}(x)}\,f\right)}{\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{U}\,(x)}\,\left(\mathrm{z}\,(x)\,\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,\mathrm{U}\,(x)\right)+\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{z}\,(x)\right)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{U}\,(x)\right)\right)$$

上式から、$\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{z}\,(x)$ を求めると下記となる。更に、f は (8.5.130) 式から $\Lambda\,(x)$ の関数であるから、

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{z}\,(x)&=-\frac{\left(\frac{d}{d\,\mathrm{k}(x)}\,f\right)\,\mathrm{z}\,(x)\,\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,\mathrm{U}\,(x)\right)}{\left(\frac{d}{d\,\mathrm{k}(x)}\,f-1\right)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{U}\,(x)\right)}\\&=-\frac{\left(\frac{d}{d\,\Lambda(x)}\,f\right)\,\mathrm{k}\,(x)}{\left(\frac{\frac{d}{d\,\Lambda(x)}\,f}{\frac{d}{d\,\Lambda(x)}\,\mathrm{k}(x)}-1\right)\,\left(\frac{d}{d\,\Lambda(x)}\,\mathrm{k}\,(x)\right)}\\&\quad\times\frac{\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,\mathrm{U}\,(x)\right)}{\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{U}\,(x)\right)^2}\end{aligned} \tag{8.5.133}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\,\Lambda\,(x)}\,f=&-\frac{(10\,\Lambda\,(x)+48)}{514382400}\\&\times\left(5\,\Lambda\,(x)^3+237\,\Lambda\,(x)^2\right.\\&\left.-8352\,\Lambda\,(x)+45360\right)\\&-\frac{\left(5\,\Lambda\,(x)^2+48\,\Lambda\,(x)-5328\right)}{514382400}\\&\times\left(15\,\Lambda\,(x)^2+474\,\Lambda\,(x)-8352\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\,\Lambda\,(x)}\,\mathrm{k}\,(x)=&\frac{\left(5\,\Lambda\,(x)^2+48\,\Lambda\,(x)-5328\right)^2}{2057529600}\\&+\frac{\Lambda\,(x)\,\left(10\,\Lambda\,(x)+48\right)}{1028764800}\\&\times\left(5\,\Lambda\,(x)^2+48\,\Lambda\,(x)-5328\right)\end{aligned}$$

(8.5.133) 式に上記二式と (8.5.126) 式を代入し、$x=0$ では、よどみ点で、

$$\Lambda\,(x)=7.052323101184553 \tag{8.5.134}$$

であるから、

$$\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{z}\left(x\right)=-\frac{0.065285720568109\,\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,\mathrm{U}\left(x\right)\right)}{\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{U}\left(x\right)\right)^2} \tag{8.5.135}$$

また、(8.5.125) 式と (8.5.126) 式から、

$$\begin{aligned}\mathrm{z}\left(x\right)=&\frac{\mathrm{k}\left(x\right)}{\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{U}\left(x\right)}\\ =&\frac{\Lambda\left(x\right)\,\left(5\,\Lambda\left(x\right)^2+48\,\Lambda\left(x\right)-5328\right)^2}{2057529600\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{U}\left(x\right)\right)}\end{aligned}$$

上式に、(8.5.134) 式の $\Lambda\left(x\right)$ の値を代入し、

$$\mathrm{z}\left(x\right)=\frac{0.07703562498172}{\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{U}\left(x\right)} \tag{8.5.136}$$

```
/* Approx. method */
ZU1:zu(x)=z(x)*U(x);
ZU2:subst([K1],ZU1);
ZU3:solve(ZU1,z(x))[1];
MOA5:'diff(z(x)*U(x),x,1)=diff(z(x)*U(x)
 ,x,1);
subst([MOA32],%);
subst([FD0],%);
subst([LA81],%);
subst([ZU3],%);
ode2(%,zu(x),x);
float(subst([%c=0,ZU2],%));
MOA51:(\delta[2](x)^2*U(x))/\nu=0.47*
 'integrate(U(x)^5,x,0,x)/U(x)^5;
```

$\mathrm{z}\left(x\right)\,\mathrm{U}\left(x\right)$ について、

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\,x}\,\left(\mathrm{z}\left(x\right)\,\mathrm{U}\left(x\right)\right)=&\mathrm{z}\left(x\right)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{U}\left(x\right)\right)\\ &+\mathrm{U}\left(x\right)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{z}\left(x\right)\right)\end{aligned}$$

(8.5.130) 式から、

$$\frac{d}{d\,x}\,\left(\mathrm{z}\left(x\right)\,\mathrm{U}\left(x\right)\right)=\mathrm{z}\left(x\right)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{U}\left(x\right)\right)+f$$

(8.5.131) 式から、

$$\frac{d}{d\,x}\,\left(\mathrm{z}\left(x\right)\,\mathrm{U}\left(x\right)\right)=\mathrm{z}\left(x\right)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{U}\left(x\right)\right)-6.0\,\mathrm{k}\left(x\right)+0.470$$

(8.5.125) 式から、

$$\frac{d}{d\,x}\,\left(\mathrm{z}\left(x\right)\,\mathrm{U}\left(x\right)\right)=0.47-5.0\,\mathrm{z}\left(x\right)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{U}\left(x\right)\right)$$

今、$\mathrm{zu}\left(x\right)=\mathrm{z}\left(x\right)\,\mathrm{U}\left(x\right)$ と置くと、

$$\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{zu}\left(x\right)=0.470-\frac{5.0\,\mathrm{zu}\left(x\right)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{U}\left(x\right)\right)}{\mathrm{U}\left(x\right)}$$

上式を ode2 関数で解くと、

$$\mathrm{zu}\left(x\right)=\frac{0.470}{\mathrm{U}\left(x\right)^5}\,\int \mathrm{U}\left(x\right)^5dx+\%c$$

(8.5.124) 式から、運動量厚さ:$\delta_2\left(x\right)$ が外界速度分布：$\mathrm{U}\left(x\right)$ を与えることで得られる。

$$\frac{\delta_2\left(x\right)^2\,\mathrm{U}\left(x\right)}{\nu}=\frac{0.47}{\mathrm{U}\left(x\right)^5}\,\int_0^x \mathrm{U}\left(x\right)^5dx \tag{8.5.137}$$

運動量厚さ:$\delta_2\left(x\right)$ が与えられると、剪断応力：τ_0 やおしのけ厚さ：$\delta_1\left(x\right)$ も得ることが出来る。この具体的な手法については、次節の「円柱まわりの粘性流近似解」に示す。

8.5.10 運動量方程式の近似解法を用いた解析例（よどみ点、平板、円柱）

二次元よどみ点、平板、円柱まわりの粘性流れを前節の「運動量方程式の近似解法」で解き、厳密解と比較する。

(1) 二次元よどみ点

二次元よどみ点まわりの粘性流れを「境界層の運動量方程式の近似解法」で解き、「8.3.2 二次元よどみ点、366 ページ」の厳密解結果と比較する。

```
kill(all);
assume(x>0);
LA1:\Lambda(x)=(\delta(x)^2*('diff(U(x),x,
 1)))/\nu;
LA8:k(x)=\delta[2](x)^2/\nu*
 'diff(U(x),x,1);
K1:z(x)=\delta[2](x)^2/\nu;
LA81:k(x)=z(x)*('diff(U(x),x,1));
K3:k(x)=(\Lambda(x)*(5*\Lambda(x)^2+48*
 \Lambda(x)-5328)^2)/2057529600;
DLT7:\delta[1](x)/\delta[2](x)=(378*(
 \Lambda(x)-36))/(5*\Lambda(x)^2+48*
 \Lambda(x)-5328);
TAU7:(\tau[0](x)*\delta[2](x))/(\nu*\rho
 *U(x))=-((\Lambda(x)+12)*(5*\Lambda(x)^2
 +48*\Lambda(x)-5328))/272160;
MOA32:U(x)*('diff(z(x),x,1))=f;
F01:f=-((5*\Lambda(x)^2+48*\Lambda(x)-5328)
 *(5*\Lambda(x)^3+237*\Lambda(x)^2
 -8352*\Lambda(x)+45360))/514382400;
FD0:f=0.47-6.0*k(x);
MOA51:(\delta[2](x)^2*U(x))/\nu=(0.47
 *integrate(U(x)^5,x,0,x))/U(x)^5;
/* よどみ点 */
solve(LA81,z(x))[1];
ZX1:subst([K3],%);
LAF0:\Lambda(x)=find_root(subst([
 \Lambda(x)=t],rhs(F01)=0),t,-15,10);
U(x)=k*x;
diff(%,x,1);
subst([%,LAF0],ZX1);
subst([K1],%);
STDLT2:float(solve(%,\delta[2](x))[2]);
solve(DLT7,\delta[1](x))[1];
STDLT1:subst([STDLT2,LAF0],%);
solve(TAU7,\tau[0](x))[1];
subst([STDLT2,LAF0,\rho=\mu/\nu],%);
%/\mu/U(x)*sqrt(\nu/k);
```

外界流速：$U(x)$ は、(8.3.19) 式、$2\,U = k$ から、

$$\mathrm{U}(x) = k\,x, \quad \frac{d}{d\,x}\,\mathrm{U}(x) = k$$

よどみ点であるから、前節の初期値の流れとなり、(8.5.136) 式に上記の外界流速：$U(x)$ の関係式を代入し、

$$\begin{aligned}\mathrm{z}(x) =& \frac{0.07703562498172}{\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{U}(x)}\\ =& \frac{0.07703562498172}{k}\\ = \frac{\delta_2(x)^2}{\nu} =& \frac{0.07703562498172}{k}\end{aligned}$$

以上から、運動量厚さ：$\delta_2(x)$ は、

$$\delta_2(x) = 0.27755292391577\,\sqrt{\frac{\nu}{k}} \tag{8.5.138}$$

(8.5.127) 式から、おしのけ厚さ：$\delta_1(x)$ は次式で得られ、上式とよどみ点の $\Lambda(x)$ の値：(8.5.134) 式を代入し、

$$\begin{aligned}\delta_1(x) =& \frac{378\,\delta_2(x)\,\Lambda(x) - 13608\,\delta_2(x)}{5\,\Lambda(x)^2 + 48\,\Lambda(x) - 5328}\\ =& 0.64061716741327\,\sqrt{\frac{\nu}{k}}\end{aligned} \tag{8.5.139}$$

(8.5.128) 式から、剪断力：$\tau_0(x)$ は次式で得られ、(8.5.138) 式とよどみ点の $\Lambda(x)$ の値：(8.5.134) 式を代入し、

$$\begin{aligned}\tau_0(x) =& -\frac{\mathrm{U}(x)}{272160\,\delta_2(x)}\Big(5\,\nu\,\rho\,\Lambda(x)^3 + 108\,\nu\,\rho\,\Lambda(x)^2\\ &- 4752\,\nu\,\rho\,\Lambda(x) - 63936\,\nu\,\rho\Big)\\ =& \frac{1.195723006048602\,\mu\,\mathrm{U}(x)}{\sqrt{\frac{\nu}{k}}}\end{aligned}$$

上式を無次元化して、

$$\frac{\sqrt{\frac{\nu}{k}}\,\tau_0(x)}{\mu\,\mathrm{U}(x)} = 1.195723006048602 \tag{8.5.140}$$

上記の境界層の運動量方程式の近似解法を用いた結果と「8.3.2 二次元よどみ点」の厳密解の結果：(8.3.31) 式、(8.3.32) 式、(8.3.33) 式と比較すると下記となる。両者、よく一致している。

項目	近似解法	厳密解
$\delta_1(x)$	$0.641\,\sqrt{\frac{\nu}{k}}$	$0.673\,\sqrt{\frac{\nu}{k}}$
$\delta_2(x)$	$0.278\,\sqrt{\frac{\nu}{k}}$	$0.292\,\sqrt{\frac{\nu}{k}}$
$\frac{\sqrt{\frac{\nu}{k}}\,\tau_0(x)}{\mu\,\mathrm{U}(x)}$	1.196	1.233

表 8.5.1: 二次元よどみ点の解の比較

(2) 平板

平板まわりの粘性流れを「境界層の運動量方程式の近似解法」で解析した結果と「8.5.3 平板上の境界層、401 ページ」の厳密解結果と比較する。

```
/* 平板 */
FLDUX1:'diff(U(x),x,1)=0;
Z1:z(x)=\delta(x)^2/\nu;
LA7:subst([FLDUX1],LA1);
MOA4:MOA32/U(x);
subst([U(x)=U,F01,LA7],%);
ode2(%,z(x),x);
FLZ1:float(subst([%c=0],%));
K1;
subst([K1],FLZ1);
FLDL2:float(solve(%,\delta[2](x))[2]);
DLT7;
%*\delta[2](x);
FLDL1:float(subst([LA7,FLDL2],%));
TAU7;
%/\delta[2](x)*\nu*\rho*U(x);
FLTAU1:float(radcan(subst([LA7,FLDL2,
 U(x)=U],%)));
float(radcan(subst([\nu=x*U/R[n]],%))/\rho
 /U^2*sqrt(R[n]));
```

平板では、外界流速：$U(x)$ は下記の関係がある。

$$\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{U}\left(x\right)=0$$

(8.5.111) 式から、

$$\Lambda\left(x\right)=\frac{\delta\left(x\right)^{2}\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{U}\left(x\right)\right)}{\nu}=0$$

(8.5.130) 式から、

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{z}\left(x\right)&=\frac{f}{\mathrm{U}\left(x\right)}\\ f&=-\frac{\left(5\,\Lambda\left(x\right)^{2}+48\,\Lambda\left(x\right)-5328\right)}{514382400}\\ &\times\left(5\,\Lambda\left(x\right)^{3}+237\,\Lambda\left(x\right)^{2}-8352\,\Lambda\left(x\right)+45360\right)\end{aligned}$$

ここで、上記から $\Lambda\left(x\right)=0$ であるから、

$$\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{z}\left(x\right)=\frac{0.46984126984127}{U}$$

$ode2$ 関数で解いて、

$$\mathrm{z}\left(x\right)=\frac{148\,x}{315\,U}+\%c$$

初期条件から、$\%c=0$ として、

$$\mathrm{z}\left(x\right)=\frac{\delta_2\left(x\right)^{2}}{\nu}=\frac{0.46984126984127\,x}{U}$$

以上から、運動量厚さ：$\delta_2\left(x\right)$ は、

$$\delta_2\left(x\right)=0.68544968439796\,\sqrt{\frac{\nu\,x}{U}}\tag{8.5.141}$$

(8.5.127) 式から、おしのけ厚さ：$\delta_1\left(x\right)$ は次式で得られ、上式と $\Lambda\left(x\right)=0$ を代入し、

$$\begin{aligned}\delta_1\left(x\right)=&\frac{378\,\delta_2\left(x\right)\,\Lambda\left(x\right)-13608\,\delta_2\left(x\right)}{5\,\Lambda\left(x\right)^{2}+48\,\Lambda\left(x\right)-5328}\\ =&1.750675545286694\,\sqrt{\frac{\nu\,x}{U}}\end{aligned}\tag{8.5.142}$$

(8.5.128) 式から、剪断力：$\tau_0\left(x\right)$ は次式で得られ、(8.5.141) 式と $\Lambda\left(x\right)=0$ を代入し

$$\begin{aligned}\tau_0\left(x\right)=&-\frac{\mathrm{U}\left(x\right)}{272160\,\delta_2\left(x\right)}\left(5\,\nu\,\rho\,\Lambda\left(x\right)^{3}+108\,\nu\,\rho\,\Lambda\left(x\right)^{2}\right.\\ &\left.-4752\,\nu\,\rho\,\Lambda\left(x\right)-63936\,\nu\,\rho\right)\\ =&\frac{0.3427248469628\,\sqrt{\nu}\,\rho\,U^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}\end{aligned}$$

上式を無次元化して、

$$\frac{\tau}{\rho\,U^{2}}=\frac{0.3427248469628}{\sqrt{R}}\tag{8.5.143}$$

上記の境界層の運動量方程式の近似解法を用いた結果と「8.5.3 平板上の境界層」の厳密解の結果：(8.5.21) 式、(8.5.23) 式、(8.5.24) 式と比較すると下記となる。両者、よく一致している。

項目	近似解法	厳密解
$\delta_1\left(x\right)$	$1.751\,\sqrt{\frac{\nu\,x}{U}}$	$1.721\sqrt{\frac{\nu\,x}{U}}$
$\delta_2\left(x\right)$	$0.685\,\sqrt{\frac{\nu\,x}{U}}$	$0.664\sqrt{\frac{\nu\,x}{U}}$
$\frac{\tau}{\rho\,U^{2}}\sqrt{R}$	0.343	0.332

表 8.5.2: 平板の解の比較

(3) 円柱まわりの粘性近似解

円柱まわりの粘性流を「境界層の運動量方程式の近似解法」の解析結果と「8.5.7 斜航円柱まわりの粘性流、417 ページ」の級数解析結果と比較する。半径：R の円柱に一様流速：U_0 の流れが当たっているとする。円柱表面に沿った主流方向を x 軸とする。

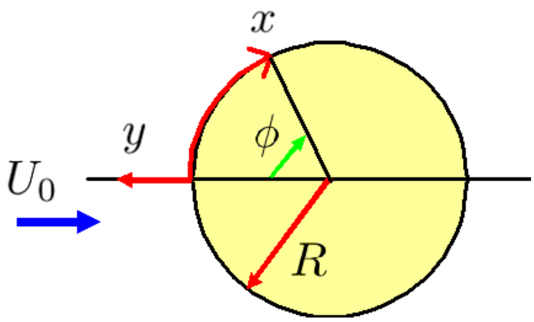


図 8.5.32: 円柱まわりの粘性流近似解

```
/* 円柱 */
RN1:R[n]=U[0]*R/\nu;
RN2:solve(%,U[0])[1];
assume(R>0,\delta[2](x)>0,x>0);
X11:\phi=x/R;
X21:solve(%,x)[1];
U01C:U(x)=2*U[0]*sin(\phi);
U02C:subst([X11],%);
MOA51*\nu/U(x);
subst([U02C],%);
factor(ev(%,integrate));
CIRDLT2:subst([RN2],%);
CIRDLT21:sqrt(%);
CIRDLT2*R[n]/R^2;
CIRDLT22:sqrt(%);
CIRDLT23:subst([X21,\phi=t/180*%pi],
 rhs(%));
plot2d(CIRDLT23,[t,0,110]);
```

中心角：ϕ との関係などを下記とする。

$$R_n = \frac{U_0\, R}{\nu}, \quad U_0 = \frac{R_n\, \nu}{R}$$

$$\phi = \frac{x}{R}, \quad x = \phi\, R$$

円柱まわりの流速：$U(x)$ は「例題 5.3.4 一様流中の円柱まわりの流れ、(5.3.15) 式、123 頁」から下記となる。

$$\mathrm{U}\,(x) = 2\, U_0 \sin(\phi) = 2\, U_0 \sin\left(\frac{x}{R}\right)$$

(8.5.137) 式と上式の円柱まわりの流速から、運動量厚さ：$\delta_2\,(x)$ は、

$$\begin{aligned}\delta_2\,(x)^2 &= \frac{0.47\,\nu}{\mathrm{U}\,(x)^6} \int_0^x \mathrm{U}\,(x)^5 dx \\ &= \frac{0.235\,\nu}{U_0 \sin\left(\frac{x}{R}\right)^6} \int_0^x \sin\left(\frac{x}{R}\right)^5 dx \\ &= -\frac{47\left(\cos\left(\frac{x}{R}\right)-1\right)^3}{3000\, R_n \sin\left(\frac{x}{R}\right)^6} \\ &\quad \times \left(3\cos\left(\frac{x}{R}\right)^2 + 9\cos\left(\frac{x}{R}\right) + 8\right) R^2\end{aligned} \tag{8.5.144}$$

以上から、

$$\begin{aligned}\delta_2\,(x) &= \frac{\sqrt{47}\sqrt{-\frac{\left(\cos\left(\frac{x}{R}\right)-1\right)^3\left(3\cos\left(\frac{x}{R}\right)^2+9\cos\left(\frac{x}{R}\right)+8\right)}{R_n}}\, R}{10\sqrt{30}\,\left|\sin\left(\frac{x}{R}\right)\right|\, \sin\left(\frac{x}{R}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{47}\sqrt{-\frac{(\cos(\phi)-1)^3\left(3\cos(\phi)^2+9\cos(\phi)+8\right)}{R_n}}\, R}{10\sqrt{30}\sin(\phi)^2\, |\sin(\phi)|}\end{aligned} \tag{8.5.145}$$

上式から、$\delta_2\,(x)$ を無次元化して、

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{R_n}\,\delta_2\,(x)}{R} &= \frac{\sqrt{47}\sqrt{-\left(\cos\left(\frac{x}{R}\right)-1\right)^3}}{10\sqrt{30}\,\left|\sin\left(\frac{x}{R}\right)\right|\,\sin\left(\frac{x}{R}\right)^2} \\ &\quad \times \sqrt{\left(3\cos\left(\frac{x}{R}\right)^2 + 9\cos\left(\frac{x}{R}\right) + 8\right)}\end{aligned} \tag{8.5.146}$$

```
CIRDUX1:diff(U02C,x,1);
CIRKX1:lhs(LA8)=subst([%,CIRDLT2,RN2,X21],
 rhs(LA8));
CIRLAB1:subst([CIRKX1],K3);
LP2:lhs(CIRDLT21)=subst([X21],rhs(CIRDLT21
 ));
CIRDLT24:radcan(LP2/R*sqrt(R[n]));
LP3:DLT7*\delta[2](x);
LP4:lhs(LP3)=subst([CIRDLT21],rhs(LP3));
CIRDLT1:radcan(LP4/R*sqrt(R[n]));
LP6:TAU7/\delta[2](x)*U(x)*\nu/U[0]^2;
LP7:subst([U01C,CIRDLT21],LP6);
LP8:lhs(LP7)=subst([RN2],rhs(LP7));
CIRTAU1:radcan(LP8*sqrt(R[n]));
THE5:\delta[2](x)/\delta(x)=-\Lambda(x)^2
 /9072-\Lambda(x)/945+37/315;
U11:u(x,y)/U(x)=-((\eta^4-3*\eta^3+3*\eta^2
 -\eta)*\Lambda(x)-6*\eta^4+12*\eta^3
 -12*\eta)/6;
```

```
for J:1 thru 108 do(
L:J,
CIRPH:\phi=L*%pi/180,
LP1:subst([CIRPH,\Lambda(x)=a],CIRLAB1),
CIRLAB2:\Lambda(x)=find_root(LP1,a,-15,10),
LDLT2:float(subst([CIRPH],rhs(CIRDLT24))),
if J=1 then listDL2:[[L,LDLT2]] else
 listDL2:append(listDL2, [[L,LDLT2]]),
LP5:lhs(CIRDLT1)=float(subst([CIRLAB2,X21,
 CIRPH],rhs(CIRDLT1))),
if J=1 then listDL1:[[L,rhs(LP5)]] else
 listDL1:append(listDL1, [[L,rhs(LP5)]]),
LP9:lhs(CIRTAU1)=float(subst([CIRLAB2,X21,
 CIRPH],rhs(CIRTAU1))),
if J=1 then listTA1:[[L,rhs(LP9)]] else
 listTA1:append(listTA1, [[L,rhs(LP9)]]));
LPTAN1:-(0.0012955304450755*\phi^11)/2^
 (9/2)+(5.0557504751322748*10^-4*\phi^9)/2
 ^(9/2)-0.0064700536866032*sqrt(2)*\phi^7
 +(0.2063949582*\phi^5)/sqrt(2)-0.24148242
 *2^(5/2)*\phi^3+1.2325867*2^(3/2)*\phi;
LPTAN2:subst([\phi=t/180*%pi],%);
list:read_list("M:\listDLT1.cvs");
for J:1 thru 108 do(
if J=1 then listDLT1:[[list[1],list[2]]]
 else listDLT1:append(listDLT1,
 [[list[2*J-1],list[2*J]]]));
list:read_list("M:\listDLT2.cvs");
for J:1 thru 108 do(
if J=1 then listDLT2:[[list[1],list[2]]]
 else listDLT2:append(listDLT2,
 [[list[2*J-1],list[2*J]]]));
plot2d([LPTAN2,[discrete,listDLT2],
 [discrete,listDLT1],[discrete,listDL2],
 [discrete,listDL1],[discrete,listTA1]],
 [t,0,110],[legend,"tau","delta2",
 "delta1","delta2(approx.)",
 "delta1(approx.)","tau(approx.)"],
 [xlabel,"phi"]);
```

```
/* 速度分布 */
1/THE5;
%*\delta[2](x);
subst([CIRDLT21],%);
TAU1:radcan(%*sqrt(R[n])/R);
CIRPH:\phi=20*%pi/180;
LP1:subst([CIRPH,\Lambda(x)=a],CIRLAB1);
CIRLAB2:\Lambda(x)=find_root(LP1,a,-15,10);
DLT0:lhs(TAU1)=float(subst([CIRLAB2,X21,
 CIRPH],rhs(TAU1)));
for J:1 thru 101 do(
L:J-1,
ETD01:\eta=float(L/100),
YD01:rhs(ETD01)*rhs(DLT0),
UL1:float(subst([ETD01,CIRLAB2],rhs(U11))),
if J=1 then listUL20:[[YD01,UL1]] else
 listUL20:append(listUL20, [[YD01,UL1]]));
list:read_list("M:\listUU20.cvs");
for J:1 thru 100 do(
if J=1 then listUU20:[[list[1],list[2]]]
  else listUU20:append(listUU20,
 [[list[2*J-1],list[2*J]]]));
list:read_list("M:\listUU40.cvs");
for J:1 thru 100 do(
if J=1 then listUU40:[[list[1]+1,list[2]]]
  else listUU40:append(listUU40,
 [[list[2*J-1]+1,list[2*J]]]));
list:read_list("M:\listUU60.cvs");
for J:1 thru 100 do(
if J=1 then listUU60:[[list[1]+2,list[2]]]
  else listUU60:append(listUU60,
 [[list[2*J-1]+2,list[2*J]]]));
list:read_list("M:\listUU80.cvs");
for J:1 thru 100 do(
if J=1 then listUU80:[[list[1]+3,list[2]]]
  else listUU80:append(listUU80,
 [[list[2*J-1]+3,list[2*J]]]));
 list:read_list("M:\listUU100.cvs");
for J:1 thru 100 do(
if J=1 then listUU100:[[list[1]+4,list[2]]]
  else listUU100:append(listUU100,
 [[list[2*J-1]+4,list[2*J]]]));
 list:read_list("M:\listUU108.cvs");
for J:1 thru 100 do(
if J=1 then listUU108:[[list[1]+5,list[2]]]
 else listUU108:append(listUU108,
 [[list[2*J-1]+5,list[2*J]]]));
```

円柱まわりの外界流速：$U(x)$ を x で微分し、

$$\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{U}\left(x\right)=\frac{2\,U_0\cos\left(\frac{x}{R}\right)}{R}$$

$\delta_1\left(x\right)$、$\tau_0\left(x\right)$ の計算に必要な、ϕ または x/R と $\Lambda\left(x\right)$ の関係を求める。(8.5.123) 式の関係式に、上記で求めた $\delta_2\left(x\right)$ の結果：(8.5.144) 式、上記の円柱まわりの外界流速：$U(x)$ の x 微分の結果を代入し、運動量方程式から得られた $\mathrm{k}\left(x\right)$ を ϕ の関数で表現すると、

$$\mathrm{k}\left(x\right)=\frac{\delta_2\left(x\right)^2\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{U}\left(x\right)\right)}{\nu}=-\frac{47\left(\cos\left(\phi\right)-1\right)^3\cos\left(\phi\right)\,\left(3\cos\left(\phi\right)^2+9\cos\left(\phi\right)+8\right)}{1500\sin\left(\phi\right)^6}$$

流速分布から得られた $\mathrm{k}\left(x\right)$ は (8.5.126) 式から、

$$\mathrm{k}\left(x\right)=\frac{\Lambda\left(x\right)\,\left(5\,\Lambda\left(x\right)^2+48\,\Lambda\left(x\right)-5328\right)^2}{2057529600}$$

両者の $\mathrm{k}\left(x\right)$ は等しいとして、

$$-\frac{47\left(\cos\left(\phi\right)-1\right)^3\cos\left(\phi\right)\,\left(3\cos\left(\phi\right)^2+9\cos\left(\phi\right)+8\right)}{1500\sin\left(\phi\right)^6}=\frac{\Lambda\left(x\right)\,\left(5\,\Lambda\left(x\right)^2+48\,\Lambda\left(x\right)-5328\right)^2}{2057529600} \tag{8.5.147}$$

上式から、円柱上の位置：ϕ が与えられたとき、$\Lambda\left(x\right)$ を求めることが出来る。ここでは Maxima の関数：find_root を使って $\Lambda\left(x\right)$ を求めた。以下、円柱状の点：ϕ または x/R を与え、(8.5.147) 式から $\Lambda\left(x\right)$ を求め、下記に示す境界層厚さ：$\delta\left(x\right)$、おしのけ厚さ：$\delta_1\left(x\right)$、剪断力：τ_0 を求める。

境界層厚さ：$\delta\left(x\right)$ は (8.5.121) 式から、次式となり、上記で求めた $\delta_2\left(x\right)$ の結果：(8.5.145) 式を代入し、

$$\delta\left(x\right)=\frac{\delta_2\left(x\right)}{-\frac{\Lambda\left(x\right)^2}{9072}-\frac{\Lambda\left(x\right)}{945}+\frac{37}{315}}=\frac{\sqrt{47}\sqrt{-\frac{\left(\cos\left(\frac{x}{R}\right)-1\right)^3\left(3\cos\left(\frac{x}{R}\right)^2+9\cos\left(\frac{x}{R}\right)+8\right)}{R_n}}\,R}{10\sqrt{30}\,\left(-\frac{\Lambda\left(x\right)^2}{9072}-\frac{\Lambda\left(x\right)}{945}+\frac{37}{315}\right)\left|\sin\left(\frac{x}{R}\right)\right|\,\sin\left(\frac{x}{R}\right)^2} \tag{8.5.148}$$

おしのけ厚さ：$\delta_1\left(x\right)$ は (8.5.127) 式から、次式となり、上記で求めた $\delta_2\left(x\right)$ の結果：(8.5.145) 式を代入し、

$$\begin{aligned}\delta_1\left(x\right)=&\frac{378\,\delta_2\left(x\right)\,\left(\Lambda\left(x\right)-36\right)}{5\,\Lambda\left(x\right)^2+48\,\Lambda\left(x\right)-5328}\\=&\frac{189\sqrt{47}\,\left(\Lambda\left(x\right)-36\right)\,\sqrt{-\frac{\left(\cos\left(\frac{x}{R}\right)-1\right)^3\left(3\cos\left(\frac{x}{R}\right)^2+9\cos\left(\frac{x}{R}\right)+8\right)}{R_n}}\,R}{5\sqrt{30}\,\left(5\,\Lambda\left(x\right)^2+48\,\Lambda\left(x\right)-5328\right)\left|\sin\left(\frac{x}{R}\right)\right|\,\sin\left(\frac{x}{R}\right)^2}\end{aligned}$$

上式を無次元化し、

$$\frac{\sqrt{R_n}\,\delta_1\left(x\right)}{R}=-\frac{7\,3^{\frac{5}{2}}\sqrt{47}\,\left(\Lambda\left(x\right)-36\right)\,\sqrt{1-\cos\left(\frac{x}{R}\right)}\,\left(\cos\left(\frac{x}{R}\right)-1\right)\,\sqrt{3\cos\left(\frac{x}{R}\right)^2+9\cos\left(\frac{x}{R}\right)+8}}{\sqrt{2}\,5^{\frac{3}{2}}\,\left(5\,\Lambda\left(x\right)^2+48\,\Lambda\left(x\right)-5328\right)\left|\sin\left(\frac{x}{R}\right)\right|\,\sin\left(\frac{x}{R}\right)^2} \tag{8.5.149}$$

剪断応力：τ_0 は、(8.5.128) 式に上記で求めた $\delta_2\left(x\right)$ の結果：(8.5.145) 式を代入し、

$$\frac{\tau_0\left(x\right)}{U_0^2\,\rho}=-\frac{\nu\,\left(\Lambda\left(x\right)+12\right)\,\left(5\,\Lambda\left(x\right)^2+48\,\Lambda\left(x\right)-5328\right)\,\mathrm{U}\left(x\right)}{272160\,U_0^2\,\delta_2\left(x\right)}$$

上式を無次元化し、

$$\frac{\sqrt{R_n}\,\tau_0\left(x\right)}{U_0^2\,\rho}=\frac{\sqrt{5}\sin\left(\phi\right)\,\left(\Lambda\left(x\right)+12\right)\,\left(5\,\Lambda\left(x\right)^2+48\,\Lambda\left(x\right)-5328\right)\left|\sin\left(\frac{x}{R}\right)\right|\,\sin\left(\frac{x}{R}\right)^2}{7\,2^{\frac{5}{2}}\,3^{\frac{9}{2}}\sqrt{47}\sqrt{1-\cos\left(\frac{x}{R}\right)}\,\left(\cos\left(\frac{x}{R}\right)-1\right)\,\sqrt{3\cos\left(\frac{x}{R}\right)^2+9\cos\left(\frac{x}{R}\right)+8}} \tag{8.5.150}$$

```
listDATA:[[-10,-10],[-12,-12]];
plot2d([[discrete,listUL20],
 [discrete,listUL40],[discrete,listUL60],
 [discrete,listUL80],[discrete,listUL100],
 [discrete,listUL108],[discrete,listDATA],
 [discrete,listDATA],[discrete,listUU20],
 [discrete,listUU40],[discrete,listUU60],
 [discrete,listUU80],[discrete,listUU100],
 [discrete,listUU108]],[x,0,14],[y,0,1.2],
 [legend,"phi=20deg(approx.)","phi=40deg
 (approx.)","phi=60deg(approx.)","phi=80
 deg(approx.)","phi=100deg(approx.)",
 "phi=107.7deg(approx.)"," "," "
 ,"phi=20deg","phi=40deg","phi=60deg",
 "phi=80deg","phi=100deg","phi=108.76
 deg"],[xlabel,"y*sqrt(Rn)/R"]);
```

下記に、円柱まわりの剪断応力：τ_0、おしのけ厚さ：$\delta_1(x)$、運動量厚さ：$\delta_2(x)$ の近似解結果と級数解結果の比較結果を示す。両者、よく一致しているが、$\phi=90deg.$ 近傍以降で、近似度が悪くなっている。これは (8.5.131) 式で f を直線近似しており、また、近似解法では速度分布を (8.5.108) 式で四次式で表現しており、双方とも $\phi=90deg.$ 近傍以降で近似度が悪くなっていることによっているものと思われる。

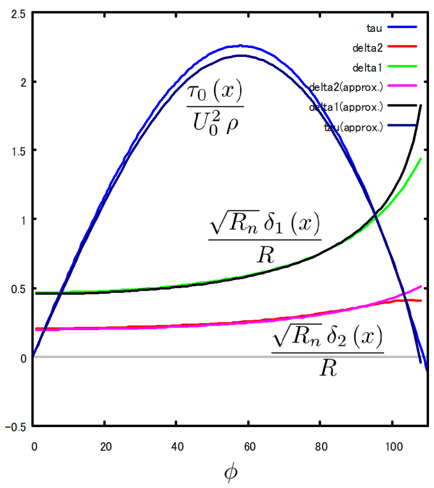


図 8.5.33: おしのけ厚さ：δ_1、運動量厚さ：δ_2、剪断応力：τ_0 の級数解と近似解の比較

各位置の境界層内流速分布は、(8.5.147) 式に位置の値：ϕ を与え、$\Lambda(x)$ を求める。$\Lambda(x)$ が得られると (8.5.119) 式から流速分布が得られる. また、境界層厚さ：$\delta(x)$ は (8.5.148) 式から得られる。下記に境界層内流速分布の近似結果と級数解結果の比較結果を示す。$\phi=80deg.$ 近傍までは、両者よく一致しており、流速の四次式近似で十分と思われる。しかし、$\phi=100deg.$ では一致度が悪く、はく離点近傍：$\phi=108deg.$ では一致度は特に悪い。

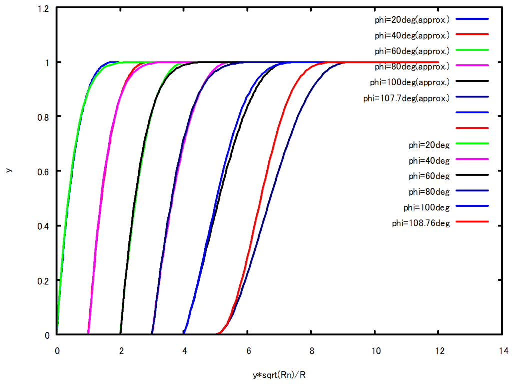


図 8.5.34: 境界層内流速分布の級数解と近似解の比較

8.5.11 運動量方程式の近似解法を用いた解析例（楕円、翼形状）

楕円や翼形状まわりの二次元粘性流れを「運動量方程式の近似解法」で解き、各種楕円形状、翼形状の比較を行う [1]。「7.1.4 キャンバー・翼厚を有する二次元翼 (Joukowski 変換)」を用いて、ζ 平面の円を z 平面の楕円や翼形状に写像変換して、迎角：α が零度の楕円や翼形状まわりの流速を求める。楕円の長径：a、短径：b、翼厚パラメタ：δ_c、流速：U とする。

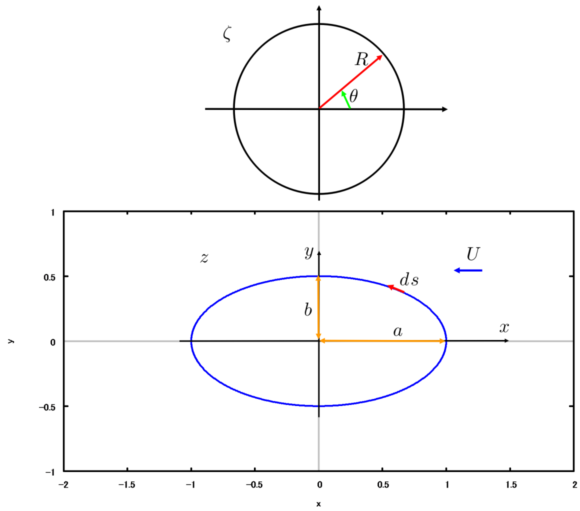


図 8.5.35: Joukowski 変換による楕円

```
/* 楕円＋翼形状　まわりの粘性流　Joukowski 変換　*/
kill(all);
declare(z,complex);
declare(F,complex);
declare(c,complex);
declare(\zeta,complex);
depends(\zeta,[\theta]);
depends(z,[\zeta]);
assume(A>0);
assume(R>0);
assume(a>0);
assume(b>0);
/* 楕円　*/
Z1:z=\zeta+A^2/\zeta;
ZT1:\zeta=R*%e^(%i*\theta);
ZT3:\zeta=(R[0]+\delta[c])*%e^(%i*\theta)
 +\delta[c];
Z0:z=x+%i*y;
Z2:subst([ZT1,Z0],Z1);
X1:realpart(Z2);
Y1:imagpart(Z2);
CO1:solve(X1,cos(\theta))[1];
SI1:solve(Y1,sin(\theta))[1];
COSI1:cos(\theta)^2+sin(\theta)^2=1;
COSI2:subst([CO1,SI1],COSI1);
COSI3:x^2/a^2+y^2/b^2=1;
A1:first(lhs(COSI2))=last(lhs(COSI3));
B1:last(lhs(COSI2))=first(lhs(COSI3));
A2:solve(A1,a)[2];
B2:solve(B1,b)[2];
solve([A1,B1],[R,A])[2];
AB1:subst([R=R[0]],%);
LIS1:[a=1,b=0.5,U=1,\alpha=0,\delta[c]=0];
Z2:subst([ZT3,Z0],Z1);
X1:realpart(Z2);
Y1:imagpart(Z2);
subst(AB1,rhs(X1));
X2:subst(LIS1,%);
subst(AB1,rhs(Y1));
Y2:subst(LIS1,%);
/* 楕円形状　*/
N:500;
N1:N-1;
dT:%pi/N;
N2:2*N;
for J:0 thru N do(
if J=0 then listX:[0] else listX:append(
 listX, [1-subst([\theta=float(J*dT)],
 X2)]));
for J:0 thru N2 do(
if J=0 then listXY:[[subst(LIS1,a),0]] else
  listXY:append(listXY, [[subst([\theta=
 float(J*dT)],X2),subst([\theta=float(J*dT)
 ],Y2)]]));
plot2d([discrete,listXY],[x,-2,2]);
```

(7.1.24) 式,263 頁から、円を楕円に変換する写像関数は下記となる。

$$z=\zeta+\frac{A^2}{\zeta} \tag{8.5.151}$$

ここで、楕円および翼形状上の線は ζ 面上の半径:δ_c+R_0 の円に対応しており、

$$\zeta=(\delta_c+R_0)\,e^{i\,\theta}+\delta_c \tag{8.5.152}$$

このとき楕円の半径：a,b と A,R_0 の関係は (7.1.26) 式から下記となる。

$$R_0=\frac{b+a}{2},\,A=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{2} \tag{8.5.153}$$

[1] Dr Harmann Schlihting：Boundary Layer Theory [12], Chapter 12 Approximate methods for the solution of the boundary layer equations, d. Further examples P.254

ここで楕円形状を与えるときは、楕円の半径：a, b を与え、$\delta_c = 0$ とする。また、翼形状を与えるときは、翼半長：a と翼最大厚に関係する δ_c を与え、$b = 0$ とする。翼最大厚：y_{max} と δ_c の関係は、$a >> y_{max}$ の時、(7.1.33) 式から、$\delta_c = y_{max}\,\frac{2}{3^{\frac{3}{2}}}$ で与えられる。楕円形状および翼形状の x, y 座標は、(8.5.151) 式に (8.5.152) 式を代入し、次式で与えられる。

$$z = i\,y + x = \frac{A^2}{(\delta_c + R_0)\,e^{i\,\theta} + \delta_c} + (\delta_c + R_0)\,e^{i\,\theta} + \delta_c \tag{8.5.154}$$

上式の実部、虚部から、

$$x = \frac{((\delta_c + R_0)\,\cos(\theta) + \delta_c)\,A^2}{(\delta_c + R_0)^2\sin(\theta)^2 + ((\delta_c + R_0)\,\cos(\theta) + \delta_c)^2} + (\delta_c + R_0)\,\cos(\theta) + \delta_c \tag{8.5.155}$$

$$y = (\delta_c + R_0)\,\sin(\theta) - \frac{(\delta_c + R_0)\,\sin(\theta)\,A^2}{(\delta_c + R_0)^2\sin(\theta)^2 + ((\delta_c + R_0)\,\cos(\theta) + \delta_c)^2} \tag{8.5.156}$$

```
/* ガース長さ  */
subst([ZT3],Z1);
diff(%,\theta,1);
DS2:rhs(%)*conjugate(rhs(%));
DS21:trigsimp(realpart(DS2));
DS22:trigsimp(imagpart(DS2));
DS1:'diff(s,\theta,1)=sqrt(subst(AB1,
 DS21));
```

```
DS11:subst(LIS1,rhs(DS1));
S:0;
listS:[0];
for J:1 thru N1 do(
S:S+(subst([\theta=float((J-1)*dT)],DS11)
 +subst([\theta=float(J*dT)],DS11))*dT/2,
listS:append(listS, [float(S)]));
S;
```

z 平面上の楕円および翼形状の周長さ：s と ζ 平面上の θ との関係を求める。(8.5.154) 式を θ で微分し、

$$\left(\frac{d}{d\,\zeta}\,z\right)\left(\frac{d}{d\,\theta}\,\zeta\right) = i\,(\delta_c + R_0)\,e^{i\,\theta} - \frac{i\,(\delta_c + R_0)\,e^{i\,\theta}\,A^2}{((\delta_c + R_0)\,e^{i\,\theta} + \delta_c)^2}$$

上式から、物体の周長さ：s と θ との関係は次式で得られる。展開式は記述が長くなるので省略する。

$$\frac{d}{d\,\theta}\,s = \sqrt{\left(\frac{d}{d\,\zeta}\,z\right)\left(\frac{d}{d\,\theta}\,\zeta\right)\overline{\left(\frac{d}{d\,\zeta}\,z\right)\left(\frac{d}{d\,\theta}\,\zeta\right)}} \tag{8.5.157}$$

楕円の場合には、上式は次式となる。

$$\frac{d}{d\,\theta}\,s = \frac{2\sqrt{\frac{(b+a)^2\,(a^2-b^2)\left(2-4\cos(\theta)^2\right)}{16} + \frac{(a^2-b^2)^2}{16} + \frac{(b+a)^4}{16}}}{b+a}$$

上式を積分し、物体の周長さ：s は次式で得られる。

$$s = \int_0^{2\,\pi}\frac{d}{d\,\theta}\,s d\theta \tag{8.5.158}$$

```
F1:%e^(-%i*\alpha)*U*\zeta;
F2:%e^(%i*\alpha)*U*(R[0]+\delta[c])^2
 /\zeta;
F0:F=F1+F2;
F01:subst([\zeta=\zeta-\delta[c]],F0);
DF01:'diff(F,\zeta,1)=diff(rhs(F01),
 \zeta,1);
DZ1:'diff(z,\zeta,1)=diff(rhs(Z1),\zeta,1);
DFZ1:'diff(F,z,1)=rhs(DF01)/rhs(DZ1);
```

複素ポテンシャル：F は (7.1.29) 式,265 頁から、

$$F = \frac{e^{i\,\alpha}\,(\delta_c + R_0)^2\,U}{\zeta - \delta_c} + e^{-i\,\alpha}\,U\,(\zeta - \delta_c)$$

F, z を ζ で微分し、

$$\frac{d}{d\,\zeta}\,F = e^{-i\,\alpha}\,U - \frac{e^{i\,\alpha}\,(\delta_c + R_0)^2\,U}{(\zeta - \delta_c)^2}$$

$$\frac{d}{d\,\zeta}\,z = 1 - \frac{A^2}{\zeta^2}$$

物体まわりの流速：v_x, v_y は、

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\,z}\,F =& v_x - i\,v_y = \frac{d}{d\,\zeta}\,F/\frac{d}{d\,\zeta}\,z\\ =& \frac{e^{-i\,\alpha}\,U - \frac{e^{i\,\alpha}\,(\delta_c+R_0)^2\,U}{(\zeta-\delta_c)^2}}{1 - \frac{A^2}{\zeta^2}}\end{aligned} \tag{8.5.159}$$

```
/* 流速分布 */
u^2=rhs(DFZ1)*conjugate(rhs(DFZ1));
subst([ZT3],%);
U1:subst(AB1,%);
sqrt(realpart(%));
U2:subst(LIS1,rhs(%));
for J:0 thru N1 do(
if J=0 then listU:[[subst(LIS1,a),subst(
 [\theta=0],U2)]] else listU:append(listU,
 [[subst([\theta=float(J*dT)],X2),subst([
 \theta=float(J*dT)],U2)]]));
plot2d([discrete,listU],[x,-2,2],[y,-1,2]);
for J:0 thru N do(
if J=0 then listUG:[[listS[J+1],subst(
 [\theta=0],U2)]] else listUG:append(
 listUG,[[listS[J+1],subst([\theta=
 float(J*dT)],U2)]]));
plot2d([discrete,listUG],[x,0,%pi]);
/* 流速変化 */
DU1:'diff(u,\theta,1)=diff(U2,\theta,1);
DUS1:DU1/DS11;
DUS11:subst(LIS1,%);
DUS12:subst([\theta=t],rhs(%));
X3:subst([\theta=t],X2);
plot2d([parametric,X3,DUS12,[t,0,%pi],
 [nticks,181]],[x,-2,2]);
plot2d(DUS12,[t,0,%pi],[nticks,181]);
```

物体上の流速：u は (8.5.159) 式に、(8.5.152) 式および (8.5.153) 式を代入し、次式の実部から得られる。更なる式の記述は長くなるので省略する。

$$u(\theta)=\sqrt{\left(\frac{d}{d\,z}\,F\right)\,\overline{\left(\frac{d}{d\,z}\,F\right)}}=\sqrt{\frac{\left(e^{-i\,\alpha}\,U-e^{i\,\alpha-2\,i\,\theta}\,U\right)\,\left(e^{i\,\alpha}\,U-e^{2\,i\,\theta-i\,\alpha}\,U\right)}{\left(1-\frac{a^2-b^2}{4\,\left(\left(\delta_c+\frac{b+a}{2}\right)\,e^{-i\,\theta}+\delta_c\right)^2}\right)\,\left(1-\frac{a^2-b^2}{4\,\left(\left(\delta_c+\frac{b+a}{2}\right)\,e^{i\,\theta}+\delta_c\right)^2}\right)}} \tag{8.5.160}$$

物体上の流速変化：$\frac{d}{d\,s}\,u$ は次式で得られる。

$$\frac{d}{d\,s}\,u=\frac{d}{d\,\theta}\,u\,/\,\frac{d}{d\,\theta}\,s \tag{8.5.161}$$

```
/* delta-2 */
RN1:sqrt(U/a);
RN11:subst(LIS1,RN1);
U2^5*DS11;
IDL2:U2^5*DS11;
SDL2:0;
listDL22:[0];
listDL2N:[0];
listDL2NX:[[0,0]];
listDL2NS:[[0,0]];
listDL2DU:[0];
for J:1 thru N1 do(
SDL2:SDL2+(subst([\theta=float((J-1)*dT)],
 IDL2) +subst([\theta=float(J*dT)],
 IDL2))*dT/2,
SDL21:float(0.47*SDL2/subst([\theta=
 float(J*dT)],U2)^6),
listDL2DU:append(listDL2DU, [SDL21*subst(
 [\theta=float(J*dT)],rhs(DUS11))]),
listDL22:append(listDL22, [SDL21]),
listDL2N:append(listDL2N, [RN11*
 sqrt(SDL21)]),
listDL2NX:append(listDL2NX, [[float(
 listX[J+1]),RN11*sqrt(SDL21)]]),
listDL2NS:append(listDL2NS, [[float(
 listS[J+1]),RN11*sqrt(SDL21)]]));
plot2d([discrete,listDL2NX]);
plot2d([discrete,listDL2NS],[y,0,1]);
```

(8.5.144) 式から、おしのけ厚さ：δ_2 は、

$$\begin{aligned}\frac{\delta_2\,(s)^2}{\nu}&=\frac{0.47}{\mathrm{u}\,(s)^6}\,\int_0^s \mathrm{u}\,(s)^5 ds\\&=\frac{0.47}{\mathrm{u}\,(\theta)^6}\,\int_0^\theta \mathrm{u}\,(\theta)^5\,\frac{d}{d\,\theta}\,s\,d\theta\end{aligned} \tag{8.5.162}$$

上式に、(8.5.160) 式および (8.5.157) 式を代入し、$\theta=0\to\pi$ までを N 分割し、台形積分して、$\frac{\delta_2(s)^2}{\nu}$ を求める。レイノルズ数：$R_n=\sqrt{\frac{U\,a}{\nu}}$ として、δ_2 の無次元表記は次式で得られる。

$$\frac{\sqrt{R_n}\,\delta_2\,(s)}{a}=\sqrt{\frac{\delta_2\,(s)^2}{\nu}}\times\sqrt{\frac{U}{a}} \tag{8.5.163}$$

```
/* Lambda */
K3:k(x)=(\Lambda*(5*\Lambda^2+48*\Lambda
 -5328)^2)/2057529600;
K31:subst([\Lambda=l],K3);
listLAM:[7.052323];
listLAMS:[[0,7.052323]];
listLAMX:[[0,7.052323]];
for J:1 thru N1 do(
K32:listDL2DU[J+1],
if K32>0.07703562 then K32:0.07703562,
if K32<-0.17 then K32:-0.17,
K33:rhs(K31)-K32,
LAM:find_root(K33,l,-20,10),
listLAMS:append(listLAMS,
 [[listS[J+1],LAM]]),
listLAMX:append(listLAMX,
 [[listX[J+1],LAM]]),
listLAM:append(listLAM, [LAM]));
plot2d([discrete,listLAMX]);
plot2d([discrete,listLAMS]);
```

(8.5.123) 式の $\mathrm{k}\,(s)$ は次式で得られ、(8.5.162) 式の $\frac{\delta_2(s)^2}{\nu}$ および (8.5.161) 式の $\frac{d}{d\,s}\,u$ から、$\mathrm{k}\,(s)$ の結果が得られる。

$$\mathrm{k}\,(s) = \frac{\delta_2\,(s)^2\,\left(\frac{d}{d\,s}\,\mathrm{u}\,(s)\right)}{\nu} \tag{8.5.164}$$

上記の得られた $\mathrm{k}\,(s)$ から (8.5.126) 式の次式で $find\_root$ 関数を使って、Λ を求める。

$$\mathrm{k}\,(x) = \frac{\Lambda\left(5\,\Lambda^2+48\,\Lambda-5328\right)^2}{2057529600} \tag{8.5.165}$$

```
/* delta-1 */
listDL1NX:[[0,0]];
listDL1NS:[[0,0]];
for J:1 thru N1 do(
LAM:listLAM[J+1],
LAM1:378*(LAM-36)/(5*LAM^2+48*LAM-5328),
DL1N:listDL2N[J+1]*LAM1,
listDL1NX:append(listDL1NX, [[float(
 listX[J+1]),DL1N]]),
listDL1NS:append(listDL1NS, [[float(
 listS[J+1]),DL1N]]));
plot2d([discrete,listDL1NX],[y,0,2]);
plot2d([discrete,listDL1NS],[y,0,2]);
```

おしのけ厚さ:$\delta_1\,(s)$ は (8.5.127) 式から、次式となる。

$$\delta_1\,(s) = \delta_2\,(s)\,\frac{378\,(\Lambda-36)}{5\,\Lambda^2+48\,\Lambda-5328}$$

おしのけ厚さ：$\delta_1\,(s)$ 無次元表記は次式で得られ、(8.5.163) 式の結果と (8.5.165) 式の Λ の結果から得られる。

$$\frac{\sqrt{R_n}\,\delta_1\,(s)}{a} = \frac{\sqrt{R_n}\,\delta_2\,(s)}{a} \times \frac{378\,(\Lambda-36)}{5\,\Lambda^2+48\,\Lambda-5328} \tag{8.5.166}$$

```
/* tau */
listTAUNX:[[0,0]];
listTAUNS:[[0,0]];
for J:1 thru N1 do(
LAM:listLAM[J+1],
LAM1:(LAM+12)*(5*LAM^2+48*LAM-5328)/272160,
TAUN:-LAM1/listDL2N[J+1]*subst([\theta=
 float((J+1)*dT)],U2)/U,
TAUN1:subst(LIS1,TAUN),
listTAUNX:append(listTAUNX, [[float(
 listX[J+1]),TAUN1]]),
listTAUNS:append(listTAUNS, [[float(
 listS[J+1]),TAUN1]]));
plot2d([discrete,listTAUNX]);
plot2d([discrete,listTAUNS]);
```

剪断応力：τ_0 は、(8.5.128) 式から、

$$\frac{\tau_0\,(s)}{\rho\,U^2} = -\frac{\nu\,\mathrm{u}\,(s)}{U^2\delta_2\,(s)} \times \frac{(\Lambda+12)\,\left(5\,\Lambda^2+48\,\Lambda-5328\right)}{272160}$$

上式の無次元表記は次式で得られ、(8.5.160) 式と (8.5.163) 式の結果と (8.5.165) 式の Λ の結果から得られる。

$$\frac{\sqrt{R_n}\,\tau_0\,(s)}{\rho\,U^2} = -\frac{\mathrm{u}\,(s)}{U\,\left(\frac{\sqrt{R_n}\,\delta_2(s)}{a}\right)} \times \frac{(\Lambda+12)\,\left(5\,\Lambda^2+48\,\Lambda-5328\right)}{272160} \tag{8.5.167}$$

```
listDL2NS1:[[listDL2NS[1][1],
 listDL2NS[1][2]]];
for J:1 thru N do( if listLAM[J+1]>-12 then
 listDL2NS1:append(listDL2NS1,
 [[listDL2NS[J+1][1],listDL2NS[J+1][2]]]));
listDL1NS1:[[listDL1NS[1][1],
 listDL1NS[1][2]]];
for J:1 thru N do( if listLAM[J+1]>-12 then
  listDL1NS1:append(listDL1NS1,
 [[listDL1NS[J+1][1],listDL1NS[J+1][2]]]));
listTAUNS1:[[listTAUNS[1][1],
 listTAUNS[1][2]]];
for J:1 thru N do( if listLAM[J+1]>-12 then
 listTAUNS1:append(listTAUNS1,
 [[listTAUNS[J+1][1],listTAUNS[J+1][2]]]));
plot2d([[discrete,listDL2NS1],
 [discrete,listDL1NS1],[discrete,
 listTAUNS1],[discrete,listUG]]);
listDL2NX1:[[listDL2NX[1][1]-subst(LIS1,a),
 listDL2NX[1][2]]];
for J:1 thru N do( if listLAM[J+1]>-12 then
 listDL2NX1:append(listDL2NX1,
 [[listDL2NX[J+1][1]-subst(LIS1,a),
 listDL2NX[J+1][2]]]));
listDL1NX1:[[listDL1NX[1][1]-subst(LIS1,a),
 listDL1NX[1][2]]];
for J:1 thru N do( if listLAM[J+1]>-12 then
 listDL1NX1:append(listDL1NX1,
 [[listDL1NX[J+1][1]-subst(LIS1,a),
 listDL1NX[J+1][2]]]));
listTAUNX1:[[listTAUNX[1][1]-subst(LIS1,a),
 listTAUNX[1][2]]];
for J:1 thru N do( if listLAM[J+1]>-12 then
 listTAUNX1:append(listTAUNX1,
 [[listTAUNX[J+1][1]-subst(LIS1,a),
 listTAUNX[J+1][2]]]));
listU1:[[-listU[1][1],listU[1][2]]];
for J:1 thru N do( listU1:append(listU1,
 [[-listU[J+1][1],listU[J+1][2]]]));
listXY1:[[-listXY[1][1],listXY[1][2]]];
for J:1 thru N2 do( listXY1:append(listXY1,
 [[-listXY[J+1][1],listXY[J+1][2]]]));
plot2d([[discrete,listDL2NX1],
 [discrete,listDL1NX1],[discrete,
 listTAUNX1],[discrete,listU1],
 [discrete,listXY1]],
 [legend, "Momentum thickness",
 "Displacement thickness","Viscous stress",
 "Velocity","Body"],[x,-1.03,1.01]);
for J:1 thru N do( if listLAM[J+1]>-12 then
  NPL:J+1);
NPL;
write_data(listDL1NS1,"M:\listDL1NS8.cvs");
write_data(listTAUNS1,"M:\listTAUNS8.cvs");
write_data(listDL1NX1,"M:\listDL1NX8.cvs");
write_data(listTAUNX1,"M:\listTAUNX8.cvs");
```

上記を基に、楕円の径比：$a/b = 1, 2, 4, 8$ について、運動量厚さ、おしのけ厚さ、剪断力、流速の無次元結果を以下に示す。境界層のはく離点は剪断力が零の位置であり、楕円が細長くなるに従い、後方へ移動している。

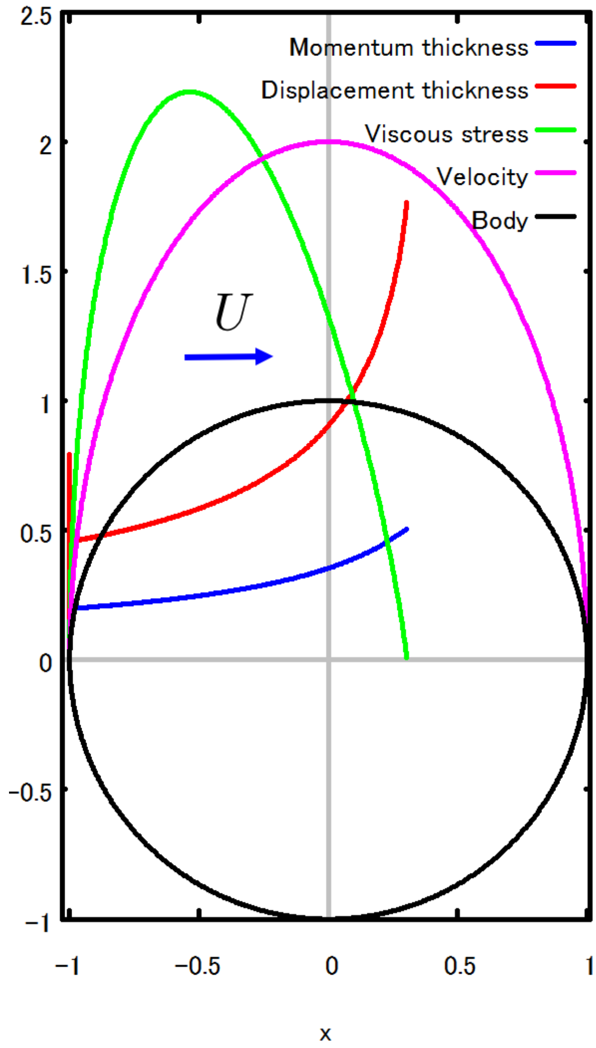


図 8.5.36: 楕円 $a/b = 1$ における運動量厚さ、おしのけ厚さ、剪断力、流速、楕円形状

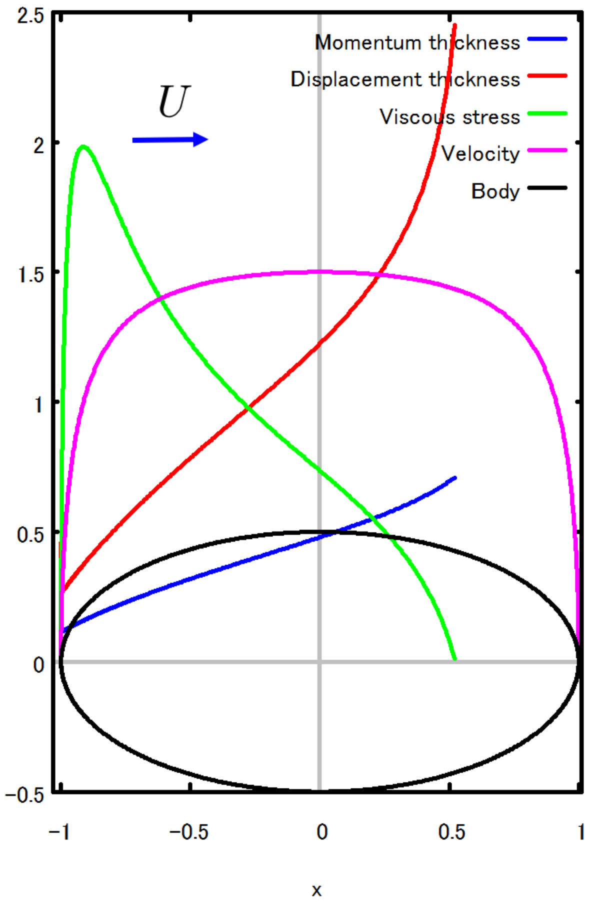


図 8.5.37: 楕円 $a/b = 2$ における運動量厚さ、おしのけ厚さ、剪断力、流速、楕円形状

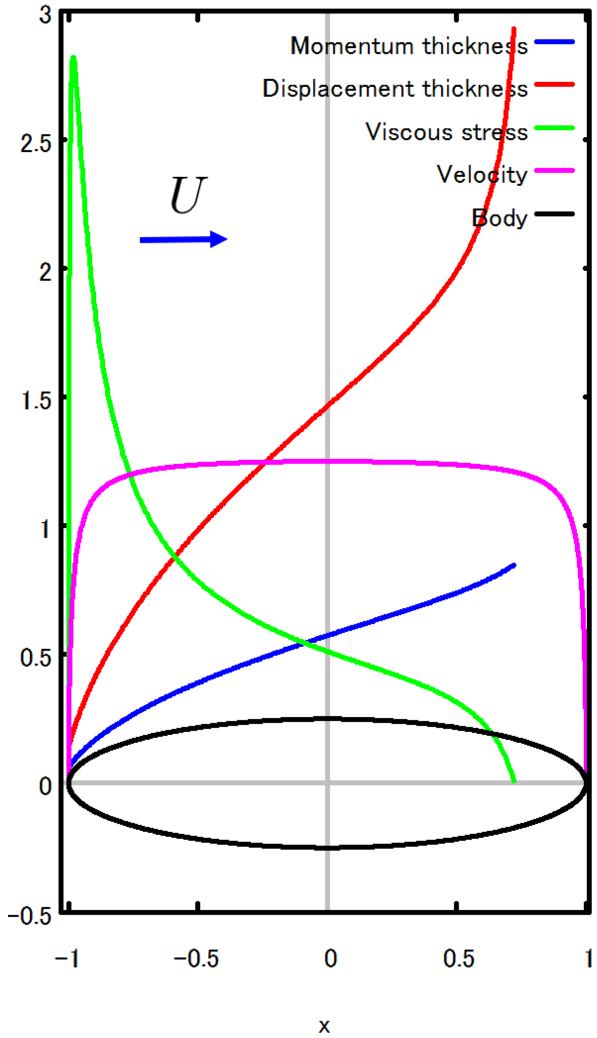


図 8.5.38: 楕円 $a/b = 4$ における運動量厚さ、おしのけ厚さ、剪断力、流速、楕円形状

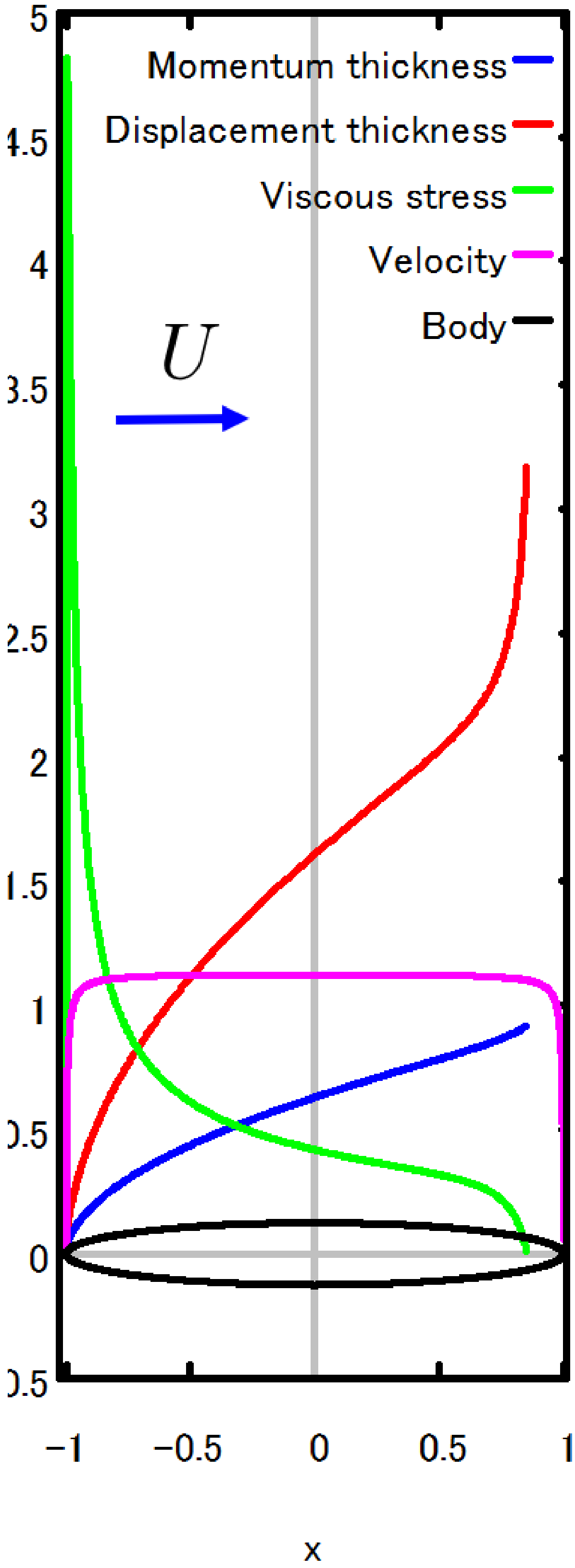


図 8.5.39: 楕円 $a/b = 8$ における運動量厚さ、おしのけ厚さ、剪断力、流速、楕円形状

楕円 $a/b = 8$ と同じ翼コード長さ・翼厚比の翼形状の運動量厚さ、おしのけ厚さ、剪断力、流速の無次元結果を以下に示す。最大翼厚の位置が楕円では中央にあるが、翼型では前方より 1/4 翼コード長さの位置にある。このため流速が減速となる位置は翼型の方が前方にあり、剪断力分布からはく離点も翼型の方がかなり前方となる。層流翼による低抵抗の翼はこの現象を利用し、最大翼厚の位置を後方にすることにより、乱流に遷移する位置を後方にずらすことができ、低抵抗翼とすることができる。

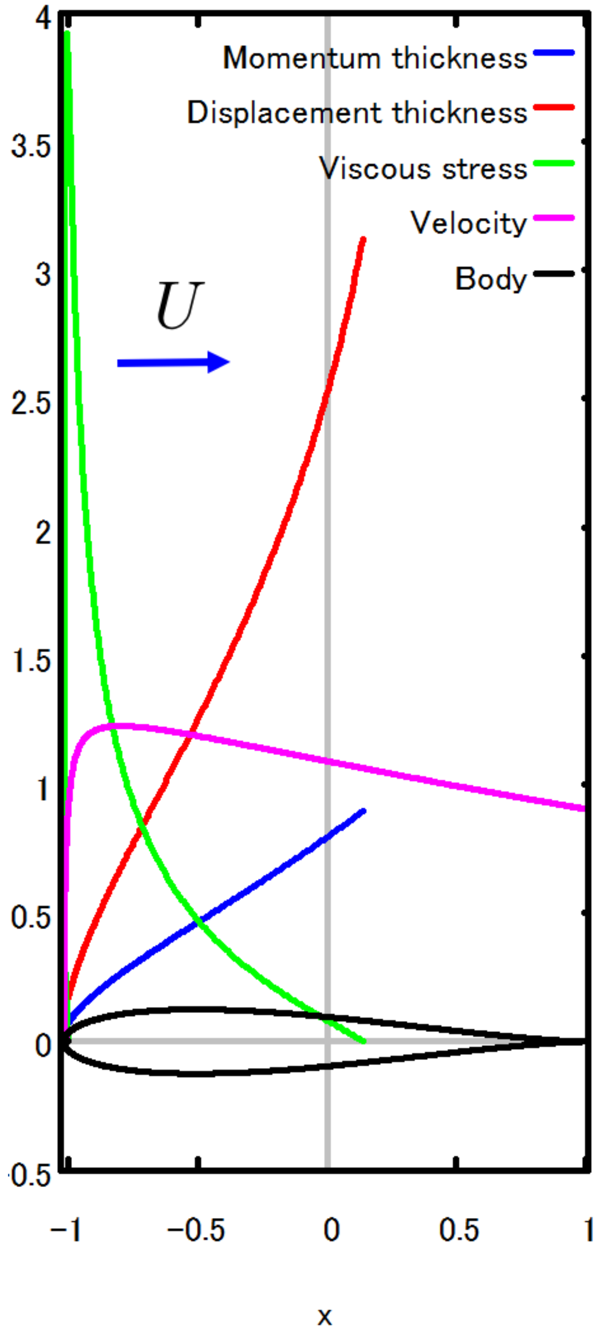


図 8.5.40: 翼形状 翼コード長さ/翼厚=8 における運動量厚さ、おしのけ厚さ、剪断力、流速、翼形状

```
list:read_list("M:\listDL1NS1.cvs");
for J:1 thru 300 do(if J=1 then
 listpDL1NS1:[[list[1],list[2]]]  else
 listpDL1NS1:append(listpDL1NS1,
 [[list[2*J-1],list[2*J]]]));
list:read_list("M:\listDL1NS2.cvs");
for J:1 thru 338 do(if J=1 then
 listpDL1NS2:[[list[1],list[2]]]  else
 listpDL1NS2:append(listpDL1NS2,
 [[list[2*J-1],list[2*J]]]));
list:read_list("M:\listDL1NS4.cvs");
for J:1 thru 379 do(if J=1 then
 listpDL1NS4:[[list[1],list[2]]]  else
 listpDL1NS4:append(listpDL1NS4,
 [[list[2*J-1],list[2*J]]]));
list:read_list("M:\listDL1NS8.cvs");
for J:1 thru 413 do(if J=1 then
 listpDL1NS8:[[list[1],list[2]]]  else
 listpDL1NS8:append(listpDL1NS8,
 [[list[2*J-1],list[2*J]]]));
plot2d([[discrete,listpDL1NS1],[discrete,
 listpDL1NS2],[discrete,listpDL1NS4],
 [discrete,listpDL1NS8],1.75*sqrt(t)],
 [t,0,2],[legend, "a/b=1","a/b=2",
 "a/b=4","a/b=8","Flat Plate"]);
list:read_list("M:\listTAUNS1.cvs");
for J:1 thru 300 do(if J=1 then
 listpTAUNS1:[[list[1],list[2]]]  else
 listpTAUNS1:append(listpTAUNS1,
 [[list[2*J-1],list[2*J]]]));
list:read_list("M:\listTAUNS2.cvs");
for J:1 thru 338 do(if J=1 then
 listpTAUNS2:[[list[1],list[2]]]  else
 listpTAUNS2:append(listpTAUNS2,
 [[list[2*J-1],list[2*J]]]));
list:read_list("M:\listTAUNS4.cvs");
for J:1 thru 379 do(if J=1 then
 listpTAUNS4:[[list[1],list[2]]]  else
 listpTAUNS4:append(listpTAUNS4,
 [[list[2*J-1],list[2*J]]]));
list:read_list("M:\listTAUNS8.cvs");
for J:1 thru 413 do(if J=1 then
 listpTAUNS8:[[list[1],list[2]]]  else
 listpTAUNS8:append(listpTAUNS8,
 [[list[2*J-1],list[2*J]]]));
```

```
plot2d([[discrete,listpTAUNS1],[discrete,
 listpTAUNS2],[discrete,listpTAUNS4],
 [discrete,listpTAUNS8],0.332*sqrt(2)/
 sqrt(t)],[t,0.01,2],[legend, "a/b=1",
 "a/b=2","a/b=4","a/b=8","Flat Plate"]);
```

以下に楕円の径比：$a/b = 1, 2, 4, 8$ のおしのけ厚さと剪断力の比較結果を示す。ここで横軸は楕円に沿った長さ：s である。また、平板の厳密解のおしのけ厚さ：(8.5.23) 式と剪断力：(8.5.20) 式の結果も併せて表示した。楕円の径比：a/b が大きくなると平板の厳密解の結果に近くなっている。

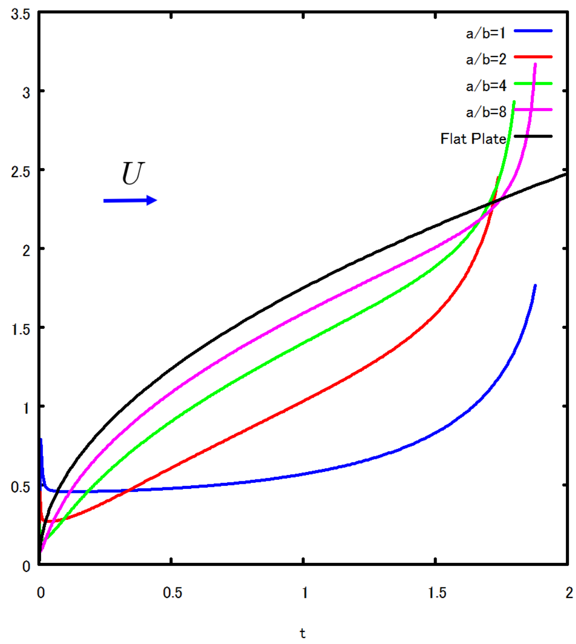


図 8.5.41: 各種楕円形状のおしのけ厚さの比較

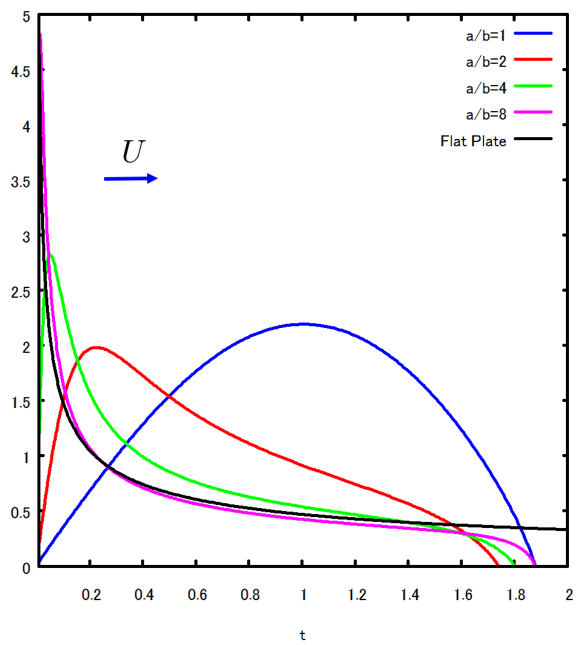


図 8.5.42: 各種楕円形状の剪断力の比較

8.6 振動境界層

8.6.1 振動平板による流れ

水平底板が速度振幅：U、円周波数：ω で左右振動している粘性流れを求める。x-y-z 座標軸の各速度コンポーネントを u,v,w とする。水平振動方向を x 軸とし、鉛直方向をを y 軸とする。流体は上方無限にあるものとする。圧力：p、粘性係数：μ とする。

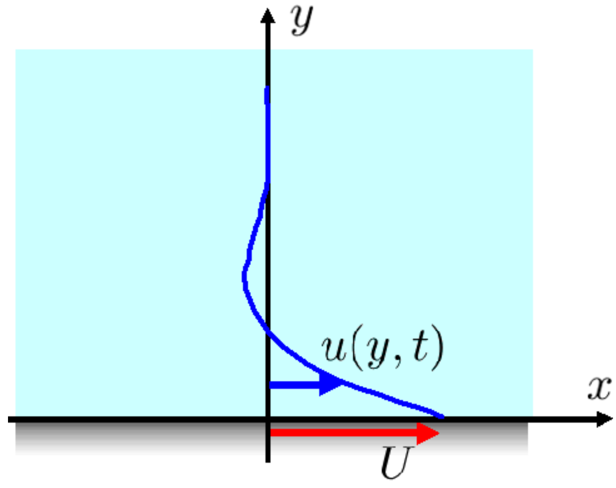


図 8.6.1: 振動平板による流れ

```
/* 振動平板による流れ h：無限*/
kill(all);
MAS1:'diff(w,z,1)+'diff(v,y,1)+'diff(u,x,1)
 =0;
NAV1:matrix([\rho*(('diff(u,z,1))*w
 +('diff(u,y,1))*v+u*('diff(u,x,1))
 +'diff(u,t,1))],[\rho*(('diff(v,z,1))*w
 +v*('diff(v,y,1))+u*('diff(v,x,1))
 +'diff(v,t,1))],[\rho*(w*('diff(w,z,1))
 +v*('diff(w,y,1))+u*('diff(w,x,1))
 +'diff(w,t,1))]])=matrix([X+mu*(
 'diff(u,z,2)+'diff(u,y,2)+'diff(u,x,2))
-'diff(p,x,1)],[Y+mu*('diff(v,z,2)
 +'diff(v,y,2)+'diff(v,x,2))-'diff(p,y,1)]
 ,[Z+mu*('diff(w,z,2)+'diff(w,y,2)
 +'diff(w,x,2))-'diff(p,z,1)]]);
NAV2:lhs(NAV1)[1][1]=rhs(NAV1)[1][1];
NAV3:lhs(NAV1)[2][1]=rhs(NAV1)[2][1];
subst([u=u(y,t),v=0,w=0,p=0,X=0],NAV2);
NAV21:ev(%,diff);
```

x 軸方向の Navier-Stokes の式は (8.1.9) 式から、

$$\rho\left(\left(\frac{d}{d\,z}\,u\right)\,w+\left(\frac{d}{d\,y}\,u\right)\,v+u\,\left(\frac{d}{d\,x}\,u\right)+\frac{d}{d\,t}\,u\right)$$
$$=X+\mu\,\left(\frac{d^2}{d\,z^2}\,u+\frac{d^2}{d\,y^2}\,u+\frac{d^2}{d\,x^2}\,u\right)-\frac{d}{d\,x}\,p$$

流速は x 軸方向のみで、時間:t と y の関数で、$u=u(y,t)$ とする。圧力：p は均一となる。これらから、運動方程式は下記となる。

$$\rho\,\left(\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{u}\left(y,t\right)\right)=\mu\,\left(\frac{d^2}{d\,y^2}\,\mathrm{u}\left(y,t\right)\right) \qquad (8.6.1)$$

```
UYT1:u(y,t)=f(y)*g(t);
subst([UYT1],NAV21);
ev(%,diff);
EQ1:%/f(y)/g(t)/\rho;
EQT1:lhs(EQ1)=C;
EQY1:rhs(EQ1)=C;
EQT2:ode2(EQT1,g(t),t);
EQT21:subst([C=%i*\omega],EQT2);
assume(C>0,\mu>0,\rho>0,\omega>0);
EQY2:ode2(EQY1,f(y),y);
EQY21:subst([C=%i*\omega],EQY2);
EQU3:subst([EQT21,EQY21,%k1=0],UYT1);
EQU31:lhs(%)=realpart(rhs(%));
U01:subst([t=0,y=0],rhs(%))=U;
U02:solve(%,%c)[1];
EQU4:subst([U02],EQU31);
```

上式：$u(y,t)$ を下記の変数分離法で解く。

$$\mathrm{u}\left(y,t\right)=\mathrm{g}\left(t\right)\,\mathrm{f}\left(y\right)$$

(8.6.1) 式に代入し、

$$\rho\,\left(\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{g}\left(t\right)\right)\,\mathrm{f}\left(y\right)=\mu\,\mathrm{g}\left(t\right)\,\left(\frac{d^2}{d\,y^2}\,\mathrm{f}\left(y\right)\right)$$

$$\frac{\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{g}\left(t\right)}{\mathrm{g}\left(t\right)}=\frac{\mu\,\left(\frac{d^2}{d\,y^2}\,\mathrm{f}\left(y\right)\right)}{\rho\,\mathrm{f}\left(y\right)}=C$$

上式を $ode2$ 関数で解くと、それぞれ、

$$\begin{aligned}\mathrm{g}\left(t\right)=&\%c\,e^{t\,C}\\ \mathrm{f}\left(y\right)=&\%k1\,e^{\frac{\sqrt{\rho}\,y\,\sqrt{C}}{\sqrt{\mu}}}+\%k2\,e^{-\frac{\sqrt{\rho}\,y\,\sqrt{C}}{\sqrt{\mu}}}\end{aligned} \qquad (8.6.2)$$

振動問題であるから、$C=i\,\omega$ と置くと、

$$\mathrm{g}\left(t\right)=\%c\,e^{i\,\omega\,t}$$
$$\mathrm{f}\left(y\right)=\%k1\,e^{\frac{(-1)^{\frac{1}{4}}\,\sqrt{\omega}\,\sqrt{\rho}\,y}{\sqrt{\mu}}}+\%k2\,e^{-\frac{(-1)^{\frac{1}{4}}\,\sqrt{\omega}\,\sqrt{\rho}\,y}{\sqrt{\mu}}}$$

$y\to\infty$ で $u(y,t)=0$ であるから $\%k1=0$ となり、

$$\mathrm{u}\left(y,t\right)=\%c\,\%k2\,e^{i\,\omega\,t-\frac{(-1)^{\frac{1}{4}}\,\sqrt{\omega}\,\sqrt{\rho}\,y}{\sqrt{\mu}}}$$

振動振幅：U であるから、$\%c\,\%k2=U$ を上式に代入し、実部をとると、流体運動：$\mathrm{u}\left(y,t\right)$ は、

$$\mathrm{u}\left(y,t\right)=e^{-\frac{\sqrt{\omega}\,\sqrt{\rho}\,y}{\sqrt{2}\,\sqrt{\mu}}}\,\cos\left(\frac{\sqrt{\omega}\,\sqrt{\rho}\,y}{\sqrt{2}\,\sqrt{\mu}}-\omega\,t\right)\,U \qquad (8.6.3)$$

```
PL1:subst([\omega=1,U=1,\mu=1,\rho=1,y=x]
 ,rhs(EQU4));
plot2d([subst([t=0],PL1)
 ,subst([t=0.785], PL1),subst([t=1.57],PL1)
 ,subst([t=2.355],PL1),subst([t=3.14],PL1)
 ,subst([t=3.925],PL1),subst([t=4.71],PL1)
 ,subst([t=5.495],PL1)],[x,0,10],[legend,
 "t=0", "t=0.785","t=1.57", "t=2.355"
 ,"t=3.14", "t=3.925","t=4.71"
 , "t=5.495"]);
diff(EQU4,y,1);
TA1:\tau=\mu*subst([y=0],rhs(%));
W1:W=-\tau*U*cos(\omega*t);
W2:subst([TA1],W1);
T1:2*%pi=T*\omega;
T2:solve(T1,T)[1];
assume(T>0);
W3:W=1/T*'integrate(rhs(W2),t,0,T);
ev(%,integrate);
factor(subst([T2],%));
```

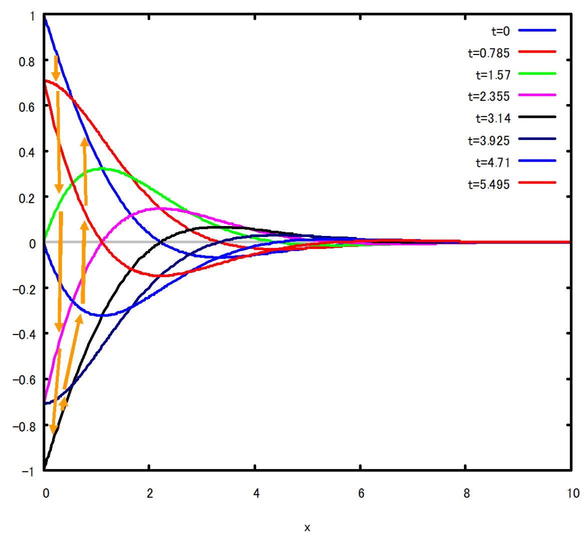


図 8.6.2: 振動平板による流れ

(8.6.3) 式を微分し、

$$\frac{d}{d\,y}\,\mathrm{u}\,(y,t) = -\frac{\sqrt{\omega}\,\sqrt{\rho}\,e^{-\frac{\sqrt{\omega}\,\sqrt{\rho}\,y}{\sqrt{2}\,\sqrt{\mu}}}\,\sin\left(\frac{\sqrt{\omega}\,\sqrt{\rho}\,y}{\sqrt{2}\,\sqrt{\mu}}-\omega\,t\right)\,U}{\sqrt{2}\,\sqrt{\mu}} - \frac{\sqrt{\omega}\,\sqrt{\rho}\,e^{-\frac{\sqrt{\omega}\,\sqrt{\rho}\,y}{\sqrt{2}\,\sqrt{\mu}}}\,\cos\left(\frac{\sqrt{\omega}\,\sqrt{\rho}\,y}{\sqrt{2}\,\sqrt{\mu}}-\omega\,t\right)\,U}{\sqrt{2}\,\sqrt{\mu}}$$

剪断力：τ は、

$$\begin{aligned}\tau =&\mu\,\frac{d}{d\,y}\,\mathrm{u}\,(y,t)\\ =&\mu\,\left(\frac{\sqrt{\omega}\,\sqrt{\rho}\sin\left(\omega\,t\right)\,U}{\sqrt{2}\,\sqrt{\mu}}-\frac{\sqrt{\omega}\,\sqrt{\rho}\cos\left(\omega\,t\right)\,U}{\sqrt{2}\,\sqrt{\mu}}\right)\end{aligned}$$

平板の行った仕事：W は、剪断力：τ ×変位であるから、

$$\begin{aligned}W =& -\cos\left(\omega\,t\right)\,\tau\,U\\ =& -\mu\cos\left(\omega\,t\right)\,U\,\left(\frac{\sqrt{\omega}\,\sqrt{\rho}\sin\left(\omega\,t\right)\,U}{\sqrt{2}\,\sqrt{\mu}}\right.\\ &\left.-\frac{\sqrt{\omega}\,\sqrt{\rho}\cos\left(\omega\,t\right)\,U}{\sqrt{2}\,\sqrt{\mu}}\right)\end{aligned}$$

上記の時間平均をとると、

$$\begin{aligned}W =& -\frac{\mu\,U}{T}\int_0^T\cos\left(\omega\,t\right)\,\left(\frac{\sqrt{\omega}\,\sqrt{\rho}\sin\left(\omega\,t\right)\,U}{\sqrt{2}\,\sqrt{\mu}}\right.\\ &\left.-\frac{\sqrt{\omega}\,\sqrt{\rho}\cos\left(\omega\,t\right)\,U}{\sqrt{2}\,\sqrt{\mu}}\right)dt\\ =&\frac{\sqrt{\mu}\,\sqrt{\omega}\,\sqrt{\rho}\,U^2}{2^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

8.6.2 平行平板内での振動平板による流れ

下部水平底板が速度振幅：U、円周波数：ω で左右振動し、上部水平板が静止している平行平板内の粘性流れを求める。x-y-z 座標軸の各速度コンポーネントを u, v, w とする。水平振動方向を x 軸とし、鉛直方向をを y 軸とする。圧力：p、粘性係数：μ とする。

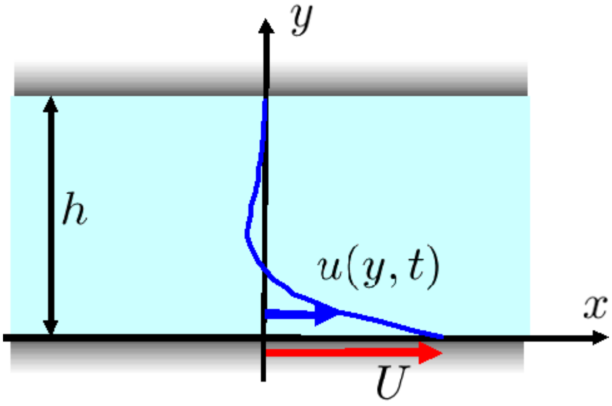


図 8.6.3: 平行平板内での振動平板による流れ

```
/* 平行平板内での振動平板による流れ h：有限  */
kill(all);
MAS1:'diff(w,z,1)+'diff(v,y,1)+'diff(u,x,1)
 =0;
NAV1:matrix([\rho*(('diff(u,z,1))*w
 +('diff(u,y,1))*v+u*('diff(u,x,1))
 +'diff(u,t,1))],[\rho*(('diff(v,z,1))*w
 +v*('diff(v,y,1))+u*('diff(v,x,1))
 +'diff(v,t,1))],[\rho*(w*('diff(w,z,1))
 +v*('diff(w,y,1))+u*('diff(w,x,1))
 +'diff(w,t,1))]])=matrix([X
 +mu*('diff(u,z,2)
 +'diff(u,y,2)+'diff(u,x,2))-'diff(p,x,1)],
 [Y+mu*('diff(v,z,2)+'diff(v,y,2)
 +'diff(v,x,2)) -'diff(p,y,1)],[Z
 +mu*('diff(w,z,2) +'diff(w,y,2)
 +'diff(w,x,2))-'diff(p,z,1)]);
 NAV2:lhs(NAV1)[1][1]=rhs(NAV1)[1][1];
NAV3:lhs(NAV1)[2][1]=rhs(NAV1)[2][1];
subst([u=u(y,t),v=0,w=0,p=0,X=0],NAV2);
NAV21:ev(%,diff);
UYT1:u(y,t)=f(y)*g(t);
subst([UYT1],NAV21);
ev(%,diff);
EQ1:%/f(y)/g(t)/\rho;
EQT1:lhs(EQ1)=C;
EQY1:rhs(EQ1)=C;
```

x 軸方向の Navier-Stokes の式は (8.1.9) 式から、

$$\rho\left(\left(\frac{d}{d\,z}\,u\right)\,w+\left(\frac{d}{d\,y}\,u\right)\,v+u\,\left(\frac{d}{d\,x}\,u\right)+\frac{d}{d\,t}\,u\right)$$
$$=X+\mu\left(\frac{d^2}{d\,z^2}\,u+\frac{d^2}{d\,y^2}\,u+\frac{d^2}{d\,x^2}\,u\right)-\frac{d}{d\,x}\,p$$

流速は x 軸方向のみで、時間:t と y の関数で、$u=u(y,t)$ とする。圧力：p は均一となる。これらから、運動方程式は下記となる。

$$\rho\left(\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{u}\,(y,t)\right)=\mu\left(\frac{d^2}{d\,y^2}\,\mathrm{u}\,(y,t)\right) \tag{8.6.4}$$

上式：$u(y,t)$ を下記の変数分離法で解く。

$$\mathrm{u}\,(y,t)=\mathrm{g}\,(t)\ \mathrm{f}\,(y) \tag{8.6.5}$$

上式に代入し、

$$\rho\left(\frac{d}{d\,t}\,(\mathrm{g}\,(t)\ \mathrm{f}\,(y))\right)=\mu\left(\frac{d^2}{d\,y^2}\,(\mathrm{g}\,(t)\ \mathrm{f}\,(y))\right)$$

$$\frac{\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{g}\,(t)}{\mathrm{g}\,(t)}=\frac{\mu\left(\frac{d^2}{d\,y^2}\,\mathrm{f}\,(y)\right)}{\rho\,\mathrm{f}\,(y)}=C$$

```
EQT2:ode2(EQT1,g(t),t);
EQT21:subst([C=%i*\omega],EQT2);
assume(C>0,\mu>0,\rho>0,\omega>0);
EQY2:ode2(EQY1,f(y),y);
subst([C=%i*\omega],EQY2);
EQY3:f(y)=%k1*sinh(((-1)^(1/4)*sqrt(omega)
 *sqrt(rho)*y)/sqrt(mu))+%k2
 *cosh(((-1)^(1/4)*sqrt(omega)
 *sqrt(rho)*y)/sqrt(mu));
EQY31:lhs(%)=subst([y=h-y],rhs(%));
EQY32:subst([y=0],rhs(EQY31))=U;
EQY33:subst([y=h],rhs(EQY31))=0;
solve([EQY32,EQY33],[%k1,%k2])[1];
EQY34:subst([%],EQY31);
EQU1:u(t,y)=rhs(EQT21)*rhs(EQY34);
subst([%c=1],%);
EQU2:lhs(%)=realpart(rhs(%));
```

上式を $ode2$ 関数で解くと、それぞれ、

$$\begin{aligned}\mathrm{g}\,(t)=&\%c\,e^{t\,C}\\ \mathrm{f}\,(y)=&\%k1\,e^{\frac{\sqrt{\rho}\,y\,\sqrt{C}}{\sqrt{\mu}}}+\%k2\,e^{-\frac{\sqrt{\rho}\,y\,\sqrt{C}}{\sqrt{\mu}}}\end{aligned} \tag{8.6.6}$$

振動問題であるから、$C=i\,\omega$ と置くと、

$$\begin{aligned}\mathrm{g}\,(t)=&\%c\,e^{i\,\omega\,t}\\ \mathrm{f}\,(y)=&\%k1\,e^{\frac{(-1)^{\frac{1}{4}}\sqrt{\omega}\,\sqrt{\rho}\,y}{\sqrt{\mu}}}+\%k2\,e^{-\frac{(-1)^{\frac{1}{4}}\sqrt{\omega}\,\sqrt{\rho}\,y}{\sqrt{\mu}}}\end{aligned} \tag{8.6.7}$$

上式の第二式は $y=h$ で $\mathrm{f}(y)=0$ とするため、$y \to h-y$ に置き換え、下記のようにも表現できる。

$$\begin{aligned}\mathrm{f}(y) =&\%k1 \sinh\left(\frac{(-1)^{\frac{1}{4}}\sqrt{\omega}\sqrt{\rho}\,(h-y)}{\sqrt{\mu}}\right)\\ &+\%k2 \cosh\left(\frac{(-1)^{\frac{1}{4}}\sqrt{\omega}\sqrt{\rho}\,(h-y)}{\sqrt{\mu}}\right)\end{aligned} \tag{8.6.8}$$

境界条件の $y=0$ で $\mathrm{f}(y)=U$、$y=h$ で $\mathrm{f}(y)=0$ であるから、

$$\begin{aligned}\%k1 \sinh&\left(\frac{(-1)^{\frac{1}{4}}h\sqrt{\omega}\sqrt{\rho}}{\sqrt{\mu}}\right)\\ &+\%k2 \cosh\left(\frac{(-1)^{\frac{1}{4}}h\sqrt{\omega}\sqrt{\rho}}{\sqrt{\mu}}\right)=U\\ &\%k2=0\end{aligned}$$

以上から、

$$[\%k1=\frac{U}{\sinh\left(\frac{(-1)^{\frac{1}{4}}h\sqrt{\omega}\sqrt{\rho}}{\sqrt{\mu}}\right)}, \%k2=0]$$

上式を (8.6.8) 式に代入し、

$$\mathrm{f}(y)=\frac{\sinh\left(\frac{(-1)^{\frac{1}{4}}\sqrt{\omega}\sqrt{\rho}\,(h-y)}{\sqrt{\mu}}\right)U}{\sinh\left(\frac{(-1)^{\frac{1}{4}}h\sqrt{\omega}\sqrt{\rho}}{\sqrt{\mu}}\right)}$$

上式と (8.6.7) 式を (8.6.4) 式に代入し、

$$\mathrm{u}(t,y)=\frac{e^{i\,\omega\,t}\sinh\left(\frac{(-1)^{\frac{1}{4}}\sqrt{\omega}\sqrt{\rho}\,(h-y)}{\sqrt{\mu}}\right)U}{\sinh\left(\frac{(-1)^{\frac{1}{4}}h\sqrt{\omega}\sqrt{\rho}}{\sqrt{\mu}}\right)}$$

上式の実部をとれば流速分布：$u(y,t)$ が得られるが、式が非常に長くなるので、記述を省略する。

```
subst([y=h],EQU2);
subst([y=0],EQU2);
PL1:subst([\omega=1,U=1,\mu=1,\rho=1,y=x],
 rhs(EQU2));
h:5;
```

```
plot2d([subst([t=0],PL1),subst([t=0.785],
 PL1),
 subst([t=1.57],PL1),subst([t=2.355],PL1),
 subst([t=3.14],PL1),subst([t=3.925],PL1),
 subst([t=4.71],PL1),subst([t=5.495],PL1)],
 [x,0,h],[legend, "t=0", "t=0.785",
 "t=1.57",
 "t=2.355","t=3.14", "t=3.925","t=4.71",
 "t=5.495"]);
h:2;
plot2d([subst([t=0],PL1),subst([t=0.785],
 PL1),
 subst([t=1.57],PL1),subst([t=2.355],PL1),
 subst([t=3.14],PL1),subst([t=3.925],PL1),
 subst([t=4.71],PL1),subst([t=5.495],PL1)],
 [x,0,h],[legend, "t=0", "t=0.785",
 "t=1.57",  "t=2.355","t=3.14",
 "t=3.925", "t=4.71",  "t=5.495"]);
```

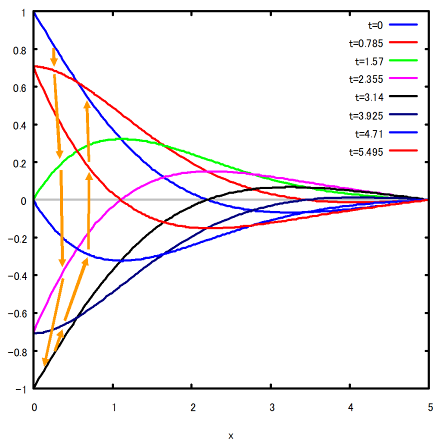


図 8.6.4: 平行平板内での振動平板による流れ h=5

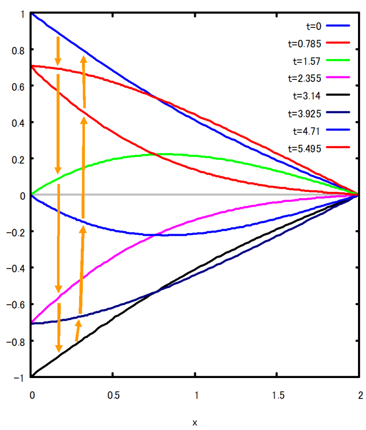


図 8.6.5: 平行平板内での振動平板による流れ h=2

8.6.3　自由表面を有する振動平板による流れ

下部水平底板が振幅：U、円周波数：ω で左右振動し、水深：h の自由表面がある粘性流れを求める。x-y-z 座標軸の各速度コンポーネントを u, v, w とする。水平振動方向を x 軸とし、鉛直方向をを y 軸とする。圧力：p、粘性係数：μ とする。

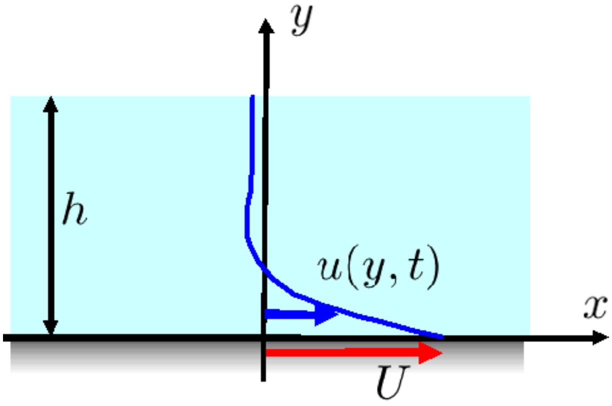


図 8.6.6: 自由表面を有する振動平板による流れ

```
/* 自由表面を有する振動平板による流れ */
kill(all);
MAS1:'diff(w,z,1)+'diff(v,y,1)+'diff(u,x,1)
 =0;
NAV1:matrix([\rho*(('diff(u,z,1))*w
 +('diff(u,y,1))*v+u*('diff(u,x,1))
 +'diff(u,t,1))],[\rho*(('diff(v,z,1))*w
 +v*('diff(v,y,1))+u*('diff(v,x,1))
 +'diff(v,t,1))],[\rho*(w*('diff(w,z,1))
 +v*('diff(w,y,1))+u*('diff(w,x,1))
 +'diff(w,t,1))]])=matrix([X
 +mu*('diff(u,z,2)
 +'diff(u,y,2)+'diff(u,x,2))-'diff(p,x,1)],
 [Y+mu*('diff(v,z,2)+'diff(v,y,2)
 +'diff(v,x,2)) -'diff(p,y,1)],[Z
 +mu*('diff(w,z,2) +'diff(w,y,2)
 +'diff(w,x,2))-'diff(p,z,1)]);
NAV2:lhs(NAV1)[1][1]=rhs(NAV1)[1][1];
NAV3:lhs(NAV1)[2][1]=rhs(NAV1)[2][1];
subst([u=u(y,t),v=0,w=0,p=0,X=0],NAV2);
NAV21:ev(%,diff);
UYT1:u(y,t)=f(y)*g(t);
subst([UYT1],NAV21);
ev(%,diff);
EQ1:%/f(y)/g(t)/\rho;
```

```
EQT1:lhs(EQ1)=C;
EQY1:rhs(EQ1)=C;
EQT2:ode2(EQT1,g(t),t);
EQT21:subst([C=%i*\omega],EQT2);
```

x 軸方向の Navier-Stokes の式は (8.1.9) 式から、

$$\rho\left(\left(\frac{d}{d\,z}\,u\right)\,w+\left(\frac{d}{d\,y}\,u\right)\,v+u\,\left(\frac{d}{d\,x}\,u\right)+\frac{d}{d\,t}\,u\right)$$
$$=X+\mu\,\left(\frac{d^2}{d\,z^2}\,u+\frac{d^2}{d\,y^2}\,u+\frac{d^2}{d\,x^2}\,u\right)-\frac{d}{d\,x}\,p$$

流速は x 軸方向のみで、時間:t と y の関数で、$u=u(y,t)$ とする。圧力：p は均一となる。これらから、運動方程式は下記となる。

$$\rho\,\left(\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{u}\left(y,t\right)\right)=\mu\,\left(\frac{d^2}{d\,y^2}\,\mathrm{u}\left(y,t\right)\right) \tag{8.6.9}$$

上式：$u(y,t)$ を下記の変数分離法で解く。

$$\mathrm{u}\left(y,t\right)=\mathrm{g}\left(t\right)\,\mathrm{f}\left(y\right) \tag{8.6.10}$$

上式に代入し、

$$\rho\,\left(\frac{d}{d\,t}\,\left(\mathrm{g}\left(t\right)\,\mathrm{f}\left(y\right)\right)\right)=\mu\,\left(\frac{d^2}{d\,y^2}\,\left(\mathrm{g}\left(t\right)\,\mathrm{f}\left(y\right)\right)\right)$$

$$\frac{\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{g}\left(t\right)}{\mathrm{g}\left(t\right)}=\frac{\mu\,\left(\frac{d^2}{d\,y^2}\,\mathrm{f}\left(y\right)\right)}{\rho\,\mathrm{f}\left(y\right)}=C$$

```
assume(C>0,\mu>0,\rho>0,\omega>0);
EQY2:ode2(EQY1,f(y),y);
subst([C=%i*\omega],EQY2);
EQY3:f(y)=%k1*sinh(((-1)^(1/4)*sqrt(omega)
 *sqrt(rho)*y)/sqrt(mu))+%k2*cosh(((-1)^
 (1/4)*sqrt(omega)*sqrt(rho)*y)/sqrt(mu));
EQY31:lhs(%)=subst([y=h-y],rhs(%));
DEQY31:diff(EQY31,y,1);
EQY32:subst([y=0],rhs(EQY31))=U;
EQY33:subst([y=h],rhs(DEQY31))=0;
solve([EQY32,EQY33],[%k1,%k2])[1];
EQY34:subst([%],EQY31);
EQU1:u(t,y)=rhs(EQT21)*rhs(EQY34);
subst([%c=1],%);
EQU2:lhs(%)=realpart(rhs(%));
diff(EQU2,y,1);
subst([y=h],rhs(%));
factor(subst([y=0],EQU2));
```

上式を $ode2$ 関数で解くと、それぞれ、

$$\mathrm{g}\left(t\right)=\%c\,e^{t\,C}$$
$$\mathrm{f}\left(y\right)=\%k1\,e^{\frac{\sqrt{\rho}\,y\,\sqrt{C}}{\sqrt{\mu}}}+\%k2\,e^{-\frac{\sqrt{\rho}\,y\,\sqrt{C}}{\sqrt{\mu}}}$$

振動問題であるから、$C=i\omega$ と置くと、

$$\mathrm{g}(t)=\%c\, e^{i\,\omega\,t}$$
$$\mathrm{f}(y)=\%k1\, e^{\frac{(-1)^{\frac{1}{4}}\sqrt{\omega}\sqrt{\rho}\,y}{\sqrt{\mu}}}+\%k2\, e^{-\frac{(-1)^{\frac{1}{4}}\sqrt{\omega}\sqrt{\rho}\,y}{\sqrt{\mu}}} \tag{8.6.11}$$

上式の $\mathrm{f}(y)$ は $y=h$ で $\mathrm{f}(y)=0$ とするため、$y\to h-y$ に置き換え、下記のように表現できる。

$$\mathrm{f}(y)=\%k1\sinh\left(\frac{(-1)^{\frac{1}{4}}\sqrt{\omega}\sqrt{\rho}\,(h-y)}{\sqrt{\mu}}\right)+\%k2\cosh\left(\frac{(-1)^{\frac{1}{4}}\sqrt{\omega}\sqrt{\rho}\,(h-y)}{\sqrt{\mu}}\right) \tag{8.6.12}$$

上式を y で微分し、

$$\frac{d}{d\,y}\mathrm{f}(y)=-\frac{(-1)^{\frac{1}{4}}\,\%k2\sqrt{\omega}\sqrt{\rho}\sinh\left(\frac{(-1)^{\frac{1}{4}}\sqrt{\omega}\sqrt{\rho}\,(h-y)}{\sqrt{\mu}}\right)}{\sqrt{\mu}}-\frac{(-1)^{\frac{1}{4}}\,\%k1\sqrt{\omega}\sqrt{\rho}\cosh\left(\frac{(-1)^{\frac{1}{4}}\sqrt{\omega}\sqrt{\rho}\,(h-y)}{\sqrt{\mu}}\right)}{\sqrt{\mu}} \tag{8.6.13}$$

境界条件の $y=0$ で $\mathrm{f}(y)=U$、$y=h$ で $\frac{d}{d\,y}\mathrm{f}(y)=0$ であるから、

$$\%k1\sinh\left(\frac{(-1)^{\frac{1}{4}}\,h\sqrt{\omega}\sqrt{\rho}}{\sqrt{\mu}}\right)+\%k2\cosh\left(\frac{(-1)^{\frac{1}{4}}\,h\sqrt{\omega}\sqrt{\rho}}{\sqrt{\mu}}\right)=U$$
$$-\frac{(-1)^{\frac{1}{4}}\,\%k1\sqrt{\omega}\sqrt{\rho}}{\sqrt{\mu}}=0$$

上式を解いて、

$$[\%k1=0,\%k2=\frac{U}{\cosh\left(\frac{(-1)^{\frac{1}{4}}\,h\sqrt{\omega}\sqrt{\rho}}{\sqrt{\mu}}\right)}]$$

上式を (8.6.12) 式に代入し、

$$\mathrm{f}(y)=\frac{\cosh\left(\frac{(-1)^{\frac{1}{4}}\sqrt{\omega}\sqrt{\rho}\,(h-y)}{\sqrt{\mu}}\right)U}{\cosh\left(\frac{(-1)^{\frac{1}{4}}\,h\sqrt{\omega}\sqrt{\rho}}{\sqrt{\mu}}\right)}$$

上式と (8.6.11) 式を (8.6.10) 式に代入し、

$$\mathrm{u}(t,y)=\frac{e^{i\,\omega\,t}\cosh\left(\frac{(-1)^{\frac{1}{4}}\sqrt{\omega}\sqrt{\rho}\,(h-y)}{\sqrt{\mu}}\right)U}{\cosh\left(\frac{(-1)^{\frac{1}{4}}\,h\sqrt{\omega}\sqrt{\rho}}{\sqrt{\mu}}\right)} \tag{8.6.14}$$

上式の実部をとれば流速分布：$u(y,t)$ が得られるが、式が非常に長くなるので、記述を省略する。

```
PL1:subst([\omega=1,U=1,\mu=1,\rho=1,y=x],
 rhs(EQU2));
h:5;
plot2d([subst([t=0],PL1),
 subst([t=0.785],PL1),subst([t=1.57],PL1),
 subst([t=2.355],PL1),subst([t=3.14],PL1),
 subst([t=3.925],PL1),subst([t=4.71],PL1),
 subst([t=5.495],PL1)],[x,0,h],[legend,
 "t=0","t=0.785","t=1.57", "t=2.355",
 "t=3.14", "t=3.925","t=4.71",
 "t=5.495"]);
h:2;
plot2d([subst([t=0],PL1),
 subst([t=0.785],PL1),subst([t=1.57],PL1),
 subst([t=2.355],PL1),subst([t=3.14],PL1),
 subst([t=3.925],PL1),subst([t=4.71],PL1),
 subst([t=5.495],PL1)],[x,0,h],[legend,
 "t=0", "t=0.785","t=1.57", "t=2.355",
 "t=3.14", "t=3.925","t=4.71",
 "t=5.495"]);
```

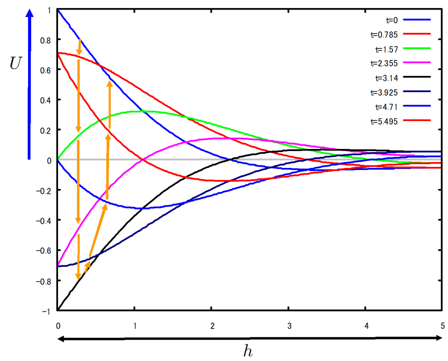


図 8.6.7: 自由表面を有する振動平板による流れ　$h=5$

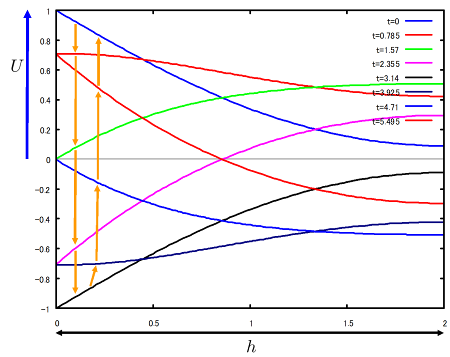


図 8.6.8: 自由表面を有する振動平板による流れ　$h=2$

8.6.4 平行平板内での変動圧力勾配による流れ

平行平板間隔：$2h$ 内で圧力勾配が円周波数：ω で変動している粘性流れを求める。x-y-z 座標軸の各速度コンポーネントを u, v, w とする。水平振動方向を x 軸とし、鉛直方向をを y 軸とする。圧力：p、粘性係数：μ とする。

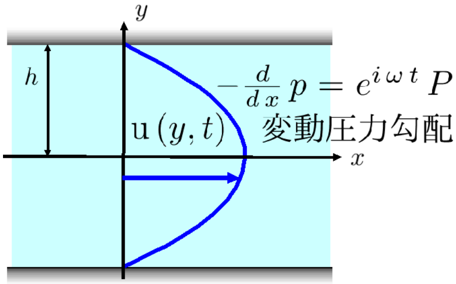


図 8.6.9: 平行平板内での変動圧力勾配による流れ

```
/* 平行平板内での変動圧力勾配による流れ h：有
限 */
kill(all);
MAS1:'diff(w,z,1)+'diff(v,y,1)+'diff(u,x,1)
 =0;
NAV1:matrix([\rho*(('diff(u,z,1))*w
 +('diff(u,y,1))*v+u*('diff(u,x,1))
 +'diff(u,t,1))],[\rho*(('diff(v,z,1))*w
 +v*('diff(v,y,1))+u*('diff(v,x,1))
 +'diff(v,t,1))],[\rho*(w*('diff(w,z,1))
 +v*('diff(w,y,1))+u*('diff(w,x,1))
 +'diff(w,t,1))])=matrix([X+mu*(
 'diff(u,z,2) +'diff(u,y,2)+'diff(u,x,2))
 -'diff(p,x,1)],[Y+mu*('diff(v,z,2)
 +'diff(v,y,2)+'diff(v,x,2))-'diff(p,y,1)]
 ,[Z+mu*('diff(w,z,2)+'diff(w,y,2)
 +'diff(w,x,2))-'diff(p,z,1)]);
NAV2:lhs(NAV1)[1][1]=rhs(NAV1)[1][1];
NAV3:lhs(NAV1)[2][1]=rhs(NAV1)[2][1];
subst([u=u(y,t),v=0,w=0,X=0,'diff(p,x,1)
 =-P*%e^(%i*\omega*t)],NAV2);
NAV21:ev(%,diff);
U0:u(y,t)=U(t)+u1(y,t);
subst([U0],NAV21);
NAV22:expand(ev(%,diff));
NAV31:last(lhs(%))=first(rhs(%));
NAV32:NAV22-NAV31;
```

x 軸方向の Navier-Stokes の式は (8.1.9) 式から、

$$\rho\left(\left(\frac{d}{dz}u\right)w+\left(\frac{d}{dy}u\right)v+u\left(\frac{d}{dx}u\right)+\frac{d}{dt}u\right)$$
$$=X+\mu\left(\frac{d^2}{dz^2}u+\frac{d^2}{dy^2}u+\frac{d^2}{dx^2}u\right)-\frac{d}{dx}p$$

流速は x 軸方向のみで、時間:t と y の関数で、$u=u(y,t)$ とする。圧力：p は $-\frac{d}{dx}p=e^{i\omega t}P$ で変動しているものとする。これから運動方程式は下記となる。

$$\rho\left(\frac{d}{dt}\mathrm{u}(y,t)\right)=e^{i\omega t}P+\mu\left(\frac{d^2}{dy^2}\mathrm{u}(y,t)\right) \tag{8.6.15}$$

流速：$u(y,t)$ を下記のように、粘性の影響項：$\mathrm{u1}(y,t)$ と圧力による主流流速：$\mathrm{U}(t)$ に分ける。

$$\mathrm{u}(y,t)=\mathrm{u1}(y,t)+\mathrm{U}(t) \tag{8.6.16}$$

上式を (8.6.15) 式に代入し、

$$\rho\left(\frac{d}{dt}\mathrm{u1}(y,t)\right)+\rho\left(\frac{d}{dt}\mathrm{U}(t)\right)$$
$$=e^{i\omega t}P+\mu\left(\frac{d^2}{dy^2}\mathrm{u1}(y,t)\right)$$

上式から下記の運動方程式に分けられる。

$$\rho\left(\frac{d}{dt}\mathrm{U}(t)\right)=e^{i\omega t}P \tag{8.6.17}$$

$$\rho\left(\frac{d}{dt}\mathrm{u1}(y,t)\right)=\mu\left(\frac{d^2}{dy^2}\mathrm{u1}(y,t)\right) \tag{8.6.18}$$

```
ode2(NAV31,U(t),t);
UT1:subst([%c=0],%);
UYT1:u1(y,t)=f(y)*g(t);
subst([UYT1],NAV32);
ev(%,diff);
EQ1:%/f(y)/g(t)/\rho;
EQT1:lhs(EQ1)=C;
EQY1:rhs(EQ1)=C;
EQT2:ode2(EQT1,g(t),t);
EQT21:subst([C=%i*\omega],EQT2);
assume(C>0,\mu>0,\rho>0,\omega>0);
EQY2:ode2(EQY1,f(y),y);
subst([C=%i*\omega],EQY2);
EQY3:f(y)=%k1*sinh(((-1)^(1/4)*sqrt(omega)
 *sqrt(rho)*y)/sqrt(mu))+%k2*cosh(((-1)^
 (1/4)*sqrt(omega)*sqrt(rho)*y)/sqrt(mu));
subst([y=h],rhs(EQY3))=-U(t)/(%e^(%i
 *\omega*t));
subst([%k1=0,UT1],%);
solve(%,%k2)[1];
EQY4:subst([%k1=0,%],EQY3);
U11:lhs(UYT1)=subst([%c=1],rhs(EQT21))
 *rhs(EQY4);
```

```
U12:factor(subst([UT1,U11],U0));
U13:lhs(%)=realpart(rhs(%));
subst([y=h],U12);
factor(subst([y=h],U13));
subst([y=0],U12);
factor(subst([y=0],U13));
```

(8.6.17) 式を $ode2$ 関数で解いて、

$$\mathrm{U}\left(t\right)=\%c-\frac{i\,e^{i\,\omega\,t}\,P}{\omega\,\rho}=-\frac{i\,e^{i\,\omega\,t}\,P}{\omega\,\rho}=\frac{\sin\left(\omega\,t\right)\,P}{\omega\,\rho} \tag{8.6.19}$$

$u1(y,t)$ を下記の変数分離法で解く。

$$\mathrm{u1}\left(y,t\right)=\mathrm{g}\left(t\right)\,\mathrm{f}\left(y\right) \tag{8.6.20}$$

(8.6.18) 式に上式を代入し、

$$\rho\,\left(\frac{d}{d\,t}\,\left(\mathrm{g}\left(t\right)\,\mathrm{f}\left(y\right)\right)\right)=\mu\,\left(\frac{d^2}{d\,y^2}\,\left(\mathrm{g}\left(t\right)\,\mathrm{f}\left(y\right)\right)\right)$$

整理して、

$$\frac{\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{g}\left(t\right)}{\mathrm{g}\left(t\right)}=\frac{\mu\,\left(\frac{d^2}{d\,y^2}\,\mathrm{f}\left(y\right)\right)}{\rho\,\mathrm{f}\left(y\right)}=C$$

上式を $ode2$ 関数で解いて、

$$\mathrm{g}\left(t\right)=\%c\,e^{t\,C}$$
$$\mathrm{f}\left(y\right)=\%k1\,e^{\frac{\sqrt{\rho}\,y\,\sqrt{C}}{\sqrt{\mu}}}+\%k2\,e^{-\frac{\sqrt{\rho}\,y\,\sqrt{C}}{\sqrt{\mu}}}$$

振動問題であるから、$C=i\,\omega$ と置くと、

$$\begin{aligned}\mathrm{g}\left(t\right)=&\%c\,e^{i\,\omega\,t}\\ \mathrm{f}\left(y\right)=&\%k1\,e^{\frac{(-1)^{\frac{1}{4}}\,\sqrt{\omega}\,\sqrt{\rho}\,y}{\sqrt{\mu}}}+\%k2\,e^{-\frac{(-1)^{\frac{1}{4}}\,\sqrt{\omega}\,\sqrt{\rho}\,y}{\sqrt{\mu}}}\end{aligned} \tag{8.6.21}$$

また、$\mathrm{f}\left(y\right)$ を下記のようにも表現できる。

$$\begin{aligned}\mathrm{f}\left(y\right)=&\%k1\sinh\left(\frac{(-1)^{\frac{1}{4}}\,\sqrt{\omega}\,\sqrt{\rho}\,y}{\sqrt{\mu}}\right)\\ &+\%k2\cosh\left(\frac{(-1)^{\frac{1}{4}}\,\sqrt{\omega}\,\sqrt{\rho}\,y}{\sqrt{\mu}}\right)\end{aligned} \tag{8.6.22}$$

境界条件として、$y=h$ で $\mathrm{u}\left(h,t\right)=0$ であるから、$\mathrm{f}\left(y\right)$ の境界条件は下記となる。

$$\begin{aligned}&\%k1\sinh\left(\frac{(-1)^{\frac{1}{4}}\,h\,\sqrt{\omega}\,\sqrt{\rho}}{\sqrt{\mu}}\right)\\ &\quad+\%k2\cosh\left(\frac{(-1)^{\frac{1}{4}}\,h\,\sqrt{\omega}\,\sqrt{\rho}}{\sqrt{\mu}}\right)\\ &=-e^{-i\,\omega\,t}\,\mathrm{U}\left(t\right)\end{aligned}$$

対称性から $\%k1=0$ で、上式を整理すると、

$$\%k2\cosh\left(\frac{(-1)^{\frac{1}{4}}\,h\,\sqrt{\omega}\,\sqrt{\rho}}{\sqrt{\mu}}\right)=\frac{i\,P}{\omega\,\rho}$$

上式から、

$$\%k2=\frac{i\,P}{\omega\cosh\left(\frac{(-1)^{\frac{1}{4}}\,h\,\sqrt{\omega}\,\sqrt{\rho}}{\sqrt{\mu}}\right)\,\rho}$$

$\%k1=0$ および上式を (8.6.21) 式に代入し、

$$\mathrm{f}\left(y\right)=\frac{i\cosh\left(\frac{(-1)^{\frac{1}{4}}\,\sqrt{\omega}\,\sqrt{\rho}\,y}{\sqrt{\mu}}\right)\,P}{\omega\cosh\left(\frac{(-1)^{\frac{1}{4}}\,h\,\sqrt{\omega}\,\sqrt{\rho}}{\sqrt{\mu}}\right)\,\rho}$$

上式と (8.6.21) 式を (8.6.20) 式に代入し、

$$\mathrm{u1}\left(y,t\right)=\frac{i\,e^{i\,\omega\,t}\cosh\left(\frac{(-1)^{\frac{1}{4}}\,\sqrt{\omega}\,\sqrt{\rho}\,y}{\sqrt{\mu}}\right)\,P}{\omega\cosh\left(\frac{(-1)^{\frac{1}{4}}\,h\,\sqrt{\omega}\,\sqrt{\rho}}{\sqrt{\mu}}\right)\,\rho}$$

上式を (8.6.16) 式に代入し、

$$\begin{aligned}\mathrm{u}\left(y,t\right)=&\frac{i\,e^{i\,\omega\,t}}{\omega\cosh\left(\frac{(-1)^{\frac{1}{4}}\,h\,\sqrt{\omega}\,\sqrt{\rho}}{\sqrt{\mu}}\right)\,\rho}\\ &\left(\cosh\left(\frac{(-1)^{\frac{1}{4}}\,\sqrt{\omega}\,\sqrt{\rho}\,y}{\sqrt{\mu}}\right)\right.\\ &\left.-\cosh\left(\frac{(-1)^{\frac{1}{4}}\,h\,\sqrt{\omega}\,\sqrt{\rho}}{\sqrt{\mu}}\right)\right)\,P\end{aligned} \tag{8.6.23}$$

上式の実部をとれば流速分布 : $u(y,t)$ が得られるが、式が非常に長くなるので、記述を省略する。

(1) 平行平板間隔 : $2h$ が十分狭い場合

```
COSH1:cosh(a);
taylor(%,a,0,7);
COSH11:lhs(COSH1)=rest(%,-2);
COSH12:subst([a=((-1)^(1/4)*sqrt(omega)
 *sqrt(rho)*y)/sqrt(mu)],COSH11);
COSH13:subst([a=((-1)^(1/4)*sqrt(omega)
 *sqrt(rho)*h)/sqrt(mu)],COSH11);
U121:subst([COSH12,COSH13],U12);
U122:lha(U121)=num(rhs(U121))/\omega/\rho;
factor(%);
U123:lhs(U121)=realpart(rhs(%));
```

h が十分小さい場合について検討する。$\cosh\left(a\right)$ は a が小さい場合、

$$\cosh\left(a\right)=1+\frac{a^2}{2}+\frac{a^4}{24}+\frac{a^6}{720}+...\approx=\frac{a^2}{2}+1$$

(8.6.23) 式中の cosh 項を上式で近似すると、

$$\cosh\left(\frac{(-1)^{\frac{1}{4}}\,\sqrt{\omega}\,\sqrt{\rho}\,y}{\sqrt{\mu}}\right)=\frac{i\,\omega\,\rho\,y^2}{2\,\mu}+1$$

$$\cosh\left(\frac{(-1)^{\frac{1}{4}}\,h\,\sqrt{\omega}\,\sqrt{\rho}}{\sqrt{\mu}}\right)=\frac{i\,h^2\,\omega\,\rho}{2\,\mu}+1$$

上式を (8.6.23) 式に代入し、更に、

$$\mathrm{u}\,(y,t) = \frac{i\,e^{i\,\omega\,t}\,\left(\frac{i\,\omega\,\rho\,y^2}{2\,\mu} - \frac{i\,h^2\,\omega\,\rho}{2\,\mu}\right)\,P}{\omega\,\rho\,\left(\frac{i\,h^2\,\omega\,\rho}{2\,\mu}+1\right)}$$

$$= \frac{i\,e^{i\,\omega\,t}\,\left(\frac{i\,\omega\,\rho\,y^2}{2\,\mu} - \frac{i\,h^2\,\omega\,\rho}{2\,\mu}\right)\,P}{\omega\,\rho}$$

上式の実部をとれば流速分布：$u(y,t)$ は下記の二次式となる。これは各瞬間、各瞬間、圧力勾配による「8.2.1 二枚の平板間の流れ (Couette Flow)、346 頁」の定常流れの流速分布となっている。

$$\mathrm{u}\,(y,t) = -\frac{\cos(\omega\,t)\,(y-h)\,(y+h)\,P}{2\,\mu}$$

```
PL1:subst([\omega=1,P=1,\mu=1,\rho=1,y=x],
 rhs(U13));
h:100;
plot2d([subst([t=0],PL1),
 subst([t=0.785],PL1),subst([t=1.57],PL1),
 subst([t=2.355],PL1),subst([t=3.14],PL1),
 subst([t=3.925],PL1),subst([t=4.71],PL1),
 subst([t=5.495],PL1)],[x,-h,h],[legend,
 "t=0", "t=0.785","t=1.57", "t=2.355",
 "t=3.14", "t=3.925","t=4.71", "t=5.495"]);
plot2d([subst([t=0],PL1),
 subst([t=0.785],PL1),subst([t=1.57],PL1),
 subst([t=2.355],PL1),subst([t=3.14],PL1),
 subst([t=3.925],PL1),subst([t=4.71],PL1),
 subst([t=5.495],PL1)],[x,0.9*h,h],[legend,
 "t=0", "t=0.785","t=1.57", "t=2.355",
 "t=3.14", "t=3.925","t=4.71", "t=5.495"]);
h:5;
plot2d([subst([t=0],PL1),
 subst([t=0.785],PL1),subst([t=1.57],PL1),
 subst([t=2.355],PL1),subst([t=3.14],PL1),
 subst([t=3.925],PL1),subst([t=4.71],PL1),
 subst([t=5.495],PL1)],[x,-h,h],[legend,
 "t=0","t=0.785","t=1.57", "t=2.355",
 "t=3.14", "t=3.925","t=4.71", "t=5.495"]);
 h:0.1;
plot2d([subst([t=0],PL1),
 subst([t=0.785],PL1),subst([t=1.57],PL1),
 subst([t=2.355],PL1),subst([t=3.14],PL1),
 subst([t=3.925],PL1),subst([t=4.71],PL1),
 subst([t=5.495],PL1)],[x,-h,h],[legend,
 "t=0", "t=0.785","t=1.57", "t=2.355",
 "t=3.14", "t=3.925","t=4.71", "t=5.495"]);
```

下記に種々の平板間隔：h の流速分布を示す。圧力変動：P と主流：$U(t)$ の関係は、下記で位相が $\pi/2$ ずれている。

$$P = P\cos(\omega\,t)\,,\quad \mathrm{U}\,(t) = \frac{\sin(\omega\,t)\,P}{\omega\,\rho}$$

間隔：h が広い場合には、中央部分では主流：$U(t)$ の流れで、壁面に近い境界層部分は圧力変動の影響を受けた流れとなっており、主流とは位相が異なる。また、間隔：h が非常に狭い場合には、圧力変動による流れのみで、各瞬間、各瞬間、定常流れの流速分布となっている。

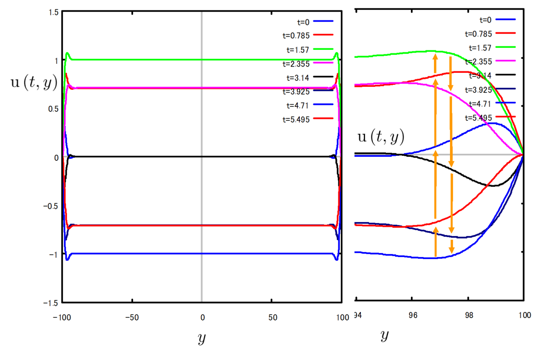


図 8.6.10:　平行平板内での変動圧力勾配による流れ $h = 100$

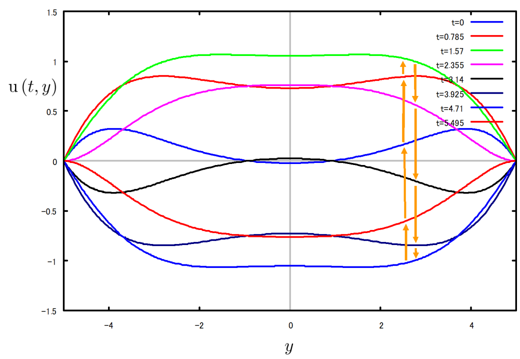


図 8.6.11:　平行平板内での変動圧力勾配による流れ $h = 5$

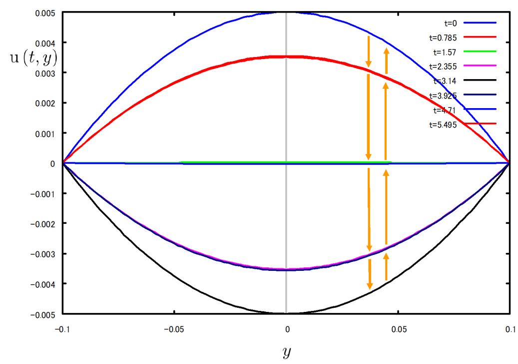


図 8.6.12:　平行平板内での変動圧力勾配による流れ $h = 0.1$

8.6.5　円管内での変動圧力勾配による流れ

半径:R の円管内で圧力勾配が円周波数：ω で変動している粘性流れを求める [1]。円柱座標系の $r-\theta-z$ 座標軸の各速度コンポーネントを v_r, v_θ, v_z とする。水平振動方向を z 軸とし、鉛直方向をを r 軸とする。圧力：p、粘性係数：μ とする。

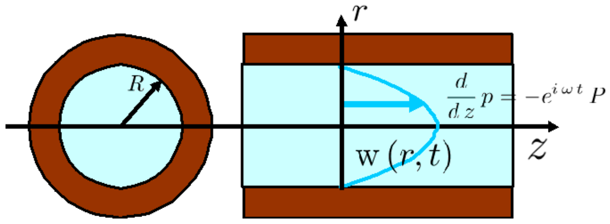


図 8.6.13: 円管内での変動圧力勾配による流れ

```
/* 円管内での変動圧力勾配による流れ */
kill(all);
MAS2:'diff(v[z],z,1)+'diff(v[theta],theta,
 1)/r+'diff(v[r],r,1)+v[r]/r=0;
NAV2:matrix([rho*(('diff(v[r],z,1))*v[z]
 -v[theta]^2/r+(('diff(v[r],theta,1))
 *v[theta])/r+'diff(v[r],t,1)+v[r]
 *('diff(v[r],r,1)))],[rho*(('diff(
 v[theta],z,1))*v[z]+(v[theta]*(
 'diff(v[theta],theta,1)))/r+'diff(
 v[theta],t,1)+v[r]*('diff(v[theta],r,1
 ))+(v[r]*v[theta])/r)],[rho*(v[z]* ('
 diff(v[z],z,1))+(v[theta]*('diff(v[z],
 theta,1)))/r+'diff(v[z],t,1)+v[r]*('diff(
 v[z],r,1)))])=matrix([mu*(-(2*('diff(
 v[theta],theta,1)))/r^2+'diff(v[r],z,2)
 +'diff(v[r],theta,2)/r^2+'diff(v[r],r,2)
 +'diff(v[r],r,1)/r-v[r]/r^2)+F[r]
 -'diff(p,r,1)],[mu*('diff(v[theta],z,2)
 +'diff(v[theta],theta,2)/r^2+'diff(
 v[theta],r,2)+'diff(v[theta],r,1)/r
 -v[theta]/r^2+(2*('diff(v[r],theta,1)))
 /r^2)+F[theta]-'diff(p,theta,1)/r],[mu*
 ('diff(v[z],z,2)+'diff(v[z],theta,2)/r^2
 +'diff(v[z],r,2)+'diff(v[z],r,1)/r)
 +F[z]-'diff(p,z,1)]);
NAV20:lhs(NAV2)[3][1]=rhs(NAV2)[3][1];
P1:'diff(p,z,1)=-P*%e^(%i*\omega*t);
subst([v[\theta]=0,v[r]=0,F[z]=0,v[z]
 =w(r,t),P1],NAV20);
```

```
NAV21:ev(%,diff);
W0:w(r,t)=W(t)+w1(r,t);
subst([W0],NAV21);
NAV22:expand(ev(%,diff));
NAV31:first(lhs(%))=first(rhs(%));
NAV32:NAV22-NAV31;
```

円柱座標系の z 軸方向 Navier-Stokes の式は (8.1.15) 式から、

$$
\begin{aligned}
&\rho\left(v_z\left(\frac{d}{d\,z}\,v_z\right)+\frac{v_\theta\left(\frac{d}{d\,\theta}\,v_z\right)}{r}+\frac{d}{d\,t}\,v_z\right.\\
&\qquad\left.+v_r\left(\frac{d}{d\,r}\,v_z\right)\right)\\
&\quad=\mu\left(\frac{d^2}{d\,z^2}\,v_z+\frac{\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,v_z}{r^2}+\frac{d^2}{d\,r^2}\,v_z+\frac{\frac{d}{d\,r}\,v_z}{r}\right)\\
&\qquad+F_z-\frac{d}{d\,z}\,p
\end{aligned}
$$

流速は z 軸方向のみで、時間：t と r の関数で、$v_z = w(r,t)$ とする。圧力：p は次式のように変動しているものとする。

$$
\frac{d}{d\,z}\,p=-e^{i\,\omega\,t}\,P \tag{8.6.24}
$$

これから運動方程式は下記となる。

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{w}\left(r,t\right)\right)\,\rho=e^{i\,\omega\,t}\,P\\
&\qquad+\mu\left(\frac{d^2}{d\,r^2}\,\mathrm{w}\left(r,t\right)+\frac{\frac{d}{d\,r}\,\mathrm{w}\left(r,t\right)}{r}\right)
\end{aligned}
\tag{8.6.25}
$$

流速：$w(r,t)$ を下記のように、粘性の影響項：$\mathrm{w1}\left(r,t\right)$ と圧力による主流流速：$\mathrm{W}\left(t\right)$ に分ける。

$$
\mathrm{w}\left(r,t\right)=\mathrm{W}\left(t\right)+\mathrm{w1}\left(r,t\right) \tag{8.6.26}
$$

上式を (8.6.25) 式に代入し、

$$
\begin{aligned}
&\rho\left(\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{W}\left(t\right)\right)+\left(\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{w1}\left(r,t\right)\right)\,\rho\\
&\quad=e^{i\,\omega\,t}\,P+\mu\left(\frac{d^2}{d\,r^2}\,\mathrm{w1}\left(r,t\right)\right)\\
&\qquad+\frac{\mu\left(\frac{d}{d\,r}\,\mathrm{w1}\left(r,t\right)\right)}{r}
\end{aligned}
$$

上式から下記の運動方程式に分けられる。

$$
\rho\left(\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{W}\left(t\right)\right)=e^{i\,\omega\,t}\,P \tag{8.6.27}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{w1}\left(r,t\right)\right)\,\rho=\mu\left(\frac{d^2}{d\,r^2}\,\mathrm{w1}\left(r,t\right)\right)\\
&\qquad+\frac{\mu}{r}\left(\frac{d}{d\,r}\,\mathrm{w1}\left(r,t\right)\right)
\end{aligned}
\tag{8.6.28}
$$

[1] Dr Harmann Schlihting : Boundary Layer Theory [12]), 11.e.2 Oscillating flow through a pipe, P.229

```
ode2(NAV31,W(t),t);
WT1:subst([%c=0],%);
WRT1:w1(r,t)=a(r)*b(t);
subst([WRT1],NAV32);
ev(%,diff);
EQ1:expand(%/a(r)/b(t)/\rho);
EQT1:lhs(EQ1)=C;
EQR1:rhs(EQ1)=C;
EQT2:ode2(EQT1,b(t),t);
EQT21:subst([C=%i*\omega,%c=1],EQT2);
expand(EQR1/\mu*a(r)*\rho);
lhs(%)-rhs(%)=0;
EQR11:subst([a(r)=v(x),r=x,C=%i*\omega],%);
B1:B^2=coeff(lhs(EQR11),v(x));
B2:subst([C=%i*\omega],B1);
```

(8.6.27) 式を $ode2$ 関数で解いて、

$$\mathrm{W}\left(t\right)=\%c-\frac{i\,e^{i\,\omega\,t}\,P}{\omega\,\rho}=-\frac{i\,e^{i\,\omega\,t}\,P}{\omega\,\rho} \tag{8.6.29}$$

$w1(r,t)$ を下記の変数分離法で解く。

$$\mathrm{w1}\left(r,t\right)=\mathrm{a}\left(r\right)\,\mathrm{b}\left(t\right) \tag{8.6.30}$$

(8.6.28) 式に上式を代入し、

$$\begin{aligned}\mathrm{a}\left(r\right)\,\rho\,\left(\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{b}\left(t\right)\right)=&\mu\,\left(\frac{d^2}{d\,r^2}\,\mathrm{a}\left(r\right)\right)\,\mathrm{b}\left(t\right)\\&+\frac{\mu}{r}\,\left(\frac{d}{d\,r}\,\mathrm{a}\left(r\right)\right)\,\mathrm{b}\left(t\right)\end{aligned}$$

整理すると、

$$\frac{\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{b}\left(t\right)}{\mathrm{b}\left(t\right)}=\frac{\mu\,\left(\frac{d^2}{d\,r^2}\,\mathrm{a}\left(r\right)\right)}{\mathrm{a}\left(r\right)\,\rho}+\frac{\mu\,\left(\frac{d}{d\,r}\,\mathrm{a}\left(r\right)\right)}{r\,\mathrm{a}\left(r\right)\,\rho}=C \tag{8.6.31}$$

上式左辺項から、

$$\frac{\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{b}\left(t\right)}{\mathrm{b}\left(t\right)}=C$$

上式を $ode2$ 関数で解いて、振動問題で、$C=i\,\omega$ であるから、

$$\mathrm{b}\left(t\right)=\%c\,e^{t\,C}=\%c\,e^{i\,\omega\,t} \tag{8.6.32}$$

(8.6.31) 式右辺項から、

$$\frac{\mu\,\left(\frac{d^2}{d\,r^2}\,\mathrm{a}\left(r\right)\right)}{\mathrm{a}\left(r\right)\,\rho}+\frac{\mu\,\left(\frac{d}{d\,r}\,\mathrm{a}\left(r\right)\right)}{r\,\mathrm{a}\left(r\right)\,\rho}=C$$

整理して、

$$\frac{\mathrm{a}\left(r\right)\,\rho\,C}{\mu}+\frac{d^2}{d\,r^2}\,\mathrm{a}\left(r\right)+\frac{\frac{d}{d\,r}\,\mathrm{a}\left(r\right)}{r}=0$$

$C=i\,\omega$ を代入し、変数を $a(r)\rightarrow \mathrm{v}\left(x\right)$ に変えて、

$$\frac{d^2}{d\,x^2}\,\mathrm{v}\left(x\right)+\frac{\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{v}\left(x\right)}{x}-\frac{i\,\omega\,\rho\,\mathrm{v}\left(x\right)}{\mu}=0 \tag{8.6.33}$$

```
A:0;
C:1;
B:sqrt(rhs(B2));
N:0;
EQ:EQR11;
FC:v(r);
VA:r;
FCTR:u(t);
VATR:t;
TRFC:v(x)=f(t)*u(t)+g(x);
TRFCVA:f(t)=(t/B)^(A/C);
TRFCG:g(x)=0;
subst(rhs(TRFCVA),lhs(TRFCVA),TRFC);
TRFC0:subst(rhs(TRFCG),lhs(TRFCG),%);
TRFC1:solve(TRFC0,FCTR)[1];
TRVA:t=B*x^C;
TRVA1:x=(t/B)^(1/C);
assume(t>0);
EQTRFC:EQ;
DVX1:'diff(v(x),x,1)='diff(u(t),t,1)*
 1/(diff(rhs(TRVA1),t,1));
DVX2:'diff(v(x),x,2)='diff(u(t),t,2)*
 1/(diff(rhs(TRVA1),t,1)^2);
subst([DVX1,DVX2,TRFC0,TRVA1],EQTRFC);
expand(-%*\mu/%i/\omega/\rho);
```

(8.6.33) 式は、このままでは $ode2$ 関数で解けないので、下記の式に (8.6.33) 式を当てはめ、A,B,C,N を求め変数変換を行う。(参照：Maxima を使った微分方程式演習ノート 4.5 Bessel の微分方程式（23 頁））

$$\begin{aligned}&\frac{d^2}{d\,x^2}\,v\left(x\right)+\frac{\left(1-2\,A\right)}{x}\,\frac{d}{d\,x}\,v\left(x\right)\\&+\left(\frac{A^2-C^2\,N^2}{x^2}+x^{2\,C-2}\,B^2\,C^2\right)\,v\left(x\right)=0\end{aligned}$$

$$v\left(x\right)=u\left(t\right)\,\left(\frac{t}{B}\right)^{\frac{A}{C}}$$

$$x=\left(\frac{t}{B}\right)^{\frac{1}{C}}$$

以上から、$A=0,C=1,B=\sqrt{-\frac{i\,\omega\,\rho}{\mu}},N=0$ となり、下記の変換関数となる。

$$\mathrm{v}\left(x\right)=\mathrm{u}\left(t\right),\quad t=\sqrt{-\frac{i\,\omega\,\rho}{\mu}}\,x \tag{8.6.34}$$

上式から、下記の関係が得られる。

$$\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{v}\left(x\right)=\sqrt{-\frac{i\,\omega\,\rho}{\mu}}\,\left(\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{u}\left(t\right)\right)$$

$$\frac{d^2}{d\,x^2}\,\mathrm{v}\left(x\right)=-\frac{i\,\omega\,\rho\,\left(\frac{d^2}{d\,t^2}\,\mathrm{u}\left(t\right)\right)}{\mu}$$

上式を (8.6.33) 式に代入し、整理すると、

$$\frac{d^2}{d\,t^2}\,\mathrm{u}\,(t)+\frac{\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{u}\,(t)}{t}+\mathrm{u}\,(t)=0 \tag{8.6.35}$$

```
ode2(%,u(t),t);
subst([u(t)=a(r),TRVA,x=r],%);
EQR2:subst([%k2=0],%);
ANS1:subst([WT1,WRT1,EQR2,EQT21],W0);
subst([t=0,r=R],rhs(ANS1))=0;
solve(%,%k1)[1];
ANS2:subst([%],ANS1);
```

(8.6.35) 式を $ode2$ 関数で解くと、

$$\mathrm{u}\,(t)=\mathrm{bessel\_y}\,(0,t)\ \%k2+\mathrm{bessel\_j}\,(0,t)\ \%k1$$

変数変換:(8.6.34) 式を上式に代入し、$v(x)\to a(r)$ に変えて、

$$\begin{aligned}\mathrm{a}\,(r)=&\mathrm{bessel\_y}\left(0,r\,\sqrt{-\frac{i\,\omega\,\rho}{\mu}}\right)\ \%k2\\&+\mathrm{bessel\_j}\left(0,r\,\sqrt{-\frac{i\,\omega\,\rho}{\mu}}\right)\ \%k1\end{aligned}$$

z 軸に対称であるから $\%k2=0$ として、

$$\mathrm{a}\,(r)=\mathrm{bessel\_j}\left(0,r\,\sqrt{-\frac{i\,\omega\,\rho}{\mu}}\right)\ \%k1$$

上式、(8.6.29) 式、(8.6.30) 式、(8.6.32) 式を (8.6.26) 式に代入すると、

$$\begin{aligned}\mathrm{w}\,(r,t)=&\mathrm{bessel\_j}\left(0,r\,\sqrt{-\frac{i\,\omega\,\rho}{\mu}}\right)\ \%k1\,e^{i\,\omega\,t}\\&-\frac{i\,e^{i\,\omega\,t}\,P}{\omega\,\rho}\end{aligned} \tag{8.6.36}$$

境界条件として、上式を $e^{i\,\omega\,t}$ で割り、$r=R$ で $\mathrm{w}\,(r,t)=0$ であるから、

$$\mathrm{bessel\_j}\left(0,\sqrt{-\frac{i\,\omega\,\rho}{\mu}}\,R\right)\ \%k1-\frac{i\,P}{\omega\,\rho}=0$$

上式から、

$$\%k1=\frac{i\,P}{\mathrm{bessel\_j}\left(0,\sqrt{-\frac{i\,\omega\,\rho}{\mu}}\,R\right)\,\omega\,\rho}$$

上式を (8.6.36) 式に代入し、下記の流速分布 : $\mathrm{w}\,(r,t)$ が得られた。しかし、次式の実部は容易に得られないので、以降に円管径が十分小さい場合と十分大きい場合について、流速分布を求める。

$$\begin{aligned}\mathrm{w}\,(r,t)=&\frac{i\,\mathrm{bessel\_j}\left(0,r\,\sqrt{-\frac{i\,\omega\,\rho}{\mu}}\right)\,e^{i\,\omega\,t}\,P}{\mathrm{bessel\_j}\left(0,\sqrt{-\frac{i\,\omega\,\rho}{\mu}}\,R\right)\,\omega\,\rho}\\&-\frac{i\,e^{i\,\omega\,t}\,P}{\omega\,\rho}\end{aligned} \tag{8.6.37}$$

(1) 円管径 : R が十分細い場合

```
BES1:bessel_j(0,d);
taylor(%,d,0,7);
BES11:BES1=rest(%,-2);
BES12:subst([d=r*sqrt(-(%i*omega*rho)/mu)]
 ,BES11);
BES13:subst([d=R*sqrt(-(%i*omega*rho)/mu)]
 ,BES11);
subst([BES12,BES13],ANS2);
factor(%);
subst([R^2=0],%);
lhs(%)=realpart(rhs(%));
```

下記の Bessel 関数の d が十分小さい場合、Taylor 展開し、高次の項を省略し、下記の関係が得られる。

$$\mathrm{bessel\_j}\,(0,d)\approx 1-\frac{d^2}{4}+\frac{d^4}{64}-\frac{d^6}{2304}+...\approx 1-\frac{d^2}{4}$$

(8.6.37) 式の Bessel 関数項は上式から、

$$\begin{aligned}\mathrm{bessel\_j}\left(0,r\,\sqrt{-\frac{i\,\omega\,\rho}{\mu}}\right)=&\frac{i\,\omega\,r^2\,\rho}{4\,\mu}+1\\\mathrm{bessel\_j}\left(0,\sqrt{-\frac{i\,\omega\,\rho}{\mu}}\,R\right)=&\frac{i\,\omega\,\rho\,R^2}{4\,\mu}+1\end{aligned}$$

上式を (8.6.37) 式に代入し、整理すると次式の二次式の流速分布が得られる。これは各瞬間、各瞬間、圧力勾配による「8.2.2 円管内流れ (Hagen-Poiseuille Theory)、348 頁」の定常流れの流速分布となっている。

$$\begin{aligned}\mathrm{w}\,(r,t)=&\frac{i\,\left(\frac{i\,\omega\,r^2\,\rho}{4\,\mu}+1\right)\,e^{i\,\omega\,t}\,P}{\omega\,\rho\,\left(\frac{i\,\omega\,\rho\,R^2}{4\,\mu}+1\right)}-\frac{i\,e^{i\,\omega\,t}\,P}{\omega\,\rho}\\=&\frac{e^{i\,\omega\,t}\,P\,(R-r)\,(R+r)}{i\,\omega\,\rho\,R^2+4\,\mu}\\=&\frac{\cos\left(\omega\,t\right)\,P\,(R-r)\,(R+r)}{4\,\mu}\end{aligned} \tag{8.6.38}$$

(2) 円管径：R が十分太い場合

```
BES2:BES1=sqrt(2/%pi/d)*%e^(%i*d)*(%i^
 (-1/2));
BES21:BES1=sqrt(2/%pi/d)*cos(d-%pi/4);
assume(d>0);
assume(\omega>0,\rho>0,\mu>0,R>0,r>0);
BES1=factor(realpart(rhs(BES2)));
factor(trigexpand(BES21));
BES22:lhs(BES12)=subst([d=r*sqrt(-'(%i
 *omega*rho)/mu)],rhs(BES2));
BES23:lhs(BES13)=subst([d=R*sqrt(-(%i
 *omega*rho)/mu)],rhs(BES2));
subst([BES22,BES23],ANS2);
ANS3:lhs(%)=realpart(rhs(%));
```

下記の Bessel 関数の d が十分大きい場合、下記の Hankel の漸近展開の初項で近似できる。

$$\mathrm{bessel\_j}\left(0,d\right)=\frac{\sqrt{2}\cos\left(d-\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{\pi}\,\sqrt{d}}$$

上式の複素表示は、

$$\mathrm{bessel\_j}\left(0,d\right)=\frac{\sqrt{2}\,e^{i\,d}}{(-1)^{\frac{1}{4}}\,\sqrt{\pi}\,\sqrt{d}}$$

(8.6.37) 式の Bessel 関数項は上式から、

$$\mathrm{bessel\_j}\left(0,r\sqrt{-\frac{i\,\omega\,\rho}{\mu}}\right)=\frac{\sqrt{2}\,\mu^{\frac{1}{4}}\,e^{\frac{\sqrt{-i}\,i\,\sqrt{\omega}\,r\,\sqrt{\rho}}{\sqrt{\mu}}}}{(-1)^{\frac{1}{4}}\,\sqrt{\pi}\,(-i)^{\frac{1}{4}}\,\omega^{\frac{1}{4}}\,\sqrt{r}\,\rho^{\frac{1}{4}}}$$

$$\mathrm{bessel\_j}\left(0,\sqrt{-\frac{i\,\omega\,\rho}{\mu}}\,R\right)=\frac{\sqrt{2}\,\mu^{\frac{1}{4}}\,e^{\frac{\sqrt{-i}\,i\,\sqrt{\omega}\,\sqrt{\rho}\,R}{\sqrt{\mu}}}}{(-1)^{\frac{1}{4}}\,\sqrt{\pi}\,(-i)^{\frac{1}{4}}\,\omega^{\frac{1}{4}}\,\rho^{\frac{1}{4}}\,\sqrt{R}}$$

上式を (8.6.37) 式に代入し、実部を整理すると次式の流速分布が得られる。

$$\begin{aligned}
\mathrm{w}\left(r,t\right)=&\frac{i\,P\,\sqrt{R}\,e^{-\frac{\sqrt{-i}\,i\,\sqrt{\omega}\,\sqrt{\rho}\,R}{\sqrt{\mu}}+i\,\omega\,t+\frac{\sqrt{-i}\,i\,\sqrt{\omega}\,r\,\sqrt{\rho}}{\sqrt{\mu}}}}{\omega\,\sqrt{r}\,\rho}\\
&-\frac{i\,e^{i\,\omega\,t}\,P}{\omega\,\rho}\\
=&\frac{P\,\sqrt{R}\,e^{\frac{\sqrt{\omega}\,\sqrt{\rho}}{\sqrt{2}\,\sqrt{\mu}}(r-R)}}{\omega\,\sqrt{r}\,\rho}\sin\left(\frac{\sqrt{\omega}\,\sqrt{\rho}\,(R-r)}{\sqrt{2}\,\sqrt{\mu}}-\omega\,t\right)\\
&+\frac{\sin\left(\omega\,t\right)\,P}{\omega\,\rho}
\end{aligned} \tag{8.6.39}$$

```
PL1:expand(subst([\omega=1,P=1,\mu=1,
 \rho=1,r=x],rhs(ANS3)));
R:10;
plot2d([subst([t=0],PL1),
 subst([t=0.785],PL1),subst([t=1.57],PL1),
 subst([t=2.355],PL1),subst([t=3.14],PL1),
 subst([t=3.925],PL1),subst([t=4.71],PL1),
 subst([t=5.495],PL1)],[x,0.000001,R],
 [legend, "t=0", "t=0.785","t=1.57",
 "t=2.355","t=3.14", "t=3.925","t=4.71",
 "t=5.495"]);
```

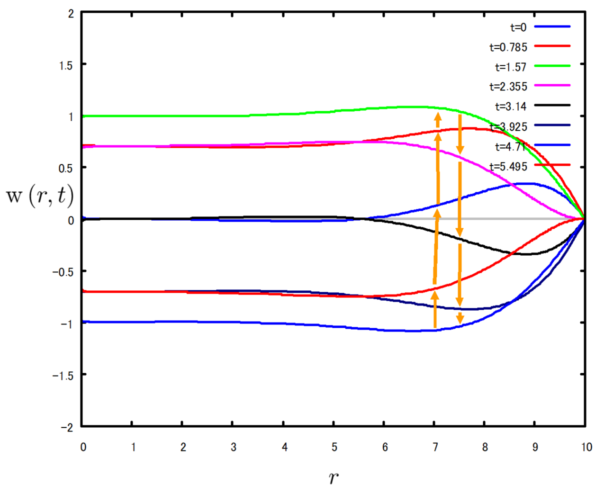


図 8.6.14: 円管内での変動圧力勾配による流れ　$R=10$

8.6.6　振動する円柱に作用する減衰力

半径:R の円柱が円周波数：ω で水平方向に振動速度：U_0 の振幅で振動している。このとき円柱に作用する減衰力について調べる [1]。境界層厚さが円柱の半径：R に比べ、十分小さいとする。このとき、「8.5.1 境界層の方程式」の二次元 $x-y$ 座標の境界層方程式を活用する。$x-y$ 座標軸の各速度コンポーネントを u, v とする。時間：t、圧力：p、密度：ρ、粘性係数：μ、動粘性係数：ν とする。

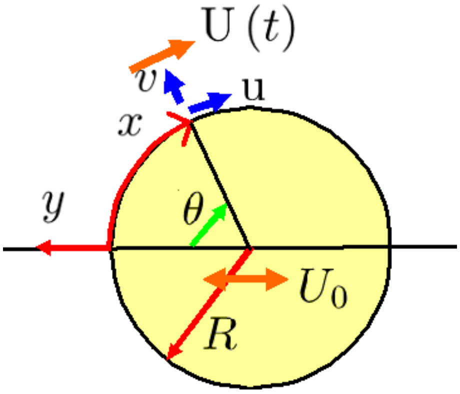


図 8.6.15: 振動する円柱

```
/* 振動する境界層 R-1 */
kill(all);
MAS1:'diff(v,y,1)+'diff(u,x,1)=0;
NAV2:('diff(u,y,1))*v+u*('diff(u,x,1))
 +'diff(u,t,1)=\nu*('diff(u,y,2))
 -'diff(p,x,1)/\rho;
subst([u=u(y,t),v=0,X=0,p=p(x,t)],NAV2);
NAV21:ev(%,diff);
NAV22:subst([\nu=0,u(y,t)=U(t)],NAV21);
P1:solve(NAV22,'diff(p(x,t),x,1))[1];
NAV41:subst([P1],NAV21);
U1:U(t)=U*%e^(%i*\omega*t);
U1R:lhs(U1)=realpart(rhs(U1));
NAV42:subst([U1],NAV41);
UY1:u(y,t)=U(t)+f(y)*g(t);
assume(\omega>0,\rho>0,\nu>0,C>0);
subst([UY1,U1],NAV42);
ev(%,diff);
%-%i*omega*%e^(%i*omega*t)*U;
GF1:%/g(t)/f(y);
GF11:lhs(GF1)=C;
GF12:rhs(GF1)=C;
GT1:ode2(GF11,g(t),t);
FY1:ode2(GF12,f(y),y);
```

[1]G. K. Batchelor：入門　流体力学 [18]、5.13(a) 振動する物体に働く減衰力 P.355

(8.5.2) 式から質量保存の方程式は、

$$\frac{d}{d\,y}\,v+\frac{d}{d\,x}\,u=0$$

(8.5.3) 式から Navier-Stokes の式は下記の境界層の方程式となる。

$$\left(\frac{d}{d\,y}\,u\right)\,v+u\,\left(\frac{d}{d\,x}\,u\right)+\frac{d}{d\,t}\,u=\nu\,\left(\frac{d^2}{d\,y^2}\,u\right)-\frac{\frac{d}{d\,x}\,p}{\rho}$$

今、質量項のうち、振動運動では、$\frac{d}{d\,t}\,u >> u\,\left(\frac{d}{d\,x}\,u\right)$ とでき、次式となる。また、$u \to u(y,t)$ に置き換える。

$$\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{u}\,(y,t)=\nu\,\left(\frac{d^2}{d\,y^2}\,\mathrm{u}\,(y,t)\right)-\frac{\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{p}\,(x,t)}{\rho} \tag{8.6.40}$$

ある位置：x における境界層の外界流:$\mathrm{U}\,(t)$ とすると、圧力：p との関係は上式より、

$$\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{U}\,(t)=-\frac{\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{p}\,(x,t)}{\rho}$$

上式を境界層方程式：(8.6.40) 式に代入すると、

$$\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{u}\,(y,t)=\nu\,\left(\frac{d^2}{d\,y^2}\,\mathrm{u}\,(y,t)\right)+\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{U}\,(t) \tag{8.6.41}$$

円柱上のある点の境界層の外界流:$\mathrm{U}\,(t)$、その振動流速振幅：U とすると、

$$\mathrm{U}\,(t)=e^{i\,\omega\,t}\,U\;=\cos\left(\omega\,t\right)\,U \tag{8.6.42}$$

境界層の内部流：$\mathrm{u}\,(y,t)$ を次式のように変数分離法で表現する

$$\mathrm{u}\,(y,t)=\mathrm{g}\,(t)\,\mathrm{f}\,(y)+\mathrm{U}\,(t) \tag{8.6.43}$$

上式を (8.6.41) 式に代入し、整理すると、

$$\left(\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{g}\,(t)\right)\,\mathrm{f}\,(y)=\nu\,\mathrm{g}\,(t)\,\left(\frac{d^2}{d\,y^2}\,\mathrm{f}\,(y)\right)$$

上式を変形し、

$$\frac{\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{g}\,(t)}{\mathrm{g}\,(t)}=\frac{\nu\,\left(\frac{d^2}{d\,y^2}\,\mathrm{f}\,(y)\right)}{\mathrm{f}\,(y)}=C$$

上式を ode2 関数で解くと、

$$\begin{aligned}\mathrm{g}\,(t)&=\%c\,e^{t\,C}\\ \mathrm{f}\,(y)&=\%k1\,e^{\frac{y\,\sqrt{C}}{\sqrt{\nu}}}+\%k2\,e^{-\frac{y\,\sqrt{C}}{\sqrt{\nu}}}\end{aligned} \tag{8.6.44}$$

```
assume(\delta>0);
UY20:subst([GT1,FY1,U1,%c=1,%k1=0,C=%i
 *\omega],UY1);
M14:(-1)^(1/4);
M14R:realpart(M14);
M14I:imagpart(M14);
M141:M14=M14R+M14I*%i;
UY2:subst([M141],UY20);
subst([u(y,t)=0,y=0],UY2);
solve(%,%k2)[1];
subst([%],UY2);
%/U/%e^(%i*omega*t);
UY21:expand(%);
DL1:\delta=1/((sqrt(\omega))/(sqrt(2)
 *sqrt(\nu)));
solve(%,sqrt(\nu))[1];
subst([%],UY21);
UY22:%*U*%e^(%i*omega*t);
```

振動流であるから $C=i\omega$ とし、(8.6.44) 式を (8.6.43) 式に代入し、境界条件から、$y\to\infty$ で $\mathrm{u}(y,t)=\mathrm{U}(t)=e^{i\omega t}U$ から、$\%k1=0$ となり次式となる。

$$\mathrm{u}(y,t)=e^{i\omega t}U+\%k2\,e^{i\omega t-\frac{(-1)^{\frac{1}{4}}\sqrt{\omega}\,y}{\sqrt{\nu}}} \tag{8.6.45}$$

ここで下記の関係があり、

$$(-1)^{\frac{1}{4}}=\frac{i}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$y\to 0$ で $\mathrm{u}(y,t)=0$ から、

$$\%k2=-U$$

上記の関係式を (8.6.45) 式に代入し、

$$\mathrm{u}(y,t)=e^{i\omega t}U-e^{i\omega t-\frac{\left(\frac{i}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{\omega}\,y}{\sqrt{\nu}}}U$$

下記の δ を導入し、整理すると、

$$\delta=\frac{\sqrt{2}\sqrt{\nu}}{\sqrt{\omega}} \tag{8.6.46}$$

$$\mathrm{u}(y,t)=e^{i\omega t}\left(1-e^{-\frac{iy}{\delta}-\frac{y}{\delta}}\right)U \tag{8.6.47}$$

```
TU1:\tau=\mu*diff(u(y,t),y,1);
subst([UY22],%);
ev(%,diff);
TU2:factor(subst([y=0],%));
TU2R:lhs(TU2)=realpart(rhs(TU2));
subst([\omega=1,U=1,\mu=\delta],rhs(TU2));
TU2RP:realpart(%);
assume(T[W]>0);
WD1:W=\tau*rhs(U1R);
```

```
WD11:realpart(subst([TU2R],WD1));
\omega*T[W]=2*%pi;
T1:solve(%,T[W])[1];
W[A]='integrate(rhs(WD11),t,0,T[W])/T[W];
ev(%,integrate);
W[A]=subst([T1],rhs(%));
WA1:factor(ev(%,integrate));
diff(UY22,y,1);
DUY1:lhs(%)=realpart(rhs(%));
%^2;
DUY11:\mu*trigsimp(%);
'integrate(lhs(%),y,0,inf)='integrate(
 rhs(%),y,0,inf);
DUY21:lhs(%)=ev(rhs(%),integrate);
W[A]='integrate(rhs(DUY21),t,0,T[W])/T[W];
ev(%,integrate);
subst([T1],%);
```

物体表面に作用する剪断力：τ は次式で表せる。

$$\tau=\mu\left(\frac{d}{dy}\mathrm{u}(y,t)\right)$$

上式に、(8.6.47) 式を代入し、微分を実行し、$y=0$ とし、実部を求めると、

$$\begin{aligned}\tau&=-\left(-\frac{i}{\delta}-\frac{1}{\delta}\right)\mu\,e^{-\frac{iy}{\delta}-\frac{y}{\delta}+i\omega t}U\\&=\frac{(i+1)\,\mu\,e^{i\omega t}U}{\delta}\\&=\frac{\mu\,(\cos(\omega t)-\sin(\omega t))\,U}{\delta}\end{aligned} \tag{8.6.48}$$

上式から、剪断力による単位時間あたりの仕事（力×流速）：W は、$U(t)=\cos(\omega t)\,U$ から次式となる。

$$\begin{aligned}W&=\cos(\omega t)\,\tau\,U\\&=\frac{\mu\cos(\omega t)\,(\cos(\omega t)-\sin(\omega t))\,U^2}{\delta}\end{aligned} \tag{8.6.49}$$

物体の振動周期:T_W は、

$$T_W=\frac{2\pi}{\omega}$$

剪断力による単位時間あたりの仕事：W の平均:W_A は、上式の時間平均をとり、

$$\begin{aligned}W_A&=\frac{\mu U^2}{\delta T_W}\int_0^{T_W}\cos(\omega t)\,(\cos(\omega t)-\sin(\omega t))\,dt\\&=\frac{\mu U^2\left(\frac{\sin(2\omega T_W)+2\cos(\omega T_W)^2+2\omega T_W}{4\omega}-\frac{1}{2\omega}\right)}{\delta T_W}\\&=\frac{\mu U^2}{2\delta}\end{aligned} \tag{8.6.50}$$

境界層内のある点における単位体積あたりのエネルギーの散逸は、$\mu\left(\frac{d}{dy}\mathrm{u}(y,t)\right)^2$ で表すことができる。

$\frac{d}{dy}\,\mathrm{u}\,(y,t)$ は次式となり、

$$\frac{d}{d\,y}\,\mathrm{u}\,(y,t)=-\left(-\frac{i}{\delta}-\frac{1}{\delta}\right)\,e^{-\frac{i\,y}{\delta}-\frac{y}{\delta}+i\,\omega\,t}\,U$$

上式の実部から、

$$\begin{aligned}&\mu\int_0^{\infty}\left(\frac{d}{d\,y}\,\mathrm{u}\,(y,t)\right)^2 dy\\ =&\frac{\mu\,U^2}{\delta^2}\int_0^{\infty}e^{-\frac{2\,y}{\delta}}\left(2\cos\left(\frac{y-\delta\,\omega\,t}{\delta}\right)\right.\\ &\left.\sin\left(\frac{y-\delta\,\omega\,t}{\delta}\right)+1\right)dy\\ =&\frac{\mu\,\left(-\frac{\delta\sin(2\,\omega\,t)}{4}+\frac{\delta\cos(2\,\omega\,t)}{4}+\frac{\delta}{2}\right)\,U^2}{\delta^2}\end{aligned}$$

上式の時間平均をとり、

$$\begin{aligned}W_A=&\frac{\mu\,U^2}{\delta^2\,T_W}\int_0^{T_W}-\frac{\delta\sin(2\,\omega\,t)}{4}+\frac{\delta\cos(2\,\omega\,t)}{4}\\ &+\frac{\delta}{2}dt\\ =&\frac{\mu\,U^2}{2\,\delta}\end{aligned}\tag{8.6.51}$$

上式の結果は、(8.6.50) 式に示す剪断力による単位時間あたりの仕事の平均から求めた結果と一致している。

```
W[F]='integrate((F*cos(\omega*t))*(U[0]*
 cos(\omega*t)),t,0,T[W])/T[W];
ev(%,integrate);
WF1:subst([T1],%);
UT1:U(\theta)=2*U[0]*sin(\theta);
WT1:W[T]='integrate(subst([U=U(\theta)],
 rhs(WA1))*R*2,\theta,0,%pi);
subst([UT1],WT1);
WT2:ev(%,integrate);
WT3:subst([DL1],%);
rhs(WF1)=rhs(WT2);
F1:solve(%,F)[1];
MT1:T(t)=1/2*%pi*R^2*\rho[M]*U[0]^2;
DT1:diff(T(t),t,1)=-rhs(WT2);
U02:U[0]^2=A*%e^(-B*\omega*t);
subst([MT1,U02],DT1);
ev(%,diff);
solve(%,B)[1];
subst([DL1,\mu=\nu*\rho],%);
%*2*%pi;
```

今、減衰力：F が、物体の振動速度：$U(t)$ と同位相とし、その速度振幅：U_0 とすると、これによる仕事の平均：W_F は、

$$\begin{aligned}W_F=&\frac{U_0\,F}{T_W}\int_0^{T_W}\cos(\omega\,t)^2 dt\\ =&\frac{U_0\,F\,\left(\sin(2\,\omega\,T_W)+2\,\omega\,T_W\right)}{4\,\omega\,T_W}\\ =&\frac{U_0\,F}{2}\end{aligned}\tag{8.6.52}$$

円柱の流速分布は、「例題 5.3.4 一様流中の円柱まわりの流れ、(5.3.15) 式、123 頁」から次式となる。

$$\mathrm{U}\,(\theta)=2\,U_0\sin(\theta)$$

(8.6.50) 式の単位時間あたりの仕事の平均を円柱の円周方向に積分し、

$$\begin{aligned}W_T=&2\int_0^{\pi}\frac{\mu\,U^2}{2\,\delta}\,R\,d\theta=\frac{\mu\int_0^{\pi}\mathrm{U}\,(\theta)^2 d\theta\,R}{\delta}\\ =&\frac{4\,U_0^2\,\mu\int_0^{\pi}\sin(\theta)^2 d\theta\,R}{\delta}\\ =&\frac{2\,\pi\,U_0^2\,\mu\,R}{\delta}\end{aligned}\tag{8.6.53}$$

(8.6.52) 式の W_F と (8.6.53) 式の W_T は等しいから、

$$\frac{U_0\,F}{2}=\frac{2\,\pi\,U_0^2\,\mu\,R}{\delta}$$

上式から F は、

$$F=\frac{4\,\pi\,U_0\,\mu\,R}{\delta}$$

円柱物体の運動エネルギー：$\mathrm{T}\,(t)$ は、物体密度：ρ_M とすると、

$$\mathrm{T}\,(t)=\frac{\pi\,U_0^2\,\rho_M\,R^2}{2}$$

円柱物体の運動エネルギーの減少は、剪断力等による単位時間あたりの仕事（エネルギー散逸）の平均であるから、

$$\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{T}\,(t)=-\frac{2\,\pi\,U_0^2\,\mu\,R}{\delta}$$

エネルギーの基本である U_0^2 の減衰は、減衰比：B とすると、次式の形となるから、

$$U_0^2=A\,e^{-\omega\,t\,B}$$

上式を代入し、

$$\frac{d}{d\,t}\,\frac{\pi\,A\,e^{-\omega\,t\,B}\,\rho_M\,R^2}{2}=-\frac{2\,\pi\,\mu\,A\,e^{-\omega\,t\,B}\,R}{\delta}$$

B を求めると、

$$B=\frac{4\,\mu}{\delta\,\omega\,\rho_M\,R}=\frac{2^{\frac{3}{2}}\,\sqrt{\nu}\,\rho}{\sqrt{\omega}\,\rho_M\,R}$$

一周期のエネルギーの減衰比は、

$$2\,\pi\,B=\frac{2^{\frac{5}{2}}\,\pi\,\sqrt{\nu}\,\rho}{\sqrt{\omega}\,\rho_M\,R}=4\,\pi\frac{\rho}{\rho_M}\sqrt{\frac{2\,\nu}{\omega\,R^2}}\tag{8.6.54}$$

8.6.7　振動する円柱に生じる定常流

半径:R の円柱が円周波数：ω で水平方向に振動流速：U_0 の振幅で振動している。このとき円柱周囲に生じる定常流について調べる [1]。境界層厚さが円柱の半径：R に比べ、十分小さいとする。このとき、「8.5.1 境界層の方程式」の二次元 $x-y$ 座標の境界層方程式を活用する。$x-y$ 座標軸の各速度コンポーネントを u, v とする。時間：t、圧力：p、密度：ρ、粘性係数：μ、動粘性係数：ν とする。

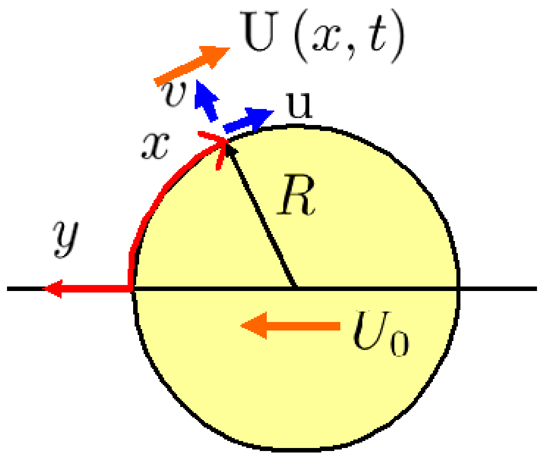


図 8.6.16: 振動する円柱に生じる定常流

```
/* 振動する境界層による定常な流れ */
kill(all);
MAS1:'diff(v,y,1)+'diff(u,x,1)=0;
NAV2:('diff(u,y,1))*v+u*('diff(u,x,1))
 +'diff(u,t,1)=\nu*('diff(u,y,2))
 -'diff(p,x,1)/\rho;
subst([\mu=0,u=U(x,t),p=p(x,t),X=0],NAV2);
NAV21:ev(%,diff);
PX1:solve(%,'diff(p(x,t),x,1))[1];
subst([u=u[1](x,y,t),v=v[1](x,y,t),
 p=p(x,t),X=0],NAV2);
ev(%,diff);
subst([PX1],%);
expand(%);
NAVU1:last(lhs(%))=first(rhs(%))
 +last(rhs(%));
expand(solve(%,'diff(U(x,t),t,1))[1]);
NAVU11:subst([\mu=\nu*\rho],%);
subst([u=u[1](x,y,t)+u[2](x,y,t),
 v=v[1](x,y,t),p=p(x,t),X=0],NAV2);
ev(%,diff);
subst([PX1],%);
expand(%);
%-NAVU1;
rest(lhs(%),3)=rhs(%);
rest(lhs(%),-2)+last(lhs(%))=rhs(%);
NAVU2:%-v[1](x,y,t)*('diff(u[1](x,y,t)
 ,y,1))-u[1](x,y,t)*('diff(u[1](x,y,t)
 ,x,1))-\nu*('diff(u[2](x,y,t),y,2));
```

(8.5.2) 式から質量保存の方程式は、

$$\frac{d}{d\,y}\,v+\frac{d}{d\,x}\,u=0$$

(8.5.3) 式から Navier-Stokes の式は下記の境界層の方程式となる。

$$\begin{aligned}&\left(\frac{d}{d\,y}\,u\right)\,v+u\,\left(\frac{d}{d\,x}\,u\right)+\frac{d}{d\,t}\,u\\&=\nu\,\left(\frac{d^2}{d\,y^2}\,u\right)-\frac{\frac{d}{d\,x}\,p}{\rho}\end{aligned}\qquad(8.6.55)$$

境界層の外界流速:$\mathrm{U}\,(x,t)$ とすると、圧力:p との関係は、

$$\mathrm{U}\,(x,t)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{U}\,(x,t)\right)+\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{U}\,(x,t)=-\frac{\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{p}\,(x,t)}{\rho}\qquad(8.6.56)$$

ここで、流速：u を下記の $u_1\,(x,y,t)\,,u_2\,(x,y,t)$ で表現する。$u_1\,(x,y,t)\,,v_1\,(x,y,t)$ は線型理論で決定されるもので、外界流速：$\mathrm{U}\,(x,t)$ と同じ周波数で変動する。$u_2\,(x,y,t)$ は非線型な要素で決まるもので、$u_1\,(x,y,t)$ と比べ、十分小さいとする。

$$u=u_2\,(x,y,t)+u_1\,(x,y,t)\qquad(8.6.57)$$

(8.6.55) 式に $u\ \to\ u_1\,(x,y,t)$ と $v\ \to\ v_1\,(x,y,t)$ を代入し、

$$\begin{aligned}&v_1\,(x,y,t)\,\left(\frac{d}{d\,y}\,u_1\,(x,y,t)\right)\\&+u_1\,(x,y,t)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,u_1\,(x,y,t)\right)+\frac{d}{d\,t}\,u_1\,(x,y,t)\\&=\nu\,\left(\frac{d^2}{d\,y^2}\,u_1\,(x,y,t)\right)+\mathrm{U}\,(x,t)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{U}\,(x,t)\right)\\&+\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{U}\,(x,t)\end{aligned}$$

線型の方程式として、次式となる。

$$\frac{d}{d\,t}\,u_1\,(x,y,t)=\nu\,\left(\frac{d^2}{d\,y^2}\,u_1\,(x,y,t)\right)+\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{U}\,(x,t)\qquad(8.6.58)$$

(8.6.55) 式に (8.6.57) 式を代入し、線型の関係式:(8.6.58) 式を差し引き、

[1]G. K. Batchelor：入門　流体力学 [18]、5.13(b) 振動境界層による定常な流れ P.358

$$
\begin{aligned}
&v_1(x,y,t)\left(\frac{d}{d\,y}\,u_2(x,y,t)\right)\\
&+u_2(x,y,t)\left(\frac{d}{d\,x}\,u_2(x,y,t)\right)\\
&+u_1(x,y,t)\left(\frac{d}{d\,x}\,u_2(x,y,t)\right)+\underline{\frac{d}{d\,t}\,u_2(x,y,t)}\\
&+\underline{v_1(x,y,t)\left(\frac{d}{d\,y}\,u_1(x,y,t)\right)}\\
&+u_2(x,y,t)\left(\frac{d}{d\,x}\,u_1(x,y,t)\right)\\
&+\underline{u_1(x,y,t)\left(\frac{d}{d\,x}\,u_1(x,y,t)\right)}\\
&=\underline{\nu\left(\frac{d^2}{d\,y^2}\,u_2(x,y,t)\right)}+\underline{\mathrm{U}(x,t)\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{U}(x,t)\right)}
\end{aligned}
$$

$u_1(x,y,t) >> u_2(x,y,t)$ として、微小項を省き、上式の下線部分を残し、$u_2(x,y,t)$ に関する方程式は、

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{d\,t}\,u_2(x,y,t)-\nu\left(\frac{d^2}{d\,y^2}\,u_2(x,y,t)\right)\\
&\quad=-v_1(x,y,t)\left(\frac{d}{d\,y}\,u_1(x,y,t)\right)\\
&\quad-u_1(x,y,t)\left(\frac{d}{d\,x}\,u_1(x,y,t)\right)\\
&\quad+\mathrm{U}(x,t)\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{U}(x,t)\right)
\end{aligned}
\tag{8.6.59}
$$

```
U1:U(x,t)=U(x)*%e^(%i*\omega*t);
U1R:lhs(U1)=U(x)*realpart(%e^(%i*
 \omega*t));
NAVU12:subst([U1],NAVU11);
UY1:u[1](x,y,t)=U(x,t)+f(y)*g(t);
assume(\omega>0,\rho>0,\nu>0,C>0);
subst([UY1,U1],NAVU12);
ev(lhs(%)-rhs(%)=0,diff);
GF1:(-last(lhs(%))=first(lhs(%)))/g(t)
 /f(y);
GF11:lhs(GF1)=C;
GF12:rhs(GF1)=C;
GT1:ode2(GF11,g(t),t);
FY1:ode2(GF12,f(y),y);
assume(\delta>0);
UY20:subst([GT1,FY1,U1,%c=1,%k1=0,C=%i*
 \omega],UY1);
M14:(-1)^(1/4);
M14R:realpart(M14);
M14I:imagpart(M14);
M141:M14=M14R+M14I*%i;
```

```
UY2:subst([M141],UY20);
subst([u[1](x,y,t)=0,y=0],UY2);
solve(%,%k2)[1];
subst([%],UY2);
%/U(x)/%e^(%i*omega*t);
UY21:expand(%);
DL1:\delta=1/((sqrt(\omega))/(sqrt(2)
 *sqrt(\nu)));
solve(%,sqrt(\nu))[1];
subst([%],UY21);
UY22:%*U(x)*%e^(%i*omega*t);
%/U(x);
expand(realpart(rhs(%)));
UY22R:lhs(UY22)=%*U(x);
```

境界層の外界流速:$\mathrm{U}(x,t)$ を次式とする。

$$
\mathrm{U}(x,t)=e^{i\,\omega\,t}\,\mathrm{U}(x)=\cos(\omega\,t)\,\mathrm{U}(x) \tag{8.6.60}
$$

境界層内の線型理論の流速：$u_1(x,y,t)$ を変数分離法を導入し、次式とする。

$$
u_1(x,y,t)=\mathrm{g}(t)\,\mathrm{f}(y)+\mathrm{U}(x,t) \tag{8.6.61}
$$

(8.6.60) 式と (8.6.61) 式を線型の方程式：(8.6.58) 式に代入し、

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{d\,t}\left(e^{i\,\omega\,t}\,\mathrm{U}(x)\right)\\
&\quad=\frac{d}{d\,t}\left(\mathrm{g}(t)\,\mathrm{f}(y)+e^{i\,\omega\,t}\,\mathrm{U}(x)\right)\\
&\quad-\nu\left(\frac{d^2}{d\,y^2}\left(\mathrm{g}(t)\,\mathrm{f}(y)+e^{i\,\omega\,t}\,\mathrm{U}(x)\right)\right)
\end{aligned}
$$

上式を整理して、

$$
\frac{\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{g}(t)}{\mathrm{g}(t)}=\frac{\nu\left(\frac{d^2}{d\,y^2}\,\mathrm{f}(y)\right)}{\mathrm{f}(y)}=C
$$

$ode2$ 関数を用いて、

$$
\mathrm{g}(t)=\%c\,e^{t\,C}
$$

$$
\mathrm{f}(y)=\%k1\,e^{\frac{y\,\sqrt{C}}{\sqrt{\nu}}}+\%k2\,e^{-\frac{y\,\sqrt{C}}{\sqrt{\nu}}}
$$

線型解で外界流速と同じ周波数で変動するはずであるから、$C=i\,\omega$ とし、$y\to\infty$ で $u_1(x,y,t)$ が有限であるためには、$\%k1=0$ であるから、解は次式となる。

$$
u_1(x,y,t)=\%k2\,e^{i\,\omega\,t-\frac{(-1)^{\frac{1}{4}}\,\sqrt{\omega}\,y}{\sqrt{\nu}}}+e^{i\,\omega\,t}\,\mathrm{U}(x)
$$

$$
\text{ここで、}\qquad (-1)^{\frac{1}{4}}=\frac{i}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}
$$

$y=0$ で $u_1(x,y,t)=0$ であるから、

$$
\%k2=-\mathrm{U}(x)
$$

また、下記と置き、

$$\delta = \frac{\sqrt{2}\,\sqrt{\nu}}{\sqrt{\omega}} \tag{8.6.62}$$

以上から、$u_1(x,y,t)$ は次式となる。

$$u_1(x,y,t) = e^{i\,\omega\,t}\,\mathrm{U}(x)\,\left(1-e^{-\frac{i\,y}{\delta}-\frac{y}{\delta}}\right) \tag{8.6.63}$$

上式の実部は、

$$\begin{aligned} u_1(x,y,t) =& \mathrm{U}(x)\,\left(-\sin(\omega\,t)\,e^{-\frac{y}{\delta}}\sin\left(\frac{y}{\delta}\right)\right. \\ &\left. - \cos(\omega\,t)\,e^{-\frac{y}{\delta}}\cos\left(\frac{y}{\delta}\right)+\cos(\omega\,t)\right) \end{aligned} \tag{8.6.64}$$

```
DUY21:diff(UY22,x,1);
VY1:v[1](x,y,t)=-'integrate('diff(u[1]
 (x,y,t),x,1),y,0,y);
subst([DUY21],VY1);
ev(%,integrate);
%/(%e^(%i*omega*t)*('diff(U(x),x,1)));
expand(%);
VY2:%*(%e^(%i*omega*t)*('diff(U(x),x,1)));
%/'diff(U(x),x,1);
expand(realpart(rhs(%)));
VY2R:lhs(VY2)=%*'diff(U(x),x,1);
```

(8.6.63) 式を x で微分し、

$$\frac{d}{d\,x}\,u_1(x,y,t) = e^{i\,\omega\,t}\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{U}(x)\right)\,\left(1-e^{-\frac{i\,y}{\delta}-\frac{y}{\delta}}\right)$$

質量保存の方程式:(8.6.55) 式から、次式が得られ、上式を代入し、積分を実行すると、$v_1(x,y,t)$ が得られ、

$$\begin{aligned} &v_1(x,y,t) \\ &= -\int_0^y \frac{d}{d\,x}\,u_1(x,y,t)\,dy \\ &= -\,e^{i\,\omega\,t}\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{U}(x)\right)\,\int_0^y 1-e^{-\frac{i\,y}{\delta}-\frac{y}{\delta}}dy \\ &=e^{i\,\omega\,t}\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{U}(x)\right)\,\left(-\frac{\delta\,e^{-\frac{i\,y}{\delta}-\frac{y}{\delta}}}{i+1}-\frac{i\,y}{i+1}\right. \\ &\qquad\left. -\frac{y}{i+1}+\frac{\delta}{i+1}\right) \end{aligned} \tag{8.6.65}$$

上式の実部は、

$$\begin{aligned} &v_1(x,y,t) \\ &=\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{U}(x)\right)\,\left(-\frac{\delta\sin(\omega\,t)\,e^{-\frac{y}{\delta}}\sin\left(\frac{y}{\delta}\right)}{2}\right. \\ &\quad +\frac{\delta\cos(\omega\,t)\,e^{-\frac{y}{\delta}}\sin\left(\frac{y}{\delta}\right)}{2}-\frac{\delta\sin(\omega\,t)\,e^{-\frac{y}{\delta}}\cos\left(\frac{y}{\delta}\right)}{2} \\ &\quad -\frac{\delta\cos(\omega\,t)\,e^{-\frac{y}{\delta}}\cos\left(\frac{y}{\delta}\right)}{2}-\cos(\omega\,t)\,y \\ &\quad \left. +\frac{\delta\sin(\omega\,t)}{2}+\frac{\delta\cos(\omega\,t)}{2}\right) \end{aligned} \tag{8.6.66}$$

```
NAVU2;
NAVU21:first(rhs(NAVU2));
NAVU23:last(rhs(NAVU2));
NAVU22:rhs(NAVU2)-NAVU21-NAVU23;
assume(T[W]>0);
\omega*T[W]=2*%pi;
T1:solve(%,T[W])[1];
subst([UY22R,VY2R],NAVU21);
ev(%,diff);
'integrate(%,t,0,T[W])/T[W];
ev(%,integrate);
U21A:NAVU21=factor(subst([T1],%));
subst([UY22R,VY2R],NAVU22);
ev(%,diff);
'integrate(%,t,0,T[W])/T[W];
ev(%,integrate);
U22A:NAVU22=factor(subst([T1],%));
subst([U1R],NAVU23);
ev(%,diff);
'integrate(%,t,0,T[W])/T[W];
ev(%,integrate);
U23A:NAVU23=subst([T1],%);
subst([u[2](x,y,t)=u[A](y)],last(
 lhs(NAVU2)))=rhs(U21A)+rhs(U22A)
 +rhs(U23A);
expand(%/(U(x)*('diff(U(x),x,1))));
ode2(%,u[A](y),y);
UA2:expand(%);
subst([y=0],rhs(UA2))=0;
K1:solve(%,%k1)[1];
UA21:subst([K1,%k2=0],UA2);
UA210:u[A](x)=limit(rhs(%),y,inf);
UX1:U(x)=U[0]*2*sin(x/R);
subst([UX1],UA210);
ev(%,diff);
lhs(%)=trigrat(rhs(%));
UA22:subst([DL1],%);
u[A]=subst([x=\phi*R],rhs(UA22));
subst([U[0]=1,\omega=1,R=1],rhs(%));
plot2d(%,[\phi,0,3.1415]);
```

周期は次式で得られ、

$$T_W = \frac{2\,\pi}{\omega}$$

$u_2(x,y,t)$ の定常成分：$u_A(y)$ を求めるため、$u_2(x,y,t)$ に関する方程式：(8.6.59) 式の右辺項の平均を求める。右辺各項に (8.6.64) 式と (8.6.66) 式を代入し、一周期を

平均すると各々下記となる。

$$\frac{1}{T_W}\int_0^{T_W} -v_1\left(x,y,t\right)\left(\frac{d}{d\,y}\,u_1\left(x,y,t\right)\right)dt$$
$$=\frac{\mathrm{U}\left(x\right)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{U}\left(x\right)\right)\,e^{-\frac{y}{\delta}}}{2\,\delta}$$
$$\times\left(y\sin\left(\frac{y}{\delta}\right)-\delta\sin\left(\frac{y}{\delta}\right)+y\cos\left(\frac{y}{\delta}\right)\right) \tag{8.6.67}$$

$$\frac{1}{T_W}\int_0^{T_W} -u_1\left(x,y,t\right)\left(\frac{d}{d\,x}\,u_1\left(x,y,t\right)\right)dt$$
$$=-\frac{\mathrm{U}\left(x\right)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{U}\left(x\right)\right)\,e^{-\frac{2\,y}{\delta}}}{2}$$
$$\times\left(\sin\left(\frac{y}{\delta}\right)^2+\cos\left(\frac{y}{\delta}\right)^2\right.$$
$$\left.-\,2\,e^{\frac{y}{\delta}}\cos\left(\frac{y}{\delta}\right)+e^{\frac{2\,y}{\delta}}\right) \tag{8.6.68}$$

$$\frac{1}{T_W}\int_0^{T_W} \mathrm{U}\left(x,t\right)\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{U}\left(x,t\right)\right)dt$$
$$=\frac{\mathrm{U}\left(x\right)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{U}\left(x\right)\right)}{2} \tag{8.6.69}$$

(8.6.67) 式から (8.6.69) 式を $u_2\left(x,y,t\right)$ に関する方程式：(8.6.59) 式に代入し、$u_2\left(x,y,t\right)$ の定常成分：$u_A\left(y\right)$ とし、ある x における定常項の式は、$u_2\left(x,y,t\right)\to u_A\left(y\right)$ の置き換えをおこない、整理すると、

$$-\frac{\nu\,\left(\frac{d^2}{d\,y^2}\,u_A\left(y\right)\right)}{\mathrm{U}\left(x\right)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{U}\left(x\right)\right)}$$
$$=-\frac{e^{-\frac{2\,y}{\delta}}\sin\left(\frac{y}{\delta}\right)^2}{2}+\frac{y\,e^{-\frac{y}{\delta}}\sin\left(\frac{y}{\delta}\right)}{2\,\delta}$$
$$-\frac{e^{-\frac{y}{\delta}}\sin\left(\frac{y}{\delta}\right)}{2}-\frac{e^{-\frac{2\,y}{\delta}}\cos\left(\frac{y}{\delta}\right)^2}{2}$$
$$+\frac{y\,e^{-\frac{y}{\delta}}\cos\left(\frac{y}{\delta}\right)}{2\,\delta}+e^{-\frac{y}{\delta}}\cos\left(\frac{y}{\delta}\right)$$

上式を $ode2$ 関数で解くと、

$$u_A\left(y\right)=\frac{\delta\,\mathrm{U}\left(x\right)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{U}\left(x\right)\right)\,y\,e^{-\frac{y}{\delta}}\sin\left(\frac{y}{\delta}\right)}{4\,\nu}$$
$$+\frac{\delta^2\,\mathrm{U}\left(x\right)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{U}\left(x\right)\right)\,e^{-\frac{y}{\delta}}\sin\left(\frac{y}{\delta}\right)}{\nu}$$
$$-\frac{\delta\,\mathrm{U}\left(x\right)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{U}\left(x\right)\right)\,y\,e^{-\frac{y}{\delta}}\cos\left(\frac{y}{\delta}\right)}{4\,\nu}$$
$$+\frac{\delta^2\,\mathrm{U}\left(x\right)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{U}\left(x\right)\right)\,e^{-\frac{y}{\delta}}\cos\left(\frac{y}{\delta}\right)}{4\,\nu}$$
$$+\frac{\delta^2\,\mathrm{U}\left(x\right)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{U}\left(x\right)\right)\,e^{-\frac{2\,y}{\delta}}}{8\,\nu}$$
$$+\%k2\,y+\%k1$$

$y\to\infty$ で $u_A\left(y\right)$ が有限であるためには、$\%k2=0$ となり、$y=0$ では、

$$\frac{3\,\delta^2\,\mathrm{U}\left(x\right)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{U}\left(x\right)\right)}{8\,\nu}+\%k1=0$$

上記から、定常成分：$u_A\left(y\right)$ は次式となる。

$$u_A\left(y\right)=\frac{\delta\,\mathrm{U}\left(x\right)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{U}\left(x\right)\right)\,y\,e^{-\frac{y}{\delta}}\sin\left(\frac{y}{\delta}\right)}{4\,\nu}$$
$$+\frac{\delta^2\,\mathrm{U}\left(x\right)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{U}\left(x\right)\right)\,e^{-\frac{y}{\delta}}\sin\left(\frac{y}{\delta}\right)}{\nu}$$
$$-\frac{\delta\,\mathrm{U}\left(x\right)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{U}\left(x\right)\right)\,y\,e^{-\frac{y}{\delta}}\cos\left(\frac{y}{\delta}\right)}{4\,\nu}$$
$$+\frac{\delta^2\,\mathrm{U}\left(x\right)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{U}\left(x\right)\right)\,e^{-\frac{y}{\delta}}\cos\left(\frac{y}{\delta}\right)}{4\,\nu}$$
$$+\frac{\delta^2\,\mathrm{U}\left(x\right)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{U}\left(x\right)\right)\,e^{-\frac{2\,y}{\delta}}}{8\,\nu}$$
$$-\frac{3\,\delta^2\,\mathrm{U}\left(x\right)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{U}\left(x\right)\right)}{8\,\nu} \tag{8.6.70}$$

上式で、$y\to\infty$ とすると、ある x における境界層のすぐ外での移動速度：$u_A\left(x\right)$ は、

$$u_A\left(x\right)=-\frac{3\,\delta^2\,\mathrm{U}\left(x\right)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{U}\left(x\right)\right)}{8\,\nu} \tag{8.6.71}$$

円柱の速度分布は「例題 5.3.4 一様流中の円柱まわりの流れ、(5.3.15) 式、123 頁」から、

$$\mathrm{U}\left(x\right)=2\,U_0\sin\left(\frac{x}{R}\right)$$

上式を代入すると円柱が振動したときの境界層のすぐ外での移動速度：$u_A\left(x\right)$ は (8.6.62) 式を代入し、

$$u_A\left(x\right)=-\frac{3\,U_0^2\,\delta^2\sin\left(\frac{2\,x}{R}\right)}{4\,\nu\,R}=-\frac{3\,U_0^2\sin\left(\frac{2\,x}{R}\right)}{2\,\omega\,R}$$
$$u_A=-\frac{3\,U_0^2\sin\left(2\,\phi\right)}{2\,\omega\,R} \tag{8.6.72}$$

上式から、水平の振動に対して、境界層のすぐ外での移動速度が得られ、下図のように左右に流れ出る定常流が発生する。

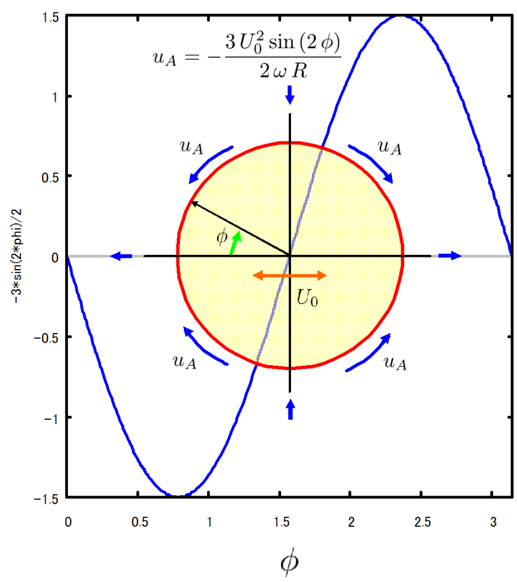


図 8.6.17: 振動する円柱に生じる定常流分布

8.7 非定常な一方向の流れ

8.7.1 速度不連続な流れと静止流体中突然動き出した平板

(1) 速度不連続な流れ

二次元の十分広い流場で、時間：t が $t=0$ の時、$y>0$ で $u(y,0)=U_0$ で、$y<0$ で $u(y,0)=0$ の不連続な流れの $t>0$ 以降の粘性流れについて調べる。x-y-z 座標軸の各速度コンポーネントを u,v,w、圧力：p とし、主流方向を x 軸、密度：ρ、粘性係数：μ、動粘性係数：ν とする。

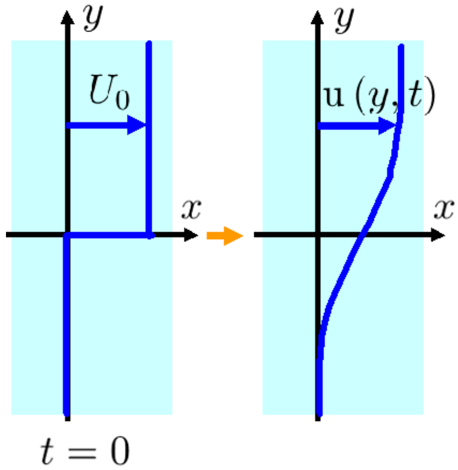


図 8.7.1: 速度不連続な流れ

```
/* 速度不連続な流れ */
kill(all);
MAS1:'diff(w,z,1)+'diff(v,y,1)+'diff(u,x,1)
 =0;
NAV1:matrix([\rho*(('diff(u,z,1))*w
 +('diff(u,y,1))*v+u*('diff(u,x,1))
 +'diff(u,t,1))],[\rho*(('diff(v,z,1))*w
 +v*('diff(v,y,1))+u*('diff(v,x,1))
 +'diff(v,t,1))],[\rho*(w*('diff(w,z,1))
 +v*('diff(w,y,1))+u*('diff(w,x,1))
 +'diff(w,t,1))]])=matrix([X+mu*(
 'diff(u,z,2)+'diff(u,y,2)+'diff(u,x,2))
 -'diff(p,x,1)],[Y+mu*('diff(v,z,2)
 +'diff(v,y,2)+'diff(v,x,2))-'diff(p,y,1)],
 [Z+mu*('diff(w,z,2)+'diff(w,y,2)
 +'diff(w,x,2))-'diff(p,z,1)]);
NAV2:lhs(NAV1)[1][1]=rhs(NAV1)[1][1];
subst([v=0,w=0,X=0,u=u(y,t),p=0],%);
NAV21:ev(%,diff);
ode2(NAV3,u(y,t),[y,t]);
NU1:\nu=\mu/\rho;
NU2:solve(%,\mu);
NAV22:subst([NU2],NAV21/\mu);
assume(p>0,\nu>0,t>0);
UYT1:u(y,t)=f(y)*g(t);
subst([UYT1],NAV22);
ev(%,diff);
EQ1:%/f(y)/g(t);
EQT1:lhs(EQ1)=-p^2;
EQY1:rhs(EQ1)=-p^2;
EQT2:ode2(EQT1,g(t),t);
EQY2:ode2(EQY1,f(y),y);
UTY2:subst([EQT2,EQY2,%c=1],UYT1);
```

x 軸方向の Navier-Stokes の式は (8.1.9) 式から、

$$\rho\left(\left(\frac{d}{dz}u\right)w+\left(\frac{d}{dy}u\right)v+u\left(\frac{d}{dx}u\right)+\frac{d}{dt}u\right)$$
$$=X+\mu\left(\frac{d^2}{dz^2}u+\frac{d^2}{dy^2}u+\frac{d^2}{dx^2}u\right)-\frac{d}{dx}p$$

流速は x 軸方向のみで、時間:t と y の関数で、$u=u(y,t)$ とする。圧力：p は均一となる。これらから、運動方程式は下記となる。

$$\rho\left(\frac{d}{dt}\mathrm{u}(y,t)\right)=\mu\left(\frac{d^2}{dy^2}\mathrm{u}(y,t)\right) \tag{8.7.1}$$

上式：$u(y,t)$ を下記の変数分離法で解く。

$$\mathrm{u}(y,t)=\mathrm{g}(t)\,\mathrm{f}(y) \tag{8.7.2}$$

上式に代入し、$\nu=\mu/\rho$ とすると、

$$\frac{\left(\frac{d}{dt}\mathrm{g}(t)\right)\mathrm{f}(y)}{\nu}=\mathrm{g}(t)\left(\frac{d^2}{dy^2}\mathrm{f}(y)\right)$$

$$\frac{\frac{d}{dt}\mathrm{g}(t)}{\nu\,\mathrm{g}(t)}=\frac{\frac{d^2}{dy^2}\mathrm{f}(y)}{\mathrm{f}(y)}=-p^2$$

上式を $ode2$ 関数で解くと、

$$\mathrm{g}(t)=\%c\,e^{-\nu p^2 t}$$

$$\mathrm{f}(y)=\%k1\sin(p\,y)+\%k2\cos(p\,y)$$

上式から解は、

$$\mathrm{u}(y,t)=e^{-\nu p^2 t}\left(\%k1\sin(p\,y)+\%k2\cos(p\,y)\right) \tag{8.7.3}$$

```
UTY3:lhs(UTY2)='integrate(subst([%k2=A(p),
 %k1=B(p)],rhs(UTY2)),p,0,inf);
UTY30:subst([t=0],UTY3);
AP1:A(p)=1/%pi*'integrate(subst([y=u],
 lhs(UTY30))*cos(p*u),u,minf,inf);
BP1:B(p)=1/%pi*'integrate(subst([y=u],
 lhs(UTY30))*sin(p*u),u,minf,inf);
```

```
UTY31:subst([AP1,BP1],UTY3);
u(y,t)=1/%pi*'integrate(%e^(-\nu*p^2*t)*
 'integrate((u(u,0)*sin(p*u)*sin(p*y)
 +u(u,0)*cos(p*u)*cos(p*y)),u,-inf,inf),p,
 0,inf);
trigreduce(%);
UTY32:u(y,t)='integrate(u(u,0)*
 'integrate(%e^(-\nu*p^2*t)*cos(p*y-p*u)
 ,p,0,inf),u,minf,inf)/%pi;
```

(8.7.3) 式の基本解から、境界領域が無限大であるから、この基本解の下記の Fourier 積分が解となる。

$$\begin{aligned} \mathrm{u}(y,t) = \int_0^{\infty} e^{-\nu\, p^2\, t} \Big(&\mathrm{B}(p)\, \sin(p\, y) \\ &+ \mathrm{A}(p)\, \cos(p\, y)\Big) dp \end{aligned} \tag{8.7.4}$$

初期条件：$t=0$ では、下記の関係となる。

$$\mathrm{u}(y,0) = \int_0^{\infty} \mathrm{B}(p)\, \sin(p\, y) + \mathrm{A}(p)\, \cos(p\, y)\, dp \tag{8.7.5}$$

このとき、係数：$\mathrm{A}(p)\,, \mathrm{B}(p)$ は下記となる。

$$\mathrm{A}(p) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{u}(u,0)\, \cos(p\, u)\, du$$

$$\mathrm{B}(p) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{u}(u,0)\, \sin(p\, u)\, du$$

上式を (8.7.5) 式に代入し、

$$\begin{aligned} \mathrm{u}(y,t) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\nu\, p^2\, t} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{u}(u,0)\, \sin(p\, u)\, \sin(p\, y) \\ &\quad + \mathrm{u}(u,0)\, \cos(p\, u)\, \cos(p\, y)\, du dp \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\nu\, p^2\, t} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{u}(u,0)\, \cos(p\, y - p\, u)\, du dp \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{u}(u,0) \int_0^{\infty} e^{-\nu\, p^2\, t} \cos(p\, y - p\, u)\, dp du \end{aligned} \tag{8.7.6}$$

```
I0:I='integrate(%e^(-\nu*p^2*t)
 *cos(p*y-p*u),p,0,inf);
I01:ev(%,integrate);
I1:-y^2/(4*nu*t)+(u*y)/(2*nu*t)
 -u^2/(4*nu*t)=N;
I2:N=factor(lhs(%));
subst([I1,I2],I01);
rhs(I0)=rhs(%);
UTY4:subst([%],UTY32);
u(y,t)='integrate(U[0]*%e^(-(y-u)^2
 /(4*nu*t)),u,0,inf)/(2*sqrt(%pi)
 *sqrt(nu)*sqrt(t));
```

```
u(y,t)='integrate(U[0]*%e^(-(y-u)^2
 /(4*nu*t)),u,0,inf)/(2*sqrt(%pi)
 *sqrt(nu)*sqrt(t));
ev(%,integrate);
UTY41:factor(%);
PL1:expand(subst([U[0]=1,\nu=1,y=x],
 rhs(%)));
plot2d([subst([t=0.00001],PL1),
 subst([t=0.2],PL1),subst([t=1],PL1),
 subst([t=3],PL1),subst([t=10],PL1),
 subst([t=50],PL1),subst([t=200],PL1)],
 [x,-50,50],[y,-0.5,1.5],[legend,
 "t=0.00001", "t=0.2","t=1", "t=3",
 "t=10", "t=50", "t=200"]);
```

(8.7.6) 式の一部の積分を実行すると、

$$\int_0^{\infty} e^{-\nu\, p^2\, t} \cos(p\, y - p\, u)\, dp = \frac{\sqrt{\pi}\, e^{-\frac{(y-u)^2}{4\,\nu\, t}}}{2\,\sqrt{\nu}\,\sqrt{t}}$$

上記の結果を (8.7.6) 式に代入すると、

$$\mathrm{u}(y,t) = \frac{1}{2\,\sqrt{\pi}\,\sqrt{\nu}\,\sqrt{t}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{u}(u,0)\; e^{-\frac{(y-u)^2}{4\,\nu\, t}} du \tag{8.7.7}$$

初期の流速:$\mathrm{u}(u,0)$ は、$y=-\infty \to 0$ で零、$y=0 \to \infty$ で U_0 であるから、上式は、

$$\mathrm{u}(y,t) = \frac{U_0 \int_0^{\infty} e^{-\frac{(y-u)^2}{4\,\nu\, t}} du}{2\,\sqrt{\pi}\,\sqrt{\nu}\,\sqrt{t}}$$

上式の積分を実行すると、

$$\mathrm{u}(y,t) = \frac{U_0 \left(\mathrm{erf}\left(\frac{y}{2\,\sqrt{\nu}\,\sqrt{t}} \right) + 1 \right)}{2}$$

上式から、流れは $\frac{y}{\sqrt{\nu\, t}}$ に依存することが解る。

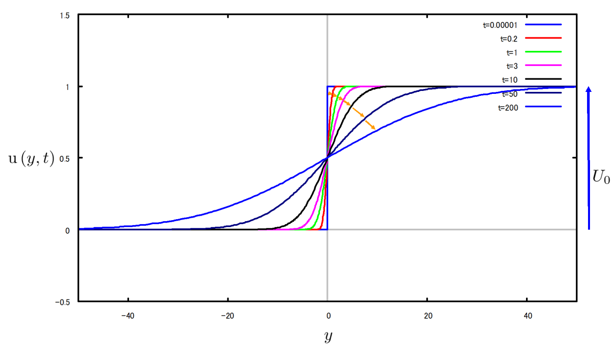


図 8.7.2: 速度不連続な流れ

(2) 静止流体中突然動き出した平板

上方十分広い範囲に流体があり、静止していた平板が、時間:$t=0$ の時、速度:U_0 で突然動き始めた。この平板周りの流体の粘性流れについて調べる。主流方向を x 軸とする。この問題は右模式図に示すように、上記で得られ

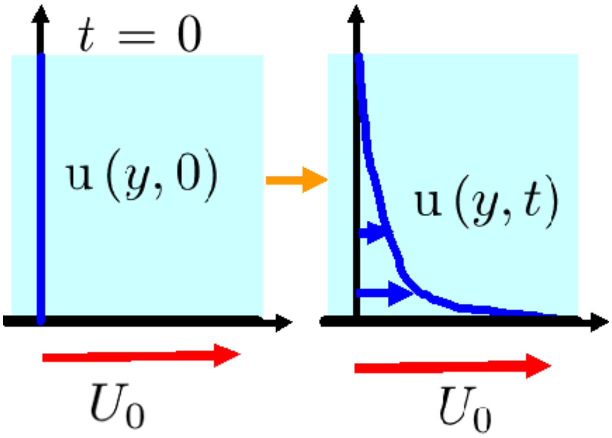


図 8.7.3: 静止流体中突然動き出した平板

た (1) **速度不連続**で、流場を $y>0$ では $\mathrm{u}(y,0)=-U_0$、$y<0$ では $\mathrm{u}(y,0)=U_0$ の速度不連続な流場と一定流速：U_0 の流場を重ね合わせた流場が $y>0$ で静止流体中突然動き出した平板まわりの流場に対応する。

```
/* 静止流体中突然動き出した平板 */
kill(all);
u(y,t)=U[0]*(1-erf(y/(2*sqrt(nu)
 *sqrt(t))));
PL1:expand(subst([U[0]=1,\nu=1,y=x],
 rhs(%)));
plot2d([subst([t=0.00001],PL1),
 subst([t=0.2],PL1),subst([t=0.4],PL1),
 subst([t=1],PL1),subst([t=10],PL1),
 subst([t=50],PL1)],[x,0,20],[y,-0.5,1.5],
 [legend, "t=0.00001", "t=0.2","t=0.4",
 "t=1","t=10", "t=50"]);
```

上記から、流速分布は下記となる。

$$\mathrm{u}(y,t)=U_0\left(1-\mathrm{erf}\left(\frac{y}{2\sqrt{\nu}\sqrt{t}}\right)\right) \qquad (y\le 0) \tag{8.7.8}$$

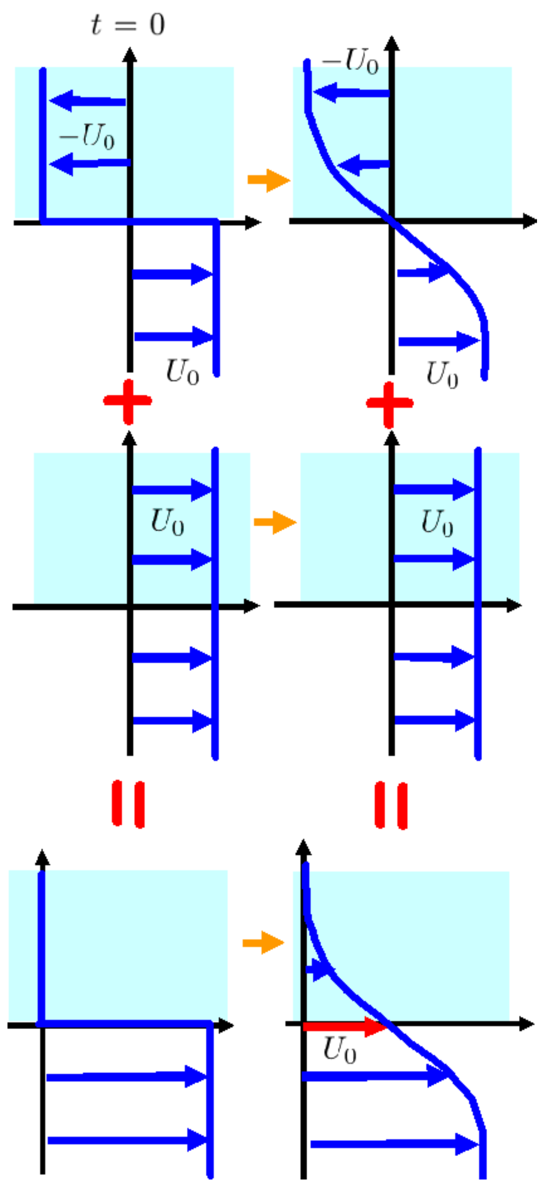


図 8.7.4: 静止流体中突然動き出した平板の模式図

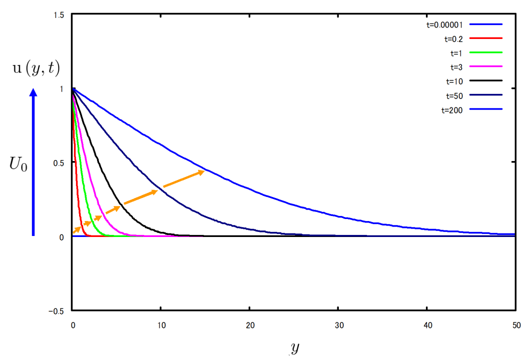


図 8.7.5: 静止流体中突然動き出した平板

8.7.2 静止流体中突然動き出した平板と静止平板の間の流体流れ

平行平板間隔：h 内に静止流体があり、下面の平板が突然動き出したときの粘性流れを求める。x-y-z 座標軸の各速度コンポーネントを u, v, w とする。圧力：p、粘性係数：μ、x 方向の外力：X とする。

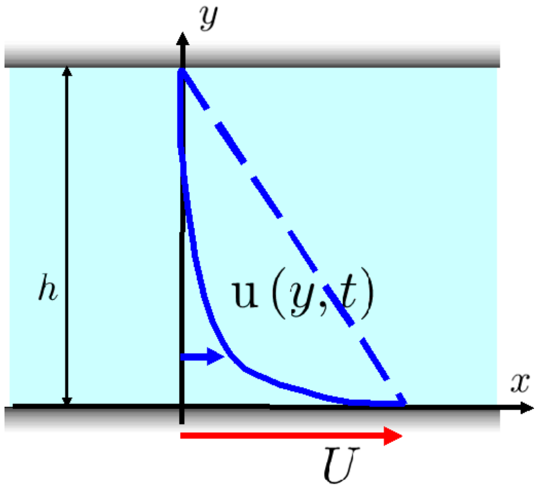


図 8.7.6: 静止流体中突然動き出した平板と静止平板の間の流体流れ

```
/* 静止流体中突然動き出した平板と静止した平板 */
kill(all);
MAS1:'diff(w,z,1)+'diff(v,y,1)+'diff(u,x,1)
 =0;
NAV1:matrix([\rho*(('diff(u,z,1))*w
 +('diff(u,y,1))*v+u*('diff(u,x,1))
 +'diff(u,t,1))],[\rho*(('diff(v,z,1))*w
 +v*('diff(v,y,1))+u*('diff(v,x,1))
 +'diff(v,t,1))],[\rho*(w*('diff(w,z,1))
+v*('diff(w,y,1))+u*('diff(w,x,1))
+'diff(w,t,1))])=matrix([X+mu*('diff(u,z,2)
+'diff(u,y,2)+'diff(u,x,2))-'diff(p,x,1)],
[Y+mu*('diff(v,z,2)+'diff(v,y,2)
+'diff(v,x,2))
-'diff(p,y,1)],[Z+mu*('diff(w,z,2)
+'diff(w,y,2)+'diff(w,x,2))-'diff(p,z,1)]);
NAV2:lhs(NAV1)[1][1]=rhs(NAV1)[1][1];
subst([v=0,w=0,X=0,u=u(y,t),p=0],%);
NAV21:ev(%,diff);
ode2(NAV3,u(y,t),[y,t]);
NU1:\nu=\mu/\rho;
NU2:solve(%,\mu);
NAV22:subst([NU2],NAV21/\mu);
```

```
UTY0:u(y,t)=U*(1-y/h)-u1(y,t);
subst([UTY0],NAV22);
NAV23:ev(%,diff);
assume(p>0,\nu>0,t>0);
UYT1:u1(y,t)=f(y)*g(t);
subst([UYT1],NAV23);
ev(%,diff);
EQ1:%/f(y)/g(t);
EQT1:lhs(EQ1)=p^2;
EQY1:rhs(EQ1)=p^2;
```

x 軸方向の Navier-Stokes の式は (8.1.9) 式から、

$$\rho\left(\left(\frac{d}{dz}u\right)w+\left(\frac{d}{dy}u\right)v+u\left(\frac{d}{dx}u\right)+\frac{d}{dt}u\right)$$
$$=X+\mu\left(\frac{d^2}{dz^2}u+\frac{d^2}{dy^2}u+\frac{d^2}{dx^2}u\right)-\frac{d}{dx}p$$

上記から、流速は x 軸方向のみで、時間 t と y の関数となり、$v=0, w=0, X=0, u=u(y,t)$ とする。圧力：p は均一である。また、$\nu=\frac{\mu}{\rho}$ と置く。以上から上記の運動方程式は下記となる。

$$\frac{\frac{d}{dt}\,\mathrm{u}(y,t)}{\nu}=\frac{d^2}{dy^2}\mathrm{u}(y,t) \tag{8.7.9}$$

今、「8.2.1 二枚の平板間の流れ (Couette Flow)」(8.2.4) 式、347 頁から、$\frac{d}{dx}p=0$ とすると、$\mathrm{u}(y)=(1-\frac{y}{h})U$ の定常流が得られる。時間：t が十分経てば、これに収束するはずである。これを基に $\mathrm{u}(y,t)$ を下記と置く。

$$\mathrm{u}(y,t)=\left(1-\frac{y}{h}\right)U-\mathrm{u1}(y,t) \tag{8.7.10}$$

上式を (8.7.9) 式に代入すると、$\mathrm{u1}(y,t)$ のみの次式が得られる。

$$-\frac{\frac{d}{dt}\,\mathrm{u1}(y,t)}{\nu}=-\frac{d^2}{dy^2}\mathrm{u1}(y,t)$$

$\mathrm{u1}(y,t)$ を下記のように変数分離して解く。下記の式を上式に代入すると、

$$\mathrm{u1}(y,t)=\mathrm{g}(t)\,\mathrm{f}(y) \tag{8.7.11}$$

$$-\frac{\left(\frac{d}{dt}\mathrm{g}(t)\right)\mathrm{f}(y)}{\nu}=-\mathrm{g}(t)\left(\frac{d^2}{dy^2}\mathrm{f}(y)\right)$$

上式を整理して、

$$-\frac{\frac{d}{dt}\mathrm{g}(t)}{\nu\,\mathrm{g}(t)}=-\frac{\frac{d^2}{dy^2}\mathrm{f}(y)}{\mathrm{f}(y)}=p^2 \tag{8.7.12}$$

```
EQT2:ode2(EQT1,g(t),t);
EQY2:ode2(EQY1,f(y),y);
UTY2:subst([EQT2,EQY2,%c=1],UYT1);
UTY21:subst([y=0],rhs(UTY2))=0;
UTY22:subst([y=h],rhs(UTY2))=0;
BC1:%k2=0;
subst([BC1],UTY22);
BC2:p=n*%pi/h;
UTY3:subst([BC1,BC2],UTY2);
UTY31:lhs(UTY3)=sum(A[n]*rhs(UTY3)/%k1,n,1
 ,inf);
U1TY1:subst([UTY31],UTY0);
subst([t=0],U1TY1);
subst([u(y,0)=0],%);
U1TY3:first(rhs(%))=-last(rhs(%));
assume(h>0);
A[n]=2/h*'integrate(lhs(U1TY3)*
 sin((%pi*n*y)/h),y,0,h);
ev(%,integrate);
subst([sin(%pi*n)=0],%);
AN1:%;
UTY5:subst([AN1],U1TY1);
```

(8.7.12) 式を *ode2* 関数で解くと、

$$\mathrm{g}\left(t\right)=\%c\,e^{-\nu\,p^2\,t}$$

$$\mathrm{f}\left(y\right)=\%k1\sin\left(p\,y\right)+\%k2\cos\left(p\,y\right)$$

上式を (8.7.11) 式に代入し、解が得られた。

$$\mathrm{u1}\left(y,t\right)=e^{-\nu\,p^2\,t}\,\left(\%k1\sin\left(p\,y\right)+\%k2\cos\left(p\,y\right)\right)$$

境界条件：$y=0$ で $\mathrm{u1}\left(y,t\right)=0$、$y=h$ で $\mathrm{u1}\left(y,t\right)=0$ から、

$$\%k2\,e^{-\nu\,p^2\,t}=0$$

$$\left(\%k1\sin\left(h\,p\right)+\%k2\cos\left(h\,p\right)\right)\,e^{-\nu\,p^2\,t}=0$$

以上から、次式が得られ、常に成り立つには、

$$\%k2=0,\quad \%k1\sin\left(h\,p\right)\,e^{-\nu\,p^2\,t}=0,\quad p=\frac{\pi\,n}{h}$$

以上から、

$$\mathrm{u1}\left(y,t\right)=\%k1\,e^{-\frac{\pi^2\,n^2\,\nu\,t}{h^2}}\,\sin\left(\frac{\pi\,n\,y}{h}\right)$$

上式を級数表示して、

$$\mathrm{u1}\left(y,t\right)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\,e^{-\frac{\pi^2\,n^2\,\nu\,t}{h^2}}\,\sin\left(\frac{\pi\,n\,y}{h}\right)$$

上式を (8.7.10) 式に代入すると、

$$\mathrm{u}\left(y,t\right)=\left(1-\frac{y}{h}\right)\,U-\sum_{n=1}^{\infty}A_n\,e^{-\frac{\pi^2\,n^2\,\nu\,t}{h^2}}\,\sin\left(\frac{\pi\,n\,y}{h}\right) \tag{8.7.13}$$

次に、初期条件：$t=0$ で、流速は零であるから、

$$\mathrm{u}\left(y,0\right)=\left(1-\frac{y}{h}\right)\,U-\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\left(\frac{\pi\,n\,y}{h}\right)=0$$

上式から、

$$\left(1-\frac{y}{h}\right)\,U=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\left(\frac{\pi\,n\,y}{h}\right)$$

上式は Fourier 級数表記である。このとき係数：A_n は次式で得られる。

$$\begin{aligned}A_n=&\frac{2\,U}{h}\int_0^h\left(1-\frac{y}{h}\right)\,\sin\left(\frac{\pi\,n\,y}{h}\right)\,dy\\=&\frac{2\,U}{h}\,\left(\frac{h}{\pi\,n}-\frac{h\sin\left(\pi\,n\right)}{\pi^2\,n^2}\right)=\frac{2\,U}{\pi\,n}\end{aligned}$$

上式を (8.7.13) 式に代入し、流速分布：$\mathrm{u}\left(y,t\right)$ が得られた。

$$\mathrm{u}\left(y,t\right)=\left(1-\frac{y}{h}\right)\,U-\frac{2\,\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\frac{\pi^2\,n^2\,\nu\,t}{h^2}}\sin\left(\frac{\pi\,n\,y}{h}\right)}{n}\right)\,U}{\pi} \tag{8.7.14}$$

```
PL1:expand(subst([U=1,\nu=1,h=1,y=x,
 inf=100],rhs(%)));
plot2d([subst([t=0.0001],PL1),
 subst([t=0.001],PL1),subst([t=0.01],PL1),
 subst([t=0.03],PL1),subst([t=0.1],PL1),
 subst([t=0.2],PL1),subst([t=20],PL1)],
 [x,0,1],[y,-0.5,1.5],[legend, "t=0.0001",
  "t=0.001","t=0.01", "t=0.03","t=0.1",
  "t=0.2", "t=20"]);
```

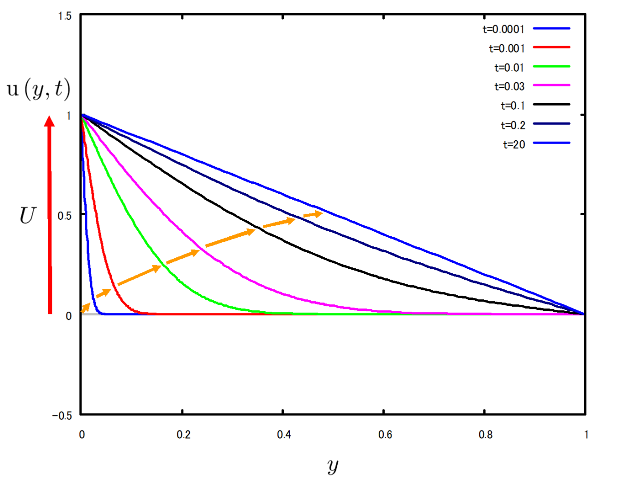


図 8.7.7: 突然動き出した平板と静止平板の間の流体流れ

8.7.3　円管内の出発流

半径:R の円管内に静止流体があり、突然圧力勾配が加わった軸対称の粘性流れを求める。円柱座標系の $r-\theta-z$ 座標軸の各速度コンポーネントを v_r, v_θ, v_z とし、圧力：p とする。円管軸方向を z 軸とし、それに直角方向を r 軸とし、粘性係数：μ とする。

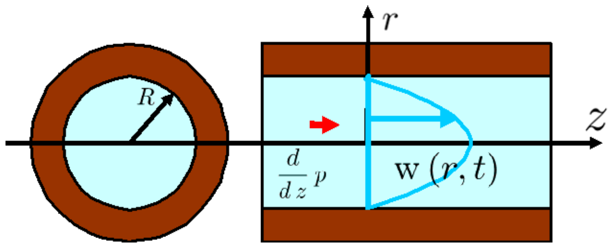


図 8.7.8: 円管内の出発流

```
/* 円管内の出発流 */
kill(all);
MAS2:'diff(v[z],z,1)+'diff(v[theta],theta,
 1)/r+'diff(v[r],r,1)+v[r]/r=0;
NAV2:matrix([rho*(('diff(v[r],z,1))*v[z]
 -v[theta]^2/r+(('diff(v[r],theta,1))
 *v[theta])/r+'diff(v[r],t,1)+v[r]
 *('diff(v[r],r,1)))],[rho*(('diff(
 v[theta],z,1))*v[z]+(v[theta]*(
 'diff(v[theta],theta,1)))/r+'diff(
 v[theta],t,1)+v[r]*('diff(v[theta],r,1
 ))+(v[r]*v[theta])/r)],[rho*(v[z]* ('
 diff(v[z],z,1))+(v[theta]*('diff(v[z],
 theta,1)))/r+'diff(v[z],t,1)+v[r]*('diff(
 v[z],r,1)))])=matrix([mu*(-(2*('diff(
 v[theta],theta,1)))/r^2+'diff(v[r],z,2)
 +'diff(v[r],theta,2)/r^2+'diff(v[r],r,2)
 +'diff(v[r],r,1)/r-v[r]/r^2)+F[r]
 -'diff(p,r,1)],[mu*('diff(v[theta],z,2)
 +'diff(v[theta],theta,2)/r^2+'diff(
 v[theta],r,2)+'diff(v[theta],r,1)/r
 -v[theta]/r^2+(2*('diff(v[r],theta,1)))
 /r^2)+F[theta]-'diff(p,theta,1)/r],[mu*
 ('diff(v[z],z,2)+'diff(v[z],theta,2)/r^2
 +'diff(v[z],r,2)+'diff(v[z],r,1)/r)
 +F[z]-'diff(p,z,1)]);
NAV2:lhs(NAV1)[3][1]=rhs(NAV1)[3][1];
subst([v[r]=0,v[z]=w(r,t),v[theta]=0,
 F[z]=0,p=p(z)],%);
NAV21:ev(%,diff);
```

```
subst([v[r]=0,v[z]=v(r),v[theta]=0,
 F[z]=0,p=p(z)],NAV2);
NAV22:ev(%,diff);
rhs(%)=0;
```

円柱座標系の z 軸方向 Navier-Stokes の式は (8.1.15) 式から、

$$\rho\left(v_z\left(\frac{d}{d\,z}\,v_z\right)+\frac{v_\theta\left(\frac{d}{d\,\theta}\,v_z\right)}{r}+\frac{d}{d\,t}\,v_z\right.$$
$$\left.+\,v_r\left(\frac{d}{d\,r}\,v_z\right)\right)$$
$$=\mu\left(\frac{d^2}{d\,z^2}\,v_z+\frac{\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,v_z}{r^2}+\frac{d^2}{d\,r^2}\,v_z+\frac{\frac{d}{d\,r}\,v_z}{r}\right)$$
$$+\,F_z-\frac{d}{d\,z}\,p$$

流速は時間：t と r の関数で、流速：$v_z = w = \mathrm{w}(r,t)$ とすると運動方程式は、

$$\left(\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{w}\left(r,t\right)\right)\rho=\mu\left(\frac{d^2}{d\,r^2}\,\mathrm{w}\left(r,t\right)+\frac{\frac{d}{d\,r}\,\mathrm{w}\left(r,t\right)}{r}\right)-\frac{d}{d\,z}\,\mathrm{p}\left(z\right) \tag{8.7.15}$$

時間が十分経った定常状態では、流速:$v_z = \mathrm{v}\left(r\right)$ とすると運動方程式は、

$$\mu\left(\frac{d^2}{d\,r^2}\,\mathrm{v}\left(r\right)+\frac{\frac{d}{d\,r}\,\mathrm{v}\left(r\right)}{r}\right)-\frac{d}{d\,z}\,\mathrm{p}\left(z\right)=0 \tag{8.7.16}$$

```
ode2(%,v(r),r);
ANS01:subst([%k1=0],%);
subst([r=R],rhs(%))=0;
solve(%,%k2)[1];
ANS02:factor(subst([%],ANS01));
```

(8.7.16) 式を *ode2* 関数で解くと、

$$\mathrm{v}\left(r\right)=\frac{r^2\left(\frac{d}{d\,z}\,\mathrm{p}\left(z\right)\right)}{4\,\mu}-\frac{\%k1\,\log\left(r\right)}{\mu}+\%k2$$

境界条件：$r = R$ で $\mathrm{v}\left(r\right) = 0$ とすると、$\%k1 = 0$ で、

$$\frac{\left(\frac{d}{d\,z}\,\mathrm{p}\left(z\right)\right)\,R^2}{4\,\mu}+\%k2=0$$

$$\%k2=-\frac{\left(\frac{d}{d\,z}\,\mathrm{p}\left(z\right)\right)\,R^2}{4\,\mu}$$

以上から、時間が十分経った定常状態の流速:$\mathrm{v}\left(r\right)$ は、

$$\mathrm{v}\left(r\right)=-\frac{\left(\frac{d}{d\,z}\,\mathrm{p}\left(z\right)\right)\,\left(R-r\right)\,\left(R+r\right)}{4\,\mu} \tag{8.7.17}$$

```
W1:w(r,t)=rhs(ANS02)+w1(r,t);
subst([W1],NAV21);
ev(%,diff);
NAV32:expand(factor(%));
WRT1:w1(r,t)=a(r)*b(t);
subst([WRT1],NAV32);
ev(%,diff);
EQ1:expand(%/a(r)/b(t)/\rho);
EQT1:lhs(EQ1)=-L^2;
EQR1:rhs(EQ1)=-L^2;
assume(L>0,\rho>0,\mu>0,R>0);
EQT2:ode2(EQT1,b(t),t);
EQT21:subst([%c=1],EQT2);
expand(EQR1/\mu*a(r)*\rho);
lhs(%)-rhs(%)=0;
```

時間が十分経った定常状態の流速を考慮し、(8.7.17) 式から、流速分布：$\mathrm{w}(r,t)$ を次式とする。

$$\mathrm{w}\left(r,t\right)=\mathrm{w1}\left(r,t\right)-\frac{\left(\frac{d}{d\,z}\,\mathrm{p}\left(z\right)\right)\,\left(R-r\right)\,\left(R+r\right)}{4\,\mu} \tag{8.7.18}$$

上式を (8.7.15) 式に代入すると、

$$\left(\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{w1}\left(r,t\right)\right)\,\rho=\mu\,\left(\frac{d^2}{d\,r^2}\,\mathrm{w1}\left(r,t\right)\right)+\frac{\mu\,\left(\frac{d}{d\,r}\,\mathrm{w1}\left(r,t\right)\right)}{r}$$

$\mathrm{w1}\left(r,t\right)$ を変数分離法で解く。次式を上式に代入し、

$$\mathrm{w1}\left(r,t\right)=\mathrm{a}\left(r\right)\,\mathrm{b}\left(t\right) \tag{8.7.19}$$

$$\mathrm{a}\left(r\right)\,\rho\,\left(\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{b}\left(t\right)\right)=\mu\,\left(\frac{d^2}{d\,r^2}\,\mathrm{a}\left(r\right)\right)\,\mathrm{b}\left(t\right)+\frac{\mu\,\left(\frac{d}{d\,r}\,\mathrm{a}\left(r\right)\right)\,\mathrm{b}\left(t\right)}{r}$$

上式を整理すると、

$$\frac{\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{b}\left(t\right)}{\mathrm{b}\left(t\right)}=\frac{\mu\,\left(\frac{d^2}{d\,r^2}\,\mathrm{a}\left(r\right)\right)}{\mathrm{a}\left(r\right)\,\rho}+\frac{\mu\,\left(\frac{d}{d\,r}\,\mathrm{a}\left(r\right)\right)}{r\,\mathrm{a}\left(r\right)\,\rho}=-L^2 \tag{8.7.20}$$

上式左辺項の $\mathrm{b}\left(t\right)$ を $ode2$ 関数で解くと、

$$\mathrm{b}\left(t\right)=e^{-t\,L^2} \tag{8.7.21}$$

上式右辺項の $\mathrm{a}\left(r\right)$ を整理すると、

$$\frac{\mathrm{a}\left(r\right)\,\rho\,L^2}{\mu}+\frac{d^2}{d\,r^2}\,\mathrm{a}\left(r\right)+\frac{\frac{d}{d\,r}\,\mathrm{a}\left(r\right)}{r}=0 \tag{8.7.22}$$

```
EQR11:subst([a(r)=v(x),r=x],%);
B2:B^2=coeff(lhs(EQR11),v(x));
A:0;
C:1;
B:sqrt(rhs(B2));
N:0;
EQ:EQR11;
FC:v(r);
VA:r;
FCTR:u(t);
VATR:t;
TRFC:v(x)=f(t)*u(t)+g(x);
TRFCVA:f(t)=(t/B)^(A/C);
TRFCG:g(x)=0;
subst(rhs(TRFCVA),lhs(TRFCVA),TRFC);
TRFC0:subst(rhs(TRFCG),lhs(TRFCG),%);
TRFC1:solve(TRFC0,FCTR)[1];
TRVA:t=B*x^C;
TRVA1:x=(t/B)^(1/C);
assume(t>0);
EQTRFC:EQ;
DVX1:'diff(v(x),x,1)='diff(u(t),t,1)
 *1/(diff(rhs(TRVA1),t,1));
DVX2:'diff(v(x),x,2)='diff(u(t),t,2)
 *1/(diff(rhs(TRVA1),t,1)^2);
subst([DVX1,DVX2,TRFC0,TRVA1],EQTRFC);
expand(%*\mu/\rho);
ode2(%,u(t),t);
subst([u(t)=a(r),TRVA,x=r],%);
EQR2:subst([%k2=0],%);
```

(8.7.22) 式は Bessel の微分方程式であるが、このままでは $ode2$ 関数で解けないので、下記の式に (8.7.22) 式を当てはめ、A,B,C,N を求め変数変換を行う。(参照：Maxima を使った微分方程式演習ノート　4.5 Bessel の微分方程式（23 頁））

$$\frac{d^2}{d\,x^2}\,v\left(x\right)+\frac{\left(1-2\,A\right)}{x}\,\frac{d}{d\,x}\,v\left(x\right)+\left(\frac{A^2-C^2\,N^2}{x^2}+x^{2\,C-2}\,B^2\,C^2\right)\,v\left(x\right)=0$$

$$v\left(x\right)=u\left(t\right)\,\left(\frac{t}{B}\right)^{\frac{A}{C}},\quad x=\left(\frac{t}{B}\right)^{\frac{1}{C}}$$

以上から、$A=0,C=1,B=\sqrt{\frac{\rho\,L^2}{\mu}},N=0$ となり、下記の変換関数となる。

$$\frac{\rho\,\mathrm{v}\left(x\right)\,L^2}{\mu}+\frac{d^2}{d\,x^2}\,\mathrm{v}\left(x\right)+\frac{\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{v}\left(x\right)}{x}=0$$

$$\mathrm{v}\left(x\right)=\mathrm{u}\left(t\right),\quad t=\frac{\sqrt{\rho}\,x\,L}{\sqrt{\mu}},\quad x=\frac{\sqrt{\mu}\,t}{\sqrt{\rho}\,L}$$

下記の変数を求めておき、

$$\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{v}\,(x)=\frac{\sqrt{\rho}\,\left(\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{u}\,(t)\right)\,L}{\sqrt{\mu}}$$

$$\frac{d^2}{d\,x^2}\,\mathrm{v}\,(x)=\frac{\rho\,\left(\frac{d^2}{d\,t^2}\,\mathrm{u}\,(t)\right)\,L^2}{\mu}$$

代入して、次式が得られる。

$$\left(\frac{d^2}{d\,t^2}\,\mathrm{u}\,(t)\right)\,L^2+\frac{\left(\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{u}\,(t)\right)\,L^2}{t}+\mathrm{u}\,(t)\,L^2=0$$

これを $ode2$ 関数で解くと、

$$\mathrm{u}\,(t)=\mathrm{bessel\_y}\,(0,t)\ \%k2+\mathrm{bessel\_j}\,(0,t)\ \%k1$$

変数を元に戻して、$\mathrm{a}\,(r)$ を求めると、

$$\begin{aligned}\mathrm{a}\,(r)=&\mathrm{bessel\_y}\left(0,\frac{r\,\sqrt{\rho}\,L}{\sqrt{\mu}}\right)\ \%k2\\&+\mathrm{bessel\_j}\left(0,\frac{r\,\sqrt{\rho}\,L}{\sqrt{\mu}}\right)\ \%k1\end{aligned}$$

bessel_y は適合しないので、$\%k2=0$ として、

$$\mathrm{a}\,(r)=\mathrm{bessel\_j}\left(0,\frac{r\,\sqrt{\rho}\,L}{\sqrt{\mu}}\right)\ \%k1 \tag{8.7.23}$$

```
ANS1:subst([WRT1,EQR2,EQT21],W1);
first(rhs(%));
CANS1:subst([%k1=1,L=L[n]],%);
CANS2:D[n]*CANS1;
ANS2:lhs(ANS1)=sum(CANS2,n,1,inf)
 +last(rhs(ANS1));
BESLA1:subst([t=0,r=R],CANS1)=0;
EN1:(L[n]*sqrt(rho)*R)/sqrt(mu)=E[n];
EN2:solve(%,L[n])[1];
ANS21:subst([EN2],ANS2);
```

(8.7.23) 式、(8.7.21) 式、(8.7.19) 式を (8.7.18) 式に代入すると、

$$\begin{aligned}\mathrm{w}\,(r,t)=&\mathrm{bessel\_j}\left(0,\frac{r\,\sqrt{\rho}\,L}{\sqrt{\mu}}\right)\ \%k1\,e^{-t\,L^2}\\&-\frac{\left(\frac{d}{d\,z}\,\mathrm{p}\,(z)\right)\,(R-r)\,(R+r)}{4\,\mu}\end{aligned}$$

上式を級数表記にして、

$$\begin{aligned}\mathrm{w}\,(r,t)=&\left(\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{bessel\_j}\left(0,\frac{L_n\,r\,\sqrt{\rho}}{\sqrt{\mu}}\right)\,D_n\,e^{-L_n^2\,t}\right)\\&-\frac{\left(\frac{d}{d\,z}\,\mathrm{p}\,(z)\right)\,(R-r)\,(R+r)}{4\,\mu}\end{aligned}$$

ここで上式は $r=R$ で $\mathrm{w}\,(r,t)=0$ が常に成り立たねばならないから、次式の関係が要求される。

$$\mathrm{bessel\_j}\left(0,\frac{L_n\,\sqrt{\rho}\,R}{\sqrt{\mu}}\right)=0$$

上式が成り立つ係数：E_n を導入し、

$$\frac{L_n\,\sqrt{\rho}\,R}{\sqrt{\mu}}=E_n$$

この関係を級数表記の式に代入すると、

$$\begin{aligned}\mathrm{w}\,(r,t)=&\left(\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{bessel\_j}\left(0,\frac{E_n\,r}{R}\right)\,D_n\,e^{-\frac{\mu\,E_n^2\,t}{\rho\,R^2}}\right)\\&-\frac{\left(\frac{d}{d\,z}\,\mathrm{p}\,(z)\right)\,(R-r)\,(R+r)}{4\,\mu}\end{aligned} \tag{8.7.24}$$

```
BC1:subst([t=0],rhs(ANS21))=0;
BC2:%-last(lhs(%));
DN1:D[n]=2/R^2/(bessel_j(1,(E[n]*R)/R))^2
 *'integrate(r*rhs(BC2)*bessel_j
 (0,(E[n]*r)/R),r,0,R);
DN11:subst([r=R*x],DN1);
subst([R=1],num(rhs(DN11)))*R^4;
DN2:lhs(DN1)=%/denom(rhs(DN11));
DN3:lhs(DN1)=('diff(p(z),z,1))*R^2*4/
 (2*(E[n]^3)*bessel_j(1,E[n])*mu);
ANS3:subst([DN3],ANS21);
DANS31:(2*('diff(p(z),z,1))*R^2*(
 bessel_j(0,(E[n]*r)/R)*%e^(-(
 mu*E[n]^2*t)/(rho*R^2)))/(bessel_j(1,E[n])
 *E[n]^3))/mu;
DANS32:subst([E[n]=n*%pi-%pi/4],DANS31);
subst([E[n]=2.40483],DANS31)+subst([E[n]
 =5.52008],DANS31)+subst([E[n]=8.65373],
 DANS31)+subst([E[n]=11.79153],DANS31);
ANS31:%+sum(DANS32,n,5,inf)+last(rhs(ANS1
 ));
```

次に、初期条件として、$t=0$ で $\mathrm{w}\,(r,0)=0$ であるから、これを上式に代入し、

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{bessel\_j}\left(0,\frac{E_n\,r}{R}\right)\,D_n\\&=\frac{\left(\frac{d}{d\,z}\,\mathrm{p}\,(z)\right)\,(R-r)\,(R+r)}{4\,\mu}\end{aligned}$$

上式は Fourier-Bessel 級数であり、その係数：D_n は次式で得られる。

$$\begin{aligned}D_n=&\frac{\left(\frac{d}{d\,z}\,\mathrm{p}\,(z)\right)}{2\,\mathrm{bessel\_j}\,(1,E_n)^2\,\mu\,R^2}\\&\times\int_0^R\mathrm{bessel\_j}\left(0,\frac{E_n\,r}{R}\right)\,r\,(R-r)\,(R+r)\,dr\\=&\frac{\left(\frac{d}{d\,z}\,\mathrm{p}\,(z)\right)\,R^2}{2\,\mathrm{bessel\_j}\,(1,E_n)^2\,\mu}\\&\times\int_0^1\mathrm{bessel\_j}\,(0,E_n\,x)\,(1-x)\,x\,(x+1)\,dx\\=&\frac{2\,\left(\frac{d}{d\,z}\,\mathrm{p}\,(z)\right)\,R^2}{\mathrm{bessel\_j}\,(1,E_n)\,\mu\,E_n^3}\end{aligned}$$

上式を (8.7.24) 式に代入し、流速分布：$\mathrm{w}(r,t)$ が得られる。

$$\begin{aligned}\mathrm{w}(r,t) =& \frac{2\left(\frac{d}{dz}\,\mathrm{p}(z)\right)\,R^2}{\mu\,\mathrm{bessel\_j}(1,E_n)\,E_n^3} \\ &\times \sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{bessel\_j}\left(0,\frac{E_n\,r}{R}\right)\,e^{-\frac{\mu\,E_n^2\,t}{\rho\,R^2}} \\ &- \frac{\left(\frac{d}{dz}\,\mathrm{p}(z)\right)\,(R-r)\,(R+r)}{4\,\mu}\end{aligned} \qquad (8.7.25)$$

ここで E_n は $\mathrm{bessel\_j}(0,z)=0$ となる z であり、数表から下記の値となる。

$$E_1 = 2.40483, E_2 = 5.52008, E_3 = 8.65373,$$
$$E_4 = 11.79153$$

z が大きいときは Bessel 関数は次式で近似できる。

$$\mathrm{bessel\_j}(m,z) \approx \frac{\sqrt{2}\cos\left(z-\frac{\pi\,(2\,m+1)}{4}\right)}{\sqrt{\pi}\,\sqrt{z}}$$

上式から $\mathrm{bessel\_j}(m,z)=0$ となる z は cos 項を零として得られ、

$$z - \frac{\pi\,(2\,m+1)}{4} = \pi\,n - \frac{\pi}{2}$$

求める z は次式で得られる。

$$z = \frac{\pi\,m}{2} + \pi\,n - \frac{\pi}{4}$$

$m=0$ であるから、E_n は、

$$E_n = \pi\,n - \frac{\pi}{4}$$

```
PL1:expand(subst(['diff(p(z),z,1)=1,R=1,
 \mu=1,\rho=1,r=x,inf=10],%));
plot2d([subst([t=0.0001],PL1),
 subst([t=0.01],PL1),subst([t=0.03],PL1),
 subst([t=0.1],PL1),subst([t=0.3],PL1),
 subst([t=0.5],PL1),subst([t=1],PL1)],
 [x,0,1],[y,-0.3,0],[legend, "t=0.0001",
  "t=0.01","t=0.03", "t=0.1","t=0.3",
 "t=0.5", "t=1"]);
```

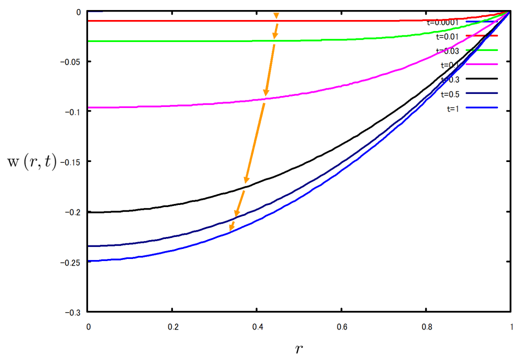


図 8.7.9: 円管内の出発流

8.7.4　二平板内の出発流

平行平板間隔：h 内に静止流体があり、突然圧力勾配が加わった粘性流れを求める。x-y-z 座標軸の各速度コンポーネントを u, v, w とする。圧力：p、粘性係数：μ、x 方向の外力：X とする。

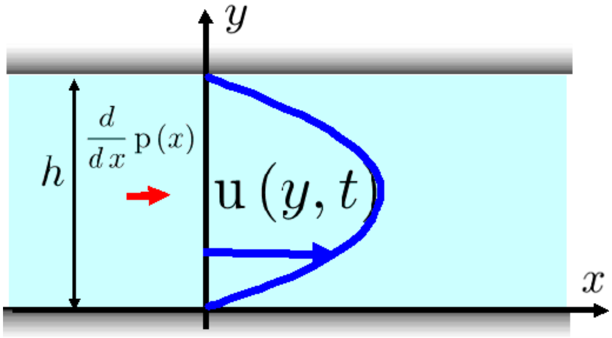


図 8.7.10: 二平板内の出発流

```
/* 二平板内の出発流 */
kill(all);
MAS1:'diff(w,z,1)+'diff(v,y,1)+'diff(u,x,1)
 =0;
NAV1:matrix([\rho*(('diff(u,z,1))*w
 +('diff(u,y,1))*v+u*('diff(u,x,1))
 +'diff(u,t,1))],[\rho*(('diff(v,z,1))*w
 +v*('diff(v,y,1))+u*('diff(v,x,1))
 +'diff(v,t,1))],[\rho*(w*('diff(w,z,1))
+v*('diff(w,y,1))+u*('diff(w,x,1))
+'diff(w,t,1))])=matrix([X+mu*('diff(u,z,2)
+'diff(u,y,2)+'diff(u,x,2))-'diff(p,x,1)],
[Y+mu*('diff(v,z,2)+'diff(v,y,2)
+'diff(v,x,2))
-'diff(p,y,1)],[Z+mu*('diff(w,z,2)
+'diff(w,y,2)+'diff(w,x,2))-'diff(p,z,1)]);
NAV2:lhs(NAV1)[1][1]=rhs(NAV1)[1][1];
NAV2:lhs(NAV1)[1][1]=rhs(NAV1)[1][1];
subst([v=0,w=0,X=0,u=u(y,t),p=p(x)],%);
NAV21:ev(%,diff);
subst([v=0,w=0,X=0,u=u(y),p=p(x)],NAV2);
NAV20:ev(%,diff);
ANS01:ode2(%,u(y),y);
BC01:subst([y=h],rhs(ANS01))=0;
BC02:subst([y=0],rhs(ANS01))=0;
solve([BC01,BC02],[%k1,%k2])[1];
ANS02:factor(subst([%],ANS01));
```

x 軸方向の Navier-Stokes の式は (8.1.9) 式から、

$$\rho\left(\left(\frac{d}{d\,z}\,u\right)\,w+\left(\frac{d}{d\,y}\,u\right)\,v+u\,\left(\frac{d}{d\,x}\,u\right)+\frac{d}{d\,t}\,u\right)$$
$$=X+\mu\,\left(\frac{d^2}{d\,z^2}\,u+\frac{d^2}{d\,y^2}\,u+\frac{d^2}{d\,x^2}\,u\right)-\frac{d}{d\,x}\,p$$

流速は x 軸方向のみで、時間：t と y の関数で、流速：$u=u(y,t)$ とすると運動方程式は、

$$\rho\,\left(\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{u}\,(y,t)\right)=\mu\,\left(\frac{d^2}{d\,y^2}\,\mathrm{u}\,(y,t)\right)-\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{p}\,(x) \tag{8.7.26}$$

ここで、まず、定常流について求めると、流速は x 軸方向のみで y の関数で、流速：$u=u(y)$ とすると運動方程式は、

$$0=\mu\,\left(\frac{d^2}{d\,y^2}\,\mathrm{u}\,(y)\right)-\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{p}\,(x) \tag{8.7.27}$$

上式を $ode2$ 関数を用いて解くと、

$$\mathrm{u}\,(y)=\frac{\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{p}\,(x)\right)\,y^2}{2\,\mu}+\%k2\,y+\%k1$$

境界条件として、$y=0$ で $u(y)=0$、$y=h$ で $u(y)=0$ であるから、

$$[\%k1=0,\%k2=-\frac{h\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{p}\,(x)\right)}{2\,\mu}]$$

以上から、時間が十分経った定常状態の流速:$u(y)$ は、

$$\mathrm{u}\,(y)=\frac{\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{p}\,(x)\right)\,y\,(y-h)}{2\,\mu} \tag{8.7.28}$$

```
UTY1:u(y,t)=rhs(ANS02)+u1(y,t);
subst([UTY1],NAV21);
NAV3:factor(ev(%,diff));
assume(\nu>0,C>0,y>0,h>0);
UTY2:u1(y,t)=a(y)*b(t);
subst([UTY2],NAV3);
ev(%,diff);
%/a(y)/b(t)/\rho;
NAV31:subst([\mu=\nu*\rho],%);
NAV32:lhs(NAV31)=-C^2;
NAV33:rhs(NAV31)=-C^2;
```

以上から、流速:$u(y,t)$ を定常状態を考慮して下記とする。

$$\mathrm{u}\,(y,t)=\mathrm{u1}\,(y,t)+\frac{\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{p}\,(x)\right)\,y\,(y-h)}{2\,\mu} \tag{8.7.29}$$

上式を運動方程式:(8.7.26) 式に代入すると、

$$\rho\,\left(\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{u1}\,(y,t)\right)=\mu\,\left(\frac{d^2}{d\,y^2}\,\mathrm{u1}\,(y,t)\right)$$

上式を下記の変数分離法で解く。次式を上式に代入し、

$$\mathrm{u1}\,(y,t)=\mathrm{b}\,(t)\,\mathrm{a}\,(y) \tag{8.7.30}$$

$$\rho \left(\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{b}\,(t)\right)\,\mathrm{a}\,(y) = \mu\,\mathrm{b}\,(t)\,\left(\frac{d^2}{d\,y^2}\,\mathrm{a}\,(y)\right)$$

上式を整理すると、

$$\frac{\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{b}\,(t)}{\mathrm{b}\,(t)} = \frac{\mu\,\left(\frac{d^2}{d\,y^2}\,\mathrm{a}\,(y)\right)}{\rho\,\mathrm{a}\,(y)} = -C^2 \tag{8.7.31}$$

```
ode2(NAV32,b(t),t);
ANSB1:subst([%c=1],%);
ode2(NAV33,a(y),y);
ANSA1:subst([%k2=0],%);
UTY21:subst([ANSB1,ANSA1],UTY2);
BC1:(h*C)/sqrt(nu)=n*%pi;
BC11:solve(BC1,C)[1];
UTY22:subst([BC11],UTY21);
DUTY2:subst([%k1=1],rhs(%));
UTY3:u(y,t)=rhs(ANS02)+sum(A[n]*DUTY2,n,1
  ,inf);
```

*ode*2 関数で解いて次式が得られる。

$$\mathrm{b}\,(t) = \%c\,e^{-t\,C^2}$$

$$\mathrm{a}\,(y) = \%k1\sin\left(\frac{y\,C}{\sqrt{\nu}}\right) + \%k2\cos\left(\frac{y\,C}{\sqrt{\nu}}\right)$$

境界条件から、$y = 0$ で $u(y) = 0$、$y = h$ で $u(y) = 0$ が常に成り立つためには、、

$$\mathrm{u1}\,(y,t) = \%k1\,e^{-t\,C^2}\sin\left(\frac{y\,C}{\sqrt{\nu}}\right)$$

そして、

$$\frac{h\,C}{\sqrt{\nu}} = \pi\,n, \quad C = \frac{\pi\,n\,\sqrt{\nu}}{h}$$

上式から運動方程式が成り立つ解は下記となる。

$$\mathrm{u1}\,(y,t) = \%k1\,e^{-\frac{\pi^2\,n^2\,\nu\,t}{h^2}}\sin\left(\frac{\pi\,n\,y}{h}\right) \tag{8.7.32}$$

```
UTY4:subst([t=0],rhs(UTY3))=0;
UTY41:-(%-first(lhs(%)));
AN1:A[n]=2/h*'integrate(lhs(UTY41)
 *sin((%pi*n*y)/h),y,0,h);
ev(%,integrate);
AN11:factor(subst([sin(%pi*n)=0],%));
UTY31:subst([AN11],UTY3);
```

(8.7.32) 式を (8.7.29) 式に代入し、級数表記すると、

$$\begin{aligned}\mathrm{u}\,(y,t) = &\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\,e^{-\frac{\pi^2\,n^2\,\nu\,t}{h^2}}\sin\left(\frac{\pi\,n\,y}{h}\right)\right)\\ &+ \frac{\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{p}\,(x)\right)\,y\,(y-h)}{2\,\mu}\end{aligned} \tag{8.7.33}$$

上式で、$t = 0$ の初期条件では、$\mathrm{u}\,(y,t) = 0$ であるから、次式を得る。

$$-\frac{\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{p}\,(x)\right)\,y\,(y-h)}{2\,\mu} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\sin\left(\frac{\pi\,n\,y}{h}\right)$$

上式は Fourier 級数表記であるから、係数：A_n は次式で得られる。

$$\begin{aligned}A_n &= -\frac{\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{p}\,(x)\right)}{h\,\mu}\int_0^h y\,(y-h)\,\sin\left(\frac{\pi\,n\,y}{h}\right)dy\\ &= -\frac{2\,h^2\,(\cos(\pi\,n)-1)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{p}\,(x)\right)}{\pi^3\,\mu\,n^3}\end{aligned} \tag{8.7.34}$$

上式を (8.7.33) 式に代入すると流速分布：$\mathrm{u}\,(y,t)$ が得られる。

$$\begin{aligned}\mathrm{u}\,(y,t) = &\frac{\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{p}\,(x)\right)\,y\,(y-h)}{2\,\mu} - \frac{2\,h^2\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{p}\,(x)\right)}{\pi^3\,\mu}\\ &\times \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\cos(\pi\,n)-1)}{n^3}\,e^{-\frac{\pi^2\,n^2\,\nu\,t}{h^2}}\sin\left(\frac{\pi\,n\,y}{h}\right)\end{aligned} \tag{8.7.35}$$

```
PL1:expand(subst(['diff(p(x),x,1)=1,h=1,
 \nu=1,\mu=1,y=x,inf=10],rhs(UTY31)));
plot2d([subst([t=0.00000000001],PL1),
 subst([t=0.01],PL1),subst([t=0.03],PL1),
 subst([t=0.1],PL1),subst([t=0.2],PL1),
 subst([t=0.4],PL1),subst([t=1],PL1)],
 [x,0,1],[y,-0.2,0],[legend,
 "t=0.00000000001", "t=0.01","t=0.03",
 "t=0.1","t=0.2", "t=0.4", "t=1"]);
```

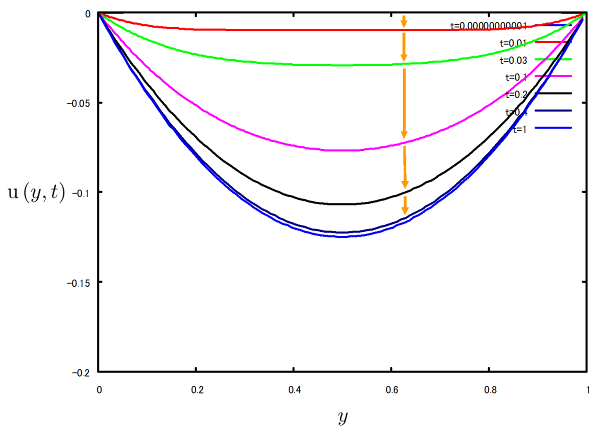


図 8.7.11: 二平板内の出発流

8.7.5 円筒内静止流体で突然回転した円筒の流れ

半径:R の円筒内に静止流体があり、突然回転角速度：Ω で回転した円筒内の軸対称の粘性流れを求める。円柱座標系の $r-\theta-z$ 座標軸の各速度コンポーネントを v_r, v_θ, v_z とする。回転軸を z 軸とし、粘性係数：μ、動粘性係数：ν とする。

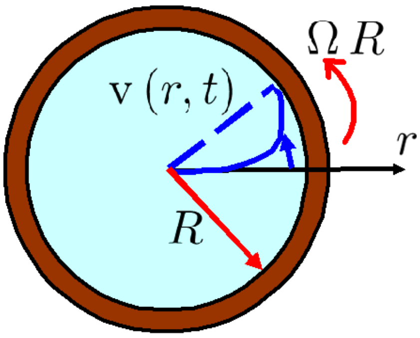


図 8.7.12: 円筒内静止流体で突然回転した円筒の流れ

```
/* 円管内の出発流 */
kill(all);
MAS2:'diff(v[z],z,1)+'diff(v[theta],theta,
 1)/r+'diff(v[r],r,1)+v[r]/r=0;
NAV2:matrix([rho*(('diff(v[r],z,1))*v[z]
 -v[theta]^2/r+(('diff(v[r],theta,1))
 *v[theta])/r+'diff(v[r],t,1)+v[r]
 *('diff(v[r],r,1)))],[rho*(('diff(
 v[theta],z,1))*v[z]+(v[theta]*(
 'diff(v[theta],theta,1)))/r+'diff(
 v[theta],t,1)+v[r]*('diff(v[theta],r,1
 ))+(v[r]*v[theta])/r)],[rho*(v[z]* ('
 diff(v[z],z,1))+(v[theta]*('diff(v[z],
 theta,1)))/r+'diff(v[z],t,1)+v[r]*('diff(
 v[z],r,1)))])=matrix([mu*(-(2*('diff(
 v[theta],theta,1)))/r^2+'diff(v[r],z,2)
 +'diff(v[r],theta,2)/r^2+'diff(v[r],r,2)
 +'diff(v[r],r,1)/r-v[r]/r^2)+F[r]
 -'diff(p,r,1)],[mu*('diff(v[theta],z,2)
 +'diff(v[theta],theta,2)/r^2+'diff(
 v[theta],r,2)+'diff(v[theta],r,1)/r
 -v[theta]/r^2+(2*('diff(v[r],theta,1)))
 /r^2)+F[theta]-'diff(p,theta,1)/r],[mu*
 ('diff(v[z],z,2)+'diff(v[z],theta,2)/r^2
 +'diff(v[z],r,2)+'diff(v[z],r,1)/r)
 +F[z]-'diff(p,z,1)]);
NAV2:lhs(NAV1)[3][1]=rhs(NAV1)[3][1];
subst([v[r]=0,v[z]=w(r,t),v[theta]=0,
 F[z]=0,p=p(z)],%);
NAV21:ev(%,diff);
```

```
subst([v[z]=0,v[r]=0,v[theta]=v(r,t),
 F[z]=0,F[r]=0,F[\theta]=0,p=p(r)],NAV1);
ev(%,diff);
NAV2:lhs(%)[2][1]=rhs(%)[2][1];
/* 定常流れ */
subst([v(r,t)=w(r)],NAV2);
NAV3:ev(%,diff);
ANS01:ode2(%,w(r),r);
subst([%k1=0,r=R],rhs(%))=\Omega*R;
BC01:solve(%,%k2)[1];
ANS02:subst([%,%k1=0],ANS01);
```

θ 軸方向の Navier-Stokes の式は (8.1.15) 式から、

$$\rho\left(\left(\frac{d}{d\,z}\,v_\theta\right)\,v_z+\frac{v_\theta\,\left(\frac{d}{d\,\theta}\,v_\theta\right)}{r}+\frac{d}{d\,t}\,v_\theta\right.$$
$$\left.+\,v_r\,\left(\frac{d}{d\,r}\,v_\theta\right)+\frac{v_r\,v_\theta}{r}\right)$$
$$=\mu\left(\frac{d^2}{d\,z^2}\,v_\theta+\frac{\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,v_\theta}{r^2}+\frac{d^2}{d\,r^2}\,v_\theta+\frac{\frac{d}{d\,r}\,v_\theta}{r}\right.$$
$$\left.-\,\frac{v_\theta}{r^2}+\frac{2\,\left(\frac{d}{d\,\theta}\,v_r\right)}{r^2}\right)+F_\theta-\frac{\frac{d}{d\,\theta}\,p}{r}$$

流速は θ 向のみで、時間：t と r の関数で、流速：$v_\theta = \mathrm{v}\,(r,t)$ とすると運動方程式は、

$$\left(\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{v}\,(r,t)\right)\,\rho=\mu\left(\frac{d^2}{d\,r^2}\,\mathrm{v}\,(r,t)+\frac{\frac{d}{d\,r}\,\mathrm{v}\,(r,t)}{r}\right.$$
$$\left.-\,\frac{\mathrm{v}\,(r,t)}{r^2}\right) \tag{8.7.36}$$

時間が十分経った定常状態では、流速:$v_\theta = \mathrm{w}\,(r)$ とすると運動方程式は、

$$0=\mu\left(\frac{d^2}{d\,r^2}\,\mathrm{w}\,(r)+\frac{\frac{d}{d\,r}\,\mathrm{w}\,(r)}{r}-\frac{\mathrm{w}\,(r)}{r^2}\right) \tag{8.7.37}$$

上式を $ode2$ 関数で解くと、

$$\mathrm{w}\,(r)=\%k2\,r-\frac{\%k1}{2\,r}$$

境界条件から、$r = R$ で、流速：$\mathrm{w}\,(r) = \Omega\,R$ であるから、

$$\%k2=\Omega,\quad \%k1=0$$

以上から、定常状態の流速分布:$\mathrm{w}\,(r)$ は、

$$\mathrm{w}\,(r)=\Omega\,r \tag{8.7.38}$$

```
V1:v(r,t)=w(r)+v1(r,t);
V2:subst([ANS02],V1);
subst([V2],NAV2);
ev(%,diff);
NAV31:expand(%/\rho);
NU1:\nu=\mu/\rho;
NU2:solve(%,\mu)[1];
NAV32:subst([NU2],NAV31);
V3:v1(r,t)=a(r)*b(t);
subst([V3],NAV32);
ev(%,diff);
NAV4:expand(%/a(r)/b(t));
assume(L[n]>0);
NAV41:lhs(NAV4)=-L[n]^2;
NAV42:rhs(NAV4)=-L[n]^2;
ANSB1:ode2(NAV41,b(t),t);
```

時間が十分経った定常状態を考慮し、(8.7.38) 式から、流速分布：$\mathrm{v}(r,t)$ を次式とする。

$$\mathrm{v}(r,t)=\mathrm{v1}(r,t)+\Omega\,r \qquad (8.7.39)$$

上式を (8.7.36) 式に代入し、$\nu=\frac{\mu}{\rho}$ とすると、

$$\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{v1}(r,t)=\nu\left(\frac{d^2}{d\,r^2}\,\mathrm{v1}(r,t)\right)+\frac{\nu\,\left(\frac{d}{d\,r}\,\mathrm{v1}(r,t)\right)}{r}-\frac{\nu\,\mathrm{v1}(r,t)}{r^2} \qquad (8.7.40)$$

上式を下記の変数分離法で解く。次式を上式に代入し、

$$\mathrm{v1}(r,t)=\mathrm{a}(r)\ \mathrm{b}(t) \qquad (8.7.41)$$

$$\mathrm{a}(r)\ \left(\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{b}(t)\right)=\nu\,\left(\frac{d^2}{d\,r^2}\,\mathrm{a}(r)\right)\ \mathrm{b}(t)+\frac{\nu\,\left(\frac{d}{d\,r}\,\mathrm{a}(r)\right)\ \mathrm{b}(t)}{r}-\frac{\nu\,\mathrm{a}(r)\ \mathrm{b}(t)}{r^2}$$

上式を整理して、

$$\frac{\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{b}(t)}{\mathrm{b}(t)}=\frac{\nu\,\left(\frac{d^2}{d\,r^2}\,\mathrm{a}(r)\right)}{\mathrm{a}(r)}+\frac{\nu\,\left(\frac{d}{d\,r}\,\mathrm{a}(r)\right)}{r\,\mathrm{a}(r)}-\frac{\nu}{r^2}=-L_n^2 \qquad (8.7.42)$$

上式左辺を $ode2$ 関数で解くと、

$$\mathrm{b}(t)=\%c\,e^{-L_n^2\,t} \qquad (8.7.43)$$

```
NAV43:expand((lhs(NAV42)-rhs(NAV42)=0)
 /\nu*a(r));
EQR11:subst([a(r)=v(x),r=x],%);
A:0;
C:1;
B:sqrt(L[n]^2/\nu);
N:1;
EQ:EQR11;
FC:v(r);
VA:r;
FCTR:u(t);
VATR:t;
TRFC:v(x)=f(t)*u(t)+g(x);
TRFCVA:f(t)=(t/B)^(A/C);
TRFCG:g(x)=0;
subst(rhs(TRFCVA),lhs(TRFCVA),TRFC);
TRFC0:subst(rhs(TRFCG),lhs(TRFCG),%);
TRFC1:solve(TRFC0,FCTR)[1];
TRVA:t=B*x^C;
TRVA1:x=(t/B)^(1/C);
assume(t>0);
EQTRFC:EQ;
DVX1:'diff(v(x),x,1)='diff(u(t),t,1)*1
 /(diff(rhs(TRVA1),t,1));
DVX2:'diff(v(x),x,2)='diff(u(t),t,2)*1
 /(diff(rhs(TRVA1),t,1)^2);
subst([DVX1,DVX2,TRFC0,TRVA1],EQTRFC);
expand(%*\mu/\rho);
ode2(%,u(t),t);
subst([u(t)=a(r),TRVA,x=r],%);
ANSA1:subst([%k2=0],%);
```

(8.7.42) 式の右辺を整理し、

$$\frac{d^2}{d\,r^2}\,\mathrm{a}(r)+\frac{\frac{d}{d\,r}\,\mathrm{a}(r)}{r}-\frac{\mathrm{a}(r)}{r^2}+\frac{L_n^2\,\mathrm{a}(r)}{\nu}=0$$

$\mathrm{a}(r)\to\mathrm{v}(x)$ に置き換えると、

$$\frac{d^2}{d\,x^2}\,\mathrm{v}(x)+\frac{\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{v}(x)}{x}-\frac{\mathrm{v}(x)}{x^2}+\frac{L_n^2\,\mathrm{v}(x)}{\nu}=0 \qquad (8.7.44)$$

上式は Bessel の微分方程式で、このままでは $ode2$ 関数で解けないので、下記の式に (8.7.44) 式を当てはめ、A,B,C,N を求め変数変換を行う。（参照：Maxima を使った微分方程式演習ノート　4.5 Bessel の微分方程式（23 頁））

$$\frac{d^2}{d\,x^2}\,v(x)+\frac{(1-2\,A)}{x}\,\frac{d}{d\,x}\,v(x)+\left(\frac{A^2-C^2\,N^2}{x^2}+x^{2\,C-2}\,B^2\,C^2\right)\,v(x)=0$$

$$v(x)=u(t)\,\left(\frac{t}{B}\right)^{\frac{A}{C}},\quad x=\left(\frac{t}{B}\right)^{\frac{1}{C}}$$

以上から、$A=0, C=1, B=\sqrt{L_n^2/\nu}, N=1$ となり、下記の変換関数となる。

$$\mathrm{v}\left(x\right)=\mathrm{u}\left(t\right),\quad t=\frac{L_n\,x}{\sqrt{\nu}},\quad x=\frac{\sqrt{\nu}\,t}{L_n}$$

下記の変数を求めておき、

$$\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{v}\left(x\right)=\frac{L_n\,\left(\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{u}\left(t\right)\right)}{\sqrt{\nu}}$$

$$\frac{d^2}{d\,x^2}\,\mathrm{v}\left(x\right)=\frac{L_n^2\,\left(\frac{d^2}{d\,t^2}\,\mathrm{u}\left(t\right)\right)}{\nu}$$

代入して、次式が得られる。

$$\frac{d^2}{d\,t^2}\,\mathrm{u}\left(t\right)+\frac{\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{u}\left(t\right)}{t}-\frac{\mathrm{u}\left(t\right)}{t^2}+\mathrm{u}\left(t\right)=0$$

上式を $ode2$ 関数で解いて、

$$\mathrm{u}\left(t\right)=\mathrm{bessel\_y}\left(1,t\right)\,\%k2+\mathrm{bessel\_j}\left(1,t\right)\,\%k1$$

変数を元に戻して、$\mathrm{a}\left(r\right)$ を求めると、

$$\begin{aligned}\mathrm{a}\left(r\right)=&\mathrm{bessel\_y}\left(1,\frac{L_n\,r}{\sqrt{\nu}}\right)\,\%k2\\&+\mathrm{bessel\_j}\left(1,\frac{L_n\,r}{\sqrt{\nu}}\right)\,\%k1\end{aligned}$$

bessel_y は適合しないので、

$$\mathrm{a}\left(r\right)=\mathrm{bessel\_j}\left(1,\frac{L_n\,r}{\sqrt{\nu}}\right)\,\%k1 \tag{8.7.45}$$

```
V31:subst([ANSA1,ANSB1,%c=1],V3);
rhs(V31)/%k1;
V32:lhs(V31)=sum(D[n]*%,n,1,inf);
V33:subst([V32],V2);
BC1:rhs(ANSA1/%k1)=0;
EN1:E[n]=(L[n]*R)/sqrt(\nu);
EN2:solve(EN1,L[n])[1];
V4:subst([EN2],V33);
subst([t=0],rhs(V4))=0;
INC1:-(%-last(lhs(%)));
DN1:D[n]=2/R^2/bessel_j(2,E[n])^2
 *'integrate(r*lhs(INC1)*bessel_j(
 1,(E[n]*r)/R),r,0,R);
DN11:subst([r=R*x],DN1);
subst([R=1],num(rhs(DN11)))*R^3;
DN2:lhs(DN1)=%/denom(rhs(DN11));
'integrate(bessel_j(1,E[n]*x)*x^2,
 x,0,1)=1/E[n]*bessel_j(2,E[n]);
DN3:subst([%],DN2);
V5:subst([DN3],V4);
```

(8.7.43) 式と (8.7.45) 式を (8.7.41) 式に代入し、

$$\mathrm{v1}\left(r,t\right)=\mathrm{bessel\_j}\left(1,\frac{L_n\,r}{\sqrt{\nu}}\right)\,\%k1\,e^{-L_n^2\,t}$$

上式を級数表記して、

$$\mathrm{v1}\left(r,t\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{bessel\_j}\left(1,\frac{L_n\,r}{\sqrt{\nu}}\right)\,D_n\,e^{-L_n^2\,t} \tag{8.7.46}$$

上式を (8.7.39) 式に代入し、運動方程式を満足する流速分布：$\mathrm{v}\left(r,t\right)$ が得られた。

$$\mathrm{v}\left(r,t\right)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{bessel\_j}\left(1,\frac{L_n\,r}{\sqrt{\nu}}\right)\,D_n\,e^{-L_n^2\,t}\right)+\Omega\,r$$

境界条件として、$r=R$ で下記の関係が成り立たねばならない。これが成り立つ E_n を導入する。

$$\mathrm{bessel\_j}\left(1,\frac{L_n\,R}{\sqrt{\nu}}\right)=0,\quad E_n=\frac{L_n\,R}{\sqrt{\nu}}$$

上記の関係から、

$$\mathrm{v}\left(r,t\right)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{bessel\_j}\left(1,\frac{E_n\,r}{R}\right)\,D_n\,e^{-\frac{E_n^2\,\nu\,t}{R^2}}\right)+\Omega\,r \tag{8.7.47}$$

初期条件として、$t=0$ で $\mathrm{v}\left(r,0\right)=0$ であるから、

$$-\Omega\,r=\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{bessel\_j}\left(1,\frac{E_n\,r}{R}\right)\,D_n$$

上式は Fourier-Bessel 級数であるから、その係数：D_n は次式で得られる。

$$\begin{aligned}D_n&=-\frac{2\,\Omega\,\int_0^R\mathrm{bessel\_j}\left(1,\frac{E_n\,r}{R}\right)\,r^2dr}{\mathrm{bessel\_j}\left(2,E_n\right)^2\,R^2}\\&=-\frac{2\,\Omega\,\int_0^1\mathrm{bessel\_j}\left(1,E_n\,x\right)\,x^2dx\,R}{\mathrm{bessel\_j}\left(2,E_n\right)^2}\end{aligned}$$

ここで下記の積分公式を活用し、

$$\int_0^1\mathrm{bessel\_j}\left(1,E_n\,x\right)\,x^2dx=\frac{\mathrm{bessel\_j}\left(2,E_n\right)}{E_n}$$

係数：D_n は、

$$D_n=-\frac{2\,\Omega\,R}{\mathrm{bessel\_j}\left(2,E_n\right)\,E_n}$$

上式を (8.7.47) 式に代入し、流速分布：$\mathrm{v}\left(r,t\right)$ が得られた。

$$\mathrm{v}\left(r,t\right)=\Omega\,r-2\,\Omega\,R\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{bessel\_j}\left(1,\frac{E_n\,r}{R}\right)\,e^{-\frac{E_n^2\,\nu\,t}{R^2}}}{\mathrm{bessel\_j}\left(2,E_n\right)\,E_n} \tag{8.7.48}$$

ここで E_n は $\mathrm{bessel\_j}\left(1,z\right)=0$ となる z であり、数表から下記の値となる。

$$E_1=3.83171, E_2=7.01559, E_3=10.17347,$$
$$E_4=13.32369$$

z が大きいときは Bessel 関数は次式で近似できる。

$$\mathrm{bessel\_j}\left(m,z\right)\approx\frac{\sqrt{2}\cos\left(z-\frac{\pi\,(2\,m+1)}{4}\right)}{\sqrt{\pi}\,\sqrt{z}}$$

上式から bessel_j $(m,z)=0$ となる z は cos 項を零として得られ、

$$z-\frac{\pi\,(2\,m+1)}{4}=\pi\,n-\frac{\pi}{2}$$

求める z は次式で得られる。

$$z=\frac{\pi\,m}{2}+\pi\,n-\frac{\pi}{4}$$

$m=1$ であるから、E_n は、

$$E_n=\pi\left(n+\frac{1}{4}\right)$$

```
DV5:-2*\Omega*R*(bessel_j(1,(E[n]*r)/R)*
 %e^(-(E[n]^2*\nu*t)/R^2))/(bessel_j(2,
 E[n])*E[n]);
first(rhs(V5))+subst([E[n]=3.83171],DV5)
 +subst([E[n]=7.01559],DV5)+subst([E[n]=
 10.17347],DV5)+subst([E[n]=13.32369],
 DV5)+sum(DV5,n,5,inf);
V51:subst([E[n]=%pi*(1/2+n-1/4)],%);
PL1:expand(subst([\Omega=1,R=1,\nu=1,
 \rho=1,r=x,inf=100],V51));
plot2d([subst([t=0.0003],PL1),
 subst([t=0.003],PL1),subst([t=0.01],PL1),
 subst([t=0.03],PL1),subst([t=0.1],PL1),
 subst([t=0.2],PL1),subst([t=1],PL1)],
 [x,0,1],[y,-0.5,1.5],[legend, "t=0.0003",
  "t=0.003","t=0.01", "t=0.03","t=0.1",
  "t=0.2", "t=1"]);
```

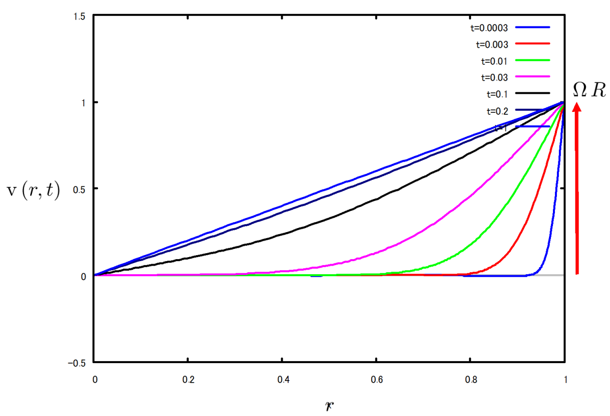


図 8.7.13: 円筒内静止流体で突然回転した円筒の流れ

8.7.6　渦糸の減衰

渦強さ：Γ の渦糸が原点にあり、初期状態では、$r=0$ 以外は渦度が零とする。この初期に集中していた渦度の拡散の軸対称の粘性流れについて調べる [1]。二次元極座標系の $r-\theta$ 座標軸の各速度コンポーネントを v_r, v_θ、動粘性係数：ν とする。

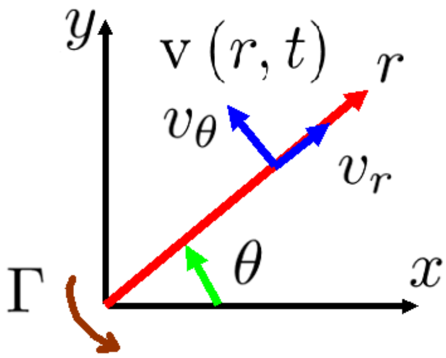


図 8.7.14: 渦糸の減衰

```
/* 渦糸の減衰 極座標表記 */
kill(all);
NAVW1:(('diff(\omega,\theta,1))*v[\theta])
 /r+('diff(\omega,r,1))*v[r]
 +'diff(\omega,t,1)=(\nu*('diff(\omega,r,1)
 ))/r+(\nu*('diff(\omega,\theta,2)))/r^2
 +\nu*('diff(\omega,r,2));
subst([\omega=w(r,t),v[r]=0],NAVW1);
NAV21:ev(%,diff);
ode2(%,w(r,t),[r,t]);
W1:w(r,t)=f(r)*g(t);
subst([W1],NAV21);
ev(%,diff);
NAV3:factor(%/f(r)/g(t));
assume(p>0);
NAV31:lhs(NAV3)=-p^2;
ANSG1:ode2(%,g(t),t);
rhs(NAV3)=-p^2;
%/\nu*r*f(r);
NAV32:%-rhs(%);
EQR11:subst([f(r)=v(x),r=x],%);
```

二次元極座標系の渦度方程式は、(8.1.44) 式から、

$$\frac{\left(\frac{d}{d\theta}\omega\right) v_\theta}{r}+\left(\frac{d}{d\,r}\omega\right) v_r+\frac{d}{d\,t}\omega = \frac{\nu\left(\frac{d}{d\,r}\omega\right)}{r}+\frac{\nu\left(\frac{d^2}{d\theta^2}\omega\right)}{r^2}+\nu\left(\frac{d^2}{d\,r^2}\omega\right) \tag{8.7.49}$$

渦度：ω を $\omega=\mathrm{w}(r,t)$ とおき、$v_r=0$ であるから、渦度方程式は、

$$\frac{d}{d\,t}\mathrm{w}(r,t)=\nu\left(\frac{d^2}{d\,r^2}\mathrm{w}(r,t)\right)+\frac{\nu\left(\frac{d}{d\,r}\mathrm{w}(r,t)\right)}{r} \tag{8.7.50}$$

次式の変数分離法を用いて上式を解く。

$$\mathrm{w}(r,t)=\mathrm{f}(r)\,\mathrm{g}(t) \tag{8.7.51}$$

上式を (8.7.50) 式に代入し、

$$\mathrm{f}(r)\left(\frac{d}{d\,t}\mathrm{g}(t)\right) = \nu\left(\frac{d^2}{d\,r^2}\mathrm{f}(r)\right)\mathrm{g}(t)+\frac{\nu\left(\frac{d}{d\,r}\mathrm{f}(r)\right)\mathrm{g}(t)}{r}$$

整理すると、

$$\frac{\frac{d}{d\,t}\mathrm{g}(t)}{\mathrm{g}(t)}=\frac{\nu\left(r\left(\frac{d^2}{d\,r^2}\mathrm{f}(r)\right)+\frac{d}{d\,r}\mathrm{f}(r)\right)}{r\,\mathrm{f}(r)}=-p^2$$

上式の左辺を $ode2$ 関数で解くと、

$$\mathrm{g}(t)=\%c\,e^{-p^2\,t} \tag{8.7.52}$$

右辺を整理すると、

$$r\left(\frac{d^2}{d\,r^2}\mathrm{f}(r)\right)+\frac{d}{d\,r}\mathrm{f}(r)=-\frac{p^2\,r\,\mathrm{f}(r)}{\nu}$$

```
A:0;
C:1;
B:sqrt(p^2/\nu);
N:1;
EQ:EQR11;
FC:v(r);
VA:r;
FCTR:u(t);
VATR:t;
TRFC:v(x)=f(t)*u(t)+g(x);
TRFCVA:f(t)=(t/B)^(A/C);
TRFCG:g(x)=0;
subst(rhs(TRFCVA),lhs(TRFCVA),TRFC);
TRFC0:subst(rhs(TRFCG),lhs(TRFCG),%);
TRFC1:solve(TRFC0,FCTR)[1];
TRVA:t=B*x^C;
TRVA1:x=(t/B)^(1/C);
assume(t>0);
EQTRFC:EQ;
DVX1:'diff(v(x),x,1)='diff(u(t),t,1)*1
 /(diff(rhs(TRVA1),t,1));
DVX2:'diff(v(x),x,2)='diff(u(t),t,2)*1
 /(diff(rhs(TRVA1),t,1)^2);
```

[1]G. K. Batchelor：入門　流体力学 18)、4.5 P.201

```
subst([DVX1,DVX2,TRFC0,TRVA1],EQTRFC);
expand(%*\mu/\rho);
ode2(%,u(t),t);
subst([u(t)=f(r),TRVA,x=r],%);
ANSF1:subst([%k2=0],%);
W11:subst([ANSG1,ANSF1,%c=1],W1);
W12:lhs(%)='integrate(rhs(W11)/%k1*h(p)*p,
 p,0,inf);
```

上式を $\mathrm{f}(r) \to \mathrm{v}(x)$ に置き換え、

$$x\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,\mathrm{v}(x)\right)+\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{v}(x)+\frac{p^2\,x\,\mathrm{v}(x)}{\nu}=0 \quad (8.7.53)$$

上式は Bessel の微分方程式で、このままでは *ode*2 関数で解けないので、下記の式に上式を当てはめ、A, B, C, N を求め変数変換を行う。(参照:Maxima を使った微分方程式演習ノート　4.5 Bessel の微分方程式（23 頁))

$$\frac{d^2}{d\,x^2}\,v(x)+\frac{(1-2\,A)}{x}\frac{d}{d\,x}\,v(x)+\left(\frac{A^2-C^2\,N^2}{x^2}+x^{2\,C-2}\,B^2\,C^2\right)\,v(x)=0$$

以上から、$A=0, C=1, B=\frac{p}{\sqrt{\nu}}, N=1$ となり、下記の変換関数となる。

$$\mathrm{v}(x)=\mathrm{u}(t),\quad t=\frac{p\,x}{\sqrt{\nu}},\quad x=\frac{\sqrt{\nu}\,t}{p}$$

下記の変数を求めておき、

$$\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{v}(x)=\frac{p\,\left(\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{u}(t)\right)}{\sqrt{\nu}}$$

$$\frac{d^2}{d\,x^2}\,\mathrm{v}(x)=\frac{p^2\,\left(\frac{d^2}{d\,t^2}\,\mathrm{u}(t)\right)}{\nu}$$

上式を代入して、次式が得られる。

$$t\left(\frac{d^2}{d\,t^2}\,\mathrm{u}(t)\right)+\left(\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{u}(t)\right)+t\,\mathrm{u}(t)=0$$

上式を *ode*2 関数で解いて、

$$\mathrm{u}(t)=\mathrm{bessel\_y}(0,t)\ \%k2+\mathrm{bessel\_j}(0,t)\ \%k1$$

変数を元に戻して、$\mathrm{f}(r)$ を求めると、

$$\mathrm{f}(r)=\mathrm{bessel\_y}\left(0,\frac{p\,r}{\sqrt{\nu}}\right)\ \%k2+\mathrm{bessel\_j}\left(0,\frac{p\,r}{\sqrt{\nu}}\right)\ \%k1$$

bessel_y は適合しないので、

$$\mathrm{f}(r)=\mathrm{bessel\_j}\left(0,\frac{p\,r}{\sqrt{\nu}}\right)\ \%k1 \quad (8.7.54)$$

上式と (8.7.52) 式を (8.7.51) 式に代入し、下記の基本解が得られた。

$$\mathrm{w}(r,t)=\mathrm{bessel\_j}\left(0,\frac{p\,r}{\sqrt{\nu}}\right)\ \%k1\,e^{-p^2\,t} \quad (8.7.55)$$

領域が無限であるので、極座標の Fourier 積分に相当する、下記の Hankel Transform を活用する。

$$\begin{aligned}f(r)&=\int_0^\infty \mathrm{bessel\_j}(\nu,kr)\ k\,F_\nu(k)\,dk\\F_\nu(k)&=\int_0^\infty \mathrm{bessel\_j}(\nu,kr)\ r\,f(r)\,dr\end{aligned} \quad (8.7.56)$$

上式を考慮して、(8.7.55) 式を下記のように書き換える。

$$\mathrm{w}(r,t)=\int_0^\infty \mathrm{bessel\_j}\left(0,\frac{p\,r}{\sqrt{\nu}}\right)\ p\,\mathrm{h}(p)\ e^{-p^2\,t}dp \quad (8.7.57)$$

```
W121:subst([t=0],%);
DE1:de(r)=E*%e^(-r^2/\sigma^2/2);
assume(\sigma>0,\Gamma>0);
'integrate(rhs(DE1),r,0,inf)*2;
1=ev(%,integrate);
solve(%,E)[1];
DE2:subst([%],DE1);
PL1:subst([\sigma=1],rhs(DE2));
plot2d(PL1,[r,0,10]);
'integrate(rhs(DE1)*2*%pi*r,r,0,inf);
1=ev(%,integrate);
solve(%,E)[1];
DE3:subst([%],DE1);
PL1:subst([\sigma=1],rhs(DE3));
plot2d(PL1,[r,0,10]);
INC1:\Gamma*rhs(DE3)=rhs(W121);
INC2:h(p)='integrate(lhs(INC1)*bessel_j(0,
 (p*r)/sqrt(\nu))*r,r,0,inf);
BINT1:'integrate(%e^(-a^2*r^2)*r*bessel_j(
 0,b*r),r,0,inf)=%e^(-(b^2)/(4*a^2))
 /(2*a^2);
subst([a=sqrt(1/(2*\sigma^2)),
 b=p/sqrt(\nu)],%);
HP1:subst([%],INC2);
W14:subst([HP1],W12);
subst([r=p],BINT1);
expand(subst([a^2=(t+\sigma^2/2/\nu),
 b=r/sqrt(\nu)],%));
subst([%],W14);
W15:subst([\sigma=0],%);
```

(8.7.57) 式で $t=0$ とすると、

$$\mathrm{w}(r,0)=\int_0^\infty \mathrm{bessel\_j}\left(0,\frac{p\,r}{\sqrt{\nu}}\right)\ p\,\mathrm{h}(p)\,dp \quad (8.7.58)$$

ここで $\mathrm{w}(r,0)$ として、問題の仮定から、$r=0$ の集中する delta 関数を考える。関数の形として、e^{-r^2} の形で、体積が単位量となる delta 関数は下記となる。ここで σ は分散である。

$$\mathrm{de}(r)=\frac{e^{-\frac{r^2}{2\,\sigma^2}}}{2\,\pi\,\sigma^2}$$

渦強さ：Γ とし、上記 delta 関数から、w $(r,0)$ を求め、(8.7.58) 式は次式となる。

$$\frac{\Gamma\, e^{-\frac{r^2}{2\,\sigma^2}}}{2\,\pi\,\sigma^2}=\int_0^\infty \mathrm{bessel\_j}\left(0,\frac{p\,r}{\sqrt{\nu}}\right)\,p\,\mathrm{h}\,(p)\,dp$$

(8.7.56) 式の Hankel Transform から、

$$\mathrm{h}\,(p)=\frac{\Gamma}{2\,\pi\,\sigma^2}\int_0^\infty \mathrm{bessel\_j}\left(0,\frac{p\,r}{\sqrt{\nu}}\right)\,r\,e^{-\frac{r^2}{2\,\sigma^2}}\,dr \tag{8.7.59}$$

下記の積分公式から、

$$\int_0^\infty \mathrm{bessel\_j}\,(0,b\,r)\,r\,e^{-a^2\,r^2}\,dr=\frac{e^{-\frac{b^2}{4\,a^2}}}{2\,a^2}$$

(8.7.59) 式の積分は下記となり、

$$\int_0^\infty \mathrm{bessel\_j}\left(0,\frac{p\,r}{\sqrt{\nu}}\right)\,r\,e^{-\frac{r^2}{2\,\sigma^2}}\,dr=\sigma^2\,e^{-\frac{p^2\,\sigma^2}{2\,\nu}}$$

(8.7.59) 式は下記となる。

$$\mathrm{h}\,(p)=\frac{\Gamma\,e^{-\frac{p^2\,\sigma^2}{2\,\nu}}}{2\,\pi}$$

上式を (8.7.57) 式に代入すると、

$$\mathrm{w}\,(r,t)=\frac{\Gamma}{2\,\pi}\int_0^\infty \mathrm{bessel\_j}\left(0,\frac{p\,r}{\sqrt{\nu}}\right)\,p\,e^{-p^2\,t-\frac{p^2\,\sigma^2}{2\,\nu}}\,dp \tag{8.7.60}$$

上記の積分公式から、(8.7.60) 式の積分は

$$\int_0^\infty \mathrm{bessel_j}\left(0,\frac{p\,r}{\sqrt{\nu}}\right)\,p\,e^{-p^2\,t-\frac{p^2\,\sigma^2}{2\,\nu}}\,dp
=\frac{1}{2\,t\,e^{\frac{r^2}{4\,\nu\,t+2\,\sigma^2}}+\frac{\sigma^2\,e^{\frac{r^2}{4\,\nu\,t+2\,\sigma^2}}}{\nu}}$$

以上の結果を (8.7.60) 式に代入し、

$$\begin{aligned}\mathrm{w}\,(r,t)=&\frac{\Gamma}{2\,\pi\,\left(2\,t\,e^{\frac{r^2}{4\,\nu\,t+2\,\sigma^2}}+\frac{\sigma^2\,e^{\frac{r^2}{4\,\nu\,t+2\,\sigma^2}}}{\nu}\right)}\\ =&\frac{\Gamma\,\nu\,e^{-\frac{r^2}{4\,\nu\,t+2\,\sigma^2}}}{2\,\pi\,\left(2\,\nu\,t+\sigma^2\right)}\end{aligned}$$

上式で、$\sigma\to 0$ とすると、渦度の分布と時間変化は、

$$\mathrm{w}\,(r,t)=\frac{\Gamma\,e^{-\frac{r^2}{4\,\nu\,t}}}{4\,\pi\,t} \tag{8.7.61}$$

```
assume(r>0);
W2:\omega=(r*('diff(v[\theta],r,1))
 +v[\theta]-'diff(v[r],theta,1))/r;
subst([\omega=w(r,t),v[\theta]=v(r),
 v[r]=0],W2);
```

```
VR1:v(r)='integrate(r*w(r,t),r,0,r)/r;
subst([W15],%);
VR2:factor(ev(%,integrate));
PL1:expand(subst([\Gamma=1,\nu=1],
 rhs(VR2)));
plot2d([subst([t=0.0003],PL1),
 subst([t=0.003],PL1),subst([t=0.01],PL1),
 subst([t=0.03],PL1),subst([t=0.1],PL1),
 subst([t=0.2],PL1),subst([t=1],PL1)],
 [r,0,5],[y,0,1],[legend, "t=0.0003",
 "t=0.003","t=0.01", "t=0.03","t=0.1",
 "t=0.2", "t=1"]);
```

次に上記の渦度分布による流速分布：v (r,t) を求める。渦度：ω と流速の関係は (8.1.45) 式から、

$$\omega=\frac{r\,\left(\frac{d}{d\,r}\,v_\theta\right)+v_\theta-\frac{d}{d\,\theta}\,v_r}{r}$$

上式で、$\omega=\mathrm{w}\,(r,t)\,,v_\theta=\mathrm{v}\,(r,t)\,,v_r=0$ を代入し、

$$\mathrm{w}\,(r,t)=\frac{r\,\left(\frac{d}{d\,r}\,\mathrm{v}\,(r,t)\right)+\mathrm{v}\,(r,t)}{r}$$

上式を $ode2$ 関数で解いて、(8.7.61) 式の結果を代入し、

$$\mathrm{v}\,(r,t)=\frac{1}{r}\int_0^r r\,\mathrm{w}\,(r,t)\,dr=\frac{\Gamma}{4\,\pi\,r\,t}\int_0^r r\,e^{-\frac{r^2}{4\,\nu\,t}}\,dr$$

積分を行うと流速分布：v (r,t) が次式で得られる。

$$\mathrm{v}\,(r,t)=\frac{\Gamma\,\nu}{2\,\pi\,r}\,e^{-\frac{r^2}{4\,\nu\,t}}\,\left(e^{\frac{r^2}{4\,\nu\,t}}-1\right) \tag{8.7.62}$$

初期状態では、渦が中心に集中し、周りの流体は完全流体で粘性がないときの流れとなっており、$t>0$ で粘性の影響が出て、渦が拡散していく様子が示されている。

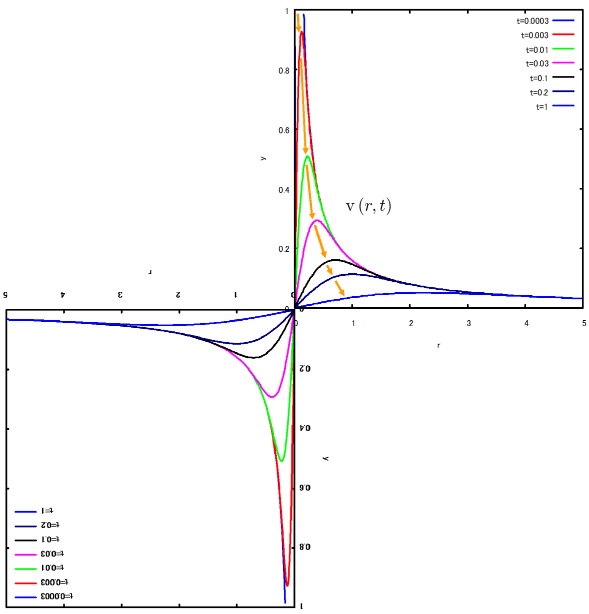


図 8.7.15: 渦糸の減衰

8.7.7 自由表面に力が作用したときの流れ

水面：$y=0$ から下に無限大の水深があるとする。水面に x 軸方向に風などによる一定力：$\mu\,S$ が作用したときの粘性流れを求める。x-y-z 座標軸の各速度コンポーネントを u, v, w とする。圧力：p、粘性係数：μ、x 方向の外力：X とする。

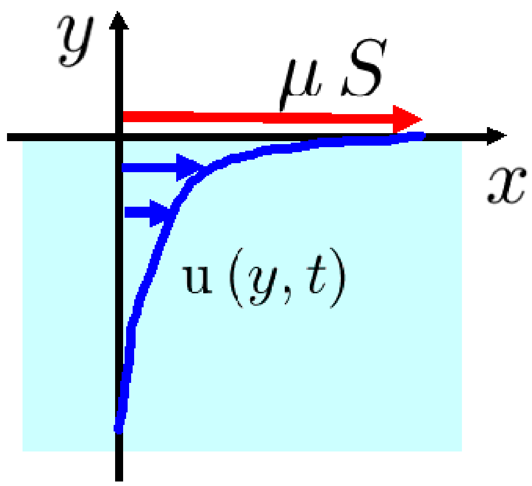


図 8.7.16: 自由表面に力が作用したときの流れ

```
/* 静止流体中突然動き出した平板と静止した平板 */
kill(all);
MAS1:'diff(w,z,1)+'diff(v,y,1)+'diff(u,x,1)
 =0;
NAV1:matrix([\rho*(('diff(u,z,1))*w
 +('diff(u,y,1))*v+u*('diff(u,x,1))
 +'diff(u,t,1))],[\rho*(('diff(v,z,1))*w
 +v*('diff(v,y,1))+u*('diff(v,x,1))
 +'diff(v,t,1))],[\rho*(w*('diff(w,z,1))
+v*('diff(w,y,1))+u*('diff(w,x,1))
+'diff(w,t,1))])=matrix([X+mu*('diff(u,z,2)
+'diff(u,y,2)+'diff(u,x,2))-'diff(p,x,1)],
[Y+mu*('diff(v,z,2)+'diff(v,y,2)
+'diff(v,x,2))
-'diff(p,y,1)],[Z+mu*('diff(w,z,2)
+'diff(w,y,2)+'diff(w,x,2))-'diff(p,z,1)]);
NAV2:lhs(NAV1)[1][1]=rhs(NAV1)[1][1];
subst([v=0,w=0,X=0,u=u(y,t),p=0],%);
NAV21:ev(%,diff);
NAV22:subst([\mu=\nu*\rho],NAV21/\rho);
NAV3:diff(NAV22,y,1);
V1:v(y,t)=diff(u(y,t),y,1);
V2:rhs(V1)=lhs(V1);
DVT1:diff(V2,t,1);
DVY2:diff(V2,y,2);
NAV31:subst([DVT1,DVY2],NAV3);
```

x 軸方向の Navier-Stokes の式は (8.1.9) 式から、

$$\rho\left(\left(\frac{d}{d\,z}\,u\right)\,w+\left(\frac{d}{d\,y}\,u\right)\,v+u\,\left(\frac{d}{d\,x}\,u\right)+\frac{d}{d\,t}\,u\right)$$
$$=X+\mu\,\left(\frac{d^2}{d\,z^2}\,u+\frac{d^2}{d\,y^2}\,u+\frac{d^2}{d\,x^2}\,u\right)-\frac{d}{d\,x}\,p$$

上記から、流速は x 軸方向のみで、時間 t と y の関数となり、$v=0, w=0, X=0, u=u(y,t)$ とする。圧力：p は均一である。また、$\nu=\frac{\mu}{\rho}$ と置く。以上から上記の運動方程式は下記となる。ここで $\mathrm{u}\,(y,t)$ の境界条件は、$y=0$ で $\mu\,\frac{d}{d\,y}\,\mathrm{u}\,(y,t)=\mu\,S$、$y=-\infty$ で $\mathrm{u}\,(y,t)=0$ である。

$$\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{u}\,(y,t)=\nu\,\left(\frac{d^2}{d\,y^2}\,\mathrm{u}\,(y,t)\right) \tag{8.7.63}$$

上式を y で微分すると、

$$\frac{d^2}{d\,t\,d\,y}\,\mathrm{u}\,(y,t)=\nu\,\left(\frac{d^3}{d\,y^3}\,\mathrm{u}\,(y,t)\right) \tag{8.7.64}$$

ここで、下記で定義される $\mathrm{v}\,(y,t)$ を導入する.

$$\mathrm{v}\,(y,t)=\frac{d}{d\,y}\,\mathrm{u}\,(y,t) \tag{8.7.65}$$

上式を t で 1 階微分、y で 2 階微分すると下記となり、

$$\frac{d^2}{d\,t\,d\,y}\,\mathrm{u}\,(y,t)=\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{v}\,(y,t)$$
$$\frac{d^3}{d\,y^3}\,\mathrm{u}\,(y,t)=\frac{d^2}{d\,y^2}\,\mathrm{v}\,(y,t)$$

上式を (8.7.64) 式に代入すると次式を得る。

$$\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{v}\,(y,t)=\nu\,\left(\frac{d^2}{d\,y^2}\,\mathrm{v}\,(y,t)\right) \tag{8.7.66}$$

```
V3:v(y,t)=S*(1+erf(y/(2*sqrt(\nu*t))));
V31:subst([V1],V3);
expand(integrate(V31,y));
U1:lhs(%)=rhs(%)-last(rhs(%));
limit(rhs(U1),t,inf);
```

ここで $\mathrm{v}\,(y,t)$ の境界条件は、$y=0$ で $\mathrm{v}\,(y,t)=S$、$y=-\infty$ で $\mathrm{v}\,(y,t)=0$ でとなる。これは「8.7.1 静止流体中突然動き出した平板、(473) 頁」で上が流体のところを、下が流体になっている。以上から結果の (8.7.8) 式を参考に $\mathrm{v}\,(y,t)$ の解は下記となる.

$$\mathrm{v}\,(y,t)=\left(\mathrm{erf}\left(\frac{y}{2\,\sqrt{\nu\,t}}\right)+1\right)\,S$$

上式に (8.7.65) 式を代入し、

$$\frac{d}{d\,y}\,\mathrm{u}\,(y,t)=\left(\mathrm{erf}\left(\frac{y}{2\,\sqrt{\nu\,t}}\right)+1\right)\,S$$

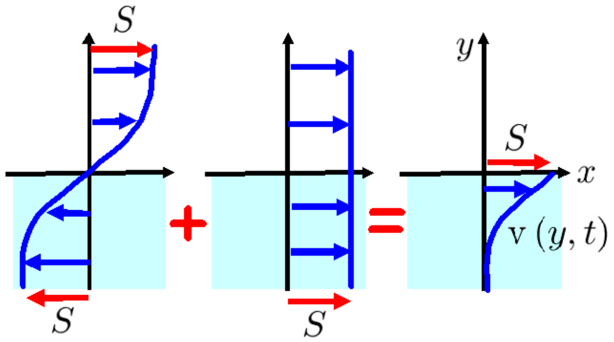


図 8.7.17: 流れの模式図

上式を y で積分し、

$$\mathrm{u}\left(y,t\right)=y\,\mathrm{erf}\left(\frac{y}{2\,\sqrt{\nu\,t}}\right)\,S+\frac{2\,\sqrt{\nu\,t}\,e^{-\frac{y^2}{4\,\nu\,t}}\,S}{\sqrt{\pi}}+y\,S+\%c1$$

境界条件から $\%c1=0$ となるので、流速分布：$\mathrm{u}\left(y,t\right)$ は下記となる.

$$\mathrm{u}\left(y,t\right)=y\,\mathrm{erf}\left(\frac{y}{2\,\sqrt{\nu\,t}}\right)\,S+\frac{2\,\sqrt{\nu\,t}\,e^{-\frac{y^2}{4\,\nu\,t}}\,S}{\sqrt{\pi}}+y\,S$$

```
PL1:expand(subst([\nu=1.045*0.000001,S=1,
 y=x],rhs(U1)));
plot2d([subst([t=100],PL1),
 subst([t=1000],PL1),
 subst([t=10000],PL1),
 subst([t=100000],PL1),
 subst([t=1000000],PL1),
 subst([t=10000000],PL1),
 subst([t=100000000],PL1)],[x,-50,0.1],
 [legend, "t=100", "t=1000","t=10000",
  "t=100000","t=1000000", "t=10000000",
  "t=100000000"]);
```

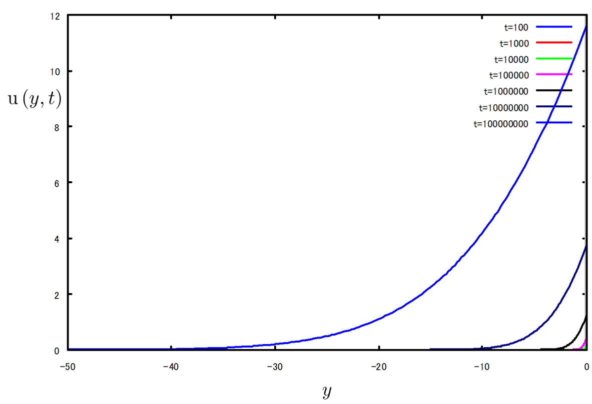


図 8.7.18: 自由表面に力が作用したときの流れ

動粘性係数として、20 度の海水の値：$\nu=1.045\,10^{-6}$ とすると、$t=100000000$ 秒、即ち、約 1057 日で水深:約 $40m$ までしか流れが到達しない。あまり現実的でない。

8.7.8 突然動き出した円柱まわりの粘性流れ

半径:R の円柱が静止流体中を速度：U_0 で突然動き始めたときの、円柱周囲に生じる粘性流について調べる [1]。境界層厚さが円柱の半径：R に比べ、十分小さいとする。このとき、「8.5.1 境界層の方程式」の二次元 $x-y$ 座標の境界層方程式を活用する。$x-y$ 座標軸の各速度コンポーネントを u, v とする。時間：t、圧力：p、密度：ρ、粘性係数：μ、動粘性係数：ν とする。

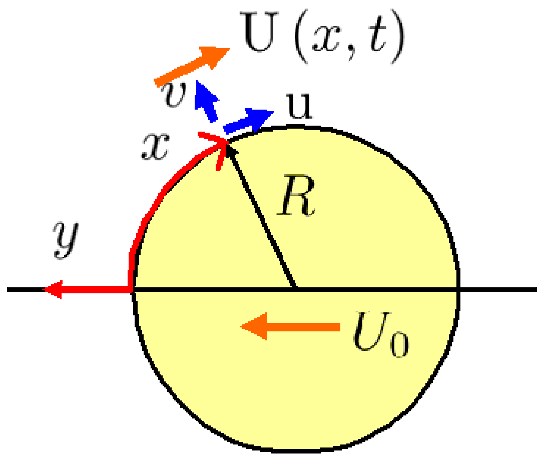


図 8.7.19: 突然動き出した円柱まわりの粘性流れ

```
/* 突然動き出した円柱 */
kill(all);
load("vector");
load("dynamics");
depends(F,[\eta]);
depends(G,[\eta]);
depends(\eta,[y,t]);
MAS1:'diff(v,y,1)+'diff(u,x,1)=0;
NAV2:('diff(u,y,1))*v+u*('diff(u,x,1))
 +'diff(u,t,1)=\nu*('diff(u,y,2))
 -'diff(p,x,1)/\rho;
subst([\mu=0,u=U(x,t),p=p(x,t),X=0],NAV2);
NAV21:ev(%,diff);
PX1:solve(%,'diff(p(x,t),x,1))[1];
subst([u=u[1](x,y,t),v=v[1](x,y,t),
 p=p(x,t),X=0],NAV2);
ev(%,diff);
subst([PX1],%);
expand(%);
NAVU1:last(lhs(%))=first(rhs(%))
 +last(rhs(%));
expand(solve(%,'diff(U(x,t),t,1))[1]);
NAVU11:subst([\mu=\nu*\rho],%);
```

[1]Dr Harmann Schlihting:Boundary Layer Theory [12)], 11.b.1. Two-dimentional case, P.212

```
subst([u=u[1](x,y,t)+u[2](x,y,t),
 v=v[1](x,y,t),p=p(x,t),X=0],NAV2);
ev(%,diff);
subst([PX1],%);
expand(%);
%-NAVU1;
rest(lhs(%),3)=rhs(%);
rest(lhs(%),-2)+last(lhs(%))=rhs(%);
NAVU2:%-v[1](x,y,t)*('diff(u[1](x,y,t),
 y,1))-u[1](x,y,t)*('diff(u[1](x,y,t),
 x,1))-\nu*('diff(u[2](x,y,t),y,2));
```

(8.5.2) 式から質量保存の方程式は、

$$\frac{d}{d\,y}\,v+\frac{d}{d\,x}\,u=0$$

(8.5.3) 式から Navier-Stokes の式は下記の境界層の方程式となる。

$$\begin{aligned}\left(\frac{d}{d\,y}\,u\right)\,v+u\,\left(\frac{d}{d\,x}\,u\right)+\frac{d}{d\,t}\,u\\=\nu\,\left(\frac{d^2}{d\,y^2}\,u\right)-\frac{\frac{d}{d\,x}\,p}{\rho}\end{aligned}\qquad(8.7.67)$$

境界層の外界流速:$\mathrm{U}\,(x,t)$ とすると、圧力:p との関係は、

$$\mathrm{U}\,(x,t)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{U}\,(x,t)\right)+\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{U}\,(x,t)=-\frac{\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{p}\,(x,t)}{\rho}\qquad(8.7.68)$$

ここで、流速：u を下記の $u_1\,(x,y,t)\,,u_2\,(x,y,t)$ で表現する。$u_1\,(x,y,t)\,,v_1\,(x,y,t)$ は線型理論で決定されるもので、外界流速:$\mathrm{U}\,(x,t)$ につれた流れとする。$u_2\,(x,y,t)$ は非線型な要素で決まるもので、$u_1\,(x,y,t)$ と比べ、十分小さいとする。

$$u=u_2\,(x,y,t)+u_1\,(x,y,t)\qquad(8.7.69)$$

(8.7.67) 式に $u\to u_1\,(x,y,t)$ と $v\to v_1\,(x,y,t)$ を代入し、線型の方程式として、次式となる。

$$\frac{d}{d\,t}\,u_1\,(x,y,t)=\nu\,\left(\frac{d^2}{d\,y^2}\,u_1\,(x,y,t)\right)+\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{U}\,(x,t)\qquad(8.7.70)$$

(8.7.68) 式に (8.7.69) 式を代入し、(8.7.70) 式を差し引き、$u_1\,(x,y,t)>>u_2\,(x,y,t)$ として、$u_2\,(x,y,t)$ に関する方程式は、

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\,t}\,u_2\,(x,y,t)-\nu\,\left(\frac{d^2}{d\,y^2}\,u_2\,(x,y,t)\right)\\=-v_1\,(x,y,t)\,\left(\frac{d}{d\,y}\,u_1\,(x,y,t)\right)\\-u_1\,(x,y,t)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,u_1\,(x,y,t)\right)\\+\mathrm{U}\,(x,t)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{U}\,(x,t)\right)\end{aligned}\qquad(8.7.71)$$

```
assume(p>0,\nu>0,t>0);
UYT1:u[1](x,y,t)=U(x)*f(y)*g(t);
subst([UYT1,U(x,t)=U(x)],NAVU11);
ev(%,diff);
%+\nu*g(t)*U(x)*('diff(f(y),y,2));
EQ1:%/f(y)/g(t)/U(x)/\nu;
EQY1:lhs(EQ1)=-p^2;
EQT1:rhs(EQ1)=-p^2;
EQT2:ode2(EQT1,g(t),t);
EQY2:ode2(EQY1,f(y),y);
UTY2:subst([EQT2,EQY2,%c=1],UYT1);
UTY3:lhs(UTY2)='integrate(subst([%k2=A(p),
 %k1=B(p)],rhs(UTY2)),p,0,inf);
UTY30:subst([t=0],UTY3);
AP1:A(p)=1/%pi*'integrate(subst([y=u],
 lhs(UTY30))*cos(p*u),u,minf,inf);
BP1:B(p)=1/%pi*'integrate(subst([y=u],
 lhs(UTY30))*sin(p*u),u,minf,inf);
UTY31:subst([AP1,BP1],UTY3);
u[1](x,y,t)=U(x)/%pi*'integrate(%e^(-\nu
 *p^2*t)*'integrate((u(x,u,0)*sin(p*u)
 *sin(p*y)+u(x,u,0)*cos(p*u)*cos(p*y))
 ,u,-inf,inf),p,0,inf);
trigreduce(%);
UTY32:u[1](x,y,t)=U(x)/%pi*'integrate(
 u(x,u,0)*'integrate(%e^(-\nu*p^2*t)
 *cos(p*y-p*u),p,0,inf),u,minf,inf);
I0:I='integrate(%e^(-\nu*p^2*t)*cos(p*y
 -p*u),p,0,inf);
I01:ev(%,integrate);
I1:-y^2/(4*nu*t)+(u*y)/(2*nu*t)-u^2
 /(4*nu*t)=N;
I2:N=factor(lhs(%));
subst([I1,I2],I01);
rhs(I0)=rhs(%);
UTY4:subst([%],UTY32);
u[1](x,y,t)=U(x)*'integrate(%e^(-(y-u)^2/
 (4*nu*t)),u,0,inf)/(2*sqrt(%pi)*sqrt(nu)
 *sqrt(t))-U(x)*'integrate(%e^(-(y-u)^2/
 (4*nu*t)),u,minf,0)/(2*sqrt(%pi)
 *sqrt(nu)*sqrt(t));
ev(%,integrate);
UTY41:factor(%);
```

(8.7.70) 式の $u_1(x,y,t)$ を下記の変数分離法で解く。

$$u_1(x,y,t)=\mathrm{g}(t)\,\mathrm{U}(x)\,\mathrm{f}(y)$$

上式に代入し、整理すると、

$$\frac{\frac{d^2}{d\,y^2}\,\mathrm{f}(y)}{\mathrm{f}(y)}=\frac{\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{g}(t)}{\nu\,\mathrm{g}(t)}=-p^2$$

上式を $ode2$ 関数で解くと、

$$\mathrm{g}(t)=\%c\,e^{-\nu\,p^2\,t}$$

$$\mathrm{f}(y)=\%k1\sin(p\,y)+\%k2\cos(p\,y)$$

上式から解は、

$$\begin{aligned}&u_1(x,y,t)\\&\quad=e^{-\nu\,p^2\,t}\,\mathrm{U}(x)\,\left(\%k1\sin(p\,y)+\%k2\cos(p\,y)\right)\end{aligned}$$

上式の基本解から、境界領域が無限大であるから、この基本解は下記の Fourier 積分が解となる。

$$\begin{aligned}u_1(x,y,t)=\int_0^\infty e^{-\nu\,p^2\,t}\Big(&\mathrm{B}(p)\,\sin(p\,y)\\&+\mathrm{A}(p)\,\cos(p\,y)\Big)dp\end{aligned}\tag{8.7.72}$$

初期条件：$t=0$ では、下記の関係となる。

$$u_1(x,y,t)=\int_0^\infty \mathrm{B}(p)\,\sin(p\,y)+\mathrm{A}(p)\,\cos(p\,y)\,dp\tag{8.7.73}$$

このとき、係数：$\mathrm{A}(p),\mathrm{B}(p)$ は下記となる。

$$\mathrm{A}(p)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{u}(u,0)\,\cos(p\,u)\,du$$

$$\mathrm{B}(p)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{u}(u,0)\,\sin(p\,u)\,du$$

上式を (8.7.71) 式に代入し、

$$\begin{aligned}&u_1(x,y,t)\\&=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-\nu\,p^2\,t}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{u}(u,0)\,\sin(p\,u)\,\sin(p\,y)\\&\qquad+\mathrm{u}(u,0)\,\cos(p\,u)\,\cos(p\,y)\,dudp\\&=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-\nu\,p^2\,t}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{u}(u,0)\,\cos(p\,y-p\,u)\,dudp\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \mathrm{u}(u,0)\int_0^{\infty}e^{-\nu\,p^2\,t}\cos(p\,y-p\,u)\,dpdu\end{aligned}\tag{8.7.74}$$

(8.7.74) 式の一部の積分を実行すると、

$$\int_0^\infty e^{-\nu\,p^2\,t}\cos(p\,y-p\,u)\,dp=\frac{\sqrt{\pi}\,e^{-\frac{(y-u)^2}{4\,\nu\,t}}}{2\,\sqrt{\nu}\,\sqrt{t}}$$

上記の結果を (8.7.74) 式に代入すると、

$$u_1(x,y,t)=\frac{1}{2\,\sqrt{\pi}\,\sqrt{\nu}\,\sqrt{t}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{u}(u,0)\;e^{-\frac{(y-u)^2}{4\,\nu\,t}}du\tag{8.7.75}$$

境界条件から、$y>0,t=0$ で $u_1(x,y,t)=U(x)$、$y<0,t=0$ で $u_1(x,y,t)=-U(x)$ とすると、次式の解が得られる.

$$\begin{aligned}u_1(x,y,t)=&\frac{\mathrm{U}(x)}{2\,\sqrt{\pi}\,\sqrt{\nu}\,\sqrt{t}}\int_0^\infty e^{-\frac{(y-u)^2}{4\,\nu\,t}}du\\&-\frac{\mathrm{U}(x)}{2\,\sqrt{\pi}\,\sqrt{\nu}\,\sqrt{t}}\int_{-\infty}^0 e^{-\frac{(y-u)^2}{4\,\nu\,t}}du\\=&\mathrm{U}(x)\,\mathrm{erf}\left(\frac{y}{2\,\sqrt{\nu}\,\sqrt{t}}\right)\end{aligned}\tag{8.7.76}$$

```
ET1:\eta=y/2/sqrt(\nu*t);
ET2:diff(ET1,y,1);
ET3:diff(ET1,y,2);
ET4:diff(ET1,t,1);
ET5:diff(ET1,t,2);
ET6:solve(ET1,y)[1];
PSI1:\Psi=2*sqrt(\nu*t)*(U(x)*F+t*U(x)
 *'diff(U(x),x,1)*G);
U1:u(x,y,t)='diff(\Psi,y,1);
V1:v(x,y,t)=-'diff(\Psi,x,1);
subst([PSI1],U1);
ev(%,diff);
U11:expand(subst([ET2],%));
subst([PSI1],V1);
ev(%,diff);
V11:expand(subst([ET2],%));
subst([U(x,t)=U(x),u[1](x,y,t)=
 u(x,y,t)],NAVU11);
subst([U11],%);
ev(%,diff);
expand(subst([ET2,ET3,ET4,ET5],%));
F1:rest(rhs(%),3)=0;
expand(-%/U(x)*4*t);
F11:subst([ET6],%);
first(lhs(%))=-last(lhs(%));
F2:'diff(F,\eta,1)=erf(\eta);
F21:diff(F2,\eta,1);
F22:diff(F2,\eta,2);
subst([F21,F22],F11);
F12:solve(F1,'diff(F,\eta,3))[1];
```

流れ関数：Ψ を次のように定義する。ここで F は下記に示す η の関数で $u_1(x,y,t)$ に対応する。G も下記に示す η の関数で $u_2(x,y,t)$ に対応する。

$$\Psi = 2\sqrt{\nu}\sqrt{t}\left(t\,\mathrm{U}(x)\left(\frac{d}{d\,x}\mathrm{U}(x)\right)G+\mathrm{U}(x)\,F\right) \tag{8.7.77}$$

ここで、

$$\begin{aligned}\eta =&\frac{y}{2\sqrt{\nu}\sqrt{t}},\quad \frac{d}{d\,y}\eta = \frac{1}{2\sqrt{\nu}\sqrt{t}}\\ \frac{d^2}{d\,y^2}\eta =&0,\quad \frac{d}{d\,t}\eta = -\frac{y}{4\sqrt{\nu}\,t^{\frac{3}{2}}}\\ \frac{d^2}{d\,t^2}\eta =&\frac{3\,y}{8\sqrt{\nu}\,t^{\frac{5}{2}}}\end{aligned} \tag{8.7.78}$$

流れ関数：Ψ から流速は次式で得られる。

$$\mathrm{u}(x,y,t) = \frac{d}{d\,y}\Psi,\quad \mathrm{v}(x,y,t) = -\frac{d}{d\,x}\Psi \tag{8.7.79}$$

流速：$\mathrm{u}(x,y,t)$ は (8.7.79) 式に (8.7.77) 式を代入し、(8.7.78) 式の関係式を使って、

$$\begin{aligned}\mathrm{u}(x,y,t) =&\frac{d}{d\,y}\left(2\sqrt{\nu}\sqrt{t}\left(t\,\mathrm{U}(x)\left(\frac{d}{d\,x}\mathrm{U}(x)\right)G\right.\right.\\ &\left.\left.+\mathrm{U}(x)\,F\right)\right)\\ =&t\,\mathrm{U}(x)\left(\frac{d}{d\,x}\mathrm{U}(x)\right)\left(\frac{d}{d\,\eta}G\right)\\ &+\mathrm{U}(x)\left(\frac{d}{d\,\eta}F\right)\end{aligned} \tag{8.7.80}$$

流速：$\mathrm{v}(x,y,t)$ も (8.7.79) 式に (8.7.77) 式を代入し、(8.7.78) 式の関係式を使って、

$$\begin{aligned}\mathrm{v}(x,y,t) =&-\frac{d}{d\,x}\left(2\sqrt{\nu}\sqrt{t}\left(t\,\mathrm{U}(x)\left(\frac{d}{d\,x}\mathrm{U}(x)\right)G\right.\right.\\ &\left.\left.+\mathrm{U}(x)\,F\right)\right)\\ =&-2\sqrt{\nu}\,t^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{U}(x)\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\mathrm{U}(x)\right)G\\ &-2\sqrt{\nu}\,t^{\frac{3}{2}}\left(\frac{d}{d\,x}\mathrm{U}(x)\right)^2G\\ &-2\sqrt{\nu}\sqrt{t}\left(\frac{d}{d\,x}\mathrm{U}(x)\right)F\end{aligned} \tag{8.7.81}$$

(8.7.70) 式の $u_1(x,y,t)$ に関する方程式は下記となり、

$$\frac{d}{d\,t}\mathrm{U}(x) = \frac{d}{d\,t}\mathrm{u}(x,y,t) - \nu\left(\frac{d^2}{d\,y^2}\mathrm{u}(x,y,t)\right)$$

(8.7.80) 式を上式に代入し、$u_1(x,y,t)$ は F に対応しているので、F の項を残し、

$$-\frac{\mathrm{U}(x)\left(\frac{d^3}{d\,\eta^3}F\right)}{4\,t} - \frac{\mathrm{U}(x)\,y\left(\frac{d^2}{d\,\eta^2}F\right)}{4\sqrt{\nu}\,t^{\frac{3}{2}}} = 0$$

整理すると、

$$\frac{d^3}{d\,\eta^3}F + 2\,\eta\left(\frac{d^2}{d\,\eta^2}F\right) = 0 \tag{8.7.82}$$

(8.7.76) 式の $u_1(x,y,t)$ の解から次の関係を得る。

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\,\eta}F =&\mathrm{erf}(\eta)\\ \frac{d^2}{d\,\eta^2}F =&\frac{2\,e^{-\eta^2}}{\sqrt{\pi}},\quad \frac{d^3}{d\,\eta^3}F = -\frac{4\,\eta\,e^{-\eta^2}}{\sqrt{\pi}}\end{aligned} \tag{8.7.83}$$

当然ながら、上式は、(8.7.82) 式を満足している。

```
subst([U(x,t)=U(x),u[1](x,y,t)=u(x,y,t),
 u[2](x,y,t)=u(x,y,t),v[1](x,y,t)=
 v(x,y,t)],NAVU2);
subst([U11,V11],%);
ev(%,diff);
expand(subst([ET2,ET3,ET4,ET5],%));
subst([F12,ET6],%);
%/(U(x)*('diff(U(x),x,1)));
G1:expand(lhs(%)=subst([G=0],rhs(%)));
G11:solve(G1,'diff(G,\eta,3))[1];
subst([ET6],UTY41);
'diff(F,\eta,1)=erf(\eta);
subst([F21,F2],G11);
```

(8.7.71) 式の $u_2(x,y,t)$ に関する方程式は下記となり、左辺は $u_2(x,y,t)$ について、右辺は $u_1(x,y,t)$、$v_1(x,y,t)$ についての項となる。

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\,\mathrm{u}(x,y,t)-\nu\left(\frac{d^2}{dy^2}\,\mathrm{u}(x,y,t)\right)&=-\,\mathrm{v}(x,y,t)\left(\frac{d}{dy}\,\mathrm{u}(x,y,t)\right)\\&\quad-\mathrm{u}(x,y,t)\left(\frac{d}{dx}\,\mathrm{u}(x,y,t)\right)\\&\quad+\mathrm{U}(x)\left(\frac{d}{dx}\,\mathrm{U}(x)\right)\end{aligned}$$

(8.7.80) 式、(8.7.81) 式を上式に代入し、左辺は $u_2(x,y,t)$ についてであり、G の項を残し、右辺は $u_1(x,y,t)$、$v_1(x,y,t)$ についてであり F の項を残すと、

$$\begin{aligned}-\frac{\frac{d^3}{d\eta^3}\,G}{4}-\frac{\eta\left(\frac{d^2}{d\eta^2}\,G\right)}{2}+\frac{d}{d\eta}\,G\\=F\left(\frac{d^2}{d\eta^2}\,F\right)-\left(\frac{d}{d\eta}\,F\right)^2+1\end{aligned}\qquad(8.7.84)$$

Maxima の Runge-Kutta 法を用いて解くため、下記のように変形して、

$$\begin{aligned}\frac{d^3}{d\eta^3}\,G&=-\,2\,\eta\left(\frac{d^2}{d\eta^2}\,G\right)+4\left(\frac{d}{d\eta}\,G\right)\\&\quad-4\,F\left(\frac{d^2}{d\eta^2}\,F\right)+4\left(\frac{d}{d\eta}\,F\right)^2-4\end{aligned}$$

(8.7.83) 式の F の解を上式に代入し、

$$\begin{aligned}\frac{d^3}{d\eta^3}\,G&=-\,2\,\eta\left(\frac{d^2}{d\eta^2}\,G\right)+4\left(\frac{d}{d\eta}\,G\right)\\&\quad-\frac{8\,e^{-\eta^2}\,F}{\sqrt{\pi}}+4\,\mathrm{erf}\,(\eta)^2-4\end{aligned}$$

上式を Runge-Kutta 法を用いて解いて、G を求める。

```
T[max]:10;
T[min]:0;
N:500;
dT:float((T[max]-T[min])/N);
G2I:1.6072781;
sol:rk([erf(t),-2*t*g2+4*g1-8*%e^(-t^2)*f
 /sqrt(%pi)+4*erf(t)^2-4,g2,g1],
 [f,g2,g1,g],[0,G2I,0,0],[t,T[min],
 T[max],dT]);
listF:[[sol[1][1],sol[1][2]]];
for J:2 thru N do(listF:append(listF,
  [[sol[J][1],sol[J][2]]]));
listG11:[[sol[1][1],sol[1][4]]];
for J:2 thru N do(listG11:append(listG11,
  [[sol[J][1],sol[J][4]]]));
plot2d([discrete,listG11],
 [y,-0.0001,0.0001]);
plot2d([discrete,listG11]);
plot2d([erf(t),[discrete,listG11]],
 [t,0,10],[x,0,3]);
diff(U11,y,1);
subst([ET2],%);
rhs(%)=0;
expand(%*2*sqrt(\nu)*sqrt(t)/U(x));
SP1:subst([F21,'diff(G,\eta,2)=G2I,
 \eta=0],%);
U01:U(x)=2*U[0]*sin(x/R);
DU01:diff(U01,x,1);
subst([DU01],SP1);
solve(%,t)[1];
subst([cos(x/R)=-1],%);
subst([t=s[s]/U[0]],%);
float(%*U[0]);
```

境界条件として、物体表面で流速は零であるから、$\eta=0$ で、$G=\frac{d}{d\eta}\,G=0$ となり、物体より十分離れたところでは、$u_2(x,y,t)=0$ であるから、$\eta=\infty$ で、$\frac{d}{d\eta}\,G=0$ となる。そこで、上記となるような $\frac{d^2}{d\eta^2}\,G$ の初期値を求める。結果を下記に示す。

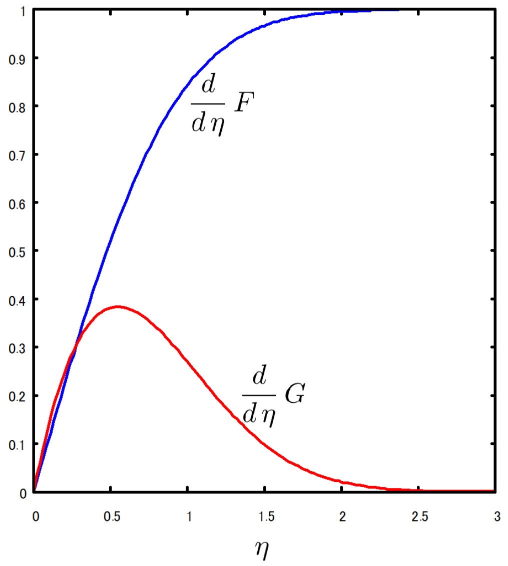


図 8.7.20: $\frac{d}{d\eta}F, \frac{d}{d\eta}G$ の結果

はく離位置と時間の関係を求める。はく離点ではせん断力が零であるから、$\tau = \mu \frac{d}{dy} \mathrm{u}(x,y,t) = 0$ であるから、

$$\begin{aligned}\frac{d}{dy}\mathrm{u}(x,y,t) =& \left(\frac{d}{dy}\eta\right) t\,\mathrm{U}(x) \\ &\times \left(\frac{d}{dx}\mathrm{U}(x)\right)\left(\frac{d^2}{d\eta^2}G\right) \\ &+ \left(\frac{d}{dy}\eta\right)\mathrm{U}(x)\left(\frac{d^2}{d\eta^2}F\right) \\ =& \frac{\sqrt{t}\,\mathrm{U}(x)\left(\frac{d}{dx}\mathrm{U}(x)\right)\left(\frac{d^2}{d\eta^2}G\right)}{2\sqrt{\nu}} \\ &+ \frac{\mathrm{U}(x)\left(\frac{d^2}{d\eta^2}F\right)}{2\sqrt{\nu}\sqrt{t}}\end{aligned}$$

上式の右辺を零とおき、

$$\frac{\sqrt{t}\,\mathrm{U}(x)\left(\frac{d}{dx}\mathrm{U}(x)\right)\left(\frac{d^2}{d\eta^2}G\right)}{2\sqrt{\nu}} + \frac{\mathrm{U}(x)\left(\frac{d^2}{d\eta^2}F\right)}{2\sqrt{\nu}\sqrt{t}} = 0$$

上式を整理すると、

$$t\left(\frac{d}{dx}\mathrm{U}(x)\right)\left(\frac{d^2}{d\eta^2}G\right) + \frac{d^2}{d\eta^2}F = 0$$

物体表面では $\eta = 0$ であるから、$\frac{d^2}{d\eta^2}G$ の初期値と $\frac{d}{d\eta}F = \mathrm{erf}(\eta)$ から、はく離位置と時間の関係は次式となる。

$$1.6072781\,t\left(\frac{d}{dx}\mathrm{U}(x)\right) + \frac{2}{\sqrt{\pi}} = 0 \qquad (8.7.85)$$

また、円柱周りの流速は、「例題 5.3.4 一様流中の円柱まわりの流れ、(5.3.15) 式、123 頁」から、

$$\mathrm{U}(x) = 2\,U_0 \sin\left(\frac{x}{R}\right), \quad \frac{d}{dx}\mathrm{U}(x) = \frac{2\,U_0\cos\left(\frac{x}{R}\right)}{R}$$

(8.7.85) 式に上式を代入し、t を求めると、

$$t = -\frac{4754\,R}{7641\sqrt{\pi}\,U_0\cos\left(\frac{x}{R}\right)}$$

最後端ではく離が始まる時間は、

$$t = \frac{4754\,R}{7641\sqrt{\pi}\,U_0}$$

円柱が動いた距離に換算すると、

$$\frac{s_s}{U_0} = \frac{4754\,R}{7641\sqrt{\pi}\,U_0}$$

上式から、円柱が動き始めてから約 $0.35R$ 移動したとき、最後端ではく離が始まる。

$$s_s = 0.35102176157388\,R \approx 0.35\,R$$

```
TN1:t[n]=U[0]*t/2/R;
TN2:solve(TN1,t)[1];
RN1:R[n]=U[0]*2*R/\nu;
RN2:solve(RN1,\nu)[1];
Y1:y[n]=y/R;
Y2:solve(Y1,y)[1];
X1:x[n]=x/R;
X2:solve(X1,x)[1];
expand(U11/U(x));
UN1:lhs(%)=subst([F2,DU01,TN2,X2],rhs(%));
UN2:subst([x[n]=\phi,'diff(G,eta,1)=G12],
 rhs(UN1));
ET7:radcan(subst([TN2,RN2,Y2],ET1));
ET8:solve(ET7,y[n])[1];
PLTSET1:[R[n]=1000,\phi=170/180*%pi];
PLT1:[t[n]=0.1];
PLT2:[t[n]=0.175];
PLT3:[t[n]=0.5];
PLT4:[t[n]=0.7];
PLT5:[t[n]=1.0];
UN3:subst(PLTSET1,UN2);
YN3:subst(PLTSET1,rhs(ET8));
```

次に、下記の無次元関係式を使って、流速分布を求める。

$$t_n = \frac{U_0\,t}{2\,R}, \quad R_n = \frac{2\,U_0\,R}{\nu}$$
$$y_n = \frac{y}{R}, \quad x_n = \frac{x}{R}$$

(8.7.80) 式から、主流方向の流速分布：$\mathrm{u}(x,y,t)$ を無次元表記すると、

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{u}(x,y,t)}{\mathrm{U}(x)} =& t\left(\frac{d}{dx}\mathrm{U}(x)\right)\left(\frac{d}{d\eta}G\right) + \frac{d}{d\eta}F \\ =& 4\,t_n\cos(x_n)\left(\frac{d}{d\eta}G\right) + \mathrm{erf}(\eta)\end{aligned} \qquad (8.7.86)$$

$\eta \to y$ の関係式から、y 軸を無次元表記して、

$$y_n = \frac{4\,\eta\,\sqrt{t_n}}{\sqrt{R_n}}$$

```
for J:1 thru 150 do(
L:J,
ETP1:\eta=listG11[L][1],
GP1:G12=listG11[L][2],
UN4:float(subst([ETP1,GP1],UN3)),
YN4:float(subst([ETP1],YN3)),
if L=1 then listU1:
 [[subst(PLT1,UN4),subst(PLT1,YN4)]]
 else listU1:append(listU1,
 [[subst(PLT1,UN4),subst(PLT1,YN4)]]),
if L=1 then listU2:
 [[subst(PLT2,UN4),subst(PLT2,YN4)]]
 else listU2:append(listU2,
 [[subst(PLT2,UN4),subst(PLT2,YN4)]]),
if L=1 then listU3:
 [[subst(PLT3,UN4),subst(PLT3,YN4)]]
 else listU3:append(listU3,
 [[subst(PLT3,UN4),subst(PLT3,YN4)]]),
if L=1 then listU4:
 [[subst(PLT4,UN4),subst(PLT4,YN4)]]
 else listU4:append(listU4,
 [[subst(PLT4,UN4),subst(PLT4,YN4)]]),
if L=1 then listU5:
 [[subst(PLT5,UN4),subst(PLT5,YN4)]]
 else listU5:append(listU5,
 [[subst(PLT5,UN4),subst(PLT5,YN4)]]));
plot2d([[discrete,listU1],
 [discrete,listU2],[discrete,listU3],
 [discrete,listU4],[discrete,listU5]],
 [x,-1,2],[y,0,0.4],[legend,
 "phi=170deg. tn=0.1","tn=0.175",
 "tn=0.5","tn=0.7","tn=1.0"]);
```

下記に各点の流速分布の時間経過を下記に示す。$\phi = 50deg.$ と $\phi = 70deg.$ の円柱の前半で外界流速が加速流中では、境界層の外側で時間とともに早い速度が見られる。また、$\phi = 150deg.$ と $\phi = 170deg.$ の円柱の後半で、はく離領域が時間とともに大きくなっていくのが見られる。(8.7.86) 式から、時間とともに境界層がどんどん発達していく形となっており、十分な時間が経てば定常状態の境界層の形にならない。これは流れ関数 : Ψ として、突然動き出した無限に長い平板の関数形 : $erf(\eta)$ をしており、時間とともに境界層がどんどん発達していく形となっている。このため、本例の適用は初期の時間のみに限定されると思われる.

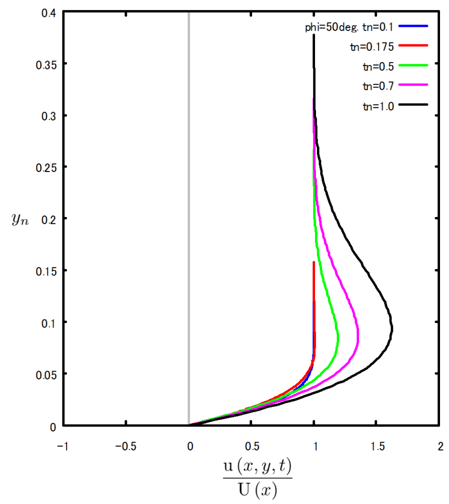


図 8.7.21: 流速分布の時間経過　$\phi = 50deg.$

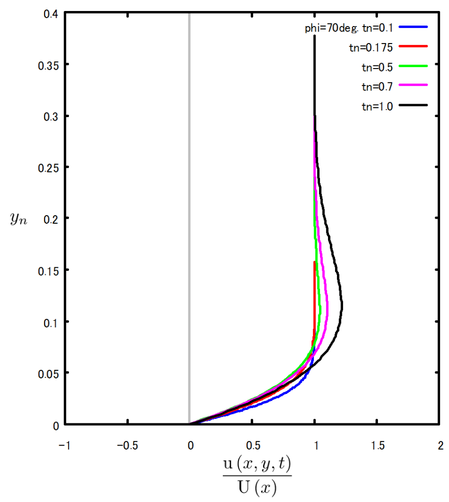


図 8.7.22: 流速分布の時間経過　$\phi = 70deg.$

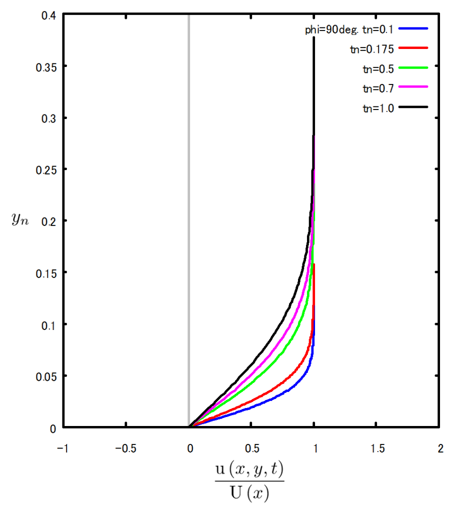


図 8.7.23: 流速分布の時間経過　$\phi = 90deg.$

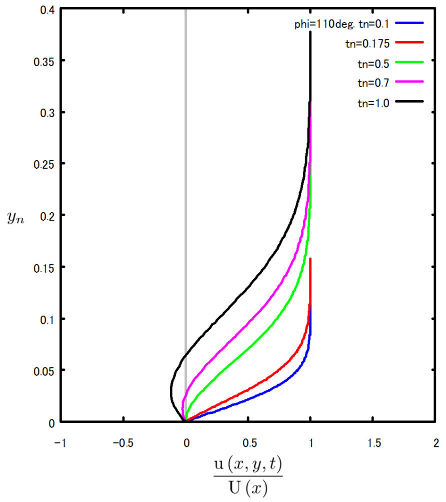


図 8.7.24: 流速分布の時間経過 $\phi = 110deg.$

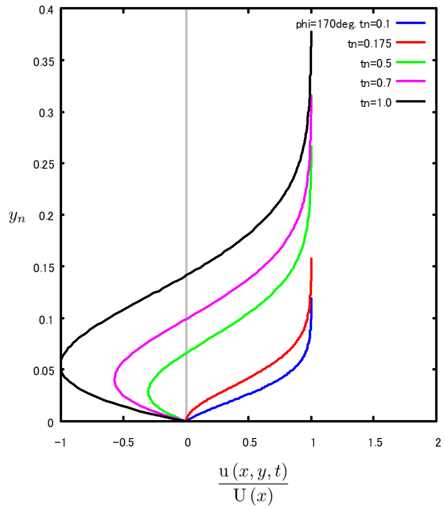


図 8.7.27: 流速分布の時間経過 $\phi = 170deg.$

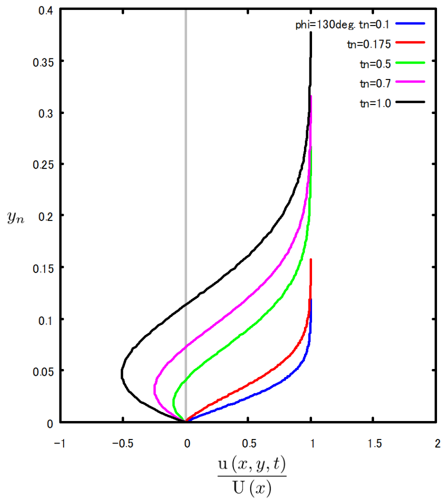


図 8.7.25: 流速分布の時間経過 $\phi = 130deg.$

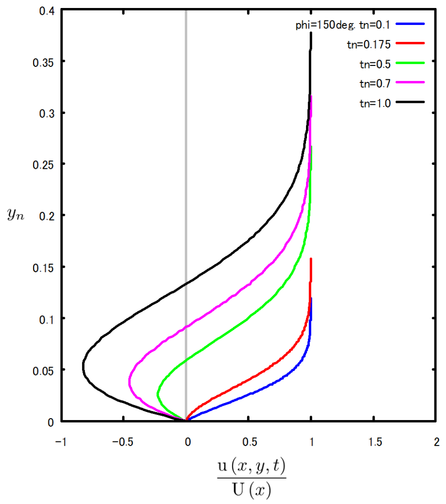


図 8.7.26: 流速分布の時間経過 $\phi = 150deg.$

8.8 渦度のある三次元軸対称流れ

8.8.1 渦度表記の Euler の運動方程式

粘性の直接的な効果が無視できる流れで、渦度がある完全流体について調べる[1]。粘性を無視すると、運動方程式は Euler の運動方程式となる。「2.7 Euler の運動方程式 (2.7.2) 式 26 頁」の Euler の運動方程式のベクトル標記を下記に示す。ここで、流速:$\overrightarrow{V}$、外力：$\overrightarrow{F}$、圧力:p とする。

$$\rho\left(\frac{d}{d\,t}\,\overrightarrow{V}+(\overrightarrow{V}\cdot grad)\overrightarrow{V}\right)=\overrightarrow{F}-grad(p) \qquad (8.8.1)$$

また、「2.8 Bernoulli の定理 (2.8.2) 式 30 頁」の Bernoulli の定理から求めた Euler の運動方程式のベクトル標記を下記に示す。本式は渦度：$\overrightarrow{\omega}=curl\overrightarrow{V}$ が含まれており、本目的には、下記の式が適合している。

$$\frac{d}{d\,t}\,\overrightarrow{V}-\overrightarrow{V}\times curl\overrightarrow{V}=-grad\left(g\,z+\frac{\overrightarrow{V}^2}{2}+\frac{p}{\rho}\right) \qquad (8.8.2)$$

まず、上式が同じものであるかどうか、$x-y-z$ 座標系で確認する。

```
/* Euler の運動方程式 */
kill(all);
load("vect");
depends(u,[t,x,y,z]);
depends(v,[t,x,y,z]);
depends(w,[t,x,y,z]);
depends(p,[x,y,z]);
VXYZ:matrix([u],[v],[w]);
EU1:(diff(VXYZ,t,1));
grad(transpose(VXYZ));
express(%);
transpose(ev(%,diff));
EU2:transpose(VXYZ.%);
grad(p);
EU3:transpose(express(%));
EU0:(EU1+EU2)+EU3/\rho=0;
grad(p/\rho+(VXYZ.VXYZ)/2);
express(%);
H1:transpose(ev(%,diff));
curl(transpose(VXYZ)[1]);
transpose(express(%));
H2:col(adjoint(transpose(addcol(VXYZ,%,
 matrix([1],[1],[1])))),3);
BE0:expand(EU1-H2+H1)=0;
EU0-BE0;
```

流速：$\overrightarrow{V}$ を次式に示す。ここで、$x-y-z$ 座標の各速度コンポーネント：u,v,w とする。

$$\overrightarrow{V}=\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}$$

(8.8.1) 式の左辺初項は、

$$\frac{d}{d\,t}\,\overrightarrow{V}=\begin{pmatrix}\frac{d}{d\,t}\,u\\\frac{d}{d\,t}\,v\\\frac{d}{d\,t}\,w\end{pmatrix}$$

(8.8.1) 式の左辺第二項の一部：$grad\,\overrightarrow{V}$ は、

$$grad\,\overrightarrow{V}=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{d}{d\,x}\,u & \frac{d}{d\,x}\,v & \frac{d}{d\,x}\,w\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}\frac{d}{d\,y}\,u & \frac{d}{d\,y}\,v & \frac{d}{d\,y}\,w\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}\frac{d}{d\,z}\,u & \frac{d}{d\,z}\,v & \frac{d}{d\,z}\,w\end{pmatrix}\end{pmatrix}$$

上記から、(8.8.1) 式の左辺第二項は、

$$(\overrightarrow{V}\cdot grad)\overrightarrow{V}=\begin{pmatrix}\left(\frac{d}{d\,z}\,u\right)\,w+\left(\frac{d}{d\,y}\,u\right)\,v+u\,\left(\frac{d}{d\,x}\,u\right)\\\left(\frac{d}{d\,z}\,v\right)\,w+v\,\left(\frac{d}{d\,y}\,v\right)+u\,\left(\frac{d}{d\,x}\,v\right)\\w\,\left(\frac{d}{d\,z}\,w\right)+v\,\left(\frac{d}{d\,y}\,w\right)+u\,\left(\frac{d}{d\,x}\,w\right)\end{pmatrix}$$

(8.8.1) 式の右辺項は、外力項：$\overrightarrow{F}$ を無視して、

$$grad(p)=\begin{pmatrix}\frac{d}{d\,x}\,p\\\frac{d}{d\,y}\,p\\\frac{d}{d\,z}\,p\end{pmatrix}$$

以上をまとめると、当然であるが、Euler の運動方程式が得られた。

$$\begin{pmatrix}\left(\frac{d}{d\,z}\,u\right)\,w+\left(\frac{d}{d\,y}\,u\right)\,v+u\,\left(\frac{d}{d\,x}\,u\right)+\frac{d}{d\,t}\,u+\frac{\frac{d}{d\,x}\,p}{\rho}\\\left(\frac{d}{d\,z}\,v\right)\,w+v\,\left(\frac{d}{d\,y}\,v\right)+u\,\left(\frac{d}{d\,x}\,v\right)+\frac{d}{d\,t}\,v+\frac{\frac{d}{d\,y}\,p}{\rho}\\w\,\left(\frac{d}{d\,z}\,w\right)+v\,\left(\frac{d}{d\,y}\,w\right)+u\,\left(\frac{d}{d\,x}\,w\right)+\frac{d}{d\,t}\,w+\frac{\frac{d}{d\,z}\,p}{\rho}\end{pmatrix}=0 \qquad (8.8.3)$$

(8.8.2) 式の右辺項で、外力項：gz を無視して、

$$\begin{aligned}&grad\left(\frac{\overrightarrow{V}^2}{2}+\frac{p}{\rho}\right)\\&=\mathrm{grad}\left(\frac{w^2+v^2+u^2}{2}+\frac{p}{\rho}\right)\\&=\begin{pmatrix}\frac{2\,w\,\left(\frac{d}{d\,x}\,w\right)+2\,v\,\left(\frac{d}{d\,x}\,v\right)+2\,u\,\left(\frac{d}{d\,x}\,u\right)}{2}+\frac{\frac{d}{d\,x}\,p}{\rho}\\\frac{2\,w\,\left(\frac{d}{d\,y}\,w\right)+2\,v\,\left(\frac{d}{d\,y}\,v\right)+2\,u\,\left(\frac{d}{d\,y}\,u\right)}{2}+\frac{\frac{d}{d\,y}\,p}{\rho}\\\frac{2\,w\,\left(\frac{d}{d\,z}\,w\right)+2\,v\,\left(\frac{d}{d\,z}\,v\right)+2\,u\,\left(\frac{d}{d\,z}\,u\right)}{2}+\frac{\frac{d}{d\,z}\,p}{\rho}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

(8.8.2) 式の左辺第二項の一部：$curl\overrightarrow{V}$ は渦度：$\overrightarrow{\omega}$ で、

$$\overrightarrow{\omega}=curl\overrightarrow{V}=\begin{pmatrix}\frac{d}{d\,y}\,w-\frac{d}{d\,z}\,v\\\frac{d}{d\,z}\,u-\frac{d}{d\,x}\,w\\\frac{d}{d\,x}\,v-\frac{d}{d\,y}\,u\end{pmatrix}$$

[1]G. K. Batchelor：入門 流体力学 [18])、7.15 旋回をともなった定常な軸対称流 P.546

(8.8.2) 式の左辺第二項は、

$$\overrightarrow{V} \times curl\overrightarrow{V}$$
$$= \begin{pmatrix} v\left(\frac{d}{d\,x}\,v-\frac{d}{d\,y}\,u\right)-w\left(\frac{d}{d\,z}\,u-\frac{d}{d\,x}\,w\right) \\ w\left(\frac{d}{d\,y}\,w-\frac{d}{d\,z}\,v\right)-u\left(\frac{d}{d\,x}\,v-\frac{d}{d\,y}\,u\right) \\ u\left(\frac{d}{d\,z}\,u-\frac{d}{d\,x}\,w\right)-v\left(\frac{d}{d\,y}\,w-\frac{d}{d\,z}\,v\right) \end{pmatrix}$$

以上をまとめると、当然であるが、下記に (8.8.3) 式と同じ Euler の運動方程式が得られた。

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{d}{d\,z}\,u\right)\,w+\left(\frac{d}{d\,y}\,u\right)\,v+u\,\left(\frac{d}{d\,x}\,u\right)+\frac{d}{d\,t}\,u+\frac{\frac{d}{d\,x}\,p}{\rho} \\ \left(\frac{d}{d\,z}\,v\right)\,w+v\,\left(\frac{d}{d\,y}\,v\right)+u\,\left(\frac{d}{d\,x}\,v\right)+\frac{d}{d\,t}\,v+\frac{\frac{d}{d\,y}\,p}{\rho} \\ w\,\left(\frac{d}{d\,z}\,w\right)+v\,\left(\frac{d}{d\,y}\,w\right)+u\,\left(\frac{d}{d\,x}\,w\right)+\frac{d}{d\,t}\,w+\frac{\frac{d}{d\,z}\,p}{\rho} \end{pmatrix}$$
$$=0$$

```
depends(r,[t,x,y]);
depends(\theta,[t,x,y]);
depends(z,[t]);
XR:x=r*cos(\theta);
YR:y=r*sin(\theta);
LXR1:diff(XR,x,1);
LYR1:diff(YR,x,1);
solve([LXR1,LYR1],['diff(r,x,1),
 'diff(\theta,x,1)]);
LXYR1:trigrat(%)[1];
LXR2:diff(XR,y,1);
LYR2:diff(YR,y,1);
solve([LXR2,LYR2],['diff(r,y,1),
 'diff(\theta,y,1)]);
LXYR2:trigrat(%)[1];
TR:matrix([cos(\theta),sin(\theta),0],
 [-sin(\theta),cos(\theta),0],[0,0,1]);
TR1:matrix([cos(\theta),-sin(\theta),0],
 [sin(\theta),cos(\theta),0],[0,0,1]);
ERTZ:matrix([e[r]],[e[\theta]],[e[z]]);
EXYZ:matrix([e[x]],[e[y]],[e[z]]);
ERTZ1:TR.EXYZ;
VXYZ:matrix([u],[v],[w]);
VRTZ:matrix([a],[b],[c]);
LISVR1:[a=v[r],b=v[\theta],c=v[z]];
VRTZ0:subst(LISVR1,VRTZ);
VRTZ0=VRTZ;
depends(u,[t,x,y,z]);
depends(v,[t,x,y,z]);
depends(w,[t,x,y,z]);
```

```
depends(a,[t,r,\theta,z]);
depends(b,[t,r,\theta,z]);
depends(c,[t,r,\theta,z]);
depends(h,[r,\theta,z]);
/* rotation */
VOX1:matrix([\omega[x]],[\omega[y]],
 [\omega[z]]);
VOR1:matrix([\omega[r]],[\omega[\theta]],
 [\omega[z]]);
UA:u=a*cos(\theta)-b*sin(\theta);
VA:v=a*sin(\theta)+b*cos(\theta);
curl(transpose(VXYZ)[1]);
express(%);
VXYZCURL:transpose(ev(%,diff));
VOX2:VOX1=%;
subst([UA,VA,w=c],VXYZCURL);
ev(%,diff);
subst(LXYR1,%);
subst(LXYR2,%);
VXRTCURL0:trigrat(expand(TR.%));
VXRTCURL:subst(LISVR1,%);
VOR2:VOR1=%;
VOR21:subst(['diff(v[z],\theta,1)=0,
 'diff(v[r],\theta,1)=0],%);
VRTZDT1:matrix(['diff(v[r],t,1)-v[\theta]
 ^2/r],['diff(v[\theta],t,1)+(v[r]*
 v[\theta])/r],['diff(v[z],t,1)]);
col(adjoint(transpose(addcol(VRTZ0,VOR1,
 matrix([1],[1],[1])))),3);
HH1:%-VRTZDT1;
grad(h);
transpose(express(%));
ev(%,diff);
subst(LXYR1,%);
subst(LXYR2,%);
trigsimp(TR.%);
HH2:subst(['diff(h,theta,1)=0],%);
HH3:HH1=HH2;
VRTZ;
VXRTCURL0;
col(adjoint(transpose(addcol(VRTZ,
 VXRTCURL0,matrix([1],[1],[1])))),3);
subst(LISVR1,%);
DVVOM1:expand(-VRTZDT1+%);
DVVOM2:%[2][1]=0;
subst(['diff(v[z],theta,1)=0,'diff(v[r],
 theta,1)=0],%);
DVT1:solve(%,'diff(v[theta],t,1))[1];
```

次に、Bernoulli の定理から求めた Euler の運動方程式

の円柱座標標記を求める。流速：$\overrightarrow{V}$ の円柱座標標記は、

$$\overrightarrow{V} = \begin{pmatrix} v_r \\ v_\theta \\ v_z \end{pmatrix} \tag{8.8.4}$$

渦度：$\overrightarrow{\omega} = curl\overrightarrow{V}$ は $x-y-z$ 座標標記で下記となる。

$$\begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{d\,y}\,w - \frac{d}{d\,z}\,v \\ \frac{d}{d\,z}\,u - \frac{d}{d\,x}\,w \\ \frac{d}{d\,x}\,v - \frac{d}{d\,y}\,u \end{pmatrix} \tag{8.8.5}$$

円柱座標系の速度コンポーネント:v_r, v_θ, v_z を微分をする上で、Maxima の処理上の都合から、下記の a, b, c と置き換える。ここで、$x-y-z$ 座標の各速度コンポーネント:u, v, w と円柱座標系の速度コンポーネント:a, b, c の関係は下記である。ここで、a, b, c は r, θ, z の関数とする。

$$\begin{pmatrix} v_r \\ v_\theta \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} u =& a\cos(\theta) - b\sin(\theta) \\ v =& a\sin(\theta) + b\cos(\theta), \quad w = c \end{aligned} \tag{8.8.6}$$

$x-y-z$ 座標系と円柱座標系の関係は下記となる. ここで TR は座標変換マトリックスである。

$$\begin{aligned} x =& r\cos(\theta), \quad y = r\sin(\theta) \\ \frac{d}{d\,x}\,r =& \cos(\theta), \frac{d}{d\,x}\,\theta = -\frac{\sin(\theta)}{r} \\ \frac{d}{d\,y}\,r =& \sin(\theta), \frac{d}{d\,y}\,\theta = \frac{\cos(\theta)}{r} \\ TR =& \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{8.8.7}$$

(8.8.5) 式に (8.8.6) 式を代入し、微分を実行して、(8.8.7) 式を代入し、座標変換マトリックス：TR を掛け整理し、$a, b, c \to v_r, v_\theta, v_z$ に置き換えると、下記の渦度の円柱座標標記が得られる。

$$curl\overrightarrow{V} = \begin{pmatrix} \omega_r \\ \omega_\theta \\ \omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{r\left(\frac{d}{d\,z}\,v_\theta\right) - \frac{d}{d\,\theta}\,v_z}{r} \\ \frac{d}{d\,z}\,v_r - \frac{d}{d\,r}\,v_z \\ \frac{r\left(\frac{d}{d\,r}\,v_\theta\right) + v_\theta - \frac{d}{d\,\theta}\,v_r}{r} \end{pmatrix} \tag{8.8.8}$$

軸対称とすると、

$$curl\overrightarrow{V} = \begin{pmatrix} \omega_r \\ \omega_\theta \\ \omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{d}{d\,z}\,v_\theta \\ \frac{d}{d\,z}\,v_r - \frac{d}{d\,r}\,v_z \\ \frac{r\left(\frac{d}{d\,r}\,v_\theta\right) + v_\theta}{r} \end{pmatrix}$$

(8.8.2) 式の左辺第二項は、(8.8.4) 式と上式から、

$$\overrightarrow{V} \times curl\overrightarrow{V} = \begin{pmatrix} v_\theta\,\omega_z - \omega_\theta\,v_z \\ \omega_r\,v_z - v_r\,\omega_z \\ v_r\,\omega_\theta - \omega_r\,v_\theta \end{pmatrix}$$

$\frac{d}{d\,t}\overrightarrow{V}$ の項は、「B.1.5 Navier-Stokes の式　(1) 加速度項　ベクトルの式による　(B.1.17) 式、663 頁」から下記となる。

$$\frac{d}{d\,t}\,\overrightarrow{V} = \begin{pmatrix} \frac{d}{d\,t}\,v_r - \frac{v_\theta^2}{r} \\ \frac{d}{d\,t}\,v_\theta + \frac{v_r\,v_\theta}{r} \\ \frac{d}{d\,t}\,v_z \end{pmatrix}$$

以上から、

$$\begin{aligned} &-\left(\frac{d}{d\,t}\,\overrightarrow{V} - \overrightarrow{V} \times curl\overrightarrow{V}\right) \\ &= \begin{pmatrix} -\omega_\theta\,v_z + v_\theta\,\omega_z + \frac{v_\theta^2}{r} - \frac{d}{d\,t}\,v_r \\ \omega_r\,v_z - v_r\,\omega_z - \frac{d}{d\,t}\,v_\theta - \frac{v_r\,v_\theta}{r} \\ -\frac{d}{d\,t}\,v_z - \omega_r\,v_\theta + v_r\,\omega_\theta \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{8.8.9}$$

Bernoulli の定理から、下記の h を定義する。

$$g\,z + \frac{\overrightarrow{V}^2}{2} + \frac{p}{\rho} = h$$

ここで h は r, θ, z の関数とし、(8.8.7) 式から、

$$\begin{aligned} grad(h) &= \begin{pmatrix} \frac{d}{d\,x}\,h \\ \frac{d}{d\,y}\,h \\ \frac{d}{d\,z}\,h \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \left(\frac{d}{d\,\theta}\,h\right)\left(\frac{d}{d\,x}\,\theta\right) + \left(\frac{d}{d\,r}\,h\right)\left(\frac{d}{d\,x}\,r\right) \\ \left(\frac{d}{d\,\theta}\,h\right)\left(\frac{d}{d\,y}\,\theta\right) + \left(\frac{d}{d\,r}\,h\right)\left(\frac{d}{d\,y}\,r\right) \\ \frac{d}{d\,z}\,h \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \left(\frac{d}{d\,r}\,h\right)\cos(\theta) - \frac{\left(\frac{d}{d\,\theta}\,h\right)\sin(\theta)}{r} \\ \left(\frac{d}{d\,r}\,h\right)\sin(\theta) + \frac{\left(\frac{d}{d\,\theta}\,h\right)\cos(\theta)}{r} \\ \frac{d}{d\,z}\,h \end{pmatrix} \end{aligned}$$

上式に (8.8.7) 式の座標変換マトリックル：TR を掛け、整理し、軸対称とすると、

$$grad(h) = \begin{pmatrix} \frac{d}{d\,r}\,h \\ \frac{\frac{d}{d\,\theta}\,h}{r} \\ \frac{d}{d\,z}\,h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{d\,r}\,h \\ 0 \\ \frac{d}{d\,z}\,h \end{pmatrix} \tag{8.8.10}$$

(8.8.2) 式に (8.8.9) 式、(8.8.10) 式の結果を代入し、次式が得られ、渦度を含んだ Bernoulli の定理から求めた円柱座標系軸対称の Euler の運動方程式が得られた。

$$\begin{pmatrix} -\omega_\theta\,v_z + v_\theta\,\omega_z + \frac{v_\theta^2}{r} - \frac{d}{d\,t}\,v_r \\ \omega_r\,v_z - v_r\,\omega_z - \frac{d}{d\,t}\,v_\theta - \frac{v_r\,v_\theta}{r} \\ -\frac{d}{d\,t}\,v_z - \omega_r\,v_\theta + v_r\,\omega_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{d\,r}\,h \\ 0 \\ \frac{d}{d\,z}\,h \end{pmatrix} \tag{8.8.11}$$

上式で渦度を (8.8.8) 式から速度に変換すると、

$$\begin{pmatrix} v_z\left(\frac{d}{d\,r}\,v_z\right)-\left(\frac{d}{d\,z}\,v_r\right)\,v_z+v_\theta\left(\frac{d}{d\,r}\,v_\theta\right)+\frac{2\,v_\theta^2}{r}-\frac{\left(\frac{d}{d\,\theta}\,v_r\right)v_\theta}{r}-\frac{d}{d\,t}\,v_r \\ \frac{v_z\left(\frac{d}{d\,\theta}\,v_z\right)}{r}-\left(\frac{d}{d\,z}\,v_\theta\right)\,v_z-\frac{d}{d\,t}\,v_\theta-v_r\left(\frac{d}{d\,r}\,v_\theta\right)-\frac{2\,v_r\,v_\theta}{r}+\frac{v_r\left(\frac{d}{d\,\theta}\,v_r\right)}{r} \\ -\frac{v_\theta\left(\frac{d}{d\,\theta}\,v_z\right)}{r}-\frac{d}{d\,t}\,v_z-v_r\left(\frac{d}{d\,r}\,v_z\right)+v_\theta\left(\frac{d}{d\,z}\,v_\theta\right)+v_r\left(\frac{d}{d\,z}\,v_r\right) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{d}{d\,r}\,h \\ 0 \\ \frac{d}{d\,z}\,h\end{pmatrix}$$

θ 項は、

$$\frac{v_z\left(\frac{d}{d\,\theta}\,v_z\right)}{r}-\left(\frac{d}{d\,z}\,v_\theta\right)\,v_z-\frac{d}{d\,t}\,v_\theta-v_r\left(\frac{d}{d\,r}\,v_\theta\right)-\frac{2\,v_r\,v_\theta}{r}+\frac{v_r\left(\frac{d}{d\,\theta}\,v_r\right)}{r}=0$$

軸対称とし、$\frac{d}{d\,t}\,v_\theta$ を求めると、

$$\frac{d}{d\,t}\,v_\theta=-\frac{r\left(\frac{d}{d\,z}\,v_\theta\right)\,v_z+r\,v_r\left(\frac{d}{d\,r}\,v_\theta\right)+2\,v_r\,v_\theta}{r} \tag{8.8.12}$$

8.8.2　旋回流を有する定常軸対称流

軸対称の旋回流で断面変化の影響について調べる [1]。上流側の管径、外径 : D_1、内径 : D_2 とし、下流側の断面変化後の管径、外径 : E_1、内径 : E_2 とする。上流側の流体の軸方向流速 : U、角速度 : Ω で対称軸を中心に流体は剛体回転しているものとする。ここで粘性の直接的な効果が無視できる流れとすると、運動方程式は Euler の運動方程式となる。また、上流側、下流側とも十分定常となった流れとする。座標系として、円柱座標 $r-\theta-z$ 系とし、対称軸を z 軸とする。流速の円柱座標コンポーネントを v_r, v_θ, v_z とする。また、渦度 : ω の円柱座標コンポーネントを $\omega_r, \omega_\theta, \omega_z$ とする。重力加速度 : g、圧力:p、密度 : ρ とする。

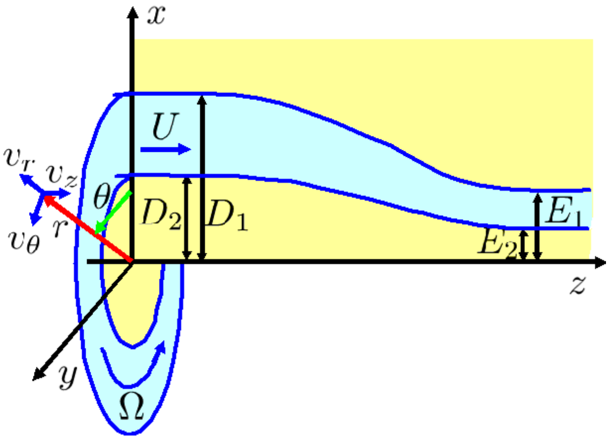


図 8.8.1: 旋回流を有する定常軸対称流

```
/* 旋回を伴った z 軸対称流 R-1   */
kill(all);
load("vect");
depends(r,[t,x,y]);
depends(\theta,[t,x,y]);
depends(z,[t]);
VXYZ:matrix([u],[v],[w]);
VRTZ:matrix([a],[b],[c]);
LISVR1:[a=v[r],b=v[\theta],c=v[z]];
VRTZ0:subst(LISVR1,VRTZ);
VRTZ0=VRTZ;
depends(u,[t,x,y,z]);
depends(v,[t,x,y,z]);
depends(w,[t,x,y,z]);
depends(a,[t,r,\theta,z]);
depends(b,[t,r,\theta,z]);
```

```
depends(c,[t,r,\theta,z]);
depends(h,[r,\theta,z]);
VOR2:matrix([omega[r]],[omega[theta]],
 [omega[z]])=matrix([-(r*('diff(v[theta],
 z,1))-'diff(v[z],theta,1))/r],['diff(
 v[r],z,1)-'diff(v[z],r,1)],[(r*('diff(
 v[theta],r,1))+v[theta]-'diff(v[r],theta,
 1))/r]);
VOR21:subst(['diff(v[z],\theta,1)=0,
 'diff(v[r],\theta,1)=0],%);
HH3:matrix([-omega[theta]*v[z]+v[theta]
 *omega[z]-'diff(v[r],t,1)],[omega[r]*v[z]
 -v[r]*omega[z]-'diff(v[theta],t,1)],[-
 'diff(v[z],t,1)-omega[r]*v[theta]+v[r]
 *omega[theta]])=matrix(['diff(h,r,1)],[0]
 ,['diff(h,z,1)]);
```

(8.8.8) 式から渦度の円柱座標の軸対称表記は、

$$\begin{pmatrix}\omega_r\\ \omega_\theta\\ \omega_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{d}{d\,z}\,v_\theta\\ \frac{d}{d\,z}\,v_r-\frac{d}{d\,r}\,v_z\\ \frac{r\left(\frac{d}{d\,r}\,v_\theta\right)+v_\theta}{r}\end{pmatrix}\tag{8.8.13}$$

(8.8.11) 式から渦度を含んだ Bernoulli の定理から求めた軸対称の Euler の運動方程式は下記である。

$$\begin{pmatrix}-\omega_\theta\,v_z+v_\theta\,\omega_z+\frac{v_\theta^2}{r}-\frac{d}{d\,t}\,v_r\\ \omega_r\,v_z-v_r\,\omega_z-\frac{d}{d\,t}\,v_\theta-\frac{v_r\,v_\theta}{r}\\ -\frac{d}{d\,t}\,v_z-\omega_r\,v_\theta+v_r\,\omega_\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{d}{d\,r}\,h\\ 0\\ \frac{d}{d\,z}\,h\end{pmatrix}\tag{8.8.14}$$

ここで h は Bernoulli の定理から、下記である。

$$g\,z+\frac{\vec{V}^2}{2}+\frac{p}{\rho}=h$$

```
depends(\Psi,[r,z]);
PSIR1:v[r]=-diff(\Psi,z,1)/r;
PSIR2:solve(%,'diff(Psi,z,1))[1];
PSIZ1:v[z]=diff(\Psi,r,1)/r;
PSIZ2:solve(%,'diff(Psi,r,1))[1];
lhs(VOR21)[2][1]=rhs(VOR21)[2][1];
subst([PSIR1,PSIZ1],%);
OMT1:ev(%,diff);
DVT1:'diff(v[theta],t,1)=-(r*('diff(
 v[theta],z,1))*v[z]+r*v[r]*('diff(
 v[theta],r,1))+2*v[r]*v[theta])/r;
UA:u=a*cos(\theta)-b*sin(\theta);
VA:v=a*sin(\theta)+b*cos(\theta);
WA:w=c;
TR:matrix([cos(\theta),sin(\theta),0],
 [-sin(\theta),cos(\theta),0],[0,0,1]);
'diff(r*VXYZ,t,1);
```

[1] G. K. Batchelor : 入門　流体力学 [18]、7.15(a) 回転する流体の流れについて管の断面積が変化することの効果 P.549

```
subst([UA,VA,WA],%);
ev(%,diff);
subst(['diff(r,x,1)=0,'diff(r,y,1)=0,'diff(
 \theta,y,1)=0,'diff(\theta,x,1)=0,'diff(
 r,t,1)=a,'diff(\theta,t,1)=b/r,
 'diff(z,t,1)=c],%);
TR.%;
expand(trigsimp(%));
subst(LISVR1,%);
%[2][1];
subst([DVT1,'diff(v[\theta],theta,1)=0],%);
```

流れ関数：Ψ を導入する。円柱座標では下記の関係がある。

$$v_r = -\frac{\frac{d}{d\,z}\,\Psi}{r}, \quad \frac{d}{d\,z}\,\Psi = -r\,v_r$$
$$v_z = \frac{\frac{d}{d\,r}\,\Psi}{r}, \quad \frac{d}{d\,r}\,\Psi = r\,v_z \tag{8.8.15}$$

(8.8.13) 式から ω_θ を上式の流れ関数：Ψ で表現すると、

$$\begin{aligned}\omega_\theta &= \frac{d}{d\,z}\,v_r - \frac{d}{d\,r}\,v_z \\ &= \frac{d}{d\,z}\left(-\frac{\frac{d}{d\,z}\,\Psi}{r}\right) - \frac{d}{d\,r}\,\frac{\frac{d}{d\,r}\,\Psi}{r} \\ &= -\frac{\frac{d^2}{d\,z^2}\,\Psi}{r} - \frac{\frac{d^2}{d\,r^2}\,\Psi}{r} + \frac{\frac{d}{d\,r}\,\Psi}{r^2}\end{aligned} \tag{8.8.16}$$

$\frac{d}{d\,t}\,(r\,v_\theta)$ について調べる。Maxima の処理の都合上、v_r, v_θ, v_z を下記の a, b, c に置き換える。

$$\begin{pmatrix} v_r \\ v_\theta \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$x-y-z$ 軸系の流速：u, v, w と円柱座標系の流速：a, b, c の関係は下記となる。

$$u = a\cos(\theta) - b\sin(\theta), \quad v = a\sin(\theta) + b\cos(\theta)$$
$$w = c \tag{8.8.17}$$

$r\,\overrightarrow{V}$ の円柱座標系の物質微分は、下記のように $x-y-z$ 軸系のものに (8.8.17) 式を代入し、

$$\frac{d}{d\,t}\,r\,\overrightarrow{V} = \frac{d}{d\,t}\begin{pmatrix} r\,u \\ r\,v \\ r\,w \end{pmatrix} = \frac{d}{d\,t}\begin{pmatrix} r\,(a\cos(\theta) - b\sin(\theta)) \\ r\,(a\sin(\theta) + b\cos(\theta)) \\ c\,r \end{pmatrix}$$

微分を実行し、座標変換マトリックス：TR を掛けることにより得られる。

$$\frac{d}{d\,t}\,r\,\overrightarrow{V} = TR.\frac{d}{d\,t}\begin{pmatrix} r\,(a\cos(\theta) - b\sin(\theta)) \\ r\,(a\sin(\theta) + b\cos(\theta)) \\ c\,r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{d}{d\,z}\,a\right)\,c\,r + \left(\frac{d}{d\,t}\,a\right)\,r + a\,\left(\frac{d}{d\,r}\,a\right)\,r - b^2 + \left(\frac{d}{d\,\theta}\,a\right)\,b + a^2 \\ \left(\frac{d}{d\,z}\,b\right)\,c\,r + \left(\frac{d}{d\,t}\,b\right)\,r + a\,\left(\frac{d}{d\,r}\,b\right)\,r + b\,\left(\frac{d}{d\,\theta}\,b\right) + 2\,a\,b \\ c\,\left(\frac{d}{d\,z}\,c\right)\,r + \left(\frac{d}{d\,t}\,c\right)\,r + a\,\left(\frac{d}{d\,r}\,c\right)\,r + b\,\left(\frac{d}{d\,\theta}\,c\right) + a\,c \end{pmatrix}$$

$a, b, c \to v_r, v_\theta, v_z$ の置き換えを行い、

$$\frac{d}{d\,t}\,r\,\overrightarrow{V} = \frac{d}{d\,t}\,r\begin{pmatrix} v_r \\ v_\theta \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\,\left(\frac{d}{d\,z}\,v_r\right)\,v_z - v_\theta^2 + \left(\frac{d}{d\,\theta}\,v_r\right)\,v_\theta + r\,\left(\frac{d}{d\,t}\,v_r\right) + r\,v_r\,\left(\frac{d}{d\,r}\,v_r\right) + v_r^2 \\ r\,\left(\frac{d}{d\,z}\,v_\theta\right)\,v_z + v_\theta\,\left(\frac{d}{d\,\theta}\,v_\theta\right) + r\,\left(\frac{d}{d\,t}\,v_\theta\right) + r\,v_r\,\left(\frac{d}{d\,r}\,v_\theta\right) + 2\,v_r\,v_\theta \\ r\,v_z\,\left(\frac{d}{d\,z}\,v_z\right) + v_\theta\,\left(\frac{d}{d\,\theta}\,v_z\right) + r\,\left(\frac{d}{d\,t}\,v_z\right) + r\,v_r\,\left(\frac{d}{d\,r}\,v_z\right) + v_r\,v_z \end{pmatrix}$$

以上から、$\frac{d}{d\,t}\,(r\,v_\theta)$ は軸対称とすると、

$$\frac{d}{d\,t}\,(r\,v_\theta) = r\,\left(\frac{d}{d\,z}\,v_\theta\right)\,v_z + r\,\left(\frac{d}{d\,t}\,v_\theta\right) + r\,v_r\,\left(\frac{d}{d\,r}\,v_\theta\right) + 2\,v_r\,v_\theta \tag{8.8.18}$$

(8.8.12) 式から Euler の運動方程式から得られた $\frac{d}{d\,t}\,v_\theta$ は、

$$\frac{d}{d\,t}\,v_\theta = \frac{-r\,\left(\frac{d}{d\,z}\,v_\theta\right)\,v_z - r\,v_r\,\left(\frac{d}{d\,r}\,v_\theta\right) - 2\,v_r\,v_\theta}{r}$$

上式の関係を (8.8.18) 式に代入すると、次式が得られる。

$$\frac{d}{d\,t}\,(r\,v_\theta) = 0 \tag{8.8.19}$$

```
depends(H,[\Psi]);
depends(C,[\Psi]);
HH4:H=(a^2+b^2+c^2)/2+p/\rho;
HH41:subst(LISVR1,%);
CC4:C=r*b;
CC41:subst(LISVR1,%);
CC411:solve(%,v[\theta])[1];
diff(CC4,r,1);
subst([PSIZ2],%);
CC42:subst(LISVR1,%);
lhs(VOR21)[3][1]=rhs(VOR21)[3][1];
solve(%,'diff(v[theta],r,1))[1];
subst([%],CC42);
CC51:solve(%,omega[z])[1];
diff(CC4,z,1);
subst([PSIR2],%);
CC43:subst(LISVR1,%);
lhs(VOR21)[1][1]=rhs(VOR21)[1][1];
VOR31:solve(%,'diff(v[\theta],z,1))[1];
subst([%],CC43);
CC52:solve(%,omega[r])[1];
lhs(VOR21)[2][1]=rhs(VOR21)[2][1];
VOR32:solve(%,'diff(v[r],z,1))[1];
'diff(h,z,1)=diff(H,z,1);
lhs(HH3)[3][1]=rhs(HH3)[3][1];
subst(['diff(v[z],t,1)=0,'diff(h,z,1)=
 diff(H,z,1)],%);
subst([PSIR2,CC52,CC411],%);
OMT2:expand(solve(%,\omega[\theta])[1]);
PSHC1:expand(-r*(rhs(OMT1)=rhs(OMT2)));
```

ここでは粘性効果を無視しているので、Bernoulli の定理から次式は流線に沿って一定：H となる。ここで H は Ψ の関数とし、gz の項は z 軸が水平であるとして省略できる．

$$H=\frac{v_z^2+v_\theta^2+v_r^2}{2}+\frac{p}{\rho} \tag{8.8.20}$$

また、(8.8.19) 式から次式となる。ここで C は Ψ の関数とする。

$$C=r\,v_\theta \tag{8.8.21}$$

上式を r で微分し、

$$\left(\frac{d}{d\,r}\,\Psi\right)\left(\frac{d}{d\,\Psi}\,C\right)=r\left(\frac{d}{d\,r}\,v_\theta\right)+v_\theta$$

(8.8.15) 式を代入し、

$$r\,v_z\left(\frac{d}{d\,\Psi}\,C\right)=r\left(\frac{d}{d\,r}\,v_\theta\right)+v_\theta$$

(8.8.13) 式の関係式：$\omega_z=\frac{r\left(\frac{d}{d\,r}\,v_\theta\right)+v_\theta}{r}$ から、

$$r\,v_z\left(\frac{d}{d\,\Psi}\,C\right)=r\,\omega_z$$

上式から、ω_z は、

$$\omega_z=v_z\left(\frac{d}{d\,\Psi}\,C\right) \tag{8.8.22}$$

(8.8.21) 式を z で微分し、

$$\left(\frac{d}{d\,z}\,\Psi\right)\left(\frac{d}{d\,\Psi}\,C\right)=r\left(\frac{d}{d\,z}\,v_\theta\right)$$

(8.8.15) 式を代入し、

$$-r\,v_r\left(\frac{d}{d\,\Psi}\,C\right)=r\left(\frac{d}{d\,z}\,v_\theta\right)$$

(8.8.13) 式の関係式：$\omega_r=-\frac{d}{d\,z}\,v_\theta$ から、

$$-r\,v_r\left(\frac{d}{d\,\Psi}\,C\right)=-r\,\omega_r$$

上式から、ω_r は、

$$\omega_r=v_r\left(\frac{d}{d\,\Psi}\,C\right) \tag{8.8.23}$$

(8.8.14) 式の h と (8.8.20) 式の H は同じものであり、これを z で微分すると、

$$\frac{d}{d\,z}\,h=\left(\frac{d}{d\,z}\,\Psi\right)\left(\frac{d}{d\,\Psi}\,H\right)$$

上式に (8.8.14) 式を代入し、定常とすると、

$$v_r\,\omega_\theta-\omega_r\,v_\theta=\left(\frac{d}{d\,z}\,\Psi\right)\left(\frac{d}{d\,\Psi}\,H\right)$$

上式に (8.8.23) 式と (8.8.21) 式を代入し、

$$v_r\,\omega_\theta-\frac{v_r\,C\,\left(\frac{d}{d\,\Psi}\,C\right)}{r}=-r\,v_r\left(\frac{d}{d\,\Psi}\,H\right)$$

ω_θ を求めると、

$$\omega_\theta=\frac{C\,\left(\frac{d}{d\,\Psi}\,C\right)}{r}-r\left(\frac{d}{d\,\Psi}\,H\right)$$

上式と (8.8.16) 式の ω_θ を等しいとおいて、整理すると、

$$\begin{aligned}-\frac{\frac{d}{d\,r}\,\Psi}{r}+\frac{d^2}{d\,z^2}\,\Psi+\frac{d^2}{d\,r^2}\,\Psi\\ =r^2\left(\frac{d}{d\,\Psi}\,H\right)-C\left(\frac{d}{d\,\Psi}\,C\right)\end{aligned} \tag{8.8.24}$$

```
CC6:C=2*\Omega*\Psi/U;
HH6:H=1/2*U^2+2*\Omega^2*\Psi/U;
subst([CC6,HH6],PSHC1);
PSHC2:ev(%,diff);
depends(F,[r,z]);
PSIF1:\Psi=1/2*U*r^2+r*F;
subst([PSIF1],PSHC2);
factor(ev(%,diff)/r);
PSHC3:expand(lhs(%)-rhs(%)=0);
K1:k=2*\Omega/U;
K2:solve(%,\Omega)[1];
PSHC31:subst(['diff(F,z,2)=0,K2],PSHC3);
```

上流側の流体では、一様な軸方向の流速：U で、角速度：Ω で剛体回転しているとする。このとき、(8.8.15) 式の $\frac{d}{d\,r}\,\Psi=r\,U$、(8.8.21) 式から

$$\Psi=\frac{1}{2}\,U\,r^2,\quad C=\Omega\,r^2$$

(8.8.20) 式から

$$H=\frac{1}{2}\,U^2\,+\,\Omega^2\,r^2 \tag{8.8.25}$$

上式から、上流側の H,C を Ψ で表現すると、

$$C=\frac{2\,\Omega\,\Psi}{U},\quad H=\frac{U^2}{2}+\frac{2\,\Omega^2\,\Psi}{U} \tag{8.8.26}$$

これは流場全体にわたっての H,C の Ψ の関数でないとならない。上式を (8.8.24) 式に代入すると、下記の式が得られる。

$$-\frac{\frac{d}{d\,r}\,\Psi}{r}+\frac{d^2}{d\,z^2}\,\Psi+\frac{d^2}{d\,r^2}\,\Psi=\frac{2\,\Omega^2\,r^2}{U}-\frac{4\,\Omega^2\,\Psi}{U^2} \tag{8.8.27}$$

Ψ を上流側の一様流成分とそれからのずれ分：$r\,F$ で下記のように表現する。ここで F は r,z の関数とする。

$$\Psi=\frac{r^2\,U}{2}+r\,F \tag{8.8.28}$$

上式を (8.8.27) 式に代入すると、

$$\frac{d^2}{d\,z^2}\,\left(\frac{r^2\,U}{2}+r\,F\right)+\frac{d^2}{d\,r^2}\,\left(\frac{r^2\,U}{2}+r\,F\right)-\frac{\frac{d}{d\,r}\,\left(\frac{r^2\,U}{2}+r\,F\right)}{r}=\frac{2\,\Omega^2\,r^2}{U}-\frac{4\,\Omega^2\,\left(\frac{r^2\,U}{2}+r\,F\right)}{U^2}$$

微分を実行し、右辺を左辺に移項し、整理すると、

$$\frac{4\,\Omega^2\,F}{U^2}+\frac{d^2}{d\,z^2}\,F+\frac{d^2}{d\,r^2}\,F+\frac{\frac{d}{d\,r}\,F}{r}-\frac{F}{r^2}=0$$

ここで、下流側で、十分定常状態になった位置では、$\frac{d^2}{d\,z^2}\,F=0$ となる。そして下記の k を導入し、上式に代入すると、

$$k=\frac{2\,\Omega}{U},\quad \Omega=\frac{k\,U}{2} \tag{8.8.29}$$

$$\frac{d^2}{d\,r^2}\,F+\frac{\frac{d}{d\,r}\,F}{r}-\frac{F}{r^2}+k^2\,F=0 \tag{8.8.30}$$

```
A:0;
C:1;
B:k;
N:1;
TRFCVA:f(t)=(t/B)^(A/C);
TRFC:F=f(t)*u(t);
TRFC0:subst([TRFCVA],TRFC);
TRFC1:solve(TRFC0,u(t))[1];
TRVA:t=B*r^C;
TRVA1:r=(t/B)^(1/C);
assume(t>0);
DVX1:'diff(F,r,1)='diff(u(t),t,1)*1/(
 diff(rhs(TRVA1),t,1));
```

```
DVX2:'diff(F,r,2)='diff(u(t),t,2)*1/(
 diff(rhs(TRVA1),t,1)^2);
subst([DVX1,DVX2,TRFC0,TRVA1],PSHC31);
expand(%/k^2);
ode2(%,u(t),t);
```

(8.8.30) 式は Bessel の微分方程式であるが、このままでは Maxima では解けないので、下記の変数変換を行う。

$$F=\mathrm{u}\,(t)\,,\quad t=k\,r$$

$$\frac{d}{d\,r}\,F=k\,\left(\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{u}\,(t)\right),\quad \frac{d^2}{d\,r^2}\,F=k^2\,\left(\frac{d^2}{d\,t^2}\,\mathrm{u}\,(t)\right)$$

上式を (8.8.30) 式に代入し、整理すると、

$$\frac{d^2}{d\,t^2}\,\mathrm{u}\,(t)+\frac{\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{u}\,(t)}{t}-\frac{\mathrm{u}\,(t)}{t^2}+\mathrm{u}\,(t)=0$$

これは Maxima で下記の解が得られる。

$$\mathrm{u}\,(t)=\mathrm{bessel\_y}\,(1,t)\ \%k2+\mathrm{bessel\_j}\,(1,t)\ \%k1$$

上記の変数変換を行い、元の関数：F に戻すと、

$$F=\mathrm{bessel\_y}\,(1,k\,r)\ \%k2+\mathrm{bessel\_j}\,(1,k\,r)\ \%k1 \tag{8.8.31}$$

上式を (8.8.26) 式に代入すると、

$$H=\frac{U^2}{2}+\frac{2\,\Omega^2}{U}\,\left(\frac{r^2\,U}{2}+\left(\mathrm{bessel\_y}\,(1,k\,r)\ \%k2+\mathrm{bessel\_j}\,(1,k\,r)\ \%k1\right)\,r\right) \tag{8.8.32}$$

上流側の管壁の H の初期値は (8.8.25) 式に $r=D_1,D_2$ を代入し、

$$H_1=\frac{U^2}{2}+D_1^2\,\Omega^2,\quad H_2=\frac{U^2}{2}+D_2^2\,\Omega^2$$

下流側の管壁の H は (8.8.32) 式に $r=E_1,E_2$ を代入し、

$$H_1=\frac{U^2}{2}+\frac{2\,E_1\,\mathrm{bessel\_y}\,(1,E_1\,k)\ \%k2\,\Omega^2}{U}+\frac{2\,E_1\,\mathrm{bessel\_j}\,(1,E_1\,k)\ \%k1\,\Omega^2}{U}+E_1^2\,\Omega^2$$

$$H_2=\frac{U^2}{2}+\frac{2\,\mathrm{bessel\_y}\,(1,E_2\,k)\ E_2\,\%k2\,\Omega^2}{U}+\frac{2\,\mathrm{bessel\_j}\,(1,E_2\,k)\ E_2\,\%k1\,\Omega^2}{U}+E_2^2\,\Omega^2$$

上記の H_1, H_2 に関する四式から、$\%k1, \%k2$ を求めると。

$$\%k1 = -\frac{\left(E_1\,\mathrm{bessel\_y}\left(1,E_1\,k\right)\,\left(E_2^2-D_2^2\right)-E_1^2\,\mathrm{bessel\_y}\left(1,E_2\,k\right)\,E_2+D_1^2\,\mathrm{bessel\_y}\left(1,E_2\,k\right)\,E_2\right)\,U}{2\,E_1\,\mathrm{bessel\_y}\left(1,E_1\,k\right)\,\mathrm{bessel\_j}\left(1,E_2\,k\right)\,E_2-2\,E_1\,\mathrm{bessel\_j}\left(1,E_1\,k\right)\,\mathrm{bessel\_y}\left(1,E_2\,k\right)\,E_2},$$

$$\%k2 = \frac{\left(E_1\,\mathrm{bessel\_j}\left(1,E_1\,k\right)\,\left(E_2^2-D_2^2\right)-E_1^2\,\mathrm{bessel\_j}\left(1,E_2\,k\right)\,E_2+D_1^2\,\mathrm{bessel\_j}\left(1,E_2\,k\right)\,E_2\right)\,U}{2\,E_1\,\mathrm{bessel\_y}\left(1,E_1\,k\right)\,\mathrm{bessel\_j}\left(1,E_2\,k\right)\,E_2-2\,E_1\,\mathrm{bessel\_j}\left(1,E_1\,k\right)\,\mathrm{bessel\_y}\left(1,E_2\,k\right)\,E_2}$$

```
PSHC4:subst([TRFC1,TRVA],%);
HH7:subst([PSIF1,PSHC4],HH6);
HH710:H[1]=subst([r=D[1],%k1=0,%k2=0],
 rhs(HH7));
HH720:H[2]=subst([r=D[2],%k1=0,%k2=0],
 rhs(HH7));
HH711:H[1]=subst([r=E[1]],rhs(HH7));
HH721:H[2]=subst([r=E[2]],rhs(HH7));
HH712:rhs(HH710)=rhs(HH711);
HH722:rhs(HH720)=rhs(HH721);
K12:solve([HH712,HH722],[%k1,%k2])[1];
plot2d(bessel_y(1,x)*x,[x,0.00001,10]);
subst([x=0.0000000001],bessel_y(1,x)*x);
BSB20:bessel_y(1,E[2]*k)*E[2]=-2/%pi;
BSB21:solve(%,bessel_y(1,E[2]*k))[1];
subst([D[2]=0],K12);
subst([BSB21],%);
K121:subst([E[2]=0],%);
```

次に、管内部の物体がない場合について、$D_2=0, E_2=0$ を上式に代入すれば得られる。しかし、$\lim_{E_2\to 0}\mathrm{bessel\_y}\left(1,E_2\,k\right)\to -\infty$ で発散するが、$\mathrm{bessel\_y}\left(1,E_2\,k\right)\,E_2$ とすれば、下図のように、収束し、その結果は、

$$\lim_{E_2\to 0}\mathrm{bessel\_y}\left(1,E_2\,k\right)\,E_2 = -\frac{2}{\pi}$$

この結果を代入すると、

$$\%k1 = -\frac{\pi\,\left(\frac{2\,E_1^2}{\pi}-\frac{2\,D_1^2}{\pi}\right)\,U}{4\,E_1\,\mathrm{bessel\_j}\left(1,E_1\,k\right)},\quad \%k2 = 0 \qquad (8.8.33)$$

(8.8.33) 式を (8.8.31) 式に代入すると、

$$F = -\frac{\pi\,\left(\frac{2\,E_1^2}{\pi}-\frac{2\,D_1^2}{\pi}\right)\,\mathrm{bessel\_j}\left(1,k\,r\right)\,U}{4\,E_1\,\mathrm{bessel\_j}\left(1,E_1\,k\right)}$$

上式を (8.8.28) 式に代入すると、流れ関数:Ψ が得られる。

$$\Psi = \frac{r^2\,U}{2} - \frac{\pi\,\left(\frac{2\,E_1^2}{\pi}-\frac{2\,D_1^2}{\pi}\right)\,\mathrm{bessel\_j}\left(1,k\,r\right)\,r\,U}{4\,E_1\,\mathrm{bessel\_j}\left(1,E_1\,k\right)} \qquad (8.8.34)$$

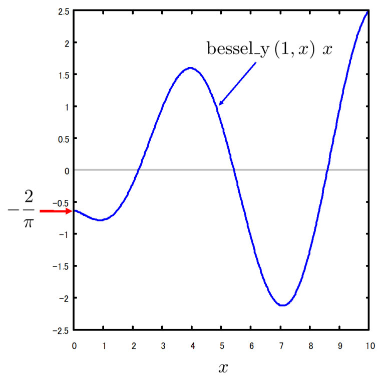


図 8.8.2: $\mathrm{bessel\_y}\left(1,x\right)\,x$

8.8.3 管内の旋回流の断面積変化による影響

管内の旋回流の断面積変化の影響について調べる。ここで、下流側では十分定常状態になった位置での流れを調べる。上流側の管外径：D_1 とし、断面変化後、下流側の管外径：E_1 とする。上流側の流体の軸方向流速：U、角速度：Ω で対称軸を中心に流体は剛体回転しているものとする。前述の結果を基に具体的な流れを計算する。ここでプログラムは前節に続いて実行するものとする。座標系として、円柱座標 $r-\theta-z$ 系とし、対称軸を z 軸とする。流速の円柱座標コンポーネントを v_r, v_θ, v_z とする。また、渦度：ω の円柱座標コンポーネントを $\omega_r, \omega_\theta, \omega_z$ とする。

```
C1:\alpha=E[1]/D[1];
C2:\sigma=k*D[1];
C3:\eta=r/E[1];
C4:\delta=\sigma*\alpha;
C11:solve(C1,D[1])[1];
C21:solve(C2,k)[1];
C31:solve(C3,r)[1];
C41:solve(C4,\sigma)[1];
PSHC5:subst([K121],PSHC4);
PSIF2:subst([PSHC5],PSIF1);
subst([PSIF2],PSIZ1)/U;
VZ1:ev(%,diff);
VZ11:expand(VZ1);
VZ2:subst([C21,C31,C11],VZ11);
VZ3:subst([C41],%);
VT0:subst([CC6],CC411);
VT1:expand(subst([PSIF2],%));
VT11:expand(%/\Omega/r);
VT2:lhs(VT11)=subst([C21,C31,C11],
 rhs(VT11));
VT3:subst([C41],%);
\omega[z]=1/r*'diff(rhs(VT1)*r,r,1);
OMZ1:expand(ev(%,diff));
OMZ11:expand(OMZ1/2/\Omega);
OMZ2:lhs(OMZ11)=subst([C21,C31,C11],
 rhs(OMZ11));
OMZ3:subst([C41],%);
```

前節の結果から、流れ関数:Ψ は (8.8.34) 式で得られる。

$$\Psi=\frac{r^2 U}{2}-\frac{\pi\left(\frac{2E_1^2}{\pi}-\frac{2D_1^2}{\pi}\right)\text{bessel\_j}\left(1,k\,r\right)\,r\,U}{4\,E_1\,\text{bessel\_j}\left(1,E_1\,k\right)} \tag{8.8.35}$$

以降、無次元化するための変数の関係式を以下に示す。ここで α は、流路径の拡大率であり、σ は、上流側の渦強度を表している。

$$\alpha=\frac{E_1}{D_1},\quad \sigma=D_1\,k=\frac{2\,\Omega\,D_1}{U},\quad \eta=\frac{r}{E_1},\quad \delta=\alpha\,\sigma$$
$$D_1=\frac{E_1}{\alpha},\quad k=\frac{\sigma}{D_1},\quad r=E_1\,\eta,\quad \sigma=\frac{\delta}{\alpha} \tag{8.8.36}$$

(8.8.35) 式を (8.8.15) 式に代入し、軸流速：v_z は、

$$\begin{aligned}\frac{v_z}{U}&=\frac{\frac{d}{d\,r}\,\Psi}{rU}\\ &=\frac{\frac{d}{d\,r}\left(\frac{r^2\,U}{2}-\frac{\pi\left(\frac{2\,E_1^2}{\pi}-\frac{2\,D_1^2}{\pi}\right)\text{bessel\_j}(1,k\,r)\,r\,U}{4\,E_1\,\text{bessel\_j}(1,E_1\,k)}\right)}{r\,U}\end{aligned}$$

微分を実行し、

$$\begin{aligned}\frac{v_z}{U}=&-\frac{E_1\,\text{bessel\_j}\left(1,k\,r\right)}{2\,\text{bessel\_j}\left(1,E_1\,k\right)\,r}\\ &+\frac{D_1^2\,\text{bessel\_j}\left(1,k\,r\right)}{2\,E_1\,\text{bessel\_j}\left(1,E_1\,k\right)\,r}\\ &+\frac{E_1\,\text{bessel\_j}\left(2,k\,r\right)\,k}{4\,\text{bessel\_j}\left(1,E_1\,k\right)}-\frac{D_1^2\,\text{bessel\_j}\left(2,k\,r\right)\,k}{4\,E_1\,\text{bessel\_j}\left(1,E_1\,k\right)}\\ &-\frac{\text{bessel\_j}\left(0,k\,r\right)\,E_1\,k}{4\,\text{bessel\_j}\left(1,E_1\,k\right)}+\frac{\text{bessel\_j}\left(0,k\,r\right)\,D_1^2\,k}{4\,E_1\,\text{bessel\_j}\left(1,E_1\,k\right)}\\ &+1\end{aligned} \tag{8.8.37}$$

上式に (8.8.36) 式を代入すると、

$$\begin{aligned}\frac{v_z}{U}=&\frac{\text{bessel\_j}\left(2,\alpha\,\eta\,\sigma\right)\,\alpha\,\sigma}{4\,\text{bessel\_j}\left(1,\alpha\,\sigma\right)}-\frac{\text{bessel\_j}\left(0,\alpha\,\eta\,\sigma\right)\,\alpha\,\sigma}{4\,\text{bessel\_j}\left(1,\alpha\,\sigma\right)}\\ &-\frac{\text{bessel\_j}\left(2,\alpha\,\eta\,\sigma\right)\,\sigma}{4\,\text{bessel\_j}\left(1,\alpha\,\sigma\right)\,\alpha}+\frac{\text{bessel\_j}\left(0,\alpha\,\eta\,\sigma\right)\,\sigma}{4\,\text{bessel\_j}\left(1,\alpha\,\sigma\right)\,\alpha}\\ &+\frac{\text{bessel\_j}\left(1,\alpha\,\eta\,\sigma\right)}{2\,\text{bessel\_j}\left(1,\alpha\,\sigma\right)\,\alpha^2\,\eta}-\frac{\text{bessel\_j}\left(1,\alpha\,\eta\,\sigma\right)}{2\,\text{bessel\_j}\left(1,\alpha\,\sigma\right)\,\eta}\\ &+1\end{aligned} \tag{8.8.38}$$

(8.8.21) 式に (8.8.26) 式を代入し、さらに (8.8.35) 式を代入して、旋回流速：v_θ は、

$$\begin{aligned}v_\theta=&\frac{2\,\Omega\,\Psi}{r\,U}\\ =&\Omega\,r-\frac{E_1\,\text{bessel\_j}\left(1,k\,r\right)\,\Omega}{\text{bessel\_j}\left(1,E_1\,k\right)}\\ &+\frac{D_1^2\,\text{bessel\_j}\left(1,k\,r\right)\,\Omega}{E_1\,\text{bessel\_j}\left(1,E_1\,k\right)}\end{aligned}$$

上式を無次元化し、

$$\begin{aligned}\frac{v_\theta}{\Omega\,r}=&-\frac{E_1\,\text{bessel\_j}\left(1,k\,r\right)}{\text{bessel\_j}\left(1,E_1\,k\right)\,r}\\ &+\frac{D_1^2\,\text{bessel\_j}\left(1,k\,r\right)}{E_1\,\text{bessel\_j}\left(1,E_1\,k\right)\,r}+1\end{aligned} \tag{8.8.39}$$

上式に (8.8.36) 式を代入すると、

$$\begin{aligned}\frac{v_\theta}{\Omega\, r} =&\frac{\mathrm{bessel\_j}\left(1, \alpha\, \eta\, \sigma\right)}{\mathrm{bessel\_j}\left(1, \alpha\, \sigma\right)\, \alpha^2\, \eta}\\&-\frac{\mathrm{bessel\_j}\left(1, \alpha\, \eta\, \sigma\right)}{\mathrm{bessel\_j}\left(1, \alpha\, \sigma\right)\, \eta}+1\end{aligned} \tag{8.8.40}$$

(8.8.13) 式に (8.8.40) 式を代入し、軸方向渦度：ω_z は、

$$\begin{aligned}\omega_z =&\frac{r\, \left(\frac{d}{d\, r}\, v_\theta\right)+v_\theta}{r}=\frac{1}{r}\, \frac{d}{d\, r}\, \left(r\, v_\theta\right)\\=&\frac{1}{r}\, \frac{d}{d\, r}\left(r\left(\Omega\, r-\frac{E_1\, \mathrm{bessel\_j}\left(1, k\, r\right)\, \Omega}{\mathrm{bessel\_j}\left(1, E_1\, k\right)}\right.\right.\\&\left.\left.+\frac{D_1^2\, \mathrm{bessel\_j}\left(1, k\, r\right)\, \Omega}{E_1\, \mathrm{bessel\_j}\left(1, E_1\, k\right)}\right)\right)\end{aligned}$$

微分を実行し、

$$\begin{aligned}\omega_z =&-\frac{E_1\, \mathrm{bessel\_j}\left(1, k\, r\right)\, \Omega}{\mathrm{bessel\_j}\left(1, E_1\, k\right)\, r}\\&+\frac{D_1^2\, \mathrm{bessel\_j}\left(1, k\, r\right)\, \Omega}{E_1\, \mathrm{bessel\_j}\left(1, E_1\, k\right)\, r}\\&+\frac{E_1\, \mathrm{bessel\_j}\left(2, k\, r\right)\, k\, \Omega}{2\, \mathrm{bessel\_j}\left(1, E_1\, k\right)}\\&-\frac{D_1^2\, \mathrm{bessel\_j}\left(2, k\, r\right)\, k\, \Omega}{2\, E_1\, \mathrm{bessel\_j}\left(1, E_1\, k\right)}\\&-\frac{\mathrm{bessel\_j}\left(0, k\, r\right)\, E_1\, k\, \Omega}{2\, \mathrm{bessel\_j}\left(1, E_1\, k\right)}\\&+\frac{\mathrm{bessel\_j}\left(0, k\, r\right)\, D_1^2\, k\, \Omega}{2\, E_1\, \mathrm{bessel\_j}\left(1, E_1\, k\right)}+2\, \Omega\end{aligned}$$

上式を無次元化し、

$$\begin{aligned}\frac{\omega_z}{2\, \Omega} =&-\frac{E_1\, \mathrm{bessel\_j}\left(1, k\, r\right)}{2\, \mathrm{bessel\_j}\left(1, E_1\, k\right)\, r}\\&+\frac{D_1^2\, \mathrm{bessel\_j}\left(1, k\, r\right)}{2\, E_1\, \mathrm{bessel\_j}\left(1, E_1\, k\right)\, r}\\&+\frac{E_1\, \mathrm{bessel\_j}\left(2, k\, r\right)\, k}{4\, \mathrm{bessel\_j}\left(1, E_1\, k\right)}\\&-\frac{D_1^2\, \mathrm{bessel\_j}\left(2, k\, r\right)\, k}{4\, E_1\, \mathrm{bessel\_j}\left(1, E_1\, k\right)}\\&-\frac{\mathrm{bessel\_j}\left(0, k\, r\right)\, E_1\, k}{4\, \mathrm{bessel\_j}\left(1, E_1\, k\right)}\\&+\frac{\mathrm{bessel\_j}\left(0, k\, r\right)\, D_1^2\, k}{4\, E_1\, \mathrm{bessel\_j}\left(1, E_1\, k\right)}+1\end{aligned} \tag{8.8.41}$$

上式に (8.8.36) 式を代入すると、

$$\begin{aligned}\frac{\omega_z}{2\, \Omega} =&\frac{\mathrm{bessel\_j}\left(2, \alpha\, \eta\, \sigma\right)\, \alpha\, \sigma}{4\, \mathrm{bessel\_j}\left(1, \alpha\, \sigma\right)}-\frac{\mathrm{bessel\_j}\left(0, \alpha\, \eta\, \sigma\right)\, \alpha\, \sigma}{4\, \mathrm{bessel\_j}\left(1, \alpha\, \sigma\right)}\\&-\frac{\mathrm{bessel\_j}\left(2, \alpha\, \eta\, \sigma\right)\, \sigma}{4\, \mathrm{bessel\_j}\left(1, \alpha\, \sigma\right)\, \alpha}+\frac{\mathrm{bessel\_j}\left(0, \alpha\, \eta\, \sigma\right)\, \sigma}{4\, \mathrm{bessel\_j}\left(1, \alpha\, \sigma\right)\, \alpha}\\&+\frac{\mathrm{bessel\_j}\left(1, \alpha\, \eta\, \sigma\right)}{2\, \mathrm{bessel\_j}\left(1, \alpha\, \sigma\right)\, \alpha^2\, \eta}-\frac{\mathrm{bessel\_j}\left(1, \alpha\, \eta\, \sigma\right)}{2\, \mathrm{bessel\_j}\left(1, \alpha\, \sigma\right)\, \eta}\\&+1\end{aligned} \tag{8.8.42}$$

```
LISCH:[U=1,D[1]=1,\sigma=1.0,\alpha=0.4];
K1:k=\sigma/D[1];
Q1:\Omega=k*U/2;
EE1:E[1]=\alpha*D[1];
subst([EE1,Q1,K1],rhs(VZ11));
VZ111:subst(LISCH,%);
subst([EE1,Q1,K1],rhs(OMZ1));
OMZ111:subst(LISCH,%);
\alpha*D[1];
R1:subst(LISCH,%);
N:10000;
DE1:R1/N;
S1:0;
S2:0;
for J:1 thru N do(
L:J,
ET1:DE1*L,
S2:float(S2+subst([r=ET1],OMZ111)*2*%pi
 *ET1*DE1),
S1:float(S1+subst([r=ET1],VZ111)*2*%pi
 *ET1*DE1));
S1;
S2;
S1/(%pi*R1^2)*\alpha^2;
float(subst(LISCH,%));
S2/%pi/D[1]^2/\Omega/2;
subst([Q1,K1],%);
float(subst(LISCH,%));
```

上記のプロセスで、上流側および下流側の軸流速：軸流速：v_z を断面積分し、流量が等しいことを確認した。また、また、上流側および下流側の軸方向渦度：ω_z を断面積分し、循環が等しいことを確認した。

下記に軸流速：v_z、旋回流速：v_θ、軸方向渦度：ω_z の計算結果を示す。

```
VZ204:subst([\sigma=1.0,\alpha=0.4,\eta=t]
 ,rhs(VZ2));
VZ206:subst([\sigma=1.0,\alpha=0.6,\eta=t]
 ,rhs(VZ2));
VZ208:subst([\sigma=1.0,\alpha=0.8,\eta=t]
 ,rhs(VZ2));
VZ212:subst([\sigma=1.0,\alpha=1.2,\eta=t]
 ,rhs(VZ2));
VZ215:subst([\sigma=1.0,\alpha=1.5,\eta=t]
 ,rhs(VZ2));
VZ220:subst([\sigma=1.0,\alpha=2.0,\eta=t]
 ,rhs(VZ2));
plot2d([VZ204,VZ206,VZ208,VZ212,VZ215,
 VZ220],[t,0.01,1],[nticks,100],[x,0,1],
 [legend,"E/D=0.4","E/D=0.6","E/D=0.8",
 "E/D=1.2","E/D=1.5","E/D=2.0"]);
VT204:subst([\sigma=1.0,\alpha=0.4,\eta=t]
 ,rhs(VT2));
VT206:subst([\sigma=1.0,\alpha=0.6,\eta=t]
 ,rhs(VT2));
VT208:subst([\sigma=1.0,\alpha=0.8,\eta=t]
 ,rhs(VT2));
VT212:subst([\sigma=1.0,\alpha=1.2,\eta=t]
 ,rhs(VT2));
VT215:subst([\sigma=1.0,\alpha=1.5,\eta=t]
 ,rhs(VT2));
VT220:subst([\sigma=1.0,\alpha=2.0,\eta=t]
 ,rhs(VT2));
plot2d([VT204,VT206,VT208,VT212,VT215,
 VT220],[t,0.01,1],[nticks,100],[x,0,1],
 [legend,"E/D=0.4","E/D=0.6","E/D=0.8",
 "E/D=1.2","E/D=1.5","E/D=2.0"]);
OMZ204:subst([\sigma=1.0,\alpha=0.4,\eta=t]
 ,rhs(OMZ2));
OMZ206:subst([\sigma=1.0,\alpha=0.6,\eta=t]
 ,rhs(OMZ2));
OMZ208:subst([\sigma=1.0,\alpha=0.8,\eta=t]
 ,rhs(OMZ2));
OMZ212:subst([\sigma=1.0,\alpha=1.2,\eta=t]
 ,rhs(OMZ2));
OMZ215:subst([\sigma=1.0,\alpha=1.5,\eta=t]
 ,rhs(OMZ2));
OMZ220:subst([\sigma=1.0,\alpha=2.0,\eta=t]
 ,rhs(OMZ2));
```

```
plot2d([OMZ204,OMZ206,OMZ208,OMZ212,OMZ215
 ,OMZ220],[t,0.01,1],[nticks,100],[x,0,1],
 [legend,"E/D=0.4","E/D=0.6","E/D=0.8",
 "E/D=1.2","E/D=1.5","E/D=2.0"]);
VZA001:subst([\sigma=1.0,\alpha=t,
 \eta=0.01],rhs(VZ2));
VZA02:subst([\sigma=1.0,\alpha=t,\eta=0.2]
 ,rhs(VZ2));
VZA04:subst([\sigma=1.0,\alpha=t,\eta=0.4]
 ,rhs(VZ2));
VZA06:subst([\sigma=1.0,\alpha=t,\eta=0.6]
 ,rhs(VZ2));
VZA08:subst([\sigma=1.0,\alpha=t,\eta=0.8]
 ,rhs(VZ2));
VZA10:subst([\sigma=1.0,\alpha=t,\eta=1.0]
 ,rhs(VZ2));
plot2d([VZA001,VZA02,VZA04,VZA06,VZA08,
 VZA10],[t,0.1,4],[x,0,4],[y,-15,15],
 [nticks,100],[legend,"R=0","R=0.2",
 "R=0.4","R=0.6","R=0.8","R=1.0"]);
OMZA001:subst([\sigma=1.0,\alpha=t,
 \eta=0.01],rhs(OMZ2));
OMZA02:subst([\sigma=1.0,\alpha=t,\eta=0.2]
 ,rhs(OMZ2));
OMZA04:subst([\sigma=1.0,\alpha=t,\eta=0.4]
 ,rhs(OMZ2));
OMZA06:subst([\sigma=1.0,\alpha=t,\eta=0.6]
 ,rhs(OMZ2));
OMZA08:subst([\sigma=1.0,\alpha=t,\eta=0.8]
 ,rhs(OMZ2));
OMZA10:subst([\sigma=1.0,\alpha=t,\eta=1.0]
 ,rhs(OMZ2));
KE1:k*E[1]=find_root(bessel_j(1,x),x,2,4);
KE2:k*E[2]=find_root(bessel_j(1,x),x,6,8);
MXKE1:[[float(rhs(KE1)),-2],
 [float(rhs(KE1)),2]];
plot2d([OMZA001,OMZA02,OMZA04,OMZA06,
 OMZA08,OMZA10,[discrete,MXKE1]],[t,0.1,4]
 ,[x,0,4],[y,-15,15],[nticks,100],
 [legend,"R=0","R=0.2","R=0.4","R=0.6",
 "R=0.8","R=1.0","J1(kE1)=0"]);
VZ204:subst([\sigma=2.0,\alpha=0.4,\eta=t]
 ,rhs(VZ2));
VZ206:subst([\sigma=2.0,\alpha=0.6,\eta=t]
 ,rhs(VZ2));
```

```
VZ208:subst([\sigma=2.0,\alpha=0.8,\eta=t]
 ,rhs(VZ2));
VZ212:subst([\sigma=2.0,\alpha=1.2,\eta=t]
 ,rhs(VZ2));
VZ215:subst([\sigma=2.0,\alpha=1.5,\eta=t]
 ,rhs(VZ2));
plot2d([VZ204,VZ206,VZ208,VZ212,VZ215],
 [t,0.01,1],[nticks,100],[x,0,1],
 [legend,"E/D=0.4","E/D=0.6","E/D=0.8",
 "E/D=1.2","E/D=1.5"]);
OMZ204:subst([\sigma=2.0,\alpha=0.4,\eta=t]
 ,rhs(OMZ2));
OMZ206:subst([\sigma=2.0,\alpha=0.6,\eta=t]
 ,rhs(OMZ2));
OMZ208:subst([\sigma=2.0,\alpha=0.8,\eta=t]
 ,rhs(OMZ2));
OMZ212:subst([\sigma=2.0,\alpha=1.2,\eta=t]
 ,rhs(OMZ2));
OMZ215:subst([\sigma=2.0,\alpha=1.5,\eta=t]
 ,rhs(OMZ2));
plot2d([OMZ204,OMZ206,OMZ208,OMZ212,OMZ215]
 ,[t,0.01,1],[nticks,100],[x,0,1],
 [legend,"E/D=0.4","E/D=0.6","E/D=0.8",
 "E/D=1.2","E/D=1.5"]);
OMZA001:subst([\sigma=2.0,\alpha=t,
 \eta=0.01],rhs(OMZ2));
OMZA02:subst([\sigma=2.0,\alpha=t,\eta=0.2]
 ,rhs(OMZ2));
OMZA04:subst([\sigma=2.0,\alpha=t,\eta=0.4]
 ,rhs(OMZ2));
OMZA06:subst([\sigma=2.0,\alpha=t,\eta=0.6]
 ,rhs(OMZ2));
OMZA08:subst([\sigma=2.0,\alpha=t,\eta=0.8]
 ,rhs(OMZ2));
OMZA10:subst([\sigma=2.0,\alpha=t,\eta=1.0]
 ,rhs(OMZ2));
MXKE1:[[float(rhs(KE1)/2),-2],
 [float(rhs(KE1)/2),2]];
MXKE2:[[float(rhs(KE2)/2),-2],
 [float(rhs(KE2)/2),2]];
plot2d([OMZA001,OMZA02,OMZA04,OMZA06,
 OMZA08,OMZA10,[discrete,MXKE1],
 [discrete,MXKE2]],[t,0.1,4],[x,0,4],
 [y,-15,15],[nticks,100],[legend,"R=0",
 "R=0.2","R=0.4","R=0.6","R=0.8","R=1.0",
 "J1(kE1)=0","J1(kE2)=0"]);
```

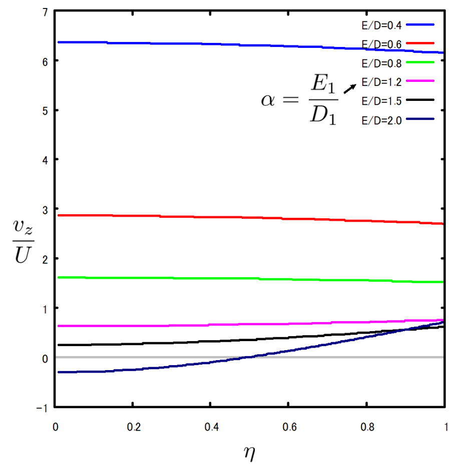


図 8.8.3: 軸流速：v_z 半径方向分布　$\sigma = 1.0$

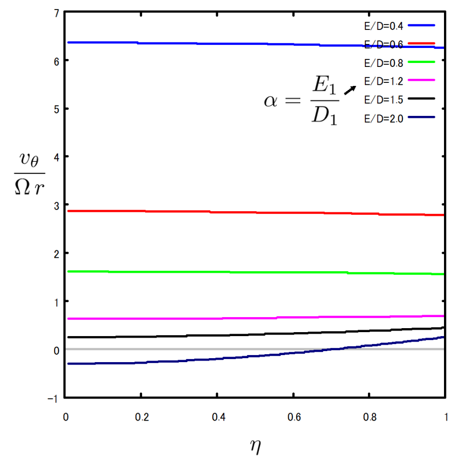


図 8.8.4: 旋回流速：v_θ 半径方向分布　$\sigma = 1.0$

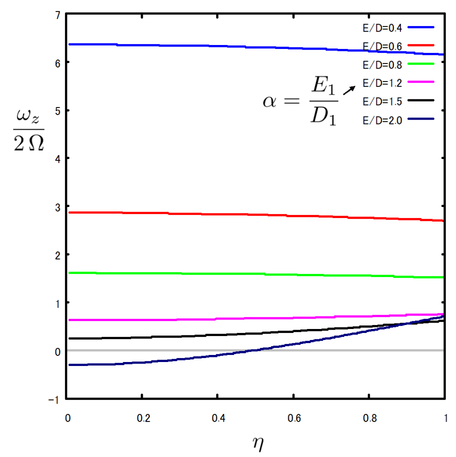


図 8.8.5: 軸方向渦度：ω_z 半径方向分布　$\sigma = 1.0$

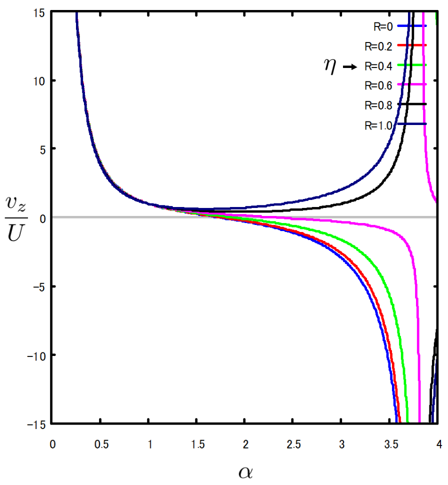


図 8.8.6: 軸流速：v_z 径比：α の影響　$\sigma = 1.0$

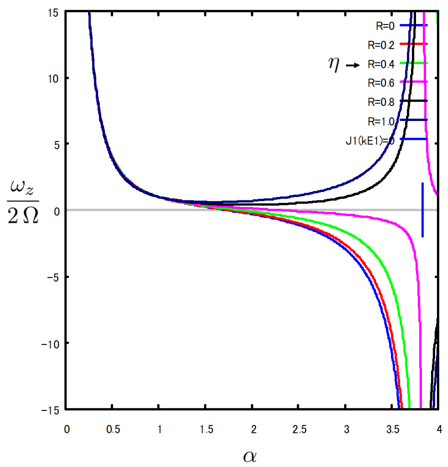


図 8.8.7: 軸方向渦度：ω_z 径比：α の影響　$\sigma = 1.0$

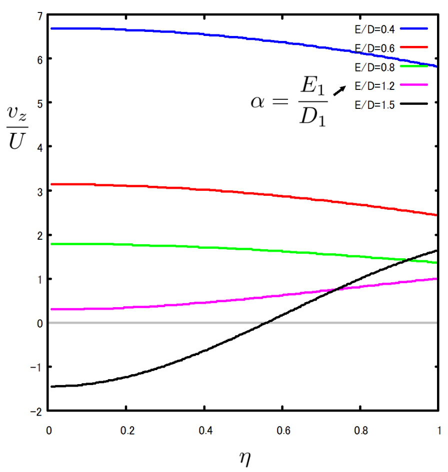


図 8.8.8: 軸流速：v_z 半径方向分布　$\sigma = 2.0$

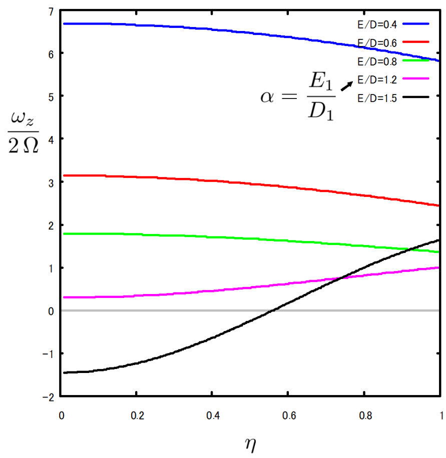


図 8.8.9: 軸方向渦度：ω_z 半径方向分布　$\sigma = 2.0$

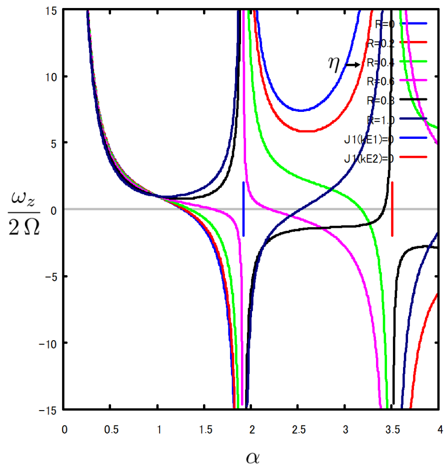


図 8.8.10: 軸方向渦度：ω_z 径比：α の影響　$\sigma = 2.0$

上図の半径方向分布の結果から、$\alpha = \frac{E_1}{D_1} < 1$ 場合には、縮小流になり、軸流速：v_z では中心部の流速が早く、周辺部の流速が遅くなり、軸方向渦度：ω_z では中心部の渦度が強く、周辺部の渦度が弱くなる。一方、$\alpha = \frac{E_1}{D_1} > 1$ 場合には、拡大流になり、軸流速：v_z では中心部の流速が遅く、周辺部の流速が早くなり、軸方向渦度：ω_z では中心部の渦度が弱く、周辺部の渦度が強くなる。また、上流側の渦度が強い方がこの傾向は顕著になり、$\alpha = \frac{E_1}{D_1} > 1$ の拡大流では、軸流速：v_z や軸方向渦度：ω_z が負の結果となる場合がある。しかし、H, C が Ψ の関数で上流から下流へ繋がっていくことを前提にしているので、軸流速：v_z が負で逆流する流場を表現しているとは思えないので、軸流速：v_z が正の場合のみ有効な結果と見るべきであろう。
上図の径比の結果から、ある部分で発散している。これは式中の分母の bessel_j $(1, \alpha\,\sigma)$ が零になったときで、$\alpha\,\sigma \approx 3.83, 7.02$ で発生し、この近傍では渦の崩壊に繋がると思われる。

```
VZ2;
VZ21:rest(rhs(VZ2),-3);
VZ22:rhs(VZ2)-VZ21;
subst([\eta=0],VZ21);
VZ201:factor(%);
BES1:bessel_j(1,alpha*eta*sigma)/\eta;
num(%);
diff(%,\eta,1);
subst([\eta=0],%);
BES1=factor(%);
solve(%,bessel_j(1,alpha*eta*sigma))[1];
VZ202:subst([%],VZ22);
VZ201+VZ202;
factor(%);
num(%)=0;
subst([\sigma=\delta/\alpha],%);
ALD1:solve(%,\alpha)[2];
subst([\delta=\alpha*\sigma],%);
plot2d(rhs(ALD1),[\delta,0.1,5],[x,0,3.83],
 [y,0,5]);
```

軸流速:v_z が正となる条件を調べる。(8.8.38) 式で $\eta=0$ として v_z/U を求める。しかし、下記の項は $\eta \to 0$ としたとき、下記になることを考慮して、

$$\frac{\mathrm{bessel\_j}\left(1,\alpha\,\eta\,\sigma\right)}{\eta}=\frac{\alpha\,\sigma}{2}$$

$\eta=0$ で軸流速：v_z が零となる条件式は、次式となり、α を求めると

$$-\alpha^2\,\sigma+\sigma+2\,\mathrm{bessel\_j}\left(1,\alpha\,\sigma\right)\,\alpha=0$$

$$\alpha=\sqrt{\frac{\alpha\,\sigma}{\alpha\,\sigma-2\,\mathrm{bessel\_j}\left(1,\alpha\,\sigma\right)}}$$

上式を図示すると下図となる。ここで、前述の計算結果から $\alpha\,\sigma\approx 3.83$ で発散することから、横軸として $\alpha\,\sigma$ とし、3.83 までとした。即ち、横軸の範囲内では発散せず、線より下では $v_z>0$ である。

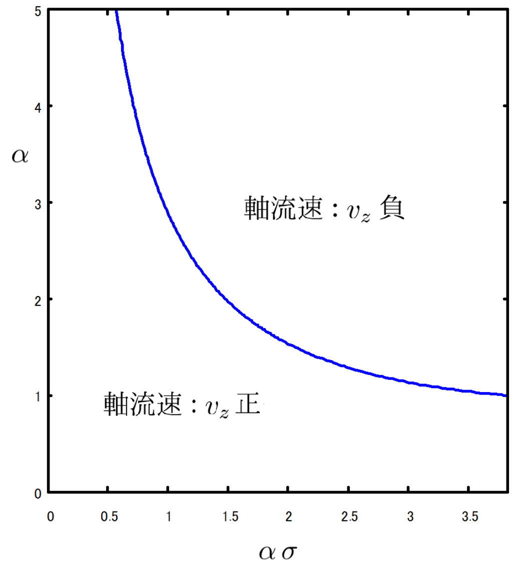


図 8.8.11: 軸流速：v_z が正となる条件

8.8.4 外側の流速変化が渦の旋回流に及ぼす影響

流れの中に渦が存在し、その周囲の流速変化により、渦の旋回流がどのようになるか調べる[1]。ここでプログラムは前節に続いて実行するものとする。座標系として、円柱座標 $r-\theta-z$ 系とし、対称軸を z 軸とする。流速の円柱座標コンポーネントを v_r, v_θ, v_z とする。渦は渦なし流れの中では、円管によって表現でき、その中心軸を z 軸とする。上流における渦管の半径：r_1 とし、渦管内、外の流速とも U_1 とする。渦管内では角速度：Ω で対称軸を中心に流体は剛体回転しているものとする。以上から、上流における流速は、

$$v_r = 0, \quad v_\theta = r\,\Omega, \quad v_z = U_1 \quad (r < r_1)$$

$$v_r = 0, \quad v_\theta = \frac{r_1^2\,\Omega}{r}, \quad v_z = U_1 \quad (r \geq r_1)$$

下流の渦管の外側の流体は、渦度は保存されることから、

$$v_r = 0, \quad v_\theta = \frac{r_1^2\,\Omega}{r}, \quad v_z = U_2 \quad (r \geq r_2)$$

下流の渦管の内部の流体は、外側の流速が変化するから、渦管管径も変化し、前節の結果から、渦管内部の流速も変化する。そこで下流の渦管内部の流体の境界条件は、

$$v_r = 0, \quad v_z = U_2 \quad (r = r_2)$$

ここで r_2 は与えられておらず、下記から拡大率：α を得て、得られる。前節同様下記の無次元化するための変数の関係式を使用する。ここで α は、流路径の拡大率であり、σ は、上流の渦強度を表している。

$$\alpha = \frac{E_1}{D_1}, \quad \sigma = D_1\,k = \frac{2\,\Omega\,D_1}{U}, \quad \eta = \frac{r}{E_1}, \quad \delta = \alpha\,\sigma$$

(8.8.38) 式に前述の境界条件を代入する。
$r = r_2 \to \eta = 1$、$v_z/U \to U_2/U_1$ として、次式を得る。

$$\begin{aligned}\frac{U_2}{U_1} =& \frac{\mathrm{bessel\_j}\,(2, \alpha\,\sigma)\;\alpha\,\sigma}{4\,\mathrm{bessel\_j}\,(1, \alpha\,\sigma)} - \frac{\mathrm{bessel\_j}\,(0, \alpha\,\sigma)\;\alpha\,\sigma}{4\,\mathrm{bessel\_j}\,(1, \alpha\,\sigma)} \\ &- \frac{\mathrm{bessel\_j}\,(2, \alpha\,\sigma)\;\sigma}{4\,\mathrm{bessel\_j}\,(1, \alpha\,\sigma)\;\alpha} + \frac{\mathrm{bessel\_j}\,(0, \alpha\,\sigma)\;\sigma}{4\,\mathrm{bessel\_j}\,(1, \alpha\,\sigma)\;\alpha} \\ &+ \frac{1}{2\,\alpha^2} + \frac{1}{2}\end{aligned}$$

上式で、U_2/U_1、上流の渦強さ：σ を与えると流路径の拡大率：α が得られるが、Bessel 関数の特異性を考慮して、$\delta = \alpha\,\sigma$ を変数とすると、

$$\begin{aligned}\frac{U_2}{U_1} =& -\frac{\mathrm{bessel\_j}\,(2, \delta)\;\delta}{4\,\mathrm{bessel\_j}\,(1, \delta)\;\alpha^2} + \frac{\mathrm{bessel\_j}\,(0, \delta)\;\delta}{4\,\mathrm{bessel\_j}\,(1, \delta)\;\alpha^2} \\ &+ \frac{\mathrm{bessel\_j}\,(2, \delta)\;\delta}{4\,\mathrm{bessel\_j}\,(1, \delta)} - \frac{\mathrm{bessel\_j}\,(0, \delta)\;\delta}{4\,\mathrm{bessel\_j}\,(1, \delta)} \\ &+ \frac{1}{2\,\alpha^2} + \frac{1}{2}\end{aligned}$$

```
subst([\eta=1,U=U[1],v[z]=U[2]],VZ2);
U1U2:subst([\sigma=\delta/\alpha],%);
rhs(%)=\gamma;
solve(%,\alpha^2)[1];
AL1:sqrt(rhs(%));
AL02:subst([\gamma=0.2],AL1);
AL04:subst([\gamma=0.4],AL1);
AL06:subst([\gamma=0.6],AL1);
AL08:subst([\gamma=0.8],AL1);
AL12:subst([\gamma=1.2],AL1);
AL14:subst([\gamma=1.4],AL1);
plot2d([AL02,AL04,AL06,AL08,AL12,AL14,
 rhs(ALD1)],[\delta,0.1,5],[x,0,3.83],
 [y,0,5],[nticks,100],[legend,
 "U2/U1=0.2", "U2/U1=0.4","U2/U1=0.6",
 "U2/U1=0.8","U2/U1=1.2","U2/U1=1.4",
 "v=0"]);
 find_root(bessel_j(0,x),x,1,3);
```

上式から、流路径の拡大率：α を求めると、次式となる。

[1] G. K. Batchelor：入門　流体力学 [18)]、7.15 (b) 外側の速度の変化が孤立した渦におよぼす効果 P.553

$$\alpha=\sqrt{-\frac{(\mathrm{bessel\_j}\,(2,\delta)-\mathrm{bessel\_j}\,(0,\delta))\;\delta-2\,\mathrm{bessel\_j}\,(1,\delta)}{4\,\mathrm{bessel\_j}\,(1,\delta)\;\gamma+(\mathrm{bessel\_j}\,(0,\delta)-\mathrm{bessel\_j}\,(2,\delta))\;\delta-2\,\mathrm{bessel\_j}\,(1,\delta)}} \tag{8.8.43}$$

ここで $\gamma=U_2/U_1$ である。上式で、$\delta=\alpha\sigma$ から、上流の渦強度を表す σ を与えれば、流路径の拡大率：α が得られるが、α の関数が U 字型をしており、数値的に求めるのも複雑である。そこで、Bessel 関数の特異性を考慮して、上式そのままの横軸に $\delta=\alpha\sigma$、縦軸に α で外側の流速変化と流路径の拡大率の関係：(8.8.43) 式を下図に描いた。ここでは前節の式の仮定条件である軸流速：$v_z=0$ の結果も入れた。また、$\alpha\sigma\approx 2.4$ で結果が発散している。これは bessel_j $(0,\alpha\sigma)$ が零になったときで、このとき、$\alpha\sigma=2.404825557695773$ である。このため、安定した渦の結果が得られる外側流速変化は $\alpha\sigma<2.4$ で $v_z=0$ の線より下方にある。

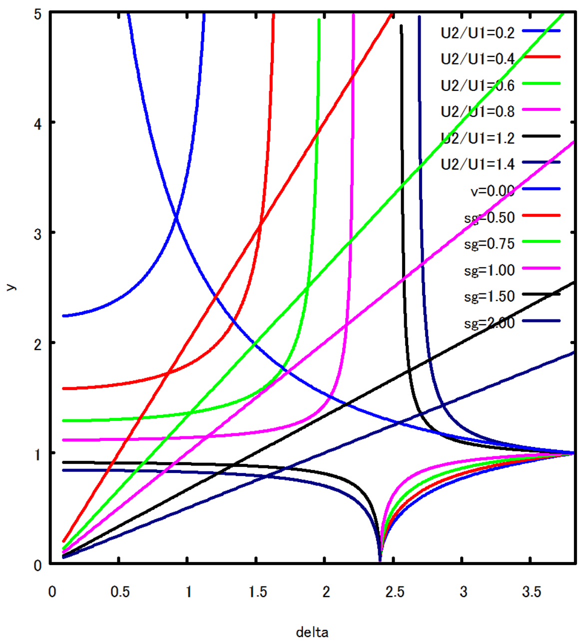


図 8.8.12: 外側の流速変化と流路径の拡大率の関係

上図で上流の渦強度を表す σ を与えれば、横軸と縦軸の関係から、原点を通る直線が得られる。この直線と U_2/U_1 一定の曲線との交点で $v_z=0$ の曲線より下方の交点が流路径の拡大率：α である。流路径の拡大率：α が得られると、前節の結果から、軸流速：v_z 分布は (8.8.38) 式から、軸方向渦度：ω_z 分布は (8.8.42) 式から得られる。

8.9 地球の自転の影響

8.9.1 地球の自転を考慮した海表面近くの流れ

水面：$z=0$ から下に無限大の水深があるとする。水面に風などによる一定力が作用し、x 軸方向に：μS_x、y 軸方向に：μS_y としたときの粘性流れを求める [1]。x-y-z 座標軸の各速度コンポーネントを u,v,w とする。圧力：p、粘性係数：μ、動粘性係数：ν、x 軸方向の外力：X、y 軸方向の外力：Y とする。

```
/* 地球の自転を考慮した海表面近くの流れ */
kill(all);
declare(c,complex);
declare(A,complex);
declare(u,real);
declare(v,real);
assume(A>0,\nu>0,\Omega>0,sin(L[AM])>0);
MX1:('diff(xd(t),t,2))*M=2*('diff(yd(t),t,
 1))*sin(L[AM])*M*W+F[xd];
MY1:('diff(yd(t),t,2))*M=-2*('diff(xd(t),t,
 1))*sin(L[AM])*M*W-2*('diff(zd(t),t,1))
 *cos(L[AM])*M*W+F[yd];
MZ1:('diff(zd(t),t,2))*M=2*('diff(yd(t),t,
 1))*cos(L[AM])*M*W+F[zd];
```

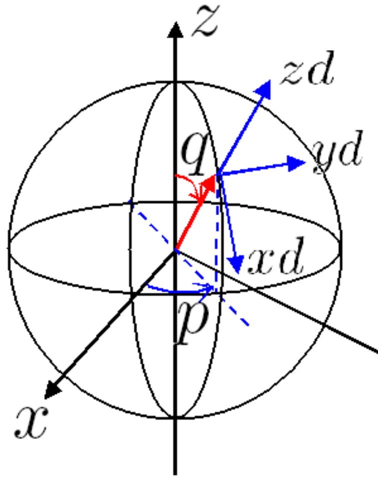


図 8.9.1: 自転している地球に固定した座標

自転している地球に固定した座標：$\mathrm{xd}-\mathrm{yd}-\mathrm{zd}$ の運動方程式は、「Maxima を使った質点の力学演習ノート：2.5.3 自転している地球に固定した座標系の運動方程式、68 頁、(2.5.1) 式〜(2.5.3) 式」から下記となる。ここで、緯度：L_{AM}、物体の質量：M、地球の自転角速度：W、xd 軸は南方、yd 軸は東方、zd 軸は鉛直上方とする。

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{d^2}{d\,t^2}\,\mathrm{xd}\,(t)\right)\,M \\
&\qquad = 2\,\underline{\left(\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{yd}\,(t)\right)\,\sin\left(L_{AM}\right)\,M\,W} + F_{xd} \\
&\left(\frac{d^2}{d\,t^2}\,\mathrm{yd}\,(t)\right)\,M \\
&\qquad = \underline{-2\,\left(\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{xd}\,(t)\right)\,\sin\left(L_{AM}\right)\,M\,W} \\
&\qquad\quad - 2\,\left(\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{zd}\,(t)\right)\,\cos\left(L_{AM}\right)\,M\,W + F_{yd} \\
&\left(\frac{d^2}{d\,t^2}\,\mathrm{zd}\,(t)\right)\,M \\
&\qquad = 2\,\left(\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{yd}\,(t)\right)\,\cos\left(L_{AM}\right)\,M\,W + F_{zd}
\end{aligned}
\tag{8.9.1}
$$

自転している地球の水面近傍の流れでは、zd 関連項を省き、上式の下線部分を外力として考慮する必要がある。

```
MAS1:'diff(w,z,1)+'diff(v,y,1)+'diff(u,x,1)
 =0;
NAV1:matrix([\rho*(('diff(u,z,1))*w
 +('diff(u,y,1))*v+u*('diff(u,x,1))
 +'diff(u,t,1))],[\rho*(('diff(v,z,1))*w
 +v*('diff(v,y,1))+u*('diff(v,x,1))
 +'diff(v,t,1))],[\rho*(w*('diff(w,z,1))
+v*('diff(w,y,1))+u*('diff(w,x,1))
+'diff(w,t,1))])=matrix([X+mu*('diff(u,z,2)
+'diff(u,y,2)+'diff(u,x,2))-'diff(p,x,1)],
[Y+mu*('diff(v,z,2)+'diff(v,y,2)
+'diff(v,x,2))
-'diff(p,y,1)],[Z+mu*('diff(w,z,2)
+'diff(w,y,2)+'diff(w,x,2))-'diff(p,z,1)]);
NAV2:lhs(NAV1)[1][1]=rhs(NAV1)[1][1];
NAV3:lhs(NAV1)[2][1]=rhs(NAV1)[2][1];
subst([v=v(z),w=0,X=2*v(z)*sin(L[AM])*\rho
 *\Omega,Y=-2*u(z)*sin(L[AM])*\rho
 *\Omega,u=u(z),p=0],NAV2);
ev(%,diff);
NAV21:expand(subst([\mu=\nu*\rho],%)/\rho);
subst([v=v(z),u=u(z),w=0,X=2*v(z)
 *sin(L[AM])*\rho*\Omega,Y=-2*u(z)
 *sin(L[AM])*\rho*\Omega,p=0],NAV3);
ev(%,diff);
NAV31:expand(subst([\mu=\nu*\rho],%)/\rho);
```

[1] G. K. Batchelor：入門 流体力学 [18]、4.4(a) 自由表面にある層 P.197

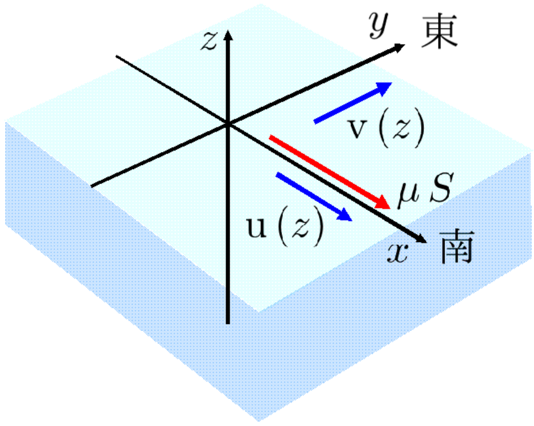


図 8.9.2: 海表面近くの流れ

ところで、上記の xd − yd 軸に合わせ、南方に x 軸、東方に y 軸、鉛直上方に z 軸を考える。x, y 軸方向の Navier-Stokes の式は (8.1.9) 式から、

$$\rho\left(\left(\frac{d}{d\,z}u\right)w+\left(\frac{d}{d\,y}u\right)v+u\left(\frac{d}{d\,x}u\right)+\frac{d}{d\,t}u\right)$$
$$=X+\mu\left(\frac{d^2}{d\,z^2}u+\frac{d^2}{d\,y^2}u+\frac{d^2}{d\,x^2}u\right)-\frac{d}{d\,x}p$$
$$\rho\left(\left(\frac{d}{d\,z}v\right)w+v\left(\frac{d}{d\,y}v\right)+u\left(\frac{d}{d\,x}v\right)+\frac{d}{d\,t}v\right)$$
$$=Y+\mu\left(\frac{d^2}{d\,z^2}v+\frac{d^2}{d\,y^2}v+\frac{d^2}{d\,x^2}v\right)-\frac{d}{d\,y}p$$

上記でコリオリの力は、$X=2\,v\sin\left(L_{AM}\right)\,\rho\,\Omega$、$Y=-2\,u\sin\left(L_{AM}\right)\,\rho\,\Omega$ とする。ここで Ω は地球の自転角速度とする。また、流速は x, y 軸方向で z の関数となり、$u=\mathrm{u}(z), v=\mathrm{v}(z), w=0, p=0$ で、上式の Navier-Stokes の式は、

$$\begin{aligned}0&=2\,\Omega\,\mathrm{v}(z)\,\sin\left(L_{AM}\right)+\nu\left(\frac{d^2}{d\,z^2}\mathrm{u}(z)\right)\\0&=\nu\left(\frac{d^2}{d\,z^2}\mathrm{v}(z)\right)-2\,\Omega\,\mathrm{u}(z)\,\sin\left(L_{AM}\right)\end{aligned}\qquad(8.9.2)$$

```
NAV4:expand(NAV21+%i*NAV31);
C1:c(z)=u(z)+%i*v(z);
C2:solve(C1,u(z))[1];
subst([C2],NAV4);
NAVC1:expand(ev(%,diff));
A1:2*%i*Omega*c(z)*sin(L[AM])=A*c(z);
A2:solve(A1,A)[1];
subst([A1],NAVC1);
ode2(%,c(z),z);
C3:subst([A2,%k2=0],%);
diff(rhs(C3),z,1)=S[x]+%i*S[y];
subst([z=0],%);
solve(%,%k1)[1];
C4:subst([%,C1],C3);
```

```
U1:factor(realpart(C4));
V1:factor(imagpart(C4));
```

$\mathrm{u}(z), \mathrm{v}(z)$ を下記の複素数：$\mathrm{c}(z)$ に置き換える。

$$\mathrm{c}(z)=i\,\mathrm{v}(z)+\mathrm{u}(z)$$

(8.9.2) 式は次式にまとめることができる。

$$0=\nu\left(\frac{d^2}{d\,z^2}\mathrm{c}(z)\right)-2\,i\,\Omega\,\mathrm{c}(z)\,\sin\left(L_{AM}\right)$$

上式の係数を下記の A で置き換え、

$$A=2\,i\,\Omega\sin\left(L_{AM}\right)\qquad(8.9.3)$$

上式に置き換えると、

$$0=\nu\left(\frac{d^2}{d\,z^2}\mathrm{c}(z)\right)-\mathrm{c}(z)\,A$$

上式を $ode2$ 関数で解くと、

$$\mathrm{c}(z)=\%k1\,e^{\frac{z\sqrt{A}}{\sqrt{\nu}}}+\%k2\,e^{-\frac{z\sqrt{A}}{\sqrt{\nu}}}$$

境界条件として、$z\to-\infty$ で流速は零であるから、$\%k2=0$ となり、(8.9.3) 式を代入すると、

$$\mathrm{c}(z)=\%k1\,e^{\frac{(-1)^{\frac{1}{4}}\sqrt{2}\sqrt{\Omega}\,z\sqrt{\sin\left(L_{AM}\right)}}{\sqrt{\nu}}}\qquad(8.9.4)$$

$z=0$ で $\mu\,S_x, \mu\,S_y$ が作用するから、$\mu\,\frac{d}{d\,z}\mathrm{u}(z)=\mu\,S_x$、$\mu\,\frac{d}{d\,z}\mathrm{v}(z)=\mu\,S_y$ であるから、(8.9.4) 式を z で微分し、$i\,S_y+S_x$ と置くと、

$$\frac{(-1)^{\frac{1}{4}}\sqrt{2}\,\%k1\sqrt{\Omega}\sqrt{\sin\left(L_{AM}\right)}}{\sqrt{\nu}}=i\,S_y+S_x$$

上式から $\%k1$ をもとめ、

$$\%k1=\frac{i\sqrt{\nu}\,S_y+\sqrt{\nu}\,S_x}{(-1)^{\frac{1}{4}}\sqrt{2}\sqrt{\Omega}\sqrt{\sin\left(L_{AM}\right)}}$$

(8.9.4) 式に代入すると、下記の流速分布が得られる。

$$i\,\mathrm{v}(z)+\mathrm{u}(z)=\frac{\left(i\sqrt{\nu}\,S_y+\sqrt{\nu}\,S_x\right)}{(-1)^{\frac{1}{4}}\sqrt{2}\sqrt{\Omega}\sqrt{\sin\left(L_{AM}\right)}}\times e^{\frac{(-1)^{\frac{1}{4}}\sqrt{2}\sqrt{\Omega}\,z\sqrt{\sin\left(L_{AM}\right)}}{\sqrt{\nu}}}\qquad(8.9.5)$$

上式の実部で $\mathrm{u}(z)$ が、虚部で $\mathrm{v}(z)$ が得られる。

$$\begin{aligned}\mathrm{u}(z)=&-\frac{\sqrt{\nu}}{2\sqrt{\Omega}\sqrt{\sin\left(L_{AM}\right)}}\\&\times\left(\left(S_y-S_x\right)e^{\frac{\sqrt{\Omega}\,z\sqrt{\sin\left(L_{AM}\right)}}{\sqrt{\nu}}}\right.\\&\times\sin\left(\frac{\sqrt{\Omega}\,z\sqrt{\sin\left(L_{AM}\right)}}{\sqrt{\nu}}\right)\\&+\left(-S_y-S_x\right)e^{\frac{\sqrt{\Omega}\,z\sqrt{\sin\left(L_{AM}\right)}}{\sqrt{\nu}}}\\&\left.\times\cos\left(\frac{\sqrt{\Omega}\,z\sqrt{\sin\left(L_{AM}\right)}}{\sqrt{\nu}}\right)\right)\end{aligned}\qquad(8.9.6)$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{v}(z) = & \frac{\sqrt{\nu}}{2\sqrt{\Omega}\sqrt{\sin(L_{AM})}} \\
& \times \left((S_y + S_x)\, e^{\frac{\sqrt{\Omega}\, z\, \sqrt{\sin(L_{AM})}}{\sqrt{\nu}}} \right. \\
& \times \sin\left(\frac{\sqrt{\Omega}\, z\, \sqrt{\sin(L_{AM})}}{\sqrt{\nu}} \right) \\
& + (S_y - S_x)\, e^{\frac{\sqrt{\Omega}\, z\, \sqrt{\sin(L_{AM})}}{\sqrt{\nu}}} \\
& \left. \times \cos\left(\frac{\sqrt{\Omega}\, z\, \sqrt{\sin(L_{AM})}}{\sqrt{\nu}} \right) \right)
\end{aligned} \tag{8.9.7}
$$

```
Q[U]='integrate(rhs(U1),z,minf,0);
ev(%,integrate);
Q[V]='integrate(rhs(V1),z,minf,0);
ev(%,integrate);
```

上式を積分して流量を求めると、

$$Q_U = \int_{-\infty}^{0} \mathrm{u}(z)\, dz = \frac{\nu\, S_y}{2\,\Omega \sin(L_{AM})}$$

$$Q_V = \int_{-\infty}^{0} \mathrm{v}(z)\, dz = -\frac{\nu\, S_x}{2\,\Omega \sin(L_{AM})}$$

```
PL1:subst([L[AM]=%pi/4,\Omega=2*%pi/24/60
 /60,\nu=1.05*0.000001,S[x]=0,S[y]=1],
 rhs(U1));
PL2:subst([L[AM]=%pi/4,\Omega=2*%pi/24/60
 /60,\nu=1.05*0.000001,S[x]=0,S[y]=1],
 rhs(V1));
plot2d([PL1,PL2],[z,-1,0]);
XY1:[[0,0],[subst([z=0],PL1),subst([z=0],
 PL2)]];
XY2:[[0,0],[subst([z=-0.05],PL1),
 subst([z=-0.05],PL2)]];
XY3:[[0,0],[subst([z=-0.1],PL1),
 subst([z=-0.1],PL2)]];
XY4:[[0,0],[subst([z=-0.15],PL1),
 subst([z=-0.15],PL2)]];
XY5:[[0,0],[subst([z=-0.2],PL1),
 subst([z=-0.2],PL2)]];
XY6:[[0,0],[subst([z=-0.3],PL1),
 subst([z=-0.3],PL2)]];
XY7:[[0,0],[subst([z=-0.4],PL1),
 subst([z=-0.4],PL2)]];
XY8:[[0,0],[subst([z=-0.5],PL1),
 subst([z=-0.5],PL2)]];
XY9:[[0,0],[subst([z=-0.6],PL1),
 subst([z=-0.6],PL2)]];
```

```
plot2d([[discrete,XY1],[discrete,XY2],
 [discrete,XY3],[discrete,XY4],
 [discrete,XY5],[discrete,XY6],
 [discrete,XY7],[discrete,XY8],
 [discrete,XY9]],[y,-0.1,0.1]);
```

ここで緯度：北緯 45 度、海水温度：20 ℃の動粘性係数：ν を使用し、流速分布および各水深における流速、流向を下記に示す。粘性の及ぶ水深範囲は 0.6m 程度であるが、実際は表面の撹乱が大きく、粘性の及ぶ水深範囲はもっと少ない。

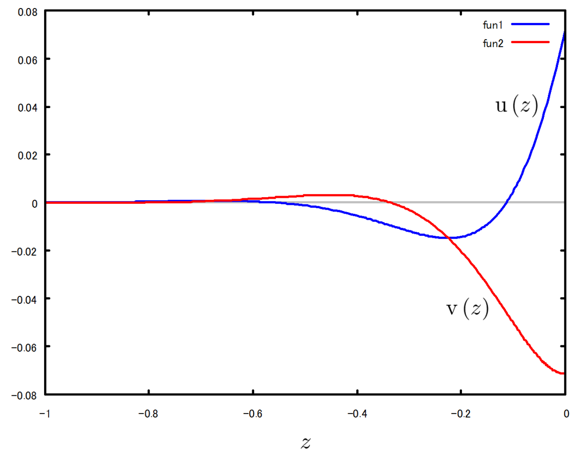


図 8.9.3: 海表面近くの流れ (S_x のみ)

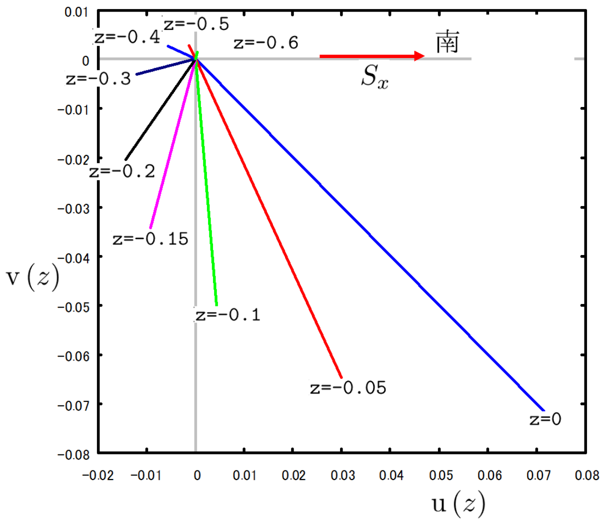


図 8.9.4: 海表面近くの流れ (S_x のみ)

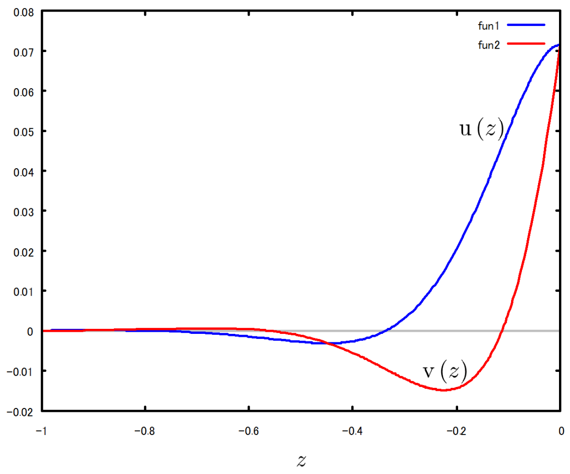


図 8.9.5: 海表面近くの流れ (S_y のみ)

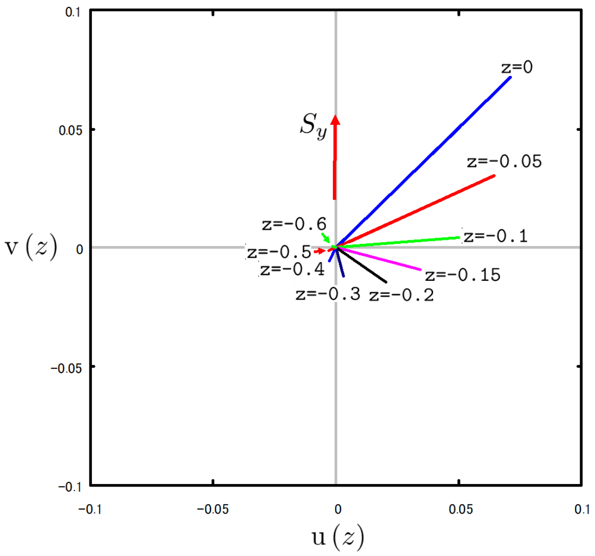


図 8.9.6: 海表面近くの流れ (S_y のみ)

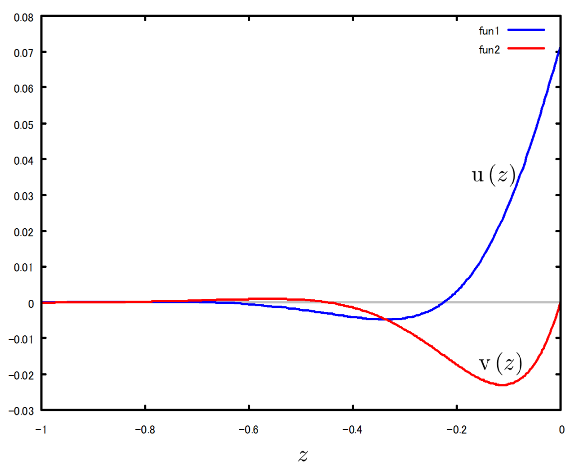


図 8.9.7: 海表面近くの流れ (S_x&S_y)

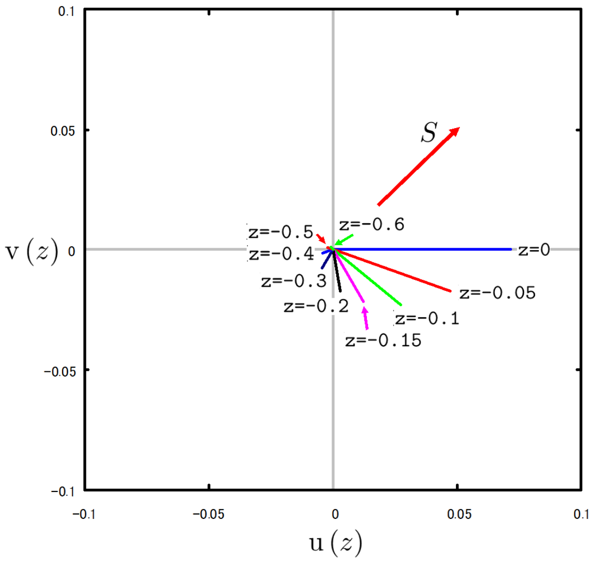


図 8.9.8: 海表面近くの流れ (S_x&S_y)

8.9.2　地球の自転を考慮した地面近くの大気の流れ

地上：$z=0$ から上に無限大の大気があるとし、大気の圧力差による地面近くの粘性流れを求める [1]。x-y-z 座標軸の各 速度コンポーネントを u,v,w とする。圧力：p、粘性係数：μ、動粘性係数：ν、x 方向の外力：X と、y 方向の外力：Y とする。

```
/* 地球の自転を考慮した大気の流れ */
kill(all);
declare(c,complex);
declare(A,complex);
declare(u,real);
declare(v,real);
declare(p,real);
assume(A>0,\nu>0,\Omega>0,sin(L[AM])>0);
MX1:('diff(xd(t),t,2))*M=2*('diff(yd(t),t,
 1))*sin(L[AM])*M*W+F[xd];
MY1:('diff(yd(t),t,2))*M=-2*('diff(xd(t),t,
 1))*sin(L[AM])*M*W-2*('diff(zd(t),t,1))
 *cos(L[AM])*M*W+F[yd];
MZ1:('diff(zd(t),t,2))*M=2*('diff(yd(t),t,
 1))*cos(L[AM])*M*W+F[zd];
```

自転している地球に固定した座標：$\mathrm{xd}-\mathrm{yd}-\mathrm{zd}$ の運動方程式を (8.9.1) 式に示す。ここで、緯度：L_{AM}、物体の質量：M、地球の自転角速度：W、xd 軸は南 方、yd 軸は東方、zd 軸は鉛直上方とする。

地球の自転を考慮した地面近くの大気の流れでは、zd 関連項を省き、(8.9.1) 式の下線 部分を外力として考慮する必要がある。

```
MAS1:'diff(w,z,1)+'diff(v,y,1)+'diff(u,x,1)
 =0;
NAV1:matrix([\rho*(('diff(u,z,1))*w
 +('diff(u,y,1))*v+u*('diff(u,x,1))
 +'diff(u,t,1))],[\rho*(('diff(v,z,1))*w
 +v*('diff(v,y,1))+u*('diff(v,x,1))
 +'diff(v,t,1))],[\rho*(w*('diff(w,z,1))
+v*('diff(w,y,1))+u*('diff(w,x,1))
+'diff(w,t,1))])=matrix([X+mu*('diff(u,z,2)
+'diff(u,y,2)+'diff(u,x,2))-'diff(p,x,1)],
[Y+mu*('diff(v,z,2)+'diff(v,y,2)
+'diff(v,x,2))
-'diff(p,y,1)],[Z+mu*('diff(w,z,2)
+'diff(w,y,2)+'diff(w,x,2))-'diff(p,z,1)]);
```

[1] G. K. Batchelor：入門　流体力学 18)、4.4(b) 剛い平面境界での層 P.200

```
NAV2:lhs(NAV1)[1][1]=rhs(NAV1)[1][1];
NAV3:lhs(NAV1)[2][1]=rhs(NAV1)[2][1];
subst([v=v(z),w=0,X=2*v(z)*sin(L[AM])*\rho
 *\Omega,Y=-2*u(z)*sin(L[AM])*\rho
 *\Omega,u=u(z),p=p(x,y)],NAV2);
ev(%,diff);
NAV21:expand(subst([\mu=\nu*\rho],%)/\rho);
subst([v=v(z),u=u(z),w=0,X=2*v(z)
 *sin(L[AM])*\rho*\Omega,Y=-2*u(z)
 *sin(L[AM])*\rho*\Omega,p=p(x,y)],NAV3);
ev(%,diff);
NAV31:expand(subst([\mu=\nu*\rho],%)/\rho);
```

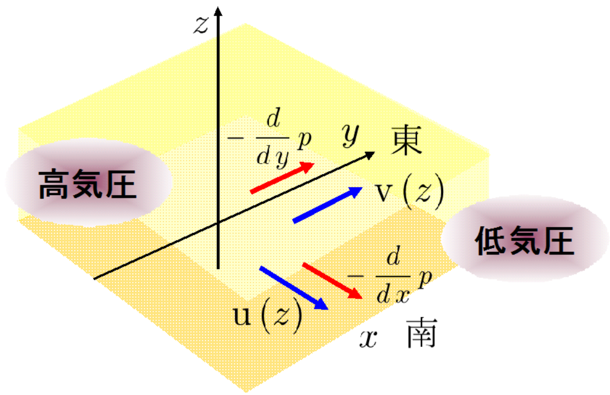


図 8.9.9: 地面近くの大気の流れ

ところで、上記の $\mathrm{xd}-\mathrm{yd}$ 軸に合わせた x,y 軸を考える。x,y 軸方向の Navier-Stokes の式は、

$$\rho\left(\left(\frac{d}{dz}u\right)w+\left(\frac{d}{dy}u\right)v+u\left(\frac{d}{dx}u\right)+\frac{d}{dt}u\right)$$
$$=X+\mu\left(\frac{d^2}{dz^2}u+\frac{d^2}{dy^2}u+\frac{d^2}{dx^2}u\right)-\frac{d}{dx}p$$
$$\rho\left(\left(\frac{d}{dz}v\right)w+v\left(\frac{d}{dy}v\right)+u\left(\frac{d}{dx}v\right)+\frac{d}{dt}v\right)$$
$$=Y+\mu\left(\frac{d^2}{dz^2}v+\frac{d^2}{dy^2}v+\frac{d^2}{dx^2}v\right)-\frac{d}{dy}p$$

上記でコリオリの力は、$X=2\,v\sin\left(L_{AM}\right)\rho\Omega$、$Y=-2\,u\sin\left(L_{AM}\right)\rho\Omega$ とする。ここで Ω は地球の自転角速度とする。また、 流速は x,y 軸方向で z の関数となり、$u=\mathrm{u}(z),v=\mathrm{v}(z),w=0,p=p(x,y)$ で、上式の Navier-Stokes の式は (8.1.9) 式から、

$$
\begin{aligned}
0 =&2\,\Omega\,\mathrm{v}\left(z\right)\,\sin\left(L_{AM}\right)+\nu\,\left(\frac{d^2}{d\,z^2}\,\mathrm{u}\left(z\right)\right)\\
&-\frac{\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{p}\left(x,y\right)}{\rho}\\
0 =&-2\,\Omega\,\mathrm{u}\left(z\right)\,\sin\left(L_{AM}\right)+\nu\,\left(\frac{d^2}{d\,z^2}\,\mathrm{v}\left(z\right)\right)\\
&-\frac{\frac{d}{d\,y}\,\mathrm{p}\left(x,y\right)}{\rho}
\end{aligned}
\tag{8.9.8}
$$

```
NAV4:expand(NAV21+%i*NAV31);
C1:c(z)=u(z)+%i*v(z);
C2:solve(C1,u(z))[1];
subst([C2],NAV4);
NAVC1:expand(ev(%,diff));
A1:2*%i*Omega*c(z)*sin(L[AM])=A*c(z);
A2:solve(A1,A)[1];
subst([A1],NAVC1);
ode2(%,c(z),z);
C3:subst([A2,%k1=0],%);
subst([z=0],rhs(%))=0;
solve(%,%k2)[1];
C4:subst([%,C1],C3);
U1:factor(realpart(C4));
V1:factor(imagpart(C4));
QU1:Q[U]='integrate(rhs(U1),z,0,inf);
ev(%,integrate);
QV1:Q[V]='integrate(rhs(V1),z,0,inf);
ev(%,integrate);
subst(['diff(p(x,y),x,1)=0],QU1);
ev(%,integrate);
subst(['diff(p(x,y),x,1)=0],QV1);
ev(%,integrate);
subst(['diff(p(x,y),y,1)=0],QU1);
ev(%,integrate);
subst(['diff(p(x,y),y,1)=0],QV1);
ev(%,integrate);
```

$\mathrm{u}\left(z\right),\mathrm{v}\left(z\right)$ を下記の複素数：$\mathrm{c}\left(z\right)$ に置き換 える。

$$
\mathrm{c}\left(z\right)=i\,\mathrm{v}\left(z\right)+\mathrm{u}\left(z\right)
$$

(8.9.8) 式は次式にまとめることができる。

$$
\begin{aligned}
0 =&-2\,i\,\Omega\,\mathrm{c}\left(z\right)\,\sin\left(L_{AM}\right)+\nu\,\left(\frac{d^2}{d\,z^2}\,\mathrm{c}\left(z\right)\right)\\
&-\frac{i\,\left(\frac{d}{d\,y}\,\mathrm{p}\left(x,y\right)\right)}{\rho}-\frac{\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{p}\left(x,y\right)}{\rho}
\end{aligned}
$$

上式の係数を下記の A で置き換え、

$$
A=2\,i\,\Omega\,\sin\left(L_{AM}\right)
\tag{8.9.9}
$$

上式を置き換えると、

$$
\begin{aligned}
0 =&-\mathrm{c}\left(z\right)\,A+\nu\,\left(\frac{d^2}{d\,z^2}\,\mathrm{c}\left(z\right)\right)\\
&-\frac{i\,\left(\frac{d}{d\,y}\,\mathrm{p}\left(x,y\right)\right)}{\rho}-\frac{\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{p}\left(x,y\right)}{\rho}
\end{aligned}
$$

上式を $ode2$ 関数で解くと、

$$
\begin{aligned}
\mathrm{c}\left(z\right) =&\%k1\,e^{\frac{z\,\sqrt{A}}{\sqrt{\nu}}}+\%k2\,e^{-\frac{z\,\sqrt{A}}{\sqrt{\nu}}}\\
&-\frac{i\,\left(\frac{d}{d\,y}\,\mathrm{p}\left(x,y\right)\right)+\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{p}\left(x,y\right)}{\rho\,A}
\end{aligned}
$$

境界条件として、$z\to\infty$ で流速は零であるから、$\%k1=0$ となり、(8.9.9) 式を代入する と、

$$
\begin{aligned}
\mathrm{c}\left(z\right) =&\frac{i\,\left(i\,\left(\frac{d}{d\,y}\,\mathrm{p}\left(x,y\right)\right)+\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{p}\left(x,y\right)\right)}{2\,\Omega\,\rho\sin\left(L_{AM}\right)}\\
&+\%k2\,e^{-\frac{(-1)^{\frac{1}{4}}\,\sqrt{2}\,\sqrt{\Omega}\,z\,\sqrt{\sin\left(L_{AM}\right)}}{\sqrt{\nu}}}
\end{aligned}
\tag{8.9.10}
$$

境界条件として、$z=0$ で流速は零であるから、

$$
\frac{i\,\left(i\,\left(\frac{d}{d\,y}\,\mathrm{p}\left(x,y\right)\right)+\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{p}\left(x,y\right)\right)}{2\,\Omega\,\rho\sin\left(L_{AM}\right)}+\%k2=0
$$

上式から $\%k2$ を求め、

$$
\%k2=\frac{\frac{d}{d\,y}\,\mathrm{p}\left(x,y\right)-i\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{p}\left(x,y\right)\right)}{2\,\Omega\,\rho\sin\left(L_{AM}\right)}
$$

(8.9.10) 式に代入すると、

$$
\begin{aligned}
i\,\mathrm{v}\left(z\right)+\mathrm{u}\left(z\right) =&\frac{\left(\frac{d}{d\,y}\,\mathrm{p}\left(x,y\right)-i\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{p}\left(x,y\right)\right)\right)}{2\,\Omega\,\rho\sin\left(L_{AM}\right)}\\
&\times\ e^{-\frac{(-1)^{\frac{1}{4}}\,\sqrt{2}\,\sqrt{\Omega}\,z\,\sqrt{\sin\left(L_{AM}\right)}}{\sqrt{\nu}}}\\
&+\frac{i\,\left(i\,\left(\frac{d}{d\,y}\,\mathrm{p}\left(x,y\right)\right)+\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{p}\left(x,y\right)\right)}{2\,\Omega\,\rho\sin\left(L_{AM}\right)}
\end{aligned}
$$

上式の実部で $\mathrm{u}\left(z\right)$ が、虚部で $\mathrm{v}\left(z\right)$ が得られる。

$$
\begin{aligned}
\mathrm{u}\left(z\right) =&-\frac{e^{-\frac{\sqrt{\Omega}\,z\,\sqrt{\sin\left(L_{AM}\right)}}{\sqrt{\nu}}}}{2\,\Omega\,\rho\sin\left(L_{AM}\right)}\\
&\times\left(\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{p}\left(x,y\right)\right)\,\sin\left(\frac{\sqrt{\Omega}\,z\,\sqrt{\sin\left(L_{AM}\right)}}{\sqrt{\nu}}\right)\right.\\
&-\left(\frac{d}{d\,y}\,\mathrm{p}\left(x,y\right)\right)\,\cos\left(\frac{\sqrt{\Omega}\,z\,\sqrt{\sin\left(L_{AM}\right)}}{\sqrt{\nu}}\right)\\
&\left.+\left(\frac{d}{d\,y}\,\mathrm{p}\left(x,y\right)\right)\,e^{\frac{\sqrt{\Omega}\,z\,\sqrt{\sin\left(L_{AM}\right)}}{\sqrt{\nu}}}\right)
\end{aligned}
\tag{8.9.11}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{v}(z) = & -\frac{e^{-\frac{\sqrt{\Omega}\,z\,\sqrt{\sin(L_{AM})}}{\sqrt{\nu}}}}{2\,\Omega\,\rho\sin(L_{AM})} \\
& \times\left(\left(\frac{d}{d\,y}\,\mathrm{p}(x,y)\right)\,\sin\left(\frac{\sqrt{\Omega}\,z\,\sqrt{\sin(L_{AM})}}{\sqrt{\nu}}\right)\right. \\
& +\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{p}(x,y)\right)\,\cos\left(\frac{\sqrt{\Omega}\,z\,\sqrt{\sin(L_{AM})}}{\sqrt{\nu}}\right) \\
& \left.-\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{p}(x,y)\right)\,e^{\frac{\sqrt{\Omega}\,z\,\sqrt{\sin(L_{AM})}}{\sqrt{\nu}}}\right)
\end{aligned}
\tag{8.9.12}
$$

上式を積分して流量を求めると、$\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{p}(x,y)=0$ の時、

$$
Q_V=-\frac{\sqrt{\nu}\,\left(\frac{d}{d\,y}\,\mathrm{p}(x,y)\right)}{4\,\Omega^{\frac{3}{2}}\,\rho\sin(L_{AM})^{\frac{3}{2}}}
$$

$\frac{d}{d\,y}\,\mathrm{p}(x,y)=0$ の時、

$$
Q_U=-\frac{\sqrt{\nu}\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{p}(x,y)\right)}{4\,\Omega^{\frac{3}{2}}\,\rho\sin(L_{AM})^{\frac{3}{2}}}
$$

```
PL1:subst([L[AM]=%pi/4,\Omega=2*%pi/24/60
 /60,\nu=15.01*0.000001,\rho=0.1228,
 'diff(p(x,y),y,1)=-0.0003,'diff(p(x,y),
 x,1)= -0.0000],rhs(U1));
PL2:subst([L[AM]=%pi/4,\Omega=2*%pi/24/60
 /60,\nu=15.01*0.000001,\rho=0.1228,
 'diff(p(x,y),y,1)=-0.0003,'diff(p(x,y),
 x,1)= -0.0000],rhs(V1));
plot2d([PL1,PL2],[z,0,5]);
XY1:[[0,0],[subst([z=0.05],PL1),
 subst([z=0.05],PL2)]];
XY2:[[0,0], [subst([z=0.25],PL1),
 subst([z=0.25],PL2)]];
XY3:[[0,0],[subst([z=0.5],PL1),
 subst([z=0.5],PL2)]];
XY4:[[0,0],[subst([z=0.75],PL1),
 subst([z=0.75],PL2)]];
XY5:[[0,0],[subst([z=1],PL1),
 subst([z=1],PL2)]];
XY6:[[0,0],[subst([z=1.5],PL1),
 subst([z=1.5],PL2)]];
XY7:[[0,0],[subst([z=2],PL1),
 subst([z=2],PL2)]];
XY8:[[0,0],[subst([z=2.5],PL1),
 subst([z=2.5],PL2)]];
XY9:[[0,0],[subst([z=5],PL1),
 subst([z=6],PL2)]];
```

```
plot2d([[discrete,XY1],[discrete,XY2],
 [discrete,XY3],[discrete,XY4],
 [discrete,XY5],[discrete,XY6],
 [discrete,XY7],[discrete,XY8],
 [discrete,XY9]],[y,-40,40]);
```

ここで緯度：北緯 45 度、大気温度：20 ℃の動粘性係数：ν を使用し、流速分布および各高度における流速、流向を下記に示す。粘性の及ぶ高度範囲は 3m 程度であるが、実際は表面の撹乱が大きく、粘性の及ぶ高度範囲はもっと少ない。

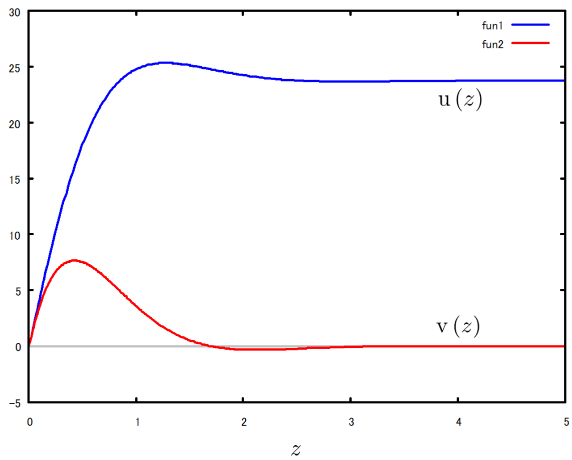


図 8.9.10: 地表面近くの流れ ($\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{p}(x,y)=0$ の時)

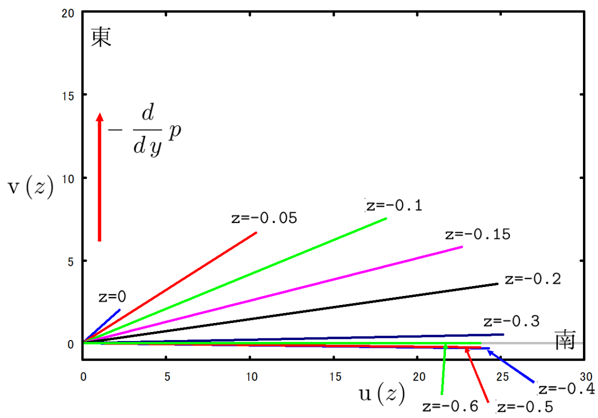


図 8.9.11: 地表面近くの流れ ($\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{p}(x,y)=0$ の時)

8.10　粘性流数値解析

8.10.1　渦度方程式を用いた二次元粘性流数値解析

非圧縮性粘性流れの基礎方程式は、Navier-Stokes の方程式と連続の方程式である。二次元の $x-y$ 座標の速度コンポーネントを u, v、渦度を ω、時間を t、動粘性係数を ν とする。二次元の Navier-Stokes の二つの方程式を渦度方程式で表現すると (8.1.34) 式、339 頁から一つの方程式となり、圧力項もなくなる。以上から基礎方程式は下記の渦度方程式：

$$\begin{aligned}\left(\frac{d}{d\,y}\,\omega\right)\,v+\left(\frac{d}{d\,x}\,\omega\right)\,u+\frac{d}{d\,t}\,\omega\\=\nu\,\left(\frac{d^2}{d\,y^2}\,\omega+\frac{d^2}{d\,x^2}\,\omega\right)\end{aligned} \tag{8.10.1}$$

連続の方程式：

$$\frac{d}{d\,y}\,v+\frac{d}{d\,x}\,u=0 \tag{8.10.2}$$

これを基に差分法で数値計算をする方法を以下に述べる。

```
/* 粘性数値解析 */
kill(all);
load("vect")$
depends(x,[t]);
depends(y,[t]);
depends(z,[t]);
depends(u,[t,x,y,z]);
depends(v,[t,x,y,z]);
depends(w,[t,x,y,z]);
depends(p,[x,y,z]);
depends(\omega,[t,x,y]);
depends(\Psi,[t,x,y]);
declare(z,complex);
declare(c,complex);
declare(F,complex);
U1:u=diff(\Psi,y,1);
V1:v=-diff(\Psi,x,1);
MAS1:diff(u,x,1)+diff(v,y,1)=0;
subst([U1,V1],%);
VOR1:omega='diff(v,x,1)-'diff(u,y,1);
subst([U1,V1],%);
VOR3:ev(%,diff);
NAV1:('diff(omega,y,1))*v+('diff(omega,x,1)
 )*u+'diff(omega,t,1)=nu*('diff(omega,y,2)
 +'diff(omega,x,2));
NAV2:solve(%,'diff(omega,t,1))[1];
```

ここで流れ関数：Ψ を導入する。流れ関数と流速：u, v との関係式は、(5.1.1) 式、89 頁から

$$u=\frac{d}{d\,y}\,\Psi,\quad v=-\frac{d}{d\,x}\,\Psi \tag{8.10.3}$$

連続の方程式：(8.10.2) 式に上式を代入すると、次式となり、流れ関数：Ψ を導入することで、連続の方程式は自動的に満足される。

$$\frac{d}{d\,y}\,\left(-\frac{d}{d\,x}\,\Psi\right)+\frac{d^2}{d\,x\,d\,y}\,\Psi=0$$

渦度は (8.1.27) 式から次式となり、これを流れ関数：Ψ で表現すると、

$$\omega=\frac{d}{d\,x}\,v-\frac{d}{d\,y}\,u=-\frac{d^2}{d\,y^2}\,\Psi-\frac{d^2}{d\,x^2}\,\Psi \tag{8.10.4}$$

渦度方程式：(8.10.1) 式を書き換えて、

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\,t}\,\omega=-\left(\frac{d}{d\,y}\,\omega\right)\,v-\left(\frac{d}{d\,x}\,\omega\right)\,u\\+\nu\,\left(\frac{d^2}{d\,y^2}\,\omega\right)+\nu\,\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,\omega\right)\end{aligned} \tag{8.10.5}$$

上式を代表の長さ：L、流速：U、レイノルズ数：$R_n=UL/\nu$ で無次元化し、

$$\Psi'=\frac{\Psi}{U\,L},\quad \omega'=\omega\,\frac{L}{U},\quad u'=\frac{u}{U},\quad v'=\frac{v}{U},\\ x'=\frac{x}{L},\quad y'=\frac{y}{L}$$

流れ関数と流速：u, v との関係式は、(8.10.3) 式から、

$$u'=\frac{d}{d\,y'}\,\Psi',\quad v'=-\frac{d}{d\,x'}\,\Psi' \tag{8.10.6}$$

渦度は (8.10.4) 式から、

$$\omega'=-\frac{d^2}{d\,y'^2}\,\Psi'-\frac{d^2}{d\,x'^2}\,\Psi' \tag{8.10.7}$$

渦度方程式は (8.10.5) 式から、

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\,t}\,\omega'=-\left(\frac{d}{d\,y'}\,\omega'\right)\,v'-\left(\frac{d}{d\,x'}\,\omega'\right)\,u'\\+\frac{1}{R_n}\,\left(\frac{d^2}{d\,y'^2}\,\omega'\right)+\frac{1}{R_n}\,\left(\frac{d^2}{d\,x'^2}\,\omega'\right)\end{aligned} \tag{8.10.8}$$

```
Y1:y=A*x^2+B*x+C;
Y11:subst([x=-dx,y=y[-1]],Y1);
Y12:subst([x=0,y=y[0]],Y1);
Y13:subst([x=dx,y=y[1]],Y1);
YABC:solve([Y11,Y12,Y13],[A,B,C])[1];
'diff(lhs(Y1),x,1)[0]=subst([x=0],
 diff(rhs(Y1),x,1));
```

```
DY0:subst(YABC,%);
'diff(lhs(Y1),x,1)[1]=subst([x=dx],
 diff(rhs(Y1),x,1));
DY1:factor(subst(YABC,%));
Y1D:solve(%,y[1])[1];
'diff(lhs(Y1),x,2)[0]=subst([x=0],
 diff(rhs(Y1),x,2));
DDY0:subst(YABC,%);
'diff(lhs(Y1),x,2)[1]=subst([x=dx],
 diff(rhs(Y1),x,2));
DDY1:subst(YABC,%);
```

微分方程式を dx, dy 間隔のメッシュ上で解くため、三点間を下記の二次式で近似する。

$$y = C + x\,B + x^2\,A$$

$x = -dx, x = 0, x = dx$ の三点の y の値：y_{-1}, y_0, y_1 とすると、

$$y_{-1} = C - dx\,B + dx^2\,A, \quad y_0 = C$$

$$y_1 = C + dx\,B + dx^2\,A$$

上式から A, B, C を求めると、

$$A = \frac{y_1 - 2\,y_0 + y_{-1}}{2\,dx^2}, B = -\frac{y_{-1} - y_1}{2\,dx}, C = y_0$$

中心点：$x = 0$ の一階微分は、

$$\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)_0 = B = -\frac{y_{-1} - y_1}{2\,dx}$$

端点：$x = dx$ の一階微分は、

$$\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)_1 = B + 2\,dx\,A = \frac{3\,y_1 - 4\,y_0 + y_{-1}}{2\,dx}$$

端点：$x = dx$ の一階微分を与えたときの端点の値は、

$$y_1 = \frac{2\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)_1 dx + 4\,y_0 - y_{-1}}{3}$$

中心点：$x = 0$ の二階微分は、

$$\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,y\right)_0 = 2\,A = \frac{y_1 - 2\,y_0 + y_{-1}}{dx^2}$$

```
/* セル計算式 */
VORI1:\omega[i]=-((\Psi[i+1,j]-2*\Psi[i,j]
 +\Psi[i-1,j])/dx^2)-((\Psi[i,j+1]
 -2*\Psi[i,j]+\Psi[i,j-1])/dy^2);
(\omega[i,j,N]-\omega[i,j])/dt=-(-(
 \omega[i,j-1]-\omega[i,j+1])/(2*dy))
 *v[i,j]-(-(\omega[i-1,j]-\omega[i+1,j])
 /(2*dx))*u[i,j]+\nu*((\omega[i,j+1]
 -2*\omega[i,j]+\omega[i,j-1])/dy^2)
 +\nu*((\omega[i+1,j]-2*\omega[i,j]
 +\omega[i-1,j])/dx^2);
NAVI1:subst([\nu=1/R[n]],%);
PSII2:solve(VORI1,Psi[i,j])[1];
NAVI2:\omega[i,j,N]=\omega[i,j]
 +dt*(rhs(NAVI1));
U2:u[i,j]=-(\Psi[i,j-1]-\Psi[i,j+1])/(2*dy);
V2:v[i,j]=(\Psi[i-1,j]-\Psi[i+1,j])/(2*dx);
```

上式を基に、渦度：(8.10.7) 式、渦度方程式：(8.10.8) 式を差分表示すると次式となる。以降、煩雑となる $'$ を除いて表す。

$$\omega_i = -\frac{\Psi_{i+1,j} - 2\,\Psi_{i,j} + \Psi_{i-1,j}}{dx^2} - \frac{\Psi_{i,j+1} - 2\,\Psi_{i,j} + \Psi_{i,j-1}}{dy^2}$$

$$\begin{aligned}\frac{\omega_{i,j,N} - \omega_{i,j}}{dt} =& \frac{\omega_{i+1,j} - 2\,\omega_{i,j} + \omega_{i-1,j}}{dx^2\,R_n} + \frac{\omega_{i,j+1} - 2\,\omega_{i,j} + \omega_{i,j-1}}{dy^2\,R_n} \\ & - \frac{u_{i,j}\,\left(\omega_{i+1,j} - \omega_{i-1,j}\right)}{2\,dx} - \frac{v_{i,j}\,\left(\omega_{i,j+1} - \omega_{i,j-1}\right)}{2\,dy}\end{aligned}$$

上式を書き換え、$\Psi_{i,j}, \omega_{i,j}, u_{i,j}, v_{i,j}$ を求める式は下記となる。ここで、$\omega_{i,j,N}$ は新しく得られた渦度：ω である。

$$\Psi_{i,j} = \frac{dy^2\,\Psi_{i+1,j} + dx^2\,\Psi_{i,j+1} + dx^2\,\Psi_{i,j-1} + dx^2\,dy^2\,\omega_i + dy^2\,\Psi_{i-1,j}}{2\,dy^2 + 2\,dx^2} \tag{8.10.9}$$

$$\begin{aligned}\omega_{i,j,N} =& dt\left(\frac{\omega_{i+1,j} - 2\,\omega_{i,j} + \omega_{i-1,j}}{dx^2\,R_n} + \frac{\omega_{i,j+1} - 2\,\omega_{i,j} + \omega_{i,j-1}}{dy^2\,R_n}\right. \\ & \left. - \frac{u_{i,j}\,\left(\omega_{i+1,j} - \omega_{i-1,j}\right)}{2\,dx} - \frac{v_{i,j}\,\left(\omega_{i,j+1} - \omega_{i,j-1}\right)}{2\,dy}\right) + \omega_{i,j}\end{aligned} \tag{8.10.10}$$

$$u_{i,j} = \frac{\Psi_{i,j+1} - \Psi_{i,j-1}}{2\,dy}, \quad v_{i,j} = \frac{\Psi_{i-1,j} - \Psi_{i+1,j}}{2\,dx} \tag{8.10.11}$$

```
/* 流れ関数：Psi 境界条件 */
/* 下部境界 */
\Psi[i,1]=0;
/* 流入口境界 */
U=-(\Psi[1,j-1]-\Psi[1,j])/(dy);
solve(%,\Psi[1,j])[1];
/* 下部境界 */
\Psi[i,N]=dy*U+Psi[1,N-1];
/* 流出口境界 */
v=-'diff(\Psi,x,1);
diff(%,x,1);
lhs(%)=0;
'diff(\Psi,x,2)=0;
('diff(\Psi,x,2))[1]=(\Psi[N,j]
 -2*\Psi[N-1,j]+\Psi[N-2,j])/dx^2;
rhs(%)=0;
solve(%,Psi[N,j])[1];
```

流れ関数：Ψ の境界条件として、流線となる境界は Ψ が一定となる。そこで、上下境界では、

$$\Psi_{i,1} = 0 \quad (\text{at } y = 0)$$

$$\Psi_{i,M} = U \times y_M \quad (\text{at } y = y_M)$$

入り口境界では、一様流：U となるので、

$$U = \frac{\Psi_{1,j} - \Psi_{1,j-1}}{dy}$$

から、

$$\Psi_{1,j} = dy\, U + \Psi_{1,j-1}$$

出口境界では、下記となり、

$$\frac{d}{d\,x}\, v = 0$$

v を流れ関数で表現すると、(8.10.6) 式から、

$$\frac{d}{d\,x}\, v = -\frac{d^2}{d\,x^2}\,\Psi = 0$$

上式を差分表記すると、

$$\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,\Psi\right)_1 = \frac{\Psi_{N,j} - 2\,\Psi_{N-1,j} + \Psi_{N-2,j}}{dx^2} = 0$$

以上から、出口の流れ関数：$\Psi_{N,j}$ は、

$$\Psi_{N,j} = 2\,\Psi_{N-1,j} - \Psi_{N-2,j}$$

```
/* 渦度境界条件 */
/* 流入口境界 */
\omega[1,j]=0;
/* 水平境界 */
VOR1;
subst([v=0,U1],%);
\omega[i,j]=-(2*\Psi[i,j+1]-2*\Psi[i,j])
 /dy^2;
/* 垂直境界 */
VOR1;
subst([u=0,V1],%);
ev(%,diff);
\omega[i,j]=-(2*\Psi[i+1,j]-2*\Psi[i,j])
 /dx^2;
/* 流出口境界 */
diff(\omega,x,2)=0;
(\omega[N,j]-2*\omega[N-1,j]+\omega[N-2,j])
 /dx^2=0;
solve(%,\omega[N,j])[1];
```

渦度の境界条件として、粘性の影響を受けていない場所は渦度は零となる。このため、入り口境界や固定壁でない上下境界では、渦度は零となる。

水平壁の境界では、$v = 0$ となり、渦度を流れ関数：Ψ で表現すると、

$$\omega = \frac{d}{d\,x}\, v - \frac{d}{d\,y}\, u = -\frac{d^2}{d\,y^2}\,\Psi$$

上式を差分表記すると、水平壁の境界の渦度は、

$$\omega_{i,j} = \frac{2\,\Psi_{i,j} - 2\,\Psi_{i,j+1}}{dy^2}$$

垂直壁の境界では、$u = 0$ となり、渦度を流れ関数：Ψ で表現すると、

$$\omega = \frac{d}{d\,x}\left(-\frac{d}{d\,x}\,\Psi\right) = -\frac{d^2}{d\,x^2}\,\Psi$$

上式を差分表記すると、垂直壁の境界の渦度は、

$$\omega_{i,j} = \frac{2\,\Psi_{i,j} - 2\,\Psi_{i+1,j}}{dx^2}$$

出口境界では、下記とし、

$$\frac{d^2}{d\,x^2}\,\omega = 0$$

上式を差分表記すると、

$$\frac{\omega_{N,j} - 2\,\omega_{N-1,j} + \omega_{N-2,j}}{dx^2} = 0$$

以上から、出口の渦度：$\omega_{N,j}$ は、

$$\omega_{N,j} = 2\,\omega_{N-1,j} - \omega_{N-2,j}$$

```
/* 壁との干渉 */
F0:F=-(A^2*B^2*U)/(conjugate(c)^2*(z-c))
 -(A^2*B^2*U)/(conjugate(c)^2*(z))
 +(B^2*U)/(z-c)+(A^2*U)/z+z*U;
F01:subst([A=R,B=R,c=%i*H*n],%);
F02:subst([A=R,B=R,c=-%i*H*n],
 rest(rhs(F0),-2));
F1:lhs(F01)=rhs(F01)+F02;
UI:u-%i*v=diff(rhs(F1),z,1);
```

```
UI1:realpart(subst([z=%i*R],UI));
UI11:rest(rhs(UI1),-2);
UI10:rest(rhs(UI1),5);
UI2:u=sum(UI11,n,1,N)+UI10;
subst([N=10],%);
ev(%,sum);
float(subst([H=6*R],%));
UI1:realpart(subst([z=%i*H/2],UI));
UI11:rest(rhs(UI1),-2);
UI10:rest(rhs(UI1),5);
UI2:u=sum(UI11,n,1,N)+UI10;
subst([N=10],%);
ev(%,sum);
float(subst([H=6*R],%));
F03:subst([B=0,A=R],F0);
UI3:u-%i*v=diff(rhs(F03),z,1);
realpart(subst([z=%i*R],UI3));
float(realpart(subst([z=%i*R*3],UI3)));
```

ある限られた数値解析範囲の中の物体まわりの粘性流を求める場合、境界の影響を受ける。その度合いを知るため、物体を円とし、壁の影響を壁に対称においた円で表現する。二つの円の流れを表す複素関数：F は、例題 5.3.10「一様流中に置かれた二つの円柱に作用する相互力」の (5.3.55) 式、142 頁から下記となる。ここで、半径：A を原点に、半径：B を c に置き、一様流：U とする。

$$
\begin{aligned}
F = & -\frac{A^2\,B^2\,U}{\operatorname{conjugate}(c)^2\,(z-c)} - \frac{A^2\,B^2\,U}{\operatorname{conjugate}(c)^2\,z} \\
& + \frac{B^2\,U}{z-c} + \frac{A^2\,U}{z} + z\,U
\end{aligned}
$$

円の半径：R、円の間隔：nH とし、$c = inH$、$c = -inH$ の位置に円を置いたとき、複素関数：F は、

$$
\begin{aligned}
F = & \frac{R^4\,U}{n^2\,H^2\,(i\,n\,H+z)} + \frac{R^4\,U}{n^2\,H^2\,(z-i\,n\,H)} \\
& + \frac{2\,R^4\,U}{n^2\,z\,H^2} + \frac{R^2\,U}{i\,n\,H+z} + \frac{R^2\,U}{z-i\,n\,H} \\
& + \frac{R^2\,U}{z} + z\,U
\end{aligned}
$$

このとき、流速：$u - i\,v$ は、

$$
\begin{aligned}
u - i\,v = & -\frac{R^4\,U}{n^2\,H^2\,(i\,n\,H+z)^2} - \frac{R^4\,U}{n^2\,H^2\,(z-i\,n\,H)^2} \\
& - \frac{2\,R^4\,U}{n^2\,z^2\,H^2} - \frac{R^2\,U}{(i\,n\,H+z)^2} - \frac{R^2\,U}{(z-i\,n\,H)^2} \\
& - \frac{R^2\,U}{z^2} + U
\end{aligned}
$$

対称軸を中心に、上下に N 個の円を置いたとき、x 軸方向の流速：u は、半径：R の位置では、

$$
\begin{aligned}
u = & \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{R^4\,U}{n^2\,H^2\,(R+n\,H)^2} + \frac{R^2\,U}{(R+n\,H)^2} \right. \\
& \left. + \frac{R^4\,U}{n^2\,H^2\,(R-n\,H)^2} + \frac{R^2\,U}{(R-n\,H)^2} \right) + 2\,U
\end{aligned}
$$

二円間の中間位置：$\frac{1}{2}H$ の位置では、

$$
\begin{aligned}
u = & \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{R^4\,U}{n^2\,H^2\,\left(n\,H+\frac{H}{2}\right)^2} + \frac{R^4\,U}{n^2\,H^2\,\left(\frac{H}{2}-n\,H\right)^2} \right. \\
& \left. + \frac{8\,R^4\,U}{n^2\,H^4} + \frac{R^2\,U}{\left(n\,H+\frac{H}{2}\right)^2} + \frac{R^2\,U}{\left(\frac{H}{2}-n\,H\right)^2} \right) \\
& + \frac{4\,R^2\,U}{H^2} + U
\end{aligned}
$$

上記を基に試算すると、

円間隔	円の相互干渉	単円
$3R$	$2.48U$	$2.0U$
$4R$	$2.23U$	$2.0U$
$6R$	$2.09U$	$2.0U$

表 8.10.1: 半径：R 位置の流速

円間隔	円の相互干渉	単円
$3R$	$2.29U$	$1.44U$
$4R$	$1.67U$	$1.25U$
$6R$	$1.28U$	$1.11U$

表 8.10.2: $\frac{1}{2}H$ の位置の流速

以上から、最低限、$4R$、即ち、物体と物体の間に物体の大きさと同じ程度以上、離す必要があることが分かる。

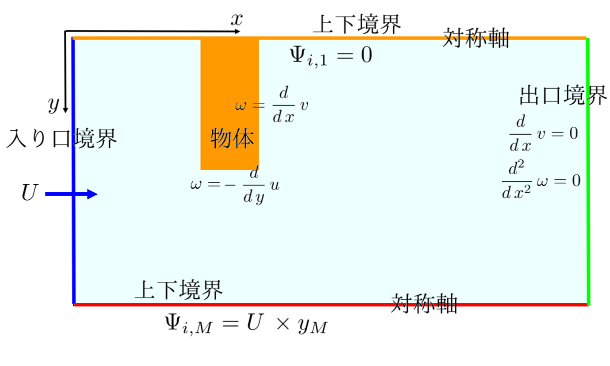


図 8.10.1: 垂直平板の流れ　境界条件

垂直平板まわりの粘性流れを、上記の粘性数値解析で求める。x 軸方向に 80 メッシュ、y 軸方向に 50 メッシュの計算領域を設け、垂直平板として、x 軸方向に 2 メッシュ、y 軸方向に半幅 : 20 メッシュとした。計算は、Excel の繰り返し計算機能を用いて粘性流を求めた。境界条件を上記に示す。垂直平板で $Rn = 1, 10, 100$ の計算結果と前方が半円の物体で、$Rn = 100$ の計算結果を以下に示す。

垂直平板で $Rn = 1$ の場合、平板の後方に小さな後流域が発生しており、対称軸上の流速は表 8.10.2　$\frac{1}{2}H$ の位置の流速に近い。垂直平板で $Rn = 10$ の場合、平板の後方の後流域は x 軸方向に長くなり、後流域が大きく、長くなり、渦度も $Rn = 1$ に比べ強くなっている。

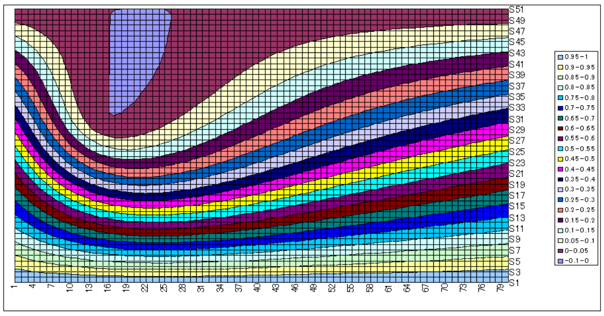


図 8.10.2: 垂直平板　$Rn = 1$ 流線

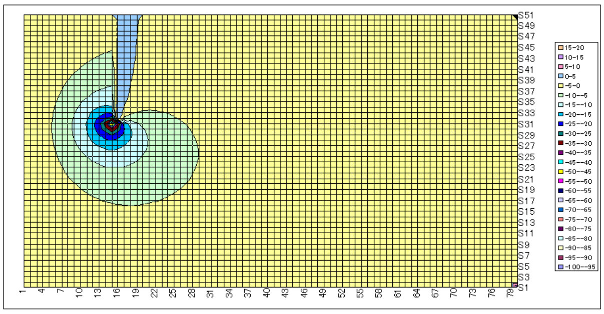


図 8.10.3: 垂直平板　$Rn = 1$ 渦度

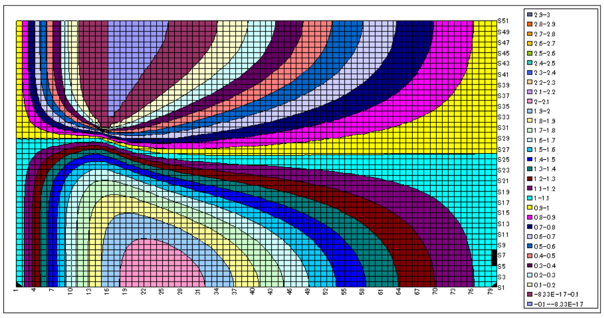


図 8.10.4: 垂直平板　$Rn = 1$ 流速 : u

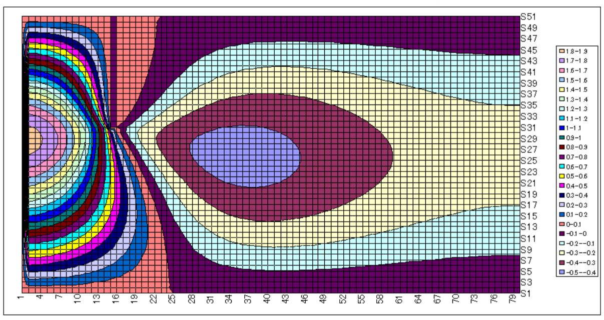


図 8.10.5: 垂直平板　$Rn = 1$ 流速 : v

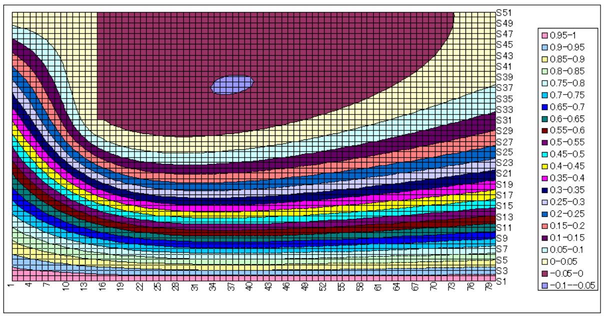


図 8.10.6: 垂直平板　$Rn = 10$ 流線

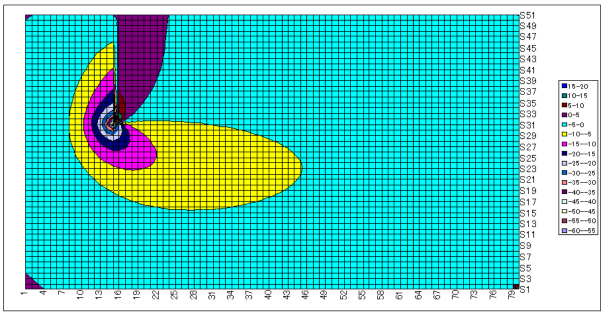


図 8.10.7: 垂直平板　$Rn = 10$ 渦度

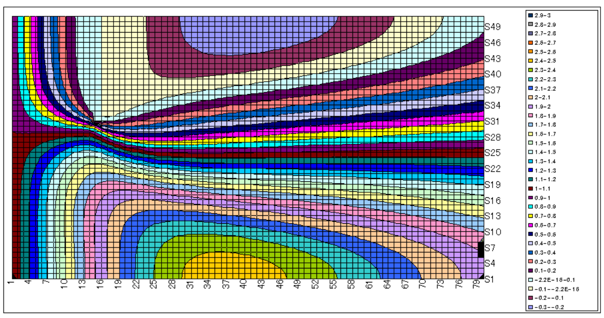


図 8.10.8: 垂直平板　$Rn = 10$ 流速 : u

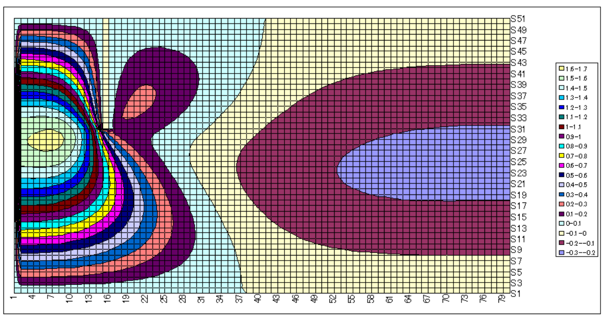


図 8.10.9: 垂直平板　$Rn = 10$ 流速 : v

垂直平板で $Rn = 100$ の場合、平板の後方の後流域は x 軸方向に長く、y 軸方向にも外へ大きくせり出し、それが帯状に後方に続いている。渦度は $Rn = 1, 10$ に比べ更に強く、平板後方の逆流流速も強くなっている。

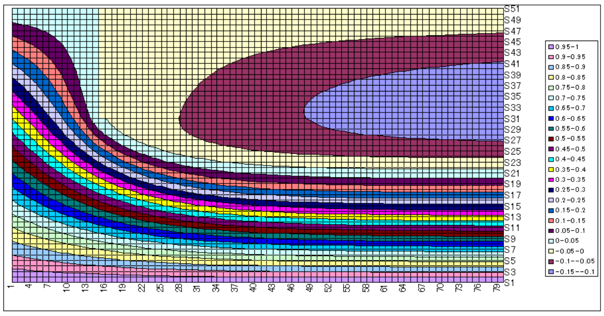


図 8.10.10: 垂直平板　$Rn = 100$ 流線

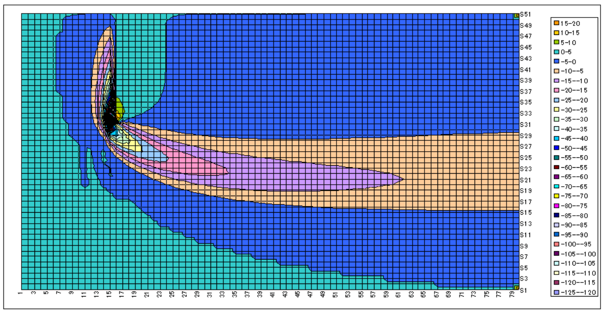


図 8.10.11: 垂直平板　$Rn = 100$ 渦度

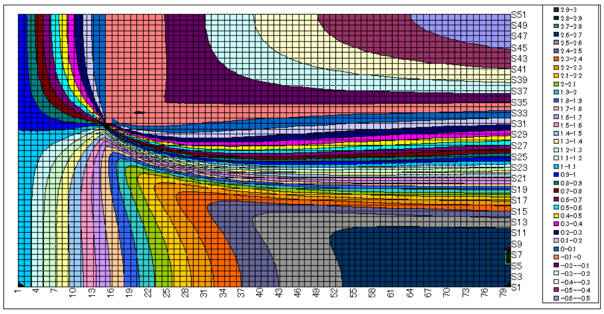


図 8.10.12: 垂直平板　$Rn = 100$ 流速：u

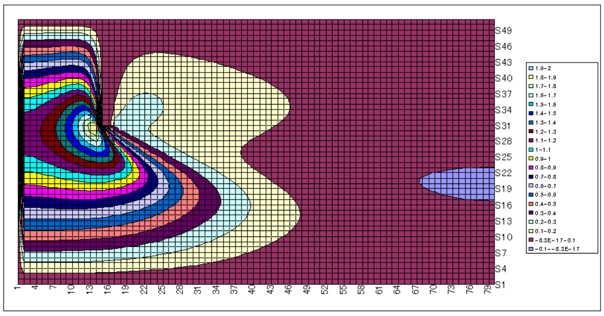


図 8.10.13: 垂直平板　$Rn = 100$ 流速：v

前方が半円で $Rn = 100$ の場合、平板と同様に後方の後流域は x 軸方向に長く、それが帯状に後方に続いているが、端部での流れがよりスムースとなっているため、y 軸方向へのせり出しは平板に比べ少ない。

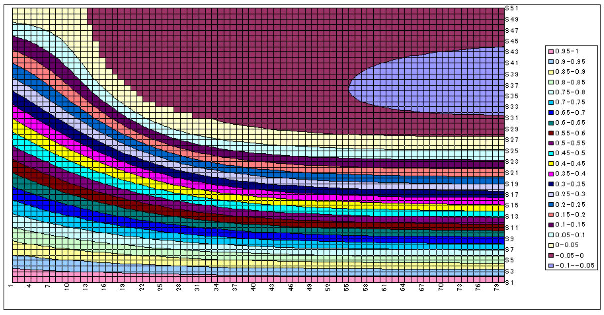


図 8.10.14: 半円　$Rn = 100$ 流線

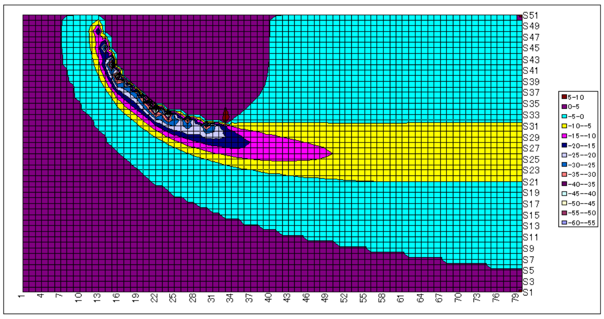


図 8.10.15: 半円　$Rn = 100$ 渦度

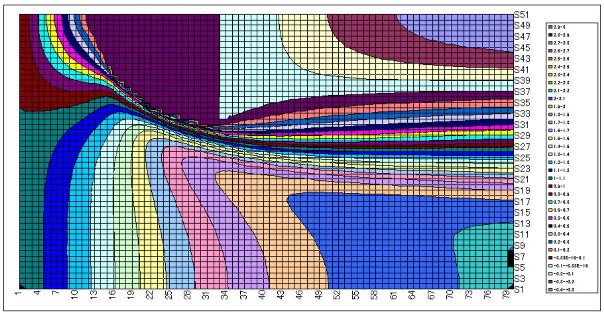


図 8.10.16: 半円　$Rn = 100$ 流速：u

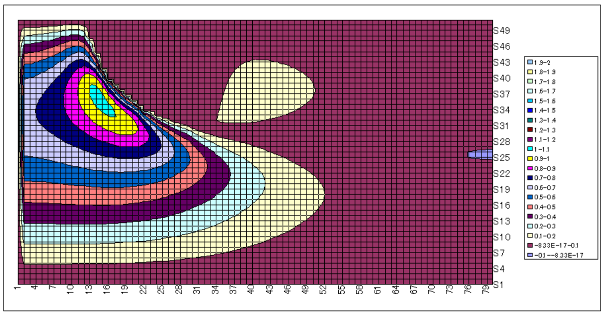


図 8.10.17: 半円　$Rn = 100$ 流速：v

第 9 章　表面波

9.1　自由表面条件

波の表面を表す条件式について調べる。

9.1.1　三次元自由表面条件

波のない平衡状態での水面を x 軸、y 軸とし、鉛直上方に z 軸をとる。波高：η とする。時間:t、密度：ρ、重力加速度：g とする。

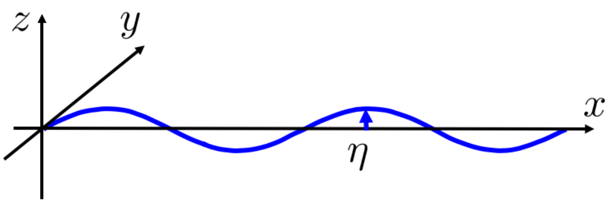


図 9.1.1: 三次元波座標系

```
/* 自由表面条件 U=0  */
kill(all);
load("vect")$
depends(\Phi,[x,y,z,t]);
depends(\eta,[x,y,t]);
depends(x,[t]);
depends(y,[t]);
depends(z,[t]);
assume(t>0);
/* 質量保存の方程式  */
PH1:diff(\Phi,x,2)+diff(\Phi,y,2)
 +diff(\Phi,z,2)=0;
/* 表面条件  */
FS1:z-\eta=0;
diff(FS1,t,1);
subst(['diff(x,t,1)=u,'diff(y,t,1)=v,
 'diff(z,t,1)=w],%);
FS2:subst([u=diff(\Phi,x,1),
 v=diff(\Phi,y,1),w=diff(\Phi,z,1)],%);
remove (x, dependency);
remove (y, dependency);
remove (z, dependency);
/* Bernoulli の定理  */
BE1:p/\rho+diff(\Phi,t,1)+g*z
 +(diff(\Phi,x,1)^2+diff(\Phi,y,1)^2
  +diff(\Phi,z,1)^2)/2=F(t);
subst([p=p[0],F(t)=p[0]/\rho,g*z=g*\eta],
 %);
BE2:expand(solve(%,\eta)[1]);
FS3:first(lhs(FS2))+last(lhs(FS2))=
 rhs(FS2);
BE3:lhs(BE2)=last(rhs(BE2));
diff(BE3,t,1);
FS4:subst([%],FS3);
```

非圧縮性流体で、速度ポテンシャル：Φ とすると、質量保存の方程式は、(2.9.5) 式、33 頁から次式となる。

$$\frac{d^2}{d\,z^2}\,\Phi+\frac{d^2}{d\,y^2}\,\Phi+\frac{d^2}{d\,x^2}\,\Phi=0 \tag{9.1.1}$$

変形する水面を下記で表す。

$$F(x,y,z,t)=z-\eta=0$$

運動学的条件として、上式の実質微分をとり、ここで η が x,y,t の関数であるから、

$$\frac{d}{d\,t}\,z-\left(\frac{d}{d\,y}\,\eta\right)\left(\frac{d}{d\,t}\,y\right)-\left(\frac{d}{d\,x}\,\eta\right)\left(\frac{d}{d\,t}\,x\right)-\frac{d}{d\,t}\,\eta=0$$

x 軸方向の流速：$\frac{d}{d\,t}\,x=u=\frac{d}{d\,x}\,\Phi$、$y$ 軸方向の流速：$\frac{d}{d\,t}\,y=v=\frac{d}{d\,y}\,\Phi$、$z$ 軸方向の流速：$\frac{d}{d\,t}\,z=w=\frac{d}{d\,z}\,\Phi$ であるから、

$$\frac{d}{d\,z}\,\Phi-\left(\frac{d}{d\,y}\,\eta\right)\left(\frac{d}{d\,y}\,\Phi\right)-\left(\frac{d}{d\,x}\,\eta\right)\left(\frac{d}{d\,x}\,\Phi\right)-\frac{d}{d\,t}\,\eta=0 \tag{9.1.2}$$

Bernoulli の定理の速度ポテンシャル表記は、(2.9.6) 式、34 頁から次式となる。

$$g\,z+\frac{p}{\rho}+\frac{\left(\frac{d}{d\,z}\,\Phi\right)^2+\left(\frac{d}{d\,y}\,\Phi\right)^2+\left(\frac{d}{d\,x}\,\Phi\right)^2}{2}+\frac{d}{d\,t}\,\Phi=\mathrm{F}\left(t\right) \tag{9.1.3}$$

表面圧力：p は変化しないので、$p=p_0$ とし、$z=\eta$ として、波高：η を求めると、

$$\eta=-\frac{\left(\frac{d}{d\,z}\,\Phi\right)^2}{2\,g}-\frac{\left(\frac{d}{d\,y}\,\Phi\right)^2}{2\,g}-\frac{\left(\frac{d}{d\,x}\,\Phi\right)^2}{2\,g}-\frac{\frac{d}{d\,t}\,\Phi}{g} \quad (9.1.4)$$

いま、波高が十分小さいとすると、(9.1.2) 式の水面の運動学的条件の高次の微小項を省き、

$$\frac{d}{d\,z}\,\Phi-\frac{d}{d\,t}\,\eta=0 \quad (9.1.5)$$

また、(9.1.4) 式の Bernoulli の定理の高次の微小項を省き、

$$\eta=-\frac{\frac{d}{d\,t}\,\Phi}{g} \quad (9.1.6)$$

上式を t で微分し、

$$\frac{d}{d\,t}\,\eta=-\frac{\frac{d^2}{d\,t^2}\,\Phi}{g}$$

(9.1.5) 式に代入すると、微小振幅の自由表面条件は次式となる。

$$\frac{d}{d\,z}\,\Phi+\frac{\frac{d^2}{d\,t^2}\,\Phi}{g}=0 \quad (9.1.7)$$

9.1.2 一様流のある自由表面条件

一様流速：U がある場合の自由表面条件について、調べる。x 軸方向に一様流速：U があり、波のない平衡状態での水面を x 軸、y 軸とし、鉛直上方に z 軸をとる。波高：η、密度：ρ、重力加速度：g とする。

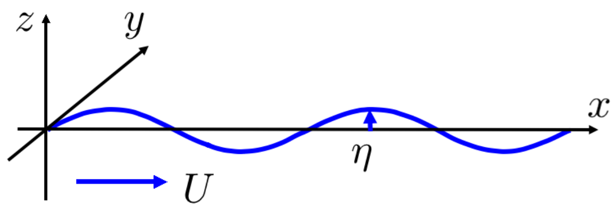


図 9.1.2: 三次元波座標系

```
/* 自由表面条件 U：あり  */
kill(all);
load("vect")$
depends(\Phi,[x,y,z,t]);
depends(\phi,[x,y,z]);
depends(\eta,[x,y]);
depends(x,[t]);
depends(y,[t]);
depends(z,[t]);
assume(t>0);
PH0:\Phi=U*x+\phi;
/* 質量保存の方程式  */
PH1:diff(\Phi,x,2)+diff(\Phi,y,2)
 +diff(\Phi,z,2)=0;
subst([PH0],%);
PH2:ev(%,diff);
/* 表面条件  */
FS1:z-\eta=0;
diff(FS1,t,1);
subst(['diff(x,t,1)=diff(\Phi,x,1),
 'diff(y,t,1)=diff(\Phi,y,1),'diff(z,t,1)
  =diff(\Phi,z,1)],%);
subst([PH0],%);
FS2:expand(ev(%,diff));
remove (x, dependency);
remove (y, dependency);
remove (z, dependency);
/* Bernoulli の定理  */
BE1:p/\rho+diff(\Phi,t,1)+g*z
 +(diff(\Phi,x,1)^2+diff(\Phi,y,1)^2
 +diff(\Phi,z,1)^2)/2=F(t);
```

```
subst([p=p[0],F(t)=p[0]/\rho+U^2/2,g*z
 =g*\eta],%);
subst([PH0],%);
ev(%,diff);
BE2:expand(solve(%,\eta)[1]);
FS3:rest(lhs(FS2),-2)=rhs(FS2);
BE3:lhs(BE2)=first(rhs(BE2));
diff(BE3,x,1);
FS4:subst([%],FS3);
```

一様流速：U がある速度ポテンシャル：Φ は、次式で表現できる。

$$\Phi = x\,U + \phi \tag{9.1.8}$$

非圧縮性流体で、速度ポテンシャル：Φ とすると、質量保存の方程式は、(9.1.1) 式から次式となる。

$$\frac{d^2}{d\,z^2}\,\Phi + \frac{d^2}{d\,y^2}\,\Phi + \frac{d^2}{d\,x^2}\,\Phi = 0$$

上式に (9.1.8) 式を代入すると新たな質量保存の方程式は次式となる。

$$\frac{d^2}{d\,z^2}\,\phi + \frac{d^2}{d\,y^2}\,\phi + \frac{d^2}{d\,x^2}\,\phi = 0 \tag{9.1.9}$$

変形する水面を下記で表す。

$$F(x, y, z) = z - \eta = 0$$

運動学的条件として、上式の実質微分をとり、ここで η が x, y の関数であるから、

$$\frac{d}{d\,t}\,z - \left(\frac{d}{d\,y}\,\eta\right)\left(\frac{d}{d\,t}\,y\right) - \left(\frac{d}{d\,x}\,\eta\right)\left(\frac{d}{d\,t}\,x\right) = 0 \tag{9.1.10}$$

x 軸方向の流速：$\frac{d}{d\,t}\,x = u = \frac{d}{d\,x}\,\Phi$、$y$ 軸方向の流速：$\frac{d}{d\,t}\,y = v = \frac{d}{d\,y}\,\Phi$、$z$ 軸方向の流速：$\frac{d}{d\,t}\,z = w = \frac{d}{d\,z}\,\Phi$ であるから、

$$\frac{d}{d\,z}\,\Phi - \left(\frac{d}{d\,y}\,\eta\right)\left(\frac{d}{d\,y}\,\Phi\right) - \left(\frac{d}{d\,x}\,\eta\right)\left(\frac{d}{d\,x}\,\Phi\right) = 0$$

上式に (9.1.8) 式を代入すると自由表面の運動学的条件は下記となる。

$$\begin{aligned}&-\left(\frac{d}{d\,x}\,\eta\right)U + \frac{d}{d\,z}\,\phi - \left(\frac{d}{d\,y}\,\eta\right)\left(\frac{d}{d\,y}\,\phi\right)\\&-\left(\frac{d}{d\,x}\,\eta\right)\left(\frac{d}{d\,x}\,\phi\right) = 0\end{aligned} \tag{9.1.11}$$

Bernoulli の定理の速度ポテンシャル表記は、(2.9.6) 式、34 頁から次式となる。

$$g\,z + \frac{p}{\rho} + \frac{\left(\frac{d}{d\,z}\,\Phi\right)^2 + \left(\frac{d}{d\,y}\,\Phi\right)^2 + \left(\frac{d}{d\,x}\,\Phi\right)^2}{2} + \frac{d}{d\,t}\,\Phi = \mathrm{F}\,(t)$$

表面圧力：p は変化しないので、$p = p_0$ とし、$z = \eta$、一様流速：U があるとして、

$$\frac{p_0}{\rho} + \frac{\left(\frac{d}{d\,z}\,\Phi\right)^2 + \left(\frac{d}{d\,y}\,\Phi\right)^2 + \left(\frac{d}{d\,x}\,\Phi\right)^2}{2} + \frac{d}{d\,t}\,\Phi + \eta\,g = \frac{U^2}{2} + \frac{p_0}{\rho}$$

上式に (9.1.8) 式を代入すると

$$\frac{\left(U + \frac{d}{d\,x}\,\phi\right)^2 + \left(\frac{d}{d\,z}\,\phi\right)^2 + \left(\frac{d}{d\,y}\,\phi\right)^2}{2} + \frac{p_0}{\rho} + \eta\,g = \frac{U^2}{2} + \frac{p_0}{\rho}$$

波高：η を求めると、

$$\eta = -\frac{\left(\frac{d}{d\,x}\,\phi\right)U}{g} - \frac{\left(\frac{d}{d\,z}\,\phi\right)^2}{2\,g} - \frac{\left(\frac{d}{d\,y}\,\phi\right)^2}{2\,g} - \frac{\left(\frac{d}{d\,x}\,\phi\right)^2}{2\,g} \tag{9.1.12}$$

いま、波高が十分小さいとすると、(9.1.11) 式の水面の運動学的条件の高次の微小項を省き、

$$\frac{d}{d\,z}\,\phi - \left(\frac{d}{d\,x}\,\eta\right)U = 0 \tag{9.1.13}$$

また、(9.1.12) 式の Bernoulli の定理の高次の微小項を省き、

$$\eta = -\frac{\left(\frac{d}{d\,x}\,\phi\right)U}{g} \tag{9.1.14}$$

上式を x で微分し、

$$\frac{d}{d\,x}\,\eta = -\frac{\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,\phi\right)U}{g}$$

(9.1.13) 式に代入すると、微小振幅の自由表面条件は次式となる。

$$\frac{\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,\phi\right)U^2}{g} + \frac{d}{d\,z}\,\phi = 0 \tag{9.1.15}$$

9.2　二次元微小振幅進行波

液面に出来る、一方向に伝わっていく波の運動で波高が小さい場合について調べる。

9.2.1　微小振幅波の速度ポテンシャル

波のない平衡状態での水面を x 軸とし、鉛直上方に y 軸をとる。水底の深さを h、水面の高さ：η、時間:t、x 軸方向の流速:u、y 軸方向の流速:v、圧力：p、波の振動円周波数：ω、波長:L、波高の片振幅:A、密度：ρ、重力加速度：g とする。

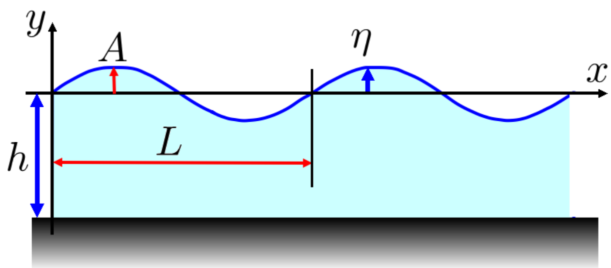


図 9.2.1: 二次元波座標系

```
/* 微小振幅進行波 No.2  */
kill(all);
load("vect")$
depends(\Phi,[x,y,z,t]);
depends(\eta,[x,t]);
depends(\phi,[y]);
depends(p,[x,y,t]);
depends(u,[x,y,t]);
depends(a,[x]);
depends(b,[y]);
depends(c,[t]);
assume(k>0);
assume(t>0);
assume(L>0);
assume(\omega>0);
assume(A>0);
assume(g>0);
assume(h>0);
/* 境界条件  */
PH1:diff(\Phi,x,2)+diff(\Phi,y,2)=0;
PH3:'diff(\Phi,y,1)+'diff(\Phi,t,2)/g=0;
Y1:\eta=-'diff(\Phi,t,1)/g;
PHT2:\Phi=a*b*c;
```

```
/* 質量保存  */
subst([PHT2],PH1);
ev(%,diff);
PH11:expand(%/a/b/c);
PH12:first(lhs(PH11))=k^2;
PH13:-last(lhs(PH11))=k^2;
PHA1:ode2(PH13,a,x);
PHB1:ode2(PH12,b,y);
```

速度ポテンシャル：Φ とすると、二次元の質量保存の方程式は、(9.1.1) 式から次式となる。

$$\frac{d^2}{d\,y^2}\,\Phi+\frac{d^2}{d\,x^2}\,\Phi=0 \tag{9.2.1}$$

(9.1.6) 式から波高：η は、

$$\eta=-\frac{\frac{d}{d\,t}\,\Phi}{g} \tag{9.2.2}$$

(9.1.7) 式から、自由表面条件は、

$$\frac{d}{d\,y}\,\Phi+\frac{\frac{d^2}{d\,t^2}\,\Phi}{g}=0 \tag{9.2.3}$$

いま、速度ポテンシャルとして、変数分離法で次式を考える。ここで、a,b,c は $a=a(x),b=b(y),c=c(t)$ の関数とする。

$$\Phi=a\,b\,c \tag{9.2.4}$$

(a) 質量保存の方程式

上式を質量保存の方程式：(9.2.1) 式に代入し、

$$\frac{\frac{d^2}{d\,y^2}\,b}{b}+\frac{\frac{d^2}{d\,x^2}\,a}{a}=0$$

整理して、右辺を k^2 と置くと、

$$\frac{\frac{d^2}{d\,y^2}\,b}{b}=k^2,\quad -\frac{\frac{d^2}{d\,x^2}\,a}{a}=k^2$$

上式をそれぞれ ode2 関数で解くと、

$$a=\%k1\sin\left(k\,x\right)+\%k2\cos\left(k\,x\right) \tag{9.2.5}$$

$$b=\%k1\,e^{k\,y}+\%k2\,e^{-k\,y} \tag{9.2.6}$$

(9.2.5) 式、(9.2.6) 式を (9.2.4) 式に代入すると、

$$\begin{aligned}\Phi=&c\,\left(\%k1\sin\left(k\,x\right)+\%k2\cos\left(k\,x\right)\right)\\&\times\,\left(\%k1\,e^{k\,y}+\%k2\,e^{-k\,y}\right)\end{aligned} \tag{9.2.7}$$

(b) 底の条件

```
/* 底の条件 */
PHT3:subst([PHA1,PHB1],PHT2);
diff(PHT3,y,1);
subst([y=-h],rhs(%))=0;
C0:expand((%k1*k*%e^(-h*k)
 -%k2*k*%e^(h*k))/k)=0;
C1:C=first(lhs(C0));
C2:C=-last(lhs(C0));
C11:solve(C1,%k1)[1];
C21:solve(C2,%k2)[1];
subst([C11,C21],PHB1);
B4:b=C*cosh(k*(y+h));
PHT4:subst([B4,PHA1],PHT2);
```

底の条件として、底面：$y=-h$ で、y 軸方向の流速：v は、零であるから、

$$v=\frac{d}{d\,y}\,\Phi=c\,\left(\%k1\,k\,e^{-h\,k}-\%k2\,k\,e^{h\,k}\right)\\ \times\ (\%k1\sin(k\,x)+\%k2\cos(k\,x))=0$$

以上から、

$$\%k1\,e^{-h\,k}-\%k2\,e^{h\,k}=0$$

上式を解いて、

$$\%k1=e^{h\,k}\,C\quad \%k2=e^{-h\,k}\,C$$

上式を (9.2.6) 式に代入し、

$$b=\cosh\left(k\,\left(y+h\right)\right)\,C$$

上式および (9.2.5) 式を (9.2.4) 式に代入すると、速度ポテンシャル：Φ は、

$$\Phi=c\,\left(\%k1\sin(k\,x)+\%k2\cos(k\,x)\right)\\ \times\ \cosh\left(k\,\left(y+h\right)\right)\,C \tag{9.2.8}$$

ここで、

$$k=\frac{2\,\pi}{L} \tag{9.2.9}$$

(c) 自由表面条件

```
/* 自由表面条件 */
subst([PHT4],PH3);
ev(%,diff);
subst([y=0],%);
C4:solve(%,c)[1];
OM2:\omega^2=g*k*sinh(h*k)/cosh(h*k);
solve(%,g)[1];
subst([%],C4);
ode2(%,c,t);
```

```
subst([%k1=%c1,%k2=%c2],%);
PHT41:subst([%],PHT4);
```

(9.2.8) 式を自由表面条件：(9.2.3) 式に代入し、$y=0$ とし、整理すると、

$$c=-\frac{\left(\frac{d^2}{d\,t^2}\,c\right)\,\cosh\left(h\,k\right)}{g\,k\sinh\left(h\,k\right)}$$

いま、下記とすると、

$$\omega^2=\frac{g\,k\sinh\left(h\,k\right)}{\cosh\left(h\,k\right)}=g\,k\tanh\left(h\,k\right) \tag{9.2.10}$$

上式から、

$$c=-\frac{\frac{d^2}{d\,t^2}\,c}{\omega^2}$$

上式を ode2 関数で解くと、

$$c=\%c1\sin\left(\omega\,t\right)+\%c2\cos\left(\omega\,t\right)$$

上式を (9.2.8) 式に代入すると、速度ポテンシャル：Φ の一般解は、

$$\Phi=(\%c1\sin(\omega\,t)+\%c2\cos(\omega\,t))\\ \times\ (\%k1\sin(k\,x)+\%k2\cos(k\,x))\\ \times\ \cosh\left(k\,\left(y+h\right)\right)\,C \tag{9.2.11}$$

(d) 波振幅：A の導入

```
/* 波振幅：A の導入 */
subst([PHT41],Y1);
ev(%,diff);
Y5:factor(subst([y=0],%));
A5:A=cosh(h*k)*\omega*C/g;
A51:solve(%,C)[1];
Y51:subst([%],Y5);
PHT42:subst([A51],PHT41);
limit(%,h,inf);
ev(%,limit);
PHT43:ev(%,limit);
OM21:limit(OM2,h,inf);
K1:k*L=2*%pi;
K2:solve(%,k)[1];
/* 進行波 */
trigreduce(PHT42);
\Phi=-((g*cos(k*x+omega*t)*cosh(k*y+h*k)*A)
 /(2*omega)+(g*cos(k*x-omega*t)
  *cosh(k*y+h*k)*A)/(2*omega))/cosh(h*k);
expand(%);
PHT6:lhs(%)=last(rhs(%))*2;
subst([PHT6],Y1);
ev(%,diff);
```

```
Y4:factor(subst([y=0],%));
limit(PHT6,h,inf);
ev(%,limit);
PHT61:ev(%,limit);
subst([K2],Y4);
subst([L=1,\omega=1,A=1],rhs(%));
plot2d([subst([t=0],%),subst([t=0.5],%),
 subst([t=1.0],%), subst([t=1.5],%)],
  [x,0,2]);
```

上式を (9.2.2) 式に代入し、水面条件：$y=0$ を代入すると、波高：η が得られ、

$$\eta = \frac{\cosh(h\,k)\,\omega\,C}{g}\,(\%c2\sin(\omega\,t) - \%c1\cos(\omega\,t)) \times\,(\%k1\sin(k\,x) + \%k2\cos(k\,x))$$

上式で、振幅を A とすると、下記の関係となる。

$$A = \frac{\cosh(h\,k)\,\omega\,C}{g}, \quad C = \frac{g\,A}{\cosh(h\,k)\,\omega}$$

上記の関係を代入し、波高を振幅：A で表現すると、

$$\eta = (\%c2\sin(\omega\,t) - \%c1\cos(\omega\,t)) \times\,(\%k1\sin(k\,x) + \%k2\cos(k\,x))\,A \tag{9.2.12}$$

また、上記の関係を (9.2.11) 式に代入し、速度ポテンシャルを振幅：A で表現すると、

$$\Phi = \frac{g\cosh(k\,(y+h))\,A}{\cosh(h\,k)\,\omega}\,(\%c1\sin(\omega\,t) + \%c2\cos(\omega\,t)) \times\,(\%k1\sin(k\,x) + \%k2\cos(k\,x)) \tag{9.2.13}$$

水深が十分深い場合は、上式で $h\to\infty$ とすると次式となる。

$$\Phi = \frac{g\,e^{k\,y}\,A}{\omega}\,(\%c1\sin(\omega\,t) + \%c2\cos(\omega\,t)) \times\,(\%k1\sin(k\,x) + \%k2\cos(k\,x)) \tag{9.2.14}$$

このとき、(9.2.10) 式は次式となる。

$$\omega^2 = g\,k \tag{9.2.15}$$

(9.2.13) 式を変形し、

$$\Phi = -\frac{g\cos(k\,x+\omega\,t)\,\cosh(k\,y+h\,k)\,A}{2\cosh(h\,k)\,\omega} - \frac{g\cos(k\,x-\omega\,t)\,\cosh(k\,y+h\,k)\,A}{2\cosh(h\,k)\,\omega}$$

いま、$G(k\,x-\omega\,t\,)$ の関数では、dt 後に $dx=\omega/k\times dt$ ずれた位置で同じ形となり、G 関数の形が進行したようになっている。このことから、進行波の速度ポテンシャルとして、上式を変更し、次式とする。

$$\Phi = -\frac{g\cos(k\,x-\omega\,t)\,\cosh(k\,y+h\,k)\,A}{\cosh(h\,k)\,\omega} \tag{9.2.16}$$

上式を (9.2.2) 式に代入し、水面条件：$y=0$ を代入すると、波高：η が得られる。

$$\eta = \sin(k\,x-\omega\,t)\,A$$

ここで、下記の波の振動円周波数：ω と波長：L、水深:h の関係がある。

$$\omega^2 = \frac{g\,k\sinh(h\,k)}{\cosh(h\,k)} = g\,k\tanh(h\,k), \quad k = \frac{2\,\pi}{L}$$

水深が十分深い場合は、速度ポテンシャルは (9.2.16) 式を $h\to\infty$ とすると次式となる。

$$\Phi = -\frac{g\cos(k\,x-\omega\,t)\,e^{k\,y}\,A}{\omega} \tag{9.2.17}$$

このとき、

$$\omega^2 = g\,k$$

9.2.2　位相速度

波面が進行する速度：(位相速度)：V_p を求める。座標、記号は 9.2.1 節と同じである。また、プログラムは 9.2.1 節から順次、引き続いて、実行する。

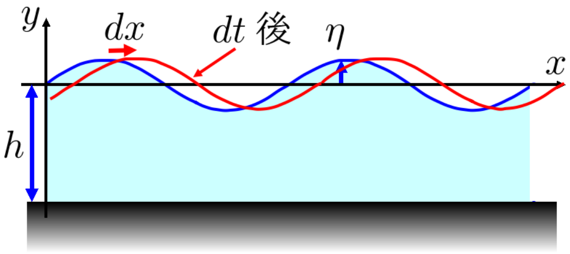


図 9.2.2: 波面の進行速度：位相速度

```
/* 位相速度  */
subst([x=x+dx,t=t+dt],Y4);
rhs(%)=rhs(Y4);
k*(x+dx)-\omega*(t+dt)=k*x-\omega*t;
solve(%,dx)[1];
%/dt;
VP1:V[p]=rhs(%);
%^2;
subst([OM2],%);
subst([sinh(h*k)=tanh(h*k)*cosh(h*k)],%);
VP2:solve(%,V[p])[2];
VP2D:V[pD]=limit(rhs(VP2),h,inf);
subst([K2],%);
V[pS]=taylor(rhs(VP2),h,0,5);
VP2S:lhs(%)=first(rhs(%));
VP2/VP2D;
VP2D1:radcan(subst([K2],%));
VP2D11:subst([L=h/a],rhs(VP2D1));
VP2/VP2S;
VP2S1:radcan(subst([K2],%));
VP2S11:radcan(subst([L=h/a],rhs(VP2S1)));
plot2d([lhs(VP2D11),VP2S11],[a,0.001,10],
 [logx],[y,0,1.0],[legend, "Deep water",
  "Shallow Water"]);
```

dt 後に波面が dx 進行した波形と、基の波形が同じであるとし、

$$\begin{aligned}\eta &= -\sin\left(k\ (x+dx)-\omega\ (t+dt)\right)\ A\\ &= -\sin\left(k\,x-\omega\,t\right)\ A\end{aligned}$$

上式を整理して、

$$dx = \frac{dt\,\omega}{k}$$

以上から、位相速度：V_p は下記となり、(9.2.10) 式から、

$$V_p = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = \frac{\sqrt{g\tanh\left(h\,k\right)}}{\sqrt{k}} \tag{9.2.18}$$

水深：h が非常に深い場合の位相速度：V_{pD} は、$h\to\infty$ とし、波長：L とすると、

$$V_{pD} = \lim_{h\to\infty}\frac{\sqrt{g\tanh\left(h\,k\right)}}{\sqrt{k}} = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{k}} = \frac{\sqrt{g}\,\sqrt{L}}{\sqrt{2}\,\sqrt{\pi}} \tag{9.2.19}$$

水深：h が非常に浅い場合は、(9.2.18) 式を h が十分小さいとして、Taylor 展開し、

$$V_p = \sqrt{g}\,\sqrt{h} - \frac{\sqrt{g}\,k^2\,h^{\frac{5}{2}}}{6} + \frac{19\,\sqrt{g}\,k^4\,h^{\frac{9}{2}}}{360} + \ldots$$

上式の第一項をとり、非常に浅い場合の位相速度：V_{pS} は、

$$V_{pS} = \sqrt{g}\,\sqrt{h} \tag{9.2.20}$$

上式の関係を図にすると下図となる。図から、$h/L > 0.5$ の時、深水とすることができ、$h/L < 0.005$ の時、浅水とすることができる。

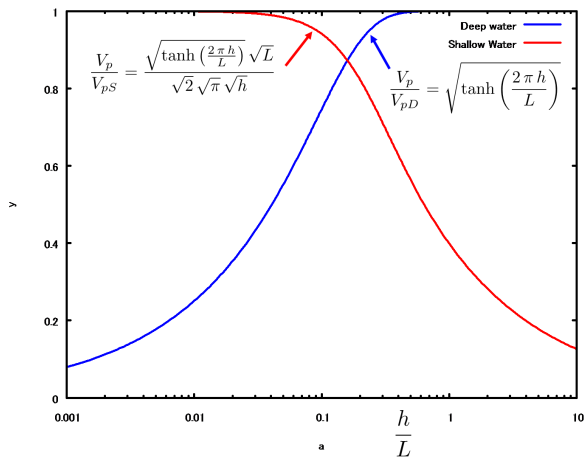


図 9.2.3: 深水、浅水時の位相速度

9.2.3　粒子運動

波による流体粒子の運動について調べる。座標、記号は 9.2.1 節と同じである。また、プログラムは 9.2.1 節から順次、引き続いて、実行する。

```
/* 粒子運動  */
U1:u=diff(\Phi,x,1);
V1:v=diff(\Phi,y,1);
subst([PHT6],U1);
U11:ev(%,diff);
subst([PHT6],V1);
V11:ev(%,diff);
XX1:X=integrate(rhs(U11),t);
YY1:Y=integrate(rhs(V11),t);
XX11:solve(XX1,cos(k*x-omega*t))[1];
YY11:solve(YY1,sin(k*x-omega*t))[1];
XX11^2+YY11^2;
trigsimp(%);
XY2:expand(%);
1=x^2/E^2+Y^2/D^2;
XY21:rhs(XY2);
E1:1/E^2=coeff(XY21,X,2);
D1:1/D^2=coeff(XY21,Y,2);
solve(E1,E)[2];
E11:subst([OM2],%);
solve(D1,D)[2];
D11:subst([OM2],%);
ED1:E11/D11;
ED12:trigrat(ED1);
E12:trigrat(E11);
E12N:expand(num(rhs(E12))/%e^(2*h*k));
E12D:expand(denom(rhs(E12))/%e^(2*h*k));
E12N1:limit(E12N,h,inf);
E12D1:limit(E12D,h,inf);
E13:E=E12N1/E12D1;
D12:trigrat(D11);
D12N:expand(num(rhs(D12))/%e^(2*h*k));
D12D:expand(denom(rhs(D12))/%e^(2*h*k));
D12N1:limit(D12N,h,inf);
D12D1:limit(D12D,h,inf);
D13:D=D12N1/D12D1;
subst([K2],ED1);
ED12:abs(rhs(subst([y=h*b,L=h/a,A=1],%)));
plot2d([1/subst([b=0],ED12),1/subst([b=
 -0.75],ED12),1/subst([b=-0.5],ED12),
  1/subst([b=-0.25],ED12)],[a,0.001,10],
  [logx],[logy],[y,0,5],[legend, "y/h=0",
  "y/h=-0.75","y/h=-0.5","y/h=-0.25"]
  ,[xlabel,"h/L"],[ylabel,"b/a"]);
```

流体の流速：u,v は、(9.2.16) 式から、

$$\begin{aligned} u =&\frac{d}{d\,x}\,\Phi = -\frac{g\,k\sin\left(k\,x-\omega\,t\right)\,\cosh\left(k\,\left(y+h\right)\right)\,A}{\cosh\left(h\,k\right)\,\omega}\\ v =&\frac{d}{d\,y}\,\Phi = \frac{g\,k\cos\left(k\,x-\omega\,t\right)\,\sinh\left(k\,\left(y+h\right)\right)\,A}{\cosh\left(h\,k\right)\,\omega} \end{aligned} \tag{9.2.21}$$

上式を時間積分し、流体粒子の運動：X,Y が得られる。

$$X = \int u dt = -\frac{g\,k\cos\left(k\,x-\omega\,t\right)\,\cosh\left(k\,\left(y+h\right)\right)\,A}{\cosh\left(h\,k\right)\,\omega^2}$$

$$Y = \int v dt = -\frac{g\,k\sin\left(k\,x-\omega\,t\right)\,\sinh\left(k\,\left(y+h\right)\right)\,A}{\cosh\left(h\,k\right)\,\omega^2}$$

上式の cos, sin 項を求め、その自乗和をとると、

$$\begin{aligned} 1 =&\sin\left(k\,x-\omega\,t\right)^2+\cos\left(k\,x-\omega\,t\right)^2\\ =&\frac{\cosh\left(h\,k\right)^2\,\omega^4\,Y^2}{g^2\,k^2\sinh\left(k\,y+h\,k\right)^2\,A^2}+\frac{\cosh\left(h\,k\right)^2\,\omega^4\,X^2}{g^2\,k^2\cosh\left(k\,y+h\,k\right)^2\,A^2} \end{aligned} \tag{9.2.22}$$

上式は下記の楕円形を表す式で、粒子運動は楕円の軌跡となる。

$$1 = \frac{Y^2}{D^2}+\frac{X^2}{E^2}$$

ここで、x 軸方向の径:E、y 軸方向の径:D は下記となる。

$$\begin{aligned} E =&\frac{g\,k\cosh\left(k\,y+h\,k\right)\,A}{\cosh\left(h\,k\right)\,\omega^2} = \frac{\cosh\left(k\,y+h\,k\right)\,A}{\sinh\left(h\,k\right)}\\ D =&\frac{g\,k\sinh\left(k\,y+h\,k\right)\,A}{\cosh\left(h\,k\right)\,\omega^2} = \frac{\sinh\left(k\,y+h\,k\right)\,A}{\sinh\left(h\,k\right)} \end{aligned} \tag{9.2.23}$$

水深：h が深い場合には、上式で $h\to\infty$ とすると、粒子運動の径は下記となり、円形の軌跡となり、水深が深くなるにつれ、小径となる。

$$E = e^{k\,y}\,A, \quad D = e^{k\,y}\,A$$

水深が浅いとき、$y\to -h,\ h\to 0$ とすると、$D\to 0$ となり、水面に平行な扁平な軌跡となる。

9.2.4　圧力変動

波による圧力変動について調べる。座標、記号は 9.2.1 節と同じである。また、プログラムは 9.2.1 節から順次、引き続いて、実行する。

```
/* 圧力変動  */
S1:'integrate((A*sin(t))^2+(B*cos(t))^2,t
 ,0,2*%pi)/(2*%pi);
S11:S1=ev(S1,integrate);
expand(%);
PH0;
U12:U11^2;
V12:V11^2;
UV12:(v^2+u^2)/2;
subst([U12,V12],UV12);
UV13:expand(subst([x=0],%));
U13:coeff(UV13,sin(\omega*t)^2);
V13:coeff(UV13,cos(\omega*t)^2);
UV2:factor((U13+V13)/2);
S2:'integrate(abs(A*sin(t)),t,0,2*%pi)
 /(2*%pi);
S21:'integrate((A*sin(t)),t,0,%pi)/(%pi)
 +'integrate((-A*sin(t)),t,%pi,2*%pi)
 /(%pi);
S22:S2=ev(S21,integrate);
PHT7:diff(PHT6,t,1);
subst([x=0],%);
PHT71:-coeff(rhs(%),sin(\omega*t))*4/%pi;
UV2/PHT71;
UV20:subst([OM2],%);
limit(UV20,h,inf);
subst([K2],%);
expand(solve(PH0,p)[1]/\rho);
PT1:expand(subst(['diff(Phi,y,1)=0,
 'diff(Phi,x,1)=0,F(t)=0],%));
DPT1:\Delta*p=last(rhs(%));
DPT2:subst([PHT7],%);
```

圧力は、(9.1.3) 式から、二次元であるから $\frac{d}{dz}=0$、自由表面では $\mathrm{F}(t)=\frac{p_0}{\rho}$ であるから、下記となる。

$$\frac{p-p_0}{\rho}=-g\,y-\frac{\left(\frac{d}{d\,y}\,\Phi\right)^2}{2}-\frac{\left(\frac{d}{d\,x}\,\Phi\right)^2}{2}-\frac{d}{d\,t}\,\Phi \quad (9.2.24)$$

上式から、$\frac{\left(\frac{d}{d\,y}\,\Phi\right)^2}{2}+\frac{\left(\frac{d}{d\,x}\,\Phi\right)^2}{2}=\frac{v^2+u^2}{2}$ と $\frac{d}{d\,t}\,\Phi$ について、評価する。u^2 と v^2 は (9.2.21) 式から下記となる。

$$u^2=\left(\frac{d}{d\,x}\,\Phi\right)^2=\frac{g^2\,k^2\sin\left(k\,x-\omega\,t\right)^2\cosh\left(k\,\left(y+h\right)\right)^2A^2}{\cosh\left(h\,k\right)^2\omega^2}$$

$$v^2=\left(\frac{d}{d\,y}\,\Phi\right)^2=\frac{g^2\,k^2\cos\left(k\,x-\omega\,t\right)^2\sinh\left(k\,\left(y+h\right)\right)^2A^2}{\cosh\left(h\,k\right)^2\omega^2}$$

$\frac{v^2+u^2}{2}$ の時間平均は、一周期分：$\frac{2\,\pi}{\omega}$ の積分から得られ、

$$\begin{aligned}
&\overline{\frac{v^2+u^2}{2}}\\
&=\frac{\omega}{2\,\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\left(\frac{g^2\,k^2\cos\left(\omega\,t\right)^2\sinh\left(k\,y+h\,k\right)^2A^2}{2\cosh\left(h\,k\right)^2\omega^2}\right.\\
&\quad\left.+\frac{g^2\,k^2\sin\left(\omega\,t\right)^2\cosh\left(k\,y+h\,k\right)^2A^2}{2\cosh\left(h\,k\right)^2\omega^2}\right)dt\\
&=\frac{g^2\,k^2\left(\sinh\left(k\,\left(y+h\right)\right)^2+\cosh\left(k\,\left(y+h\right)\right)^2\right)A^2}{4\cosh\left(h\,k\right)^2\omega^2}
\end{aligned} \quad (9.2.25)$$

$\frac{d}{d\,t}\,\Phi$ は (9.2.16) 式から下記となる。

$$\frac{d}{d\,t}\,\Phi=-\frac{g\sin\left(k\,x-\omega\,t\right)\,\cosh\left(k\,\left(y+h\right)\right)\,A}{\cosh\left(h\,k\right)}$$

$\left|\frac{d}{d\,t}\,\Phi\right|$ の時間平均は、半周期分毎に正負が変わるので、下記の半周期分毎の積分から得られ、

$$\begin{aligned}
\overline{\left|\frac{d}{d\,t}\,\Phi\right|}=&\frac{\omega}{\pi}\left(\frac{g\cosh\left(k\,y+h\,k\right)\,A}{\cosh\left(h\,k\right)}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}}\sin\left(\omega\,t\right)dt\right.\\
&\left.-\frac{g\cosh\left(k\,y+h\,k\right)\,A}{\cosh\left(h\,k\right)}\int_{\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{2\,\pi}{\omega}}\sin\left(\omega\,t\right)dt\right)\\
=&\frac{4\,g\cosh\left(k\,\left(y+h\right)\right)\,A}{\pi\cosh\left(h\,k\right)}
\end{aligned} \quad (9.2.26)$$

(9.2.25) 式と (9.2.26) 式の比をとり、

$$\frac{\overline{\frac{v^2+u^2}{2}}}{\overline{\left|\frac{d}{d\,t}\,\Phi\right|}}=\frac{\pi\,k\,\left(\sinh\left(k\,\left(y+h\right)\right)^2+\cosh\left(k\,\left(y+h\right)\right)^2\right)\,A}{16\sinh\left(h\,k\right)\,\cosh\left(k\,\left(y+h\right)\right)} \quad (9.2.27)$$

上式で、深水として、$h\to\infty$ とする。また、波高は波長より十分小さいので $A<<L$ であるから、下記となる。

$$\frac{\overline{\frac{v^2+u^2}{2}}}{\overline{\left|\frac{d}{d\,t}\,\Phi\right|}}\approx\frac{\pi\,k\,e^{k\,y}\,A}{8}=\frac{\pi^2\,A\,e^{\frac{2\,\pi\,y}{L}}}{4\,L}<<1 \quad (9.2.28)$$

以上から、$\overline{\frac{v^2+u^2}{2}}$ は無視でき、波による圧力変動：$\Delta\,p$ は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
\Delta\,p=&-\left(\frac{d}{d\,t}\,\Phi\right)\,\rho\\
=&\frac{g\,\rho\sin\left(k\,x-\omega\,t\right)\,\cosh\left(k\,\left(y+h\right)\right)\,A}{\cosh\left(h\,k\right)}
\end{aligned} \quad (9.2.29)$$

9.2.5　波のエネルギー

波のエネルギーについて調べる。座標、記号は 9.2.1 節と同じである。また、プログラムは 9.2.1 節から順次、引き続いて、実行する。

```
/* 波のエネルギー */
V1:dV=(\rho*\eta*dx)*g*\eta/2;
V11:subst([Y4,K2,t=0],%);
V='integrate(rhs(V11)/dx,x,0,L);
V2:ev(%,integrate);
T1:dT=\rho/2*(u^2+v^2)*dx*dy;
subst([U12,V12],%);
T11:subst([t=0],%);
T='integrate('integrate(rhs(T11)/dx/dy,y,
 -h,0),x,0,L);
T12:ev(%,integrate);
T13:subst([OM2,K2],%);
SNH1:sinh((2*%pi*h)/L)=(%e^((2*%pi*h)/L)
 -%e^(-(2*%pi*h)/L))/2;
CNH1:cosh((2*%pi*h)/L)=(%e^((2*%pi*h)/L)
 +%e^(-(2*%pi*h)/L))/2;
SCNH1:expand(SNH1*CNH1);
lhs(T13)=rhs(T13)*lhs(SCNH1)/rhs(SCNH1);
T2:radcan(%);
VT2:V2+T2;
```

波高：η、幅:dx の位置エネルギー：dV は下記となる。

$$dV = \frac{dx\,\eta^2\,g\,\rho}{2} = \frac{dx\,g\,\rho\,A^2\sin\left(\frac{2\,\pi\,x}{L}\right)^2}{2}$$

上式を波長分積分し、波長分の位置エネルギー：V は、

$$V = \frac{g\,\rho\,A^2}{2}\int_0^L \sin\left(\frac{2\,\pi\,x}{L}\right)^2 dx = \frac{g\,\rho\,A^2\,L}{4} \tag{9.2.30}$$

微小部分 $dxdy$ の運動エネルギー：dT は、

$$dT = \frac{dx\,dy\,\rho\,\left(v^2+u^2\right)}{2}$$

上式を波長・水深分積分し、波長分の運動エネルギー：V は、(9.2.21) 式から

$$\begin{aligned}
T =& \frac{\rho}{2}\int_0^L\int_{-h}^0 \left(v^2+u^2\right)\,dy\,dx \\
=& \frac{\rho}{2}\int_0^L\int_{-h}^0 \frac{g^2\,k^2\cos(k\,x)^2\sinh\left(k\,(y+h)\right)^2A^2}{\cosh(h\,k)^2\,\omega^2} + \frac{g^2\,k^2\sin(k\,x)^2\cosh\left(k\,(y+h)\right)^2A^2}{\cosh(h\,k)^2\,\omega^2}dydx \\
=& -\frac{\rho\,A^2\,L^2\,e^{-\frac{4\,\pi\,h}{L}}\left(\frac{2\,\pi\,g^2}{L} - \frac{2\,\pi\,g^2\,e^{\frac{8\,\pi\,h}{L}}}{L}\right)}{32\,\pi\,g\cosh\left(\frac{2\,\pi\,h}{L}\right)\,\sinh\left(\frac{2\,\pi\,h}{L}\right)} \\
=& \frac{g\,\rho\,A^2\,L}{4}
\end{aligned} \tag{9.2.31}$$

波の波長分の全エネルギーは、(9.2.30) 式と (9.2.31) 式から次式となる。

$$V+T = \frac{g\,\rho\,A^2\,L}{2} \tag{9.2.32}$$

以上から、単位幅あたりの波の全エネルギーは、

$$V+T = \frac{g\,\rho\,A^2}{2} \tag{9.2.33}$$

9.2.6　群速度

ほぼ等しい二つの波の群速度：V_g を求める。座標、記号は 9.2.1 節と同じである。また、プログラムは 9.2.1 節から順次、引き続いて、実行する。

```
/* 群速度 */
SI1:sin(t);
SI2:sin(1.1*t);
SI12:SI1+SI2;
SI3:2*sin((1+1.1)/2*t)*cos(-0.1/2*t);
plot2d([SI12,2*cos(-0.1/2*t),-2
 *cos(-0.1/2*t)],[t,0,100]);
Y51:\eta[1]=rhs(Y4);
Y52:\eta[2]=subst([k=k+dk,\omega=\omega+dw]
 ,rhs(Y4));
XT1:KXT1=k*x-\omega*t;
XT2:KXT2=(k+dk)*x-(\omega+dw)*t;
KX2:solve(XT1,k)[1];
DK2:solve(XT2,dk)[1];
Y511:factor(subst([KX2],Y51));
Y521:factor(subst([DK2],Y52));
Y511+Y521;
lhs(%)=-2*A*sin((KXT2+KXT1)/2)*cos((KXT2
 -KXT1)/2);
subst([XT1,XT2],%);
\eta[2]+\eta[1]=-2*cos((dk*x)/2-(dw*t)/2)
 *sin(k*x-\omega*t)*A;
V[g]=dw/dk;
VP1;
VP2;
VP2^2;
VP21:%/VP1;
VP22:solve(%,\omega)[1];
OM2;
OM21:lhs(OM2)=g*k*tanh(h*k);
2*\omega*'diff(\omega,k,1)=diff(rhs(OM21)
 ,k);
%/2/\omega;
V[g]=subst([VP22],rhs(%));
%*2/V[p];
expand(%);
VG1:%/2*V[p];
subst([tanh(h*k)=sinh(h*k)/cosh(h*k)],%);
subst([sech(h*k)=1/cosh(h*k)],%);
VG11:subst([sinh(h*k)=sinh(2*h*k)/2/
 cosh(h*k)],%);
limit(rhs(VG11),h,inf);
lhs(VG11)=taylor(rhs(VG11),h,0,5);
lhs(%)=first(rhs(%));
```

波の片振幅：A が等しく、波長：L、波の振動円周波数：ω が、ほぼ等しい二つの波：η_1, η_2 を合成すると、

$$\eta_1 = -\sin(k\,x - \omega\,t)\ A$$

$$\eta_2 = -\sin((k + dk)\ x - (\omega + dw)\ t)\ A$$

これらを合成すると、

$$\eta_2 + \eta_1 = -2\cos\left(\frac{dk\,x}{2} - \frac{dw\,t}{2}\right)\ \sin(k\,x - \omega\,t)\ A$$

この波は、下図の元の波と緩やかに振動する波となる。元の波の位相速度：V_p は (9.2.18) 式から、

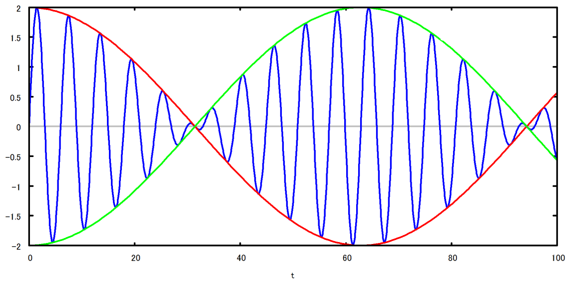


図 9.2.4: ほぼ等しい二つの波の合成

$$V_p = \frac{\omega}{k} = \frac{\sqrt{g\tanh(h\,k)}}{\sqrt{k}} \tag{9.2.34}$$

同様に、緩やかな波の位相速度、群速度：V_g は、

$$V_g = \frac{dw}{dk} \tag{9.2.35}$$

(9.2.34) 式と (9.2.10) 式から、

$$V_p^2 = \frac{g\tanh(h\,k)}{k}, \quad \omega^2 = g\,k\tanh(h\,k) \tag{9.2.36}$$

上式から、下記の関係を得る。

$$V_p = \frac{g\tanh(h\,k)}{\omega} \quad \text{or} \quad \omega = \frac{g\tanh(h\,k)}{V_p} \tag{9.2.37}$$

$V_g = \frac{dw}{dk}$ は、$\omega^2 = g\,k\tanh(h\,k)$ を k で微分し、

$$2\,\omega\left(\frac{d}{d\,k}\,\omega\right) = g\tanh(h\,k) + g\,h\,k\,\mathrm{sech}(h\,k)^2$$

上式から、下記となり、(9.2.37) 式を代入すると、

$$V_g = \frac{d}{d\,k}\,\omega = \frac{g\tanh(h\,k) + g\,h\,k\,\mathrm{sech}(h\,k)^2}{2\,\omega}$$
$$= \frac{\left(g\tanh(h\,k) + g\,h\,k\,\mathrm{sech}(h\,k)^2\right)\ V_p}{2\,g\tanh(h\,k)}$$

上式を整理すると、

$$V_g = \frac{\left(\frac{2\,h\,k}{\sinh(2\,h\,k)} + 1\right)\ V_p}{2} \tag{9.2.38}$$

深水の場合、$h \to \infty$ として、下記となり、群速度は位相速度の 1/2 となる。

$$V_g = \frac{V_p}{2} \tag{9.2.39}$$

水深：h が非常に浅い場合は、(9.2.38) 式を h が十分小さいとして、Taylor 展開し、

$$V_g = V_p - \frac{k^2\, V_p\, h^2}{3} + \frac{7\, k^4\, V_p\, h^4}{45} + ...$$

上式の第一項をとり、非常に浅い場合の群速度は位相速度と等しくなる。

$$V_g = V_p \tag{9.2.40}$$

9.2.7　エネルギー速度

エネルギーの伝播速度を求める。y 軸より左側におけるの流体の総エネルギー：W、ある点の圧力：p、x 軸方向の流速：u とする。座標、記号は 9.2.1 節と同じである。また、プログラムは 9.2.1 節から順次、引き続いて、実行する。

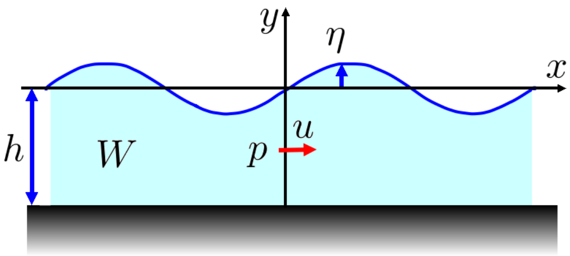


図 9.2.5: エネルギーの伝播速度

```
/* エネルギー速度 */
W1:'diff(W,t,1)='integrate(p*u,y,-h,0);
W11:'diff(W,t,1)='integrate(rhs(DPT2)
 *rhs(U11),y,-h,0);
subst([x=0],%);
ev(%,integrate);
lhs(%)='integrate(rhs(%),t,0,2*%pi/\omega)
 /(2*%pi/\omega);
ev(%,integrate);
subst([A^2=(V+T)*2/g/\rho],%);
W2:%/VG1/(V+T);
G1:solve(OM2,g)[1];
lhs(W2)=subst([G1],rhs(W2));
subst([VP1],%);
subst([sech(h*k)=1/(cosh(h*k)),tanh(h*k)
 =sinh(h*k)/cosh(h*k)],%);
subst([cosh(h*k)=(%e^(h*k)+%e^(-h*k))/2],
 %);
subst([sinh(h*k)=(%e^(h*k)-%e^(-h*k))/2],
 %);
factor(%);
%*V[g];
```

$p\,dy$ が dy に作用する力であり、$p\,dy\,dx$ が仕事となる。仕事率は、この仕事を時間：dt で割り、$p\,dy\,dx/dt = p\,u\,dy$ となる。これを基に、y 軸より左側におけるの流体の総エネルギー：W の変化率は、[1]

$$\frac{d}{d\,t}\,W = \int_{-h}^{0} p\,u\,dy \qquad (9.2.41)$$

[1]L. M. Milne-Thomson : Theretical Hydrodynamics, Fourth Edition [15), P.399 14-24 Wave resistance

圧力として $\rho\,g\,y$ の項は寄与しないので省き、$x = 0$ の位置において、p として (9.2.29) 式、u として (9.2.21) 式を代入すると、

$$\frac{d}{d\,t}\,W = \frac{g^2\,k\,\rho\sin\left(\omega\,t\right)^2\,\int_{-h}^{0}\cosh\left(k\,\left(y+h\right)\right)^2 dy\,A^2}{\cosh\left(h\,k\right)^2\,\omega}$$

積分を実行し、

$$\frac{d}{d\,t}\,W = \frac{g^2\,k\,\left(\frac{e^{-2\,h\,k}\,\left(e^{4\,h\,k}-1\right)}{8\,k}+\frac{h}{2}\right)\,\rho\sin\left(\omega\,t\right)^2\,A^2}{\cosh\left(h\,k\right)^2\,\omega}$$

上式の時間平均は、一周期分：$\frac{2\,\pi}{\omega}$ の積分で得られ、

$$\begin{aligned}\overline{\frac{d}{d\,t}\,W} &= \frac{g^2\,k\,\left(\frac{e^{-2\,h\,k}\,\left(e^{4\,h\,k}-1\right)}{8\,k}+\frac{h}{2}\right)\,\rho A^2}{2\,\pi\cosh\left(h\,k\right)^2} \\ &\quad\times\int_{0}^{\frac{2\,\pi}{\omega}}\sin\left(\omega\,t\right)^2 dt \\ &= \frac{g^2\,k\,\left(\frac{e^{-2\,h\,k}\,\left(e^{4\,h\,k}-1\right)}{8\,k}+\frac{h}{2}\right)\,\rho\,A^2}{2\cosh\left(h\,k\right)^2\,\omega}\end{aligned}$$

波の平均エネルギー：$V+T$ は (9.2.33) 式で得られ、その A^2 を代入すると、

$$\overline{\frac{d}{d\,t}\,W} = \frac{g\,k\,\left(\frac{e^{-2\,h\,k}\,\left(e^{4\,h\,k}-1\right)}{8\,k}+\frac{h}{2}\right)\,\left(V+T\right)}{\cosh\left(h\,k\right)^2\,\omega}$$

群速度と位相速度の関係式:(9.2.38) 式で両辺を割ると、

$$\frac{\overline{\frac{d}{d\,t}\,W}}{V_g\,\left(V+T\right)} = \frac{2\,g\,k\,\left(\frac{e^{-2\,h\,k}\,\left(e^{4\,h\,k}-1\right)}{8\,k}+\frac{h}{2}\right)}{\cosh\left(h\,k\right)^2\,\left(\frac{h\,k\,\mathrm{sech}(h\,k)^2}{\tanh(h\,k)}+1\right)\,\omega\,V_p}$$

(9.2.10) 式を使って g を消去し、(9.2.18) 式を使って V_p を消去し、

$$\frac{\overline{\frac{d}{d\,t}\,W}}{V_g\,\left(V+T\right)} = \frac{2\,k\,\left(\frac{e^{-2\,h\,k}\,\left(e^{4\,h\,k}-1\right)}{8\,k}+\frac{h}{2}\right)}{\cosh\left(h\,k\right)\,\sinh\left(h\,k\right)\,\left(\frac{h\,k\,\mathrm{sech}(h\,k)^2}{\tanh(h\,k)}+1\right)}$$

上式を整理すると、

$$\frac{\overline{\frac{d}{d\,t}\,W}}{V_g\,\left(V+T\right)} = 1$$

上式から、次式を得る。次式から、エネルギーの平均伝播速度は群速度：V_g に等しい。

$$\frac{\overline{\frac{d}{d\,t}\,W}}{V+T} = V_g \qquad (9.2.42)$$

(9.2.41) 式の基礎式を別の観点から求める [2]。流体要素：$\Delta \mathcal{V}$ の総エネルギー：ΔW は、流速:V とすると、

$$\Delta W = \left(\frac{1}{2}\,V^2 + g\,y\right)\,\rho\,\Delta\,\mathcal{V}$$

y 軸の $\mathcal{V}$ 領域内の流体の総エネルギー：W は下記となる。

$$W = \iiint_{\mathcal{V}} \rho\,\left(\frac{1}{2}\,V^2 + g\,y\right)\,d\mathcal{V}$$

「A.4 Transport Theorem （655 頁）」の (A.4.1) 式から、

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\,t}\,W =& \frac{d}{d\,t}\,\iiint_{\mathcal{V}} \rho\,\left(\frac{1}{2}\,V^2 + g\,y\right)\,d\mathcal{V}\\ =& \iiint_{\mathcal{V}} \rho\,\frac{d}{d\,t}\,\left(\frac{1}{2}\,V^2 + g\,y\right)\,d\mathcal{V}\\ &+ \iint_{\mathcal{S}} \rho\,\left(\frac{1}{2}\,V^2 + g\,y\right)\,U_n\,d\mathcal{S}\end{aligned} \tag{9.2.43}$$

```
/* エネルギー速度 Newman */
grad(\Phi);
express(%);
ev(%,diff);
GRP1:transpose(%);
%.%/2;
GRP2:expand(diff(%,t,1));
diff(\Phi,t,1)*GRP1;
transpose(%);
div(%[1]);
express(%);
GRP3:ev(%,diff);
GRP4:\diff(\Phi,t,1)*(\diff(\Phi,x,2)
 +\diff(\Phi,y,2)+\diff(\Phi,z,2));
expand(GRP3-GRP4);
GRP2-%;
PHT6;
DPT1:diff(PHT6,t,1);
DPX1:diff(PHT6,x,1);
\rho*DPT1*DPX1;
lhs(%)=subst([x=0],rhs(%));
'integrate(-rhs(%),y,-h,0);
ev(%,integrate);
subst([A^2=(E)*2/g/\rho],%);
%/rhs(VG1);
subst([VP1],%);
subst([G1],%);
subst([sin(\omega*t)^2=1/2],%);
subst([sech(h*k)=1/(cosh(h*k)),tanh(h*k)
 =sinh(h*k)/cosh(h*k)],%);
subst([cosh(h*k)=(%e^(h*k)+%e^(-h*k))/2],
 %);
subst([sinh(h*k)=(%e^(h*k)-%e^(-h*k))/2],
 %);
factor(%);
```

(9.2.43) 式の $\frac{d}{d\,t}\,\left(\frac{1}{2}\,V^2\right)$ の項について、流速：V は、

$$V = \nabla\,\Phi = \mathrm{grad}\,(\Phi) = \begin{pmatrix}\frac{d}{d\,x}\,\Phi\\ \frac{d}{d\,y}\,\Phi\\ \frac{d}{d\,z}\,\Phi\end{pmatrix}$$

上記から、

$$\frac{1}{2}\,V^2 = \frac{1}{2}\,\nabla\,\Phi\cdot\nabla\,\Phi = \frac{\left(\frac{d}{d\,z}\,\Phi\right)^2 + \left(\frac{d}{d\,y}\,\Phi\right)^2 + \left(\frac{d}{d\,x}\,\Phi\right)^2}{2}$$

上式を時間：t で微分して、

$$\frac{d}{d\,t}\,\left(\frac{1}{2}\,V^2\right) = \left(\frac{d^2}{d\,t\,d\,z}\,\Phi\right)\,\left(\frac{d}{d\,z}\,\Phi\right) + \left(\frac{d^2}{d\,t\,d\,y}\,\Phi\right)\,\left(\frac{d}{d\,y}\,\Phi\right) + \left(\frac{d^2}{d\,t\,d\,x}\,\Phi\right)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\Phi\right) \tag{9.2.44}$$

また、

$$\frac{d}{d\,t}\,\Phi\,\nabla\,\Phi = \begin{pmatrix}\left(\frac{d}{d\,t}\,\Phi\right)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\Phi\right)\\ \left(\frac{d}{d\,t}\,\Phi\right)\,\left(\frac{d}{d\,y}\,\Phi\right)\\ \left(\frac{d}{d\,t}\,\Phi\right)\,\left(\frac{d}{d\,z}\,\Phi\right)\end{pmatrix}$$

[2] J. N. Newman, Marine Hydrodynamics [21)], P.260 6.8 Wave Energy

上式の divergence をとり、

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot \left(\frac{d}{d\,t}\,\Phi\,\nabla\,\Phi \right) =& \mathrm{div} \begin{pmatrix} \left(\frac{d}{d\,t}\,\Phi\right)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\Phi\right) \\ \left(\frac{d}{d\,t}\,\Phi\right)\,\left(\frac{d}{d\,y}\,\Phi\right) \\ \left(\frac{d}{d\,t}\,\Phi\right)\,\left(\frac{d}{d\,z}\,\Phi\right) \end{pmatrix} \\
=& \frac{d}{d\,z}\,\left(\left(\frac{d}{d\,t}\,\Phi \right)\,\left(\frac{d}{d\,z}\,\Phi \right) \right) + \frac{d}{d\,y}\,\left(\left(\frac{d}{d\,t}\,\Phi \right)\,\left(\frac{d}{d\,y}\,\Phi \right) \right) + \frac{d}{d\,x}\,\left(\left(\frac{d}{d\,t}\,\Phi \right)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\Phi \right) \right) \\
=& \left(\frac{d}{d\,t}\,\Phi \right)\,\left(\frac{d^2}{d\,z^2}\,\Phi \right) + \left(\frac{d^2}{d\,t\,d\,z}\,\Phi \right)\,\left(\frac{d}{d\,z}\,\Phi \right) + \left(\frac{d}{d\,t}\,\Phi \right)\,\left(\frac{d^2}{d\,y^2}\,\Phi \right) + \left(\frac{d^2}{d\,t\,d\,y}\,\Phi \right)\,\left(\frac{d}{d\,y}\,\Phi \right) \\
&+ \left(\frac{d}{d\,t}\,\Phi \right)\,\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,\Phi \right) + \left(\frac{d^2}{d\,t\,d\,x}\,\Phi \right)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\Phi \right)
\end{aligned}
\tag{9.2.45}
$$

(9.2.44) 式と (9.2.45) 式を比較し、下記の項を (9.2.45) 式から引けば、(9.2.44) 式と同じになる。

$$
\left(\frac{d}{d\,t}\,\Phi \right)\,\nabla^2\,\Phi = \left(\frac{d}{d\,t}\,\Phi \right)\,\left(\frac{d^2}{d\,z^2}\,\Phi + \frac{d^2}{d\,y^2}\,\Phi + \frac{d^2}{d\,x^2}\,\Phi \right)
$$

以上から、

$$
\frac{d}{d\,t}\,\left(\frac{1}{2}\,V^2 \right) = \frac{d}{d\,t}\,\left(\frac{1}{2}\,\nabla\,\Phi \cdot \nabla\,\Phi \right) = \nabla \cdot \left(\frac{d}{d\,t}\,\Phi\,\nabla\,\Phi \right) - \left(\frac{d}{d\,t}\,\Phi \right)\,\nabla^2\,\Phi
$$

質量保存の方程式：(9.1.1) 式から、$\nabla^2\,\Phi = 0$ であるから、上式は、

$$
\frac{d}{d\,t}\,\left(\frac{1}{2}\,V^2 \right) = \frac{d}{d\,t}\,\left(\frac{1}{2}\,\nabla\,\Phi \cdot \nabla\,\Phi \right) = \nabla \cdot \left(\frac{d}{d\,t}\,\Phi\,\nabla\,\Phi \right)
$$

(9.2.43) 式の右辺第一項について、$\rho\,\frac{d}{d\,t}\,(g\,y) \to 0$ であり、更に上式の結果を代入し、

$$
\iiint_{\mathcal{V}} \rho\,\frac{d}{d\,t}\,\left(\frac{1}{2}\,V^2 \right)\,d\mathcal{V} = \iiint_{\mathcal{V}} \rho\,\nabla \cdot \left(\frac{d}{d\,t}\,\Phi\,\nabla\,\Phi \right)\,d\mathcal{V}
$$

「A.2　Gauss の定理（653 頁）」の (A.2.2) 式から、

$$
\iiint_{\mathcal{V}} \rho\,\nabla \cdot \left(\frac{d}{d\,t}\,\Phi\,\nabla\,\Phi \right)\,d\mathcal{V} = \iiint_{\mathcal{V}} \rho\,div\left(\frac{d}{d\,t}\,\Phi\,\nabla\,\Phi \right)\,d\mathcal{V} = \iint_{\mathcal{S}} \rho\,\left(\frac{d}{d\,t}\,\Phi\,\frac{d}{d\,n}\,\Phi \right)\,d\mathcal{S}
$$

上式を (9.2.43) 式に代入し、

$$
\frac{d}{d\,t}\,W = \frac{d}{d\,t}\,\iiint_{\mathcal{V}} \rho\,\left(\frac{1}{2}\,V^2 + g\,y \right)\,d\mathcal{V} = \iint_{\mathcal{S}} \rho\,\left(\frac{d}{d\,t}\,\Phi\,\frac{d}{d\,n}\,\Phi \right)\,d\mathcal{S} + \iint_{\mathcal{S}} \rho\,\left(\frac{1}{2}\,V^2 + g\,y \right)\,U_n\,d\mathcal{S} \tag{9.2.46}
$$

上式を二次元問題に適用し、一波長の流体境界の線積分の時間平均をとると、$\mathcal{V}$ 領域の左から入り右に出ていくエネルギーは等しいから、流体の総エネルギー：W の変化は、$\overline{\frac{d}{d\,t}\,W} = 0$ となる。また、左右の線積分は等しくなり、

$$
\overline{\frac{d}{d\,t}\,W} = 2\,\overline{\int_{-h}^{0} \rho\,\left(\frac{d}{d\,t}\,\Phi\,\frac{d}{d\,n}\,\Phi \right)\,dy} + 2\,\overline{\int_{-h}^{0} \rho\,\left(\frac{1}{2}\,V^2 + g\,y \right)\,U_n\,dy} = 0
$$

上式の右辺第二項は (9.2.33) 式から、$2 \times \frac{g\,\rho\,A^2}{2} \times U_n$ であるから、エネルギーの平均伝播速度：U_n は、

$$
U_n = \frac{\overline{-\int_{-h}^{0} \rho\,\left(\frac{d}{d\,t}\,\Phi\,\frac{d}{d\,n}\,\Phi \right)\,dy}}{\frac{g\,\rho\,A^2}{2}} \tag{9.2.47}
$$

上式は、(9.2.41) 式と (9.2.43) 式の結果と同じであり、(9.2.42) 式と同じ結論が得られる。

9.2.8　表面張力

表面張力が波面に与える影響について調べる。座標、記号は 9.2.1 節と同じである。また、プログラムは 9.2.1 節から順次、引き続いて実行する。水面の高さ:h、水面の曲率半径:R、表面張力による圧力増加：Δp_T、表面張力の係数：T(水の場合：$T = 72.75mN/m$) とする。

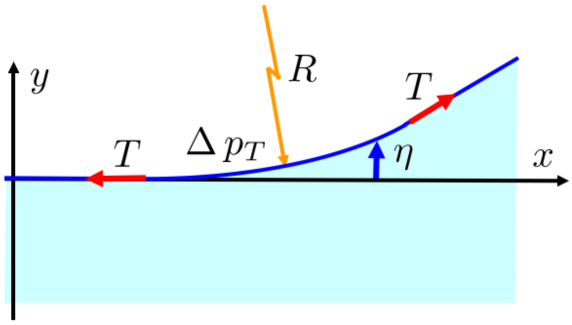


図 9.2.6: 表面張力

```
/* 表面張力 */
'diff(\Phi,y,1)-'diff(\eta,t,1)=0;
Y21:solve(%,'diff(\eta,t,1))[1];
DP2:\Delta*p[T]=-T*diff(\eta,x,2);
PH21:lhs(BE1)+\Delta*p[T]/\rho=rhs(BE1);
subst(['diff(Phi,z,1)=0,z=y],%);
subst(['diff(Phi,x,1)=0,'diff(Phi,y,1)=0]
 ,%);
lhs(%)-p/\rho=rhs(%)-F(t);
solve(%,y)[1];
expand(subst([y=\eta,DP2],%));
diff(%,t,1);
subst([Y21],%);
PH22:subst([diff(Y21,x,2)],%);
subst([PHT42],PH22);
ev(%,diff);
subst([y=0],%);
solve(%,\omega^2)[1];
%/k^2;
subst([sinh(k*h)=tanh(k*h)*cosh(k*h)],%);
factor(%);
VPT1:V[p]=sqrt(rhs(%));
VPT1D:lhs(%)=limit(rhs(%),h,inf);
VPT1D2:subst([K2],%);
VP2D1:subst([L=a,T=0,g=9.8,\rho=102],
 rhs(VPT1D2));
VPT1D21:subst([L=a,T=72.75/1000*0.102,
 g=9.8,\rho=102],rhs(VPT1D2));
diff(%,a,1)=0;
```

```
float(solve(%,a)[2]);
float(subst([%],VPT1D21));
plot2d([VP2D1,VPT1D21],[a,0.0001,0.2],
 [y,0,0.6],[xlabel,"L"],[ylabel,"Vp"],
  [legend ,"without Surface tension effect"
  ,  "with Surface tension effect"]);
```

「2.1.3　表面張力（16 頁）」の (2.1.7) 式から表面張力による圧力増加：Δp_T は、

$$\Delta p = \frac{T}{R}$$

(2.1.8) 式から

$$\frac{1}{R} = \frac{\frac{d^2}{d\,x^2}\,\eta\,(x)}{\left(\left(\frac{d}{d\,x}\,\eta\,(x)\right)^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}$$

以上から、波面の表面張力による圧力増加は、波面の変化が小さいとして、

$$\Delta\,p_T = -\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,\eta\right)\,T \tag{9.2.48}$$

Bernoulli の定理の速度ポテンシャル表記は、(9.1.3) 式に波面の表面張力による圧力増加を考慮すると、

$$\frac{\Delta\,p_T}{\rho} + g\,y + \frac{p}{\rho} + \frac{\left(\frac{d}{d\,y}\,\Phi\right)^2 + \left(\frac{d}{d\,x}\,\Phi\right)^2}{2} + \frac{d}{d\,t}\,\Phi = \mathrm{F}\,(t)$$

自由表面上では $\mathrm{F}\,(t) = \frac{p_0}{\rho}$ とし、微小振幅の場合、「9.2.4 圧力変動」から、$\frac{\left(\frac{d}{d\,y}\,\Phi\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{d}{d\,x}\,\Phi\right)^2}{2} << \frac{d}{d\,t}\,\Phi$ となるので、

$$\frac{\Delta\,p_T}{\rho} + g\,y + \frac{d}{d\,t}\,\Phi = 0$$

上式から、y を求め、

$$y = -\frac{\Delta\,p_T + \left(\frac{d}{d\,t}\,\Phi\right)\,\rho}{g\,\rho}$$

$y \to \eta$ に置き換え、(9.2.48) 式を代入し、

$$\eta = \frac{\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,\eta\right)\,T}{g\,\rho} - \frac{\frac{d}{d\,t}\,\Phi}{g}$$

時間：t で微分し、

$$\frac{d}{d\,t}\,\eta = \frac{\left(\frac{d^3}{d\,t\,d\,x^2}\,\eta\right)\,T}{g\,\rho} - \frac{\frac{d^2}{d\,t^2}\,\Phi}{g}$$

水面の運動力学的条件式：(9.1.5) 式に上式を代入し、

$$\frac{d}{d\,y}\,\Phi = \frac{\left(\frac{d^3}{d\,x^2\,d\,y}\,\Phi\right)\,T}{g\,\rho} - \frac{\frac{d^2}{d\,t^2}\,\Phi}{g} \tag{9.2.49}$$

(9.2.16) 式を上式に代入し、波の振動円周波数：ω を求めると、

$$\omega^2 = \frac{k^3 \sinh(k\,y + h\,k)\,T + g\,k\,\rho \sinh(k\,y + h\,k)}{\rho \cosh(k\,y + h\,k)}$$

上式を k^2 で割り、

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{\tanh(k\,(y+h))\left(\frac{k^2\,T}{\rho} + g\right)}{k}$$

位相速度は、(9.2.18) 式から、

$$V_p = \frac{\omega}{k}$$

以上から、表面張力のある場合の位相速度：V_p は、

$$V_p = \frac{\sqrt{\tanh(h\,k)\left(\frac{k^2\,T}{\rho} + g\right)}}{\sqrt{k}} \tag{9.2.50}$$

上式から、深水の場合：$h \to \infty$ の表面張力を考慮した位相速度は下記となる。

$$V_p = \frac{\sqrt{\frac{k^2\,T + g\,\rho}{\rho}}}{\sqrt{k}}$$

水で深水における表面張力の位相速度への影響を下図に示す。

図から、水で深水における表面張力の影響は、波長が約 20cm 以下で現れる。また、その位相速度の最下点は、波長：$L = 0.017119194589256$、約 1.7cm で位相速度：23.1cm/s である。これからより短い波長では急激に位相速度が速くなるが、現実的でなく、波長：1.7cm 以下の波は発生しない。

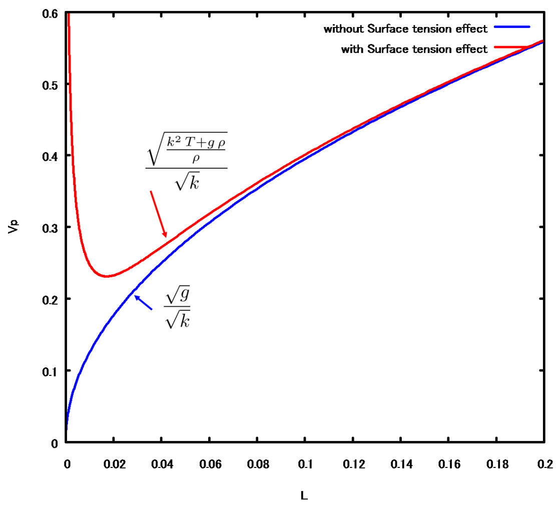


図 9.2.7: 深水における表面張力の位相速度への影響

9.3　二次元波の簡単な例

例題 9.3.1　表面攪乱による二次元波の伝搬

表面の局所的な攪乱を初期に与えたあと生じる二次元波の伝搬について調べる。波のない平衡状態での水面を x 軸とし、鉛直上方に y 軸をとる。水深は十分深いとし、波の高さ：η、時間：t、密度：ρ、重力加速度：g、振動円周波数：ω とする。

(1) 自由表面のもりあがり

初期状態で、原点に自由表面の集中的なもりあがりがある場合について調べる [1]。

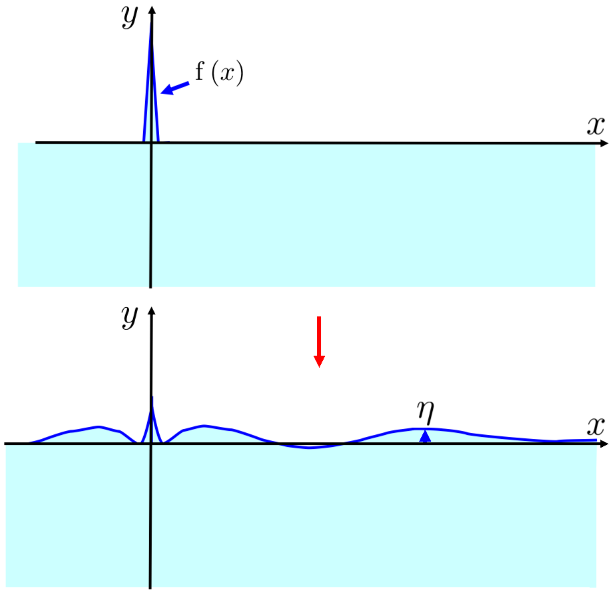


図 9.3.1: 自由表面のもりあがりによる二次元波の伝搬

```
/* 波の伝搬  */
kill(all);
load("vector");
depends(\eta,[t,x]);
depends(\Phi,[t,x,y]);
declare(f,real)
declare(s,real)
assume(g>0);
assume(k>0);
assume(x>0);
assume(\omega>0);
assume(t>0);
assume(y<0);
assume(m>0);
ET0:\eta=-diff(\Phi,t,1)/g;
```

```
PH0:\Phi=(g*(%c1*sin(\omega*t)+%c2*cos(
 \omega*t))*(%k1*sin(k*x)+%k2*cos(k*x))
 *%e^(k*y)*A)/\omega;
PH2:Phi=-(g*sin(\omega*t)*cos(k*x)
 *%e^(k*y)*A)/\omega;
OM1:\omega^2=g*k*tanh(h*k);
limit(rhs(OM1),h,inf);
OM11:sqrt(lhs(OM1)=ev(%,limit));
subst([PH2],ET0);
ev(%,diff);
ET2:subst([y=0],%);
```

二次元微小振幅進行波の速度ポテンシャル：Φ は、水深が十分深いとき、(9.2.14) 式から次式となる。

$$\Phi = \frac{g\, e^{k\,y}\, A}{\omega}\left(\%c1 \sin\left(\omega\, t\right) + \%c2 \cos\left(\omega\, t\right)\right) \times \left(\%k1 \sin\left(k\, x\right) + \%k2 \cos\left(k\, x\right)\right) \tag{9.3.1}$$

波高：η は、(9.2.2) 式から、

$$\eta = -\frac{\frac{d}{d\,t}\,\Phi}{g} \tag{9.3.2}$$

波形が y 軸対称で、初期：$t = 0$ で、有限値を持つので、速度ポテンシャル：Φ は、

$$\Phi = -\frac{g \sin\left(\omega\, t\right)\, \cos\left(k\, x\right)\, e^{k\,y}\, A}{\omega} \tag{9.3.3}$$

ここで (9.2.15) 式から

$$\omega = \sqrt{g}\,\sqrt{k} \tag{9.3.4}$$

(9.3.3) 式を (9.3.2) 式に代入し、$y = 0$ として波高を求めると、

$$\eta = \cos\left(\omega\, t\right)\, \cos\left(k\, x\right)\, A \tag{9.3.5}$$

```
/* 表面攪乱  */
FX1:f(x)=1/%pi*'integrate('integrate(f(t)
 *cos(y*(x-t)),t,minf,inf),y,0,inf);
ET3:\eta=1/%pi*integrate(integrate(cos(
 \omega(k)*t)*F(a)*cos(k*(x-a)),a,minf,inf)
 ,k,0,inf);
PH3:\Phi=-g/%pi*integrate(integrate(sin(
 \omega(k)*t)/\omega(k)*%e^(k*y)*F(a)
 *cos(k*(x-a)),a,minf,inf),k,0,inf);
PH31:\Phi=-g/%pi*'integrate(sin(
 \omega(k)*t)/\omega(k)*%e^(k*y)
 *cos(k*x),k,0,inf);
ET31:\eta=1/%pi*integrate(cos(
 \omega(k)*t)*cos(k*(x)),k,0,inf);
```

[1] Sir Horance Lamb, Hydrodynamics sixth edition [11)], P.384 238.

```
ET32:\eta=1/2/%pi*integrate(cos(
 \omega(k)*t-k*(x)),k,0,inf)+1/2/%pi
 *integrate(cos(\omega(k)*t+k*(x)),k,0,inf
 );
ET33:\eta=1/%pi*integrate(cos(
 \omega(k)*t-k*(x)),k,0,inf);
```

フーリエ積分の式は下記である。

$$\mathrm{f}(x)=\frac{\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{f}(t)\,\cos\left((x-t)\,y\right)dtdy}{\pi} \tag{9.3.6}$$

上式を活用し、初期における波高を $\mathrm{F}(x)$ とすると、波高および速度ポテンシャルは、次式となる。

$$\eta=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\cos\left(\omega(k)\;t\right)\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{F}(a)\,\cos\left(k\;(x-a)\right)dadk$$

$$\Phi=-\frac{g}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin\left(\omega(k)\;t\right)}{\omega(k)}\times\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{F}(a)\,\cos\left(k\;(x-a)\right)da\,e^{k\,y}dk$$

上式の速度ポテンシャルで、初期における波高 : $\mathrm{F}(x)$ が非常に狭い範囲に分布し、他では $\mathrm{F}(x)=0$ とし、

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{F}(a)\;da=1$$

上記の関係があるとすると、上記の速度ポテンシャルは下記となる。

$$\Phi=-\frac{g}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin\left(\omega(k)\;t\right)\,\cos\left(k\,x\right)\,e^{k\,y}}{\omega(k)}dk \tag{9.3.7}$$

上式を (9.3.2) 式に代入し、$y=0$ として波高を求めると、

$$\eta=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\cos\left(\omega(k)\;t\right)\,\cos\left(k\,x\right)dk$$

次式の変形を行い、

$$\eta=\frac{1}{2\,\pi}\int_0^{\infty}\cos\left(k\,x+\omega(k)\;t\right)dk+\frac{1}{2\,\pi}\int_0^{\infty}\cos\left(k\,x-\omega(k)\;t\right)dk$$

$x>0$ の場合を扱うとして、x 軸方向に進行する波として、波高は次式となる。

$$\eta=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\cos\left(k\,x-\omega(k)\;t\right)dk \tag{9.3.8}$$

```
/* 積分法  */
DIF0:s(k)*%e^(%i*f(k));
SF0:'integrate(DIF0,k,minf,inf);
SF2:SF0=%e^('%i*(f(d)+%pi/4))*s(d)
 *sqrt(%pi)/sqrt(abs('diff(f(d),xi,2))/2);
DXT1:\delta='diff(f(d),k,3)/
 sqrt(abs('diff(f(d),k,2))^3);
```

(9.3.8) 式の積分式は、多くの変動を有する積分で、「A.8 非常に多くの正弦波を積分範囲内に有する積分法 (Kelvin の方法)」、658 頁の方法を活用する。

(A.8.6) 式から、

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\,\mathrm{f}(k)}\,\mathrm{s}(k)\,dk=\frac{\sqrt{2}\,\sqrt{\pi}\,\left(\frac{i}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\,e^{i\,\mathrm{f}(d)}\,\mathrm{s}(d)}{\sqrt{\left|\frac{d^2}{d\,\xi^2}\,\mathrm{f}(d)\right|}} \tag{9.3.9}$$

また、(A.8.7) 式から、上式は次式 : δ が小さいという条件で成り立つ。

$$\delta=\frac{\frac{d^3}{d\,k^3}\,\mathrm{f}(d)}{\left|\frac{d^2}{d\,k^2}\,\mathrm{f}(d)\right|^{\frac{3}{2}}} \tag{9.3.10}$$

```
/* 積分法の適用  */
FK:f(k)=-(k*x-\omega(k)*t);
DFK1:diff(FK,k,1);
DFK11:rhs(DFK1)=0;
subst([\omega(k)=rhs(OM11)],%);
ev(%,diff);
DFK12:solve(%,k)[1];
D1:d=rhs(%);
FKD1:subst([f(k)=f(d),\omega(k)=sqrt(g*k),
 DFK12],FK);
DFK2:diff(FK,k,2);
subst([\omega(k)=rhs(OM11)],%);
ev(%,diff);
subst([f(k)=f(d)],%);
DFK21:lhs(%)=subst([DFK12],rhs(%));
DFK22:subst([k=\xi],%);
DFK3:diff(FK,k,3);
subst([\omega(k)=rhs(OM11)],%);
ev(%,diff);
subst([f(k)=f(d)],%);
DFK31:lhs(%)=subst([DFK12],rhs(%));
subst([DFK31,DFK21],DXT1);
%^2;
solve(%,x)[1];
subst([s(k)=1,s(d)=1],SF2)/%pi;
subst([DFK22],%);
subst([minf=0],lhs(%))=rhs(%)/2;
subst([FKD1],%);
realpart(%);
ET4:subst([FK,\omega(k)=\omega],%);
\eta=lhs(ET4);
\eta=rhs(ET4);
subst([cos((g*t^2)/(4*x))=sin((g*t^2)
 /(4*x))+sqrt(2)*cos((g*t^2)/(4*x)
 +%pi/4)],%);
expand(%);
```

```
ET41:subst([g=9.8,x=a],rhs(ET4));
plot2d([subst([t=4],ET41),subst([t=2],
 ET41),
 subst([t=1],ET41),subst([t=0.5],ET41)],
 [a,0.2,4],[x,0,4],[y,-5,5],[xlabel,
  "x (m)"], [legend, "t=4sec","t=2sec",
 "t=1sec", "t=0.5sec"] );
```

(9.3.8) 式を (9.3.9) 式に適用すると、

$$\mathrm{s}(k)=1 \tag{9.3.11}$$

$$\mathrm{f}(k)=\omega(k)\,t-k\,x \tag{9.3.12}$$

(9.3.12) 式を k で微分すると、(9.3.4) 式の関係から $\omega(k)$ を得て、(A.8.2) 式の関係から、$d\xi \to dk$ とでき、(A.8.4) 式の関係式は、

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\,k}\,\mathrm{f}(k)&=\left(\frac{d}{d\,k}\,\omega(k)\right)\,t-x\\&=\left(\frac{d}{d\,k}\,\left(\sqrt{g}\,\sqrt{k}\right)\right)\,t-x=\frac{\sqrt{g}\,t}{2\,\sqrt{k}}-x=0\end{aligned}$$

上式から、d は、

$$k=d=\frac{g\,t^2}{4\,x^2} \tag{9.3.13}$$

(9.3.4) 式の関係式と上式の関係式を (9.3.12) 式に代入し、

$$\mathrm{f}(d)=\frac{g\,t^2}{4\,x} \tag{9.3.14}$$

(9.3.12) 式を k で二階微分すると、(9.3.4) 式の関係から、

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{d\,k^2}\,\mathrm{f}(k)&=\left(\frac{d^2}{d\,k^2}\,\omega(k)\right)\,t\\&=\left(\frac{d^2}{d\,k^2}\,\left(\sqrt{g}\,\sqrt{k}\right)\right)\,t=-\frac{\sqrt{g}\,t}{4\,k^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

(9.3.13) 式の関係式を上式に代入し、

$$\frac{d^2}{d\,\xi^2}\,\mathrm{f}(d)=-\frac{2\,x^3}{g\,t^2} \tag{9.3.15}$$

(A.8.7) 式の条件式について評価する。

$$\begin{aligned}\frac{d^3}{d\,k^3}\,\mathrm{f}(k)&=\left(\frac{d^3}{d\,k^3}\,\omega(k)\right)\,t\\&=\left(\frac{d^3}{d\,k^3}\,\left(\sqrt{g}\,\sqrt{k}\right)\right)\,t=\frac{3\,\sqrt{g}\,t}{8\,k^{\frac{5}{2}}}\end{aligned}$$

(9.3.13) 式の関係式を上式に代入し、

$$\frac{d^3}{d\,k^3}\,\mathrm{f}(d)=\frac{3\,\sqrt{g}\,t}{8\,k^{\frac{5}{2}}}=\frac{12\,x^5}{g^2\,t^4}$$

上式と (9.3.15) 式を (A.8.7) 式の条件式に代入すると、

$$\delta=\frac{3\,\sqrt{2}\,\sqrt{x}}{\sqrt{g}\,t}$$

この結果から、x は比較的原点に近い領域で成り立つ。(9.3.11) 式、(9.3.15) 式を (9.3.9) 式に代入し、

$$\frac{\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\,\mathrm{f}(k)}dk}{\pi}=\frac{\left(\frac{i}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\,e^{i\,\mathrm{f}(d)}\,\sqrt{g}\,t}{\sqrt{\pi}\,x^{\frac{3}{2}}}$$

左右対称であるから、積分範囲を $0\to\infty$ に変更し、積分結果を 1/2 とし、(9.3.14) 式を代入すると、

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}e^{i\,\mathrm{f}(k)}dk=\frac{\left(\frac{i}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\,\sqrt{g}\,t\,e^{\frac{i\,g\,t^2}{4\,x}}}{2\,\sqrt{\pi}\,x^{\frac{3}{2}}}$$

上式の実部をとって、伝搬する波形：(9.3.8) 式は、

$$\begin{aligned}\eta&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\cos(k\,x-\omega\,t)\,dk\\&=\frac{\sqrt{g}\,t\left(\frac{\cos\left(\frac{g\,t^2}{4\,x}\right)}{\sqrt{2}}-\frac{\sin\left(\frac{g\,t^2}{4\,x}\right)}{\sqrt{2}}\right)}{2\,\sqrt{\pi}\,x^{\frac{3}{2}}}\\&=\frac{\sqrt{g}\,t\cos\left(\frac{g\,t^2}{4\,x}+\frac{\pi}{4}\right)}{2\,\sqrt{\pi}\,x^{\frac{3}{2}}}\end{aligned} \tag{9.3.16}$$

上式を基に波の伝搬の様子を下図に示す。

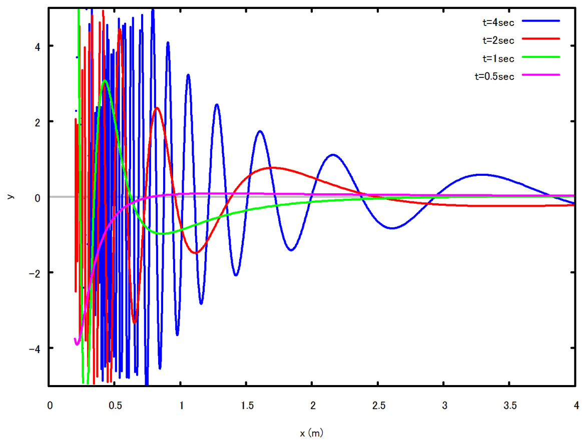


図 9.3.2: 自由表面のもりあがりによる二次元波の伝搬

(2) 撃圧作用

初期状態で、原点に自由表面の集中的な衝撃圧力を加えた場合について調べる [1]。

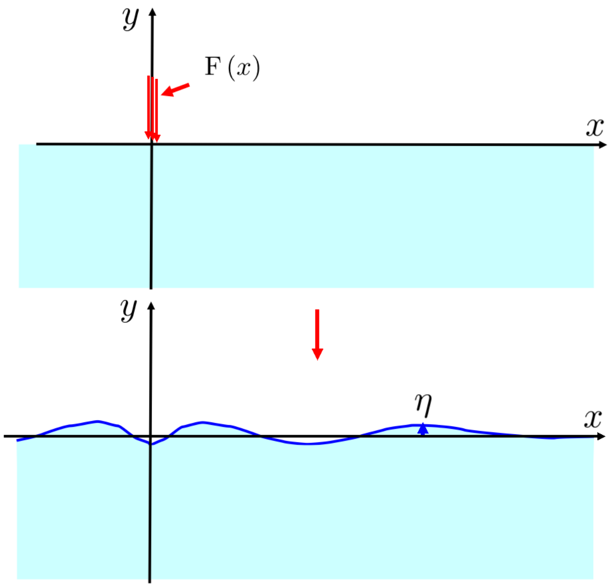


図 9.3.3: 衝撃圧力による二次元波の伝搬

```
/* 撃圧 */
PH7:lhs(PH2)*\rho=-subst([sin(\omega*t)=
 cos(\omega*t)],rhs(PH2))*\omega/g;
PH71:PH7/\rho;
subst([PH71],ET0);
ev(%,diff);
ET7:subst([y=0],%);
\Phi=1/%pi/\rho*'integrate('integrate(F(a)
 *cos(k*(x-a))*cos(\omega(k)*t)*%e^(k*y)
 ,a,minf,inf),k,0,inf);
PH72:\Phi=1/%pi/\rho*'integrate(cos(k*x)
 *cos(\omega(k)*t)*%e^(k*y),k,0,inf);
subst([PH72],ET0);
ev(%,diff);
ET72:subst([y=0],%);
sin(\omega(k)*t)*cos(k*x)=1/2*sin(\omega(k)
 *t+k*x)+1/2*sin(\omega(k)*t-k*x);
sin(\omega(k)*t)*cos(k*x)=-sin(\omega(k)*t
 -k*x);
```

[1]Sir Horance Lamb, Hydrodynamics sixth edition [11], P.387 239.

```
solve(%,cos(k*x))[1];
subst([%],ET72);
ET73:subst([sin(k*x-omega(k)*t)=cos(k*x
 -omega(k)*t-%pi/2)],%);
FK:f(k)=-(k*x-\omega(k)*t-%pi/2);
FKD1:subst([f(k)=f(d),\omega(k)=sqrt(g*k),
 DFK12],FK);
subst([s(k)=\omega(k),s(d)=\omega(d)],SF2)
 /%pi/\rho/g;
subst([DFK22],%);
subst([minf=0],lhs(%))=rhs(%)/2;
subst([FKD1],%);
realpart(%);
subst([FK],%);
lhs(%)=subst([\omega(d)=\omega,OM11,
 DFK12],rhs(%));
subst([sin((g*t^2)/(4*x))=sqrt(2)*
 sin((g*t^2)/(4*x)+%pi/4)-cos((g*t^2)
  /(4*x))],%);
ET8:expand(%);
ET81:\eta=lhs(ET8);
ET82:\eta=rhs(ET8);
ET41:subst([g=9.8,x=a,\rho=102],rhs(ET82));
plot2d([subst([t=4],ET41),subst([t=2],
 ET41),
 subst([t=1],ET41),subst([t=0.5],ET41)],
 [a,0.2,4],[x,0,4],[y,-0.05,0.055],[xlabel,
 "x (m)"],[legend, "t=4sec","t=2sec",
 "t=1sec","t=0.5sec"] );
```

波による圧力は、(9.2.29) 式から、

$$\Delta\,p = -\left(\frac{d}{d\,t}\,\Phi\right)\,\rho$$

撃圧は力×時間による運動量で表現できるので、 $\Delta\,pdt$ から撃圧は $\rho\Phi$ で表現できる。また、波形が y 軸対称で、初期：$t=0$ で、波高が零である。この条件から速度ポテンシャル：Φ は、水深が十番深い場合、(9.3.1) 式から撃圧は、

$$\Phi\,\rho = \cos(\omega\,t)\,\cos(k\,x)\,e^{k\,y}\,A$$

上式で A は撃圧の振幅である。上式から速度ポテンシャル：Φ は、

$$\Phi = \frac{\cos(\omega\,t)\,\cos(k\,x)\,e^{k\,y}\,A}{\rho} \tag{9.3.17}$$

撃圧の振幅：A を撃圧分布：$\mathrm{F}(x)$ として、フーリエ積分の式：(9.3.6) 式から、

$$\Phi = \frac{1}{\pi\,\rho}\int_0^{\infty}\cos(\omega\,(k)\,t)\times\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{F}(a)\,\cos(k\,(x-a))\,da\,e^{k\,y}dk$$

上式の速度ポテンシャルで、初期における撃圧：$\mathrm{F}(x)$ が非常に狭い範囲に分布し、他では $\mathrm{F}(x)=0$ とし、

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{F}(a)\,da=1$$

上記の関係があるとすると、上記の速度ポテンシャルは下記となる。

$$\Phi=\frac{1}{\pi\rho}\int_0^{\infty}\cos(\omega(k)\,t)\,\cos(k\,x)\,e^{k\,y}dk \tag{9.3.18}$$

上式を (9.3.2) 式に代入し、$y=0$ として波高を求めると、

$$\eta=\frac{1}{\pi\,g\,\rho}\int_0^{\infty}\omega(k)\,\sin(\omega(k)\,t)\,\cos(k\,x)\,dk$$

次式の関係から、

$$\sin(\omega(k)\,t)\,\cos(k\,x)=\frac{\sin(k\,x+\omega(k)\,t)}{2}-\frac{\sin(k\,x-\omega(k)\,t)}{2}$$

$x>0$ の場合を扱うとして、x 軸方向に進行する波として、波高は次式となる。

$$\eta=\frac{1}{\pi\,g\,\rho}\int_0^{\infty}\omega(k)\,\sin(k\,x-\omega(k)\,t)\,dk \tag{9.3.19}$$

上式を (9.3.9) 式の積分公式を活用し、sin 項を cos 項に変更するには、$\frac{\pi}{2}$ で修正し、$\mathrm{f}(k)$ は、

$$\mathrm{f}(k)=-k\,x+\omega(k)\,t+\frac{\pi}{2} \tag{9.3.20}$$

$\frac{d}{d\,k}\mathrm{f}(k)=0$ から、d は (9.3.13) 式と同じである。以上から、

$$\mathrm{f}(d)=\frac{g\,t^2}{4\,x}+\frac{\pi}{2} \tag{9.3.21}$$

また、$\frac{d^2}{d\,\xi^2}\mathrm{f}(d)$ は (9.3.15) 式と同じである。以上の結果を (9.3.9) 式の積分公式に代入し、

$$\begin{aligned}\frac{\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\,\mathrm{f}(k)}\,\omega(k)\,dk}{\pi\,g\,\rho}&=\frac{\sqrt{2}\left(\frac{i}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)e^{i\,\mathrm{f}(d)}\,\omega(d)}{\sqrt{\pi}\sqrt{\left|\frac{d^2}{d\,\xi^2}\mathrm{f}(d)\right|g\,\rho}}\\&=\frac{\left(\frac{i}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)e^{i\,\mathrm{f}(d)}\,\omega(d)\,t}{\sqrt{\pi}\sqrt{g}\,\rho\,x^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

左右対称であるから、積分範囲を $0\to\infty$ に変更し、積分結果を 1/2 とし、(9.3.21) 式を代入すると、

$$\begin{aligned}\frac{\int_0^{\infty}e^{i\,\mathrm{f}(k)}\,\omega(k)\,dk}{\pi\,g\,\rho}&=\frac{\left(\frac{i}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)e^{i\,\mathrm{f}(d)}\,\omega(d)\,t}{2\sqrt{\pi}\sqrt{g}\,\rho\,x^{\frac{3}{2}}}\\&=\frac{\left(\frac{i}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\omega(d)\,t\,e^{i\left(\frac{g\,t^2}{4\,x}+\frac{\pi}{2}\right)}}{2\sqrt{\pi}\sqrt{g}\,\rho\,x^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

上式の実部をとり、(9.3.4) 式を代入すると、

$$\begin{aligned}\frac{\int_0^{\infty}\omega(k)\,\cos(\mathrm{f}(k))\,dk}{\pi\,g\,\rho}&=\frac{\omega(d)\,t\left(-\frac{\sin\left(\frac{g\,t^2}{4\,x}\right)}{\sqrt{2}}-\frac{\cos\left(\frac{g\,t^2}{4\,x}\right)}{\sqrt{2}}\right)}{2\sqrt{\pi}\sqrt{g}\,\rho\,x^{\frac{3}{2}}}\\&=\frac{\sqrt{g}\,t^2\left(-\frac{\sin\left(\frac{g\,t^2}{4\,x}\right)}{\sqrt{2}}-\frac{\cos\left(\frac{g\,t^2}{4\,x}\right)}{\sqrt{2}}\right)}{4\sqrt{\pi}\,\rho\,x^{\frac{5}{2}}}\\&=-\frac{\sqrt{g}\,t^2\sin\left(\frac{g\,t^2}{4\,x}+\frac{\pi}{4}\right)}{4\sqrt{\pi}\,\rho\,x^{\frac{5}{2}}}\end{aligned}$$

以上から、伝搬する波形：(9.3.19) 式は、

$$\begin{aligned}\eta&=\frac{\int_0^{\infty}\omega(k)\,\sin(k\,x-\omega(k)\,t)\,dk}{\pi\,g\,\rho}\\&=-\frac{\sqrt{g}\,t^2\sin\left(\frac{g\,t^2}{4\,x}+\frac{\pi}{4}\right)}{4\sqrt{\pi}\,\rho\,x^{\frac{5}{2}}}\end{aligned} \tag{9.3.22}$$

上式を基に波の伝搬の様子を下図に示す。

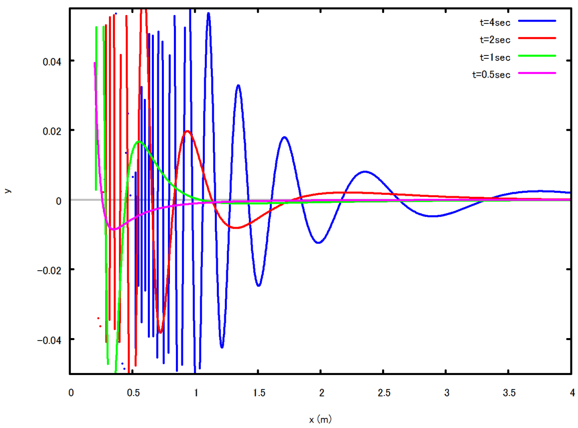


図 9.3.4: 撃圧作用による二次元波の伝搬

以上の検討結果から、位相関係（波長）は $\frac{g\,t^2}{4\,x}$ で整理され、原点より遠方の波は近い波に比べ、波長は長くなる。また、波振幅は時間と共に増加する。

例題 9.3.2　前進速度のある船の波と抵抗

二次元の船が速度：U で航走し、波のない平衡状態での水面を x 軸とし、鉛直上方に y 軸をとる。水底の深さを h、船が起こした波の高さ：η とする。x 軸方向の流速:u、y 軸方向の流速:v、波高の片振幅:A、密度：ρ、重力加速度：g とする。

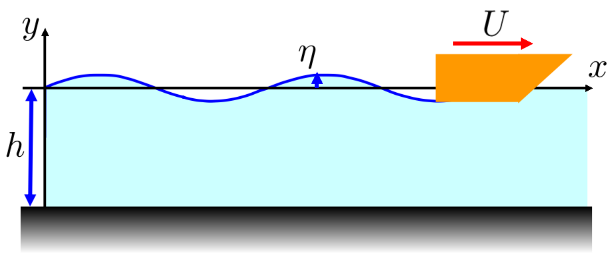


図 9.3.5: 前進速度のある船の波

(1) 前進速度のある二次元の船の波

```
/* 二次元抵抗 */
kill(all);
load("vector");
depends(\eta,[x]);
depends(\Phi,[x,y]);
depends(\phi,[x,y]);
depends(a,[x]);
depends(b,[y]);
assume(y>0);
assume(k>0);
assume(U>0);
assume(k>0);
PH0:\Phi=U*x+\phi;
EQ1:'diff(\phi,y,2)+'diff(\phi,x,2)=0;
ET0:\eta=-diff(\phi,x,1)*U/g;
EQ2:'diff(\phi,y,1)+U^2/g*'diff(\phi,x,2)
 =0;
PH0:\phi=a*b;
/* 質量保存 */
subst([PH0],EQ1);
ev(%,diff);
%-last(lhs(%));
EQ11:expand(%/a/b);
EQ12:lhs(EQ11)=k^2;
EQ13:rhs(EQ11)=k^2;
CH1:ode2(EQ12,b,y);
CH2:ode2(EQ13,a,x);
PH01:subst([CH1,CH2],PH0);
```

一様流：U がある速度ポテンシャル：Φ は (9.1.8) 式から、

$$\Phi = x\,U + \phi \tag{9.3.23}$$

ここで、ϕ は x, y の関数である。このとき、質量保存の方程式は (9.1.9) 式から、

$$\frac{d^2}{d\,y^2}\,\phi + \frac{d^2}{d\,x^2}\,\phi = 0 \tag{9.3.24}$$

波の高さ：η は、(9.1.14) 式から、

$$\eta = -\frac{\left(\frac{d}{d\,x}\,\phi\right)\,U}{g} \tag{9.3.25}$$

自由表面条件は、(9.1.15) 式から、

$$\frac{\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,\phi\right)\,U^2}{g} + \frac{d}{d\,y}\,\phi = 0 \tag{9.3.26}$$

(9.3.23) 式の速度ポテンシャル：ϕ を変数分離法で下記とし、$a = a(x), b = b(y)$ の関数とする。

$$\phi = a\,b \tag{9.3.27}$$

(a) 質量保存の方程式

上式を質量保存の方程式：(9.3.24) 式に代入し、

$$a\,\left(\frac{d^2}{d\,y^2}\,b\right) + \left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,a\right)\,b = 0$$

整理して、下記とする。

$$\frac{\frac{d^2}{d\,y^2}\,b}{b} = -\frac{\frac{d^2}{d\,x^2}\,a}{a} = k^2$$

上式を、それぞれ ode2 関数で解くと、

$$b = \%k1\,e^{k\,y} + \%k2\,e^{-k\,y} \tag{9.3.28}$$

$$a = \%k1\,\sin\left(k\,x\right) + \%k2\,\cos\left(k\,x\right) \tag{9.3.29}$$

(9.3.28) 式、(9.3.29) 式を (9.3.27) 式に代入し、

$$\begin{aligned}\phi &= \left(\%k1\,\sin\left(k\,x\right) + \%k2\,\cos\left(k\,x\right)\right)\\ &\quad\times\,\left(\%k1\,e^{k\,y} + \%k2\,e^{-k\,y}\right)\end{aligned} \tag{9.3.30}$$

(b) 底の条件

```
/* 底の条件 */
diff(PH01,y,1);
subst([y=-h],rhs(%)=0);
%k1*k*%e^(-h*k)-%k2*k*%e^(h*k)=0;
C1:%k1=C*%e^(h*k);
C2:%k2=C*%e^(-h*k);
subst([C1,C2],CH1);
CH11:b=C*cosh(k*(y+h));
PH11:subst([CH2,CH11],PH0);
PH2:\phi=C*cosh(k*(y+h))*sin(k*x+\epsilon);
```

y 軸方向の流速：$v=\frac{d}{dy}\phi$ で、底面：$y=-h$ で、$v=0$ であるから、

$$\frac{d}{dy}\phi=\left(\%k1\,k\,e^{-h\,k}-\%k2\,k\,e^{h\,k}\right)$$
$$\times\ (\%k1\sin(k\,x)+\%k2\cos(k\,x))=0$$

上式から、

$$\%k1\,k\,e^{-h\,k}-\%k2\,k\,e^{h\,k}=0$$

上式を解いて、

$$\%k1=e^{h\,k}\,C,\quad \%k2=e^{-h\,k}\,C$$

上式を (9.3.28) 式に代入し、

$$b=\cosh(k\ (y+h))\ C \tag{9.3.31}$$

上式と (9.3.29) 式を (9.3.27) 式に代入し、

$$\phi=(\%k1\sin(k\,x)+\%k2\cos(k\,x))\ \cosh(k\ (y+h))\ C$$

上式を書き換えて、

$$\phi=\sin(k\,x+\epsilon)\ \cosh(k\ (y+h))\ C \tag{9.3.32}$$

(c) 自由表面条件

```
subst([PH2],EQ2);
ev(%,diff);
subst([y=0],%);
expand(%/sin(k*x+epsilon)/C/k);
K1:solve(%,k)[1];
K11:k=(g*tanh(k*y+h*k))/(U^2);
```

(9.3.32) 式を自由表面条件：(9.3.26) 式に代入し、$y=0$ として、

$$\sinh(h\,k)-\frac{k\cosh(h\,k)\ U^2}{g}=0$$

上式から、

$$k=\frac{g\tanh(k\,y+h\,k)}{U^2} \tag{9.3.33}$$

(d) 波振幅：A の導入

```
/* 波振幅：A の導入  */
subst([PH2],ET0);
ev(%,diff);
ET11:subst([y=0],%);
ET1:\eta=A*cos(k*x+\epsilon);
rhs(ET11)=rhs(ET1);
solve(%,C)[1];
subst([%],PH2);
limit(%,h,inf);
ev(%,limit);
ev(%,limit);
K12:lhs(K11)=limit(rhs(K11),h,inf);
```

波の高さ：η は、(9.3.25) 式に (9.3.32) 式を代入し、

$$\eta=-\frac{k\cosh(h\,k)\ \cos(k\,x+\epsilon)\ C\,U}{g}$$

波の振幅を A とすると、

$$C=-\frac{g\,A}{k\cosh(h\,k)\ U}$$
$$\eta=\cos(k\,x+\epsilon)\ A \tag{9.3.34}$$

このときの速度ポテンシャル：ϕ は、

$$\phi=-\frac{g\sin(k\,x+\epsilon)\ \cosh(k\ (y+h))\ A}{k\cosh(h\,k)\ U}$$

水深：h が十分に深い場合は、$h\to\infty$ とし、

$$\phi=-\frac{g\sin(k\,x+\epsilon)\ e^{k\,y}\,A}{k\,U} \tag{9.3.35}$$

ここで、(9.3.33) 式は、

$$k=\frac{g}{U^2} \tag{9.3.36}$$

(2) 二次元の船の波による抵抗

```
E1:U*1/2*g*\rho*A^2=V[g]*1/2*g*\rho*A^2+D
 *U;
solve(%,D)[1];
D1:factor(%);
VG1:V[g]=(((2*h*k)/sinh(2*h*k)+1)*V[p])/2;
subst([VG1],D1);
subst([V[p]=U],%);
factor(%);
D2:expand(%);
D21:lhs(D2)=limit(rhs(D2),h,inf);
ET2:\eta=-B*cos(k*x+\epsilon+k*L[p]);
ET3:\eta=rhs(ET1)+rhs(ET2);
K21:K2=k*x+\epsilon;
K31:K3=k*x+\epsilon+k*L[p];
K22:solve(K21,k)[1];
K32:solve(K31,L[p])[1];
subst([K32,K22],ET3);
\eta=-2*B*sin((K2+K3)/2)*sin((K2-K3)/2);
subst([K21,K31],%);
A1:A=2*sin((L[p]*k)/2)*B;
FN1:F[n]=U/sqrt(g*L[p]);
FN2:solve(FN1,U)[1];
subst([A1],D21);
%/(1/4*\rho*g*B^2);
subst([K12],%);
subst([FN2],%);
subst([F[n]=t],rhs(%));
plot2d(%,[t,0.1,2],[xlabel, "Fn"],
 [ylabel, "D"]);
```

波エネルギーと船の抵抗の関係を空間固定座標で下図に示す [1]。船は船速：U で x 軸方向に進む。このとき波は、船から見ればいつも同じ形で変化しないので、船速と同じ位相速度で進行する波となっている。船と共に動く検査面と空間固定の y 軸の検査面を考える。この検査面間での波の単位幅あたりのエネルギーは、(9.2.33) 式から $\frac{g\,\rho\,A^2}{2}$ であり、この間におけるエネルギー増加率は、船の検査面が U で伸びているので、$\frac{g\,\rho\,A^2}{2} \times U$ である。船位置の検査面から与えられるエネルギー増加率は、船の抵抗 : D から DU である。また、進行波の y 軸の検査面から流入するエネルギー速度は、(9.2.42) 式から、群速度：V_g であるため、この面からのエネルギー増加率は、$\frac{g\,\rho\,A^2}{2} \times V_g$ である。

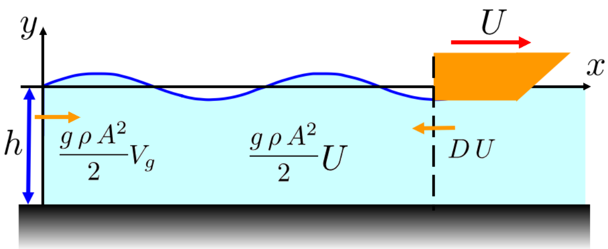


図 9.3.6: 波エネルギーと船の抵抗

上記をまとめると、

$$\frac{g\,\rho\,A^2\,U}{2} = D\,U + \frac{g\,V_g\,\rho\,A^2}{2}$$

以上から、抵抗：D を求めると、

$$D = \frac{g\,\rho\,A^2\,(U - V_g)}{2\,U} \tag{9.3.37}$$

ここで、エネルギー速度≡群速度： V_g は (9.2.38) 式から下記となる。

$$V_g = \frac{\left(\frac{2\,h\,k}{\sinh(2\,h\,k)} + 1\right)\,V_p}{2}$$

上式を (9.3.37) 式に代入し、$V_p = U$ であるから、抵抗は、

$$D = \frac{g\,\rho\,A^2}{4} - \frac{g\,h\,k\,\rho\,A^2}{2\sinh\left(2\,h\,k\right)} \tag{9.3.38}$$

水深 : h が十分に深い場合は、$h \to \infty$ とし、下記となる。

$$D = \frac{g\,\rho\,A^2}{4} \tag{9.3.39}$$

いま、船の場合、船首部で正の波（波高：B）を起こし、船長 : L_p 離れた船尾で負の波（波高：$-B$）を起こす [2]。この波は下記で表現でき、

$$\begin{aligned}\eta =&\cos\left(k\,x + \epsilon\right)\,B - \cos\left(k\,x + k\,L_p + \epsilon\right)\,B \\ =&2\sin\left(\frac{k\,L_p}{2}\right)\,\sin\left(\frac{2\,k\,x + k\,L_p + 2\,\epsilon}{2}\right)\,B\end{aligned} \tag{9.3.40}$$

以上から船首、船尾の波の干渉による波高は、

$$A = 2\sin\left(\frac{k\,L_p}{2}\right)\,B$$

上式を (9.3.39) 式に代入すると船の抵抗は、

$$D = g\sin\left(\frac{k\,L_p}{2}\right)^2\,\rho\,B^2$$

上式を $\frac{g\,\rho\,B^2}{4}$ で無次元化し、(9.3.36) 式およびフルード数：$F_n = \frac{U}{\sqrt{g\,L_p}}$ の関係を代入すると、

$$\begin{aligned}\frac{4\,D}{g\,\rho\,B^2} =&4\sin\left(\frac{k\,L_p}{2}\right)^2 \\ =&4\sin\left(\frac{g\,L_p}{2\,U^2}\right)^2 \\ =&4\sin\left(\frac{1}{2\,F_n^2}\right)^2\end{aligned} \tag{9.3.41}$$

上式を図示すると下図となる。船首と船尾の波の干渉で、船速により抵抗が大きく変化する。

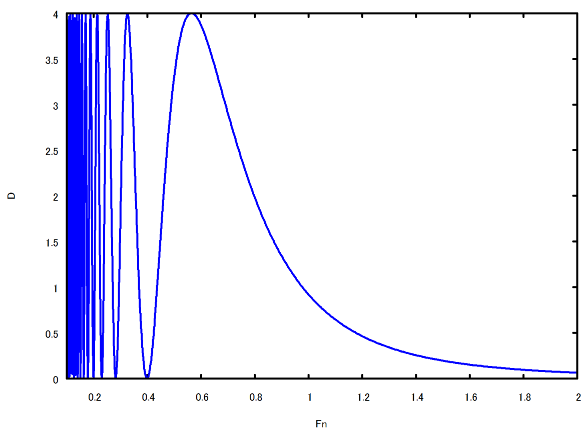


図 9.3.7: 船の抵抗

[1] L. M. Milne-Thomson : Theretical Hydrodynamics, Fourth Edition, Macmillan [15)], P.399 14-24 Wave resistance

[2] J. N. Newman, Marine Hydrodynamics [21)],P.266 6.9 Two-Dimensional Ship Waves

例題 9.3.3　前進速度のある没水二次元円柱による波

没水二次元円柱 (半径：A、没水深度：h) が速度：U で航走するとき、円柱の後方に生ずる波について調査する [1]。波のない平衡状態での水面で円柱の進行方向と逆方向を x 軸とし、円柱の中心を通り、鉛直上方に y 軸をとる。水深は十分深いとし、円柱が起こした波の高さ：η、水の密度：ρ、重力加速度：g とする。

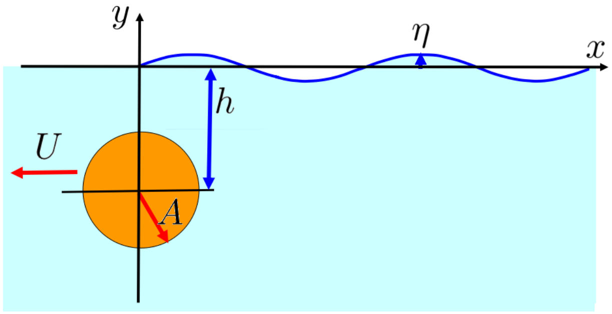


図 9.3.8: 没水二次元円柱による波

```
/* 二次元円柱による波の伝搬 */
kill(all);
load("vector");
depends(\eta,[x]);
depends(\Phi,[x,y]);
depends(\phi,[x,y]);
assume(g>0);
assume(y>0);
assume(h>0);
assume(K[0]>0);
PH0:\Phi=U*x+\phi;
EQ1:'diff(Phi,y,2)+'diff(Phi,x,2)=0;
ET1:\eta=-diff(\phi,x,1)*U/g;
subst([PH0],EQ1);
EQU1:ev(%,diff);
EQ2:'diff(\phi,y,1)+U^2/g*'diff(\phi,x,2)
 =0;
K1:K[0]=g/U^2;
K11:solve(K1,g)[1];
EQ21:expand(K[0]*subst([K11],EQ2));
ET11:subst([K11],ET1);
A1:\phi[1]=U*A^2*x/(x^2+(y+h)^2);
DI1:'integrate(%e^(-k*(y+h))*sin(k*x),k,0,
 inf);
```

[1]Sir Horance Lamb, Hydrodynamics sixth edition [11)], P.410 247.

```
DI2:ev(DI1,integrate);
A11:lhs(A1)=U*A^2*DI1;
B1:\phi[2]='integrate(f(k)*%e^(k*(y))
 *sin(k*x),k,0,inf);
PH1:\phi=\phi[1]+\phi[2];
PH11:subst([A11,B1],PH1);
```

一定速度：U がある速度ポテンシャル：Φ は (9.1.8) 式から、

$$\Phi = x\,U + \phi \tag{9.3.42}$$

ここで、ϕ は円柱固定の動座標で、x, y の関数である。このとき、質量保存の方程式は (9.1.9) 式から、

$$\frac{d^2}{d\,y^2}\,\phi + \frac{d^2}{d\,x^2}\,\phi = 0 \tag{9.3.43}$$

波の高さ：η は、(9.1.13) 式から、

$$\eta = -\frac{\left(\frac{d}{d\,x}\,\phi\right)\,U}{g} \tag{9.3.44}$$

自由表面条件は、(9.1.15) 式から、

$$\frac{\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,\phi\right)\,U^2}{g} + \frac{d}{d\,y}\,\phi = 0 \tag{9.3.45}$$

ここで、下記とすると、

$$K_0 = \frac{g}{U^2} \tag{9.3.46}$$

自由表面条件：(9.3.45) 式は、

$$K_0\,\left(\frac{d}{d\,y}\,\phi\right) + \frac{d^2}{d\,x^2}\,\phi = 0 \tag{9.3.47}$$

波の高さ：η は、(9.3.44) 式から、

$$\eta = -\frac{\frac{d}{d\,x}\,\phi}{K_0\,U} \tag{9.3.48}$$

速度ポテンシャル：ϕ を下記の ϕ_1, ϕ_2 に分ける。ϕ_1 は無限流体中を一定速度で航行する円柱を表す速度ポテンシャルで、ϕ_2 は自由表面条件などを満足するように ϕ_1 を補正する関数とする。

$$\phi = \phi_2 + \phi_1 \tag{9.3.49}$$

「5.3.4 一様流中の円柱まわりの流れ」から、その速度ポテンシャルは (5.3.11) 式、122 頁から、次式となる。

$$\Phi = \frac{\cos\left(\theta\right)\,A^2\,U}{r} + r\cos\left(\theta\right)\,U$$

上式から、ϕ_1 は下記となる。

$$\phi_1 = \frac{x\,A^2\,U}{\left(y+h\right)^2 + x^2} \tag{9.3.50}$$

また、次式の積分公式：「A.9.6 $\frac{b}{a^2+b^2}$ の積分表示」の (A.9.12) 式、659 頁から、

$$\int_0^{\infty} \sin\left(k\,x\right)\,e^{-k\,(y+h)}dk = \frac{x}{\left(y+h\right)^2 + x^2} \quad (y > -h)$$

上式を使って、ϕ_1 を表すと、

$$\phi_1 = \int_0^{\infty} \sin(k\,x)\; e^{-k\,(y+h)} dk\, A^2\, U \quad (y > -h) \tag{9.3.51}$$

上式は当然ながら、質量保存の方程式を満足している。この式にならって、ϕ_2 に $\mathrm{f}(k)$ を導入し、下記とする。

$$\phi_2 = \int_0^{\infty} \mathrm{f}(k)\, \sin(k\,x)\; e^{k\,y} dk \tag{9.3.52}$$

以上から、速度ポテンシャル：ϕ は次式となる。

$$\begin{aligned}\phi = &\int_0^{\infty} \sin(k\,x)\; e^{-k\,(y+h)} dk\, A^2\, U \\ &+ \int_0^{\infty} \mathrm{f}(k)\, \sin(k\,x)\; e^{k\,y} dk\end{aligned} \tag{9.3.53}$$

```
subst([PH11],EQU1);
ev(%,diff);
EQUB1:factor(%);
subst([PH11],EQ21);
ev(%,diff);
subst([y=0],%);
K[0]*((k*f(k)*sin(k*x))-(k*%e^(-h*k)*
 sin(k*x))*A^2*U)-(k^2*%e^(-h*k)*
 sin(k*x))*A^2*U-
(k^2*f(k)*sin(k*x))=0;
FK1:solve(%,f(k))[1];
PH2:subst([A1,B1,FK1],PH1);
K2:K[2]=2*K[0];
K21:k-K[0]=l(k);
K22:solve(%,l(k))[1];
subst([k+K[0]=k-K[0]+K[2],K22],PH2);
\phi=(x*A^2*U)/((y+h)^2+x^2)-'integrate((
 (k-K[0])*sin(k*x)*%e^(k*y-h*k))/(k-K[0]),
 k,0,inf)*A^2*U-'integrate(((K[2])*sin(k*x)
 *%e^(k*y-h*k))/(k-K[0]),k,0,inf)*A^2*U;
subst([K2],%);
PH3:subst(['integrate(sin(k*x)*
 %e^(k*y-h*k),k,0,inf)=x/(x^2+(y-h)^2)],%);
PH31:\phi=rhs(PH3)-first(rhs(PH3));
PH32:\phi=first(rhs(PH3));
subst([%],ET11);
ev(%,diff);
ET2:subst([y=0],%);
```

(9.3.53) 式の速度ポテンシャルを質量保存の方程式：(9.3.43) 式に代入すると、質量保存の方程式を満足していることが分かる。

次に、(9.3.53) 式の速度ポテンシャルを自由表面条件：(9.3.47) 式に代入し、$y=0$ を代入すると、

$$\begin{aligned}K_0 &\left(\int_0^{\infty} k\,\mathrm{f}(k)\, \sin(k\,x)\, dk \right.\\ &\left. - \int_0^{\infty} k\, e^{-h\,k} \sin(k\,x)\, dk\, A^2\, U\right)\\ &- \int_0^{\infty} k^2\, e^{-h\,k} \sin(k\,x)\, dk\, A^2\, U\\ &- \int_0^{\infty} k^2\, \mathrm{f}(k)\, \sin(k\,x)\, dk = 0\end{aligned}$$

上式が常に成り立つためには、被積分関数をとって、

$$\begin{aligned}&K_0\, \left(k\,\mathrm{f}(k)\, \sin(k\,x) - k\, e^{-h\,k} \sin(k\,x)\; A^2\, U\right)\\ &- k^2\, e^{-h\,k} \sin(k\,x)\; A^2\, U - k^2\, \mathrm{f}(k)\, \sin(k\,x) = 0\end{aligned}$$

$\mathrm{f}(k)$ を求めると、

$$\mathrm{f}(k) = -\frac{(k+K_0)\; e^{-h\,k}\, A^2\, U}{k-K_0}$$

上式を (9.3.53) 式に代入すると、

$$\begin{aligned}\phi = &\frac{x\,A^2\,U}{(y+h)^2 + x^2}\\ &- \int_0^{\infty} \frac{(k+K_0)\, \sin(k\,x)\; e^{k\,y-h\,k}}{k-K_0} dk\, A^2\, U\\ &(y < h)\end{aligned}$$

次式の K_2 を導入し、

$$K_2 = 2\,K_0 \tag{9.3.54}$$

上式を使って速度ポテンシャルを変形すると、

$$\begin{aligned}\phi = &\frac{x\,A^2\,U}{(y+h)^2 + x^2}\\ &- \int_0^{\infty} \frac{(k+K_2-K_0)\, \sin(k\,x)\; e^{k\,y-h\,k}}{k-K_0} dk\, A^2\, U\end{aligned}$$

上式を展開し、

$$\begin{aligned}\phi = &- K_2 \int_0^{\infty} \frac{\sin(k\,x)\; e^{k\,y-h\,k}}{k-K_0} dk\, A^2\, U\\ &- \int_0^{\infty} \sin(k\,x)\; e^{k\,y-h\,k} dk\, A^2\, U + \frac{x\,A^2\,U}{(y+h)^2 + x^2}\end{aligned}$$

上式に (9.3.54) 式を代入し、

$$\begin{aligned}\phi = &- 2\,K_0 \int_0^{\infty} \frac{\sin(k\,x)\; e^{k\,y-h\,k}}{k-K_0} dk\, A^2\, U\\ &- \int_0^{\infty} \sin(k\,x)\; e^{k\,y-h\,k} dk\, A^2\, U + \frac{x\,A^2\,U}{(y+h)^2 + x^2}\end{aligned}$$

右辺第二項の積分を実行し、

$$\phi=-2\,K_0\int_0^{\infty}\frac{\sin(k\,x)\;e^{k\,y-h\,k}}{k-K_0}dk\,A^2\,U+\frac{x\,A^2\,U}{(y+h)^2+x^2}-\frac{x\,A^2\,U}{(y-h)^2+x^2}\quad (y<h) \tag{9.3.55}$$

上式の右辺第二項は没水深度：h の一様流中の円柱を表し、右辺第三項は円柱に対し、水面から対称の位置に置いた逆の二重わき出しを表している。上式の右辺第二項および第三項は下記となり、

$$\phi=\frac{x\,A^2\,U}{(y+h)^2+x^2}-\frac{x\,A^2\,U}{(y-h)^2+x^2}$$

上式を (9.3.48) 式に代入すると零となり、上記の項は波を発生させない。そこで (9.3.55) 式の右辺第一項のみが有効で次式となる。

$$\phi=-2\,K_0\int_0^{\infty}\frac{\sin(k\,x)\;e^{k\,y-h\,k}}{k-K_0}dk\,A^2\,U\quad (y<h) \tag{9.3.56}$$

上式を (9.3.48) 式に代入し、$y=0$ とすると、波高：η は、

$$\eta=2\int_0^{\infty}\frac{k\,e^{-h\,k}\cos(k\,x)}{k-K_0}dk\,A^2 \tag{9.3.57}$$

```
'integrate((k*%e^(-h*k)*cos(k*x))/(k-K[0]),
 k,0,inf)+'integrate((-K[0]*%e^(-h*k)*
 cos(k*x))/(k-K[0]),k,0,inf)='integrate((
 %e^(-h*k)*cos(k*x)),k,0,inf);
ev(%,integrate);
DI3:lhs(%)-last(lhs(%))=rhs(%)
 -last(lhs(%));
ET21:subst([DI3],ET2);
```

(9.3.57) 式の右辺積分について、次式を考える。

$$\int_0^{\infty}\frac{k\,e^{-h\,k}\cos(k\,x)}{k-K_0}dk-K_0\int_0^{\infty}\frac{e^{-h\,k}\cos(k\,x)}{k-K_0}dk=\int_0^{\infty}e^{-h\,k}\cos(k\,x)\,dk$$

右辺の積分を実行し、左辺第二項を右辺に移項すると、

$$\int_0^{\infty}\frac{k\,e^{-h\,k}\cos(k\,x)}{k-K_0}dk=K_0\int_0^{\infty}\frac{e^{-h\,k}\cos(k\,x)}{k-K_0}dk+\frac{h}{x^2+h^2}$$

上式を (9.3.57) 式に代入すると、

$$\eta=2\left(K_0\int_0^{\infty}\frac{e^{-h\,k}\cos(k\,x)}{k-K_0}dk+\frac{h}{x^2+h^2}\right)A^2 \tag{9.3.58}$$

```
DINT0:(%e^(-h*k)*cos(k*x))/(k-K[0]);
INT0:'integrate(DINT0,k,0,inf);
DINT01:subst([cos(k*x)=%e^(%i*(k*x))],
 DINT0);
INT01:'integrate(DINT01,k,0,inf);
INT1:IN[1]=realpart(%);
/* x>0  */
/* IN[2]  */
KI2:k=K[0]+\delta*%e^(%i*t);
DKI2:'diff(k,t,1)=diff(rhs(KI2),t,1);
CKI2:subst([k=K[0]],num(DINT01));
subst([KI2],1/denom(DINT0));
DINT2:%*rhs(DKI2);
integrate(%,t,%pi,0);
%*CKI2;
INT2:IN[2]=realpart(%);
/* IN[3]  */
KI3:k=R*%e^(%i*t);
DKI3:'diff(k,t,1)=diff(rhs(KI3),t,1);
subst([KI3],DINT01);
%*rhs(DKI3);
subst([K[0]=0],%);
DINT3:realpart(%);
IN[3]='integrate(DINT3,t,0,%pi/2);
INT3:IN[3]=0;
/* IN[4]  */
KI4:k=%i*b;
DKI4:'diff(k,b,1)=%i;
subst([KI4],DINT01)*rhs(DKI4);
realpart(%);
DINT4:subst([b=k],%);
IN[4]='integrate(DINT4,k,inf,0);
INT4:subst([x=abs(x)],%);
INT1+INT2+INT3+INT4;
0=rhs(%);
-%+rhs(INT1);
INT5:lhs(%)=last(rhs(%));
```

(9.3.58) 式の括弧内第一項の積分を IN_1 とし、下記に示す線積分を使用して求める。

$$IN_1=\int_0^{\infty}\frac{e^{-h\,k}\cos(k\,x)}{k-K_0}dk \tag{9.3.59}$$

上式の $\cos(k\,x)\rightarrow e^{i\,k\,x}$ に置き換える。

$$IN_1=\Re\int_0^{\infty}\frac{e^{i\,k\,x-h\,k}}{k-K_0}dk \tag{9.3.60}$$

(1)$x>0$ で $|x|$ が十分大きい場合

k を複素平面で表現し、$k=a+i\,b$ とする。a 軸上は (9.3.60) 式の求める積分で、IN_1 である。a 軸上の特異点：$k=K_0$ では、半径：δ の半円の積分で特異点を除き、IN_2 とする。a 軸から b 軸に至る線積分は、十分大きい半径：R の円弧の線積分で、IN_3 とする。b 軸上の線積分を IN_4 とする。

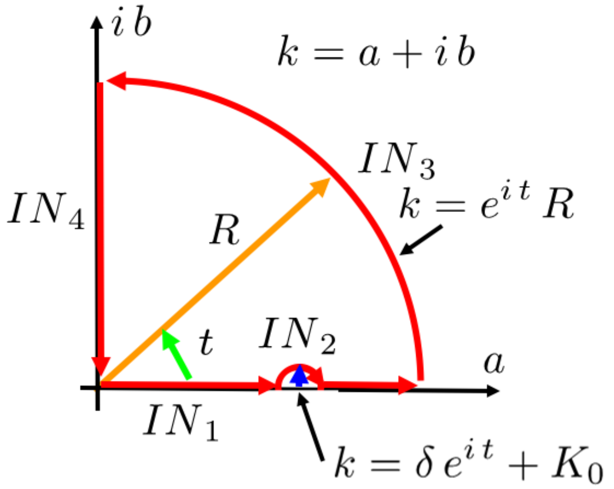


図 9.3.9: $x>0$ の線積分

IN_2 について、k は下記のように表現でき、

$$k=\delta\,e^{i\,t}+K_0,\quad \frac{d}{d\,t}\,k=i\,\delta\,e^{i\,t}$$

$t=\pi\to 0$ の積分結果は、下記となり、半径：δ が十分小さいとし、実部をとると、

$$\begin{aligned}IN_2=&e^{i\,K_0\,x-K_0\,h}\int_{\pi}^{0}i\,dt=-i\,\pi\,e^{i\,K_0\,x-K_0\,h}\\=&\pi\,e^{-K_0\,h}\sin\left(K_0\,x\right)\end{aligned}\tag{9.3.61}$$

IN_3 について、k は下記のように表現でき、

$$k=e^{i\,t}\,R,\quad \frac{d}{d\,t}\,k=i\,e^{i\,t}\,R$$

$t=0\to\pi/2$ の積分結果は、下記となり、半径：R が十分大きいとき $R>>K_0$ となり、$x>0,R>0,h>0$ $sin(t)>0,cos(t)>0$ で次式下線部が $\to -\infty$ となり、

$$\begin{aligned}IN_3=&\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{i\,R\,e^{i\,e^{i\,t}\,x\,R-h\,e^{i\,t}\,R+i\,t}}{e^{i\,t}\,R-K_0}\,dt\\=&\int_0^{\frac{\pi}{2}}i\,e^{i\,e^{i\,t}\,x\,R-h\,e^{i\,t}\,R}\,dt\\=&-\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{\underline{-\sin(t)\,x\,R-h\cos(t)\,R}}\\&\qquad\times\sin\left(\cos\left(t\right)\,x\,R-h\sin\left(t\right)\,R\right)dt\\=&0\end{aligned}\tag{9.3.62}$$

IN_4 について、k は下記のように表現でき、

$$k=i\,b,\quad \frac{d}{d\,b}\,k=i$$

$b=\infty\to 0$ の b 軸上の積分結果は、$b\to k$ と置き換えて、実部をとると、

$$\begin{aligned}IN_4=&\int_{\infty}^{0}\frac{i\,e^{-b\,x-i\,b\,h}}{i\,b-K_0}\,db\\=&-\int_0^{\infty}\frac{\left(k\cos\left(h\,k\right)-K_0\sin\left(h\,k\right)\right)\,e^{-k\,|x|}}{k^2+K_0^2}dk\end{aligned}\tag{9.3.63}$$

(9.3.59) 式、(9.3.61) 式、(9.3.62) 式、(9.3.63) 式から、

$$\begin{aligned}&IN_4+IN_3+IN_2+IN_1\\&=\int_0^{\infty}\frac{e^{-h\,k}\cos\left(k\,x\right)}{k-K_0}dk\\&-\int_0^{\infty}\frac{\left(k\cos\left(h\,k\right)-K_0\sin\left(h\,k\right)\right)\,e^{-k\,|x|}}{k^2+K_0^2}dk\\&+\pi\,e^{-K_0\,h}\sin\left(K_0\,x\right)=0\end{aligned}$$

以上から、

$$\begin{aligned}IN_1=&\int_0^{\infty}\frac{e^{-h\,k}\cos\left(k\,x\right)}{k-K_0}dk\\=&\int_0^{\infty}\frac{\left(k\cos\left(h\,k\right)-K_0\sin\left(h\,k\right)\right)\,e^{-k\,|x|}}{k^2+K_0^2}dk\\&-\pi\,e^{-K_0\,h}\sin\left(K_0\,x\right)\end{aligned}$$

$|x|$ が十分大きいとき、上式は次式となる。

$$\begin{aligned}IN_1=&\int_0^{\infty}\frac{e^{-h\,k}\cos\left(k\,x\right)}{k-K_0}dk\\=&-\pi\,e^{-K_0\,h}\sin\left(K_0\,x\right)\quad(x>0)\end{aligned}\tag{9.3.64}$$

```
/* x<0   */
/* IN[2]   */
integrate(DINT2,t,-%pi,0);
%*CKI2;
INT2:IN[2]=realpart(%);
/* IN[3]   */
IN[3]='integrate(DINT3,t,0,-%pi/2);
INT3:IN[3]=0;
/* IN[4]   */
KI4:k=-%i*b;
DKI4:'diff(k,b,1)=-%i;
subst([KI4],DINT01)*rhs(DKI4);
realpart(%);
DINT4:subst([b=k],%);
IN[4]='integrate(DINT4,k,inf,0);
INT4:subst([x=-abs(x)],%);
INT1+INT2+INT3+INT4;
0=rhs(%);
-%+rhs(INT1);
INT6:lhs(%)=first(rhs(%));
```

(2)$x<0$ で $|x|$ が十分大きい場合、

a 軸上は (9.3.60) 式の求める積分：IN_1 である。a 軸上の特異点：$k=K_0$ では、半径：δ の半円の積分で特異点を除き、IN_2 とする。a 軸から $-b$ 軸に至る線積分は、十分大きい半径：R の円弧の線積分で、IN_3 とする。b 軸上の線積分を IN_4 とする。

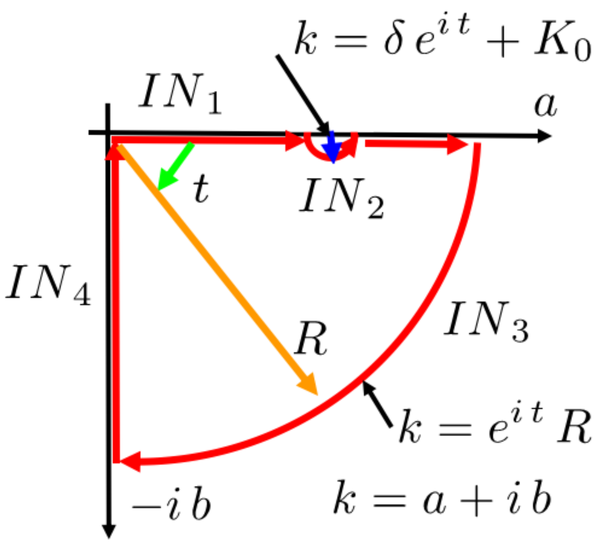


図 9.3.10: $x<0$ の線積分

IN_2 について、k は下記のように表現でき、

$$k=\delta\, e^{i\,t}+K_0,\quad \frac{d}{d\,t}\,k=i\,\delta\, e^{i\,t}$$

$t=-\pi\to 0$ の積分結果は、下記となり、半径：δ が十分小さいとし、実部をとると、

$$\begin{aligned}IN_2=&e^{i\,K_0\,x-K_0\,h}\int_{-\pi}^{0} i\,dt=-i\,\pi\, e^{i\,K_0\,x-K_0\,h}\\ =&-\pi\, e^{-K_0\,h}\sin\left(K_0\,x\right)\end{aligned}\tag{9.3.65}$$

IN_3 について、(9.3.62) 式から、$t=0\to-\pi/2$ の積分結果は、下記となり、半径：R が十分大きいとき $R>>K_0$ となり、$x<0,R>0,h>0$
$sin(t)<0,cos(t)>0$ で次式下線部が $\to -\infty$ となり、

$$\begin{aligned}IN_3=&\int_{-frac\pi2}^{0} e^{\underline{-\sin(t)\,x\,R-h\cos(t)\,R}}\\ &\times\sin\left(\cos\left(t\right)\,x\,R-h\sin\left(t\right)\,R\right)dt\\ =&0\end{aligned}\tag{9.3.66}$$

IN_4 について、k は下記のように表現でき、

$$k=-i\,b,\quad \frac{d}{d\,b}\,k=-i$$

$b=\infty\to 0$ の b 軸上の積分結果は下記となる。$b\to k$ と置き換えて、実部をとると、

$$\begin{aligned}IN_4=&\int_{\infty}^{0}-\frac{i\,e^{b\,x+i\,b\,h}}{-i\,b-K_0}\\ =&\int_{0}^{\infty}\frac{\left(K_0\sin\left(h\,k\right)-k\cos\left(h\,k\right)\right)\,e^{-k\,|x|}}{k^2+K_0^2}dk\end{aligned}\tag{9.3.67}$$

(9.3.59) 式、(9.3.65) 式、(9.3.66) 式、(9.3.67) 式から、

$$\begin{aligned}&IN_4+IN_3+IN_2+IN_1\\ &=\int_{0}^{\infty}\frac{e^{-h\,k}\cos\left(k\,x\right)}{k-K_0}dk\\ &+\int_{0}^{\infty}\frac{\left(K_0\sin\left(h\,k\right)-k\cos\left(h\,k\right)\right)\,e^{-k\,|x|}}{k^2+K_0^2}dk\\ &-\pi\, e^{-K_0\,h}\sin\left(K_0\,x\right)=0\end{aligned}$$

以上から、

$$\begin{aligned}IN_1=&\int_{0}^{\infty}\frac{e^{-h\,k}\cos\left(k\,x\right)}{k-K_0}dk\\ =&\pi\, e^{-K_0\,h}\sin\left(K_0\,x\right)\\ &-\int_{0}^{\infty}\frac{\left(K_0\sin\left(h\,k\right)-k\cos\left(h\,k\right)\right)\,e^{-k\,|x|}}{k^2+K_0^2}dk\end{aligned}$$

$|x|$ が十分大きいとき、次式となる。

$$\begin{aligned}IN_1=&\int_{0}^{\infty}\frac{e^{-h\,k}\cos\left(k\,x\right)}{k-K_0}dk\\ =&\pi\, e^{-K_0\,h}\sin\left(K_0\,x\right)\quad (x<0)\end{aligned}\tag{9.3.68}$$

```
ET21;
INT6*2*K[0]*A^2;
lhs(ET21)=rhs(ET21)-rhs(%);
subst([INT5],%);
expand(%);
ET3:lhs(%)=last(rhs(%));
subst([K1],rhs(%));
subst([h=0.5,g=9.8,A=0.3],%);
plot2d([subst([U=1],%),subst([U=2],%),
 subst([U=3],%),subst([U=4],%)],[x,0,20],
 [legend, "U=1m/s","U=2m/s",
 "U=3m/s","U=4m/s"]);
R1:D=((rhs(ET3))/sin(K[0]*x))^2*g*\rho/4;
subst([K1],%);
diff(rhs(%),U,1)=0;
solve(%,U)[2];
subst([K1,g=9.8,A=0.3,\rho=102,U=t],
 rhs(R1));
plot2d([subst([h=0.4],%),subst([h=0.6],%),
 subst([h=0.8],%),subst([h=1],%)],[t,0,5],
 [legend, "h=0.4m","h=0.6m",
 "h=0.8m","h=1m"],[xlabel, "U m/s"]);
```

円柱の十分前方（進行方向）: $x<0$ では (9.3.68) 式から、$x\to-\infty$ でその右辺項が残り、前方に波があることになる。これは実現象に矛盾する。そこで、(9.3.68) 式の右辺項を引くことで、円柱の十分前方に波が無くなり、波高は次式となる。

$$\begin{aligned}\eta =&2\left(K_0 \int_{0}^{\infty }\frac{e^{-h\,k}\cos\left(k\,x\right) }{k-K_0}dk+\frac{h}{x^2+h^2}\right) \,A^2\\&-2\,\pi\,K_0\,e^{-K_0\,h}\sin\left(K_0\,x\right) \,A^2\end{aligned} \tag{9.3.69}$$

(9.3.64) 式から円柱の十分後方の波高は次式となる。

$$\eta=-4\,\pi\,K_0\,e^{-K_0\,h}\sin\left(K_0\,x\right) \,A^2 \tag{9.3.70}$$

(9.3.39) 式から、円柱の抵抗は、$K_0=\frac{g}{U^2}$ を代入し、

$$\begin{aligned}D =&\frac{\rho\,g\,\eta^2}{4}\\=&4\,\pi^2\,K_0^2\,g\,e^{-2\,K_0\,h}\,\rho\,A^4\\=&\frac{4\,\pi^2\,g^3\,\rho\,A^4\,e^{-\frac{2\,g\,h}{U^2}}}{U^4}\end{aligned} \tag{9.3.71}$$

上式を U で微分し、抵抗が最大となる速度：U は、

$$U=\sqrt{g}\,\sqrt{h}$$

(9.3.70) 式を基に、二次元円柱の半径：$A=0.3m$、没水深度：$h=0.5m$ の時の波形を下図に示す。速度が速くなると波長が長くなっている。

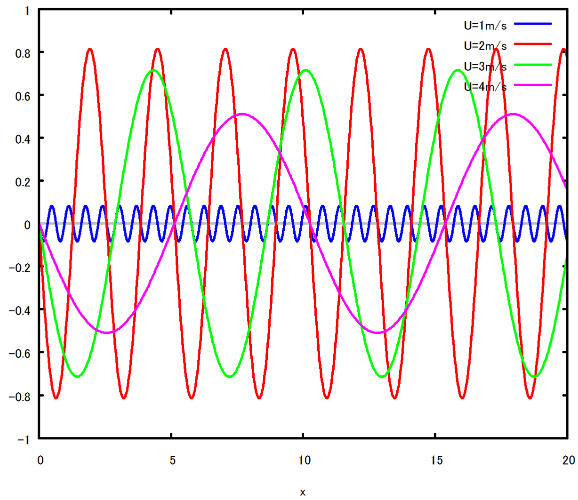


図 9.3.11: 没水二次元円柱による波

二次元円柱の半径：$A=0.3m$ において、(9.3.71) 式の円柱の造波抵抗を下図に示す。

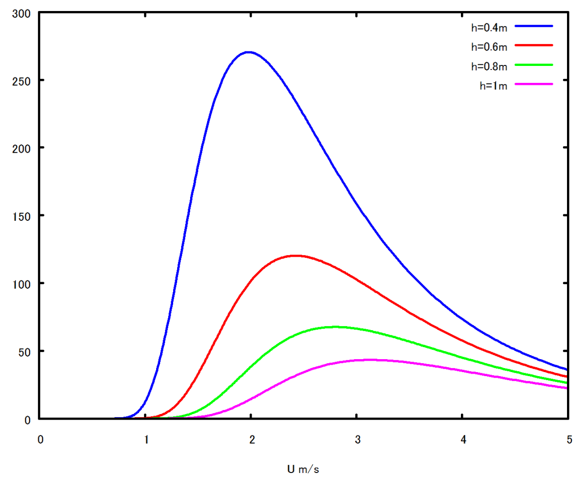


図 9.3.12: 没水二次元円柱による造波

例題 9.3.4　周期的に変動するわき出し強さによる二次元波

水面下 h にあるわき出し（強さ：m）が周期的に変動するときに生ずる波について調査する[1]。波のない平衡状態での水面を x 軸とし、わき出しの中心を通り、鉛直上方に y 軸をとる。水深は十分深く、わき出しが起こした波高：η、水の密度：ρ、重力加速度：g、時間：t、圧力：p とする。

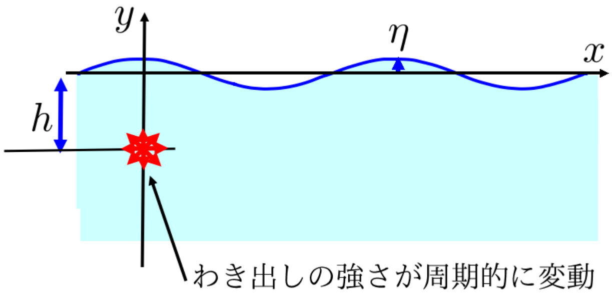


図 9.3.13: 周期的に変動するわき出し強さによる波

```
/* 二次元振動わき出しによる波の伝搬 \mu   */
kill(all);
load("vector");
depends(\eta,[x,t]);
depends(\Phi,[x,y,t]);
depends(\phi,[x,y]);
assume(g>0);
assume(y>0);
assume(h>0);
assume(K[0]>0);
assume(m>0);
assume(\omega>0);
PH0:\Phi=\phi*%e^(%i*\omega*t);
A0:\eta=A*%e^(%i*\omega*t);
EQ1:'diff(Phi,y,2)+'diff(Phi,x,2)=0;
BE1:p/\rho+g*y+\mu*\Phi+diff(\Phi,t,1)=C;
FS1:diff(\Phi,y,1)-diff(\eta,t,1)=0;
subst([C=p/\rho,y=\eta],BE1);
ET1:expand(solve(%,\eta)[1]);
diff(%,t,1);
FS11:subst([%],FS1);
ET11:subst([\mu=0],ET1);
subst([PH0],EQ1);
ev(%,diff);
EQ2:factor(%/(%e^(%i*omega*t)));
```

[1] 船舶技術研究所、流力研究グループ：船舶流体力学ノート (2)-2 次元動揺問題の解法について-、造船協会誌第 534 号、1973.12 P.659

```
K1:K[0]=\omega^2/g;
K2:solve(K1,g)[1];
subst([PH0],FS11);
ev(%,diff);
expand(%/%e^(%i*omega*t));
FS2:subst([K2,\mu=\mu*\omega/K[0]],%);
subst([PH0,A0,\mu=0],ET1);
ev(%,diff);
subst([K2],%);
AM1:factor(%/%e^(%i*omega*t));
CAM1:coeff(rhs(AM1),\phi);
```

わき出しの強さ：m が円周波数：ω で周期的に変動する速度ポテンシャル：Φ を次式で表現する。

$$\Phi = \phi\, e^{i\,\omega\,t} \tag{9.3.72}$$

質量保存の方程式は、(9.1.1) 式から次式となる。

$$\frac{d^2}{d\,y^2}\,\Phi + \frac{d^2}{d\,x^2}\,\Phi = 0 \tag{9.3.73}$$

Bernoulli の定理の速度ポテンシャル表記は、(9.1.3) 式で高次の微小項を省き、粘性修正：$\mu\,\Phi$ を導入すると次式となる。

$$g\,y + \frac{p}{\rho} + \frac{d}{d\,t}\,\Phi + \mu\,\Phi = C \tag{9.3.74}$$

水面の運動学的条件で高次の微小項を省くと、(9.1.5) 式から次式となる。

$$\frac{d}{d\,y}\,\Phi - \frac{d}{d\,t}\,\eta = 0 \tag{9.3.75}$$

Bernoulli の定理：(9.3.74) 式で自由表面では圧力：p は一定であるから、$C \to p/\rho$ と置き換え、また、$y \to \eta$ と置き換えると、

$$\frac{p}{\rho} + \frac{d}{d\,t}\,\Phi + \mu\,\Phi + \eta\,g = \frac{p}{\rho}$$

上式から、波高：η を求めると、

$$\eta = -\frac{\frac{d}{d\,t}\,\Phi}{g} - \frac{\mu\,\Phi}{g} \tag{9.3.76}$$

上式を t で微分すると、

$$\frac{d}{d\,t}\,\eta = -\frac{\frac{d^2}{d\,t^2}\,\Phi}{g} - \frac{\mu\,\left(\frac{d}{d\,t}\,\Phi\right)}{g}$$

上式を水面の運動学的条件：(9.3.75) 式に代入すると、次式の自由表面条件が得られる。

$$\frac{d}{d\,y}\,\Phi + \frac{\frac{d^2}{d\,t^2}\,\Phi}{g} + \frac{\mu\,\left(\frac{d}{d\,t}\,\Phi\right)}{g} = 0 \tag{9.3.77}$$

また、波高：η は (9.3.76) 式から、$\mu = 0$ として、

$$\eta = -\frac{\frac{d}{d\,t}\,\Phi}{g} \tag{9.3.78}$$

質量保存の方程式：(9.3.73) 式に (9.3.72) 式を代入し、整理すると、

$$\frac{d^2}{d\,y^2}\,\phi+\frac{d^2}{d\,x^2}\,\phi=0 \tag{9.3.79}$$

自由表面条件：(9.3.77) 式に (9.3.72) 式を代入し、整理すると、

$$\frac{d}{d\,y}\,\phi-\frac{\omega^2\,\phi}{g}+\frac{i\,\mu\,\omega\,\phi}{g}=0$$

下記の置き換えを行い、

$$K_0=\frac{\omega^2}{g} \tag{9.3.80}$$

上記の自由表面条件に代入し、μ を次式のように再定義すると、

$$\frac{d}{d\,y}\,\phi+i\,\mu\,\phi-K_0\,\phi=0 \tag{9.3.81}$$

```
PH1:\phi=\phi[1]+\phi[2];
PH11:\phi[1]=m*log(sqrt(x^2+y^2));
DIN1:%e^(-k*y)*sin(k*x);
IN1:x/(x^2+y^2)='integrate(DIN1,k,0,inf);
ev(%,integrate);
IN21:integrate(lhs(IN1),x);
DIN22:integrate(DIN1,x);
IN22:'integrate(DIN22,k,0,inf);
IN2:IN21=IN22;
IN31:subst([y=y+h],IN21);
DIN32:subst([y=y+h],DIN22);
PH31:\phi[1]=m*IN31;
PH311:\phi[1]=m*'integrate(DIN32,k,0,inf);
PH312:rhs(PH31)=rhs(PH311);
DPH31:m*DIN32;
DPH32:-m*F(k)*subst([-k*y=k*y],DIN22*k);
PH32:\phi[2]='integrate(DPH32,k,0,inf);
PH33:\phi=DPH31+DPH32;
subst([PH33],FS2);
ev(%,diff);
subst([y=0],%);
solve(%,F(k))[1];
FK1:factor(%);
```

速度ポテンシャル：ϕ を下記の ϕ_1,ϕ_2 に分ける。ϕ_1 は無限流体中のわき出しを表す速度ポテンシャルで、ϕ_2 は自由表面条件などを満足するように ϕ_1 を補正する関数とする。

$$\phi=\phi_2+\phi_1$$

わき出し強さ：m の二次元速度ポッテンシャルは、(5.1.31) 式、98 頁から、

$$\phi_1=m\log r=\frac{m\log\left(y^2+x^2\right)}{2} \tag{9.3.82}$$

また、次式の積分公式：(A.9.12) 式、659 頁から、

$$\frac{x}{y^2+x^2}=\int_0^{\infty}\sin\left(k\,x\right)\,e^{-k\,y}dk\quad(y>0)$$

上式を積分し、

$$\frac{\log\left(y^2+x^2\right)}{2}=-\int_0^{\infty}\frac{\cos\left(k\,x\right)\,e^{-k\,y}}{k}dk \tag{9.3.83}$$

以上から、水面下 h にわき出しがある場合の速度ポテンシャルは次式で表せる。次式は当然ながら、質量保存の方程式を満足している。

$$\begin{aligned}\phi_1=&\frac{m\log\left(\left(y+h\right)^2+x^2\right)}{2}\\=&-m\int_0^{\infty}\frac{\cos\left(k\,x\right)\,e^{-k\,(y+h)}}{k}dk\quad(y>-h)\end{aligned} \tag{9.3.84}$$

上式にならって、ϕ_2 に $\mathrm{F}\,(k)$ を導入し下記とする。次式も当然ながら、質量保存の方程式を満足している。

$$\phi_2=m\int_0^{\infty}\mathrm{F}\,(k)\,\cos\left(k\,x\right)\,e^{k\,y}dk \tag{9.3.85}$$

次に、(9.3.84) 式、(9.3.85) 式の被積分関数は下記となる。

$$\phi'=\mathrm{F}\,(k)\,m\cos\left(k\,x\right)\,e^{k\,y}-\frac{m\cos\left(k\,x\right)\,e^{-k\,(y+h)}}{k} \tag{9.3.86}$$

上式を自由表面条件：(9.3.81) 式に代入し、$y=0$ とし、$\mathrm{F}\,(k)$ を求めると、

$$\mathrm{F}\,(k)=\frac{e^{-h\,k}\,\left(i\,\mu-k-K_0\right)}{k\,\left(i\,\mu+k-K_0\right)} \tag{9.3.87}$$

```
K3:K[1]=k-K[0]+%i*\mu;
K4:solve(K3,K[0])[1];
subst([K4],FK1);
FK2:expand(%);
FK21:first(rhs(FK2));
last(rhs(FK2));
FK22:subst([K3],%);
DPH41:subst([F(k)=FK21],DPH32);
PH41:\phi[21]='integrate(DPH41,k,0,inf);
subst([y+h=-y+h],-PH312);
PH411:\phi[21]=lhs(%);
DPH42:subst([F(k)=FK22],DPH32);
PH42:\phi[22]='integrate(DPH42,k,0,inf);
PH4:\phi=\phi[1]+\phi[21]+\phi[22];
PH41:subst([PH31,PH411,PH42],%);
AM2:subst([PH41,y=0],AM1);
IN0:IN[0]='integrate(DPH42,k,0,inf);
```

(9.3.87) 式を展開すると、

$$\mathrm{F}\left(k\right)=\frac{e^{-h\,k}}{k}-\frac{2\,e^{-h\,k}}{i\,\mu+k-K_0} \tag{9.3.88}$$

上式右辺第一項を (9.3.85) 式に代入し、ϕ_{21} とし、(9.3.83) 式から、次式となる。

$$\begin{aligned}\phi_{21}=&m\int_{0}^{\infty}\frac{\cos\left(k\,x\right)\,e^{k\,y-h\,k}}{k}dk\quad (y<h)\\ =&-\frac{m\log\left(\left(h-y\right)^2+x^2\right)}{2}\end{aligned} \tag{9.3.89}$$

(9.3.88) 式右辺第二項を (9.3.85) 式に代入し、ϕ_{22} とし、次式となる。

$$\phi_{22}=-2\,m\int_{0}^{\infty}\frac{\cos\left(k\,x\right)\,e^{k\,y-h\,k}}{i\,\mu+k-K_0}dk\quad (y<h) \tag{9.3.90}$$

以上から、速度ポテンシャル：ϕ は、(9.3.84) 式、(9.3.89) 式、(9.3.90) 式から、

$$\begin{aligned}\phi=&\phi_{22}+\phi_{21}+\phi_1\\ =&-2\,m\int_{0}^{\infty}\frac{\cos\left(k\,x\right)\,e^{k\,y-h\,k}}{i\,\mu+k-K_0}dk\\ &+\frac{m\log\left(\left(y+h\right)^2+x^2\right)}{2}\\ &-\frac{m\log\left(\left(h-y\right)^2+x^2\right)}{2}\quad (-h<y<h)\end{aligned} \tag{9.3.91}$$

上式右辺第二項、第三項の波高を求めると零となるので、これを省き、右辺第一項のみが有効である。そこで、この積分について調べる。

$$\phi=IN_0=-2\,m\int_{0}^{\infty}\frac{\cos\left(k\,x\right)\,e^{k\,y-h\,k}}{i\,\mu+k-K_0}dk\quad (y<h) \tag{9.3.92}$$

```
CS1:cos(k*x)=%e^(%i*k*x)/2+%e^(-%i*k*x)/2;
DIN0:expand(subst([CS1],DPH42));
DIN1:first(DIN0);
DIN2:last(DIN0);
IN1:IN[1]='integrate(DIN1,k,0,inf);
IN2:IN[2]='integrate(DIN2,k,0,inf);
IN01:IN[0]=rhs(IN1)+rhs(IN2);
```

(9.3.92) 式の $\cos\left(k\,x\right)$ を下記で置き換える。

$$\cos\left(k\,x\right)=\frac{e^{i\,k\,x}}{2}+\frac{e^{-i\,k\,x}}{2}$$

(9.3.92) 式の積分を分解し、

$$\begin{aligned}IN_0=&-m\int_{0}^{\infty}\frac{e^{k\,y+i\,k\,x-h\,k}}{i\,\mu+k-K_0}dk\\ &-m\int_{0}^{\infty}\frac{e^{k\,y-i\,k\,x-h\,k}}{i\,\mu+k-K_0}dk\\ &\text{ここで、}\\ IN_1=&-m\int_{0}^{\infty}\frac{e^{k\,y+i\,k\,x-h\,k}}{i\,\mu+k-K_0}dk\\ IN_2=&-m\int_{0}^{\infty}\frac{e^{k\,y-i\,k\,x-h\,k}}{i\,\mu+k-K_0}dk\end{aligned} \tag{9.3.93}$$

(1)$x>0$ **の場合**

```
/* x>0   IN1 */
/* IN[3]   */
KI3:k=R*%e^(%i*t);
DKI3:'diff(k,t,1)=diff(rhs(KI3),t,1);
subst([KI3],DIN1)*rhs(DKI3);
subst([K[0]=0,\mu=0],%);
IN[13]='integrate(realpart(%),t,0,%pi/2);
IN3:IN[13]=0;
/* IN[4]   */
KI4:k=%i*b;
DKI4:'diff(k,b,1)=diff(rhs(KI4),b,1);
subst([KI4],DIN1)*rhs(DKI4);
DIN4:subst([b=k,\mu=0],%);
IN4:IN[14]='integrate(DIN4,k,inf,0);
IN[1]+IN[13]+IN[14]=0;
subst([IN3,IN4],%);
IN11:solve(%,IN[1])[1];
```

(a)IN_1 **の積分**

k を複素平面で表現し、$k=a+i\,b$ とする。a 軸上は求める積分で、IN_1 である。a 軸から b 軸に至る線積分は、十分大きい半径：R の円弧の線積分で、IN_{13} とする。b 軸上の線積分を IN_{14} とする。この線積分内に特異点はない。

IN_{13} について、k は下記のように表現でき、

$$k=e^{i\,t}\,R,\quad \frac{d}{d\,t}\,k=i\,e^{i\,t}\,R$$

$t=0\rightarrow\pi/2$ の積分結果は、下記となり、半径:R が十分大きいとき $R>>K_0,\mu$ となり、$x>0,y<h,R>0,$ $sin(t)>0,cos(t)>0$ から、

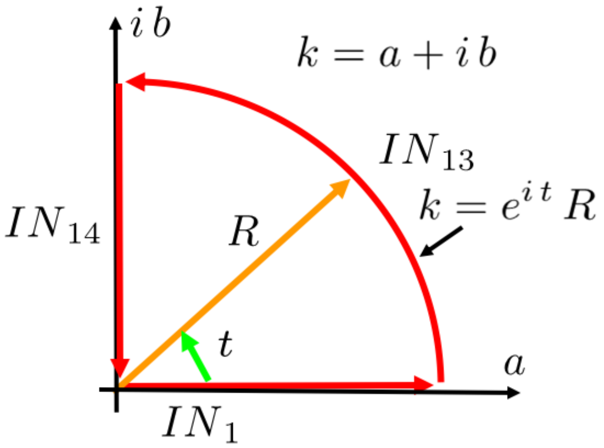


図 9.3.14: $x>0, IN_1$ の積分

$$
\begin{aligned}
IN_{13} =& \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\frac{i\,m\,e^{i\,t}\,R\,e^{e^{i\,t}\,y\,R+i\,e^{i\,t}\,x\,R-h\,e^{i\,t}\,R}}{e^{i\,t}\,R+i\,\mu-K_0}\,dt \\
=& \int_0^{\frac{\pi}{2}} -i\,m\,e^{e^{i\,t}\,y\,R+i\,e^{i\,t}\,x\,R-h\,e^{i\,t}\,R}\,dt \\
=& m\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos(t)\,y\,R-\sin(t)\,x\,R-h\cos(t)\,R} \\
& \times \sin\Bigl(\sin(t)\;y\,R+\cos(t)\;x\,R \\
& -h\sin(t)\;R\Bigr)dt \\
=& 0
\end{aligned}
\tag{9.3.94}
$$

IN_{14} について、k は下記のように表現でき、

$$
k=i\,b,\quad \frac{d}{d\,b}\,k=i
$$

$b=\infty\to 0$ の b 軸上の積分結果は $\mu\to 0$ として、$b\to k$ に置き換えて、下記となる。

$$
\begin{aligned}
IN_{14} =& \int_\infty^0 -\frac{i\,m\,e^{i\,b\,y-b\,x-i\,b\,h}}{i\,\mu+i\,b-K_0}\,db \\
=& i\,m\int_0^\infty \frac{e^{i\,k\,y-k\,x-i\,h\,k}}{i\,k-K_0}\,dk
\end{aligned}
\tag{9.3.95}
$$

また、下記の関係があり、

$$
IN_{14}+IN_{13}+IN_1=0
$$

IN_1 は (9.3.94) 式、(9.3.95) 式から下記となる。

$$
IN_1=-i\,m\int_0^\infty \frac{e^{i\,k\,y-k\,x-i\,h\,k}}{i\,k-K_0}\,dk \tag{9.3.96}
$$

```
/* x>0   IN2 */
/* IN[2]   */
KI2:k=K[0]+-%i*\mu+\delta*%e^(%i*t);
DKI2:'diff(k,t,1)=diff(rhs(KI2),t,1);
CKI22:subst([KI2,\delta=0,\mu=0],num(DIN2)
 );
subst([KI2],1/denom(DIN2));
%*rhs(DKI2);
integrate(%,t,0,2*%pi);
%*CKI22;
IN2:IN[22]=%;
/* IN[3]   */
KI3:k=R*%e^(%i*t);
DKI3:'diff(k,t,1)=diff(rhs(KI3),t,1);
subst([KI3],DIN2)*rhs(DKI3);
subst([K[0]=0,\mu=0],%);
IN[23]='integrate(realpart(%),t,0,-%pi/2);
IN3:IN[23]=0;
/* IN[4]   */
KI4:k=-%i*b;
DKI4:'diff(k,b,1)=diff(rhs(KI4),b,1);
subst([KI4],DIN2)*rhs(DKI4);
DIN4:subst([b=k,\mu=0],%);
IN4:IN[24]='integrate(DIN4,k,inf,0);
IN[2]+IN[22]+IN[23]+IN[24]=0;
subst([IN2,IN3,IN4],%);
IN21:solve(%,IN[2])[1];
IN[0]=rhs(IN11)+rhs(IN21);
realpart(%);
PH5:\phi=factor(rhs(%)-last(rhs(%)))
 +last(rhs(%))+rhs(PH31)+rhs(PH411);
PH51:\Phi=%e^(%i*\omega*t)*(rhs(IN11)
 +rhs(IN21)+rhs(PH31)+rhs(PH411));
subst([%],ET11);
ev(%,diff);
subst([y=0],%);
realpart(%);
trigreduce(%);
ET5:lhs(%)=factor(first(rhs(%)))
 +last(rhs(%));
```

(b)IN_2 の積分

k を複素平面で表現し、$k=a+i\,b$ とする。a 軸上は求める積分で、IN_2 である。線積分内の特異点:$k=K_0-i\,\mu$ では、半径：δ の円の積分で特異点を除き、IN_{22} とする。a 軸から b 軸に至る線積分は、十分大きい半径:R の円弧の線積分で、IN_{23} とする。b 軸上の線積分を IN_{24} とする。

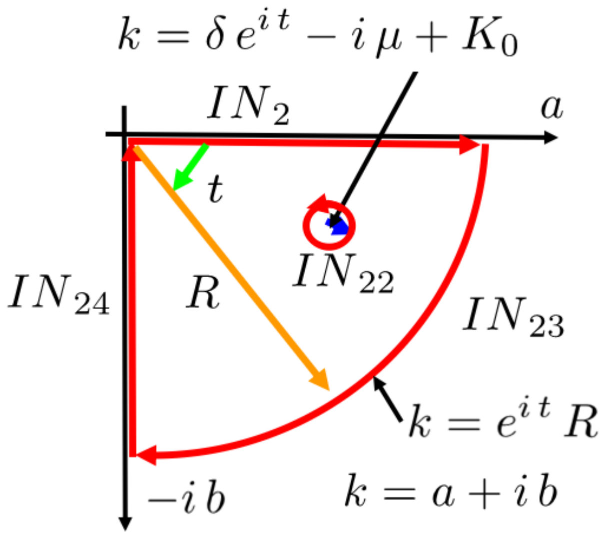


図 9.3.15: $x>0, IN_2$ の積分

IN_{22} について、k は下記のように表現でき、

$$k=\delta\,e^{i\,t}-i\,\mu+K_0,\quad \frac{d}{d\,t}\,k=i\,\delta\,e^{i\,t}$$

半径：δ が十分小さいとし、$t=0\to 2\,\pi$ の積分結果は下記となる。

$$\begin{aligned} IN_{22}&=-\,m\,e^{K_0\,y-i\,K_0\,x-K_0\,h}\int_0^{2\,\pi} i\,dt \\ &=-\,2\,i\,\pi\,m\,e^{K_0\,y-i\,K_0\,x-K_0\,h} \end{aligned} \tag{9.3.97}$$

IN_{23} について、k は下記のように表現でき、

$$k=e^{i\,t}\,R,\quad \frac{d}{d\,t}\,k=i\,e^{i\,t}\,R$$

$t=0\to-\pi/2$ の積分結果は、下記となり、半径：R が十分大きいとき $R>>K_0,\mu$ となり、$x>0,y<h$, $R>0, sin(t)<0, cos(t)>0$ から、

$$\begin{aligned} IN_{23}&=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} -\frac{i\,m\,e^{i\,t}\,R\,e^{e^{i\,t}\,y\,R-i\,e^{i\,t}\,x\,R-h\,e^{i\,t}\,R}}{e^{i\,t}\,R+i\,\mu-K_0}\,dt \\ &=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} -i\,m\,e^{e^{i\,t}\,y\,R-i\,e^{i\,t}\,x\,R-h\,e^{i\,t}\,R}\,dt \\ &=-\,m\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} e^{\cos(t)\,y\,R+\sin(t)\,x\,R-h\,\cos(t)\,R} \\ &\qquad\times\,\sin\Big(\sin\left(t\right)\,y\,R-\cos\left(t\right)\,x\,R \\ &\qquad-h\sin\left(t\right)\,R\Big)\,dt \\ &=0 \end{aligned} \tag{9.3.98}$$

IN_{24} について、k は下記のように表現でき、

$$k=-i\,b,\quad \frac{d}{d\,b}\,k=-i$$

$b=\infty\to 0$ の b 軸上の積分結果は $\mu\to 0$ として、$b\to k$ に置き換えて、下記となる。

$$\begin{aligned} IN_{24}&=\int_{\infty}^{0}\frac{i\,m\,e^{-i\,b\,y-b\,x+i\,b\,h}}{i\,\mu-i\,b-K_0}\,db \\ &=-\,i\,m\int_0^{\infty}\frac{e^{-i\,k\,y-k\,x+i\,h\,k}}{-i\,k-K_0}dk \end{aligned} \tag{9.3.99}$$

また、下記の関係があり、

$$IN_{24}+IN_{23}+IN_{22}+IN_2=0$$

IN_2 は (9.3.97) 式、(9.3.98) 式、(9.3.99) 式から下記となる。

$$\begin{aligned} IN_2=&i\,m\int_0^{\infty}\frac{e^{-i\,k\,y-k\,x+i\,h\,k}}{-i\,k-K_0}dk \\ &+2\,i\,\pi\,m\,e^{K_0\,y-i\,K_0\,x-K_0\,h} \end{aligned} \tag{9.3.100}$$

(9.3.93) 式、(9.3.96) 式、(9.3.99) 式から ϕ は下記となる。

$$\begin{aligned} \phi=&-\,2\,m\int_0^{\infty}\frac{e^{-k\,x}}{k^2+K_0^2}\Big(K_0\sin\left(k\,\left(y-h\right)\right) \\ &\qquad+k\cos\left(k\,\left(y-h\right)\right)\Big)dk \\ &+\frac{m\log\left(\left(y+h\right)^2+x^2\right)}{2} \\ &+2\,\pi\,m\sin\left(K_0\,x\right)\,e^{K_0\,y-K_0\,h} \\ &-\frac{m\log\left(\left(h-y\right)^2+x^2\right)}{2} \end{aligned} \tag{9.3.101}$$

また、Φ は (9.3.72) 式から

$$\begin{aligned} \Phi=e^{i\,\omega\,t}\Bigg(&-\,i\,m\int_0^{\infty}\frac{e^{i\,k\,y-k\,x-i\,h\,k}}{i\,k-K_0}dk \\ &+i\,m\int_0^{\infty}\frac{e^{-i\,k\,y-k\,x+i\,h\,k}}{-i\,k-K_0}dk \\ &+\frac{m\log\left(\left(y+h\right)^2+x^2\right)}{2} \\ &+2\,i\,\pi\,m\,e^{K_0\,y-i\,K_0\,x-K_0\,h} \\ &-\frac{m\log\left(\left(h-y\right)^2+x^2\right)}{2}\Bigg) \end{aligned} \tag{9.3.102}$$

波高：η は (9.3.78) 式から得られ、$y=0$ として、その実部を整理して下記となる。右辺第一項は $|x|\to\infty$ で零となる波で、右辺第二項は x の正の方向に進行する波を表している。

$$\begin{aligned} \eta=&\frac{2\,m\,\omega}{g}\sin\left(\omega\,t\right)\int_0^{\infty}\frac{\left(K_0\sin\left(h\,k\right)-k\cos\left(h\,k\right)\right)\,e^{-k\,x}}{k^2+K_0^2}dk \\ &+\frac{2\,\pi\,e^{-K_0\,h}\,m\,\omega}{g}\cos\left(K_0\,x-\omega\,t\right) \end{aligned} \tag{9.3.103}$$

(2)$x<0$ **の場合**

```
/* x<0   IN2 */
/* IN[3]   */
KI3:k=R*%e^(%i*t);
DKI3:'diff(k,t,1)=diff(rhs(KI3),t,1);
subst([KI3],DIN2)*rhs(DKI3);
subst([K[0]=0,\mu=0],%);
IN[23]='integrate(realpart(%),t,0,%pi/2);
IN3:IN[23]=0;
/* IN[4]   */
KI4:k=%i*b;
DKI4:'diff(k,b,1)=diff(rhs(KI4),b,1);
subst([KI4],DIN2)*rhs(DKI4);
DIN4:subst([b=k,\mu=0],%);
IN4:IN[24]='integrate(DIN4,k,inf,0);
IN[2]+IN[23]+IN[24]=0;
subst([IN3,IN4],%);
IN21:solve(%,IN[2])[1];
```

(b)IN_2 **の積分**

k を複素平面で表現し、$k=a+i\,b$ とする。a 軸上は求める積分で、IN_2 である。a 軸から b 軸に至る線積分は、十分大きい半径：R の円弧の線積分で、IN_{23} とする。b 軸上の線積分を IN_{24} とする。この線積分内に特異点はない。

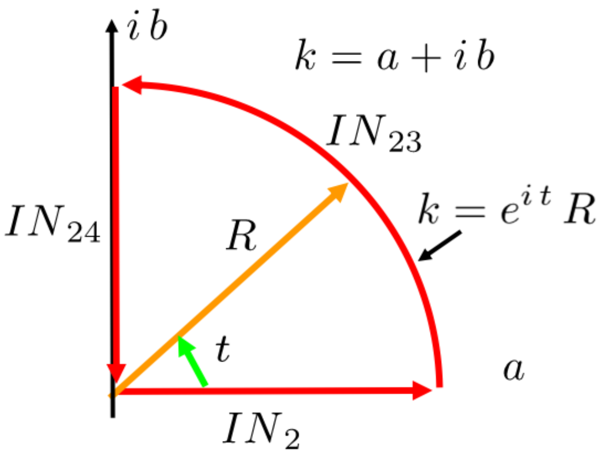


図 9.3.16: $x<0, IN_2$ の積分

IN_{23} について、k は下記のように表現でき、

$$k=e^{i\,t}\,R,\quad \frac{d}{d\,t}\,k=i\,e^{i\,t}\,R$$

$t=0\to\pi/2$ の積分結果は、下記となり、半径:R が十分大きいとき $R>>K_0,\mu$ となり、$x<0,y<h,R>0,$ $sin(t)>0,cos(t)>0$ から、

$$\begin{aligned}IN_{23}=&m\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{\cos(t)\,y\,R+\sin(t)\,x\,R-h\cos(t)\,R}\\&\times\sin\Big(\sin(t)\;y\,R-\cos(t)\;x\,R\\&-h\sin(t)\;R\Big)dt\\=&0\end{aligned}\tag{9.3.104}$$

IN_{24} について、k は下記のように表現でき、

$$k=i\,b,\quad \frac{d}{d\,b}\,k=i$$

$b=\infty\to 0$ の b 軸上の積分結果は $\mu\to 0$ として、$b\to k$ に置き換えて、下記となる。

$$\begin{aligned}IN_{24}=&\int_{\infty}^{0}-\frac{i\,m\,e^{i\,b\,y+b\,x-i\,b\,h}}{i\,\mu+i\,b-K_0}\,db\\=&i\,m\int_0^{\infty}\frac{e^{i\,k\,y+k\,x-i\,h\,k}}{i\,k-K_0}dk\end{aligned}\tag{9.3.105}$$

また、下記の関係があり、

$$IN_{24}+IN_{23}+IN_2=0$$

IN_2 は (9.3.104) 式、(9.3.105) 式から下記となる。

$$IN_2=-i\,m\int_0^{\infty}\frac{e^{i\,k\,y+k\,x-i\,h\,k}}{i\,k-K_0}dk\tag{9.3.106}$$

```
/* x<0   IN1 */
/* IN[2]   */
KI2:k=K[0]+-%i*\mu+\delta*%e^(%i*t);
DKI2:'diff(k,t,1)=diff(rhs(KI2),t,1);
CKI22:subst([KI2,\delta=0,\mu=0],num(DIN1)
 );
subst([KI2],1/denom(DIN1));
%*rhs(DKI2);
integrate(%,t,0,2*%pi);
%*CKI22;
IN2:IN[12]=%;
/* IN[3]   */
KI3:k=R*%e^(%i*t);
DKI3:'diff(k,t,1)=diff(rhs(KI3),t,1);
subst([KI3],DIN1)*rhs(DKI3);
subst([K[0]=0,\mu=0],%);
IN[23]='integrate(realpart(%),t,0,-%pi/2);
IN3:IN[13]=0;
/* IN[4]   */
KI4:k=-%i*b;
DKI4:'diff(k,b,1)=diff(rhs(KI4),b,1);
subst([KI4],DIN1)*rhs(DKI4);
DIN4:subst([b=k,\mu=0],%);
IN4:IN[14]='integrate(DIN4,k,inf,0);
```

```
IN[1]+IN[12]+IN[13]+IN[14]=0;
subst([IN2,IN3,IN4],%);
IN11:solve(%,IN[1])[1];
IN[0]=rhs(IN11)+rhs(IN21);
realpart(%);
PH6:\phi=factor(rhs(%)-last(rhs(%)))
 +last(rhs(%))+rhs(PH31)+rhs(PH411);
PH61:\Phi=%e^(%i*\omega*t)*(rhs(IN11)
 +rhs(IN21)+rhs(PH31)+rhs(PH411));
subst([%],ET11);
ev(%,diff);
subst([y=0],%);
realpart(%);
trigreduce(%);
ET6:lhs(%)=factor(first(rhs(%)))
 +last(rhs(%));
ET7:\eta[0]=abs(coeff(rhs(ET6),cos(K[0]*x
 +\omega*t)));
```

(a)IN_1 の積分

k を複素平面で表現し、$k=a+i\,b$ とする。a 軸上は求める積分で、IN_1 である。線積分内の特異点:$k=K_0-i\,\mu$ では、半径：δ の円の積分で特異点を除き、IN_{12} とする。a 軸から b 軸に至る線積分は、十分大きい半径:R の円弧の線積分で、IN_{13} とする。b 軸上の線積分を IN_{14} とする。

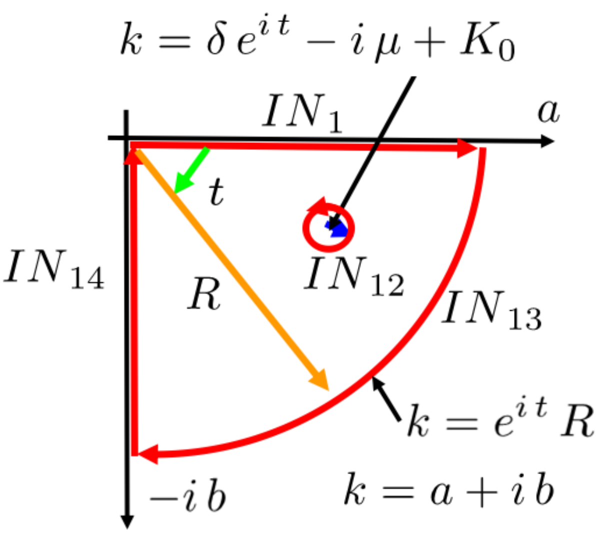


図 9.3.17: $x<0, IN_1$ の積分

IN_{12} について、k は下記のように表現でき、

$$k=\delta\,e^{i\,t}-i\,\mu+K_0,\quad \frac{d}{d\,t}\,k=i\,\delta\,e^{i\,t}$$

半径：δ が十分小さいとし、$t=0\rightarrow 2\,\pi$ の積分結果は下記となり、

$$IN_{12}=-2\,i\,\pi\,m\,e^{K_0\,y+i\,K_0\,x-K_0\,h} \tag{9.3.107}$$

IN_{13} について、k は下記のように表現でき、

$$k=e^{i\,t}\,R,\quad \frac{d}{d\,t}\,k=i\,e^{i\,t}\,R$$

$t=0\rightarrow -\pi/2$ の積分結果は、下記となり、半径：R が十分大きいとき $R>>K_0,\mu$ となり、$x<0, y<h$, $R>0, sin(t)<0, cos(t)>0$ から、

$$\begin{aligned}IN_{23}=&-m\,\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}e^{\cos(t)\,y\,R-\sin(t)\,x\,R-h\,\cos(t)\,R}\\&\times\sin\Big(\sin(t)\;y\,R+\cos(t)\;x\,R\\&-h\sin(t)\;R\Big)dt\\=&0\end{aligned} \tag{9.3.108}$$

IN_{14} について、k は下記のように表現でき、

$$k=-i\,b,\quad \frac{d}{d\,b}\,k=-i$$

$b=\infty\rightarrow 0$ の b 軸上の積分結果は $\mu\rightarrow 0$ として、$b\rightarrow k$ に置き換えて、下記となる。

$$\begin{aligned}IN_{14}=&\int_{\infty}^{0}\frac{i\,m\,e^{-i\,b\,y+b\,x+i\,b\,h}}{i\,\mu-i\,b-K_0}\,db\\=&-i\,m\,\int_{0}^{\infty}\frac{e^{-i\,k\,y+k\,x+i\,h\,k}}{-i\,k-K_0}dk\end{aligned} \tag{9.3.109}$$

また、下記の関係があり、

$$IN_{14}+IN_{13}+IN_{12}+IN_1=0$$

IN_1 は (9.3.107) 式、(9.3.108) 式、(9.3.109) 式から下記となる。

$$\begin{aligned}IN_1=&i\,m\,\int_{0}^{\infty}\frac{e^{-i\,k\,y+k\,x+i\,h\,k}}{-i\,k-K_0}dk\\&+2\,i\,\pi\,m\,e^{K_0\,y+i\,K_0\,x-K_0\,h}\end{aligned} \tag{9.3.110}$$

(9.3.93) 式、(9.3.106) 式、(9.3.110) 式から ϕ は下記となる。

$$\begin{aligned}\phi=&-2\,m\,\int_{0}^{\infty}\frac{e^{k\,x}}{k^2+K_0^2}\Big(K_0\sin\left(k\;(y-h)\right)\\&+k\cos\left(k\;(y-h)\right)\Big)dk\\&+\frac{m\log\left((y+h)^2+x^2\right)}{2}\\&-2\,\pi\,m\sin\left(K_0\,x\right)\,e^{K_0\,y-K_0\,h}\\&-\frac{m\log\left((h-y)^2+x^2\right)}{2}\end{aligned} \tag{9.3.111}$$

また、Φ は (9.3.72) 式から

$$\Phi=e^{i\,\omega\,t}\left(-i\,m\int_0^\infty\frac{e^{i\,k\,y+k\,x-i\,h\,k}}{i\,k-K_0}dk+i\,m\int_0^\infty\frac{e^{-i\,k\,y+k\,x+i\,h\,k}}{-i\,k-K_0}dk+\frac{m\log\left((y+h)^2+x^2\right)}{2}+2\,i\,\pi\,m\,e^{K_0\,y+i\,K_0\,x-K_0\,h}-\frac{m\log\left((h-y)^2+x^2\right)}{2}\right) \tag{9.3.112}$$

波高：η は (9.3.78) 式から得られ、$y=0$ として、その実部を整理して下記となる。右辺第一項は $|x|\to\infty$ で零となる波で、右辺第二項は x の負の方向に進行する波を表している。

$$\eta=\frac{2\,m\,\omega}{g}\sin(\omega\,t)\int_0^\infty\frac{(K_0\sin(h\,k)-k\cos(h\,k))\;e^{k\,x}}{k^2+K_0^2}dk+\frac{2\,\pi\,e^{-K_0\,h}\,m\,\omega}{g}\cos(K_0\,x+\omega\,t) \tag{9.3.113}$$

外部に進行していく波の波高：η_0 は下記となる。

$$\eta_0=\frac{2\,\pi\,e^{-K_0\,h}\,m\,\omega}{g} \tag{9.3.114}$$

例題 9.3.5　周期的に変動する二重わき出し強さによる二次元波

水面下 h にある二重わき出しの強さ：m が周期的に変動するときに生ずる波について調査する。波のない平衡状態での水面を x 軸とし、わき出しの中心を通り、鉛直上方に y 軸をとる。水深は十分深く、二重わき出しが起こした波の高さ：η、水の密度：ρ、重力加速度：g、時間：t、圧力：p とする。

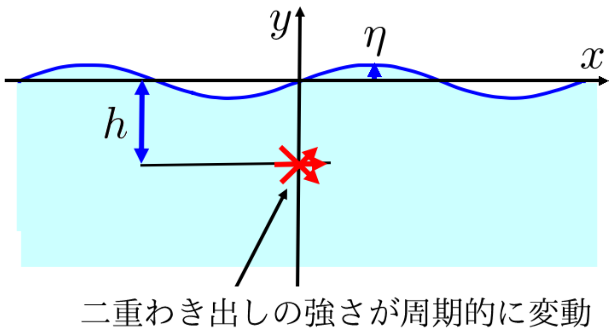


図 9.3.18: 周期的に変動する二重わき出し強さによる波

```
/* 二次元振動二重わき出しによる波の伝搬 \mu   */
kill(all);
load("vector");
depends(\eta,[x,t]);
depends(\Phi,[x,y,t]);
depends(\phi,[x,y]);
assume(g>0);
assume(y>0);
assume(h>0);
assume(K[0]>0);
assume(m>0);
assume(\omega>0);
PH0:\Phi=\phi*%e^(%i*\omega*t);
A0:\eta=A*%e^(%i*\omega*t);
EQ1:'diff(Phi,y,2)+'diff(Phi,x,2)=0;
BE1:p/\rho+g*y+\mu*\Phi+diff(\Phi,t,1)=C;
FS1:diff(\Phi,y,1)-diff(\eta,t,1)=0;
subst([C=p/\rho,y=\eta],BE1);
ET1:expand(solve(%,\eta)[1]);
diff(%,t,1);
FS11:subst([%],FS1);
ET11:subst([\mu=0],ET1);
subst([PH0],EQ1);
ev(%,diff);
EQ2:factor(%/(%e^(%i*omega*t)));
K1:K[0]=\omega^2/g;
```

```
K2:solve(K1,g)[1];
subst([PH0],FS11);
ev(%,diff);
expand(%/%e^(%i*omega*t));
FS2:subst([K2,\mu=\mu*\omega/K[0]],%);
subst([PH0,A0,\mu=0],ET1);
ev(%,diff);
subst([K2],%);
AM1:factor(%/%e^(%i*omega*t));
CAM1:coeff(rhs(AM1),\phi);
```

わき出しの強さ：m が円周波数：ω で周期的に変動する速度ポテンシャル：Φ を次式で表現する。

$$\Phi = \phi\, e^{i\,\omega\,t} \tag{9.3.115}$$

質量保存の方程式は、(9.1.1) 式から次式となる。

$$\frac{d^2}{d\,y^2}\,\Phi + \frac{d^2}{d\,x^2}\,\Phi = 0 \tag{9.3.116}$$

Bernoulli の定理の速度ポテンシャル表記は、(9.1.3) 式で高次の微小項を省き、粘性修正：$\mu\,\Phi$ を導入すると次式となる。

$$g\,y + \frac{p}{\rho} + \frac{d}{d\,t}\,\Phi + \mu\,\Phi = C \tag{9.3.117}$$

水面の運動学的条件で高次の微小項を省くと、(9.1.5) 式から次式となる。

$$\frac{d}{d\,y}\,\Phi - \frac{d}{d\,t}\,\eta = 0 \tag{9.3.118}$$

Bernoulli の定理：(9.3.117) 式で自由表面では圧力：p は一定であるから、$C \to p/\rho$ と置き換え、また、$y \to \eta$ と置き換えると、

$$\frac{p}{\rho} + \frac{d}{d\,t}\,\Phi + \mu\,\Phi + \eta\,g = \frac{p}{\rho}$$

上式から、波高：η を求めると、

$$\eta = -\frac{\frac{d}{d\,t}\,\Phi}{g} - \frac{\mu\,\Phi}{g} \tag{9.3.119}$$

上式を t で微分すると、

$$\frac{d}{d\,t}\,\eta = -\frac{\frac{d^2}{d\,t^2}\,\Phi}{g} - \frac{\mu\,\left(\frac{d}{d\,t}\,\Phi\right)}{g}$$

上式を水面の運動学的条件：(9.3.118) 式に代入すると、次式の自由表面条件が得られる。

$$\frac{d}{d\,y}\,\Phi + \frac{\frac{d^2}{d\,t^2}\,\Phi}{g} + \frac{\mu\,\left(\frac{d}{d\,t}\,\Phi\right)}{g} = 0 \tag{9.3.120}$$

また、波高：η は (9.3.119) 式から、$\mu = 0$ として、

$$\eta = -\frac{\frac{d}{d\,t}\,\Phi}{g} \tag{9.3.121}$$

質量保存の方程式：(9.3.116) 式に (9.3.115) 式を代入し、整理すると、

$$\frac{d^2}{d\,y^2}\,\phi+\frac{d^2}{d\,x^2}\,\phi=0 \tag{9.3.122}$$

自由表面条件：(9.3.120) 式に (9.3.115) 式を代入し、整理すると、

$$\frac{d}{d\,y}\,\phi-\frac{\omega^2\,\phi}{g}+\frac{i\,\mu\,\omega\,\phi}{g}=0$$

下記の置き換えを行い、

$$K_0=\frac{\omega^2}{g} \tag{9.3.123}$$

上記の自由表面条件に代入し、μ を次式のように再定義すると、

$$\frac{d}{d\,y}\,\phi+i\,\mu\,\phi-K_0\,\phi=0 \tag{9.3.124}$$

```
PH1:\phi=\phi[1]+\phi[2];
F=-\mu/(x+%i*y);
\Phi=realpart(rhs(%));
PH11:\phi[1]=m*x/(x^2+y^2);
DIN1:%e^(-k*y)*sin(k*x);
IN1:x/(x^2+y^2)='integrate(DIN1,k,0,inf);
IN31:subst([y=y+h],IN1);
DIN32:subst([y=y+h],DIN1);
PH31:\phi[1]=m*lhs(IN31);
PH311:\phi[1]=m*'integrate(DIN32,k,0,inf);
PH312:rhs(PH31)=rhs(PH311);
DPH31:m*DIN32;
DPH32:m*F(k)*subst([-k*y=k*y],DIN1);
PH32:\phi[2]='integrate(DPH32,k,0,inf);
PH33:\phi=DPH31+DPH32;
subst([PH33],FS2);
ev(%,diff);
subst([y=0],%);
solve(%,F(k))[1];
FK1:factor(%);
K3:K[1]=k-K[0]+%i*\mu;
K4:solve(K3,k)[1];
subst([K4],rhs(FK1));
FK2:expand(%);
FK21:last(FK2);
FK2-FK21;
factor(subst([K3],%));
FK22:subst([\mu=0],num(%))/denom(%);
DPH41:subst([F(k)=FK21,K3,\mu=0],DPH32);
expand(%);
PH41:\phi[21]='integrate(DPH41,k,0,inf);
subst([y+h=-y+h],PH312);
```

```
PH411:\phi[21]=lhs(%);
DPH42:subst([F(k)=FK22],DPH32);
PH42:\phi[22]='integrate(DPH42,k,0,inf);
PH4:\phi=\phi[1]+\phi[21]+\phi[22];
PH41:subst([PH31,PH411,PH42],%);
AM2:subst([PH41,y=0],AM1);
IN0:IN[0]='integrate(DPH42,k,0,inf);
CS1:sin(k*x)=%e^(%i*k*x)/(2*%i)
 -%e^(-%i*k*x)/(2*%i);
DIN0:expand(subst([CS1],DPH42));
DIN1:first(DIN0);
DIN2:last(DIN0);
IN1:IN[1]='integrate(DIN1,k,0,inf);
IN2:IN[2]='integrate(DIN2,k,0,inf);
IN01:IN[0]=rhs(IN1)+rhs(IN2);
```

速度ポテンシャル：ϕ を下記の ϕ_1,ϕ_2 に分ける。ϕ_1 は無限流体中のわき出しを表す速度ポテンシャルで、ϕ_2 は自由表面条件などを満足するように ϕ_1 を補正する関数とする。

$$\phi=\phi_2+\phi_1$$

二重わき出しの複素速度ポッテンシャル:F は、(5.1.32) 式、99 頁から、

$$F=-\frac{\mu}{i\,y+x}$$

上式の実部をとり、速度ポッテンシャル：Φ は、

$$\Phi=-\frac{\mu\,x}{y^2+x^2}$$

また、次式の積分公式：(A.9.12) 式、659 頁から、

$$\frac{x}{y^2+x^2}=\int_0^{\infty}\sin\left(k\,x\right)\,e^{-k\,y}dk \quad (y>0) \tag{9.3.125}$$

以上から、水面下 h に二重わき出しがある場合の速度ポテンシャルは次式で表せる。次式は当然ながら、質量保存の方程式を満足している。上式の積分公式を使って、

$$\begin{aligned}\phi_1=&\frac{m\,x}{\left(y+h\right)^2+x^2}\\ =&m\int_0^{\infty}\sin\left(k\,x\right)\,e^{-k\,(y+h)}dk \quad (y>-h)\end{aligned} \tag{9.3.126}$$

上式にならって、ϕ_2 に $\mathrm{F}\,(k)$ を導入し下記とする。次式も当然ながら、質量保存の方程式を満足している。

$$\phi_2=m\int_0^{\infty}\mathrm{F}\,(k)\,\sin\left(k\,x\right)\,e^{k\,y}dk \tag{9.3.127}$$

次に、(9.3.126) 式、(9.3.127) 式の被積分関数は下記となる。

$$\phi'=m\sin\left(k\,x\right)\,e^{-k\,(y+h)}+\mathrm{F}\,(k)\,m\sin\left(k\,x\right)\,e^{k\,y} \tag{9.3.128}$$

上式を自由表面条件：(9.3.124) 式に代入し、$y=0$ とし、$\mathrm{F}(k)$ を求めると、

$$\begin{aligned}\mathrm{F}(k)&=-\frac{e^{-h\,k}\,(i\,\mu-k-K_0)}{i\,\mu+k-K_0}\\&=e^{i\,h\,\mu-K_1\,h-K_0\,h}+\frac{2\,K_0\,e^{-h\,k}}{i\,\mu+k-K_0}\end{aligned}\tag{9.3.129}$$

上式右辺第一項を (9.3.127) 式に代入し、ϕ_{21} とし、(9.3.125) 式から、次式となる。

$$\begin{aligned}\phi_{21}&=m\int_0^{\infty}\sin(k\,x)\,e^{-k\,(h-y)}dk\quad(y<h)\\&=\frac{m\,x}{(h-y)^2+x^2}\end{aligned}\tag{9.3.130}$$

(9.3.129) 式右辺第二項を (9.3.127) 式に代入し、ϕ_{22} とし、次式となる。

$$\phi_{22}=2\,K_0\,m\int_0^{\infty}\frac{\sin(k\,x)\,e^{k\,y-h\,k}}{i\,\mu+k-K_0}dk\quad(y<h)\tag{9.3.131}$$

以上から、速度ポテンシャル：ϕ は、(9.3.126) 式、(9.3.130) 式、(9.3.131) 式から、

$$\begin{aligned}\phi&=\phi_{22}+\phi_{21}+\phi_1\\&=2\,K_0\,m\int_0^{\infty}\frac{\sin(k\,x)\,e^{k\,y-h\,k}}{i\,\mu+k-K_0}dk\\&\quad+\frac{m\,x}{(y+h)^2+x^2}+\frac{m\,x}{(h-y)^2+x^2}\end{aligned}\tag{9.3.132}$$

上式右辺第一項の積分：IN_0 について調べる。

$$IN_0=2\,K_0\,m\int_0^{\infty}\frac{\sin(k\,x)\,e^{k\,y-h\,k}}{i\,\mu+k-K_0}dk\tag{9.3.133}$$

(9.3.133) 式の $\sin(k\,x)$ を下記で置き換える。

$$\sin(k\,x)=\frac{i\,e^{-i\,k\,x}}{2}-\frac{i\,e^{i\,k\,x}}{2}$$

(9.3.133) 式の積分を分解し、

$$\begin{aligned}IN_0&=i\,K_0\,m\int_0^{\infty}\frac{e^{k\,y-i\,k\,x-h\,k}}{i\,\mu+k-K_0}dk\\&\quad-i\,K_0\,m\int_0^{\infty}\frac{e^{k\,y+i\,k\,x-h\,k}}{i\,\mu+k-K_0}dk\end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned}IN_1&=i\,K_0\,m\int_0^{\infty}\frac{e^{k\,y-i\,k\,x-h\,k}}{i\,\mu+k-K_0}dk\\IN_2&=-i\,K_0\,m\int_0^{\infty}\frac{e^{k\,y+i\,k\,x-h\,k}}{i\,\mu+k-K_0}dk\end{aligned}\tag{9.3.134}$$

(1)$x>0$ **の場合**

```
/* x>0   IN2 */
/* IN[3]   */
KI3:k=R*%e^(%i*t);
DKI3:'diff(k,t,1)=diff(rhs(KI3),t,1);
subst([KI3],DIN2)*rhs(DKI3);
subst([%i*\mu=K[0]],%);
IN[3]='integrate(realpart(%),t,0,%pi/2);
IN3:IN[13]=0;
/* IN[4]   */
KI4:k=%i*b;
DKI4:'diff(k,b,1)=diff(rhs(KI4),b,1);
subst([KI4],DIN2)*rhs(DKI4);
DIN4:subst([b=k,\mu=0],%);
IN4:IN[14]='integrate(DIN4,k,inf,0);
IN[2]+IN[13]+IN[14]=0;
subst([IN3,IN4],%);
IN11:solve(%,IN[2])[1];
```

(a)IN_2 **の積分**

k を複素平面で表現し、$k=a+i\,b$ とする。a 軸上は求める積分で、IN_2 である。a 軸から b 軸に至る線積分は、十分大きい半径：R の円弧の線積分で、IN_{13} とする。b 軸上の線積分を IN_{14} とする。この線積分内に特異点はない。

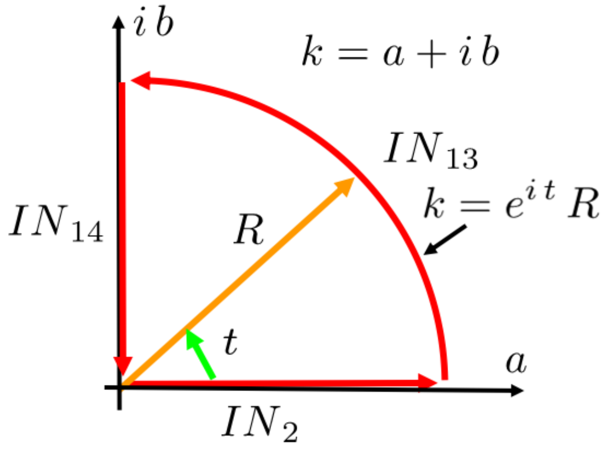


図 9.3.19: $x>0, IN_2$ の積分

IN_{13} について、k は下記のように表現でき、

$$k=e^{i\,t}\,R,\quad\frac{d}{d\,t}\,k=i\,e^{i\,t}\,R$$

$t=0\to\pi/2$ の積分結果は、下記となり、半径：R が十分大きいとき $R>>K_0,\mu$ となり、$x>0,y<h,R>0,$ $sin(t)>0,cos(t)>0$ から、

$$
\begin{aligned}
IN_{13} =& \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{K_0\, m\, R\, e^{e^{i\,t}\,y\,R+i\,e^{i\,t}\,x\,R-h\,e^{i\,t}\,R+i\,t}}{e^{i\,t}\,R+i\,\mu-K_0}\,dt \\
=& \int_0^{\frac{\pi}{2}} K_0\,m\,e^{e^{i\,t}\,y\,R+i\,e^{i\,t}\,x\,R-h\,e^{i\,t}\,R}\,dt \\
=& K_0\,m \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos(t)\,y\,R-\sin(t)\,x\,R-h\cos(t)\,R} \\
& \times \cos\Big(\sin(t)\;y\,R+\cos(t)\;x\,R \\
& - h\sin(t)\;R\Big)dt \\
=& 0
\end{aligned}
\tag{9.3.135}
$$

IN_{14} について、k は下記のように表現でき、

$$
k=i\,b,\quad \frac{d}{d\,b}\,k=i
$$

$b=\infty\rightarrow 0$ の b 軸上の積分結果は $\mu\rightarrow 0$ として、$b\rightarrow k$ に置き換えて、下記となる。

$$
\begin{aligned}
IN_{14} =& \int_\infty^0 \frac{K_0\,m\,e^{i\,b\,y-b\,x-i\,b\,h}}{i\,\mu+i\,b-K_0}\,db \\
=& -K_0\,m \int_0^\infty \frac{e^{i\,k\,y-k\,x-i\,h\,k}}{i\,k-K_0}\,dk
\end{aligned}
\tag{9.3.136}
$$

また、下記の関係があり、

$$
IN_{14}+IN_{13}+IN_2=0
$$

IN_2 は (9.3.135) 式、(9.3.136) 式から下記となる。

$$
IN_2=K_0\,m\int_0^\infty \frac{e^{i\,k\,y-k\,x-i\,h\,k}}{i\,k-K_0}\,dk \tag{9.3.137}
$$

```
/* x>0   IN1 */
/* IN[2]   */
KI2:k=K[0]+-%i*\mu+\delta*%e^(%i*t);
DKI2:'diff(k,t,1)=diff(rhs(KI2),t,1);
CKI22:subst([KI2,\delta=0,\mu=0],num(DIN1)
 );
subst([KI2],1/denom(DIN1));
%*rhs(DKI2);
integrate(%,t,0,2*%pi);
%*CKI22;
IN2:IN[22]=%;
/* IN[3]   */
KI3:k=R*%e^(%i*t);
DKI3:'diff(k,t,1)=diff(rhs(KI3),t,1);
subst([KI3],DIN1)*rhs(DKI3);
subst([%i*\mu=K[0]],%);
```

```
IN[23]='integrate(realpart(%),t,0,-%pi/2);
IN3:IN[23]=0;
/* IN[4]   */
KI4:k=-%i*b;
DKI4:'diff(k,b,1)=diff(rhs(KI4),b,1);
subst([KI4],DIN1)*rhs(DKI4);
DIN4:subst([b=k,\mu=0],%);
IN4:IN[24]='integrate(DIN4,k,inf,0);
IN[1]+IN[22]+IN[23]+IN[24]=0;
subst([IN2,IN3,IN4],%);
IN21:solve(%,IN[1])[1];
```

(b)IN_1 の積分

k を複素平面で表現し、$k=a+i\,b$ とする。a 軸上は求める積分で、IN_1 である。線積分内の特異点:$k=K_0-i\,\mu$ では、半径：δ の円の積分で特異点を除き、IN_{22} とする。a 軸から b 軸に至る線積分は、十分大きい半径:R の円弧の線積分で、IN_{23} とする。b 軸上の線積分を IN_{24} とする。

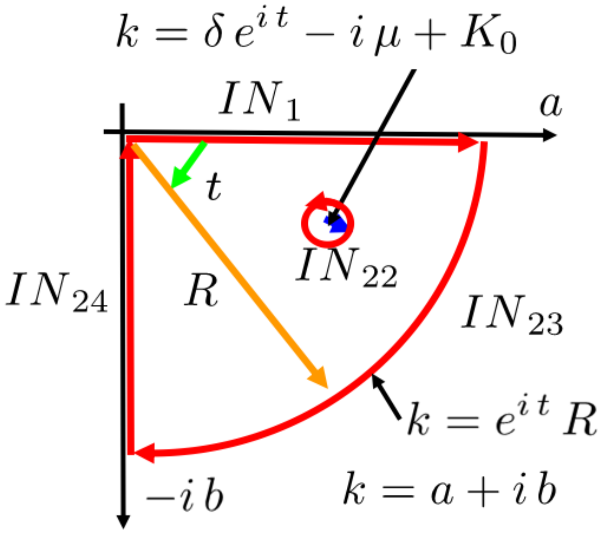


図 9.3.20: $x>0, IN_1$ の積分

IN_{22} について、k は下記のように表現でき、

$$
k=\delta\,e^{i\,t}-i\,\mu+K_0,\quad \frac{d}{d\,t}\,k=i\,\delta\,e^{i\,t}
$$

半径：δ が十分小さいとし、$t=0\rightarrow 2\,\pi$ の積分結果は下記となり、

$$
\begin{aligned}
IN_{22} =& i\,K_0\,m\,e^{K_0\,y-i\,K_0\,x-K_0\,h}\int_0^{2\,\pi} i\,dt \\
=& -2\,\pi\,K_0\,m\,e^{K_0\,y-i\,K_0\,x-K_0\,h}
\end{aligned}
\tag{9.3.138}
$$

IN_{23} について、k は下記のように表現でき、

$$k = e^{i\,t}\,R, \quad \frac{d}{d\,t}\,k = i\,e^{i\,t}\,R$$

$t = 0 \to -\pi/2$ の積分結果は、下記となり、半径：R が十分大きいとき $R >> K_0, \mu$ となり、$x > 0, y < h$, $R > 0, sin(t) < 0, cos(t) > 0$ から、

$$\begin{aligned}
IN_{23} =& \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} -\frac{K_0\,m\,e^{i\,t}\,R\,e^{e^{i\,t}\,y\,R - i\,e^{i\,t}\,x\,R - h\,e^{i\,t}\,R}}{e^{i\,t}\,R + i\,\mu - K_0}\,dt \\
=& \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} -K_0\,m\,e^{e^{i\,t}\,y\,R - i\,e^{i\,t}\,x\,R - h\,e^{i\,t}\,R}\,dt \\
=& K_0\,m\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} e^{\cos(t)\,y\,R + \sin(t)\,x\,R - h\cos(t)\,R} \\
& \times \cos\Big(\sin(t)\;y\,R - \cos(t)\;x\,R \\
& - h\sin(t)\;R\Big)dt \\
=& 0
\end{aligned} \tag{9.3.139}$$

IN_{24} について、k は下記のように表現でき、

$$k = -i\,b, \quad \frac{d}{d\,b}\,k = -i$$

$b = \infty \to 0$ の b 軸上の積分結果は $\mu \to 0$ として、$b \to k$ に置き換えて、下記となる。

$$\begin{aligned}
IN_{24} =& \int_{0}^{\infty} \frac{K_0\,m\,e^{-i\,b\,y - b\,x + i\,b\,h}}{i\,\mu - i\,b - K_0}\,db \\
=& -K_0\,m\int_{0}^{\infty} \frac{e^{-i\,k\,y - k\,x + i\,h\,k}}{-i\,k - K_0}dk
\end{aligned} \tag{9.3.140}$$

また、下記の関係があり、

$$IN_{24} + IN_{23} + IN_{22} + IN_1 = 0$$

IN_1 は (9.3.138) 式、(9.3.139) 式、(9.3.140) 式から下記となる。

$$\begin{aligned}
IN_1 =& K_0\,m\int_{0}^{\infty} \frac{e^{-i\,k\,y - k\,x + i\,h\,k}}{-i\,k - K_0}dk \\
& + 2\,\pi\,K_0\,m\,e^{K_0\,y - i\,K_0\,x - K_0\,h}
\end{aligned} \tag{9.3.141}$$

```
IN[0]=rhs(IN11)+rhs(IN21);
realpart(%);
PH5:\phi=rhs(%)+rhs(PH31)+rhs(PH411);
\phi=rhs(IN11)+rhs(IN21)+rhs(PH31)
 +rhs(PH411);
PH51:\Phi=%e^(%i*\omega*t)*(rhs(IN11)
 +rhs(IN21)+rhs(PH31)+rhs(PH411));
subst([%],ET11);
ev(%,diff);
subst([y=0],%);
ET51:expand(%);
```

```
ET52:realpart(rest(rhs(ET51),2));
rest(rhs(ET51),-2);
realpart(%);
trigreduce(%);
ET53:factor(%);
ET5:lhs(ET51)=ET52+ET53;
```

(9.3.134) 式、(9.3.137) 式、(9.3.141) 式から IN_0 は下記となる。

$$\begin{aligned}
IN_0 =& K_0\,m\int_{0}^{\infty} \frac{e^{i\,k\,y - k\,x - i\,h\,k}}{i\,k - K_0}dk \\
& + K_0\,m\int_{0}^{\infty} \frac{e^{-i\,k\,y - k\,x + i\,h\,k}}{-i\,k - K_0}dk \\
& + 2\,\pi\,K_0\,m\,e^{K_0\,y - i\,K_0\,x - K_0\,h}
\end{aligned} \tag{9.3.142}$$

ϕ は (9.3.132) 式から

$$\begin{aligned}
\phi =& K_0\,m\int_{0}^{\infty} \frac{e^{i\,k\,y - k\,x - i\,h\,k}}{i\,k - K_0}dk \\
& + K_0\,m\int_{0}^{\infty} \frac{e^{-i\,k\,y - k\,x + i\,h\,k}}{-i\,k - K_0}dk \\
& + 2\,\pi\,K_0\,m\,e^{K_0\,y - i\,K_0\,x - K_0\,h} \\
& + \frac{m\,x}{(y+h)^2 + x^2} + \frac{m\,x}{(h-y)^2 + x^2}
\end{aligned} \tag{9.3.143}$$

また、Φ は (9.3.115) 式から

$$\begin{aligned}
\Phi = e^{i\,\omega\,t}\Bigg(& K_0\,m\int_{0}^{\infty} \frac{e^{i\,k\,y - k\,x - i\,h\,k}}{i\,k - K_0}dk \\
& + K_0\,m\int_{0}^{\infty} \frac{e^{-i\,k\,y - k\,x + i\,h\,k}}{-i\,k - K_0}dk \\
& + 2\,\pi\,K_0\,m\,e^{K_0\,y - i\,K_0\,x - K_0\,h} \\
& + \frac{m\,x}{(y+h)^2 + x^2} + \frac{m\,x}{(h-y)^2 + x^2}\Bigg)
\end{aligned} \tag{9.3.144}$$

波高：η は (9.3.121) 式から得られ、$y = 0$ として、その実部を整理して下記となる。右辺第一項、第三項は $|x| \to \infty$ で零となる波で、右辺第二項は x の正の方向に進行する波を表している。

$$\begin{aligned}
\eta =& -\frac{2\,K_0\,m\,\omega}{g}\sin(\omega\,t) \\
& \times \int_{0}^{\infty} \frac{(k\sin(h\,k) + K_0\cos(h\,k))\;e^{-k\,x}}{k^2 + K_0^2}dk \\
& - \frac{2\,\pi\,K_0}{g}\,e^{-K_0\,h}\,m\,\omega\sin(K_0\,x - \omega\,t) \\
& + \frac{2\,m\,\omega\sin(\omega\,t)\;x}{g\,x^2 + g\,h^2}
\end{aligned} \tag{9.3.145}$$

(1)$x<0$ **の場合**

```
/* x<0   IN1 */
/* IN[3]   */
KI3:k=R*%e^(%i*t);
DKI3:'diff(k,t,1)=diff(rhs(KI3),t,1);
subst([KI3],DIN1)*rhs(DKI3);
subst([%i*\mu=K[0]],%);
IN[13]='integrate(realpart(%),t,0,%pi/2);
IN3:IN[13]=0;
/* IN[4]   */
KI4:k=%i*b;
DKI4:'diff(k,b,1)=diff(rhs(KI4),b,1);
subst([KI4],DIN1)*rhs(DKI4);
DIN4:subst([b=k,\mu=0],%);
IN4:IN[14]='integrate(DIN4,k,inf,0);
IN[1]+IN[13]+IN[14]=0;
subst([IN3,IN4],%);
IN21:solve(%,IN[1])[1];
```

(b)IN_1 **の積分**

k を複素平面で表現し、$k=a+i\,b$ とする。a 軸上は求める積分で、IN_1 である。a 軸から b 軸に至る線積分は、十分大きい半径：R の円弧の線積分で、IN_{13} とする。b 軸上の線積分を IN_{14} とする。この線積分内に特異点はない。

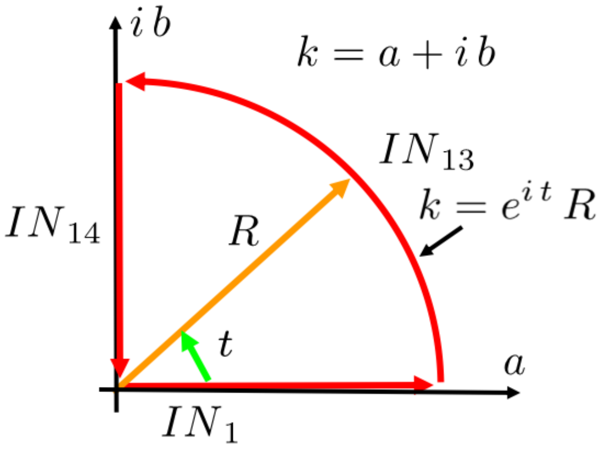


図 9.3.21: $x<0, IN_1$ の積分

IN_{13} について、k は下記のように表現でき、

$$k=e^{i\,t}\,R,\quad \frac{d}{d\,t}\,k=i\,e^{i\,t}\,R$$

$t=0\to\pi/2$ の積分結果は、下記となり、半径:R が十分大きいとき $R>>K_0,\mu$ となり、$x<0, y<h, R>0$, $sin(t)>0, cos(t)>0$ から、

$$\begin{aligned}IN_{13}=&\int_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{K_0\,m\,e^{i\,t}\,R\,e^{e^{i\,t}\,y\,R-i\,e^{i\,t}\,x\,R-h\,e^{i\,t}\,R}}{e^{i\,t}\,R+i\,\mu-K_0}dt\\ =&\int_0^{\frac{\pi}{2}}-K_0\,m\,e^{e^{i\,t}\,y\,R-i\,e^{i\,t}\,x\,R-h\,e^{i\,t}\,R}dt\\ =&-K_0\,m\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{\cos(t)\,y\,R+\sin(t)\,x\,R-h\cos(t)\,R}\\ &\cos\Big(\sin(t)\,y\,R-\cos(t)\,x\,R\\ &-h\sin(t)\,R\Big)dt\\ =&0\end{aligned}\tag{9.3.146}$$

IN_{14} について、k は下記のように表現でき、

$$k=i\,b,\quad \frac{d}{d\,b}\,k=i$$

$b=\infty\to 0$ の b 軸上の積分結果は $\mu\to 0$ として、$b\to k$ に置き換えて、下記となる。

$$\begin{aligned}IN_{14}=&\int_\infty^0-\frac{K_0\,m\,e^{i\,b\,y+b\,x-i\,b\,h}}{i\,\mu+i\,b-K_0}db\\ =&K_0\,m\int_0^\infty\frac{e^{i\,k\,y+k\,x-i\,h\,k}}{i\,k-K_0}dk\end{aligned}\tag{9.3.147}$$

また、下記の関係があり、

$$IN_{14}+IN_{13}+IN_1=0$$

IN_2 は (9.3.146) 式、(9.3.147) 式から下記となる。

$$IN_1=-K_0\,m\int_0^\infty\frac{e^{i\,k\,y+k\,x-i\,h\,k}}{i\,k-K_0}dk\tag{9.3.148}$$

```
/* x<0   IN2 */
/* IN[2]   */
KI2:k=K[0]+-%i*\mu+\delta*%e^(%i*t);
DKI2:'diff(k,t,1)=diff(rhs(KI2),t,1);
CKI22:subst([KI2,\delta=0,\mu=0],num(DIN2)
 );
subst([KI2],1/denom(DIN2));
%*rhs(DKI2);
integrate(%,t,0,2*%pi);
%*CKI22;
IN2:IN[22]=%;
/* IN[3]   */
KI3:k=R*%e^(%i*t);
DKI3:'diff(k,t,1)=diff(rhs(KI3),t,1);
subst([KI3],DIN2)*rhs(DKI3);
subst([%i*\mu=K[0]],%);
```

```
IN[23]='integrate(realpart(%),t,0,-%pi/2);
IN3:IN[23]=0;
/* IN[4]   */
KI4:k=-%i*b;
DKI4:'diff(k,b,1)=diff(rhs(KI4),b,1);
subst([KI4],DIN2)*rhs(DKI4);
DIN4:subst([b=k,\mu=0],%);
IN4:IN[24]='integrate(DIN4,k,inf,0);
IN[2]+IN[22]+IN[23]+IN[24]=0;
subst([IN2,IN3,IN4],%);
IN11:solve(%,IN[2])[1];
IN[0]=rhs(IN11)+rhs(IN21);
realpart(%);
PH6:\phi=rhs(%)+rhs(PH31)+rhs(PH411);
\phi=rhs(IN11)+rhs(IN21)+rhs(PH31)
 +rhs(PH411);
PH61:\Phi=%e^(%i*\omega*t)*(rhs(IN11)
 +rhs(IN21)+rhs(PH31)+rhs(PH411));
subst([%],ET11);
ev(%,diff);
subst([y=0],%);
ET61:expand(%);
ET62:realpart(rest(rhs(ET61),2));
rest(rhs(ET61),-2);
realpart(%);
trigreduce(%);
ET63:factor(%);
ET6:lhs(ET61)=ET62+ET63;
ET7:\eta[0]=abs(coeff(rhs(ET6),sin(K[0]*x
 +\omega*t)));
```

(b)IN_2 の積分

k を複素平面で表現し、$k=a+i\,b$ とする。a 軸上は求める積分で、IN_2 である。線積分内の特異点:$k=K_0-i\,\mu$ では、半径：δ の円の積分で特異点を除き、IN_{22} とする。a 軸から b 軸に至る線積分は、十分大きい半径：R の円弧の線積分で、IN_{23} とする。b 軸上の線積分を IN_{24} とする。

IN_{22} について、k は下記のように表現でき、

$$k=\delta\,e^{i\,t}-i\,\mu+K_0,\quad \frac{d}{d\,t}\,k=i\,\delta\,e^{i\,t}$$

半径：δ が十分小さいとし、$t=0\rightarrow 2\,\pi$ の積分結果は下記となり、

$$\begin{aligned}IN_{22}=&-i\,K_0\,m\,e^{K_0\,y+i\,K_0\,x-K_0\,h}\int_0^{2\,\pi} i\,dt\\ =&2\,\pi\,K_0\,m\,e^{K_0\,y+i\,K_0\,x-K_0\,h}\end{aligned}\tag{9.3.149}$$

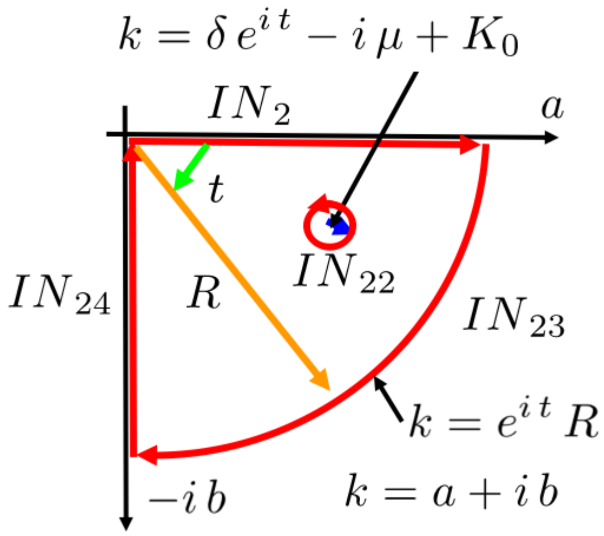


図 9.3.22: $x<0, IN_2$ の積分

IN_{23} について、k は下記のように表現でき、

$$k=e^{i\,t}\,R,\quad \frac{d}{d\,t}\,k=i\,e^{i\,t}\,R$$

$t=0\rightarrow -\pi/2$ の積分結果は、下記となり、半径：R が十分大きいとき $R>>K_0,\mu$ となり、$x<0, y<h,$ $R>0, sin(t)<0, cos(t)>0$ から、

$$\begin{aligned}IN_{23}=&\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{K_0\,m\,R\,e^{e^{i\,t}\,y\,R+i\,e^{i\,t}\,x\,R-h\,e^{i\,t}\,R+i\,t}}{e^{i\,t}\,R+i\,\mu-K_0}\,dt\\ =&\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}K_0\,m\,e^{e^{i\,t}\,y\,R+i\,e^{i\,t}\,x\,R-h\,e^{i\,t}\,R}\,dt\\ =&-K_0\,m\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}e^{\cos(t)\,y\,R-\sin(t)\,x\,R-h\,\cos(t)\,R}\\ &\times\cos\Big(\sin(t)\;y\,R+\cos(t)\;x\,R\\ &-h\sin(t)\;R\Big)dt\\ =&0\end{aligned}\tag{9.3.150}$$

IN_{24} について、k は下記のように表現でき、

$$k=-i\,b,\quad \frac{d}{d\,b}\,k=-i$$

$b=\infty\rightarrow 0$ の b 軸上の積分結果は $\mu\rightarrow 0$ として、$b\rightarrow k$ に置き換えて、下記となる。

$$\begin{aligned}IN_{24}=&\int_{\infty}^{0}-\frac{K_0\,m\,e^{-i\,b\,y+b\,x+i\,b\,h}}{i\,\mu-i\,b-K_0}\,db\\ =&K_0\,m\int_0^{\infty}\frac{e^{-i\,k\,y+k\,x+i\,h\,k}}{-i\,k-K_0}\,dk\end{aligned}\tag{9.3.151}$$

また、下記の関係があり、

$$IN_{24}+IN_{23}+IN_{22}+IN_2=0$$

IN_2 は (9.3.149) 式、(9.3.150) 式、(9.3.151) 式から下記となる。

$$IN_2 = -K_0\,m\int_0^\infty \frac{e^{-i\,k\,y+k\,x+i\,h\,k}}{-i\,k-K_0}dk - 2\,\pi\,K_0\,m\,e^{K_0\,y+i\,K_0\,x-K_0\,h} \tag{9.3.152}$$

(9.3.134) 式、(9.3.148) 式、(9.3.153) 式から IN_0 は下記となる。

$$\begin{aligned}IN_0 =& -K_0\,m\int_0^\infty \frac{e^{i\,k\,y+k\,x-i\,h\,k}}{i\,k-K_0}dk\\ & -K_0\,m\int_0^\infty \frac{e^{-i\,k\,y+k\,x+i\,h\,k}}{-i\,k-K_0}dk\\ & - 2\,\pi\,K_0\,m\,e^{K_0\,y+i\,K_0\,x-K_0\,h}\end{aligned} \tag{9.3.153}$$

ϕ は (9.3.132) 式から

$$\begin{aligned}\phi =& -K_0\,m\int_0^\infty \frac{e^{i\,k\,y+k\,x-i\,h\,k}}{i\,k-K_0}dk\\ & -K_0\,m\int_0^\infty \frac{e^{-i\,k\,y+k\,x+i\,h\,k}}{-i\,k-K_0}dk\\ & - 2\,\pi\,K_0\,m\,e^{K_0\,y+i\,K_0\,x-K_0\,h}\\ & + \frac{m\,x}{(y+h)^2+x^2} + \frac{m\,x}{(h-y)^2+x^2}\end{aligned} \tag{9.3.154}$$

また、Φ は (9.3.115) 式から

$$\begin{aligned}\Phi = e^{i\,\omega\,t}\Biggl(& -K_0\,m\int_0^\infty \frac{e^{i\,k\,y+k\,x-i\,h\,k}}{i\,k-K_0}dk\\ & -K_0\,m\int_0^\infty \frac{e^{-i\,k\,y+k\,x+i\,h\,k}}{-i\,k-K_0}dk\\ & - 2\,\pi\,K_0\,m\,e^{K_0\,y+i\,K_0\,x-K_0\,h}\\ & + \frac{m\,x}{(y+h)^2+x^2} + \frac{m\,x}{(h-y)^2+x^2}\Biggr)\end{aligned} \tag{9.3.155}$$

波高 : η は (9.3.121) 式から得られ、$y=0$ として、その実部を整理して下記となる。右辺第一項、第三項は $|x|\to\infty$ で零となる波で、右辺第二項は x の負の方向に進行する波を表している。

$$\begin{aligned}\eta =& \frac{2\,K_0\,m\,\omega}{g}\sin(\omega\,t)\int_0^\infty \frac{\left(k\sin(h\,k)+K_0\cos(h\,k)\right)\,e^{k\,x}}{k^2+K_0^2}dk\\ & - \frac{2\,\pi\,K_0\,e^{-K_0\,h}\,m\,\omega}{g}\sin(K_0\,x+\omega\,t)\\ & + \frac{2\,m\,\omega\sin(\omega\,t)\,x}{g\,x^2+g\,h^2}\end{aligned} \tag{9.3.156}$$

外部に進行していく波の波高 : η_0 は下記となる。

$$\eta_0 = \frac{2\,\pi\,K_0\,e^{-K_0\,h}\,m\,\omega}{g} \tag{9.3.157}$$

例題 9.3.6 二次元水中翼の水面影響

水面下 h にある水中翼が速度：U で進行するときに生ずる波の翼特性影響について調査する [1]。波のない平衡状態での水面を x 軸とし、翼の進行方向と逆の方向を正とする。翼の中心を通り、鉛直上方に y 軸をとる。翼の弦長：C_l、迎角：α とする。水深は十分深く、翼が起こした波の高さ：η、水の密度：ρ、重力加速度：g、圧力：p とする。

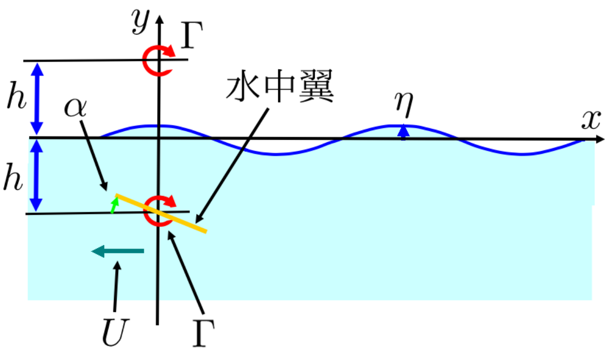


図 9.3.23: 水中翼の水面影響

```
/* 水中翼による波の伝搬  No.2 */
kill(all);
load("vector");
depends(\eta,[x]);
depends(\Phi,[x,y]);
depends(\phi,[x,y]);
assume(g>0);
assume(y>0);
assume(h>0);
assume(K[0]>0);
assume(k>0);
EQ1:'diff(Phi,y,2)+'diff(Phi,x,2)=0;
BE1:p/\rho+diff(\Phi,t,1)+g*y-\mu*\Phi
 +(diff(\Phi,x,1)^2+diff(\Phi,y,1)^2)/2
 =F(t);
FS1:diff(\Phi,y,1)-diff(\eta,t,1)=0;
PH0:\Phi=U*x+\phi;
subst([PH0],EQ1);
EQ2:ev(%,diff);
FS2:-('diff(\eta,x,1))*U+'diff(\phi,y,1)=0;
ET1:\eta=-diff(\phi,x,1)*U/g;
subst([F(t)=\p/\rho+U^2/2,PH0],BE1);
```

[1] 丸尾孟：水中翼に及ぼす水面の影響について、造船協会論文集第 86 号、1949.11、 P.43

```
ev(%,diff);
subst([g*y=g*\eta],%);
solve(%,\eta)[1];
expand(%);
BE2:lhs(%)=last(rest(rhs(%),-3))
 +last(rhs(%));
diff(BE2,x);
subst([%],FS2);
FS21:expand(%*g/U^2);
K1:K[0]=g/U^2;
K11:solve(K1,g)[1];
FS22:subst([K11,\mu=\mu*U],FS21);
FS23:subst([\mu=0],FS22);
```

一様流速：U がある速度ポテンシャル：Φ は、次式で表現できる。

$$\Phi = x\,U + \phi \tag{9.3.158}$$

質量保存の方程式は、(9.1.1) 式から次式となる。

$$\frac{d^2}{d\,y^2}\,\Phi + \frac{d^2}{d\,x^2}\,\Phi = 0 \tag{9.3.159}$$

上式に (9.3.158) 式を代入すると新たな質量保存の方程式は次式となる。

$$\frac{d^2}{d\,y^2}\,\phi + \frac{d^2}{d\,x^2}\,\phi = 0 \tag{9.3.160}$$

水面の運動学的条件で、波高が十分小さいとし、高次の微小項を省くと、(9.1.13) 式から、

$$\frac{d}{d\,y}\,\phi - \left(\frac{d}{d\,x}\,\eta\right)\,U = 0 \tag{9.3.161}$$

Bernoulli の定理の速度ポテンシャル表記は、(9.1.3) 式で、粘性修正：$\mu\,\Phi$ を導入すると次式となる。

$$g\,y + \frac{p}{\rho} + \frac{\left(\frac{d}{d\,y}\,\Phi\right)^2 + \left(\frac{d}{d\,x}\,\Phi\right)^2}{2} - \mu\,\Phi = \mathrm{F}\left(t\right) \tag{9.3.162}$$

上式に (9.3.158) 式を代入、$y \to \eta$ と置き換え、高次の項を省くと、

$$\eta = \frac{\mu\,\phi}{g} - \frac{\left(\frac{d}{d\,x}\,\phi\right)\,U}{g} \tag{9.3.163}$$

上式を x で微分し、

$$\frac{d}{d\,x}\,\eta = \frac{\mu\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\phi\right)}{g} - \frac{\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,\phi\right)\,U}{g}$$

上式を水面の運動学的条件：(9.3.161) 式に代入すると、、

$$-\frac{\mu\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\phi\right)}{U} + \frac{g\,\left(\frac{d}{d\,y}\,\phi\right)}{U^2} + \frac{d^2}{d\,x^2}\,\phi = 0$$

下記の置き換えを行い、

$$K_0=\frac{g}{U^2} \tag{9.3.164}$$

上記の自由表面条件に代入し、μ を次式のように再定義すると、

$$K_0\left(\frac{d}{d\,y}\,\phi\right)+\frac{d^2}{d\,x^2}\,\phi-\mu\left(\frac{d}{d\,x}\,\phi\right)=0 \tag{9.3.165}$$

```
PH0:\phi=\phi[1]+\phi[2];
PH1:F=%i*\Gamma/2/%pi*log(x+%i*y);
PH11:\phi[1]=realpart(rhs(PH1));
diff(PH11,y,1);
DIN1:%e^(-k*y)*sin(k*x);
IN1:x/(x^2+y^2)='integrate(DIN1,k,0,inf);
IN11:-IN1*\Gamma/2/%pi;
integrate(%,y);
DIN11:-DIN1*\Gamma/2/%pi;
DPH1:integrate(DIN11,y);
DPH11:subst([y=y+h],DPH1);
PH12:\phi[1]='integrate(DPH11,k,0,inf);
DPH2:F(k)*%e^(k*y)*sin(k*x);
PH2:\phi[2]='integrate(DPH2,k,0,inf);
SN2:sin(k*x)=-(%i*%e^(%i*k*x));
DPH12:subst([SN2],DPH11);
DPH22:subst([SN2],DPH2);
PH14:\phi[1]='integrate(DPH12,k,0,inf);
PH24:\phi[2]='integrate(DPH22,k,0,inf);
PH21:subst([PH14,PH24],PH0);
```

速度ポテンシャル：ϕ を下記の ϕ_1,ϕ_2 に分ける。ϕ_1 は無限流体中の二次元水中翼を表す速度ポテンシャルで、ϕ_2 は自由表面条件などを満足するように ϕ_1 を補正する関数とする。

$$\phi=\phi_2+\phi_1$$

二次元水中翼の渦糸の複素速度ポッテンシャル：F は、(5.1.31) 式、98 頁から、渦循環強さ：Γ の向きを右回りとして一般的に、

$$F=\frac{i\,\Gamma\log\left(i\,y+x\right)}{2\,\pi} \tag{9.3.166}$$

水中翼の速度ポテンシャル：ϕ_1 は上式の実部をとり、

$$\phi_1=-\frac{\Gamma\,\mathrm{atan2}\left(y,x\right)}{2\,\pi} \tag{9.3.167}$$

上式を y で微分し、

$$\frac{d}{d\,y}\,\phi_1=-\frac{\Gamma\,x}{2\,\pi\,\left(y^2+x^2\right)}$$

積分公式：(A.9.12) 式、659 頁から、

$$\frac{x}{y^2+x^2}=\int_0^\infty\sin\left(k\,x\right)\,e^{-k\,y}dk\quad y>0 \tag{9.3.168}$$

上式から、

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\,y}\,\phi_1&=-\frac{\Gamma\,x}{2\,\pi\,\left(y^2+x^2\right)}\\&=-\frac{\Gamma}{2\,\pi}\int_0^\infty\sin\left(k\,x\right)\,e^{-k\,y}dk\end{aligned}$$

上式を y で積分し、速度ポテンシャル：ϕ_1 は、

$$\phi_1=-\frac{\Gamma\,\mathrm{atan}\left(\frac{y}{x}\right)}{2\,\pi}=\frac{\Gamma}{2\,\pi}\int_0^\infty\frac{\sin\left(k\,x\right)\,e^{-k\,y}}{k}dk$$

上式から、水面下：h にある水中翼の速度ポテンシャル：ϕ_1 は次式となる。

$$\phi_1=\frac{\Gamma}{2\,\pi}\int_0^\infty\frac{\sin\left(k\,x\right)\,e^{-k\,(y+h)}}{k}dk\quad y>-h \tag{9.3.169}$$

ここで、下記と置けるから、

$$\sin\left(k\,x\right)=\Re\left(-i\,e^{i\,k\,x}\right)$$

水面下：h にある水中翼の速度ポテンシャル：ϕ_1 は、

$$\phi_1=-\frac{i\,\Gamma}{2\,\pi}\int_0^\infty\frac{e^{i\,k\,x-k\,(y+h)}}{k}dk\quad y>-h \tag{9.3.170}$$

上式は当然ながら、質量保存の方程式を満足している。この式にならって、ϕ_2 に $\mathrm{F}\left(k\right)$ を導入し、$y<0$ で成り立つように下記とする。

$$\phi_2=-i\int_0^\infty\mathrm{F}\left(k\right)\,e^{k\,y+i\,k\,x}dk \tag{9.3.171}$$

上式から、速度ポテンシャル：ϕ は、

$$\begin{aligned}\phi=&\phi_1+\phi_2\\=&-\frac{i\,\Gamma}{2\,\pi}\int_0^\infty\frac{e^{i\,k\,x-k\,(y+h)}}{k}dk\\&-i\int_0^\infty\mathrm{F}\left(k\right)\,e^{k\,y+i\,k\,x}dk\end{aligned} \tag{9.3.172}$$

```
\phi=DPH22+DPH12;
subst([%],FS22);
ev(%,diff);
subst([y=0],%);
solve(%,F(k))[1];
FK1:factor(%);
K3:K[1]=k-K[0]-%i*\mu;
K5:solve(K3,K[0])[1];
subst([K5,\mu=0],rhs(FK1));
factor(%);
FK2:expand(%);
```

```
FK21:F(k)=first(FK2);
FK2-rhs(FK21);
FK22:F(k)=factor(subst([K3],%));
DPH221:subst([FK21],DPH22);
PH221:\phi[21]='integrate(DPH221,k,0,inf);
DPH222:subst([FK22],DPH22);
PH222:\phi[22]='integrate(DPH222,k,0,inf);
PH3:\phi=\phi[1]+\phi[21]+\phi[22];
PH31:subst([PH14,PH221,PH222],PH3);
```

(9.3.172) 式の被積分関数は下記となる。

$$\phi=-\frac{i\,\Gamma\,e^{i\,k\,x-k\,(y+h)}}{2\,\pi\,k}-i\,\mathrm{F}\,(k)\;e^{k\,y+i\,k\,x}$$

上式を自由表面条件：(9.3.165) 式に代入し、$y=0$ とし、$\mathrm{F}\,(k)$ を求めると、

$$\begin{aligned}\mathrm{F}\,(k)=&-\frac{\Gamma\,e^{-h\,k}\;(\mu-i\,k-i\,K_0)}{2\,\pi\,k\;(\mu-i\,k+i\,K_0)}\\ =&\frac{\Gamma\,e^{-h\,k}}{2\,\pi\,k}+\frac{\Gamma\,e^{-h\,k}}{\pi\;(i\,\mu-k+K_0)}\end{aligned}\tag{9.3.173}$$

(9.3.173) 式右辺第一項を (9.3.171) 式に代入すると、下記となり、ϕ_1：(9.3.170) 式と対比して、渦が $y=h$ にあることを示している。

$$\phi_{21}=-\frac{i\,\Gamma}{2\,\pi}\int_0^{\infty}\frac{e^{k\,y+i\,k\,x-h\,k}}{k}dk\quad y<h\tag{9.3.174}$$

(9.3.173) 式右辺第二項を (9.3.171) 式に代入すると、

$$\phi_{22}=-\frac{i\,\Gamma}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{e^{k\,y+i\,k\,x-h\,k}}{i\,\mu-k+K_0}dk\tag{9.3.175}$$

以上から、速度ポテンシャル：ϕ は、

$$\begin{aligned}\phi=&\phi_1+\phi_{22}+\phi_{21}\\ =&-\frac{i\,\Gamma}{2\,\pi}\int_0^{\infty}\frac{e^{i\,k\,x-k\,(y+h)}}{k}dk\\ &-\frac{i\,\Gamma}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{e^{k\,y+i\,k\,x-h\,k}}{i\,\mu-k+K_0}dk\\ &-\frac{i\,\Gamma}{2\,\pi}\int_0^{\infty}\frac{e^{k\,y+i\,k\,x-h\,k}}{k}dk\end{aligned}\tag{9.3.176}$$

```
PH14;
diff(%,x,1);
u[1]=subst([x=0,y=0],rhs(%));
ev(%,integrate);
PH221;
diff(%,x,1);
u[21]=subst([x=0,y=0],rhs(%));
ev(%,integrate);
PH14;
diff(%,y,1);
v[1]=subst([y=-h],rhs(%));
diff(DPH12,y,1);
DVPH14:subst([y=-h],%);
```

ϕ_1 および ϕ_{21} による原点の x 軸方向の渦の誘導速度について調べる。(9.3.170) 式の ϕ_1 を x で微分すると、x 軸方向の誘導速度が得られ、$x=0,y=0$ を代入すると、原点における x 軸方向の誘導速度：u_1 が得られる。当然ながら、水面下：h の右回りの渦の誘導速度となっている。

$$\begin{aligned}u_1=\frac{d}{d\,x}\,\phi_1=&\frac{\Gamma}{2\,\pi}\int_0^{\infty}e^{i\,k\,x-k\,(y+h)}dk\\ =&\frac{\Gamma}{2\,\pi}\int_0^{\infty}e^{-h\,k}dk\\ =&\frac{\Gamma}{2\,\pi\,h}\end{aligned}\tag{9.3.177}$$

(9.3.174) 式の ϕ_{21} を x で微分すると、x 軸方向の誘導速度が得られ、$x=0,y=0$ を代入すると、原点における x 軸方向の誘導速度：u_{21} が得られる。

$$\begin{aligned}u_{21}=\frac{d}{d\,x}\,\phi_{21}=&\frac{\Gamma}{2\,\pi}\int_0^{\infty}e^{k\,y+i\,k\,x-h\,k}dk\\ =&\frac{\Gamma}{2\,\pi}\int_0^{\infty}e^{-h\,k}dk\\ =&\frac{\Gamma}{2\,\pi\,h}\end{aligned}\tag{9.3.178}$$

上記から、ϕ_{21} は水中翼の渦と対称の位置：$y=h$ に、水中翼とは渦循環強さは同じであるが、方向は反対の左回りの渦を表している。

```
assume(x>0);
/* IN[3] */
KI3:k=R*%e^(%i*t);
DKI3:'diff(k,t,1)=diff(rhs(KI3),t,1);
IN32:subst([KI3],DVPH14)*rhs(DKI3);
realpart(%);
/* IN[4] */
KI4:k=%i*b;
DKI4:'diff(k,b,1)=diff(rhs(KI4),b,1);
subst([KI4],DVPH14)*rhs(DKI4);
subst([b=k],%);
'integrate(%,k,inf,0);
v[11]=-ev(%,integrate);
forget(x>0);
assume(x<0);
/* IN[4] */
KI4:k=-%i*b;
DKI4:'diff(k,b,1)=diff(rhs(KI4),b,1);
subst([KI4],DVPH14)*rhs(DKI4);
subst([b=k],%);
'integrate(%,k,inf,0);
v[12]=-ev(%,integrate);
forget(x<0);
```

ϕ_1 による y 軸方向の渦の誘導速度について調べる。(9.3.170) 式の ϕ_1 を y で微分すると、y 軸方向の誘導速度が得られ、$y=-h$ を代入すると、渦位置における y 軸方向の誘導速度：v_1 が得られる。

$$\begin{aligned} v_1 = \frac{d}{d\,y}\,\phi_1 =& \frac{i\,\Gamma}{2\,\pi}\int_0^{\infty} e^{i\,k\,x-k\,(y+h)}dk \\ =& \frac{i\,\Gamma}{2\,\pi}\int_0^{\infty} e^{i\,k\,x}dk = IN_1 \end{aligned} \tag{9.3.179}$$

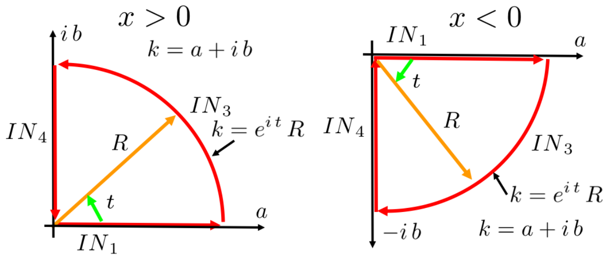


図 9.3.24: 積分経路

(9.3.179) 式の積分で、$x>0$ の場合について検討する。下図の IN_3 について、半径：R 上では、

$$k=e^{i\,t}\,R,\quad \frac{d}{d\,t}\,k=i\,e^{i\,t}\,R$$

であるから、これを (9.3.179) 式の被積分関数に代入し、その実部：ΔIN_3 は下記となる。

$$\Delta IN_3 = -\frac{\Gamma\,R\,e^{-\sin(t)\,x\,R}\cos\left(\cos(t)\,x\,R+t\right)}{2\,\pi} \tag{9.3.180}$$

$\sin(t)>0,\ x>0,\ R>0$ であるから、十分大きい R では、$IN_3=0$ となる。次に、IN_4 について、b 軸上では、

$$k=i\,b,\quad \frac{d}{d\,b}\,k=i$$

であるから、これを (9.3.179) 式に代入し、積分を実行すると、

$$IN_4=\frac{\Gamma}{2\,\pi}\int_0^{\infty} e^{-k\,x}dk=\frac{\Gamma}{2\,\pi\,x}$$

下記の関係から、

$$IN_1+IN_3+IN_4=0$$

上記から、

$$v_{11}=IN_1=-\frac{\Gamma}{2\,\pi\,x}$$

上記の結果は、渦の誘導速度を表しており、$x>0$ で負の方向である。

$x<0$ の場合について検討する。上図の IN_3 について、半径：R 上では、(9.3.180) 式から、$\sin(t)<0,\ x<0,\ R>0$ であるから、十分大きい R では、$IN_3=0$ となる。次に、IN_4 について、b 軸上では、

$$k=-i\,b,\quad \frac{d}{d\,b}\,k=-i$$

であるから、これを (9.3.179) 式に代入し、積分を実行すると、

$$IN_4=-\frac{\Gamma}{2\,\pi}\int_0^{\infty} e^{k\,x}dk=-\frac{\Gamma}{2\,\pi\,x}$$

下記の関係から、

$$IN_1+IN_3+IN_4=0$$

上記から、

$$v_{12}=IN_1=-\frac{\Gamma}{2\,\pi\,x}$$

上記の結果は、渦の誘導速度を表しており、$x<0$ で正の方向である。上記の検討結果から、上記で検討した渦の速度ポテンシャルが誘導速度を正しく表現できることが分かる。

```
PH4:\phi=rest(rhs(PH31),1);
U0:diff(PH4,x,1);
last(rhs(U0));
subst([x=0,y=-h],%);
U11:ev(%,integrate);
DU1:diff(DPH222,x,1);
K1:K[1]=k-K[0]-%i*\mu;
K2:solve(K1,k)[1];
subst([%],DU1);
expand(%);
DU2:subst([K1],%);
DU21:factor(last(DU2));
DU220:factor(last(rest(DU2,-1)));
DU22:-num(DU220)/%pi/rhs(K1);
U10:lhs(U0)=last(rhs(U0))+'integrate(DU21,
 k,0,inf)+'integrate(DU22,k,0,inf);
last(rhs(U10));
subst([x=0,y=-h],%);
U21:ev(%,integrate);
'integrate(DU22,k,0,inf);
subst([x=0,y=-h,\mu=0],%);
U22:+K[0]*Gamma/%pi*%e^(-2*h*K[0])
 *E[i](2*h*K[0]);
U01:u[i]=U21+U22;
```

水中翼の位置における流速から、水中翼特性の水面影響を求める。水中翼位置における流速は、水中翼の速度ポテンシャル：ϕ_1 を除いた速度ポテンシャルは下記と

なる。

$$\begin{aligned}\phi =&\phi_{22}+\phi_{21}\\ =&-\frac{i\,\Gamma}{\pi}\int_0^\infty \frac{e^{k\,y+i\,k\,x-h\,k}}{i\,\mu-k+K_0}dk\\ &-\frac{i\,\Gamma}{2\,\pi}\int_0^\infty \frac{e^{k\,y+i\,k\,x-h\,k}}{k}dk\end{aligned} \tag{9.3.181}$$

上式を x で微分し、水中翼位置における x 軸方向の流速：u_i を求める。

$$\begin{aligned}u_i=\frac{d}{d\,x}\,\phi =&\frac{\Gamma}{\pi}\int_0^\infty \frac{k\,e^{k\,y+i\,k\,x-h\,k}}{i\,\mu-k+K_0}dk\\ &+\frac{\Gamma}{2\,\pi}\int_0^\infty e^{k\,y+i\,k\,x-h\,k}dk\end{aligned} \tag{9.3.182}$$

上式の右辺第一項の被積分関数を展開すると、

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma\,k\,e^{k\,y+i\,k\,x-h\,k}}{\pi\,\left(i\,\mu-k+K_0\right)}=&-\frac{\Gamma\,e^{k\,y+i\,k\,x-h\,k}}{\pi}\\ &-\frac{K_0\,\Gamma\,e^{k\,y+i\,k\,x-h\,k}}{\pi\,\left(-i\,\mu+k-K_0\right)}\end{aligned}$$

上記の結果を (9.3.182) 式に代入すると、

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\,x}\,\phi =&\frac{\Gamma}{2\,\pi}\int_0^\infty e^{k\,y+i\,k\,x-h\,k}dk\\ &-\frac{K_0\,\Gamma}{\pi}\int_0^\infty \frac{e^{k\,y+i\,k\,x-h\,k}}{-i\,\mu+k-K_0}dk\\ &-\frac{\Gamma}{\pi}\int_0^\infty e^{k\,y+i\,k\,x-h\,k}dk\\ =&-\frac{K_0\,\Gamma}{\pi}\int_0^\infty \frac{e^{k\,y+i\,k\,x-h\,k}}{-i\,\mu+k-K_0}dk\\ &-\frac{\Gamma}{2\,\pi}\int_0^\infty e^{k\,y+i\,k\,x-h\,k}dk\end{aligned} \tag{9.3.183}$$

(9.3.183) 式の右辺第二項に $x=0.y=-h$ を代入し、積分すると、

$$\begin{aligned}-\frac{\Gamma\int_0^\infty e^{k\,y+i\,k\,x-h\,k}dk}{2\,\pi}=&-\frac{\Gamma\int_0^\infty e^{-2\,h\,k}dk}{2\,\pi}\\ =&-\frac{\Gamma}{4\,\pi\,h}\end{aligned}$$

(9.3.183) 式の右辺第二項に $x=0.y=-h$ を代入し、下記の公式 [1] から、

$$\int_0^\infty \frac{e^{-a\,x}}{x+b}\,dx=-e^{-a\,b}\,E_i\left(-a\,b\right)\quad a,b>0$$

積分結果は下記となる。ここで E_i は積分指数関数である。

$$\begin{aligned}&-\frac{K_0\,\Gamma}{\pi}\int_0^\infty \frac{e^{k\,y+i\,k\,x-h\,k}}{-i\,\mu+k-K_0}dk\\ =&-\frac{K_0\,\Gamma}{\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-2\,h\,k}}{k-K_0}dk\\ =&\frac{K_0\,\Gamma}{\pi}\,e^{-2\,K_0\,h}\,E_i\left(2\,K_0\,h\right)\end{aligned}$$

[1]森口　繁一他：岩波数学公式 1　微分積分・平面曲線、岩波書店 2003 [32]), P.230

以上から、x 軸方向の流速：u_i は、

$$u_i=\frac{d}{d\,x}\,\phi=\frac{K_0\,\Gamma}{\pi}\,e^{-2\,K_0\,h}\,E_i\left(2\,K_0\,h\right)-\frac{\Gamma}{4\,\pi\,h} \tag{9.3.184}$$

```
V0:diff(PH4,y,1);
DV1:diff(DPH222,y,1);
K1:K[1]=k-K[0]-%i*\mu;
K2:solve(K1,k)[1];
subst([%],DV1);
expand(%);
DV2:subst([K1],%);
DV21:factor(last(DV2));
DV22:factor(first(rest(DV2,1)));
V10:lhs(V0)=last(rhs(V0))+'integrate(DV21,
 k,0,inf)+'integrate(DV22,k,0,inf);
first(rhs(V10));
subst([x=0,y=-h],%);
ev(%,integrate);
V21:realpart(%);
DV230:subst([y=-h],DV22);
DV23:(-num(DV230))/(%pi*rhs(K1));
IN10:IN[1]='integrate(DV23,k,0,inf);
```

(9.3.181) 式を y で微分し、水中翼位置における y 軸方向の流速：v_i を求める。

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\,y}\,\phi =&-\frac{i\,\Gamma}{\pi}\int_0^\infty \frac{k\,e^{k\,y+i\,k\,x-h\,k}}{i\,\mu-k+K_0}dk\\ &-\frac{i\,\Gamma}{2\,\pi}\int_0^\infty e^{k\,y+i\,k\,x-h\,k}dk\end{aligned}$$

上式の右辺第一項を展開すると、

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\,y}\,\phi =&\frac{i\,\Gamma}{2\,\pi}\int_0^\infty e^{k\,y+i\,k\,x-h\,k}dk\\ &-\frac{i\,K_0\,\Gamma}{\pi}\int_0^\infty \frac{e^{k\,y+i\,k\,x-h\,k}}{i\,\mu-k+K_0}dk\end{aligned} \tag{9.3.185}$$

(9.3.185) 式右辺第一項は、下記となり、実部は零となる。

$$\begin{aligned}\frac{i\,\Gamma}{2\,\pi}\int_0^\infty e^{k\,y+i\,k\,x-h\,k}dk =&\frac{i\,\Gamma}{2\,\pi}\int_0^\infty e^{-2\,h\,k}dk\\ =&\frac{i\,\Gamma}{4\,\pi\,h}=0\end{aligned}$$

(9.3.185) 式右辺第二項は、次式と置いて、下記の線積分で求める。

$$IN_1=\frac{i\,K_0\,\Gamma}{\pi}\int_0^\infty \frac{e^{i\,k\,x-2\,h\,k}}{-i\,\mu+k-K_0}dk \tag{9.3.186}$$

```
/* IN[2]  */
KI2:k=K[0]+%i*\mu+\delta*%e^(%i*t);
DKI2:'diff(k,t,1)=diff(rhs(KI2),t,1);
CKI22:subst([KI2,\delta=0,\mu=0],num(DV23)
 );
subst([KI2],1/denom(DV23));
%*rhs(DKI2);
integrate(%,t,0,-2*%pi);
%*CKI22;
subst([x=0],%);
IN12:IN[12]=%;
/* IN[3] */
KI3:k=R*%e^(%i*t);
DKI3:'diff(k,t,1)=diff(rhs(KI3),t,1);
IN32:subst([KI3],DV23)*rhs(DKI3);
num(IN32)/subst([\mu=0,K[0]=0],denom(IN32)
 );
realpart(%);
IN13:IN[13]=0;
/* IN[4] */
KI4:k=%i*b;
DKI4:'diff(k,b,1)=diff(rhs(KI4),b,1);
subst([KI4],DV23)*rhs(DKI4);
DIN4:subst([\mu=0,b=k],%);
'integrate(DIN4,k,inf,0);
subst([x=0],%);
IN14:IN[14]=realpart(%);
IN[1]+IN[12]+IN[13]+IN[14]=0;
solve(%,IN[1])[1];
IN11:subst([IN12,IN13,IN14],%);
```

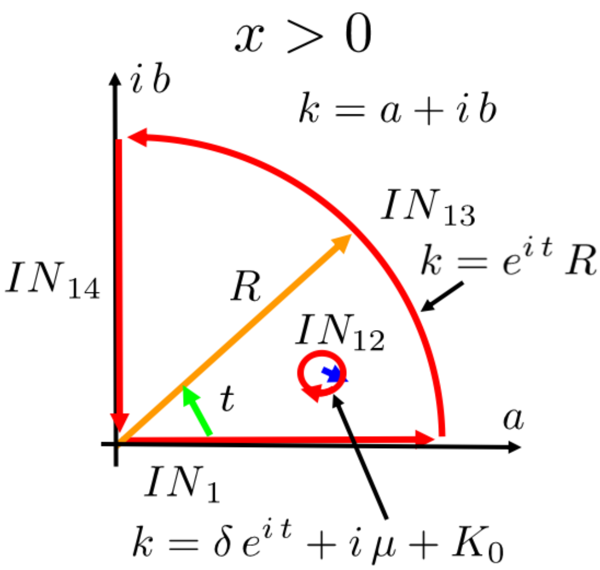


図 9.3.25: 積分経路　$x>0$

$x>0$ の場合、k を複素平面で表現し、$k=a+i\,b$ とする。a 軸上は求める積分で、IN_1 である。線積分内の特異点：$k=K_0+i\,\mu$ では、半径：δ の円の積分で特異点を除き、IN_{12} とする。a 軸から b 軸に至る線積分は、十分大きい半径：R の円弧の線積分で、IN_{13} とする。b 軸上の線積分を IN_{14} とする。

IN_{12} について、k は下記のように表現でき、

$$k=\delta\,e^{i\,t}+i\,\mu+K_0,\quad \frac{d}{d\,t}\,k=i\,\delta\,e^{i\,t}$$

半径：δ が十分小さいとし、$t=0\to-2\,\pi$ の積分結果は下記となり、$x=0$ とおき、

$$\begin{aligned}IN_{12}=&i\,\frac{K_0\,\Gamma}{\pi}\,e^{i\,K_0\,x-2\,K_0\,h}\int_0^{-2\,\pi}i\,dt\\=&2\,K_0\,\Gamma\,e^{-2\,K_0\,h}\end{aligned}\tag{9.3.187}$$

円上の積分：IN_{13} では、下記の関係を (9.3.186) 式に代入し、

$$k=e^{i\,t}\,R,\quad \frac{d}{d\,t}\,k=i\,e^{i\,t}\,R$$

その被積分関数は R が十分大きいとすると、

$$\begin{aligned}&-\frac{K_0\,\Gamma\,e^{i\,t}\,R\,e^{i\,e^{i\,t}\,x\,R-2\,h\,e^{i\,t}\,R}}{\pi\,\left(e^{i\,t}\,R-i\,\mu-K_0\right)}\\&=-\frac{K_0\,\Gamma\,e^{-i\,t}\,e^{i\,e^{i\,t}\,x\,R-2\,h\,e^{i\,t}\,R+i\,t}}{\pi}\\&=-\frac{K_0\,\Gamma}{\pi}\left(\sin(t)\;e^{-\sin(t)\,x\,R-2\,h\cos(t)\,R}\right.\\&\quad\times\sin\left(\cos(t)\;x\,R-2\,h\sin(t)\;R+t\right)\\&\quad+\cos(t)\;e^{-\sin(t)\,x\,R-2\,h\cos(t)\,R}\\&\quad\left.\times\cos\left(\cos(t)\;x\,R-2\,h\sin(t)\;R+t\right)\right)\end{aligned}\tag{9.3.188}$$

上記で、$x>0,\,h>0,\,R>0,\,\sin(t)>0,\,\cos(t)>0$ で R が十分大きいとき、下記となる。

$$IN_{13}=0\tag{9.3.189}$$

b 軸上の積分：IN_{14} では、下記の関係を (9.3.186) 式に代入し、

$$k=i\,b,\quad \frac{d}{d\,b}\,k=i$$

$x=0,y=-h$ を代入、$b=\infty\to0$ の b 軸上の積分結果は $\mu\to0$ とし、$b\to k$ に置き換え、その実部をとると、

$$\begin{aligned}IN_{14}=&\frac{K_0\,\Gamma}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{e^{-2\,i\,h\,k}}{i\,k-K_0}dk\\=&\frac{K_0\,\Gamma}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{-k\sin(2\,h\,k)-K_0\cos(2\,h\,k)}{k^2+K_0^2}dk\end{aligned}\tag{9.3.190}$$

また、下記の関係があり、

$$IN_{14}+IN_{13}+IN_{12}+IN_{1}=0$$

IN_1 は (9.3.187) 式、(9.3.189) 式、(9.3.190) 式から下記となる。

$$IN_1=-\frac{K_0\,\Gamma}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{-k\sin\left(2\,h\,k\right)-K_0\cos\left(2\,h\,k\right)}{k^2+K_0^2}dk-2\,K_0\,\Gamma\,e^{-2\,K_0\,h} \tag{9.3.191}$$

```
IN23:IN[23]=0;
/* IN[4] */
KI4:k=-%i*b;
DKI4:'diff(k,b,1)=diff(rhs(KI4),b,1);
subst([KI4],DV23)*rhs(DKI4);
DIN4:subst([\mu=0,b=k],%);
'integrate(DIN4,k,inf,0);
subst([x=0],%);
IN24:IN[24]=realpart(%);
IN[1]+IN[23]+IN[24]=0;
solve(%,IN[1])[1];
IN21:subst([IN23,IN24],%);
V01:v[i]=(rhs(IN11)+rhs(IN21))/2;
```

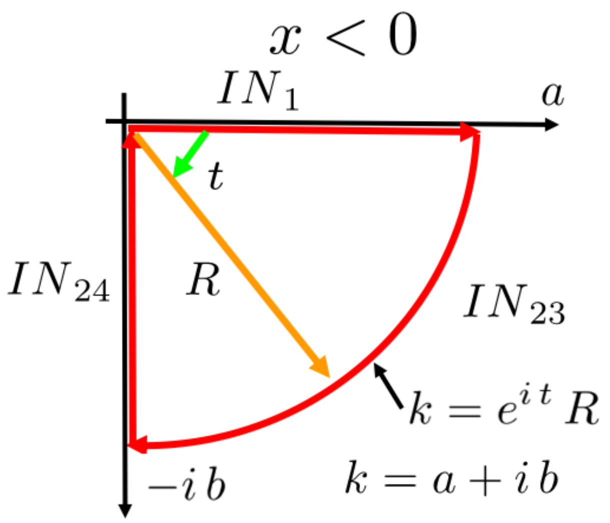


図 9.3.26: 積分経路　$x<0$

$x<0$ の場合、k を複素平面で表現し、$k=a+i\,b$ とする。a 軸上は求める積分で、IN_1 である。a 軸から b 軸に至る線積分は、十分大きい半径：R の円弧の線積分で、IN_{23} とする。b 軸上の線積分を IN_{24} とする。

円上の積分：IN_{23} では、(9.3.188) 式で $x<0,\,h>0,\,R>0,\,\sin(t)<0,\,\cos(t)>0$ で R が十分大きいとき、下記となる。

$$IN_{23}=0 \tag{9.3.192}$$

b 軸上の積分：IN_{24} では、下記の関係を (9.3.186) 式に代入し、

$$k=-i\,b,\quad \frac{d}{d\,b}\,k=-i$$

$x=0,y=-h$ を代入、$b=\infty\to 0$ の b 軸上の積分結果は $\mu\to 0$ とし、$b\to k$ に置き換え、その実部をとると、

$$\begin{aligned}IN_{24}&=-\frac{K_0\,\Gamma}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{e^{2\,i\,h\,k}}{-i\,k-K_0}dk\\&=-\frac{K_0\,\Gamma}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{-k\sin\left(2\,h\,k\right)-K_0\cos\left(2\,h\,k\right)}{k^2+K_0^2}dk\end{aligned} \tag{9.3.193}$$

また、下記の関係があり、

$$IN_{24}+IN_{23}+IN_{1}=0$$

IN_1 は (9.3.192) 式、(9.3.193) 式から下記となる。

$$IN_1=\frac{K_0\,\Gamma}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{-k\sin\left(2\,h\,k\right)-K_0\cos\left(2\,h\,k\right)}{k^2+K_0^2}dk \tag{9.3.194}$$

水中翼位置における y 軸方向の誘導速度:v_i で、(9.3.191) 式は $x=+0$ における値であり、(9.3.194) 式は $x=-0$ における値であるから、$x=0$ における値は、これらの平均値となり、下記となる。

$$v_i=-K_0\,\Gamma\,e^{-2\,K_0\,h} \tag{9.3.195}$$

```
EI0:E[i](z)=0.577215664901532+log(z)
 +sum(((z)^(n)/n/n!) ,n,1,20);
EI1:subst([z=2*K[Y]],%);
U01;
UN1:expand(U01/\Gamma*h);
KY1:K[Y]=K[0]*h;
KY2:solve(KY1,K[0])[1];
UN2:u[n]=lhs(UN1);
UN21:subst([KY2],u[n]=rhs(UN1));
UN23:subst([EI1],UN21);
UN22:solve(UN2,u[i])[1];
V01;
VN1:expand(V01/\Gamma*h);
VN2:v[n]=lhs(VN1);
VN21:subst([KY2],v[n]=rhs(VN1));
VN22:solve(VN2,v[i])[1];
FN1:F[h]=U/sqrt(g*h);
FN11:solve(FN1,U)[1];
subst([K[0]=g/U^2],KY1);
FN12:subst([FN11],%);
PLU2:subst([K[Y]=t],rhs(UN23));
PLV2:subst([K[Y]=t],rhs(VN21));
```

```
plot2d([PLU2,PLV2,-1/4/%pi],[t,0.001,100],
 [legend, "un","vn","-1/4\pi"],[logx]);
PLU2:subst([K[Y]=1/t^2],rhs(UN23));
PLV2:subst([K[Y]=1/t^2],rhs(VN21));
diff(PLV2,t,1)=0;
solve(%,t);
plot2d([PLU2,PLV2,-1/4/%pi],[t,0.1,100],
 [legend, "un","vn","-1/4\pi"],[logx]);
```

x 軸方向の流速：u_i：(9.3.184) 式を Γ, h で無次元化し、次式とする。

$$\begin{aligned} u_n =& \frac{h\,u_i}{\Gamma} \\ =& \frac{e^{-2\,K_Y}\,K_Y\,E_i\left(2\,K_Y\right)}{\pi} - \frac{1}{4\,\pi} \\ & \text{ここで、} K_Y = K_0\,h \end{aligned} \tag{9.3.196}$$

y 軸方向の流速：v_i：(9.3.195) 式を Γ, h で無次元化し、次式とする。

$$\begin{aligned} v_n =& \frac{h\,v_i}{\Gamma} = -e^{-2\,K_Y}\,K_Y \\ & \text{ここで、} K_Y = K_0\,h \end{aligned} \tag{9.3.197}$$

水中翼位置における誘導速度：u_n, v_n を以下に示す。ここで横軸として下記を用いる。

$$K_Y = \frac{g\,h}{U^2}, \quad F_h = \frac{U}{\sqrt{g}\,\sqrt{h}} \tag{9.3.198}$$

ここで積分指数関数：E_i は次式で近似する。

$$E_i\left(z\right) = \left(\sum_{n=1}^{20} \frac{z^n}{n\,n!}\right) + \log\left(z\right) + 0.57721566490153$$

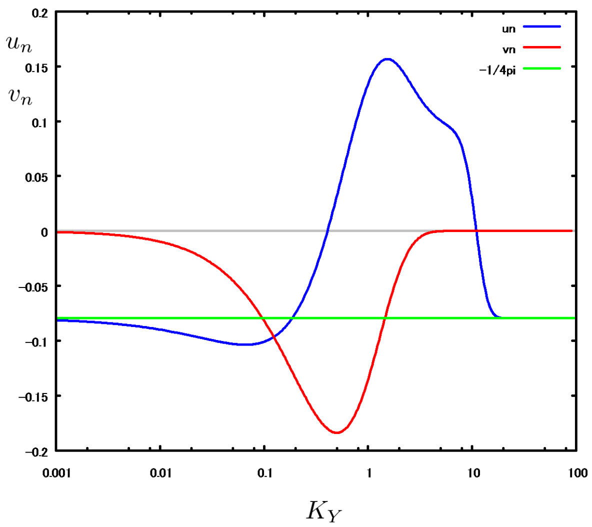


図 9.3.27: 水中翼位置における誘導速度　横軸：K_Y

$|v_n|$ が最大となる F_h を求める。(9.3.197) 式から、

$$v_n = -\frac{e^{-\frac{2}{t^2}}}{t^2}, \quad \text{ここで、} t = F_h$$

上式を t で微分し、右辺を零とおき、

$$\frac{2\,e^{-\frac{2}{t^2}}}{t^3} - \frac{4\,e^{-\frac{2}{t^2}}}{t^5} = 0$$

解を求めると、

$$[t = -\sqrt{2}, t = \sqrt{2}]$$

以上から、$F_h = \sqrt{2}$ のとき、$|v_n|$ が最大となる。

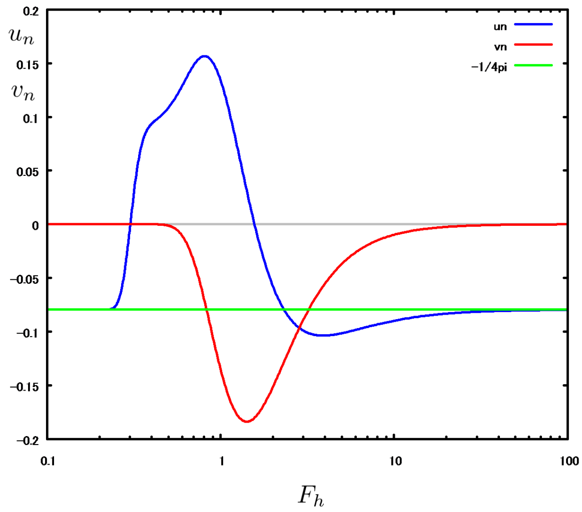


図 9.3.28: 水中翼位置における誘導速度　横軸：F_h

上図から、$F_h < 0.25$　$F_h > 40$ では、$v_n \approx 0, u_n \approx -\frac{1}{4\pi}$ となり、この範囲では、水面に対し、水中翼と対称の位置に、水中翼と同じ渦循環強さ、同じ向きの渦をおくことに対応している。

```
G0:\Gamma[0]=%pi*C[l]*U*\alpha;
L0:L[0]=\rho*U*\Gamma[0];
AL1:solve(G0,\alpha)[1];
G1:\Gamma=%pi*C[l]*(U+u[i])*(\alpha
 +v[i]/(U+u[i]));
L1:L=\rho*\Gamma*(U+u[i]);
subst([UN22,VN22,AL1],G1);
G11:solve(%,\Gamma)[1];
G12:-num(rhs(%))/h/U;
G13:expand(-denom(rhs(G11))/h/U);
G14:lhs(G11)=G12/G13;
CL1:C[L]=L/(1/2*\rho*U^2*C[l]);
CL11:solve(CL1,L)[1];
CL0:C[0]=L[0]/(1/2*\rho*U^2*C[l]);
subst([L0],CL0);
```

```
CL01:solve(%,\Gamma[0])[1];
CLH1:a=C[l]/h;
CLH11:solve(CLH1,C[l])[1];
subst([UN22,G14],L1);
subst([CL11,CL01],%);
%*2/C[l]/\rho/U^2/C[0];
CL12:factor(%);
expand(num(rhs(CL12))/(4*h^2));
CL13:subst([CLH11],%);
expand(denom(rhs(CL12))/(4*h^2));
subst([CLH11],%);
CL14:factor(%);
CL15:lhs(CL12)=CL13/CL14;
CL2:subst([VN21,UN21],CL15);
CL21:subst([VN21,UN23],CL15);
subst([FN12],CL2);
CL22:subst([FN12],CL21);
CL31:subst([a=1.0,C[0]=0.5,F[h]=t],
 rhs(CL22));
CL32:subst([a=0.5,C[0]=0.5,F[h]=t],
 rhs(CL22));
CL33:subst([a=0.25,C[0]=0.5,F[h]=t],
 rhs(CL22));
CL34:subst([a=0.125,C[0]=0.5,F[h]=t],
 rhs(CL22));
plot2d([CL31,CL32,CL33,CL34],[t,0.1,20],
 [x,0,10],[legend,"h/Cl=1","h/Cl=2",
 "h/Cl=4","h/Cl=8"]);
```

二次元平板翼で翼弦長：C_l、迎角：α とすると、渦循環強さ：Γ_0、揚力：L_0 は (7.1.21) 式、(7.1.22) 式、261 頁から下記となる。

$$L_0=\Gamma_0\,\rho\,U,\quad \Gamma_0=\pi\,\alpha\,C_l\,U,\quad \alpha=\frac{\Gamma_0}{\pi\,C_l\,U} \tag{9.3.199}$$

上式から水中翼位置における誘導速度：$u_i,\,v_i$ を考慮すると、渦循環強さ：Γ、揚力：L は、

$$\begin{aligned} L=&\Gamma\,\rho\,\left(U+u_i\right)\\ \Gamma=&\pi\,C_l\,\left(U+u_i\right)\,\left(\frac{v_i}{U+u_i}+\alpha\right)\end{aligned} \tag{9.3.200}$$

Γ の $u_i,\,v_i$ に (9.3.196) 式、(9.3.197) 式の無次元化式を使用し、(9.3.199) 式の α を代入すると、

$$\Gamma=\pi\,C_l\,\left(U+\frac{\Gamma\,u_n}{h}\right)\,\left(\frac{\Gamma\,v_n}{h\,\left(U+\frac{\Gamma\,u_n}{h}\right)}+\frac{\Gamma_0}{\pi\,C_l\,U}\right)$$

上式から、Γ を求め、整理すると、

$$\Gamma=\frac{\Gamma_0}{-\frac{\Gamma_0\,u_n}{h\,U}-\frac{\pi\,C_l\,v_n}{h}+1} \tag{9.3.201}$$

上式を (9.3.200) 式の L の式に代入し、

$$L=\frac{\Gamma_0\,\rho\,\left(U+\frac{\Gamma_0\,u_n}{h\,\left(-\frac{\Gamma_0\,u_n}{h\,U}-\frac{\pi\,C_l\,v_n}{h}+1\right)}\right)}{-\frac{\Gamma_0\,u_n}{h\,U}-\frac{\pi\,C_l\,v_n}{h}+1}$$

次式の無次元化を行う。ここで、水中翼揚力の無次元化：C_L、水面影響のない翼揚力の無次元化：C_0、翼弦長と翼水深比：a である。

$$C_L=\frac{2\,L}{C_l\,\rho\,U^2},\quad C_0=\frac{2\,L_0}{C_l\,\rho\,U^2},\quad C_0=\frac{2\,\Gamma_0}{C_l\,U},\ a=\frac{C_l}{h} \tag{9.3.202}$$

以上から、

$$\frac{C_L}{C_0}=\frac{4\,\left(1-\pi\,a\,v_n\right)}{\left(2\,\pi\,a\,v_n+C_0\,a\,u_n-2\right)^2} \tag{9.3.203}$$

上式に (9.3.196) 式、(9.3.197) 式を代入し、(9.3.198) 式の F_h で表すと、

$$\frac{C_L}{C_0}=\frac{4\,\left(\frac{\pi\,a\,e^{-\frac{2}{F_h^2}}}{F_h^2}+1\right)}{\left(C_0\,a\,\left(\frac{e^{-\frac{2}{F_h^2}}\,E_i\left(\frac{2}{F_h^2}\right)}{\pi\,F_h^2}-\frac{1}{4\,\pi}\right)-\frac{2\,\pi\,a\,e^{-\frac{2}{F_h^2}}}{F_h^2}-2\right)^2}$$

h/C_l を変えて $\frac{C_L}{C_0}$ を求めると下図となる。

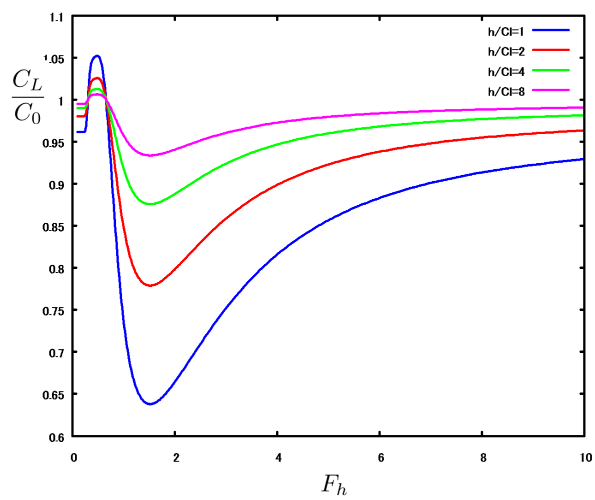


図 9.3.29: 水中翼の揚力

$F_h\approx\sqrt{2}$ のとき、v_n が負、即ち、下方の流れが最大となり、迎角が小さくなり、揚力の減少が最も大きくなる。

```
R1:R=-L*v[i]/(U+u[i]);
CR1:C[R]=rhs(R1)/(1/2*\rho*U^2*C[l]);
subst([L1,UN22,VN22],%);
subst([G11],%);
subst([CL01],%);
CR11:subst([CLH11],%);
CR12:num(rhs(CR11))/h^2/U^2;
CR13:factor(expand(denom(rhs(CR11))/h^2
 /U^2));
CR2:lhs(CR11)=CR12/CR13;
CR21:subst([VN21,UN21],CR2);
CR22:subst([VN21,UN23],CR2);
subst([FN12],CR21);
CR23:subst([FN12],CR22);
CR31:subst([a=1.0,C[0]=0.5,F[h]=t],
 rhs(CR23));
CR32:subst([a=0.5,C[0]=0.5,F[h]=t],
 rhs(CR23));
CR33:subst([a=0.25,C[0]=0.5,F[h]=t],
 rhs(CR23));
CR34:subst([a=0.125,C[0]=0.5,F[h]=t],
 rhs(CR23));
plot2d([CR31,CR32,CR33,CR34],[t,0.001,20],
 [x,0,10],[legend,"h/Cl=1","h/Cl=2",
 "h/Cl=4","h/Cl=8"]);
```

水中翼の抵抗は、v_n が負、即ち、下方へ流れが生じているため、迎角が小さくなり、揚力の方向が迎角変化分後方にずれ、それによる抵抗が発生し、次式で表現できる。

$$R = -\frac{v_i\, L}{U + u_i}$$

上式を無次元化し、(9.3.200) 式、(9.3.201) 式、(9.3.202) 式の関係を代入し、

$$\begin{aligned} C_R &= -\frac{2\, v_i\, L}{C_l\, \rho\, U^2\, (U + u_i)} = -\frac{2\, \Gamma^2\, v_n}{h\, C_l\, U^2} \\ &= -\frac{2\, \Gamma_0^2\, h\, v_n}{C_l\, ((\pi\, C_l\, v_n - h)\, U + \Gamma_0\, u_n)^2} \\ &= -\frac{C_0^2\, h\, C_l\, v_n\, U^2}{2\left((\pi\, C_l\, v_n - h)\, U + \frac{C_0\, C_l\, u_n\, U}{2}\right)^2} \\ &= -\frac{2\, C_0^2\, a\, v_n}{(2\, \pi\, a\, v_n + C_0\, a\, u_n - 2)^2} \end{aligned} \tag{9.3.204}$$

上式に (9.3.196) 式、(9.3.197) 式を代入し、(9.3.198) 式の F_h で表すと、

$$C_R = \frac{2\, C_0^2\, a\, e^{-\frac{2}{F_h^2}}}{F_h^2 \left(C_0\, a \left(\frac{e^{-\frac{2}{F_h^2}}\, E_i\left(\frac{2}{F_h^2}\right)}{\pi\, F_h^2} - \frac{1}{4\, \pi}\right) - \frac{2\, \pi\, a\, e^{-\frac{2}{F_h^2}}}{F_h^2} - 2\right)^2}$$

$C_0 = 1/2$ のとき、h/C_l を変えて C_R を求めると下図となる。

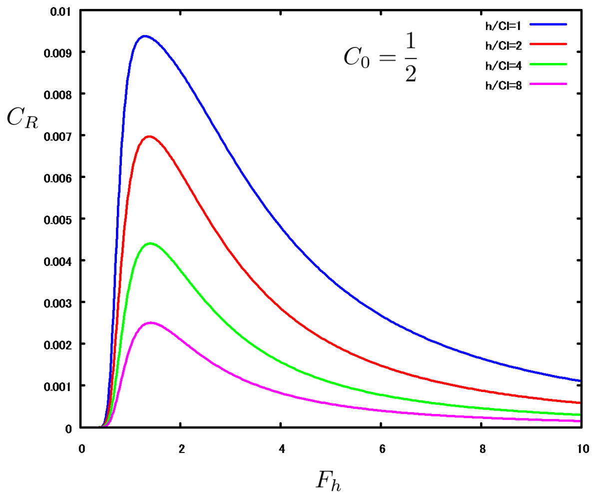


図 9.3.30: 水中翼の抵抗増加

やはり、$F_h \approx \sqrt{2}$ のとき、抵抗は最大となる。
以上の結果から $F_h \approx \sqrt{2}$ のとき、水面影響は最も大きくなる。$F_h < 0.25 \quad or \quad F_h > 40$ では、$v_n \approx 0, \quad u_n \approx -\frac{1}{4\,\pi}$ となり、この範囲では、水面に対し、水中翼と対称の位置に、水中翼と同じ渦循環強さ、同じ向きの渦を置くことに対応している。

9.4 三次元微小振幅波

液面に出来る波で平面に伝わっていく波の運動で波高が小さい場合について調べる。

9.4.1 三次元微小振幅波（xyz 座標）

xyz 座標で、図 9.4.1 の θ 方向に進む波の速度ポテンシャルを求める。波のない平衡状態での水面を x 軸、y 軸とし、鉛直上方に z 軸をとる。水底の深さを h とし、波高：η、時間:t、x 軸方向の流速:u、y 軸方向の流速:v、z 軸方向の流速:w、波の振動円周波数：ω、波長:L、波高の片振幅:A、重力加速度：g とする。

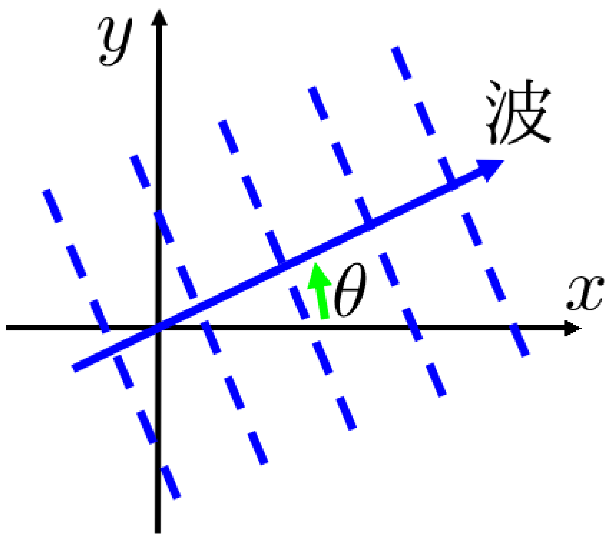


図 9.4.1: 三次元微小振幅波（xyz 座標）

```
/* 三次元波の速度ポテンシャル（xyz 座標）  */
kill(all);
load("vect")$
depends(\Phi,[x,y,z,t]);
depends(a,[x]);
depends(b,[y]);
depends(c,[z]);
depends(d,[t]);
assume(k>0);
assume(t>0);
assume(\omega>0);
assume(g>0);
assume(p>0);
assume(q>0);
/* 境界条件  */
EQ1:diff(\Phi,z,2)+diff(\Phi,y,2)
 +diff(\Phi,x,2)=0;
EQ2:diff(\Phi,z,1)+diff(\Phi,t,2)/g=0;
EQ3:\eta=-diff(\Phi,t,1)/g;
PHT1:\Phi=a*b*c*d;
/* 質量保存  */
subst([PHT1],EQ1);
ev(%,diff);
expand(%/b/c/a/d);
EQ11:%-'diff(c,z,2)/c;
EQ12:lhs(EQ11)=-k^2;
EQ13:rhs(EQ11)=-k^2;
C1:ode2(EQ13,c,z);
last(lhs(EQ12))=-p^2;
A2:ode2(%,a,x);
first(lhs(EQ12))=-q^2;
ode2(%,b,y);
B2:subst([%k1=%c1,%k2=%c2],%);
K1:k^2=p^2+q^2;
P1:p=k*cos(\theta);
Q1:q=k*sin(\theta);
subst([P1,Q1],K1);
trigsimp(%);
```

速度ポテンシャル：Φ とすると、質量保存の方程式は、(9.1.1) 式から次式となる。

$$\frac{d^2}{d\,z^2}\,\Phi+\frac{d^2}{d\,y^2}\,\Phi+\frac{d^2}{d\,x^2}\,\Phi=0 \tag{9.4.1}$$

自由表面条件は (9.1.7) 式から、

$$\frac{d}{d\,z}\,\Phi+\frac{\frac{d^2}{d\,t^2}\,\Phi}{g}=0 \tag{9.4.2}$$

波高：η は (9.1.6) 式から、

$$\eta=-\frac{\frac{d}{d\,t}\,\Phi}{g} \tag{9.4.3}$$

いま、速度ポテンシャルとして、変数分離法で次式を考える。ここで、a,b,c,d は $a=a(x),b=b(y),c=c(z),d=d(t)$ の関数とする。

$$\Phi=a\,b\,c\,d \tag{9.4.4}$$

(a) 質量保存の方程式

上式を質量保存の方程式：(9.4.1) 式に代入し、

$$\frac{\frac{d^2}{d\,z^2}\,c}{c}+\frac{\frac{d^2}{d\,y^2}\,b}{b}+\frac{\frac{d^2}{d\,x^2}\,a}{a}=0$$

上式の左辺第一項を右辺に移項し、$-k^2$ と置くと、

$$\frac{\frac{d^2}{d\,y^2}\,b}{b}+\frac{\frac{d^2}{d\,x^2}\,a}{a}=-\frac{\frac{d^2}{d\,z^2}\,c}{c}=-k^2$$

上式を下記の二式に分けると、

$$\frac{\frac{d^2}{d\,y^2}\,b}{b}+\frac{\frac{d^2}{d\,x^2}\,a}{a}=-k^2 \tag{9.4.5}$$

$$-\frac{\frac{d^2}{d\,z^2}\,c}{c}=-k^2 \tag{9.4.6}$$

(9.4.6) 式を ode2 関数で解くと、

$$c=\%k1\,e^{k\,z}+\%k2\,e^{-k\,z} \tag{9.4.7}$$

(9.4.5) 式を次式の関係を持つ p,q を使って、下記の二式に分ける。

$$k^2=q^2+p^2 \tag{9.4.8}$$

$$\frac{\frac{d^2}{d\,x^2}\,a}{a}=-p^2,\quad \frac{\frac{d^2}{d\,y^2}\,b}{b}=-q^2$$

上記の二式を ode2 関数で解くと、

$$a=\%k1\sin(p\,x)+\%k2\cos(p\,x) \tag{9.4.9}$$

$$b=\%c1\sin(q\,y)+\%c2\cos(q\,y) \tag{9.4.10}$$

x 軸に θ の角度で伝搬する波では、p,q は下記の関係となる。

$$p=k\cos(\theta)\,,\quad q=k\sin(\theta) \tag{9.4.11}$$

(9.4.7) 式、(9.4.9) 式、(9.4.10) 式を (9.4.4) 式に代入すると、

$$\begin{aligned}\Phi=&d\,\left(\%k1\sin(p\,x)+\%k2\cos(p\,x)\right)\\&\times\,\left(\%c1\sin(q\,y)+\%c2\cos(q\,y)\right)\\&\times\,\left(\%k1\,e^{k\,z}+\%k2\,e^{-k\,z}\right)\end{aligned} \tag{9.4.12}$$

(b) 底の条件

```
/* 底の条件　*/
PHT11:subst([C1,A2,B2],PHT1);
diff(%,z,1);
subst([z=-h],rhs(%))=0;
%k1*k*%e^(-h*k)-%k2*k*%e^(h*k)=0;
K1:%k1=C*%e^(h*k);
K2:%k2=C*%e^(-h*k);
subst([K1,K2],C1);
C2:c=C*cosh(k*(z+h));
PHT2:subst([A2,B2,C2],PHT1);
```

z 軸方向の流速：$w=\frac{d}{d\,z}\,\phi$ で、底面：$z=-h$ で、$w=0$ であるから、

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\,z}\,\Phi=&d\,\left(\%k1\,k\,e^{-h\,k}-\%k2\,k\,e^{h\,k}\right)\\&\times\,\left(\%k1\sin(p\,x)+\%k2\cos(p\,x)\right)\\&\times\,\left(\%c1\sin(q\,y)+\%c2\cos(q\,y)\right)=0\end{aligned}$$

以上から、

$$\%k1\,e^{-h\,k}-\%k2\,e^{h\,k}=0$$

上式の関係を満足する $\%k1,\%k2$ は、

$$\%k1=e^{h\,k}\,C,\quad \%k2=e^{-h\,k}\,C$$

上式を (9.4.7) 式に代入し、

$$c=e^{k\,z+h\,k}\,C+e^{-k\,z-h\,k}\,C$$

更に次式とする。

$$c=\cosh\left(k\,(z+h)\right)\,C \tag{9.4.13}$$

(9.4.13) 式、(9.4.9) 式、(9.4.10) 式を (9.4.4) 式に代入すると、

$$\begin{aligned}\Phi=&d\,\left(\%k1\sin(p\,x)+\%k2\cos(p\,x)\right)\\&\times\,\left(\%c1\sin(q\,y)+\%c2\cos(q\,y)\right)\\&\times\,\cosh\left(k\,(z+h)\right)\,C\end{aligned} \tag{9.4.14}$$

(c) 自由表面条件

```
/* 自由表面条件　*/
subst([PHT2],EQ2);
ev(%,diff);
subst([z=0],%);
EQ21:solve(%,d)[1];
OM1:\omega^2=(g*k*sinh(k*h))/cosh(k*h);
OM2:\omega^2=(g*k*tanh(k*h));
OM11:solve(OM1,g)[1];
subst([OM11],EQ21);
ode2(%,d,t);
D2:subst([%k1=%d1,%k2=%d2],%);
PHT3:subst([A2,B2,C2,D2],PHT1);
```

(9.4.14) 式を自由表面条件：(9.4.2) 式に代入し、整理すると、

$$d=-\frac{\left(\frac{d^2}{d\,t^2}\,d\right)\cosh(h\,k)}{g\,k\sinh(h\,k)} \tag{9.4.15}$$

ここで下記とすると、

$$\omega^2=\frac{g\,k\sinh(h\,k)}{\cosh(h\,k)}=g\,k\tanh(h\,k) \tag{9.4.16}$$

上式から (9.4.15) 式は、

$$d=-\frac{\frac{d^2}{d\,t^2}\,d}{\omega^2}$$

上式を ode2 関数で解くと、

$$d=\%d1\sin(\omega\,t)+\%d2\cos(\omega\,t) \tag{9.4.17}$$

上式を (9.4.14) 式に代入すると、

$$\begin{aligned}\Phi=&\left(\%d1\sin(\omega\,t)+\%d2\cos(\omega\,t)\right)\\&\times\,\left(\%k1\sin(p\,x)+\%k2\cos(p\,x)\right)\\&\times\,\left(\%c1\sin(q\,y)+\%c2\cos(q\,y)\right)\\&\times\,\cosh\left(k\,(z+h)\right)\,C\end{aligned} \tag{9.4.18}$$

(d) 波振幅：A の導入

```
/* 波振幅：A の導入  */
subst([PHT3],EQ3);
ev(%,diff);
ET1:factor(subst([z=0],%));
A0:A=cosh(k*h)*\omega*C/g;
A01:solve(A0,C)[1];
ET4:subst([A01],ET1);
PHT4:subst([A01],PHT3);
lhs(%)=limit(rhs(PHT4),h,inf);
ev(%,limit);
limit(OM1,h,inf);
trigreduce(ET4);
ET41:\eta=
 %f1*cos(q*y+p*x+\omega*t+\epsilon[1])
 +%f2*cos(q*y+p*x-\omega*t+\epsilon[2])
 +%f3*cos(q*y-p*x+\omega*t+\epsilon[3])
 +%f4*cos(q*y-p*x-\omega*t+\epsilon[4]);
ET42:\eta=A*cos(q*y+p*x-\omega*t
 +\epsilon[2]);
PHT42:Phi=g*cosh(k*(z+h))*A/(cosh(h*k)*
\omega)*sin(q*y+p*x-\omega*t+\epsilon[2]);
subst([PHT42],EQ3);
ev(%,diff);
subst([z=0],%);
subst([P1,Q1],%);
subst([P1,Q1],PHT42);
limit(OM1,h,inf);
```

```
\Phi=limit(rhs(PHT42),h,inf);
PHT44:ev(%,limit);
subst([P1,Q1],%);
```

(9.4.18) 式を (9.4.3) 式に代入して、波高を求めると、

$$\begin{aligned}\eta =&\frac{\cosh(h\,k)\,\omega\,C}{g}\,(\%d2\sin(\omega\,t)-\%d1\cos(\omega\,t))\\&\times\,(\%k1\sin(p\,x)+\%k2\cos(p\,x))\\&\times\,(\%c1\sin(q\,y)+\%c2\cos(q\,y))\end{aligned}$$

ここで波振幅：A を導入すると、次式の関係となる。

$$A=\frac{\cosh(h\,k)\,\omega\,C}{g},\quad C=\frac{g\,A}{\cosh(h\,k)\,\omega}$$

上式の関係を上記波高、速度ポテンシャル：(9.4.18) 式に代入すると、

$$\begin{aligned}\eta =&(\%d2\sin(\omega\,t)-\%d1\cos(\omega\,t))\\&\times\,(\%k1\sin(p\,x)+\%k2\cos(p\,x))\\&\times\,(\%c1\sin(q\,y)+\%c2\cos(q\,y))\,A\end{aligned}\tag{9.4.19}$$

$$\begin{aligned}\Phi =&\frac{g\cosh(k\,(z+h))\,A}{\cosh(h\,k)\,\omega}\\&\times\,(\%d1\sin(\omega\,t)+\%d2\cos(\omega\,t))\\&\times\,(\%k1\sin(p\,x)+\%k2\cos(p\,x))\\&\times\,(\%c1\sin(q\,y)+\%c2\cos(q\,y))\end{aligned}\tag{9.4.20}$$

(9.4.19) 式を変形すると、

$$\begin{aligned}\eta =&\\&\frac{\%c2\,\%d2\,\%k2\sin(q\,y+p\,x+\omega\,t)\,A}{4}-\frac{\%c1\,\%d1\,\%k2\sin(q\,y+p\,x+\omega\,t)\,A}{4}-\frac{\%c1\,\%d2\,\%k1\sin(q\,y+p\,x+\omega\,t)\,A}{4}\\&-\frac{\%c2\,\%d1\,\%k1\sin(q\,y+p\,x+\omega\,t)\,A}{4}-\frac{\%c1\,\%d2\,\%k2\cos(q\,y+p\,x+\omega\,t)\,A}{4}-\frac{\%c2\,\%d1\,\%k2\cos(q\,y+p\,x+\omega\,t)\,A}{4}\\&-\frac{\%c2\,\%d2\,\%k1\cos(q\,y+p\,x+\omega\,t)\,A}{4}+\frac{\%c1\,\%d1\,\%k1\cos(q\,y+p\,x+\omega\,t)\,A}{4}-\frac{\%c2\,\%d2\,\%k2\sin(q\,y+p\,x-\omega\,t)\,A}{4}\\&-\frac{\%c1\,\%d1\,\%k2\sin(q\,y+p\,x-\omega\,t)\,A}{4}+\frac{\%c1\,\%d2\,\%k1\sin(q\,y+p\,x-\omega\,t)\,A}{4}-\frac{\%c2\,\%d1\,\%k1\sin(q\,y+p\,x-\omega\,t)\,A}{4}\\&+\frac{\%c1\,\%d2\,\%k2\cos(q\,y+p\,x-\omega\,t)\,A}{4}-\frac{\%c2\,\%d1\,\%k2\cos(q\,y+p\,x-\omega\,t)\,A}{4}+\frac{\%c2\,\%d2\,\%k1\cos(q\,y+p\,x-\omega\,t)\,A}{4}\\&+\frac{\%c1\,\%d1\,\%k1\cos(q\,y+p\,x-\omega\,t)\,A}{4}+\frac{\%c2\,\%d2\,\%k2\sin(q\,y-p\,x+\omega\,t)\,A}{4}-\frac{\%c1\,\%d1\,\%k2\sin(q\,y-p\,x+\omega\,t)\,A}{4}\\&+\frac{\%c1\,\%d2\,\%k1\sin(q\,y-p\,x+\omega\,t)\,A}{4}+\frac{\%c2\,\%d1\,\%k1\sin(q\,y-p\,x+\omega\,t)\,A}{4}-\frac{\%c1\,\%d2\,\%k2\cos(q\,y-p\,x+\omega\,t)\,A}{4}\\&-\frac{\%c2\,\%d1\,\%k2\cos(q\,y-p\,x+\omega\,t)\,A}{4}+\frac{\%c2\,\%d2\,\%k1\cos(q\,y-p\,x+\omega\,t)\,A}{4}-\frac{\%c1\,\%d1\,\%k1\cos(q\,y-p\,x+\omega\,t)\,A}{4}\\&-\frac{\%c2\,\%d2\,\%k2\sin(q\,y-p\,x-\omega\,t)\,A}{4}-\frac{\%c1\,\%d1\,\%k2\sin(q\,y-p\,x-\omega\,t)\,A}{4}-\frac{\%c1\,\%d2\,\%k1\sin(q\,y-p\,x-\omega\,t)\,A}{4}\\&+\frac{\%c2\,\%d1\,\%k1\sin(q\,y-p\,x-\omega\,t)\,A}{4}+\frac{\%c1\,\%d2\,\%k2\cos(q\,y-p\,x-\omega\,t)\,A}{4}-\frac{\%c2\,\%d1\,\%k2\cos(q\,y-p\,x-\omega\,t)\,A}{4}\\&-\frac{\%c2\,\%d2\,\%k1\cos(q\,y-p\,x-\omega\,t)\,A}{4}-\frac{\%c1\,\%d1\,\%k1\cos(q\,y-p\,x-\omega\,t)\,A}{4}\end{aligned}$$

上式を整理すると、

$$
\begin{aligned}
\eta =&\%f1\cos\left(q\,y+p\,x+\omega\,t+\epsilon_1\right)\\
&+\%f2\cos\left(q\,y+p\,x-\omega\,t+\epsilon_2\right)\\
&+\%f3\cos\left(q\,y-p\,x+\omega\,t+\epsilon_3\right)\\
&+\%f4\cos\left(q\,y-p\,x-\omega\,t+\epsilon_4\right)
\end{aligned}
$$

ここで x 軸と θ の角度をもち、図 9.4.1 の矢印の方向へ進行する波は次式となる。

$$\eta=\cos\left(q\,y+p\,x-\omega\,t+\epsilon_2\right)\,A \tag{9.4.21}$$

上式に対応した速度ポテンシャルは、(9.4.20) 式から、

$$\Phi=\frac{g\sin\left(q\,y+p\,x-\omega\,t+\epsilon_2\right)\,\cosh\left(k\,\left(z+h\right)\right)\,A}{\cosh\left(h\,k\right)\,\omega}$$

上記波高、速度ポテンシャルに $p,\,q$ の関係式 : (9.4.11) 式を代入すると、

$$\eta=\cos\left(k\sin\left(\theta\right)\,y+k\cos\left(\theta\right)\,x-\omega\,t+\epsilon_2\right)\,A \tag{9.4.22}$$

$$
\begin{aligned}
\Phi =&\frac{g\,A\cosh\left(k\,\left(z+h\right)\right)}{\cosh\left(h\,k\right)\,\omega}\\
&\times\,\sin\left(k\sin\left(\theta\right)\,y+k\cos\left(\theta\right)\,x-\omega\,t+\epsilon_2\right)
\end{aligned}
\tag{9.4.23}
$$

ここで、

$$\omega^2=\frac{g\,k\sinh\left(h\,k\right)}{\cosh\left(h\,k\right)}=g\,k\tanh\left(h\,k\right)$$

いま、水深が十分深いとすると、$h\to\infty$ とし、速度ポテンシャル : (9.4.23) 式は、

$$\Phi=\frac{g\sin\left(k\sin\left(\theta\right)\,y+k\cos\left(\theta\right)\,x-\omega\,t+\epsilon_2\right)\,e^{k\,z}\,A}{\omega} \tag{9.4.24}$$

(9.4.16) 式は、

$$\omega^2=g\,k$$

9.4.2 三次元微小振幅波（一様流）

一様流速：U がある場合の波の伝搬について調べる。波のない平衡状態での水面を x 軸、y 軸とし、鉛直上方に z 軸をとる。一様流の流速：U の方向は x 軸と一致するとする。水底の深さを h、波高：η、x 軸方向の流速:u、y 軸方向の流速:v、z 軸方向の流速:w、波の振動円周波数：ω、波長:L、波高の片振幅:A、重力加速度：g とする。

(1) 一様流の流向と波の進行方向が同じ場合

一様流速：U の方向と波の伝搬する方向が一致し、共に x 軸方向であるとする。

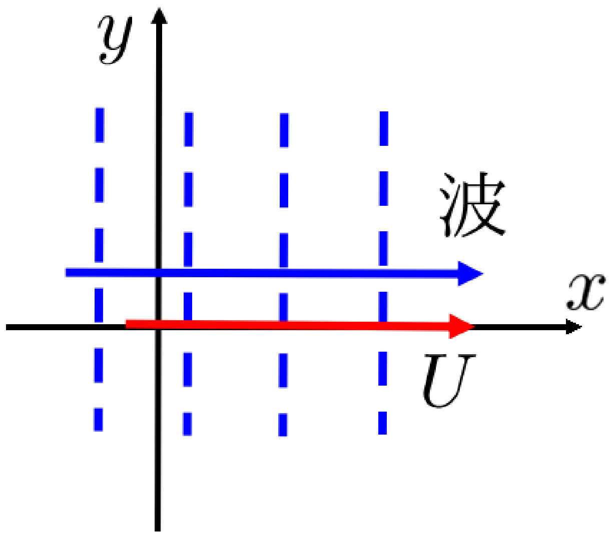


図 9.4.2: 三次元微小振幅波（一様流）

```
/* U：あり  */
kill(all);
load("vect")$
depends(\Phi,[x,y,z,t]);
depends(\phi,[x,y,z]);
depends(\eta,[x,y]);
depends(a,[x]);
depends(b,[y]);
depends(c,[z]);
assume(t>0);
assume(k>0);
assume(p>0);
assume(q>0);
PH0:\Phi=U*x+\phi;
EQ1:'diff(phi,z,2)+'diff(phi,y,2)
 +'diff(phi,x,2)=0;
 BE3:eta=-(('diff(phi,x,1))*U)/g;
```

```
FS4:(('diff(phi,x,2))*U^2)/g+
 'diff(phi,z,1)=0;
PHT1:\phi=a*c;
/* 質量保存  */
subst([PHT1],EQ1);
ev(%,diff);
expand(%/c/a);
EQ11:-%+first(lhs(%));
EQ12:rhs(EQ11)=k^2;
EQ13:lhs(EQ11)=k^2;
A2:ode2(EQ13,a,x);
C1:ode2(EQ12,c,z);
PHT11:subst([A2,C1],PHT1);
```

一様流：U がある速度ポテンシャル：Φ は (9.1.8) 式から、

$$\Phi = x\,U + \phi \tag{9.4.25}$$

ここで、ϕ は x, z の関数である。このとき、質量保存の方程式は (9.1.9) 式から、

$$\frac{d^2}{d\,z^2}\,\phi + \frac{d^2}{d\,x^2}\,\phi = 0 \tag{9.4.26}$$

微小振幅の自由表面条件は (9.1.15) 式から次式となる。

$$\frac{\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,\phi\right)\,U^2}{g} + \frac{d}{d\,z}\,\phi = 0 \tag{9.4.27}$$

波高：η は、(9.1.14) 式から次式となる。

$$\eta = -\frac{\left(\frac{d}{d\,x}\,\phi\right)\,U}{g} \tag{9.4.28}$$

(9.4.25) 式の速度ポテンシャル：ϕ を変数分離法で下記とし、$a = a(x), c = c(z)$ の関数とする。

$$\phi = a\,c \tag{9.4.29}$$

(a) 質量保存の方程式

上式を質量保存の方程式：(9.4.26) 式に代入し、

$$\frac{\frac{d^2}{d\,z^2}\,c}{c} + \frac{\frac{d^2}{d\,x^2}\,a}{a} = 0$$

整理して、下記とする。

$$-\frac{\frac{d^2}{d\,x^2}\,a}{a} = \frac{\frac{d^2}{d\,z^2}\,c}{c} = k^2$$

上式を下記のように分ける。

$$\frac{\frac{d^2}{d\,z^2}\,c}{c} = k^2 \tag{9.4.30}$$

$$-\frac{\frac{d^2}{d\,x^2}\,a}{a} = k^2 \tag{9.4.31}$$

(9.4.30) 式を ode2 関数で解くと、

$$c = \%k1\,e^{k\,z} + \%k2\,e^{-k\,z} \tag{9.4.32}$$

(9.4.31) 式を ode2 関数で解くと、

$$a = \%k1 \sin(k\,x) + \%k2 \cos(k\,x) \tag{9.4.33}$$

上式と (9.4.32) 式を (9.4.29) 式に代入し、速度ポテンシャル：ϕ が得られた。

$$\begin{aligned}\phi &= (\%k1 \sin(k\,x) + \%k2 \cos(k\,x)) \\ &\times \left(\%k1\, e^{k\,z} + \%k2\, e^{-k\,z}\right)\end{aligned} \tag{9.4.34}$$

(b) 底の条件

```
/* 底の条件 */
diff(%,z,1);
subst([z=-h],rhs(%))=0;
%k1*k*%e^(-h*k)-%k2*k*%e^(h*k);
K1:%k1=C*%e^(h*k);
K2:%k2=C*%e^(-h*k);
subst([K1,K2],C1);
C2:c=C*cosh(k*(z+h));
PHT2:subst([A2,C2],PHT1);
```

z 軸方向の流速：$w = \frac{d}{d\,z}\,\phi$ で、底面：$z=-h$ で、$w=0$ であるから、

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\,z}\,\phi &= \left(\%k1\,k\,e^{-h\,k} - \%k2\,k\,e^{h\,k}\right) \\ &\times (\%k1 \sin(k\,x) + \%k2 \cos(k\,x)) = 0\end{aligned}$$

上式を整理して、

$$\%k1\, e^{-h\,k} - \%k2\, e^{h\,k} = 0$$

上式から、

$$\%k1 = e^{h\,k}\,C, \quad \%k2 = e^{-h\,k}\,C$$

上式を (9.4.32) 式に代入し、

$$c = e^{k\,z+h\,k}\,C + e^{-k\,z-h\,k}\,C$$

更に変形して、

$$c = \cosh(k\,(z+h))\,C \tag{9.4.35}$$

上式と (9.4.33) 式を (9.4.29) 式に代入し、速度ポテンシャル：ϕ が得られた。

$$\phi = (\%k1 \sin(k\,x) + \%k2 \cos(k\,x))\,\cosh(k\,(z+h))\,C \tag{9.4.36}$$

(c) 自由表面条件

```
/* 自由表面条件 */
subst([PHT2],FS4);
ev(%,diff);
subst([z=0],%);
solve(%,U^2)[1];
K0:%*k/U^2;
```

(9.4.36) 式を自由表面条件：(9.4.27) 式に代入し、整理すると、

$$k = \frac{g \sinh(h\,k)}{\cosh(h\,k)\,U^2} \tag{9.4.37}$$

(d) 波振幅：A の導入

```
/* 波振幅：A の導入 */
subst([PHT2],BE3);
ev(%,diff);
subst([z=0],%);
ET1:factor(%);
A0:A=k*C*U*cosh(k*h)/g;
A01:solve(%,C)[1];
subst([A01],ET1);
PHT3:subst([A01],PHT2);
limit(PHT3,h,inf);
ev(%,limit);
PHT31:ev(%,limit);
limit(K0,h,inf);
ev(%,limit);
K01:ev(%,limit);
subst([K01],PHT31);
subst([%],BE3);
ev(%,diff);
subst([z=0],%);
ET2:factor(%);
```

(9.4.36) 式をを (9.4.28) 式に代入し、波高：η は、

$$\eta = \frac{k \cosh(h\,k)\,(\%k2 \sin(k\,x) - \%k1 \cos(k\,x))\,C\,U}{g}$$

上式で波の振幅を A とすると、下記の関係が得られる。

$$A = \frac{k \cosh(h\,k)\,C\,U}{g}, \quad C = \frac{g\,A}{k \cosh(h\,k)\,U}$$

上記の関係から、波高と速度ポテンシャル：ϕ は、

$$\eta = (\%k2 \sin(k\,x) - \%k1 \cos(k\,x))\,A$$

$$\phi = \frac{g\,(\%k1 \sin(k\,x) + \%k2 \cos(k\,x))\,\cosh(k\,(z+h))\,A}{k \cosh(h\,k)\,U} \tag{9.4.38}$$

ここで、

$$k = \frac{g \sinh(h\,k)}{\cosh(h\,k)\,U^2}$$

水深：h が十分に深い場合は、$h \to \infty$ とし、速度ポテンシャル：ϕ と k は、

$$\phi = \frac{g\,(\%k1 \sin(k\,x) + \%k2 \cos(k\,x))\,e^{k\,z}\,A}{k\,U} \tag{9.4.39}$$

$$k = \frac{g}{U^2} = \frac{2\,\pi}{L} \tag{9.4.40}$$

ここで L は流れに逆らってその位置を保てる波長である。

(2) 一様流の流向と波の進行方向との角度：θ の場合

図 9.4.3 に示すように一様流速：U の方向が x 軸方向で、これと波の伝搬する方向との角度が θ の場合について調べる。

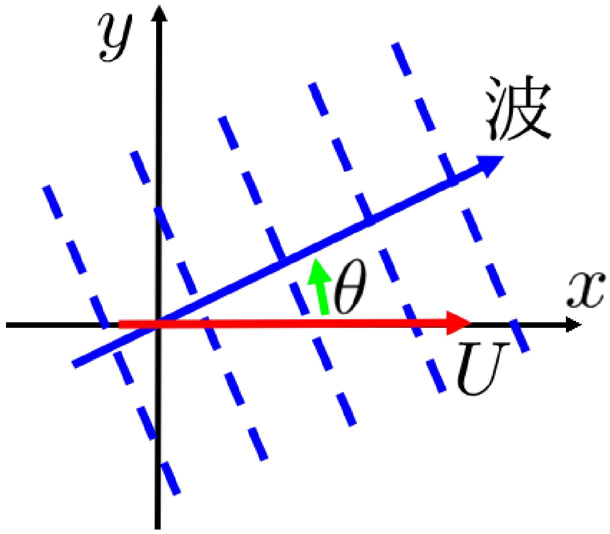


図 9.4.3: 三次元微小振幅波（一様流）

```
/* Theta 方向の波  */
PHT1A:\phi=a*b*c;
/* 質量保存  */
subst([PHT1A],EQ1);
ev(%,diff);
expand(%/c/b/a);
EQ11A:-%+first(lhs(%));
EQ12A:rhs(EQ11A)=k^2;
EQ13A:lhs(EQ11A)=k^2;
C1:ode2(EQ12A,c,z);
last(lhs(EQ13A))=p^2;
A2:ode2(%,a,x);
first(lhs(EQ13A))=q^2;
ode2(%,b,y);
B2:subst([%k1=%c1,%k2=%c2],%);
K1:k^2=p^2+q^2;
P1:p=k*cos(\theta);
Q1:q=k*sin(\theta);
subst([P1,Q1],K1);
trigsimp(%);
subst([A2,B2,C1],PHT1A);
```

ここで、ϕ は x,y,z の関数である。このとき、質量保存の方程式は (9.1.9) 式から、

$$\frac{d^2}{d\,z^2}\,\phi+\frac{d^2}{d\,y^2}\,\phi+\frac{d^2}{d\,x^2}\,\phi=0 \tag{9.4.41}$$

(9.4.25) 式の速度ポテンシャル：ϕ を変数分離法で下記とし、$a=a(x), b=b(y), c=c(z)$ の関数とする。

$$\phi=a\,b\,c \tag{9.4.42}$$

(a) 質量保存の方程式

上式を質量保存の方程式：(9.4.41) 式に代入し、

$$\frac{\frac{d^2}{d\,z^2}\,c}{c}+\frac{\frac{d^2}{d\,y^2}\,b}{b}+\frac{\frac{d^2}{d\,x^2}\,a}{a}=0$$

整理して、下記とする。

$$-\frac{\frac{d^2}{d\,y^2}\,b}{b}-\frac{\frac{d^2}{d\,x^2}\,a}{a}=\frac{\frac{d^2}{d\,z^2}\,c}{c}=k^2$$

上式を下記のように分ける。

$$\frac{\frac{d^2}{d\,z^2}\,c}{c}=k^2 \tag{9.4.43}$$

$$-\frac{\frac{d^2}{d\,y^2}\,b}{b}-\frac{\frac{d^2}{d\,x^2}\,a}{a}=k^2 \tag{9.4.44}$$

(9.4.43) 式を ode2 関数で解くと、

$$c=\%k1\,e^{k\,z}+\%k2\,e^{-k\,z} \tag{9.4.45}$$

(9.4.44) 式を次式の関係を持つ p,q を使って、下記の二式に分ける。

$$k^2=q^2+p^2 \tag{9.4.46}$$

$$-\frac{\frac{d^2}{d\,x^2}\,a}{a}=p^2,\quad -\frac{\frac{d^2}{d\,y^2}\,b}{b}=q^2$$

上式の二式を ode2 関数で解くと、

$$a=\%k1\sin\left(p\,x\right)+\%k2\cos\left(p\,x\right) \tag{9.4.47}$$

$$b=\%c1\sin\left(q\,y\right)+\%c2\cos\left(q\,y\right) \tag{9.4.48}$$

x 軸に θ の角度で伝搬する波では、p,q は下記の関係となる。

$$p=k\cos\left(\theta\right),\quad q=k\sin\left(\theta\right) \tag{9.4.49}$$

(9.4.45) 式、(9.4.47) 式、(9.4.48) 式を (9.4.42) 式に代入すると、

$$\begin{aligned}\phi=&\left(\%k1\sin\left(p\,x\right)+\%k2\cos\left(p\,x\right)\right)\\&\times\ \left(\%c1\sin\left(q\,y\right)+\%c2\cos\left(q\,y\right)\right)\\&\times\ \left(\%k1\,e^{k\,z}+\%k2\,e^{-k\,z}\right)\end{aligned} \tag{9.4.50}$$

(b) 底の条件

```
/* 底の条件 */
diff(%,z,1);
subst([z=-h],rhs(%))=0;
%k1*k*%e^(-h*k)-%k2*k*%e^(h*k)=0;
K1:%k1=C*%e^(h*k);
K2:%k2=C*%e^(-h*k);
subst([K1,K2],C1);
C2:c=C*cosh(k*(z+h));
PHT2A:subst([A2,B2,C2],PHT1A);
```

z 軸方向の流速：$w = \frac{d}{dz}\phi$ で、底面：$z = -h$ で、$w = 0$ であるから、

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}\phi =& \left(\%k1\,k\,e^{-h\,k} - \%k2\,k\,e^{h\,k}\right)\\ &\times\ (\%k1\sin(p\,x) + \%k2\cos(p\,x))\\ &\times\ (\%c1\sin(q\,y) + \%c2\cos(q\,y)) = 0\end{aligned}$$

上式を整理して、

$$\%k1\,e^{-h\,k} - \%k2\,e^{h\,k} = 0$$

上式から、

$$\%k1 = e^{h\,k}\,C, \quad \%k2 = e^{-h\,k}\,C$$

上式を (9.4.45) 式に代入し、

$$c = e^{k\,z+h\,k}\,C + e^{-k\,z-h\,k}\,C$$

更に変形して、

$$c = \cosh(k\ (z+h))\ C \tag{9.4.51}$$

(9.4.51) 式、(9.4.47) 式、(9.4.48) 式を (9.4.42) 式に代入すると、

$$\begin{aligned}\phi =& (\%k1\sin(p\,x) + \%k2\cos(p\,x))\\ &\times\ (\%c1\sin(q\,y) + \%c2\cos(q\,y))\\ &\times\ \cosh(k\ (z+h))\ C\end{aligned} \tag{9.4.52}$$

(c) 自由表面条件

```
/* 自由表面条件 */
subst([PHT2A],FS4);
ev(%,diff);
subst([z=0],%)*U;
solve(%,U^2)[1];
subst([P1,Q1],%);
K4:solve(%,k)[1];
```

上式を自由表面条件：(9.4.27) 式に代入し、$z = 0$ とし、整理すると、

$$k = \frac{g\sinh(h\,k)}{\cosh(h\,k)\ \cos(\theta)^2\,U^2} \tag{9.4.53}$$

(d) 波振幅：A の導入

```
/* 波振幅：A の導入 */
subst([PHT2A],BE3);
ev(%,diff);
ET2A:subst([z=0],%);
A02:A=cosh(h*k)*p*C*U/g;
A021:solve(%,C)[1];
factor(subst([A021],ET2A));
subst([A021],PHT2A);
trigreduce(%);
lhs(%)=rhs(%)/sech(k*h)/cosh(k*h);
expand(%);
\phi=-g*cosh(k*(z+h))*A/(cosh(h*k)*p*U)
 *sin(q*y+p*x+\epsilon[1]);
PHT2A1:subst([P1,Q1],%);
subst([%],BE3);
ev(%,diff);
subst([z=0],%);
limit(PHT2A1,h,inf);
ev(%,limit);
PHT3A:ev(%,limit);
limit(K4,h,inf);
ev(%,limit);
ev(%,limit);
```

波高：η は、上式を (9.4.28) 式に代入し、

$$\begin{aligned}\eta =& \frac{\cosh(h\,k)\ p\,C\,U}{g}\ (\%k2\sin(p\,x) - \%k1\cos(p\,x))\\ &\times\ (\%c1\sin(q\,y) + \%c2\cos(q\,y))\end{aligned}$$

上式で波の振幅を A とすると、下記の関係が得られる。

$$A = \frac{\cosh(h\,k)\ p\,C\,U}{g}, \quad C = \frac{g\,A}{\cosh(h\,k)\ p\,U}$$

上記の関係から、速度ポテンシャル：ϕ は、

$$\begin{aligned}\phi =& \frac{g\cosh(k\ (z+h))\ A}{\cosh(h\,k)\ p\,U}\\ &\times\ (\%k1\sin(p\,x) + \%k2\cos(p\,x))\\ &\times\ (\%c1\sin(q\,y) + \%c2\cos(q\,y))\end{aligned}$$

上式を変形すると、

$$\begin{aligned}\phi =&\frac{\%c1\,\%k2\,g\sin\left(q\,y+p\,x\right)\,\cosh\left(k\,z+h\,k\right)\,A}{2\cosh\left(h\,k\right)\,p\,U}\\&+\frac{\%c2\,\%k1\,g\sin\left(q\,y+p\,x\right)\,\cosh\left(k\,z+h\,k\right)\,A}{2\cosh\left(h\,k\right)\,p\,U}\\&+\frac{\%c2\,\%k2\,g\cos\left(q\,y+p\,x\right)\,\cosh\left(k\,z+h\,k\right)\,A}{2\cosh\left(h\,k\right)\,p\,U}\\&-\frac{\%c1\,\%k1\,g\cos\left(q\,y+p\,x\right)\,\cosh\left(k\,z+h\,k\right)\,A}{2\cosh\left(h\,k\right)\,p\,U}\\&+\frac{\%c1\,\%k2\,g\sin\left(q\,y-p\,x\right)\,\cosh\left(k\,z+h\,k\right)\,A}{2\cosh\left(h\,k\right)\,p\,U}\\&-\frac{\%c2\,\%k1\,g\sin\left(q\,y-p\,x\right)\,\cosh\left(k\,z+h\,k\right)\,A}{2\cosh\left(h\,k\right)\,p\,U}\\&+\frac{\%c2\,\%k2\,g\cos\left(q\,y-p\,x\right)\,\cosh\left(k\,z+h\,k\right)\,A}{2\cosh\left(h\,k\right)\,p\,U}\\&+\frac{\%c1\,\%k1\,g\cos\left(q\,y-p\,x\right)\,\cosh\left(k\,z+h\,k\right)\,A}{2\cosh\left(h\,k\right)\,p\,U}\end{aligned}$$

ここで x 軸と θ の角度をもち、図 9.4.3 の矢印の方向へ進行する波は次式となる。

$$\begin{aligned}\phi =&-\frac{g\cosh\left(k\,\left(z+h\right)\right)\,A}{k\cosh\left(h\,k\right)\,\cos\left(\theta\right)\,U}\\&\times\,\sin\left(k\sin\left(\theta\right)\,y+k\cos\left(\theta\right)\,x+\epsilon_1\right)\end{aligned}\tag{9.4.54}$$

ここで、

$$k=\frac{g\sinh\left(h\,k\right)}{\cosh\left(h\,k\right)\,\cos\left(\theta\right)^2\,U^2}$$

波高：η は、(9.4.54) 式を (9.4.28) 式に代入し、

$$\eta=\cos\left(k\sin\left(\theta\right)\,y+k\cos\left(\theta\right)\,x+\epsilon_1\right)\,A\tag{9.4.55}$$

水深：h が十分に深い場合は、$h\to\infty$ とし、速度ポテンシャル：ϕ は、

$$\phi=-\frac{g\sin\left(k\sin\left(\theta\right)\,y+k\cos\left(\theta\right)\,x+\epsilon_1\right)\,e^{k\,z}\,A}{k\cos\left(\theta\right)\,U}\tag{9.4.56}$$

ここで、(9.4.53) 式は、

$$k=\frac{g}{\cos\left(\theta\right)^2\,U^2}\tag{9.4.57}$$

9.4.3　三次元微小振幅波（円柱座標）

図 9.4.4 に示す $r-\theta-z$ 円柱座標で原点対称の波の速度ポテンシャルを求める。波のない平衡状態での水面を $r-\theta$ 平面とし、鉛直上方に z 軸をとる。水底の深さを h、波高：η、r 軸方向の流速:v_r、θ 軸方向の流速:v_θ、z 軸方向の流速:v_z、波の振動円周波数：ω、波長:L、波高の片振幅:A、重力加速度：g とする。

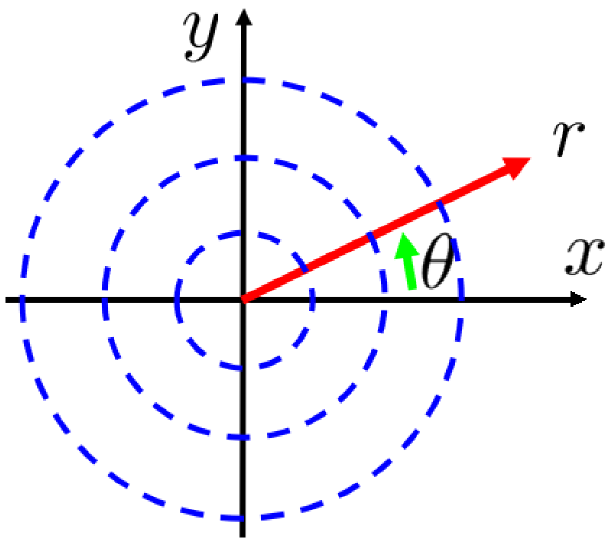


図 9.4.4: 三次元微小振幅波（円柱座標）

```
/* 三次元波の速度ポテンシャル（円柱座標）  */
kill(all);
load("vect")$
depends(\Phi,[r,\theta,z,t]);
depends(a,[r]);
depends(b,[\theta]);
depends(c,[z]);
depends(d,[t]);
assume(k>0);
assume(t>0);
assume(\omega>0);
assume(r>0);
assume(g>0);
assume(q>0);
/* 境界条件  */
V1:matrix([v[r]],[v[\theta]],[v[z]])=
 matrix([diff(\Phi,r,1)],
 [diff(\Phi,\theta,1)/r],[diff(\Phi,z,1)]);
 EQ1:diff(\Phi,z,2)+diff(\Phi,\theta,2)/r^2
 +diff(\Phi,r,2)+diff(\Phi,r,1)/r=0;
EQ2:diff(\Phi,z,1)+diff(\Phi,t,2)/g=0;
EQ3:\eta=-diff(\Phi,t,1)/g;
PHT1:\Phi=a*b*c*d;
/* 質量保存  */
subst([PHT1],EQ1);
ev(%,diff);
expand(%/b/c/a/d);
EQ11:%-'diff(c,z,2)/c;
EQ12:lhs(EQ11)=-k^2;
EQ13:rhs(EQ11)=-k^2;
C1:ode2(EQ13,c,z);
EQ12;
expand(%*r^2);
EQ21:%-last(lhs(%))-rhs(%);
EQ22:lhs(EQ21)=q^2;
EQ23:rhs(EQ21)=q^2;
B2:ode2(EQ23,b,\theta);
EQ31:expand((EQ22-rhs(EQ22))*a/r^2);
BES0:diff(v(x),x,2)+(1-2*A)/x*diff(v(x),
 x,1)+(B^2*C^2*x^(2*C-2)
 +(A^2-N^2*C^2)/x^2)*v(x)=0;
BES1:v(x)=%c1*x^A*bessel_j(N,B*x^C)
 +%c2*x^A*bessel_y(N,B*x^C);
subst([A=0,N=q,C=1,B=k],BES0);
subst([A=0,N=q,C=1,B=k],BES1);
A2:subst([v(x)=a,x=r,%c2=0],%);
subst([A2,B2,C1],PHT1);
```

流速の速度ポテンシャル：Φ 表記で円柱座標系によるものは (6.1.12) 式、179 頁から、

$$\begin{pmatrix} v_r \\ v_\theta \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{d\,r}\,\Phi \\ \frac{\frac{d}{d\,\theta}\,\Phi}{r} \\ \frac{d}{d\,z}\,\Phi \end{pmatrix} \tag{9.4.58}$$

速度ポテンシャル：Φ の円柱座標の質量保存の方程式は、(6.1.16) 式、180 頁から、

$$\frac{\frac{d}{d\,r}\,\Phi}{r} + \frac{\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,\Phi}{r^2} + \frac{d^2}{d\,z^2}\,\Phi + \frac{d^2}{d\,r^2}\,\Phi = 0 \tag{9.4.59}$$

自由表面条件は、xyz 座標、円柱座標に関係なく (9.1.7) 式から、

$$\frac{d}{d\,z}\,\Phi + \frac{\frac{d^2}{d\,t^2}\,\Phi}{g} = 0 \tag{9.4.60}$$

波高：η は xyz 座標、円柱座標に関係なく (9.1.6) 式から、

$$\eta = -\frac{\frac{d}{d\,t}\,\Phi}{g} \tag{9.4.61}$$

いま、速度ポテンシャルとして、変数分離法で次式を考える。ここで、a, b, c, d は $a = a(r), b = b(\theta), c = c(z), d = d(t)$ の関数とする。

$$\Phi = a\,b\,c\,d \tag{9.4.62}$$

(a) 質量保存の方程式

上式を質量保存の方程式：(9.4.59) 式に代入し、整理すると、

$$\frac{\frac{d}{d\,r}\,a}{a\,r}+\frac{\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,b}{b\,r^2}+\frac{\frac{d^2}{d\,z^2}\,c}{c}+\frac{\frac{d^2}{d\,r^2}\,a}{a}=0$$

上式の左辺第三項を右辺に移項し、$-k^2$ と置くと、

$$\frac{\frac{d}{d\,r}\,a}{a\,r}+\frac{\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,b}{b\,r^2}+\frac{\frac{d^2}{d\,r^2}\,a}{a}=-\frac{\frac{d^2}{d\,z^2}\,c}{c}=-k^2$$

上式を下記の二式に分けると、

$$\frac{\frac{d}{d\,r}\,a}{a\,r}+\frac{\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,b}{b\,r^2}+\frac{\frac{d^2}{d\,r^2}\,a}{a}=-k^2 \tag{9.4.63}$$

$$-\frac{\frac{d^2}{d\,z^2}\,c}{c}=-k^2 \tag{9.4.64}$$

(9.4.64) 式を ode2 関数で解くと、

$$c=\%k1\,e^{k\,z}+\%k2\,e^{-k\,z} \tag{9.4.65}$$

(9.4.63) 式から、a, b について、

$$\frac{\frac{d}{d\,r}\,a}{a\,r}+\frac{\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,b}{b\,r^2}+\frac{\frac{d^2}{d\,r^2}\,a}{a}=-k^2$$

r^2 倍して、左辺第二項と右辺を移項し、下記のように整理して、q^2 と置くと、

$$k^2\,r^2+\frac{\left(\frac{d^2}{d\,r^2}\,a\right)\,r^2}{a}+\frac{\left(\frac{d}{d\,r}\,a\right)\,r}{a}=-\frac{\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,b}{b}=q^2$$

上式を下記の二式に分けると、

$$k^2\,r^2+\frac{\left(\frac{d^2}{d\,r^2}\,a\right)\,r^2}{a}+\frac{\left(\frac{d}{d\,r}\,a\right)\,r}{a}=q^2 \tag{9.4.66}$$

$$-\frac{\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,b}{b}=q^2 \tag{9.4.67}$$

(9.4.67) 式を ode2 関数で解くと、

$$b=\%k1\sin\left(q\,\theta\right)+\%k2\cos\left(q\,\theta\right) \tag{9.4.68}$$

(9.4.66) 式を整理すると、次式となり、これは Bessel の微分方程式である。

$$\frac{\frac{d}{d\,r}\,a}{r}-\frac{a\,q^2}{r^2}+a\,k^2+\frac{d^2}{d\,r^2}\,a=0 \tag{9.4.69}$$

Bessel の微分方程式の一般型とその解は次式である。

$$\begin{aligned}\mathrm{v}\left(x\right)\,&\left(\frac{A^2-C^2\,N^2}{x^2}+x^{2\,C-2}\,B^2\,C^2\right)\\&+\frac{\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{v}\left(x\right)\right)\,\left(1-2\,A\right)}{x}+\frac{d^2}{d\,x^2}\,\mathrm{v}\left(x\right)=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{v}\left(x\right)=&\%c2\,x^A\,\mathrm{bessel\_y}\left(N,x^C\,B\right)\\&+\%c1\,x^A\,\mathrm{bessel\_j}\left(N,x^C\,B\right)\end{aligned}$$

上式で、$A=0, C=1, B=k, N=q$ とすると、微分方程式の一般型は次式となり、(9.4.69) 式と一致する。

$$\frac{d^2}{d\,x^2}\,\mathrm{v}\left(x\right)+\frac{\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{v}\left(x\right)}{x}+\left(k^2-\frac{q^2}{x^2}\right)\,\mathrm{v}\left(x\right)=0$$

このとき解は、

$$\mathrm{v}\left(x\right)=\%c2\,\mathrm{bessel\_y}\left(q,k\,x\right)+\%c1\,\mathrm{bessel\_j}\left(q,k\,x\right)$$

$\mathrm{bessel\_y}\left(q,k\,r\right)$ は適合しないので、(9.4.69) 式の解は、

$$a=\%c1\,\mathrm{bessel\_j}\left(q,k\,r\right) \tag{9.4.70}$$

(9.4.62) 式に (9.4.65) 式、(9.4.68) 式、(9.4.70) 式を代入すると、

$$\begin{aligned}\Phi=&\%c1\,d\,\mathrm{bessel\_j}\left(q,k\,r\right)\,\left(\%k1\sin\left(q\,\theta\right)+\%k2\cos\left(q\,\theta\right)\right)\\&\times\left(\%k1\,e^{k\,z}+\%k2\,e^{-k\,z}\right)\end{aligned}$$

(b) 底の条件

```
/* 底の条件  */
diff(%,z,1);
subst([z=-h],rhs(%))=0;
%k1*k*%e^(-h*k)-%k2*k*%e^(h*k)=0;
K1:%k1=C*%e^(h*k);
K2:%k2=C*%e^(-h*k);
subst([K1,K2],C1);
C2:c=C*cosh(k*(z+h));
subst([A2,B2,C2],PHT1);
```

z 軸方向の流速：$v_z=\frac{d}{d\,z}\,\phi$ で、底面：$z=-h$ で、$v_z=0$ であるから、

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\,z}\,\Phi=&\%c1\,d\,\left(\%k1\,k\,e^{-h\,k}-\%k2\,k\,e^{h\,k}\right)\\&\times\ \mathrm{bessel\_j}\left(q,k\,r\right)\\&\times\ \left(\%k1\sin\left(q\,\theta\right)+\%k2\cos\left(q\,\theta\right)\right)=0\end{aligned}$$

以上から、

$$\%k1\,e^{-h\,k}-\%k2\,e^{h\,k}=0$$

上式の関係を満足する $\%k1, \%k2$ は、

$$\%k1=e^{h\,k}\,C,\quad \%k2=e^{-h\,k}\,C$$

上式を (9.4.65) 式に代入し、

$$c=e^{k\,z+h\,k}\,C+e^{-k\,z-h\,k}\,C$$

更に次式とする。

$$c=\cosh\left(k\,\left(z+h\right)\right)\,C \tag{9.4.71}$$

(9.4.62) 式に (9.4.71) 式、(9.4.68) 式、(9.4.70) 式を代入すると、

$$\Phi = \%c1\, d\, \mathrm{bessel\_j}\,(q, k\, r)\ (\%k1 \sin(q\,\theta) + \%k2 \cos(q\,\theta)) \times \cosh(k\ (z+h))\ C$$

(c) 自由表面条件

```
/* 自由表面条件  */
subst([%],EQ2);
ev(%,diff);
subst([z=0],%);
EQ41:solve(%,d)[1];
OM1:\omega^2=(g*k*sinh(k*h))/cosh(k*h);
OM2:\omega^2=(g*k*tanh(k*h));
OM11:solve(OM1,g)[1];
subst([OM11],EQ41);
ode2(%,d,t);
D2:subst([%k1=%d1,%k2=%d2],%);
PHT2:subst([A2,B2,C2,D2],PHT1);
```

自由表面条件式 (9.4.60) 式に上式を代入し、整理すると、

$$d = -\frac{\left(\frac{d^2}{d\,t^2}\, d\right)\cosh(h\,k)}{g\,k\sinh(h\,k)}$$

ここで、下記とすると、

$$\omega^2 = \frac{g\,k\sinh(h\,k)}{\cosh(h\,k)} = g\,k\tanh(h\,k) \tag{9.4.72}$$

上式は、

$$d = -\frac{\frac{d^2}{d\,t^2}\, d}{\omega^2}$$

上式を ode2 関数で解くと、

$$d = \%d1 \sin(\omega\, t) + \%d2 \cos(\omega\, t) \tag{9.4.73}$$

(d) 波振幅：A の導入

```
/* 波振幅：A の導入  */
subst([PHT2],EQ3);
ev(%,diff);
ET1:factor(subst([z=0],%));
A0:A=%c1*cosh(k*h)*omega*C/g;
A01:solve(A0,C)[1];
ET3:subst([A01],ET1);
PHT3:subst([A01],PHT2);
lhs(%)=limit(rhs(PHT3),h,inf);
ev(%,limit);
limit(OM1,h,inf);
```

(9.4.62) 式に (9.4.71) 式、(9.4.68) 式、(9.4.70) 式、(9.4.73) 式を代入すると、

$$\Phi = \%c1\, \mathrm{bessel\_j}\,(q, k\, r)\ (\%d1 \sin(\omega\, t) + \%d2 \cos(\omega\, t)) \times (\%k1 \sin(q\,\theta) + \%k2 \cos(q\,\theta))\ \cosh(k\ (z+h))\ C$$

上式を (9.4.61) 式に代入し、$z = 0$ とし、波高を求めると、

$$\eta = \frac{\%c1 \cosh(h\,k)\ \omega\, C}{g}\, \mathrm{bessel\_j}\,(q, k\, r) \times (\%d2 \sin(\omega\, t) - \%d1 \cos(\omega\, t)) \times (\%k1 \sin(q\,\theta) + \%k2 \cos(q\,\theta))$$

ここで波振幅：A を導入すると、次式の関係となる。

$$A = \frac{\%c1 \cosh(h\,k)\ \omega\, C}{g}, \quad C = \frac{g\, A}{\%c1 \cosh(h\,k)\ \omega}$$

上記の関係を波高、速度ポテンシャルに代入すると、

$$\eta = \mathrm{bessel\_j}\,(q, k\, r)\ (\%d2 \sin(\omega\, t) - \%d1 \cos(\omega\, t)) \times (\%k1 \sin(q\,\theta) + \%k2 \cos(q\,\theta))\ A \tag{9.4.74}$$

$$\Phi = \frac{g \cosh(k\ (z+h))\ A}{\cosh(h\,k)\ \omega}\, \mathrm{bessel\_j}\,(q, k\, r) \times (\%d1 \sin(\omega\, t) + \%d2 \cos(\omega\, t)) \times (\%k1 \sin(q\,\theta) + \%k2 \cos(q\,\theta)) \tag{9.4.75}$$

いま、水深が十分深いとすると、$h \to \infty$ とし、上式の速度ポテンシャルは、

$$\Phi = \frac{g e^{k\,z}\, A}{\omega}\, \mathrm{bessel\_j}\,(q, k\, r) \times (\%d1 \sin(\omega\, t) + \%d2 \cos(\omega\, t)) \times (\%k1 \sin(q\,\theta) + \%k2 \cos(q\,\theta)) \tag{9.4.76}$$

(9.4.72) 式は、

$$\omega^2 = g\,k \tag{9.4.77}$$

9.5　三次元波の簡単な例

例題 9.5.1　表面撹乱による軸対称波の伝搬

表面の局所的な撹乱を初期に与えたあと生じる平面波の伝搬について調べる[1]。図 9.5.1 に示す $r-\theta-z$ 円柱座標系を用い、波のない平衡状態での水面を $r-\theta$ 平面とし、原点からの距離：r、x 軸と r との角度：θ、鉛直上方に z 軸をとる。水深は十分深いとし、波の高さ：η、時間：t、密度：ρ、重力加速度：g、振動円周波数：ω とする。

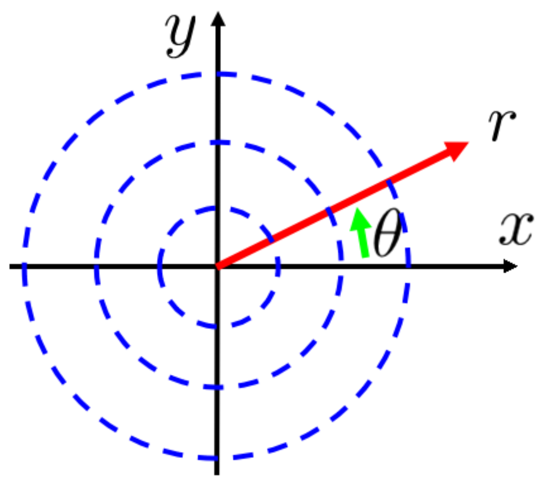


図 9.5.1: 平面波の伝搬（円柱座標）

(1) 自由表面のもりあがり

初期状態で、原点に自由表面の集中的なもりあがりがある場合について調べる。

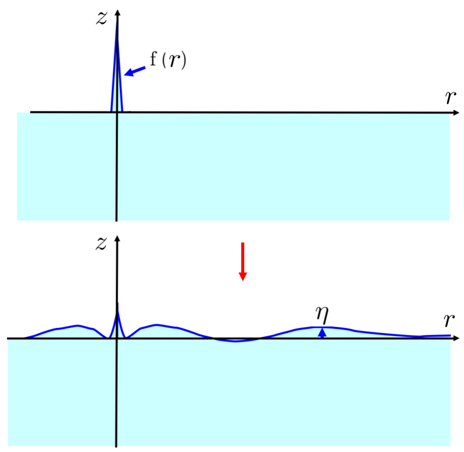


図 9.5.2: 自由表面のもりあがりによる平面波の伝搬

```
/* 三次元の無限水深の波の伝搬  */
kill(all);
assume(k>0);
assume(t>0);
assume(L>0);
assume(\omega>0);
assume(A>0);
assume(r>0);
assume(m>0);
assume(g>0);
ET1:\eta=-'diff(\Phi,t,1)/g;
PHT41:\Phi=-(bessel_j(0,k*r)*g*
 sin(\omega*t)*%e^(k*z)*A)/\omega;
ET41:\eta=bessel_j(0,k*r)*cos(\omega*t)*A;
OM11:omega=sqrt(g)*sqrt(k);
/* 表面撹乱  */
F1:f(r)='integrate(k*bessel_j(\nu,k*r)*
 F[\nu](k),k,0,inf);
F2:F[\nu](k)='integrate(bessel_j(\nu,k*r)
 *r*f(r),r,0,inf);
F11:subst([F2],F1);
F21:subst([r=s],F2);
subst([\omega=\omega(k),A=1],rhs(PHT41));
\Phi=subst([bessel_j(nu,k*r)=%],rhs(F1));
subst([F21,\nu=0],%);
PHT5:subst([integrate(bessel_j(0,k*s)*s
 *f(s),s,0,inf)=1/2/%pi],%);
subst([PHT5],ET1);
ev(%,diff);
ET5:subst([z=0],%);
BES2:bessel_j(m,R)=sqrt(2/%pi/R)
 *cos(R-%pi*(2*m+1)/4);
BES21:subst([m=0,R=k*r],%);
ET21:subst([BES21],ET5);
cos(k*r-%pi/4)*cos(\omega(k)*t)=1/2
 *cos(k*r-%pi/4-\omega(k)*t)
  +1/2*cos(k*r-%pi/4+\omega(k)*t);
CS1:lhs(%)=last(rhs(%))*2;
CS2:solve(%,cos(omega(k)*t))[1];
ET22:subst([CS2],ET21);
```

いま、水深が十分深いとき、平面波の速度ポテンシャルは、(9.4.76) 式から、波の振幅：A とすると、

$$\begin{aligned}\Phi =&\frac{g\,e^{k\,z}\,A}{\omega}\,\mathrm{bessel\_j}\,(q,k\,r)\\&\times\;(\%d1\sin(\omega\,t)+\%d2\cos(\omega\,t))\\&\times\;(\%k1\sin(q\,\theta)+\%k2\cos(q\,\theta))\end{aligned}\tag{9.5.1}$$

[1]Sir Horance Lamb, Hydrodynamics sixth edition [11)], P.429 255.

ここで、(9.4.77) 式から、

$$\omega=\sqrt{g}\,\sqrt{k} \tag{9.5.2}$$

波高：η は、(9.4.61) 式から、

$$\eta=-\frac{\frac{d}{d\,t}\,\Phi}{g} \tag{9.5.3}$$

波形が原点対称で、$q=0$、初期：$t=0$ で、有限値を持つので、速度ポテンシャル：Φ は、

$$\Phi=-\frac{\mathrm{bessel\_j}\left(0,k\,r\right)\,g\sin\left(\omega\,t\right)\,e^{k\,z}\,A}{\omega} \tag{9.5.4}$$

(9.5.4) 式を (9.5.3) 式に代入し、$z=0$ として波高を求めると、

$$\eta=\mathrm{bessel\_j}\left(0,k\,r\right)\,\cos\left(\omega\,t\right)\,A \tag{9.5.5}$$

領域が無限であるので、極座標の Fourier 積分に相当する、下記の Hankel Transform を活用する。

$$\mathrm{f}\left(r\right)=\int_{0}^{\infty}k\,F_{\nu}\left(k\right)\,\mathrm{bessel\_j}\left(\nu,k\,r\right)dk$$

$$F_{\nu}\left(k\right)=\int_{0}^{\infty}\mathrm{bessel\_j}\left(\nu,k\,r\right)\,r\,\mathrm{f}\left(r\right)dr$$

上記 Hankel Transform を書き換えると、

$$\mathrm{f}\left(r\right)=\int_{0}^{\infty}k\,\mathrm{bessel\_j}\left(\nu,k\,r\right)\,\int_{0}^{\infty}\mathrm{bessel\_j}\left(\nu,k\,r\right)\,r\,\mathrm{f}\left(r\right)drdk$$

$$F_{\nu}\left(k\right)=\int_{0}^{\infty}\mathrm{bessel\_j}\left(\nu,k\,s\right)\,s\,\mathrm{f}\left(s\right)ds$$

Hankel Transform を (9.5.4) 式に適用すると、

$$\Phi=-g\,\int_{0}^{\infty}\frac{\mathrm{bessel\_j}\left(0,k\,r\right)\,k\,\int_{0}^{\infty}\mathrm{bessel\_j}\left(0,k\,s\right)\,s\,\mathrm{f}\left(s\right)ds\sin\left(\omega\left(k\right)\,t\right)\,e^{k\,z}}{\omega\left(k\right)}dk \tag{9.5.6}$$

上式の速度ポテンシャルで、初期における波高：$\mathrm{f}\left(s\right)$ が非常に狭い範囲に分布し、他では $\mathrm{f}\left(s\right)=0$ とし、

$$2\,\pi\,\int_{0}^{\infty}s\,\mathrm{f}\left(s\right)ds=1$$

上式を (9.5.6) 式に代入すると、

$$\Phi=-\frac{g}{2\,\pi}\,\int_{0}^{\infty}\frac{\mathrm{bessel\_j}\left(0,k\,r\right)\,k\sin\left(\omega\left(k\right)\,t\right)\,e^{k\,z}}{\omega\left(k\right)}dk$$

波高は上式を (9.5.3) 式に代入し、$z=0$ として、

$$\eta=\frac{\int_{0}^{\infty}\mathrm{bessel\_j}\left(0,k\,r\right)\,k\cos\left(\omega\left(k\right)\,t\right)dk}{2\,\pi} \tag{9.5.7}$$

次式の Bessel 関数で、R が大きいとき、「A.9.2 Hunkel の漸近展開初項」の (A.9.3) 式、659 頁の次式で近似できる。

$$\mathrm{bessel\_j}\left(m,R\right)=\frac{\sqrt{2}\cos\left(R-\frac{\pi\,\left(2\,m+1\right)}{4}\right)}{\sqrt{\pi}\,\sqrt{R}}$$

(9.5.7) 式で上式を $m\to 0$、$R\to k\,r$ と対応でき、

$$\mathrm{bessel\_j}\left(0,k\,r\right)=\frac{\sqrt{2}\cos\left(k\,r-\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{\pi}\,\sqrt{k}\,\sqrt{r}}$$

上記の結果から、波高は、

$$\eta=\frac{\int_{0}^{\infty}\sqrt{k}\cos\left(k\,r-\frac{\pi}{4}\right)\,\cos\left(\omega\left(k\right)\,t\right)dk}{\sqrt{2}\,\pi^{\frac{3}{2}}\,\sqrt{r}} \tag{9.5.8}$$

上式の積分内の三角関数を変形すると、

$$\cos\left(k\,r-\frac{\pi}{4}\right)\,\cos\left(\omega\left(k\right)\,t\right)=\frac{\cos\left(\omega\left(k\right)\,t+k\,r-\frac{\pi}{4}\right)}{2}+\frac{\cos\left(\omega\left(k\right)\,t-k\,r+\frac{\pi}{4}\right)}{2}$$

r の方向に波が伝搬することから、次式とする。

$$\cos\left(k\,r-\frac{\pi}{4}\right)\,\cos\left(\omega\left(k\right)\,t\right)=\cos\left(\omega\left(k\right)\,t-k\,r+\frac{\pi}{4}\right)$$

上記の結果を (9.5.8) 式に代入し、

$$\eta=\frac{\int_{0}^{\infty}\sqrt{k}\cos\left(\omega\left(k\right)\,t-k\,r+\frac{\pi}{4}\right)dk}{\sqrt{2}\,\pi^{\frac{3}{2}}\,\sqrt{r}} \tag{9.5.9}$$

```
/* 積分法  */
SF2:integrate(%e^(%i*f(k))*s(k),k,-inf,inf)
 =%e^('%i*(f(d)+%pi/4))*s(d)*sqrt(%pi)
 /sqrt(abs('diff(f(d),xi,2))/2);
/* 積分法の適用  */
FK:f(k)=(k*r-%pi/4-\omega(k)*t);
DFK1:diff(FK,k,1);
DFK11:rhs(DFK1)=0;
subst([\omega(k)=rhs(OM11)],%);
ev(%,diff);
DFK12:solve(%,k)[1];
D1:d=rhs(%);
FKD1:subst([f(k)=f(d),\omega(k)=sqrt(g*k),
 DFK12],FK);
DFK2:diff(FK,k,2);
subst([\omega(k)=rhs(OM11)],%);
ev(%,diff);
subst([f(k)=f(d)],%);
DFK21:lhs(%)=subst([DFK12],rhs(%));
DFK22:subst([k=\xi],%);
SK1:s(k)=sqrt(k)/(sqrt(2)*%pi^(3/2)*
 sqrt(r));
SD1:s(d)=sqrt(k)/(sqrt(2)*%pi^(3/2)*
 sqrt(r));
subst([SK1,SD1,DFK22],SF2);
lhs(%)=subst([DFK12],rhs(%));
subst([-inf=0,FK],lhs(%))=rhs(%)/2;
subst([FKD1],%);
realpart(%);
lhs(%)=trigrat(rhs(%));
rhs(ET22)=rhs(%);
ET6:subst([\omega(k)=\omega],%);
cos(omega(k)*t-k*r+%pi/4);
%=expand(trigrat(%));
\eta=lhs(ET6);
\eta=rhs(ET6);
ET61:subst([g=9.8],rhs(ET6));
plot2d([subst([t=4],ET61),subst([t=2],ET61)
 ,subst([t=1],ET61),subst([t=0.5],ET61)],
  [r,0.2,4],[x,0,4],[y,-5,5],[legend,
  "t=4s", "t=2s","t=1s","t=0.5s"]);
```

(9.5.9) 式の積分式は、多くの変動を有する積分で、「A.8 非常に多くの正弦波を積分範囲内に有する積分法 (Kelvin の方法)」、658 頁の方法を活用する。

(A.8.6) 式から、

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\,\mathrm{f}(k)}\,\mathrm{s}(k)\,dk = \frac{\sqrt{2}\sqrt{\pi}\left(\frac{i}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)e^{i\,\mathrm{f}(d)}\,\mathrm{s}(d)}{\sqrt{\left|\frac{d^2}{d\xi^2}\mathrm{f}(d)\right|}} \tag{9.5.10}$$

(9.5.9) 式を上式に適用すると、

$$\mathrm{s}(k)=\sqrt{k} \tag{9.5.11}$$

$$\mathrm{f}(k)=-\omega(k)\,t+k\,r-\frac{\pi}{4} \tag{9.5.12}$$

(9.5.12) 式を (9.5.2) 式の関係から k で微分すると、

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\,k}\mathrm{f}(k)=&r-\left(\frac{d}{d\,k}\omega(k)\right)t\\=&r-\left(\frac{d}{d\,k}\left(\sqrt{g}\sqrt{k}\right)\right)t=r-\frac{\sqrt{g}\,t}{2\sqrt{k}}=0\end{aligned}$$

上式から、d は、

$$k=d=\frac{g\,t^2}{4\,r^2} \tag{9.5.13}$$

(9.5.2) 式の関係式と上式の関係式を (9.5.12) 式に代入し、

$$\mathrm{f}(d)=-\frac{g\,t^2}{4\,r}-\frac{\pi}{4} \tag{9.5.14}$$

(9.5.12) 式を k で二階微分すると、(9.5.2) 式の関係から、

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{d\,k^2}\mathrm{f}(k)=&-\left(\frac{d^2}{d\,k^2}\omega(k)\right)t\\=&-\left(\frac{d^2}{d\,k^2}\left(\sqrt{g}\sqrt{k}\right)\right)t=\frac{\sqrt{g}\,t}{4\,k^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

(9.5.13) 式の関係式を上式に代入し、

$$\frac{d^2}{d\,\xi^2}\mathrm{f}(d)=\frac{2\,r^3}{g\,t^2} \tag{9.5.15}$$

(9.5.11) 式、(9.5.15) 式を (9.5.10) 式に代入し、

$$\begin{aligned}\frac{\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{k}\,e^{i\,\mathrm{f}(k)}dk}{\sqrt{2}\,\pi^{\frac{3}{2}}\sqrt{r}}=&\frac{\left(\frac{i}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)e^{i\,\mathrm{f}(d)}\sqrt{g}\sqrt{k}\,t}{\sqrt{2}\,\pi\,r^2}\\=&\frac{\left(\frac{i}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)e^{i\,\mathrm{f}(d)}\,g\,t^2}{2^{\frac{3}{2}}\,\pi\,r^3}\end{aligned}$$

軸対称であるから、積分範囲を $0\to\infty$ に変更し、積分結果を 1/2 とし、(9.5.14) 式を代入すると、

$$\begin{aligned}&\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\int_0^{\infty}\sqrt{k}\,e^{i\,k\,r-i\,\omega(k)\,t}dk}{\sqrt{2}\,\pi^{\frac{3}{2}}\sqrt{r}}\\&=\frac{\left(\frac{i}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)g\,t^2\,e^{i\left(-\frac{g\,t^2}{4\,r}-\frac{\pi}{4}\right)}}{2^{\frac{5}{2}}\,\pi\,r^3}\end{aligned}$$

上式の実部をとり、整理すると、

$$\frac{\int_0^\infty \sqrt{k}\cos\left(\omega\left(k\right)\,t-k\,r+\frac{\pi}{4}\right)dk}{\sqrt{2}\,\pi^{\frac{3}{2}}\,\sqrt{r}}=\frac{g\,t^2\cos\left(\frac{g\,t^2}{4\,r}\right)}{2^{\frac{5}{2}}\,\pi\,r^3}$$

以上から、伝搬する波形：(9.5.9) 式は、

$$\begin{aligned}\eta&=\frac{\int_0^\infty \sqrt{k}\cos\left(\omega\,t-k\,r+\frac{\pi}{4}\right)dk}{\sqrt{2}\,\pi^{\frac{3}{2}}\,\sqrt{r}}\\&=\frac{g\,t^2\cos\left(\frac{g\,t^2}{4\,r}\right)}{2^{\frac{5}{2}}\,\pi\,r^3}\end{aligned}\qquad(9.5.16)$$

上式を基に波の伝搬の様子を下図に示す。

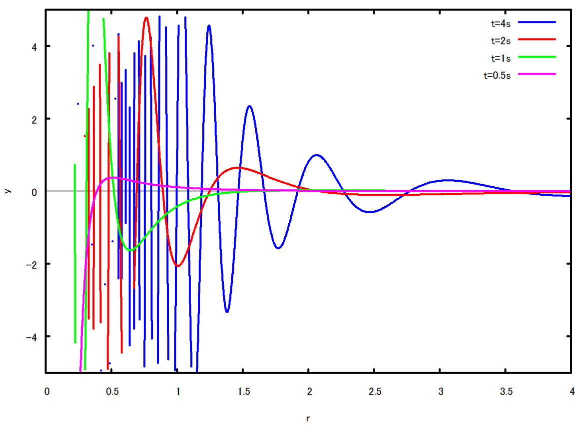


図 9.5.3: 自由表面のもりあがりによる平面波の伝搬

(2) 撃圧作用

初期状態で、原点の自由表面に集中的な衝撃圧力を加えた場合について調べる。

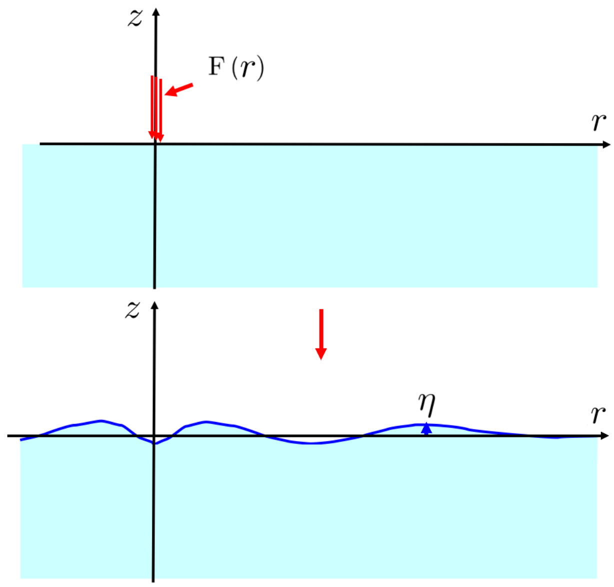


図 9.5.4: 衝撃圧力による二次元波の伝搬

```
/* 撃力撹乱  */
-\rho*lhs(PHT41)=-subst([A=1,sin(\omega*t)
 =cos(\omega*t)],rhs(PHT41))*\omega/g;
-%/\rho;
\Phi=-1/\rho*integrate(integrate(
 bessel_j(0,k*r)*cos(\omega(k)*t)*%e^(k*z)
 *k*F(s)*bessel_j(0,k*s)*s,s,0,inf),k,0,
 inf);
PHT7:subst([integrate(bessel_j(0,k*s)*s
 *F(s),s,0,inf)=1/2/%pi],%);
subst([PHT7],ET1);
ev(%,diff);
ET7:subst([z=0],%);
ET71:subst([BES21],ET7);
cos(k*r-%pi/4)*sin(\omega(k)*t)=-1/2
 *sin(k*r-%pi/4-\omega(k)*t)+1/2
 *sin(k*r-%pi/4+\omega(k)*t);
SS1:lhs(%)=last(rhs(%))*2;
SS2:solve(%,sin(omega(k)*t))[1];
ET72:subst([SS2],ET71);
ET73:subst([sin(\omega(k)*t-k*r+%pi/4)=
 cos(omega(k)*t-k*r+%pi/4-%pi/2)],%);
FK:f(k)=(k*r-\omega(k)*t+%pi/4);
```

```
FKD1:subst([f(k)=f(d),\omega(k)=sqrt(g*k),
 DFK12],FK);
SK2:s(k)=\omega(k)*sqrt(k)/(-sqrt(2)
 *%pi^(3/2)*g*sqrt(r)*\rho);
SD2:s(d)=\omega(d)*sqrt(k)/(-sqrt(2)
 *%pi^(3/2)*g*sqrt(r)*\rho);
subst([SK2,SD2,DFK22],SF2);
lhs(%)=subst([\omega(d)=rhs(OM11),DFK12],
 rhs(%));
subst([-inf=0,FK],lhs(%))=rhs(%)/2;
subst([FKD1],%);
realpart(%);
lhs(%)=trigrat(rhs(%));
rhs(ET73)=rhs(%);
ET8:rhs(ET73)=rhs(%);
cos(omega(k)*t-k*r-%pi/4);
%=expand(trigrat(%));
\eta=lhs(ET8);
\eta=rhs(ET8);
ET61:subst([g=9.8,\rho=102],rhs(ET8));
plot2d([subst([t=4],ET61),subst([t=2],ET61)
 ,subst([t=1],ET61),subst([t=0.5],ET61)],
  [r,0.2,4],[x,0,4],[y,-0.1,0.1],
  [legend,"t=4s","t=2s","t=1s","t=0.5s"]);
```

撃圧は $\rho\Phi$ で表現でき、波形が軸対称で、初期 : $t=0$ で、波高が零である。いま、水深が十分深いとき、平面波の速度ポテンシャルは (9.4.76) 式から、

$$-\Phi\,\rho=\mathrm{bessel\_j}\left(0,k\,r\right)\,\cos\left(\omega\,t\right)\,e^{k\,z}$$

以上から、速度ポテンシャルは、

$$\Phi=-\frac{\mathrm{bessel\_j}\left(0,k\,r\right)\,\cos\left(\omega\,t\right)\,e^{k\,z}}{\rho}$$

上式から、Hankel Transform を活用すると、

$$\begin{aligned}\Phi=&-\frac{1}{\rho}\int_{0}^{\infty}\mathrm{bessel\_j}\left(0,k\,r\right)\,k\cos\left(\omega\left(k\right)\,t\right)\,e^{k\,z}\\&\times\int_{0}^{\infty}\mathrm{bessel\_j}\left(0,k\,s\right)\,s\,\mathrm{F}\left(s\right)ds dk\end{aligned}\tag{9.5.17}$$

上式の速度ポテンシャルで、初期における撃圧 : $\mathrm{F}\left(s\right)$ が非常に狭い範囲に分布し、他では $\mathrm{F}\left(s\right)=0$ とし、

$$2\,\pi\int_{0}^{\infty}s\,\mathrm{F}\left(s\right)ds=1$$

上式を (9.5.17) 式に代入すると、

$$\Phi=-\frac{\int_{0}^{\infty}\mathrm{bessel\_j}\left(0,k\,r\right)\,k\cos\left(\omega\left(k\right)\,t\right)\,e^{k\,z}dk}{2\,\pi\,\rho}$$

波高は上式を (9.5.3) 式に代入し、$z=0$ として、

$$\eta=-\frac{\int_{0}^{\infty}\mathrm{bessel\_j}\left(0,k\,r\right)\,k\,\omega\left(k\right)\,\sin\left(\omega\left(k\right)\,t\right)dk}{2\,\pi\,g\,\rho}$$

上式を (9.5.10) 式の形に合わせ、波高は、

$$\eta=-\frac{\int_{0}^{\infty}\sqrt{k}\,\omega\left(k\right)\,\cos\left(k\,r-\frac{\pi}{4}\right)\,\sin\left(\omega\left(k\right)\,t\right)dk}{\sqrt{2}\,\pi^{\frac{3}{2}}\,g\,\sqrt{r}\,\rho}\tag{9.5.18}$$

上式の積分内の三角関数を変形すると、

$$\begin{aligned}\cos\left(k\,r-\frac{\pi}{4}\right)\,\sin\left(\omega\left(k\right)\,t\right)=&\frac{\sin\left(\omega\left(k\right)\,t+k\,r-\frac{\pi}{4}\right)}{2}\\&+\frac{\sin\left(\omega\left(k\right)\,t-k\,r+\frac{\pi}{4}\right)}{2}\end{aligned}$$

r の方向に波が伝搬することから、次式とする。

$$\cos\left(k\,r-\frac{\pi}{4}\right)\,\sin\left(\omega\left(k\right)\,t\right)=\sin\left(\omega\left(k\right)\,t-k\,r+\frac{\pi}{4}\right)$$

上記の結果を (9.5.18) 式に代入し、

$$\eta=-\frac{\int_{0}^{\infty}\sqrt{k}\,\omega\left(k\right)\,\sin\left(\omega\left(k\right)\,t-k\,r+\frac{\pi}{4}\right)dk}{\sqrt{2}\,\pi^{\frac{3}{2}}\,g\,\sqrt{r}\,\rho}\tag{9.5.19}$$

(9.5.19) 式を (9.5.10) 式に適用すると、

$$\mathrm{s}\left(k\right)=-\frac{\sqrt{k}\,\omega\left(k\right)}{\sqrt{2}\,\pi^{\frac{3}{2}}\,g\,\sqrt{r}\,\rho}\tag{9.5.20}$$

$$\mathrm{f}\left(k\right)=-\omega\left(k\right)\,t+k\,r+\frac{\pi}{4}$$

上式から、

$$\mathrm{f}\left(d\right)=\frac{\pi}{4}-\frac{g\,t^2}{4\,r}\tag{9.5.21}$$

(9.5.20) 式、(9.5.15) 式を (9.5.10) 式に代入し、

$$\begin{aligned}&-\frac{\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{k}\,e^{i\,\mathrm{f}\left(k\right)}\,\omega\left(k\right)dk}{\sqrt{2}\,\pi^{\frac{3}{2}}\,g\,\sqrt{r}\,\rho}\\&=-\frac{\left(\frac{i}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\,e^{i\,\mathrm{f}\left(d\right)}\,\omega\left(d\right)\,\sqrt{k}\,t}{\sqrt{2}\,\pi\,\sqrt{g}\,r^2\,\rho}\\&=-\frac{\left(\frac{i}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\,e^{i\,\mathrm{f}\left(d\right)}\,g\,t^3}{2^{\frac{5}{2}}\,\pi\,r^4\,\rho}\end{aligned}$$

軸対称であるから、積分範囲を $0\rightarrow\infty$ に変更し、積分結果を 1/2 とし、(9.5.21) 式を代入すると、

$$\begin{aligned}&-\frac{\left(\frac{i}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\,\int_{0}^{\infty}\sqrt{k}\,\omega\left(k\right)\,e^{i\,k\,r-i\,\omega\left(k\right)\,t}dk}{\sqrt{2}\,\pi^{\frac{3}{2}}\,g\,\sqrt{r}\,\rho}\\&=-\frac{\left(\frac{i}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\,g\,t^3\,e^{i\,\left(\frac{\pi}{4}-\frac{g\,t^2}{4\,r}\right)}}{2^{\frac{7}{2}}\,\pi\,r^4\,\rho}\end{aligned}$$

上式の実部をとり、整理すると、

$$\begin{aligned}&-\frac{\int_{0}^{\infty}\sqrt{k}\,\omega\left(k\right)\,\cos\left(\omega\left(k\right)\,t-k\,r-\frac{\pi}{4}\right)dk}{\sqrt{2}\,\pi^{\frac{3}{2}}\,g\,\sqrt{r}\,\rho}\\&=-\frac{g\,t^3\sin\left(\frac{g\,t^2}{4\,r}\right)}{2^{\frac{7}{2}}\,\pi\,r^4\,\rho}\end{aligned}$$

以上から、伝搬する波形：(9.5.18) 式は、

$$\eta = -\frac{\int_0^{\infty} \sqrt{k}\,\omega\left(k\right)\,\cos\left(\omega\left(k\right)\,t - k\,r - \frac{\pi}{4}\right)dk}{\sqrt{2}\,\pi^{\frac{3}{2}}\,g\,\sqrt{r}\,\rho}$$
$$= -\frac{g\,t^3\sin\left(\frac{g\,t^2}{4\,r}\right)}{2^{\frac{7}{2}}\,\pi\,r^4\,\rho} \tag{9.5.22}$$

上式を基に波の伝搬の様子を下図に示す。

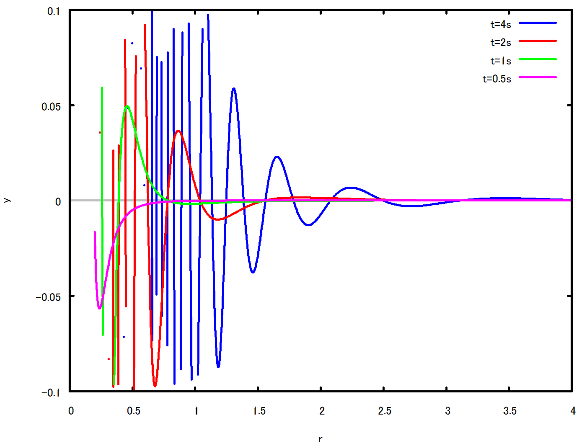


図 9.5.5: 撃圧作用による平面波の伝搬

例題 9.5.2 船が起こす波紋

船の起こす波の波紋について調べる [1]。船の波は船首などの撹乱で波が生じ、平面に拡散していく。波のない平衡状態での水面を x 軸、y 軸とし、鉛直上方に z 軸をとる。撹乱源は x 軸上を負の方向に一定速度：U で進み、水底の深さは十分深いものとする。波高：η、時間:t、重力加速度：g とする。

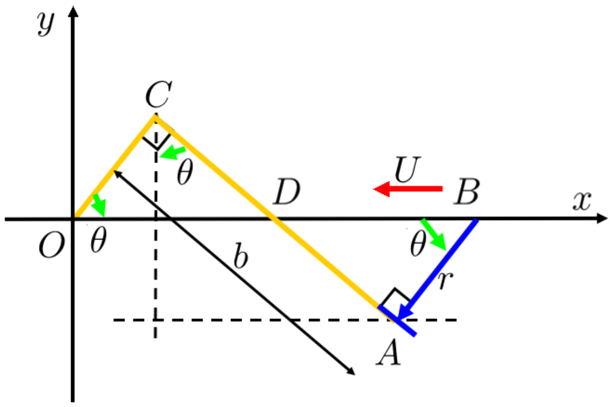


図 9.5.6: 船の起こす波紋

```
/* 船の起こす波紋  */
kill(all);
load("vect")$
depends(r,[t]);
assume(r>0);
ET1:\eta=-(g*t^3*sin((g*t^2)/(4*r)))
 /(2^(7/2)*%pi*r^4*\rho);
PH1:(g*t^2)/(4*r)=%pi/2+2*%pi*n;
diff(PH1,t,1);
EQ1:solve(%,'diff(r,t,1))[1];
EQ2:'diff(r,t,1)=U*cos(\theta);
rhs(EQ1)=rhs(EQ2);
EQ3:solve(%,U)[1]*t;
EQ4:U*t*cos(\theta)=2*r;
EQ4^2;
solve(%,t^2)[1];
EQ5:subst([%],PH1);
EQ51:solve(%,r)[1];
A1:a=((4*%pi*n+%pi)*U^2)/(2*g);
A2:solve(%,g)[1];
EQ52:subst([A2],EQ51);
EQ6:b=2*r*tan(\theta);
```

B 点において撹乱源は x 軸上を速度：U で移動する。B 点からの撃圧作用による平面波の伝搬波形は (9.5.22) 式から次式となる。

$$\eta = -\frac{g\,t^3 \sin\left(\frac{g\,t^2}{4\,r}\right)}{2^{\frac{7}{2}}\,\pi\,r^4\,\rho} \tag{9.5.23}$$

波形が山の位置のときには、

$$\frac{g\,t^2}{4\,r} = 2\,\pi\,n + \frac{\pi}{2} \tag{9.5.24}$$

B 周辺の撹乱源からの波が A に伝搬し、波形が変化しないで、とどまる（停留）ためには、(9.5.23) 式の sin 項の中が下記の関係となる必要がある。

$$\frac{d}{d\,t}\left(\frac{g\,t^2}{4\,r}\right) = \frac{g\,t}{2\,r} - \frac{g\,\left(\frac{d}{d\,t}\,r\right)\,t^2}{4\,r^2} = 0$$

上式から、

$$\frac{d}{d\,t}\,r = \frac{2\,r}{t} \tag{9.5.25}$$

一方、B は速度：U で移動するので、下記の関係がある。

$$\frac{d}{d\,t}\,r = \cos\left(\theta\right)\,U \tag{9.5.26}$$

(9.5.25) 式と (9.5.26) 式から $\frac{d}{d\,t}\,r$ を消去すると、

$$\frac{2\,r}{t} = \cos\left(\theta\right)\,U$$

上式から、次式の関係を得る。

$$t\,U = \frac{2\,r}{\cos\left(\theta\right)} \tag{9.5.27}$$

撹乱源：B 点は時間：t 後に O に至り、$\overline{BO} = t\,U$ である。いま、停留した波線は $\overline{BA} = r$ に直角である。この停留波線を延長し、O から垂線を下ろし、交点を C とする。$\overline{AC}$ と x 軸との交点を D とする。また、$\overline{AC} = b$ とする。$\overline{BD} = r/cos(\theta)$ と (9.5.27) 式から、点：D は $\overline{BO}$ を二等分しており、$\overline{BD} = \overline{DO}$ となり、$\triangle\,BDA$ と $\triangle\,ODC$ は合同である。よって、$\overline{BA} = \overline{OC} = r$ となる。

(9.5.27) 式から t^2 を求め、

$$t^2 = \frac{4\,r^2}{\cos\left(\theta\right)^2\,U^2}$$

上式を (9.5.24) 式に代入すると、

$$\frac{g\,r}{\cos\left(\theta\right)^2\,U^2} = 2\,\pi\,n + \frac{\pi}{2}$$

上式から r を求めると、

$$r = \frac{\left(4\,\pi\,n + \pi\right)\,\cos\left(\theta\right)^2\,U^2}{2\,g} \tag{9.5.28}$$

上式の一部を下記に示す a と置くと、

$$a = \frac{\left(4\,\pi\,n + \pi\right)\,U^2}{2\,g} \tag{9.5.29}$$

上式から (9.5.28) 式は、

$$r = a\cos\left(\theta\right)^2 \tag{9.5.30}$$

[1]Sir Horance Lamb, Hydrodynamics sixth edition [11)], P.433 256.

また、$\overline{AC} = b$ は、

$$b = 2\,r\tan(\theta) \tag{9.5.31}$$

```
X1:x=r*cos(\theta)+b*sin(\theta);
Y1:y=r*sin(\theta)-b*cos(\theta);
X2:subst([EQ6],X1);
Y2:subst([EQ6],Y1);
subst([EQ52],X2);
trigreduce(%);
X3:factor(%);
subst([EQ52],Y2);
trigreduce(%);
Y3:factor(%);
X31:subst([\theta=z,A1,U=1,g=9.8],
 rhs(X3));
Y31:subst([\theta=z,A1,U=1,g=9.8],
 rhs(Y3));
X4:subst([n=0],X31);
Y4:subst([n=0],Y31);
X41:subst([n=1],X31);
Y41:subst([n=1],Y31);
X42:subst([n=2],X31);
Y42:subst([n=2],Y31);
X43:subst([n=3],X31);
Y43:subst([n=3],Y31);
X44:subst([n=4],X31);
Y44:subst([n=4],Y31);
X45:subst([n=5],X31);
Y45:subst([n=5],Y31);
X46:subst([n=6],X31);
Y46:subst([n=6],Y31);
plot2d ([[parametric,X41,Y41,[z,-%pi,%pi],
 [nticks,100]],[parametric,X42,Y42,
 [z,-%pi,%pi],[nticks,100]],
 [parametric,X43,Y43,[z,-%pi,%pi],
 [nticks,100]],
 [parametric,X44,Y44,[z,-%pi,%pi],
 [nticks,100]],
 [parametric,X45,Y45,[z,-%pi,%pi],
 [nticks,100]],
 [parametric,X46,Y46,[z,-%pi,%pi],
 [nticks,100]]],[x,0,6],[y,-2,2],
 [legend, "n=1","n=2","n=3","n=4",
 "n=5","n=6"]);
```

O を座標の原点としたとき、停留点 A の座標は下記となる。

$$x = b\sin(\theta) + r\cos(\theta)$$

$$y = r\sin(\theta) - b\cos(\theta)$$

上式に (9.5.31) 式を代入すると、

$$x = 2\,r\sin(\theta)\,\tan(\theta) + r\cos(\theta)$$

$$y = r\sin(\theta) - 2\,r\cos(\theta)\,\tan(\theta)$$

上式に (9.5.30) 式を代入すると、

$$x = 2\,a\cos(\theta)^2\sin(\theta)\,\tan(\theta) + a\cos(\theta)^3$$

$$y = a\cos(\theta)^2\sin(\theta) - 2\,a\cos(\theta)^3\tan(\theta)$$

上式を整理し、

$$\begin{aligned} x &= -\frac{a\,(\cos(3\,\theta) - 5\cos(\theta))}{4} \\ y &= -\frac{a\,(\sin(3\,\theta) + \sin(\theta))}{4} \end{aligned} \tag{9.5.32}$$

上式で、a は (9.5.29) 式で与えられる。$n = 1 \sim 6$ で計算した波線の結果を下記に示す。

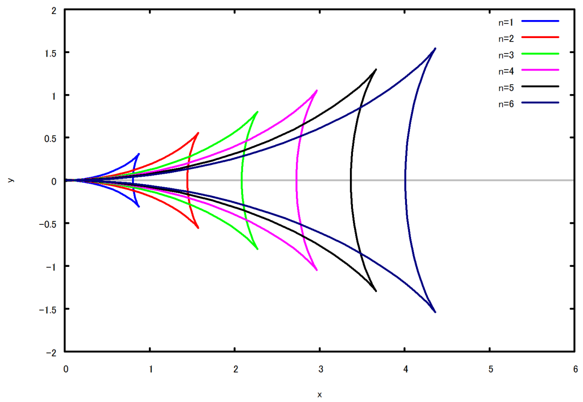


図 9.5.7: 船の起こす波紋

```
XY3:Y3/X3;
plot2d(rhs(%),[\theta,-%pi/2,%pi/2],
 [ylabel, "y/x"]);
DXY3:diff(rhs(XY3),\theta,1);
plot2d(%,[\theta,-%pi/2,%pi/2]);
TXY3:\theta=find_root(DXY3,0.5,1);
\theta=float(rhs(%)*180/%pi);
subst([TXY3],XY3);
\theta=float(atan(abs(rhs(%)))*180/%pi);
```

(9.5.32) 式から y/x を求め、原点：O からの波の広がりを調べる。

$$\frac{y}{x} = \frac{\sin(3\,\theta) + \sin(\theta)}{\cos(3\,\theta) - 5\cos(\theta)} \tag{9.5.33}$$

上式の結果を図にすると、下図になる。上記の結果：y/x が最大となる θ は

$$\theta = 0.61547970867039\text{rad} = 35.26438968275465\text{deg}.$$

上記の結果から y/x を求めると、

$$\frac{y}{x} = -0.35355339059327$$

この角度は、

$$\theta = 19.4712206344907\mathrm{deg}.$$

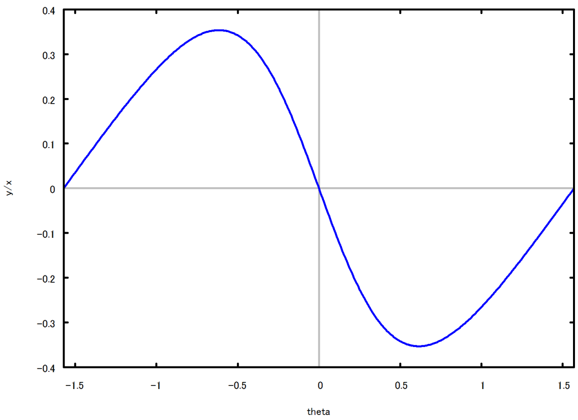


図 9.5.8: 船の起こす波紋の広がり角度

```
/* 斜め波  */
'diff(\omega(k),k,1)='diff(\omega(k),
 \theta,1)/'diff(k,\theta,1);
K1:k(\theta)=g/(U*cos(\theta))^2;
DK1:diff(K1,\theta,1);
K2:\omega(k)=k(\theta)*(x*cos(\theta)
 +y*sin(\theta));
subst([K1],K2);
diff(rhs(%),\theta,1)/rhs(DK1)=0;
solve(%,y)[1];
DK2:%/x;
plot2d(rhs(DK2),[\theta,-%pi/2,%pi/2]);
DDK2:diff(rhs(DK2),\theta,1)=0;
plot2d(lhs(%),[\theta,-%pi/2,%pi/2]);
TH1:\theta=find_root(lhs(DDK2),0,1);
lhs(%)=float(rhs(%)*180/%pi);
subst([TH1],DK2);
\theta=atan(-rhs(%));
lhs(%)=float(rhs(%)*180/%pi);
rhs(XY3)-rhs(DK2);
trigreduce(%);
```

上記の検討を別の方法で行う。一様流がある場合の波高は (9.4.55) 式から

$$\eta = \cos\left(k\sin(\theta)\ y + k\cos(\theta)\ x + \epsilon_1\right)\ A$$

上式の下記に示す *cos* 項の中の関係から船の起こす波紋の広がり角度を求める [2]。

$$\omega(k) = \mathrm{k}(\theta)\ \left(\sin(\theta)\ y + \cos(\theta)\ x\right) \tag{9.5.34}$$

ここで、

$$\mathrm{k}(\theta) = \frac{g}{\cos(\theta)^2\ U^2} \tag{9.5.35}$$

上式を (9.5.34) 式に代入すると、

$$\omega(k) = \frac{g\ \left(\sin(\theta)\ y + \cos(\theta)\ x\right)}{\cos(\theta)^2\ U^2}$$

波が停留するには、

$$\frac{d}{d\,k}\,\omega(k) = \frac{\frac{d}{d\,\theta}\,\omega(k)}{\frac{d}{d\,\theta}\,k} = 0$$

上式を求めると、

$$\frac{\cos(\theta)^3\ U^2}{2\,g\sin(\theta)}\left(\frac{2\,g\sin(\theta)\ \left(\sin(\theta)\ y + \cos(\theta)\ x\right)}{\cos(\theta)^3\ U^2} + \frac{g\ \left(\cos(\theta)\ y - \sin(\theta)\ x\right)}{\cos(\theta)^2\ U^2}\right) = 0$$

上式から y/x を求めると、

$$\frac{y}{x} = -\frac{\cos(\theta)\ \sin(\theta)}{2\sin(\theta)^2 + \cos(\theta)^2}$$

上式を整理すると (9.5.33) 式と同じになる。
以上から船の起こす波紋は下図に示すように船から後方 ±19.47 度の範囲に分布し、その先端の波の向きは $\theta = 35.26$ 度である。

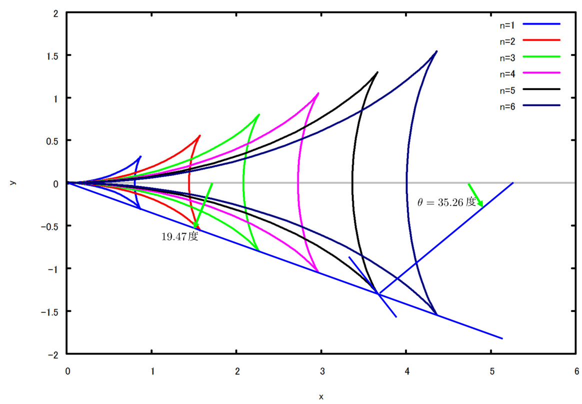


図 9.5.9: 船の起こす波紋の広がり角度

[2] J. N. Newman, Marine Hydrodynamics 21),P.270 6.10 Three-Dimensional Ship Waves

例題 9.5.3　前進速度のあるわき出しによる三次元波と造波抵抗

わき出しが速度：U で航走し、波のない平衡状態での水面を x 軸、y 軸とし、鉛直上方に z 軸をとる。わき出しは x 軸上を負の方向に一定速度：U で進み、水底の深さは十分深いとする。わき出しが起こした波の高さ：η とし、密度：ρ、重力加速度：g とする [1]。

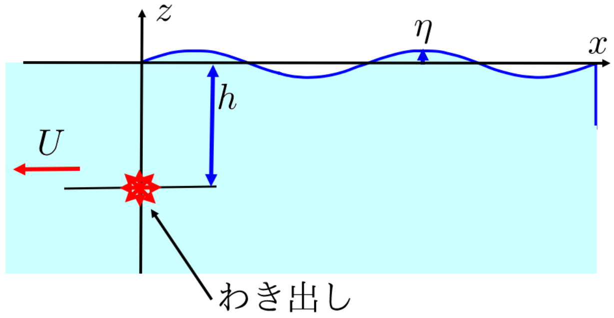


図 9.5.10: 前進速度のあるわき出しの波

```
/* 三次元波の船の造波  */
kill(all);
load("vect")$
depends(\Phi,[x,y,z,t]);
depends(\phi,[x,y,z]);
depends(\eta,[x,y]);
depends(a,[x]);
depends(b,[y]);
depends(c,[z]);
assume(t>0);
assume(k>0);
assume(K[0]>0);
assume(a>0);
assume(b<0);
/* 境界条件  */
PH0:\Phi=U*x+\phi;
EQ1:'diff(\phi,z,2)+'diff(\phi,y,2)
 +'diff(\phi,x,2)=0;
ET0:\eta=-(('diff(\phi,x,1))*U)/g;
FS4:(('diff(\phi,x,2))*U^2)/g
 +'diff(\phi,z,1)=0;
K1:K[0]=g/U^2;
K2:solve(%,g)[1];
FS5:subst([K2],FS4);
PH1:\phi=\phi[1]+\phi[2];
PHA1:\phi[1]=1/sqrt((x-x[1])^2+(y-y[1])^2
 +(z+h)^2);
```

[1] 丸尾孟：造波抵抗理論概説、造船協会誌第 434 号、1965,9 p378

```
DA1:bessel_j(0,k*sqrt(y^2+x^2))*%e^(-k*z);
A1:1/sqrt(x^2+y^2+z^2)='integrate(DA1,k,
 0,inf);
/* Bessel 正  */
DBE1:%e^(b*cos(theta))*cos(a*sin(theta))
 /%pi;
BE1:bessel_j(0,sqrt(a^2-b^2))='integrate(
 DBE1,\theta,0,%pi);
BE11:subst([b=%i*d],BE1);
subst([d=k*x,a=k*y],BE11);
BE2:factor(%);
```

前進速度：U がある速度ポテンシャル：Φ は、次式で表現できる。

$$\Phi = x\,U + \phi$$

ここで、ϕ はわき出し固定の動座標で、x, y, z の関数である。このとき、(9.1.9) 式から質量保存の方程式は次式となる。

$$\frac{d^2}{d\,z^2}\,\phi + \frac{d^2}{d\,y^2}\,\phi + \frac{d^2}{d\,x^2}\,\phi = 0 \tag{9.5.36}$$

(9.1.14) 式から波高：η は次式となる。

$$\eta = -\frac{\left(\frac{d}{d\,x}\,\phi\right)\,U}{g} \tag{9.5.37}$$

(9.1.15) 式から自由表面条件は次式となる。

$$\frac{\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,\phi\right)\,U^2}{g} + \frac{d}{d\,z}\,\phi = 0 \tag{9.5.38}$$

上式で、次式の置き換えを行うと、

$$K_0 = \frac{g}{U^2} \tag{9.5.39}$$

自由表面条件は次式となる。

$$\frac{d}{d\,z}\,\phi + \frac{\frac{d^2}{d\,x^2}\,\phi}{K_0} = 0 \tag{9.5.40}$$

速度ポテンシャル：ϕ を下記の ϕ_1, ϕ_2 に分ける。ϕ_1 は無限流体中を一定速度で航行するわき出しを表す速度ポテンシャルで、ϕ_2 は自由表面条件などを満足するように ϕ_1 を補正する関数とする。

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 \tag{9.5.41}$$

三次元流場でわき出しの速度ポテンシャル Φ は、(6.1.38) 式、190 頁から、

$$\Phi = -\frac{m}{r}$$

上式から、わき出しが位置：$(x_1, y_1, -h)$ にあるとすると、わき出しの速度ポテンシャル：ϕ_1 は、

$$\phi_1 = \frac{1}{\sqrt{(z+h)^2 + (y-y_1)^2 + (x-x_1)^2}} \tag{9.5.42}$$

また、次の Lipschitz の積分公式 : (A.9.11) 式、659 頁から、

$$\frac{1}{\sqrt{z^2+y^2+x^2}} = \int_0^{\infty} \mathrm{bessel\_j}\left(0, k\sqrt{y^2+x^2}\right) e^{-k\,z} dk \quad (z>0) \tag{9.5.43}$$

更に、次の Bessel の積分表示 : (A.9.8) 式、659 頁から、

$$\mathrm{bessel\_j}\left(0, \sqrt{a^2-b^2}\right) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{b\cos(\theta)} \cos\left(a\sin(\theta)\right) d\theta$$

$b=i\,d$ と置くと、上式は、

$$\mathrm{bessel\_j}\left(0, \sqrt{d^2+a^2}\right) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{i\,d\cos(\theta)} \cos\left(a\sin(\theta)\right) d\theta$$

上式から、

$$\mathrm{bessel\_j}\left(0, k\sqrt{y^2+x^2}\right) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{i\,k\cos(\theta)\,x} \cos\left(k\sin(\theta)\;y\right) d\theta \tag{9.5.44}$$

```
A2:subst([BE2],A1);
CO1:cos(a)=(%e^(%i*a)+%e^(-%i*a))/2;
rectform(%);
CO11:subst([a=k*sin(theta)*y],CO1);
subst([CO11],A2);
DA2:%e^(%i*k*cos(theta)*x)*(%e^(%i*k
 *sin(theta)*y)+%e^(-%i*k*sin(theta)*y))
 *%e^(-k*z)/2/%pi;
DA21:expand(DA2);
DA2F:first(DA21);
DA2L:last(DA21);
A2F:'integrate(DA2F,\theta,0,%pi);
A2L:'integrate(DA2L,\theta,0,%pi);
T1:\theta=%pi-t;
DT1:'diff(lhs(T1),t)=diff(rhs(T1),t,1);
A2L1:'integrate(subst([T1],DA2L)*rhs(DT1),
 t,%pi,0);
DA2L1:%e^(-k*z-%i*k*sin(t)*y-%i*k*cos(t)*x)
 /2/%pi;
DA2L2:subst([t=\theta],DA2L1);
DA3:DA2F+DA2L2;
```

```
A3:lhs(A2)='integrate('integrate(DA3,
 \theta,0,%pi),k,0,inf);
A31:'integrate(DA3,\theta,0,%pi/2);
A32:'integrate(DA3,\theta,%pi/2,%pi);
T2:\theta=%pi+t;
DT2:'diff(lhs(T2),t)=diff(rhs(T2),t,1);
DA32:subst([T2],DA3)*rhs(DT2);
A321:'integrate(subst([t=\theta],DA32),
 \theta,-%pi/2,0);
A31+A321;
A4:lhs(A2)='integrate('integrate(DA3,
 \theta,-%pi/2,%pi/2),k,0,inf);
realpart(%);
DF5:DA2F*2;
DF51:realpart(%);
A5:lhs(A2)='integrate('integrate(DF5,
 \theta,-%pi/2,%pi/2),k,0,inf);
```

ここで、

$$\cos\left(k\sin(\theta)\;y\right) = \frac{e^{i\,k\sin(\theta)\,y}+e^{-i\,k\sin(\theta)\,y}}{2}$$

であるから、(9.5.43) 式と (9.5.44) 式から、(9.5.42) 式は次式となる。

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{z^2+y^2+x^2}} &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{\pi} e^{i\,k\cos(\theta)\,x}\cos\left(k\sin(\theta)\;y\right) d\theta\, e^{-k\,z} dk \\ &= \frac{1}{2\,\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{\pi} e^{i\,k\cos(\theta)\,x} \\ &\qquad \times \left(e^{i\,k\sin(\theta)\,y}+e^{-i\,k\sin(\theta)\,y}\right) d\theta\, e^{-k\,z} dk\end{aligned} \tag{9.5.45}$$

上式の θ に関する積分は下記となり、

$$\frac{1}{2\,\pi}\int_0^{\pi} e^{-k\,z+i\,k\sin(\theta)\,y+i\,k\cos(\theta)\,x} d\theta + \frac{1}{2\,\pi}\int_0^{\pi} e^{-k\,z-i\,k\sin(\theta)\,y+i\,k\cos(\theta)\,x} d\theta \tag{9.5.46}$$

上式第二項を $\theta=\pi-t$ で置き換えると、

$$\frac{1}{2\,\pi}\int_0^{\pi} e^{-k\,z-i\,k\sin(\theta)\,y+i\,k\cos(\theta)\,x} d\theta \to \quad \frac{1}{2\,\pi}\int_0^{\pi} e^{-k\,z-i\,k\sin(t)\,y-i\,k\cos(t)\,x} dt$$

$t\to\theta$ に戻すと、(9.5.46) 式は次式となり、積分範囲

を $0 \to \pi/2$ と $\pi/2 \to \pi$ に分けると、

$$\begin{aligned}&\int_0^{\pi} \frac{e^{-k\,z+i\,k\sin(\theta)\,y+i\,k\cos(\theta)\,x}}{2\,\pi}\\&\quad+\frac{e^{-k\,z-i\,k\sin(\theta)\,y-i\,k\cos(\theta)\,x}}{2\,\pi}d\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-k\,z+i\,k\sin(\theta)\,y+i\,k\cos(\theta)\,x}}{2\,\pi}\\&\quad+\frac{e^{-k\,z-i\,k\sin(\theta)\,y-i\,k\cos(\theta)\,x}}{2\,\pi}d\theta\\&+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{e^{-k\,z+i\,k\sin(\theta)\,y+i\,k\cos(\theta)\,x}}{2\,\pi}\\&\quad+\frac{e^{-k\,z-i\,k\sin(\theta)\,y-i\,k\cos(\theta)\,x}}{2\,\pi}d\theta\end{aligned}$$

積分範囲：$\pi/2 \to \pi$ の積分について、$\theta = t + \pi$ で置き換え、$t \to \theta$ に戻すと、

$$\begin{aligned}&\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{e^{-k\,z+i\,k\sin(\theta)\,y+i\,k\cos(\theta)\,x}}{2\,\pi}\\&\quad+\frac{e^{-k\,z-i\,k\sin(\theta)\,y-i\,k\cos(\theta)\,x}}{2\,\pi}d\theta\\&=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{e^{-k\,z+i\,k\sin(\theta)\,y+i\,k\cos(\theta)\,x}}{2\,\pi}\\&\quad+\frac{e^{-k\,z-i\,k\sin(\theta)\,y-i\,k\cos(\theta)\,x}}{2\,\pi}d\theta\end{aligned}$$

以上をまとめると、θ に関する積分：(9.5.46) 式は下記となる。

$$\begin{aligned}&\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{e^{-k\,z+i\,k\sin(\theta)\,y+i\,k\cos(\theta)\,x}}{2\,\pi}\\&\quad+\frac{e^{-k\,z-i\,k\sin(\theta)\,y-i\,k\cos(\theta)\,x}}{2\,\pi}d\theta\\&+\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-k\,z+i\,k\sin(\theta)\,y+i\,k\cos(\theta)\,x}}{2\,\pi}\\&\quad+\frac{e^{-k\,z-i\,k\sin(\theta)\,y-i\,k\cos(\theta)\,x}}{2\,\pi}d\theta\end{aligned}$$

以上から、(9.5.45) 式は下記となる。

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\sqrt{z^2+y^2+x^2}}\\&=\int_0^{\infty}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-k\,z+i\,k\sin(\theta)\,y+i\,k\cos(\theta)\,x}}{2\,\pi}\\&\quad+\frac{e^{-k\,z-i\,k\sin(\theta)\,y-i\,k\cos(\theta)\,x}}{2\,\pi}d\theta dk\\&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\left(k\sin\left(\theta\right)\,y+k\cos\left(\theta\right)\,x\right)d\theta\,e^{-k\,z}dk\quad(z>0)\end{aligned}\tag{9.5.47}$$

または、上式は下記と表現できる。

$$\frac{1}{\sqrt{z^2+y^2+x^2}}=\frac{1}{\pi}\Re\int_0^{\infty}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-k\,z+i\,k\sin(\theta)\,y+i\,k\cos(\theta)\,x}d\theta dk\quad(z>0)\tag{9.5.48}$$

```
A6:subst([x=x-x[1],y=y-y[1],z=z+h],A5);
A61:\phi[1]=lhs(A6);
DF6:subst([x=x-x[1],y=y-y[1],z=z+h],DF5);
DFF6:F(k,\theta)*subst([k*z=-k*z],DF5)*%pi;
PH6:\phi=DF6+DFF6;
subst([PH6],FS5);
ev(%,diff);
subst([z=0],%);
solve(%,F(k,\theta))[1];
factor(%);
subst([%],DFF6);
subst([y[1]=y-y[0],x[1]=x-x[0]],%);
DB6:factor(%);
B6:\phi[2]='integrate('integrate(DB6,
 \theta,-%pi/2,%pi/2),k,0,inf);
K3:K[2]=2*K[0];
K4:K[3]=k*cos(\theta)^2-K[0];
K[3]+K[2];
subst([K3,K4],%);
subst([k*cos(\theta)^2+K[0]=K[3]+K[2]],
 DB6);
expand(%);
DB61:subst([K3,K4],%);
DB62:factor(first(DB61));
DB63:last(DB61);
subst([x[0]=x-x[1],y[0]=y-y[1]],DB62);
\phi[21]='integrate('integrate(%,\theta,
 -%pi/2, %pi/2),k,0,inf);
subst([x=x-x[1],y=y-y[1],z=-z+h],A5);
B61:\phi[21]=lhs(%);
\phi[22]='integrate('integrate(DB63,\theta,
 -%pi/2,%pi/2),k,0,inf);
denom(DB63)*sec(\theta)^2;
DB64:num(DB63)*sec(\theta)^2/%pi/(k-K[0]
 *sec(\theta)^2);
DB65:subst([x[0]=x-x[1],y[0]=y-y[1]],DB64);
B62:\phi[22]='integrate('integrate(DB65,
 \theta,-%pi/2,%pi/2),k,0,inf);
PH6:\phi=\phi[1]+\phi[21]+\phi[22];
PH61:subst([A61,B61,B62],PH6);
```

わき出しが位置：$(x_1, y_1, -h)$ にあるとすると、(9.5.48) 式からわき出しの速度ポテンシャル：ϕ_1 は、

$$\phi_1 = \frac{1}{\sqrt{(z+h)^2 + (y-y_1)^2 + (x-x_1)^2}} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-k\,(z+h)+i\,k\sin(\theta)\,(y-y_1)+i\,k\cos(\theta)\,(x-x_1)} d\theta dk \quad (z > -h) \tag{9.5.49}$$

上式は当然ながら、質量保存の方程式を満足している。自由表面条件などを満足するように ϕ_1 を補正する ϕ_2 は、ϕ_1 にならって、$\mathrm{F}(k,\theta)$ を導入し、下記とする。

$$\phi_2 = \int_0^{\infty}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{F}(k,\theta)\, e^{k\,z+i\,k\sin(\theta)\,y+i\,k\cos(\theta)\,x} d\theta dk \tag{9.5.50}$$

以上から、速度ポテンシャル：ϕ は $\phi = \phi_1 + \phi_2$ で与えられる。$\mathrm{F}(k,\theta)$ を求めるのに、上記二式の被積分関数：ϕ' を導入すると、下記となる。

$$\phi' = \frac{e^{-k\,(z+h)+i\,k\sin(\theta)\,(y-y_1)+i\,k\cos(\theta)\,(x-x_1)}}{\pi} + \mathrm{F}(k,\theta)\, e^{k\,z+i\,k\sin(\theta)\,y+i\,k\cos(\theta)\,x}$$

上記、被積分関数：ϕ' を自由表面条件：(9.5.40) 式に代入し、$z = 0$ とし、$\mathrm{F}(k,\theta)$ を求めると、

$$\mathrm{F}(k,\theta) = -\frac{e^{-i\,y_1\,k\sin(\theta)-i\,x_1\,k\cos(\theta)-h\,k}\left(k\cos(\theta)^2 + K_0\right)}{\pi\left(k\cos(\theta)^2 - K_0\right)}$$

以上から、上式を (9.5.50) 式に代入する。ここで記述を簡単にするため次式を導入する。

$$x_0 = x - x_1, \quad y_0 = y - y_1 \tag{9.5.51}$$

$$\phi_2 = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(k\cos(\theta)^2 + K_0\right) e^{k\,z+i\,y_0\,k\sin(\theta)+i\,x_0\,k\cos(\theta)-h\,k}}{k\cos(\theta)^2 - K_0} d\theta dk \quad (z < h) \tag{9.5.52}$$

上式の被積分関数は、下記のように分けることができ、

$$-\frac{e^{k\,z+i\,y_0\,k\sin(\theta)+i\,x_0\,k\cos(\theta)-h\,k}}{\pi} - \frac{2\,K_0\,e^{k\,z+i\,y_0\,k\sin(\theta)+i\,x_0\,k\cos(\theta)-h\,k}}{\pi\,k\cos(\theta)^2 - \pi\,K_0} \tag{9.5.53}$$

上式の第一項の積分形は (9.5.51) 式を代入し、

$$\begin{aligned}\phi_{21} &= -\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{k\,z+i\,k\sin(\theta)\,(y-y_1)+i\,k\cos(\theta)\,(x-x_1)-h\,k} d\theta dk \\ &= -\frac{1}{\sqrt{(h-z)^2 + (y-y_1)^2 + (x-x_1)^2}} \quad (z < h)\end{aligned} \tag{9.5.54}$$

上式は、水面に対し、わき出し位置：$(x_1, y_1, -h)$ の対称の位置：(x_1, y_1, h) においた逆強さのわき出しによる速度ポテンシャルを表している。次に、(9.5.53) 式の第二項の積分形は (9.5.51) 式を代入し、

$$\begin{aligned}\phi_{22} &= -2\,K_0\int_0^{\infty}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{k\,z+i\,y_0\,k\sin(\theta)+i\,x_0\,k\cos(\theta)-h\,k}}{\pi\,k\cos(\theta)^2 - \pi\,K_0} d\theta dk \\ &= -\frac{2\,K_0}{\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec(\theta)^2\,e^{k\,z+i\,k\sin(\theta)\,(y-y_1)+i\,k\cos(\theta)\,(x-x_1)-h\,k}}{k - K_0\sec(\theta)^2} d\theta dk \quad (z < h)\end{aligned} \tag{9.5.55}$$

以上から、速度ポテンシャル：ϕ は、

$$\begin{aligned}\phi = \phi_1 + \phi_{21} + \phi_{22} =& -\frac{2\,K_0}{\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec(\theta)^2\,e^{k\,z+i\,k\sin(\theta)\,(y-y_1)+i\,k\cos(\theta)\,(x-x_1)-h\,k}}{k - K_0\sec(\theta)^2} d\theta dk \\ &+ \frac{1}{\sqrt{(z+h)^2 + (y-y_1)^2 + (x-x_1)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(h-z)^2 + (y-y_1)^2 + (x-x_1)^2}}\end{aligned} \tag{9.5.56}$$

上式の右辺第一項の $|x|$ が十分大きい場合の積分を、下記に示す線積分を使用して求める。

(1)$x>0$ で $|x|$ が十分大きい場合

```
INT1:IN[1]='integrate(DB64,k,0,inf);
/* x>0   */
/* IN[2]   */
KI2:k=\delta*%e^(%i*t)+K[0]*sec(\theta)^2;
DKI2:'diff(k,t,1)=diff(rhs(KI2),t,1);
num(DB64)/%pi;
CKI2:subst([k=K[0]*sec(\theta)^2],%);
subst([KI2],%pi/denom(DB64));
DINT2:%*rhs(DKI2);
integrate(DINT2,t,%pi,0);
%*CKI2;
INT2:IN[2]=factor(realpart(%));
/* IN[3]   */
KI3:k=R*%e^(%i*t);
DKI3:'diff(k,t,1)=diff(rhs(KI3),t,1);
```

```
subst([KI3],DB64);
%*rhs(DKI3);
subst([K[0]*sec(\theta)^2=0],%);
DINT3:realpart(%);
IN[3]='integrate(DINT3,t,0,%pi/2);
INT3:IN[3]=0;
/* IN[4]   */
KI4:k=%i*b;
DKI4:'diff(k,t,1)=%i;
subst([KI4],DB64)*rhs(DKI4);
factor(realpart(%));
subst([b=k],%);
INT4:IN[4]='integrate(%,k,inf,0);
INT1+INT2+INT3+INT4;
0=rhs(%);
-%+rhs(INT1);
INP1:lhs(%)=first(rhs(%));
```

(9.5.56) 式の右辺第一項の k に関する下記の積分について調べる。ここで記述を簡単にするため (9.5.51) 式を導入する。

$$IN_1=-\frac{2\,K_0}{\pi}\sec(\theta)^2\int_0^{\infty}\frac{e^{k\,z+i\,y_0\,k\sin(\theta)+i\,x_0\,k\cos(\theta)-h\,k}}{k-K_0\sec(\theta)^2}dk \tag{9.5.57}$$

k を複素平面で表現し、$k=a+i\,b$ とする。a 軸上は上記の求める積分で、IN_1 とする。a 軸上の特異点：$k=K_0\sec(\theta)^2$ では、半径：δ の半円の積分で特異点を除き、IN_2 とする。a 軸から b 軸に至る線積分は、十分大きい半径：R の円弧の線積分で、IN_3 とする。b 軸上の線積分を IN_4 とする。

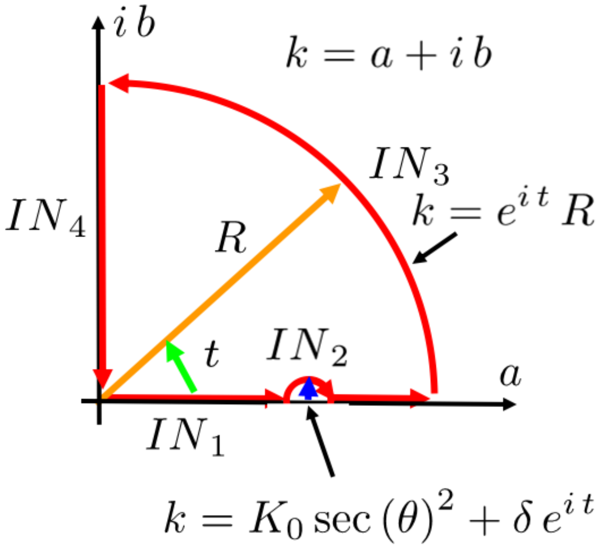


図 9.5.11: $x>0$ の線積分

IN_2 について、k は下記のように表現でき、

$$k=K_0\sec(\theta)^2+\delta\,e^{i\,t},\quad \frac{d}{d\,t}k=i\,\delta\,e^{i\,t}$$

$t=\pi\to 0$ の積分結果は、下記となり、半径：δ が十分小さいとし、

$$IN_2 = -\frac{2\,K_0 \sec(\theta)^2\, e^{K_0 \sec(\theta)^2\, z + i\, y_0\, K_0 \sec(\theta)^2 \sin(\theta) + i\, x_0\, K_0 \cos(\theta) \sec(\theta)^2 - K_0\, h \sec(\theta)^2}}{\pi} \int_\pi^0 i\, dt$$
$$= 2\, i\, K_0 \sec(\theta)^2\, e^{K_0 \sec(\theta)^2\, z + i\, y_0\, K_0 \sec(\theta)^2 \sin(\theta) + i\, x_0\, K_0 \cos(\theta) \sec(\theta)^2 - K_0\, h \sec(\theta)^2}$$

上式の実部をとり、積分結果は、

$$IN_2 = -2\, K_0 \sec(\theta)^2 \sin\left(K_0 \sec(\theta)^2\, \left(y_0 \sin(\theta) + x_0 \cos(\theta)\right)\right) e^{K_0 \sec(\theta)^2\, z - K_0\, h \sec(\theta)^2} \tag{9.5.58}$$

IN_3 について、k は下記のように表現でき、

$$k = e^{i\,t}\, R, \quad \frac{d}{d\,t}\, k = i\, e^{i\,t}\, R$$

$t = 0 \to \pi/2$ の積分は $R >> K_0$ で実部をとり、下記となり、

$$\begin{aligned}
IN_3 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\frac{2\, i\, K_0\, e^{i\,t} \sec(\theta)^2\, R\, e^{e^{i\,t}\, z\, R + i\, y_0\, e^{i\,t} \sin(\theta)\, R + i\, x_0\, e^{i\,t} \cos(\theta)\, R - h\, e^{i\,t}\, R}}{\pi \left(e^{i\,t}\, R - K_0 \sec(\theta)^2\right)} dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\frac{2\, i\, K_0 \sec(\theta)^2}{\pi}\, e^{e^{i\,t}\, z\, R + i\, y_0\, e^{i\,t} \sin(\theta)\, R + i\, x_0\, e^{i\,t} \cos(\theta)\, R - h\, e^{i\,t}\, R}\, dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\, K_0 \sec(\theta)^2}{\pi}\, e^{\cos(t)\, z\, R - y_0 \sin(t) \sin(\theta)\, R - x_0 \sin(t) \cos(\theta)\, R - h \cos(t)\, R} \\
&\qquad \times \sin\left(\sin(t)\; z\, R + y_0 \cos(t)\; \sin(\theta)\; R + x_0 \cos(t)\; \cos(\theta)\; R - h \sin(t)\; R\right)\, dt
\end{aligned} \tag{9.5.59}$$

$z < h, R > 0, sin(t) > 0, cos(t) > 0, x_0\, cos(\theta) > 0, y_0\, sin(\theta) > 0$ で R が十分大きいとき、下記となる。

$$IN_3 = 0 \tag{9.5.60}$$

IN_4 について、k は下記のように表現でき、

$$k = i\, b, \quad \frac{d}{d\,b}\, k = i$$

$b = \infty \to 0$ の b 軸上の積分は下記となる。この実部をとり、$b \to k$ に置き換えて、

$$\begin{aligned}
IN_4 &= \int_\infty^0 -\frac{2\, i\, K_0 \sec(\theta)^2\, e^{i\, b\, z - y_0\, b \sin(\theta) - x_0\, b \cos(\theta) - i\, b\, h}}{\pi \left(i\, b - K_0 \sec(\theta)^2\right)} db \\
&= \frac{2\, K_0 \sec(\theta)^2}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-y_0\, k \sin(\theta) - x_0\, k \cos(\theta)} \left(K_0 \sec(\theta)^2 \sin\left(k\; (z-h)\right) + k \cos\left(k\; (z-h)\right)\right)}{K_0^2 \sec(\theta)^4 + k^2} dk
\end{aligned} \tag{9.5.61}$$

(9.5.57) 式、(9.5.58) 式、(9.5.60) 式、(9.5.61) 式において、下記の関係がある。

$$\begin{aligned}
&IN_4 + IN_3 + IN_2 + IN_1 = 0 \\
&= \frac{2\, K_0 \sec(\theta)^2}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-y_0\, k \sin(\theta) - x_0\, k \cos(\theta)} \left(K_0 \sec(\theta)^2 \sin\left(k\; (z-h)\right) + k \cos\left(k\; (z-h)\right)\right)}{K_0^2 \sec(\theta)^4 + k^2} dk \\
&\quad - \frac{2\, K_0 \sec(\theta)^2}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{k\, z + i\, y_0\, k \sin(\theta) + i\, x_0\, k \cos(\theta) - h\, k}}{k - K_0 \sec(\theta)^2} dk \\
&\quad - 2\, K_0 \sec(\theta)^2 \sin\left(K_0 \sec(\theta)^2\, \left(y_0 \sin(\theta) + x_0 \cos(\theta)\right)\right) e^{K_0 \sec(\theta)^2\, z - K_0\, h \sec(\theta)^2}
\end{aligned}$$

以上から、

$$\begin{aligned}
IN_1 &= -\frac{2\, K_0 \sec(\theta)^2}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{k\, z + i\, y_0\, k \sin(\theta) + i\, x_0\, k \cos(\theta) - h\, k}}{k - K_0 \sec(\theta)^2} dk \\
&= 2\, K_0 \sec(\theta)^2 \sin\left(K_0 \sec(\theta)^2\, \left(y_0 \sin(\theta) + x_0 \cos(\theta)\right)\right) e^{K_0 \sec(\theta)^2\, z - K_0\, h \sec(\theta)^2} \\
&\quad - \frac{2\, K_0 \sec(\theta)^2}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-y_0\, k \sin(\theta) - x_0\, k \cos(\theta)} \left(K_0 \sec(\theta)^2 \sin\left(k\; (z-h)\right) + k \cos\left(k\; (z-h)\right)\right)}{K_0^2 \sec(\theta)^4 + k^2} dk
\end{aligned}$$

$|x|$ が十分大きいとき、上式右辺第二項は零となり、

$$
\begin{aligned}
IN_1 =& -\frac{2\,K_0 \sec(\theta)^2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{k\,z+i\,y_0\,k\sin(\theta)+i\,x_0\,k\cos(\theta)-h\,k}}{k-K_0\sec(\theta)^2} dk \\
=& 2\,K_0\sec(\theta)^2 \sin\left(K_0\sec(\theta)^2\ (y_0\sin(\theta)+x_0\cos(\theta))\right)\ e^{K_0\sec(\theta)^2\,z-K_0\,h\sec(\theta)^2}
\end{aligned}
\tag{9.5.62}
$$

(2)$x<0$ で $|x|$ が十分大きい場合

```
/* x<0   */
/* IN[2]   */
integrate(DINT2,t,-%pi,0);
%*CKI2;
INT2:IN[2]=factor(realpart(%));
/* IN[3]   */
IN[3]='integrate(DINT3,t,0,-%pi/2);
INT3:IN[3]=0;
```

```
/* IN[4]   */
KI4:k=-%i*b;
DKI4:'diff(k,t,1)=-%i;
subst([KI4],DB64)*rhs(DKI4);
factor(realpart(%));
subst([b=k],%);
INT4:IN[4]='integrate(%,k,inf,0);
INT1+INT2+INT3+INT4;
0=rhs(%);
-%+rhs(INT1);
INN1:lhs(%)=last(rhs(%));
```

a 軸上は (9.5.57) 式の求める積分で、IN_1 とする。a 軸上の特異点：$k=K_0\sec(\theta)^2$ では、半径：δ の半円の積分で特異点を除き、IN_2 とする。a 軸から $-b$ 軸に至る線積分は、十分大きい半径：R の円弧の線積分で、IN_3 とする。b 軸上の線積分を IN_4 とする。

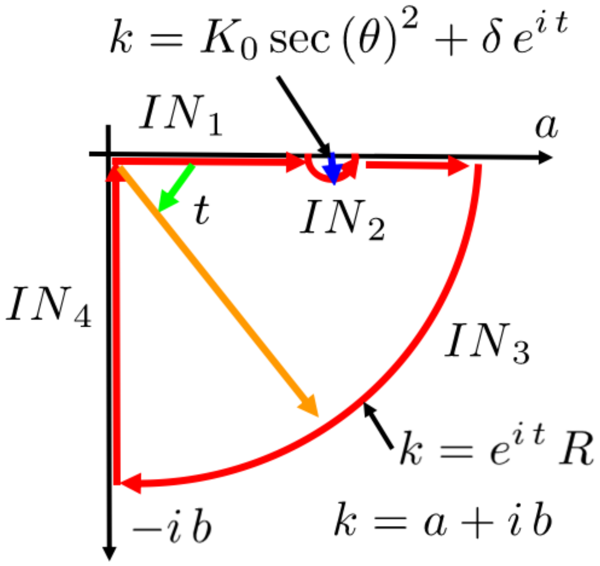


図 9.5.12: $x<0$ の線積分

IN_2 について、k は下記のように表現でき、

$$
k=K_0\sec(\theta)^2+\delta\,e^{i\,t},\quad \frac{d}{d\,t}\,k=i\,\delta\,e^{i\,t}
$$

$t=-\pi\to 0$ の積分結果は、下記となり、半径：δ が十分小さいとし、

$$
\begin{aligned}
IN_2 =& -\frac{2\,K_0\sec(\theta)^2\,e^{K_0\sec(\theta)^2\,z+i\,y_0\,K_0\sec(\theta)^2\sin(\theta)+i\,x_0\,K_0\cos(\theta)\sec(\theta)^2-K_0\,h\sec(\theta)^2}}{\pi} \int_{-\pi}^{0} i\,dt \\
=& -2\,i\,K_0\sec(\theta)^2\,e^{K_0\sec(\theta)^2\,z+i\,y_0\,K_0\sec(\theta)^2\sin(\theta)+i\,x_0\,K_0\cos(\theta)\sec(\theta)^2-K_0\,h\sec(\theta)^2}
\end{aligned}
$$

上式の実部をとり、積分結果は、

$$
IN_2=2\,K_0\sec(\theta)^2\sin\left(y_0\,K_0\sec(\theta)^2\sin(\theta)+x_0\,K_0\cos(\theta)\ \sec(\theta)^2\right)\ e^{K_0\sec(\theta)^2\,z-K_0\,h\sec(\theta)^2}
\tag{9.5.63}
$$

IN_3 について、(9.5.59) 式から、

$$IN_3 = \int_0^{-\frac{\pi}{2}} \frac{2\,K_0 \sec(\theta)^2}{\pi} e^{\cos(t)\,z\,R - y_0 \sin(t)\sin(\theta)\,R - x_0 \sin(t)\cos(\theta)\,R - h\cos(t)\,R}$$
$$\times\ \sin\left(\sin(t)\ z\,R + y_0 \cos(t)\ \sin(\theta)\ R + x_0 \cos(t)\ \cos(\theta)\ R - h \sin(t)\ R\right)\,dt$$

$z < h, R > 0, sin(t) < 0, cos(t) > 0, x_0\,cos(\theta) < 0, y_0\,sin(\theta) < 0$ で R が十分大きいとき、下記となる。

$$IN_3 = 0 \tag{9.5.64}$$

IN_4 について、k は下記のように表現でき、

$$k = -i\,b, \quad \frac{d}{d\,b} k = -i$$

$b = -\infty \to 0$ の b 軸上の積分結果は下記となる。この実部をとり、$b \to k$ に置き換えて、

$$\begin{aligned} IN_4 =& \int_{-\infty}^{0} \frac{2\,i\,K_0 \sec(\theta)^2\, e^{-i\,b\,z + y_0\,b\sin(\theta) + x_0\,b\cos(\theta) + i\,b\,h}}{\pi\left(-K_0 \sec(\theta)^2 - i\,b\right)} db \\ =& \frac{2\,K_0 \sec(\theta)^2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{y_0\,k\sin(\theta) + x_0\,k\cos(\theta)}\ \left(K_0 \sec(\theta)^2 \sin(k\ (z-h)) + k\cos(k\ (z-h))\right)}{K_0^2 \sec(\theta)^4 + k^2} dk \end{aligned} \tag{9.5.65}$$

(9.5.57) 式、(9.5.63) 式、(9.5.64) 式、(9.5.65) 式において、下記の関係がある。

$$\begin{aligned} IN_4 +& IN_3 + IN_2 + IN_1 = 0 \\ =& \frac{2\,K_0 \sec(\theta)^2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{y_0\,k\sin(\theta) + x_0\,k\cos(\theta)}\ \left(K_0 \sec(\theta)^2 \sin(k\ (z-h)) + k\cos(k\ (z-h))\right)}{K_0^2 \sec(\theta)^4 + k^2} dk \\ &- \frac{2\,K_0 \sec(\theta)^2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{k\,z + i\,y_0\,k\sin(\theta) + i\,x_0\,k\cos(\theta) - h\,k}}{k - K_0 \sec(\theta)^2} dk \\ &+ 2\,K_0 \sec(\theta)^2 \sin\left(K_0 \sec(\theta)^2\ (y_0 \sin(\theta) + x_0 \cos(\theta))\right)\ e^{K_0 \sec(\theta)^2\,z - K_0\,h \sec(\theta)^2} \end{aligned}$$

以上から、

$$\begin{aligned} IN_1 =& -\frac{2\,K_0 \sec(\theta)^2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{k\,z + i\,y_0\,k\sin(\theta) + i\,x_0\,k\cos(\theta) - h\,k}}{k - K_0 \sec(\theta)^2} dk \\ =& -\frac{2\,K_0 \sec(\theta)^2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{y_0\,k\sin(\theta) + x_0\,k\cos(\theta)}\ \left(K_0 \sec(\theta)^2 \sin(k\ (z-h)) + k\cos(k\ (z-h))\right)}{K_0^2 \sec(\theta)^4 + k^2} dk \\ &- 2\,K_0 \sec(\theta)^2 \sin\left(K_0 \sec(\theta)^2\ (y_0 \sin(\theta) + x_0 \cos(\theta))\right)\ e^{K_0 \sec(\theta)^2\,z - K_0\,h \sec(\theta)^2} \end{aligned}$$

$|x|$ が十分大きいとき、上式右辺第一項は零となり、

$$\begin{aligned} IN_1 =& -\frac{2\,K_0 \sec(\theta)^2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{k\,z + i\,y_0\,k\sin(\theta) + i\,x_0\,k\cos(\theta) - h\,k}}{k - K_0 \sec(\theta)^2} dk \\ =& -2\,K_0 \sec(\theta)^2 \sin\left(y_0\,K_0 \sec(\theta)^2 \sin(\theta) + x_0\,K_0 \cos(\theta)\ \sec(\theta)^2\right)\ e^{K_0 \sec(\theta)^2\,z - K_0\,h \sec(\theta)^2} \end{aligned} \tag{9.5.66}$$

```
PH7:lhs(PH61)=rhs(PH61)-'integrate(
 rhs(INN1),\theta,-%pi/2,%pi/2);
PH71:subst([x[0]=x-x[1],y[0]=y-y[1]],%);
INB5:factor(rhs(INP1)-rhs(INN1));
INB6:subst([x[0]=x-x[1],y[0]=y-y[1]],%);
PH72:\phi='integrate(%,\theta,-%pi/2,%pi/2);
P1:p=x*cos(\theta)+y*sin(\theta);
P2:P=cos(K[0]*sec(\theta)^2*(x[i]
 *cos(\theta)+y[i]*sin(\theta)))*%e^(K[0]
 *z[i]*sec(\theta)^2);
Q2:Q=sin(K[0]*sec(\theta)^2*(x[i]
 *cos(\theta)+y[i]*sin(\theta)))*%e^(K[0]
 *z[i]*sec(\theta)^2);
PQ1:4*K[0]*(P*sin(K[0]*p*sec(\theta)^2)
 -Q*cos(K[0]*p*sec(\theta)^2))*%e^(K[0]*z
 *sec(\theta)^2)*sec(\theta)^2;
PHPQ8:\phi='integrate(PQ1,\theta,-%pi/2,
 %pi/2);
PQ11:subst([P1,P2,Q2],PQ1);
trigreduce(%);
```

```
factor(%);
subst([tan(\theta)=sin(\theta)
 /cos(\theta)],%);
subst([y[i]=y-y[0],x[i]=x-x[0]],%);
factor(%);
PQ12:subst([x[0]=x-x[i],y[0]=y-y[i]],%);
PHPQ81:\phi='integrate(PQ12,\theta,-%pi/2,
 %pi/2);
subst([PH72],ET0);
ev(%,diff);
ET72:subst([z=0,K2],%);
PQ2:\phi=subst([P1],PQ1);
subst([PQ2],ET0);
ev(%,diff);
subst([z=0,K2],%);
ETPQ2:rhs(factor(%));
ET8:\eta='integrate(ETPQ2,\theta,-%pi/2,
 %pi/2);
```

わき出しの十分前方（進行方向）: $x<0$ では (9.5.66) 式から、$x\to-\infty$ でその右辺項が残り、前方に波があることになる。これは実現象に矛盾する。そこで、(9.5.66) 式の右辺項を引くことで、わき出しの十分前方に波が無くなる。ここで (9.5.51) 式に (9.5.66) 式を引き、速度ポテンシャル：ϕ は下記となる。

$$\begin{aligned}\phi=&-\frac{2K_0}{\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sec(\theta)^2 e^{k\,z+i\,k\sin(\theta)\,(y-y_1)+i\,k\cos(\theta)\,(x-x_1)-h\,k}}{k-K_0\sec(\theta)^2}d\theta dk\\&+2K_0\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sec(\theta)^2\sin\left(K_0\sec(\theta)^2\sin(\theta)\,(y-y_1)+K_0\cos(\theta)\,\sec(\theta)^2\,(x-x_1)\right)e^{K_0\sec(\theta)^2 z-K_0\,h\sec(\theta)^2}d\theta\\&+\frac{1}{\sqrt{(z+h)^2+(y-y_1)^2+(x-x_1)^2}}-\frac{1}{\sqrt{(h-z)^2+(y-y_1)^2+(x-x_1)^2}}\end{aligned}\tag{9.5.67}$$

上式右辺第三項、第四項から波高を求めると零となるため、この項は省くことができ、わき出しの十分後方では、上式右辺第一項は (9.5.62) 式から得られ、わき出しの十分後方の速度ポテンシャル：ϕ は下記となる。

$$\phi=4K_0\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sec(\theta)^2\sin\left(K_0\sec(\theta)^2\,(\sin(\theta)\,(y-y_1)+\cos(\theta)\,(x-x_1))\right)e^{K_0\sec(\theta)^2 z-K_0\,h\sec(\theta)^2}d\theta\tag{9.5.68}$$

いま、上式を基に下記の速度ポテンシャルの記述を考える。

$$\begin{aligned}\phi=&4K_0\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sec(\theta)^2 e^{K_0\sec(\theta)^2 z}\left(\sin\left(K_0\,p\sec(\theta)^2\right)P-\cos\left(K_0\,p\sec(\theta)^2\right)Q\right)d\theta\\&\text{ここで、}\quad p=\sin(\theta)\,y+\cos(\theta)\,x\\&P=\sum_{i=1}^{N}m_i\,e^{K_0\,z_i\sec(\theta)^2}\cos\left(K_0\sec(\theta)^2\,(y_i\sin(\theta)+x_i\cos(\theta))\right)\\&Q=\sum_{i=1}^{N}m_i\,e^{K_0\,z_i\sec(\theta)^2}\sin\left(K_0\sec(\theta)^2\,(y_i\sin(\theta)+x_i\cos(\theta))\right)\end{aligned}\tag{9.5.69}$$

$N=1, m_i=1$ の場合、上式を展開すると次式となり、上記で求めた (9.5.68) 式と次式は一致している。上式は多くのわき出しを置く場合に都合がよいので、以降、(9.5.69) 式を用いる。

$$\phi=4\,K_0\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sec(\theta)^2\sin\left(\frac{K_0\sec(\theta)\,(\sin(\theta)\,(y-y_i)+\cos(\theta)\,(x-x_i))}{\cos(\theta)}\right)e^{K_0\sec(\theta)^2\,z+K_0\,z_i\sec(\theta)^2}d\theta$$

(9.5.37) 式に (9.5.69) 式を代入し、$z=0$ として、波高：η を求め、展開すると次式となる。

$$\begin{aligned}\eta=-\frac{4\,K_0}{U}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos(\theta)\,\sec(\theta)^4\Bigl(&\sin\left(K_0\sec(\theta)^2\,(\sin(\theta)\,y+\cos(\theta)\,x)\right)Q\\&+\cos\left(K_0\sec(\theta)^2\,(\sin(\theta)\,y+\cos(\theta)\,x)\right)P\Bigr)d\theta\end{aligned}\tag{9.5.70}$$

前進速度のあるわき出しの造波抵抗

```
D1:D=\rho*g*A^2*(U-V[g])/U;
D2:dD=\rho*g*A^2*(U-V[g]*cos(\theta))/U;
subst([V[g]=U*cos(\theta)/2],%);
DC1:factor(coeff(rhs(%),A^2));
D3:D='integrate(DC1*\eta(x,y)^2,y,minf,inf);
expand(ETPQ2);
trigexpand(%);
ETPQ21:expand(%);
U1:u=K[0]*sec(\theta)^2*sin(\theta);
DU1:'diff(u,\theta)=diff(rhs(U1),\theta,1);
subst([\theta=0],U1);
limit(U1,\theta,%pi/2);
limit(U1,\theta,-%pi/2);
limit(U1,\theta,%pi);
subst([y=u*y/(K[0]*sec(\theta)^2
 *sin(\theta))],ETPQ21);
```

```
%/rhs(DU1);
trigsimp(%);
ETPQU1:factor(%);
ETPQU11:expand(%);
ET81:\eta='integrate(ETPQU1,u,-inf,inf);
```

二次元の造波抵抗：D は (9.3.37) 式、554 頁から、次式となる。ここで波高：A、波の群速度：V_g とする。

$$D=\frac{g\,\rho\,A^2\,(U-V_g)}{U}$$

上式を dy における θ 方向の進行波の x 軸方向の抵抗：dD とすると、

$$dD=\frac{g\,\rho\,A^2\,(U-V_g\cos(\theta))}{U}$$

水深が十分深い場合には、$V_g=\frac{U}{2}cos(\theta)$ であるから。

$$D=-\frac{g\,\rho}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\cos(\theta)^2-2\right)\eta(x,y)^2dy\tag{9.5.71}$$

(9.5.70) 式の波高の被積分関数を展開すると、

$$\begin{aligned}&-\frac{4\,K_0\cos(\theta)\,\sec(\theta)^4\cos\left(K_0\cos(\theta)\,\sec(\theta)^2\,x\right)\sin\left(K_0\sec(\theta)^2\sin(\theta)\,y\right)Q}{U}\\&-\frac{4\,K_0\cos(\theta)\,\sec(\theta)^4\sin\left(K_0\cos(\theta)\,\sec(\theta)^2\,x\right)\cos\left(K_0\sec(\theta)^2\sin(\theta)\,y\right)Q}{U}\\&+\frac{4\,K_0\cos(\theta)\,\sec(\theta)^4\sin\left(K_0\cos(\theta)\,\sec(\theta)^2\,x\right)\sin\left(K_0\sec(\theta)^2\sin(\theta)\,y\right)P}{U}\\&-\frac{4\,K_0\cos(\theta)\,\sec(\theta)^4\cos\left(K_0\cos(\theta)\,\sec(\theta)^2\,x\right)\cos\left(K_0\sec(\theta)^2\sin(\theta)\,y\right)P}{U}\end{aligned}\tag{9.5.72}$$

ここで次式の u を導入する。

$$u=K_0\sec(\theta)^2\sin(\theta),\quad \frac{d}{d\,\theta}u=2\,K_0\sec(\theta)^2\sin(\theta)\,\tan(\theta)+K_0\cos(\theta)\,\sec(\theta)^2\tag{9.5.73}$$

(9.5.72) 式を上式で変換を行い、(9.5.70) 式の波高を求めると、

$$\begin{aligned}\eta=\int_{-\infty}^{\infty}-\frac{4}{\left(\sin(\theta)^2+1\right)U}\Biggl(&\cos\left(\frac{K_0\,x}{\cos(\theta)}\right)\sin(u\,y)\,Q+\sin\left(\frac{K_0\,x}{\cos(\theta)}\right)\cos(u\,y)\,Q\\&-\sin\left(\frac{K_0\,x}{\cos(\theta)}\right)\sin(u\,y)\,P+\cos\left(\frac{K_0\,x}{\cos(\theta)}\right)\cos(u\,y)\,P\Biggr)du\end{aligned}\tag{9.5.74}$$

```
/* Parseval の等式　 */
f(y)='integrate(F[1]*cos(u*y)+F[2]*sin(u*y)
 ,u,-inf,inf);
subst([cos(u*y)=(%e^(%i*u*y)+%e^(-%i*u*y))
 /2,sin(u*y)=(%e^(%i*u*y)-%e^(-%i*u*y))/2]
 ,%);
expand(%);
assume(F[1]^2>0);
assume(F[2]^2>0);
'integrate(f(y)^2,y,-inf,inf)=2*%pi*
 'integrate((F[1]/2)^2*2+(F[2]/2)^2*2,u,
 minf,inf);
```

「A.6 Parseval の等式」、656 頁から、次の関係が得られる。

$$
\begin{aligned}
\mathrm{f}(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} F_2 \sin(u\,y) + F_1 \cos(u\,y)\,du \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_1\,\left(e^{i\,u\,y} + e^{-i\,u\,y}\right)}{2} \\
&\quad + \frac{F_2\,\left(e^{i\,u\,y} - e^{-i\,u\,y}\right)}{2} du \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_2\,e^{i\,u\,y}}{2} + \frac{F_1\,e^{i\,u\,y}}{2} \\
&\quad - \frac{F_2\,e^{-i\,u\,y}}{2} + \frac{F_1\,e^{-i\,u\,y}}{2} du
\end{aligned}
\tag{9.5.75}
$$

$$
\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{f}(y)^2 dy = 2\,\pi \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{F_2^2}{2} + \frac{F_1^2}{2}\right) du \tag{9.5.76}
$$

```
PP0:coeff(ETPQU11,P);
PP1:coeff(PP0,sin(u*y));
PP2:coeff(PP0,cos(u*y));
QQ0:coeff(ETPQU11,Q);
QQ1:coeff(QQ0,sin(u*y));
QQ2:coeff(QQ0,cos(u*y));
```

```
(PP1^2*P^2)+(PP2^2*P^2)+QQ1^2*Q^2+QQ2^2*
 Q^2;
%pi*%*rhs(DU1)*DC1;
trigsimp(%);
factor(%);
subst([K2,P=P(\theta),Q=Q(\theta)],%);
D='integrate(%,\theta,-%pi/2,%pi/2);
```

波高の (9.5.74) 式を (9.5.75) 式に対応させると、波高の自乗の y 積分は (9.5.76) 式から、下記の u 積分となる。

$$
\int_{-\infty}^{\infty} \eta^2 dy = \pi \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{16 \sin\left(\frac{K_0\,x}{\cos(\theta)}\right)^2 Q^2}{\left(\sin(\theta)^2 U + U\right)^2} + \frac{16 \cos\left(\frac{K_0\,x}{\cos(\theta)}\right)^2 Q^2}{\left(\sin(\theta)^2 U + U\right)^2} + \frac{16 \sin\left(\frac{K_0\,x}{\cos(\theta)}\right)^2 P^2}{\left(\sin(\theta)^2 U + U\right)^2} + \frac{16 \cos\left(\frac{K_0\,x}{\cos(\theta)}\right)^2 P^2}{\left(\sin(\theta)^2 U + U\right)^2} \right) du
$$

上式を造波抵抗の式：(9.5.71) 式に適用し、変数を $u \to \theta$ に変更し、整理すると、

$$
\begin{aligned}
D = &\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -\frac{\pi\,g\,\rho}{2} \left(\cos(\theta)^2 - 2\right) \left(2\,K_0 \sec(\theta)^2 \sin(\theta)\,\tan(\theta) + K_0 \cos(\theta)\,\sec(\theta)^2\right) \\
&\times \left(\frac{16 \sin\left(\frac{K_0\,x}{\cos(\theta)}\right)^2 Q^2}{\left(\sin(\theta)^2 U + U\right)^2} + \frac{16 \cos\left(\frac{K_0\,x}{\cos(\theta)}\right)^2 Q^2}{\left(\sin(\theta)^2 U + U\right)^2} + \frac{16 \sin\left(\frac{K_0\,x}{\cos(\theta)}\right)^2 P^2}{\left(\sin(\theta)^2 U + U\right)^2} + \frac{16 \cos\left(\frac{K_0\,x}{\cos(\theta)}\right)^2 P^2}{\left(\sin(\theta)^2 U + U\right)^2} \right) d\theta \\
= &8\,\pi\,K_0^2\,\rho \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{Q}(\theta)^2 + \mathrm{P}(\theta)^2}{\cos(\theta)^3} d\theta
\end{aligned}
\tag{9.5.77}
$$

```
DET9:S(\theta)*sin(K[0]*p*sec(\theta)^2)
 +C(\theta)*cos(K[0]*p*sec(\theta)^2);
ET9:\eta='integrate(DET9,\theta,-%pi/2,
 %pi/2);
subst([P1],DET9);
expand(%);
trigexpand(%);
DET91:expand(%);
subst([y=u*y/(K[0]*sec(\theta)^2
 *sin(\theta))],DET91);
```

```
%/rhs(DU1);
trigsimp(%);
factor(%);
DET92:expand(%);
ST0:coeff(DET92,S(\theta));
ST1:coeff(ST0,sin(u*y));
ST2:coeff(ST0,cos(u*y));
CT0:coeff(DET92,C(\theta));
CT1:coeff(CT0,sin(u*y));
CT2:coeff(CT0,cos(u*y));
```

```
(ST1^2*S(\theta)^2)+(ST2^2*S(\theta)^2)
 +CT1^2*C(\theta)^2+CT2^2*C(\theta)^2;
%pi*%*rhs(DU1)*DC1;
trigsimp(%);
factor(%);
subst([cos(\theta)^2=1-sin(\theta)^2],%);
factor(%);
trigsimp(%);
factor(%);
subst([K2,P=P(\theta),Q=Q(\theta)],%);
D='integrate(%,\theta,-%pi/2,%pi/2)
```

また、次の波高の記述について検討する。ここで p は (9.5.69) 式による。

$$\eta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{S}(\theta)\,\sin\left(K_0\,p\sec(\theta)^2\right)+\mathrm{C}(\theta)\,\cos\left(K_0\,p\sec(\theta)^2\right)d\theta \tag{9.5.78}$$

上式の被積分関数に (9.5.69) 式の $p=\sin(\theta)\,y+\cos(\theta)\,x$ を代入し、展開すると、

$$\begin{aligned}&-\mathrm{C}(\theta)\,\sin\left(K_0\cos(\theta)\,\sec(\theta)^2\,x\right)\,\sin\left(K_0\sec(\theta)^2\sin(\theta)\,y\right)\\&+\mathrm{S}(\theta)\,\cos\left(K_0\cos(\theta)\,\sec(\theta)^2\,x\right)\,\sin\left(K_0\sec(\theta)^2\sin(\theta)\,y\right)\\&+\mathrm{S}(\theta)\,\sin\left(K_0\cos(\theta)\,\sec(\theta)^2\,x\right)\,\cos\left(K_0\sec(\theta)^2\sin(\theta)\,y\right)\\&+\mathrm{C}(\theta)\,\cos\left(K_0\cos(\theta)\,\sec(\theta)^2\,x\right)\,\cos\left(K_0\sec(\theta)^2\sin(\theta)\,y\right)\end{aligned}$$

(9.5.73) 式の変換を行い、(9.5.78) 式の波高を求めると、

$$\begin{aligned}\eta=\int_{-\infty}^{\infty}-\frac{\cos(\theta)^3}{K_0\left(\sin(\theta)^2+1\right)}&\left(\mathrm{C}(\theta)\,\sin\left(\frac{K_0\,x}{\cos(\theta)}\right)\,\sin(u\,y)-\mathrm{S}(\theta)\,\cos\left(\frac{K_0\,x}{\cos(\theta)}\right)\,\sin(u\,y)\right.\\&\left.-\mathrm{S}(\theta)\,\sin\left(\frac{K_0\,x}{\cos(\theta)}\right)\,\cos(u\,y)-\mathrm{C}(\theta)\,\cos\left(\frac{K_0\,x}{\cos(\theta)}\right)\,\cos(u\,y)\right)du\end{aligned} \tag{9.5.79}$$

波高の (9.5.79) 式を (9.5.75) 式に対応させると、波高の自乗積分は (9.5.76) 式から、

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\eta^2dy=\pi\int_{-\infty}^{\infty}&\left(\frac{\mathrm{S}(\theta)^2\cos(\theta)^6\sin\left(\frac{K_0\,x}{\cos(\theta)}\right)^2}{\left(K_0\sin(\theta)^2+K_0\right)^2}+\frac{\mathrm{C}(\theta)^2\cos(\theta)^6\sin\left(\frac{K_0\,x}{\cos(\theta)}\right)^2}{\left(K_0\sin(\theta)^2+K_0\right)^2}\right.\\&\left.+\frac{\mathrm{S}(\theta)^2\cos(\theta)^6\cos\left(\frac{K_0\,x}{\cos(\theta)}\right)^2}{\left(K_0\sin(\theta)^2+K_0\right)^2}+\frac{\mathrm{C}(\theta)^2\cos(\theta)^6\cos\left(\frac{K_0\,x}{\cos(\theta)}\right)^2}{\left(K_0\sin(\theta)^2+K_0\right)^2}\right)du\end{aligned}$$

上式を造波抵抗の式：(9.5.71) 式に適用し、変数を $u\to\theta$ に変更し、整理すると、

$$\begin{aligned}D=&\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\pi\,g\,\rho}{2}\left(\cos(\theta)^2-2\right)\left(2\,K_0\sec(\theta)^2\sin(\theta)\,\tan(\theta)+K_0\cos(\theta)\,\sec(\theta)^2\right)\\&\times\left(\frac{\mathrm{S}(\theta)^2\cos(\theta)^6\sin\left(\frac{K_0\,x}{\cos(\theta)}\right)^2}{\left(K_0\sin(\theta)^2+K_0\right)^2}+\frac{\mathrm{C}(\theta)^2\cos(\theta)^6\sin\left(\frac{K_0\,x}{\cos(\theta)}\right)^2}{\left(K_0\sin(\theta)^2+K_0\right)^2}\right.\\&\left.+\frac{\mathrm{S}(\theta)^2\cos(\theta)^6\cos\left(\frac{K_0\,x}{\cos(\theta)}\right)^2}{\left(K_0\sin(\theta)^2+K_0\right)^2}+\frac{\mathrm{C}(\theta)^2\cos(\theta)^6\cos\left(\frac{K_0\,x}{\cos(\theta)}\right)^2}{\left(K_0\sin(\theta)^2+K_0\right)^2}\right)d\theta\\=&\frac{\pi\,\rho}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\mathrm{S}(\theta)^2+\mathrm{C}(\theta)^2\right)\,\cos(\theta)^3d\theta\,U^2\end{aligned} \tag{9.5.80}$$

例題 9.5.4　周期的に変動するわき出し強さによる三次元波

水面下 h にあるわき出し（強さ：m）が周期的に変動するときに生ずる軸対称波について調査する。波のない平衡状態での水面を r 軸とし、わき出しの中心を通り、鉛直上方に z 軸をとる。水深は十分深く、わき出しが起こした波の高さ：η、水の密度：ρ、重力加速度：g、時間：t、圧力：p とする [1]。

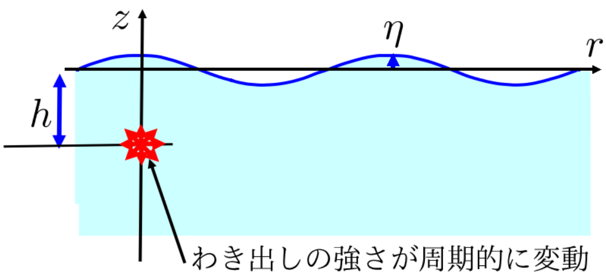


図 9.5.13: 周期的に変動するわき出し強さによる波

```
/* 周期的に変動するわき出し強さによる三次元波
*/
kill(all);
load("vect")$
depends(\Phi,[r,\theta,z,y,x,t]);
depends(\phi,[r,\theta,z,y,x]);
depends(\eta,[r,\theta,z,t]);
assume(k>0);
assume(t>0);
assume(\omega>0);
assume(r>0);
assume(g>0);
assume(z<0);
/* 境界条件  */
PH0:\Phi=\phi*%e^(%i*\omega*t);
EQ1:diff(\Phi,z,2)+diff(\Phi,\theta,2)/r^2
 +diff(\Phi,r,2)+diff(\Phi,r,1)/r=0;
BE1:p/\rho+g*z+\mu*\Phi+diff(\Phi,t,1)=C;
FS1:diff(\Phi,z,1)-diff(\eta,t,1)=0;
subst([C=p/\rho,z=\eta],BE1);
ET1:expand(solve(%,\eta)[1]);
diff(%,t,1);
FS11:expand(g*subst([%],FS1));
ET11:lhs(ET1)=first(rhs(ET1));
```

[1] 船舶技術研究所、流体研究グループ：船舶流体力学ノート (3)-3 次元波動流場のグリーン函数を求める方法-、日本造船学会誌、第 536 号、1974.2 p21

```
subst([PH0],EQ1);
ev(%,diff);
EQ2:expand(%/%e^(%i*\omega*t));
subst([PH0],FS11);
ev(%,diff);
expand(%/%e^(%i*\omega*t)/g);
FS2:subst([\mu=\mu/\omega*g],%);
K1:K[0]=\omega^2/g;
K2:solve(%,\omega)[2];
FS21:subst([K2],FS2);
subst([PH0],ET11);
ev(%,diff);
ET2:\eta[0]=(rhs(%)/%e^(%i*\omega*t));
```

わき出しの強さ：m が円周波数：ω で周期的に変動する速度ポテンシャル：Φ を次式で表現する。

$$\Phi=\phi\, e^{i\,\omega\,t} \tag{9.5.81}$$

速度ポテンシャル：Φ の円柱座標の質量保存の方程式は、(6.1.16) 式、180 頁から、

$$\frac{\frac{d}{d\,r}\,\Phi}{r}+\frac{\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,\Phi}{r^2}+\frac{d^2}{d\,z^2}\,\Phi+\frac{d^2}{d\,r^2}\,\Phi=0 \tag{9.5.82}$$

Bernoulli の定理の速度ポテンシャル表記は、(9.1.3) 式で高次の微小項を省き、粘性修正：$\mu\,\Phi$ を導入すると次式となる。

$$g\,z+\frac{p}{\rho}+\frac{d}{d\,t}\,\Phi+\mu\,\Phi=C \tag{9.5.83}$$

水面の運動学的条件で高次の微小項を省くと、(9.1.5) 式から次式となる。

$$\frac{d}{d\,z}\,\Phi-\frac{d}{d\,t}\,\eta=0 \tag{9.5.84}$$

Bernoulli の定理：(9.5.83) 式で自由表面では圧力：p は一定であるから、$C\to p/\rho$ と置き換え、また、$y\to\eta$ と置き換えると、

$$\frac{p}{\rho}+\frac{d}{d\,t}\,\Phi+\mu\,\Phi+\eta\,g=\frac{p}{\rho}$$

上式から、波高：η を求めると、

$$\eta=-\frac{\frac{d}{d\,t}\,\Phi}{g}-\frac{\mu\,\Phi}{g} \tag{9.5.85}$$

上式を t で微分すると、

$$\frac{d}{d\,t}\,\eta=-\frac{\frac{d^2}{d\,t^2}\,\Phi}{g}-\frac{\mu\,\left(\frac{d}{d\,t}\,\Phi\right)}{g}$$

上式を水面の運動学的条件：(9.5.84) 式に代入すると、次式の自由表面条件が得られる。

$$g\,\left(\frac{d}{d\,z}\,\Phi\right)+\frac{d^2}{d\,t^2}\,\Phi+\mu\,\left(\frac{d}{d\,t}\,\Phi\right)=0 \tag{9.5.86}$$

また、波高：η は (9.5.85) 式から、$\mu=0$ として、

$$\eta=-\frac{\frac{d}{d\,t}\,\Phi}{g} \tag{9.5.87}$$

質量保存の方程式：(9.5.82) 式に (9.5.81) 式を代入し、整理すると、

$$\frac{\frac{d}{d\,r}\,\phi}{r}+\frac{\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,\phi}{r^2}+\frac{d^2}{d\,z^2}\,\phi+\frac{d^2}{d\,r^2}\,\phi=0 \tag{9.5.88}$$

自由表面条件：(9.5.86) 式に (9.5.81) 式を代入し、整理すると、

$$\frac{d}{d\,z}\,\phi-\frac{\omega^2\,\phi}{g}+\frac{i\,\mu\,\omega\,\phi}{g}=0$$

下記の置き換えを行い、

$$K_0=\frac{\omega^2}{g},\quad \omega=\sqrt{K_0}\,\sqrt{g} \tag{9.5.89}$$

上記の自由表面条件に代入し、μ を次式のように再定義すると、

$$\frac{d}{d\,z}\,\phi+i\,\mu\,\phi-K_0\,\phi=0 \tag{9.5.90}$$

波高：(9.5.87) 式に (9.5.81) 式を代入すると、

$$\eta=-\frac{i\,\omega\,\phi\,e^{i\,\omega\,t}}{g} \tag{9.5.91}$$

波高の振幅は上式から、

$$\eta_0=-\frac{i\,\omega\,\phi}{g} \tag{9.5.92}$$

```
/* PHI   */
PH1:\phi=\phi[1]+\phi[2];
PHA1:\phi[1]=-m/sqrt((r)^2+(z+h)^2);
DA1:bessel_j(0,k*sqrt(r^2))*%e^(-k*z);
A1:1/sqrt(r^2+z^2)='integrate(DA1,k,0,inf);
subst([z=z+h],%);
PHA2:lhs(PHA1)=-m*rhs(%);
DPHA2:-m*bessel_j(0,k*r)*%e^(-k*(z+h));
PHB1:phi[2]=m*integrate(F(k)*bessel_j(0,
 k*r)*%e^(k*(z)),k,0,inf);
DPHB1:m*bessel_j(0,k*r)*F(k)*%e^(k*z);
DPH1:\phi=DPHA2+DPHB1;
subst([DPH1],FS21);
ev(%,diff);
subst([z=0],%);
FK1:factor(solve(%,F(k))[1]);
K3:K[1]=k-K[0]+%i*\mu;
K4:solve(K3,K[0])[1];
```

```
K5:solve(K3,k)[1];
subst([K4],FK1);
FK2:expand(%);
FK21:first(rhs(FK2));
last(rhs(FK2));
FK22:subst([K3],%);
DPHB11:subst([F(k)=FK21],DPHB1);
PHB11:\phi[21]='integrate(%,k,0,inf);
PHB12:lhs(%)=-subst([z+h=z-h],rhs(PHA1));
DPHB21:subst([F(k)=FK22],DPHB1);
PHB21:\phi[22]='integrate(%,k,0,inf);
PH2:\phi=\phi[1]+\phi[21]+\phi[22];
subst([PHA2,PHB11,PHB21],%);
PH21:subst([PHA1,PHB12,PHB21],PH2);
```

速度ポテンシャル：ϕ を下記の ϕ_1,ϕ_2 に分ける。ϕ_1 は無限流体中のわき出しを表す速度ポテンシャルで、ϕ_2 は自由表面条件などを満足するように ϕ_1 を補正する関数とする。

$$\phi=\phi_2+\phi_1$$

三次元流場でわき出しの速度ポテンシャル Φ は、(6.1.38) 式、190 頁から、

$$\Phi=-\frac{m}{r}$$

上式から、わき出しが位置：$(0,0,-h)$ にあるとすると、わき出しの速度ポテンシャル：ϕ_1 は、

$$\phi_1=-\frac{m}{\sqrt{(z+h)^2+r^2}} \tag{9.5.93}$$

また、次の Lipschitz の積分公式：(A.9.11) 式、659 頁から、

$$\frac{1}{\sqrt{z^2+r^2}}=\int_0^\infty \mathrm{bessel\_j}\,(0,k\,r)\;e^{-k\,z}dk \tag{9.5.94}$$

上式から、(9.5.93) 式は、

$$\begin{aligned}\phi_1=&\frac{1}{\sqrt{(z+h)^2+r^2}}\\=&-m\int_0^\infty \mathrm{bessel\_j}\,(0,k\,r)\;e^{-k\,(z+h)}dk\end{aligned} \tag{9.5.95}$$

上式にならって、ϕ_2 に $\mathrm{F}\,(k)$ を導入し下記とする。次式も当然ながら、質量保存の方程式を満足している。

$$\phi_2=m\int_0^\infty \mathrm{bessel\_j}\,(0,k\,r)\;\mathrm{F}\,(k)\;e^{k\,z}dk \tag{9.5.96}$$

次に、(9.5.95) 式、(9.5.96) 式の被積分関数は下記となる。

$$\begin{aligned}\phi'=&\mathrm{bessel\_j}\,(0,k\,r)\;\mathrm{F}\,(k)\;m\,e^{k\,z}\\&-\mathrm{bessel\_j}\,(0,k\,r)\;m\,e^{-k\,(z+h)}\end{aligned}$$

上式を自由表面条件：(9.5.90) 式に代入し、$z=0$ とし、$\mathrm{F}(k)$ を求めると、

$$\begin{aligned}\mathrm{F}(k)=&\frac{e^{-h\,k}\,\left(i\,\mu-k-K_0\right)}{i\,\mu+k-K_0}\\ =&e^{-h\,k}-\frac{2\,k\,e^{-h\,k}}{i\,\mu+k-K_0}\end{aligned} \tag{9.5.97}$$

(9.5.97) 式右辺第一項を (9.5.96) 式に代入し、ϕ_{21} とし、(9.5.94) 式から、次式となる。

$$\begin{aligned}\phi_{21}=&m\int_0^{\infty}\mathrm{bessel\_j}\left(0,k\,r\right)\,e^{k\,z-h\,k}dk\\ =&\frac{m}{\sqrt{\left(z-h\right)^2+r^2}}\end{aligned} \tag{9.5.98}$$

(9.5.97) 式右辺第二項を (9.5.96) 式に代入し、ϕ_{22} とし、次式となる。

$$\phi_{22}=-2\,m\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{bessel\_j}\left(0,k\,r\right)\,k\,e^{k\,z-h\,k}}{i\,\mu+k-K_0}dk \tag{9.5.99}$$

ϕ は、(9.5.93) 式、(9.5.98) 式、(9.5.99) 式から

$$\begin{aligned}\phi=&\phi_{22}+\phi_{21}+\phi_1\\ =&-2\,m\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{bessel\_j}\left(0,k\,r\right)\,k\,e^{k\,z-h\,k}}{i\,\mu+k-K_0}dk\\ &+m\int_0^{\infty}\mathrm{bessel\_j}\left(0,k\,r\right)\,e^{k\,z-h\,k}dk\\ &-m\int_0^{\infty}\mathrm{bessel\_j}\left(0,k\,r\right)\,e^{-k\,(z+h)}dk\\ =&-2\,m\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{bessel\_j}\left(0,k\,r\right)\,k\,e^{k\,z-h\,k}}{i\,\mu+k-K_0}dk\\ &-\frac{m}{\sqrt{\left(z+h\right)^2+r^2}}+\frac{m}{\sqrt{\left(z-h\right)^2+r^2}}\end{aligned} \tag{9.5.100}$$

```
subst([PH21],ET2);
subst([z=0],%);
PH22:\phi=first(rhs(PH21));
FK22;
-(2*(-%i*mu+K[1]+K[0])*%e^(-h*k))/(K[1]);
expand(%);
FK221:rest(%,1);
FK222:last(FK221);
FK223:subst([K3],first(FK221));
DPHB221:subst([F(k)=FK222],DPHB1);
\phi[221]='integrate(%,k,0,inf);
-2*m*subst([z=-z+h],A1);
PHB221:\phi[221]=lhs(%);
```

```
DPHB222:subst([F(k)=FK223],DPHB1);
PHB222:\phi[222]='integrate(%,k,0,inf);
PH23:\phi=rhs(PHB221)+rhs(PHB222);
H12:hankel_1(v,q)=-2*%i*%e^(-v*%pi*%i/2)
 /%pi*'integrate(%e^(+%i*q*cosh(s))*
 cosh(v*s),s,0,inf);
H1:hankel_1(v,q)=bessel_j(v,q)
 +%i*bessel_y(v,q);
subst([H1,v=0,q=k*r],H12);
BE31:realpart(%);
DBE31:bessel_j(0,k*r)=(2*(sin(k*r*cosh(s))
 ))/%pi;
SIN1:sin(u)=%i*%e^(-%i*u)/2-%i*%e^(%i*u)/2;
SIN11:subst([u=k*r*cosh(s)],SIN1);
BE32:subst([SIN11],BE31);
PH32:subst([BE32],PHB222);
DPH32:expand(subst([DBE31,SIN11],DPHB222));
DPH321:factor(first(DPH32));
DPH322:factor(last(DPH32));
PH321:'integrate('integrate(DPH321,k,0,inf)
 ,s,0,inf);
PH322:'integrate('integrate(DPH322,k,0,inf)
 ,s,0,inf);
PH321:lhs(PH32)=PH321+PH322;
```

(9.5.100) 式を (9.5.92) 式に代入し、$z=0$ として、波振幅：η_0 を求めると、

$$\eta_0=\frac{2\,i\,m\,\omega}{g}\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{bessel\_j}\left(0,k\,r\right)\,k\,e^{-h\,k}}{i\,\mu+k-K_0}dk$$

上式から、速度ポテンシャル：ϕ は (9.5.100) 式の右辺第一項のみが有効であるので下記となる。

$$\phi=-2\,m\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{bessel\_j}\left(0,k\,r\right)\,k\,e^{k\,z-h\,k}}{i\,\mu+k-K_0}dk \tag{9.5.101}$$

上式に被積分項の一部を下記のように分けることができる。

$$-\frac{2\,k\,e^{-h\,k}}{i\,\mu+k-K_0}=-2\,e^{-h\,k}-\frac{2\,K_0\,e^{-h\,k}}{i\,\mu+k-K_0} \tag{9.5.102}$$

(9.5.102) 式の右辺第一項から、

$$\begin{aligned}\phi_{221}=&-2\,m\int_0^{\infty}\mathrm{bessel\_j}\left(0,k\,r\right)\,e^{k\,z-h\,k}dk\\ =&-\frac{2\,m}{\sqrt{\left(h-z\right)^2+r^2}}\end{aligned} \tag{9.5.103}$$

(9.5.102) 式の右辺第二項から、

$$\phi_{222}=-2\,K_0\,m\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{bessel\_j}\left(0,k\,r\right)\,e^{k\,z-h\,k}}{i\,\mu+k-K_0}dk \tag{9.5.104}$$

以上から、速度ポテンシャル:ϕ は (9.5.103) 式、(9.5.104) 式から、

$$\begin{aligned}\phi =&\phi_{221}+\phi_{222}\\ =&-2\,K_0\,m\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{bessel\_j}\left(0,k\,r\right)\,e^{k\,z-h\,k}}{i\,\mu+k-K_0}dk\\ &-\frac{2\,m}{\sqrt{\left(h-z\right)^2+r^2}}\end{aligned} \tag{9.5.105}$$

第一種 Hunkel 関数は (A.9.6) 式、659 頁から、

$$\mathrm{hankel\_1}\left(v,q\right)=i\,\mathrm{bessel\_y}\left(v,q\right)+\mathrm{bessel\_j}\left(v,q\right)$$

また、Hunkel 関数の積分表示 (Heine の積分表示) は (A.9.9) 式、659 頁から、

$$\begin{aligned}&\mathrm{hankel\_1}\left(v,q\right)\\ &=-\frac{2\,i}{\pi}\,e^{-\frac{i\,\pi\,v}{2}}\int_0^{\infty}e^{i\,q\cosh(s)}\cosh\left(s\,v\right)ds\end{aligned}$$

上記二式から、$v=0,\,q=k\,r$ として、

$$\begin{aligned}&i\,\mathrm{bessel\_y}\left(0,k\,r\right)+\mathrm{bessel\_j}\left(0,k\,r\right)\\ &=-\frac{2}{\pi}\,i\int_0^{\infty}e^{i\,k\,r\cosh(s)}ds\end{aligned}$$

上式の実部は、

$$\mathrm{bessel\_j}\left(0,k\,r\right)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\sin\left(k\,r\cosh\left(s\right)\right)ds \tag{9.5.106}$$

また、

$$\sin\left(u\right)=\frac{i\,e^{-i\,u}}{2}-\frac{i\,e^{i\,u}}{2}$$

上式で $u=k\,r\cosh\left(s\right)$ と置き換えて、

$$\sin\left(k\,r\cosh\left(s\right)\right)=\frac{i\,e^{-i\,k\,r\cosh(s)}}{2}-\frac{i\,e^{i\,k\,r\cosh(s)}}{2}$$

上式を (9.5.106) 式に代入し、

$$\begin{aligned}\mathrm{bessel\_j}\left(0,k\,r\right)=&\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{i\,e^{-i\,k\,r\cosh(s)}}{2}\\ &-\frac{i\,e^{i\,k\,r\cosh(s)}}{2}ds\end{aligned}$$

上式を (9.5.104) 式に代入し、

$$\begin{aligned}\phi_{222}=&\frac{2\,i\,K_0\,m}{\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{e^{k\,z+i\,k\,r\cosh(s)-h\,k}}{i\,\mu+k-K_0}dkds\\ &-\frac{2\,i\,K_0\,m}{\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{e^{k\,z-i\,k\,r\cosh(s)-h\,k}}{i\,\mu+k-K_0}dkds\end{aligned} \tag{9.5.107}$$

```
IN1:IN[1]='integrate(DPH321,k,0,inf);
IN2:IN[2]='integrate(DPH322,k,0,inf);
/* IN[1]  */
KI3:k=R*%e^(%i*t);
DKI3:'diff(k,t,1)=diff(rhs(KI3),t,1);
subst([KI3],DPH321)*rhs(DKI3);
num(%)/subst([\mu=0,K[0]=0],denom(%));
IN[13]='integrate(realpart(%),t,0,%pi/2);
IN13:IN[13]=0;
KI4:k=%i*b;
DKI4:'diff(k,b,1)=diff(rhs(KI4),b,1);
subst([KI4,\mu=0],DPH321)*rhs(DKI4);
IN[14]='integrate(%,b,inf,0);
IN14:subst([b=k],%);
IN[1]+IN[13]+IN[14]=0;
solve(%,IN[1])[1];
IN11:subst([IN13,IN14],%);
/* IN[2]  */
KI2:k=K[0]-%i*\mu+\delta*%e^(%i*t);
DKI2:'diff(k,t,1)=diff(rhs(KI2),t,1);
IN[22]='integrate(subst([KI2],DPH322)
 *rhs(DKI2),t,0,2*%pi);
IN22:subst([\mu=0,\delta=0],%);
subst([KI3],DPH322)*rhs(DKI3);
num(%)/subst([\mu=0,K[0]=0],denom(%));
IN[23]='integrate(realpart(%),t,0,-%pi/2);
IN23:IN[23]=0;
KI4:k=-%i*b;
DKI4:'diff(k,b,1)=diff(rhs(KI4),b,1);
subst([KI4,\mu=0],DPH322)*rhs(DKI4);
IN[24]='integrate(%,b,inf,0);
IN24:subst([b=k],%);
IN[2]+IN[22]+IN[23]+IN[24]=0;
solve(%,IN[2])[1];
IN21:subst([IN22,IN23,IN24],%);
lhs(PH321)='integrate(-rhs(IN14),s,0,inf)
 +'integrate(-rhs(IN24),s,0,inf)
 +'integrate(-rhs(IN22),s,0,inf);
PH4:\phi=rhs(PHB221)+rhs(%);
```

(9.5.104) 式の右辺第一項を IN_1、右辺第二項を IN_2 として、

$$IN_1=\frac{2\,i\,K_0\,m}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{e^{k\,z+i\,k\,r\cosh(s)-h\,k}}{i\,\mu+k-K_0}dk \tag{9.5.108}$$

$$IN_2=-\frac{2\,i\,K_0\,m}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{e^{k\,z-i\,k\,r\cosh(s)-h\,k}}{i\,\mu+k-K_0}dk \tag{9.5.109}$$

(a)IN_1 の積分

k を複素平面で表現し、$k=a+i\,b$ とする。a 軸上は求める積分で、IN_1 である。a 軸から b 軸に至る線積分は、十分大きい半径：R の円弧の線積分で、IN_{13} とする。b 軸上の線積分を IN_{14} とする。この線積分内に特異点はない。

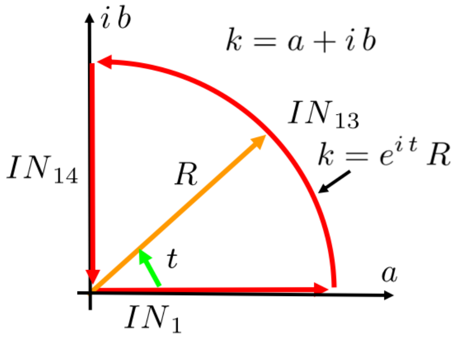


図 9.5.14: IN_1 の積分

IN_{13} について、k は下記のように表現でき、

$$k=e^{i\,t}\,R,\ \frac{d}{d\,t}\,k=i\,e^{i\,t}\,R$$

$t=0\to\pi/2$ の積分結果は、下記となり、半径：R が十分大きいとき $R>>K_0,\mu$ となり、実部をとって、$r>0, y<h, R>0, sin(t)>0, cos(t)>0$ から、

$$\begin{aligned}IN_{13}=&-\frac{2\,K_0\,m}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(t)\ e^{\cos(t)\,z\,R-r\cosh(s)\sin(t)\,R-h\cos(t)\,R}\\&\qquad\times\ \sin\left(\sin(t)\ z\,R-h\sin(t)\ R+r\cosh(s)\ \cos(t)\ R+t\right)\\&\qquad+\cos(t)\ e^{\cos(t)\,z\,R-r\cosh(s)\sin(t)\,R-h\cos(t)\,R}\\&\qquad\times\ \cos\left(\sin(t)\ z\,R-h\sin(t)\ R+r\cosh(s)\ \cos(t)\ R+t\right)dt\\=&0\end{aligned}\qquad(9.5.110)$$

IN_{14} について、k は下記のように表現でき、

$$k=i\,b,\ \frac{d}{d\,b}\,k=i$$

$b=\infty\to0$ の b 軸上の積分結果は $\mu\to0$ として、$b\to k$ に置き換えて、下記となる。

$$\begin{aligned}IN_{14}=&\frac{2\,K_0\,m}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{e^{i\,b\,z-b\,r\cosh(s)-i\,b\,h}}{i\,b-K_0}db\\=&\frac{2\,K_0\,m}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{e^{i\,k\,z-k\,r\cosh(s)-i\,h\,k}}{i\,k-K_0}dk\end{aligned}\qquad(9.5.111)$$

また、下記の関係があり、

$$IN_{14}+IN_{13}+IN_1=0$$

IN_1 は (9.5.110) 式、(9.5.111) 式から下記となる。

$$\begin{aligned}IN_1=&-IN_{14}-IN_{13}\\=&-\frac{2\,K_0\,m}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{e^{i\,k\,z-k\,r\cosh(s)-i\,h\,k}}{i\,k-K_0}dk\end{aligned}\qquad(9.5.112)$$

(b)IN_2 の積分

k を複素平面で表現し、$k=a+i\,b$ とする。a 軸上は求める積分で、IN_2 である。線積分内の特異点:$k=K_0-i\,\mu$ では、半径：δ の円の積分で特異点を除き、IN_{22} とする。a 軸から b 軸に至る線積分は、十分大きい半径:R の円弧の線積分で、IN_{23} とする。b 軸上の線積分を IN_{24} とする。

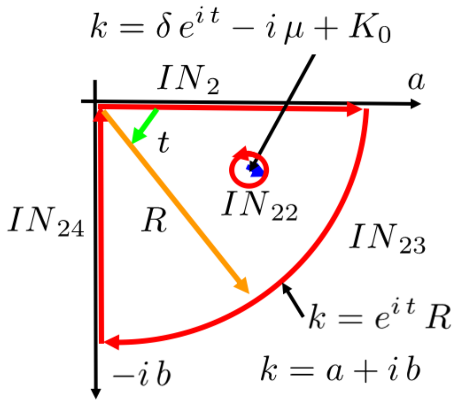


図 9.5.15: IN_2 の積分

IN_{22} について、k は下記のように表現でき、

$$k=\delta\,e^{i\,t}-i\,\mu+K_0,\ \frac{d}{d\,t}\,k=i\,\delta\,e^{i\,t}$$

半径：δ が十分小さいとし、$t=0\to2\,\pi$ の積分結果は下記となる。

$$IN_{22}=4\,K_0\,m\,e^{K_0\,z-i\,K_0\,r\cosh(s)-K_0\,h}\qquad(9.5.113)$$

IN_{23} について、k は下記のように表現でき、

$$k=e^{i\,t}\,R,\ \frac{d}{d\,t}\,k=i\,e^{i\,t}\,R$$

$t=0\to-\pi/2$ の積分結果は、下記となり、半径：R が十分大きいとき $R>>K_0,\mu$ となり、実部をとって、

$r > 0, y < h, R > 0, sin(t) < 0, cos(t) > 0$ から、

$$IN_{23} = -\frac{2K_0 m}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\sin(t)\, e^{\cos(t)\,z\,R + r\cosh(s)\sin(t)\,R - h\cos(t)\,R}$$
$$\times\sin(\sin(t)\,z\,R - h\sin(t)\,R - r\cosh(s)\,\cos(t)\,R + t)$$
$$+\cos(t)\, e^{\cos(t)\,z\,R + r\cosh(s)\sin(t)\,R - h\cos(t)\,R}$$
$$\times\cos(\sin(t)\,z\,R - h\sin(t)\,R - r\cosh(s)\,\cos(t)\,R + t)\,dt$$
$$= 0$$

(9.5.114)

IN_{24} について、k は下記のように表現でき、

$$k = -i\,b,\ \frac{d}{d\,b}\,k = -i$$

$b = \infty \to 0$ の b 軸上の積分結果は $\mu \to 0$ として、$b \to k$ に置き換えて、下記となる。

$$IN_{24} = \frac{2K_0 m}{\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-i\,b\,z - b\,r\cosh(s) + i\,b\,h}}{-i\,b - K_0}db$$
$$= \frac{2K_0 m}{\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-i\,k\,z - k\,r\cosh(s) + i\,h\,k}}{-i\,k - K_0}dk \tag{9.5.115}$$

また、下記の関係があり、

$$IN_{24} + IN_{23} + IN_{22} + IN_2 = 0$$

IN_2 は (9.5.113) 式、(9.5.114) 式、(9.5.115) 式から下記となる。

$$IN_2 = -IN_{24} - IN_{23} - IN_{22}$$
$$= -\frac{2K_0 m}{\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-i\,k\,z - k\,r\cosh(s) + i\,h\,k}}{-i\,k - K_0}dk$$
$$- 4K_0\, m\, e^{K_0\,z - i\,K_0\,r\cosh(s) - K_0\,h} \tag{9.5.116}$$

ϕ_{222} は (9.5.112) 式、(9.5.116) 式から下記となる。

$$\phi_{222} = -\frac{2K_0 m}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{e^{i\,k\,z - k\,r\cosh(s) - i\,h\,k}}{i\,k - K_0}dkds$$
$$-\frac{2K_0 m}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{e^{-i\,k\,z - k\,r\cosh(s) + i\,h\,k}}{-i\,k - K_0}dkds$$
$$- 4K_0\, m\int_0^\infty e^{K_0\,z - i\,K_0\,r\cosh(s) - K_0\,h}ds \tag{9.5.117}$$

以上から、速度ポテンシャル:ϕ は (9.5.103) 式、(9.5.117) 式から、

$$\phi = -\frac{2K_0 m\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{e^{i\,k\,z - k\,r\cosh(s) - i\,h\,k}}{i\,k - K_0}dkds}{\pi}$$
$$-\frac{2K_0 m\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{e^{-i\,k\,z - k\,r\cosh(s) + i\,h\,k}}{-i\,k - K_0}dkds}{\pi}$$
$$- 4K_0\, m\int_0^\infty e^{K_0\,z - i\,K_0\,r\cosh(s) - K_0\,h}ds$$
$$-\frac{2m}{\sqrt{(h-z)^2 + r^2}} \tag{9.5.118}$$

```
subst([%,z=0],ET2);
ET3:expand(%);
IIN22:(4*%i*K[0]*m*\omega*integrate(%e^(
 -%i*K[0]*r*cosh(s)-K[0]*h),s,0,inf))/g
 =(4*%i*K[0]*m*\omega*%e^(-K[0]*h)
 *'integrate(%e^(-%i*K[0]*r*
 cosh(s)),s,0,inf))/g;
H2:hankel_2 (v, r) =bessel_j(v,r)
 - %i * bessel_y(v,r);
H21:subst([r=K[0]*r,v=0],%);
H22:hankel_2 (v, r) =+2*%i*%e^(+v*%pi*%i/2)
 /%pi*'integrate(%e^(-%i*r*cosh(t))
 *cosh(v*t),t,0,inf);
subst([r=K[0]*r,v=0,t=s],H22);
%*%pi/2/%i;
H221:rhs(%)=lhs(%);
subst([H221],IIN22);
ET31:subst([%,H21],ET3);
ET32:\eta=rhs(ET31)*%e^(%i*\omega*t);
ET33:realpart(%);
coeff(rhs(ET33),cos(\omega*t));
factor(%);
expand(%);
ET3C:last(%);
coeff(rhs(ET33),sin(\omega*t));
ET3S:subst([realpart(bessel_y(0,K[0]*r))=
 bessel_y(0,K[0]*r)],%);
ET34:\eta=ET3C*cos(\omega*t)+ET3S*
 sin(\omega*t);
expand(%);
\eta=rest(rhs(%),2);
ET35:factor(%);
J1:bessel_j(v,r)=sqrt(2/%pi/r)*cos(r
 -(2*v+1)*%pi/4);
Y1:bessel_y(v,r)=sqrt(2/%pi/r)*sin(r
 -(2*v+1)*%pi/4);
J11:subst([r=K[0]*r,v=0],J1);
Y11:subst([r=K[0]*r,v=0],Y1);
subst([J11,Y11],ET35);
factor(%);
ET36:trigreduce(%);
```

波高の振幅：η_0 の (9.5.92) 式に (9.5.118) 式を代入し、$z=0$ として、

$$\begin{aligned}\eta_0 =&\frac{2\,i\,K_0\,m\,\omega}{\pi\,g}\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{e^{i\,h\,k-k\,r\,\cosh(s)}}{-i\,k-K_0}dkds+\frac{2\,i\,K_0\,m\,\omega}{\pi\,g}\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{e^{-k\,r\,\cosh(s)-i\,h\,k}}{i\,k-K_0}dkds\\&+\frac{4\,i\,K_0\,m\,\omega}{g}\int_0^\infty e^{-i\,K_0\,r\,\cosh(s)-K_0\,h}ds+\frac{2\,i\,m\,\omega}{g\,\sqrt{r^2+h^2}}\end{aligned}\tag{9.5.119}$$

第二種 Hunkel 関数は (A.9.7) 式、659 頁から、

$$\mathrm{hankel\_2}\,(v,r)=\mathrm{bessel\_j}\,(v,r)-i\,\mathrm{bessel\_y}\,(v,r)$$

第二種 Hunkel 関数の積分表示 (Heine の積分表示) は (A.9.10) 式、659 頁から、

$$\mathrm{hankel\_2}\,(v,r)=\frac{2\,i}{\pi}\,e^{\frac{i\,\pi\,v}{2}}\int_0^\infty e^{-i\,r\,\cosh(t)}\cosh\left(t\,v\right)dt$$

上記二式に $v=0,\,r=K_0\,r$ を代入して、

$$\mathrm{hankel\_2}\,(0,K_0\,r)=\mathrm{bessel\_j}\,(0,K_0\,r)-i\,\mathrm{bessel\_y}\,(0,K_0\,r)\,,\quad \mathrm{hankel\_2}\,(0,K_0\,r)=\frac{2\,i}{\pi}\int_0^\infty e^{-i\,K_0\,r\,\cosh(s)}ds\tag{9.5.120}$$

(9.5.119) 式の右辺第三項は上式から、

$$\frac{4\,i\,K_0\,m\,\omega}{g}\int_0^\infty e^{-i\,K_0\,r\,\cosh(s)-K_0\,h}ds=\frac{2\,\pi\,K_0}{g}\,\mathrm{hankel\_2}\,(0,K_0\,r)\;e^{-K_0\,h}\,m\,\omega\tag{9.5.121}$$

上式を (9.5.119) 式に代入し、(9.5.120) 式の関係から、

$$\begin{aligned}\eta_0 =&\frac{2\,i\,K_0\,m\,\omega}{\pi\,g}\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{e^{i\,h\,k-k\,r\,\cosh(s)}}{-i\,k-K_0}dkds+\frac{2\,i\,K_0\,m\,\omega}{\pi\,g}\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{e^{-k\,r\,\cosh(s)-i\,h\,k}}{i\,k-K_0}dkds\\&+\frac{2\,i\,m\,\omega}{g\,\sqrt{r^2+h^2}}+\frac{2\,\pi\,K_0}{g}\,\left(\mathrm{bessel\_j}\,(0,K_0\,r)-i\,\mathrm{bessel\_y}\,(0,K_0\,r)\right)\,e^{-K_0\,h}\,m\,\omega\end{aligned}\tag{9.5.122}$$

波高は (9.5.91) 式に上式を代入し、その実部をとり、

$$\begin{aligned}\eta =&\left(-\frac{4\,K_0\,m\,\omega}{\pi\,g}\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{\left(-k\sin\left(h\,k\right)-K_0\cos\left(h\,k\right)\right)\,e^{-k\,r\,\cosh(s)}}{k^2+K_0^2}dkds-\frac{2\,m\,\omega}{g\,\sqrt{r^2+h^2}}\right.\\&\left.+\frac{2\,\pi\,K_0}{g}\,\mathrm{bessel\_y}\,(0,K_0\,r)\;e^{-K_0\,h}\,m\,\omega\right)\sin\left(\omega\,t\right)+\frac{2\,\pi\,K_0}{g}\,\mathrm{bessel\_j}\,(0,K_0\,r)\;e^{-K_0\,h}\,m\,\omega\cos\left(\omega\,t\right)\end{aligned}\tag{9.5.123}$$

r が十分大きいときには、

$$\eta=\frac{2\,\pi\,K_0\,\mathrm{bessel\_y}\,(0,K_0\,r)\;e^{-K_0\,h}\,m\,\omega\sin\left(\omega\,t\right)}{g}+\frac{2\,\pi\,K_0\,\mathrm{bessel\_j}\,(0,K_0\,r)\;e^{-K_0\,h}\,m\,\omega\cos\left(\omega\,t\right)}{g}\tag{9.5.124}$$

Bessel 関数は r が十分大きいときには、Hunkel の漸近級数初項で近似でき、第一種 Bessel 関数：(A.9.4) 式、第二種 Bessel 関数：(A.9.5) 式、659 頁から、

$$\mathrm{bessel\_j}\,(v,r)=\frac{\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi\,(2\,v+1)}{4}-r\right)}{\sqrt{\pi}\,\sqrt{r}},\quad \mathrm{bessel\_y}\,(v,r)=-\frac{\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi\,(2\,v+1)}{4}-r\right)}{\sqrt{\pi}\,\sqrt{r}}$$

上記二式に $v=0,\,r=K_0\,r$ を代入して、

$$\mathrm{bessel\_j}\,(0,K_0\,r)=\frac{\sqrt{2}\cos\left(K_0\,r-\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{\pi}\,\sqrt{K_0}\,\sqrt{r}},\quad \mathrm{bessel\_y}\,(0,K_0\,r)=\frac{\sqrt{2}\sin\left(K_0\,r-\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{\pi}\,\sqrt{K_0}\,\sqrt{r}}$$

上式を (9.5.124) 式に代入し、r が十分大きいときの波高は下記となり、遠方に進行する波を表している。

$$\begin{aligned}\eta =&\frac{2\,\pi\,K_0\,e^{-K_0\,h}\,m\,\omega}{g}\left(\frac{\sqrt{2}\sin\left(K_0\,r-\frac{\pi}{4}\right)\,\sin\left(\omega\,t\right)}{\sqrt{\pi}\,\sqrt{K_0}\,\sqrt{r}}+\frac{\sqrt{2}\cos\left(K_0\,r-\frac{\pi}{4}\right)\,\cos\left(\omega\,t\right)}{\sqrt{\pi}\,\sqrt{K_0}\,\sqrt{r}}\right)\\=&\frac{2^{\frac{3}{2}}\,\sqrt{\pi}\,\sqrt{K_0}}{g\,\sqrt{r}}\,e^{-K_0\,h}\,m\,\omega\cos\left(\omega\,t-K_0\,r+\frac{\pi}{4}\right)\end{aligned}\tag{9.5.125}$$

9.6 定常波

箱の中の波は、側壁からの波の反射で、前節の進行波の波が正負の方向に進み、波は上下に震動しているだけで、停止しているように見え、震動している腹の部分と、震動がない節の部分ができる。ここでは、この波について調べる。

9.6.1 二次元定常波

波のない平衡状態での水面を x 軸とし、鉛直上方に y 軸をとる。水位を h とする。水位変化：η とする。時間:t、波の振動円周波数：ω、重力加速度：g とする。

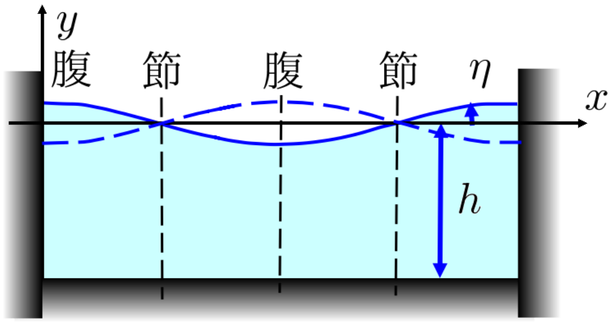


図 9.6.1: 定常波

```
kill(all);
load("vect")$
depends(\Phi,[x,y,t]);
depends(\eta,[x,t]);
declare(n,integer);
assume(k>0);
assume(t>0);
assume(\omega>0);
assume(A>0);
/* 定常波 */
PH0:\Phi=(g*cos(k*x-\omega*t)*cosh(k*(y+h))
 *C)/(cosh(h*k)*\omega);
OM1:\omega^2=(g*k*tanh(h*k));
```

x 軸の方向に進行する波の速度ポテンシャル：Φ は、(9.2.16) 式から次式となり、k と波の振動円周波数：ω の関係は、

$$\Phi = \frac{g\cos(k\,x-\omega\,t)\,\cosh(k\,(y+h))\,C}{\cosh(h\,k)\,\omega} \qquad \text{ここで、} \quad \omega^2 = g\,k\tanh(h\,k) \tag{9.6.1}$$

```
PH1:\Phi=rhs(PH0)+subst([t=-t],rhs(PH0));
PH11:factor(%);
CO1:cos(D)+cos(E)=2*cos((D+E)/2)*cos((D-E)
 /2);
subst([D=k*x+\omega*t,E=k*x-\omega*t],%);
CO11:%-last(lhs(%));
PH12:subst([CO11],PH11);
ET1:\eta=-diff(subst([y=0],rhs(PH12)),t,1)
 /g;
PH2:subst([C=A/2],PH12);
U1:u=diff(rhs(PH2),x,1);
V1:v=diff(rhs(PH2),y,1);
subst([x=0],U1);
subst([x=B],U1);
X1:k*B=n*%pi;
X12:solve(X1,k)[1];
subst([X12,x=B],U1);
subst([X12],OM1);
sqrt(%);
integrate(rhs(U1),y);
-integrate(rhs(V1),x);
PS2:\Psi=%;
sin(k*x)*sinh(k*(y+h))=C;
subst([k=2*%pi/L],%);
subst([x=x*L,y=y*L],%);
subst([h=0.5*L,%pi=3.1415],%);
ET2:rhs(ET1)/2/sin(\omega*t)/C;
K1:subst([n=3,B=1],X12);
subst([K1],ET2);
plot2d([%,-%],[x,0,1]);
```

上式から、正負の方向に進む波の速度ポテンシャルは、

$$\begin{aligned}\Phi =&\frac{g\cos(k\,x+\omega\,t)\,\cosh(k\,(y+h))\,C}{\cosh(h\,k)\,\omega}\\&+\frac{g\cos(k\,x-\omega\,t)\,\cosh(k\,(y+h))\,C}{\cosh(h\,k)\,\omega}\\=&\frac{g\,(\cos(k\,x+\omega\,t)+\cos(k\,x-\omega\,t))\,\cosh(k\,(y+h))\,C}{\cosh(h\,k)\,\omega}\end{aligned}$$

下記の関係式を使って、

$$\cos(E)+\cos(D) = 2\cos\left(\frac{D-E}{2}\right)\,\cos\left(\frac{E+D}{2}\right)$$

上式の速度ポテンシャルは、

$$\Phi = \frac{2\,g\cos(\omega\,t)\,\cos(k\,x)\,\cosh(k\,(y+h))\,C}{\cosh(h\,k)\,\omega}$$

波高：η は、(9.1.6) 式から

$$\eta = -\frac{\frac{d}{d\,t}\,\Phi}{g} = 2\sin(\omega\,t)\,\cos(k\,x)\,C \tag{9.6.2}$$

振幅：A とすると、$C = A/2$ で速度ポテンシャルは、

$$\Phi = \frac{g\cos(\omega\,t)\,\cos(k\,x)\,\cosh(k\,(y+h))\,A}{\cosh(h\,k)\,\omega} \tag{9.6.3}$$

x 軸の方向の流速：u、y 軸の方向の流速：v は、

$$\begin{aligned} u =& \frac{d}{d\,x}\,\Phi = -\frac{g\,k\cos(\omega\,t)\,\sin(k\,x)\,\cosh(k\,(y+h))\,A}{\cosh(h\,k)\,\omega} \\ v =& \frac{d}{d\,y}\,\Phi = \frac{g\,k\cos(\omega\,t)\,\cos(k\,x)\,\sinh(k\,(y+h))\,A}{\cosh(h\,k)\,\omega} \end{aligned} \tag{9.6.4}$$

幅：B の隔壁がある場合に発生する定常波の条件は、隔壁で $u = 0$ であるから、$\sin(k\,x) = 0$ から、次式を得る。

$$k = \frac{\pi\,n}{B} \qquad (n = 0, 1, 2, 3\cdots) \tag{9.6.5}$$

このときの円振動周波数：ω は、

$$\omega = \sqrt{\pi}\sqrt{\frac{g\,n\tanh\left(\frac{\pi\,h\,n}{B}\right)}{B}} \tag{9.6.6}$$

速度ポテンシャル：Φ と流れ関数：Ψ の関係は、(5.1.6) 式、90 頁から

$$\frac{d}{d\,x}\,\Phi = \frac{d}{d\,y}\,\Psi, \qquad \frac{d}{d\,y}\,\Phi = -\frac{d}{d\,x}\,\Psi$$

(9.6.3) 式の速度ポテンシャルを上式を用いて、流れ関数：Ψ を求めると次式となる。

$$\begin{aligned} \Psi =& \int \frac{d}{d\,x}\,\Phi\,dy \\ =& -\frac{g\cos(\omega\,t)\,\sin(k\,x)\,\sinh(k\,(y+h))\,A}{\cosh(h\,k)\,\omega} \end{aligned} \tag{9.6.7}$$

上式から、$k = 2\,\pi/L$ とすると、流線は、

$$\sin\left(\frac{2\,\pi\,x}{L}\right)\,\sinh\left(\frac{2\,\pi\,(y+h)}{L}\right) = C$$

上式を gnuplot で描くと下図となる。

```
#!/gnuplot
set xrange [0:1]
set yrange [0:1]
set isosamples 150,150
set contour base
set cntrparam levels incremental -50,0.1,50
unset key
unset surface
set view map
splot cos(3.14159*x)*cos(3.14159*y)
#    EOF
```

上記の (9.6.4) 式の流速：u、流速：v や上記の流線から、波の節では $v = 0$ で水平方向にのみ運動し、波の腹では $u = 0$ で上下方向にのみ運動する。$n = 1, 2, 3$ における定常波を下記に示す。

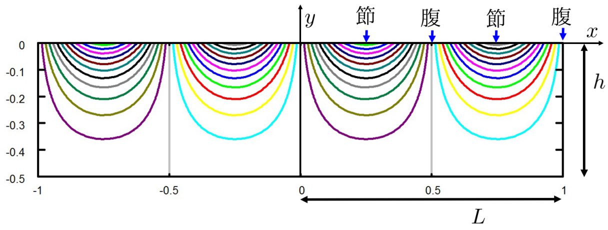


図 9.6.2: 定常波流線

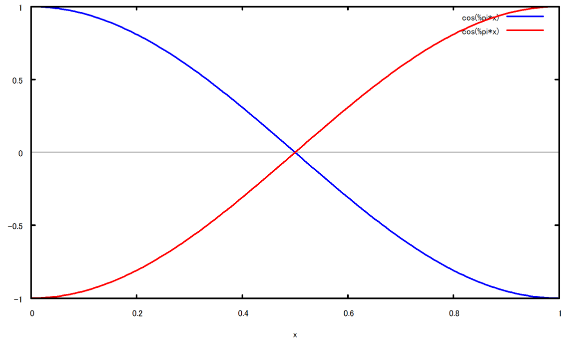


図 9.6.3: 定常波　$n = 1$

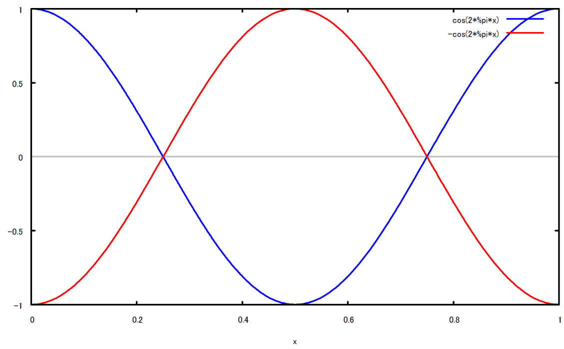


図 9.6.4: 定常波　$n = 2$

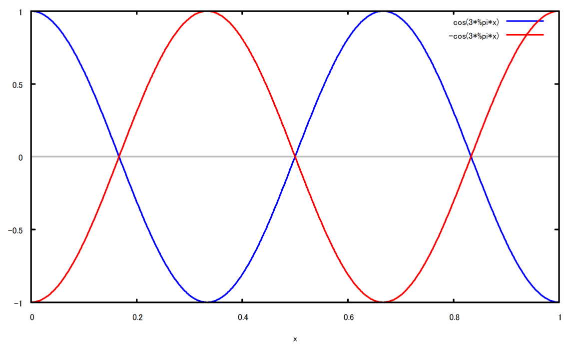


図 9.6.5: 定常波　$n = 3$

例題 9.6.2 V 字断面水路の定常波

側壁が 45 度の傾斜を持つ断面の水路[1] で、水位：h とし、水底で水平方向を x 軸とし、鉛直上方に y 軸をとる。水位変化：η、時間:t、波の振動円周波数：ω、重力加速度：g とする。

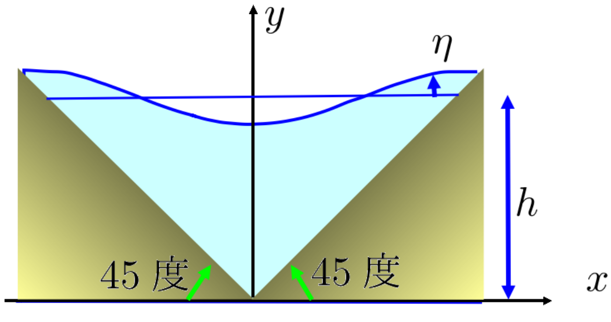


図 9.6.6: V 字断面水路

```
/* V 型断面の定常波  */
kill(all);
load("vect")$
depends(\Phi,[x,y,t]);
depends(\Psi,[x,y,t]);
assume(k>0);
assume(t>0);
assume(\omega>0);
PS1:\Psi=A*cos(\omega*t)*(sinh(k*y)
 *sin(k*x)-sinh(k*x)*sin(k*y));
subst([x=y],PS1);
subst([x=-y],PS1);
PS2:\Psi=A*cos(\omega*t)*(cosh(k*y)
 *cos(k*x)-cosh(k*x)*cos(k*y));
subst([x=y],PS2);
subst([x=-y],PS2);
EQ1:diff(\Phi,x,2)+diff(\Phi,y,2)=0;
EQ1:diff(\Psi,x,2)+diff(\Psi,y,2)=0;
subst([PS1],EQ1);
ev(%,diff);
factor(%);
subst([PS2],EQ1);
ev(%,diff);
factor(%);
```

側壁が流線となる流れ関数：Ψ として、$y=x$, $y=-x$ で $\Psi=0$ となる境界条件を満足する流れ関数：Ψ として、次の二式が考えられる。

$$\begin{aligned}\Psi =&\cos(\omega\,t)\Big(\sin(k\,x)\,\sinh(k\,y)\\&-\sinh(k\,x)\,\sin(k\,y)\Big)\,A\end{aligned} \tag{9.6.8}$$

$$\begin{aligned}\Psi =&\cos(\omega\,t)\Big(\cos(k\,x)\,\cosh(k\,y)\\&-\cosh(k\,x)\,\cos(k\,y)\Big)\,A\end{aligned} \tag{9.6.9}$$

また、流れ関数：Ψ の質量保存の方程式は (5.1.3) 式から、次式となり、上記の二式を代入すると満足していることがわかる。

$$\frac{d^2}{d\,y^2}\Psi+\frac{d^2}{d\,x^2}\Psi=0 \tag{9.6.10}$$

```
diff(PS1,y,1);
PH1:\Phi=integrate(rhs(%),x);
diff(PS1,x,1);
\Phi=-integrate(rhs(%),y);
ET1:\eta=-1/g*diff(subst([y=h],rhs(PH1)),
 t,1);
diff(rhs(PH1),t,2)+g*diff(rhs(PH1),y,1)=0;
subst([y=h],%);
WC1:expand(%/A/cos(\omega*t));
coeff(lhs(WC1),cosh(k*x));
WC11:solve(%,\omega^2)[1]/k/g;
coeff(lhs(WC1),cos(k*x));
WC12:solve(%,\omega^2)[1]/k/g;
WC13:rhs(WC11)=rhs(WC12);
B1:b=k*h;
B2:solve(B1,k)[1];
WC14:subst([B2],WC13);
plot2d(lhs(WC14)-rhs(WC14),[b,0,10],
 [y,-1,1]);
B3:b=find_root(lhs(WC14)-rhs(WC14),b,2,3);
B4:subst([B3],B2);
WC15:subst([B4],WC12);
solve(%,\omega)[2];
WC16:float(%);
subst([sin(omega*t)=1,\omega=1,A=1,g=1],
 rhs(ET1));
ET11:subst([B4,h=1],%);
x/h=find_root(%,x,0,1);
plot2d([ET11,-ET11],[x,-1,1]);
rhs(PS1)/A/cos(\omega*t);
subst([x=x*h,y=y*h,B4],%);
```

[1]Sir Horance Lamb, Hydrodynamics sixth edition [11)], Surface Waves P.442 258.

速度ポテンシャル：Φ は、(5.1.6) 式、90 頁から

$$\frac{d}{d\,x}\,\Phi=\frac{d}{d\,y}\,\Psi,\quad \frac{d}{d\,y}\,\Phi=-\frac{d}{d\,x}\,\Psi$$

(9.6.8) 式の流れ関数を用いて、速度ポテンシャル：Φ は、次式となる。

$$\begin{aligned}\Phi=\int\frac{d}{d\,y}\,\Psi\,dx=&\cos\left(\omega\,t\right)\left(-\cos\left(k\,x\right)\,\cosh\left(k\,y\right)\right.\\&\left.-\cosh\left(k\,x\right)\,\cos\left(k\,y\right)\right)A\end{aligned}\tag{9.6.11}$$

水位変動：η は、(9.1.6) 式に上式を代入し、$y=h$ として、

$$\begin{aligned}\eta=&-\frac{\frac{d}{d\,t}\,\Phi}{g}\\=&\frac{\omega\sin\left(\omega\,t\right)\,A}{g}\left(-\cos\left(h\,k\right)\,\cosh\left(k\,x\right)\right.\\&\left.-\cosh\left(h\,k\right)\,\cos\left(k\,x\right)\right)\end{aligned}\tag{9.6.12}$$

水面の自由表面条件は、(9.2.3) 式から、

$$0=g\left(\frac{d}{d\,y}\,\Phi\right)+\frac{d^2}{d\,t^2}\,\Phi\tag{9.6.13}$$

(9.6.11) 式の Φ を上式に代入し、水面である $y=h$ とし、整理すると、

$$\begin{aligned}&\cos\left(h\,k\right)\,\omega^2\cosh\left(k\,x\right)+g\,k\sin\left(h\,k\right)\,\cosh\left(k\,x\right)\\&+\cosh\left(h\,k\right)\,\omega^2\cos\left(k\,x\right)-g\,k\sinh\left(h\,k\right)\,\cos\left(k\,x\right)=0\end{aligned}$$

上式が x に無関係に成り立つためには、次の二条件となる。

$$\begin{aligned}&\cos\left(h\,k\right)\,\omega^2+g\,k\sin\left(h\,k\right)=0,\quad \frac{\omega^2}{g\,k}=-\frac{\sin\left(h\,k\right)}{\cos\left(h\,k\right)}\\&\cosh\left(h\,k\right)\,\omega^2-g\,k\sinh\left(h\,k\right)=0,\quad \frac{\omega^2}{g\,k}=\frac{\sinh\left(h\,k\right)}{\cosh\left(h\,k\right)}\end{aligned}\tag{9.6.14}$$

上式をまとめた条件は次式となる。

$$b=-\frac{\sin\left(h\,k\right)}{\cos\left(h\,k\right)}-\frac{\sinh\left(h\,k\right)}{\cosh\left(h\,k\right)}=0$$

上式で $b=0$ が成り立つ kh は下図の横軸との交点を find_root 関数で得られ、
その初期値は $kh=2.365020372431352$ で、
k は次式となる。

$$k=\frac{2.365020372431352}{h}$$

また、円周波数：ω は、(9.6.14) 式に上式を代入し、

$$\omega=1.524348299974038\sqrt{\frac{g}{h}}$$

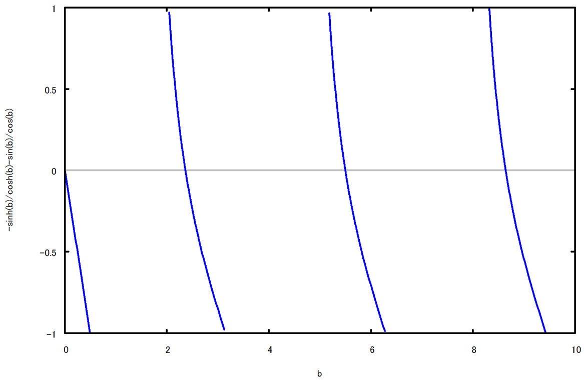


図 9.6.7: kh を求める図

上記の関係を水位変動：η の (9.6.12) 式に代入し、上図が得られる。また、水位変動がない節の部分は $\eta=0$ として得られ、その位置は下記となる。

$$\frac{x}{h}=0.55168495459528$$

流れ関数から gnuplot で流線を求めると、上図となる。

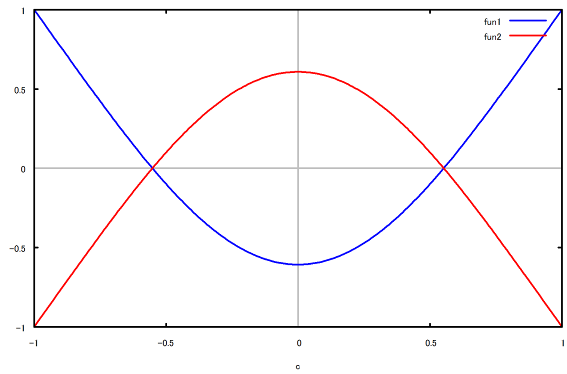


図 9.6.8: V 字断面水路　水位変動

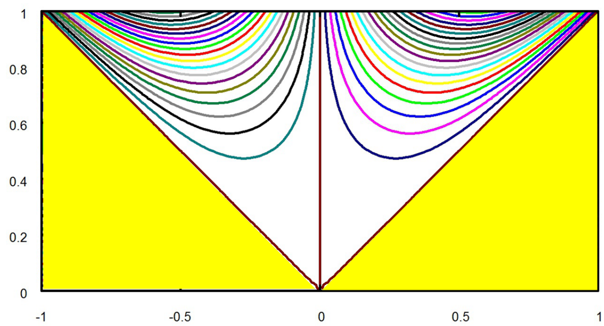


図 9.6.9: V 字断面水路　流線

```
#!/gnuplot
set xrange [-1:1]
set yrange [0:1]
set isosamples 150,150
set contour base
set cntrparam levels incremental -100,0.2
 ,100
unset key
unset surface
set view map
splot sin(2.365020372431352*x)*
 sinh( 2.365020372431352*y)
  -sinh(2.365020372431352*x)
  *sin(2.365020372431352*y)
#    EOF
```

```
diff(PS2,y,1);
PH2:\Phi=integrate(rhs(%),x);
diff(PS2,x,1);
\Phi=-integrate(rhs(%),y);
ET2:\eta=-1/g*diff(subst([y=h],rhs(PH2)),t
 ,1);
diff(rhs(PH2),t,2)+g*diff(rhs(PH2),y,1)=0;
subst([y=h],%);
WC2:expand(%/A/cos(\omega*t));
coeff(lhs(WC2),sinh(k*x));
WC21:solve(%,\omega^2)[1]/k/g;
coeff(lhs(WC2),sin(k*x));
WC22:solve(%,\omega^2)[1]/k/g;
WC23:rhs(WC21)=rhs(WC12);
WC24:subst([B2],WC23);
plot2d(lhs(WC24)-rhs(WC24),[b,0,10],
 [y,-1,1]);
B3:b=find_root(lhs(WC24)-rhs(WC24),b,
 0.5,2);
B4:subst([B3],B2);
WC25:subst([B4],WC22);
solve(%,\omega)[2];
WC26:float(%);
subst([sin(omega*t)=1,\omega=1,A=1,g=1],
 rhs(ET2));
ET21:subst([B4,h=1],%);
x/h=find_root(%,x,0,1);
plot2d([ET21,-ET21],[x,-1,1]);
rhs(PS2)/A/cos(\omega*t);
subst([x=x*h,y=y*h,B4],%);
```

(9.6.9) 式の流れ関数を用いて、速度ポテンシャル：Φ は、次式となる。

$$\Phi = \int \frac{d}{d\,y}\,\Psi\,dx = \cos\left(\omega\,t\right)\left(\sin\left(k\,x\right)\,\sinh\left(k\,y\right) + \sinh\left(k\,x\right)\,\sin\left(k\,y\right)\right)A \tag{9.6.15}$$

水位変動：η は、(9.1.6) 式に上式を代入し、$y=h$ として、

$$\begin{aligned}\eta &= -\frac{\frac{d}{d\,t}\,\Phi}{g}\\ &= \frac{\omega\sin\left(\omega\,t\right)\,A}{g}\left(\sin\left(h\,k\right)\,\sinh\left(k\,x\right) + \sinh\left(h\,k\right)\,\sin\left(k\,x\right)\right)\end{aligned} \tag{9.6.16}$$

水面の自由表面条件：(9.6.13) 式に (9.6.15) 式の Φ を

代入し、水面である $y=h$ とし、整理すると、

$$-\sin(h\,k)\ \omega^2 \sinh(k\,x) + g\,k\cos(h\,k)\ \sinh(k\,x)$$
$$-\sinh(h\,k)\ \omega^2 \sin(k\,x) + g\,k\cosh(h\,k)\ \sin(k\,x) = 0$$

上式が x に無関係に成り立つためには、次の二条件となる。

$$g\,k\cos(h\,k) - \sin(h\,k)\ \omega^2, \quad \frac{\omega^2}{g\,k} = \frac{\cos(h\,k)}{\sin(h\,k)}$$
$$g\,k\cosh(h\,k) - \sinh(h\,k)\ \omega^2, \quad \frac{\omega^2}{g\,k} = \frac{\cosh(h\,k)}{\sinh(h\,k)} \tag{9.6.17}$$

上式をまとめた条件は次式となる。

$$b = \frac{\cos(h\,k)}{\sin(h\,k)} - \frac{\sinh(h\,k)}{\cosh(h\,k)} = 0$$

上式で $b=0$ が成り立つ kh は下図の横軸との交点を find_root 関数で得られ、

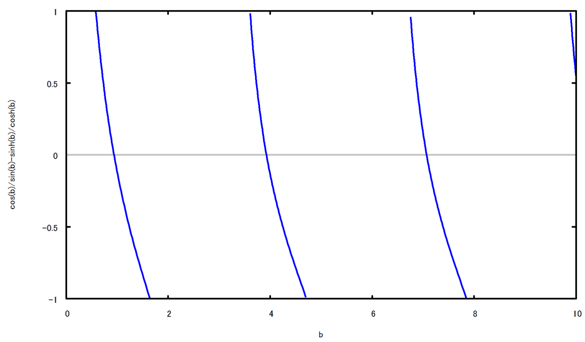


図 9.6.10: kh を求める図

その初期値は次式となる。

$$k = \frac{0.93755203435598}{h}$$

また、円周波数：ω は、(9.6.17) 式に上式を代入し、

$$\omega = 1.130111787960803\sqrt{\frac{g}{h}}$$

上記の関係を水位変動：η の (9.6.16) 式に代入し、下図が得られる。水位変動がない節の部分は $\eta=0$ として、その位置は下記となる。

$$\frac{x}{h} = 0.0$$

流れ関数から gnuplot で流線を求めると、下図となる。

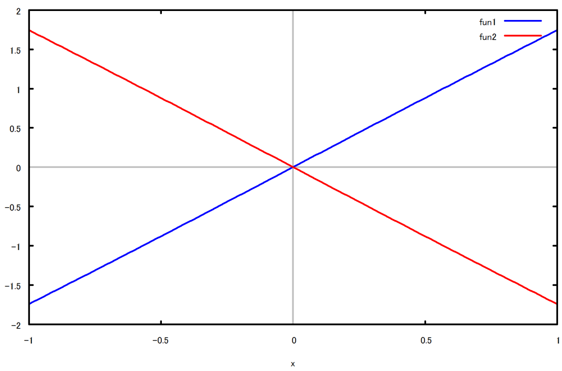


図 9.6.11: V 字断面水路　水位変動

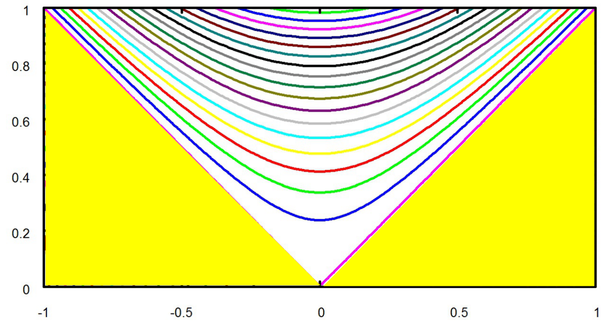


図 9.6.12: V 字断面水路　流線

```
#!/gnuplot
set xrange [-1:1]
set yrange [0:1]
set isosamples 150,150
set contour base
set cntrparam levels incremental -50,0.05
 ,50
unset key
unset surface
set view map
splot cos(0.93755203435598*x)
 *cosh(0.93755203435598*y)
  -cosh(0.93755203435598*x)
   *cos(0.93755203435598*y)
#    EOF
#    EOF
```

```
B3:b=find_root(lhs(WC24)-rhs(WC24),
 b,3.5,4.5);
B4:subst([B3],B2);
WC25:subst([B4],WC22);
solve(%,\omega)[2];
WC26:float(%);
subst([sin(omega*t)=1,\omega=1,A=1,g=1],
 rhs(ET2));
ET21:subst([B4,h=1],%);
x/h=find_root(%,x,0.2,1);
plot2d([ET21,-ET21],[x,-1,1]);
rhs(PS2)/A/cos(\omega*t);
subst([x=x*h,y=y*h,B4],%);
```

kh を求める図の横軸との交点で、2 番目の交点は次式となる。

$$k = \frac{3.927378719118806}{h}$$

また、円周波数：ω は、(9.6.17) 式に上式を代入し、

$$\omega = 1.982530369138615\sqrt{\frac{g}{h}}$$

上記の関係を水位変動：η の (9.6.16) 式に代入し、下図が得られる。水位変動がない節の部分は $\eta = 0$ として、その位置は下記となる。

$$\frac{x}{h} = 0.73563866326652$$

流れ関数から gnuplot で流線を求めると、下図となる。

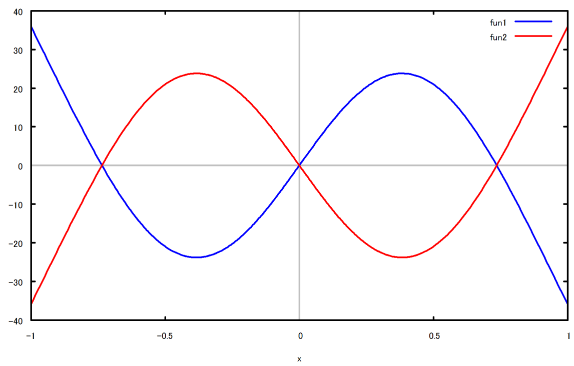


図 9.6.13: V 字断面水路　水位変動

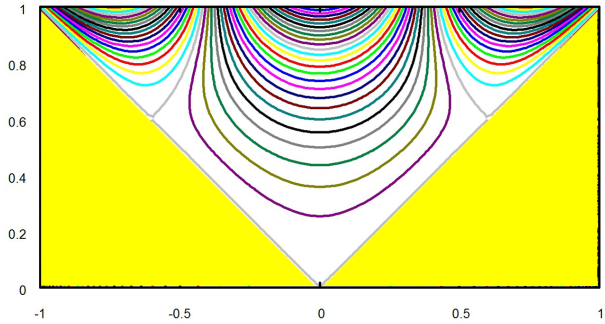


図 9.6.14: V 字断面水路　流線

```
#!/gnuplot
set xrange [-1:1]
set yrange [0:1]
set isosamples 150,150
set contour base
set cntrparam levels incremental -50,1,50
unset key
unset surface
set view map
splot cos(3.927378719118806*x)
 *cosh(3.927378719118806*y)
  -cosh(3.927378719118806*x)
   *cos(3.927378719118806*y)
#     EOF
```

例題 9.6.3　直方体タンク内の定常波

直方体タンクの縦長さ:A、横長さ:B、水位：h とし、波のない平衡状態で、直方体の端を原点とし、直方体の縦方向を x 軸、横方向を y 軸、鉛直上方に z 軸とする。水位変化：η、時間:t、波の振動円周波数：ω、重力加速度：g とする。

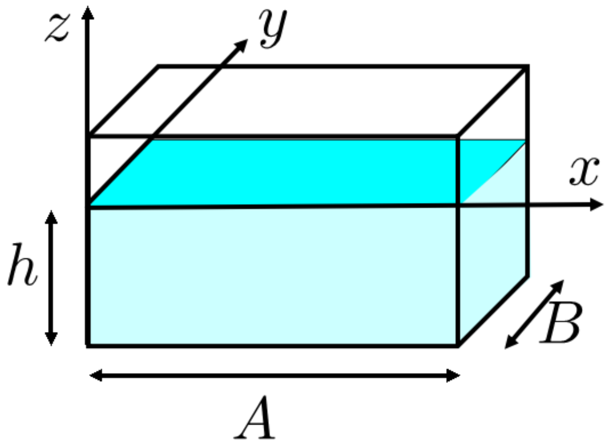


図 9.6.15: 直方体内の定常波

```
/* 直方体内の定在波　No.2 */
kill(all);
depends(\Phi,[x,y,z,t]);
depends(\eta,[x,y,z,t]);
declare(m,integer);
declare(n,integer);
assume(k>0);
assume(p>0);
assume(q>0);
assume(t>0);
assume(\omega>0);
EQ2:\eta=-diff(\Phi,t,1)/g;
PH1:\Phi=(g*(%d1*sin(\omega*t)+%d2*
 cos(\omega*t))*(%k1*sin(p*x)+%k2*cos(p*x))
 *(%c1*sin(q*y)+%c2*cos(q*y))*cosh(k*(z+h))
 *C)/(cosh(h*k)*\omega);
OM1:\omega^2=g*k*tanh(h*k);
K1:k^2=p^2+q^2;
PH2:\Phi=(g*cos(\omega*t)*cos(p*x)*cos(q*y)
 *cosh(k*(z+h))*C)/(cosh(h*k)*\omega);
VX1:diff(PH2,x,1);
VX11:lhs(VX1)=subst([x=0],rhs(VX1));
VX12:lhs(VX1)=subst([x=A],rhs(VX1));
p*A=m*%pi;
AQ1:solve(%,p)[1];
subst([AQ1],VX12);
VY1:diff(PH2,y,1);
VY11:lhs(VY1)=subst([y=0],rhs(VY1));
VY12:lhs(VY1)=subst([y=B],rhs(VY1));
q*B=n*%pi;
BP1:solve(%,q)[1];
subst([BP1],VY12);
subst([AQ1,BP1],K1);
K2:sqrt(%);
subst([K2],OM1);
OM2:sqrt(%);
subst([PH2],EQ2);
ev(%,diff);
subst([AQ1,BP1,z=0,K2],%);
ET11:cos((%pi*m*x)/A)*cos((%pi*n*y)/B);
subst([A=1,B=1,m=1,n=1,%pi=3.14159],ET11);
plot3d(%,[x,0,1],[y,0,1]);
```

波高：η は (9.1.6) 式から、

$$\eta = -\frac{\frac{d}{d\,t}\,\Phi}{g} \tag{9.6.18}$$

「9.4.1 三次元微小振幅波（xyz 座標）」、587 頁の速度ポテンシャルの一般解は、(9.4.20) 式から、

$$\begin{aligned}\Phi =&\frac{g\cosh\left(k\,\left(z+h\right)\right)\,C}{\cosh\left(h\,k\right)\,\omega}\\ &\times\,\left(\%d1\sin\left(\omega\,t\right)+\%d2\cos\left(\omega\,t\right)\right)\\ &\times\,\left(\%k1\sin\left(p\,x\right)+\%k2\cos\left(p\,x\right)\right)\\ &\times\,\left(\%c1\sin\left(q\,y\right)+\%c2\cos\left(q\,y\right)\right)\end{aligned} \tag{9.6.19}$$

ここで、(9.4.8) 式から、

$$k^2 = q^2 + p^2 \tag{9.6.20}$$

波の形から、速度ポテンシャル：Φ は、

$$\Phi = \frac{g\cos\left(\omega\,t\right)\,\cos\left(p\,x\right)\,\cos\left(q\,y\right)\,\cosh\left(k\,\left(z+h\right)\right)\,C}{\cosh\left(h\,k\right)\,\omega} \tag{9.6.21}$$

ここで、(9.4.16) 式から、

$$\omega^2 = \frac{g\,k\sinh\left(k\,z+h\,k\right)}{\cosh\left(k\,z+h\,k\right)} = g\,k\tanh\left(h\,k\right) \tag{9.6.22}$$

x 軸方向の側壁の条件：$\frac{d}{d\,x}\,\Phi = 0 \quad \text{at} \quad x = 0, A$ から、

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\,x}\,\Phi =& -\frac{g\,p\cosh\left(k\,\left(z+h\right)\right)\,C}{\cosh\left(h\,k\right)\,\omega}\\ &\times\,\cos\left(\omega\,t\right)\,\sin\left(p\,x\right)\,\cos\left(q\,y\right) = 0\end{aligned}$$

上式から、

$$p = \frac{\pi\,m}{A} \qquad (m = 0, 1, 2, 3\cdots) \tag{9.6.23}$$

y 軸方向の側壁の条件：$\frac{d}{d\,y}\,\Phi = 0 \quad \mathrm{at} \quad y = 0, B$ から、

$$\frac{d}{d\,y}\,\Phi = -\frac{g\,q\cosh\left(k\,\left(z+h\right)\right)\,C}{\cosh\left(h\,k\right)\,\omega} \times \cos\left(\omega\,t\right)\,\cos\left(p\,x\right)\,\sin\left(q\,y\right)\, = 0$$

上式から、

$$q = \frac{\pi\,n}{B} \qquad (n = 0, 1, 2, 3 \cdots) \tag{9.6.24}$$

(9.6.20) 式に上式と (9.6.23) 式を代入すると、

$$k = \sqrt{\frac{\pi^2\,n^2}{B^2} + \frac{\pi^2\,m^2}{A^2}} \tag{9.6.25}$$

(9.6.22) 式に上式を代入すると、

$$\omega = \sqrt{g\tanh\left(h\sqrt{\frac{\pi^2\,n^2}{B^2} + \frac{\pi^2\,m^2}{A^2}}\right)}\left(\frac{\pi^2\,n^2}{B^2} + \frac{\pi^2\,m^2}{A^2}\right)^{\frac{1}{4}} \tag{9.6.26}$$

波高：η は、(9.6.18) 式に (9.6.21) 式を代入し、$z = 0$ として、

$$\eta = -\frac{\frac{d}{d\,t}\,\Phi}{g} = \frac{C\,\omega\sin\left(\omega\,t\right)}{g}\cos\left(\frac{\pi\,m\,x}{A}\right)\,\cos\left(\frac{\pi\,n\,y}{B}\right) \times \cosh\left(h\sqrt{\frac{\pi^2\,n^2}{B^2} + \frac{\pi^2\,m^2}{A^2}}\right)$$

上式から、$A = 1, B = 1, m = 1, n = 1$ の時の定常波波高分布を以下に示す。

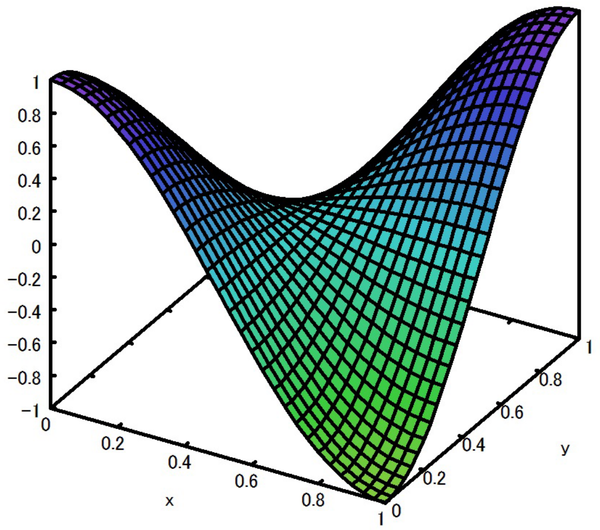


図 9.6.16: 直方体内の定常波

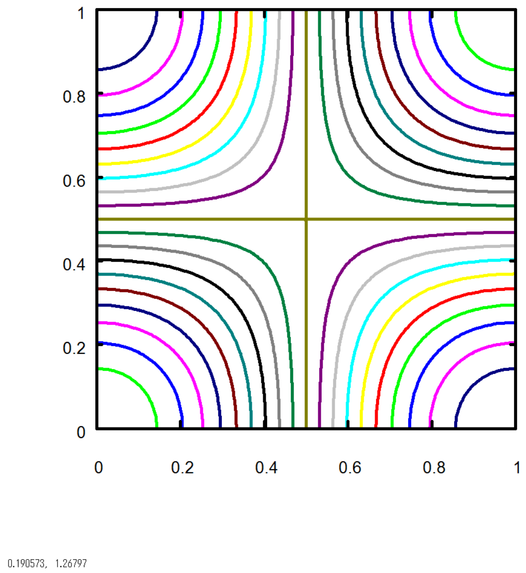


図 9.6.17: 直方体内の定常波

```
#!/gnuplot
set xrange [0:1]
set yrange [0:1]
set isosamples 150,150
set contour base
set cntrparam levels incremental -50,0.1,50
unset key
unset surface
set view map
splot cos(3.14159*x)*cos(3.14159*y)
#    EOF
```

例題 9.6.4　鉛直円筒タンク内の定常波

中心軸を鉛直方向に立てた円筒の半径:R、水位：h とし、波のない平衡状態で、表面の中心を原点とし、半径方向を r 軸、x 軸と r との角度を θ、鉛直上方に z 軸とする。水位変動：η、時間:t、波の振動円周波数：ω、重力加速度：g とする [1]。

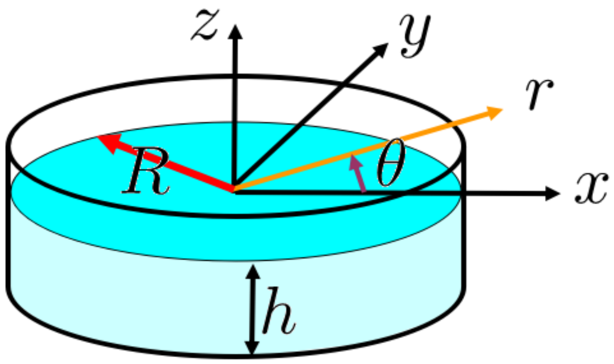


図 9.6.18: 鉛直円筒タンク内の定常波

```
/* 円筒内の定在波 No.2  */
kill(all);
depends(\Phi,[r,\theta,z,t]);
depends(\eta,[x,y,z,t]);
declare(m,integer);
declare(n,integer);
assume(k>0);
assume(t>0);
assume(\omega>0);
assume(q>0);
EQ2:\eta=-'diff(\Phi,t,1)/g;
PH0:\Phi=(g*bessel_j(q,k*r)*(%d1*
 sin(\omega*t)+%d2*cos(\omega*t))*(%k1
 *sin(q*\theta)+%k2*cos(q*\theta))
 *cosh(k*(z+h))*A)/(cosh(h*k)*\omega);
OM1:\omega^2=g*k*tanh(h*k);
PH1:\Phi=(g*bessel_j(q,k*r)*cos(\omega*t)
 *cos(q*\theta)*cosh(k*(z+h))*A)
 /(cosh(h*k)*\omega);
PH11:PH1;
Q1:q=0;
subst([Q1],PH11);
diff(%,r,1);
ev(%,diff);
subst([r=R],%);
KR01:bessel_j(1,k*R)=0;
KR02:subst([k=s/R],%);
plot2d(lhs(KR02),[s,0,10]);
k*R=find_root(KR02,s,3,4);
K1:float(solve(%,k)[1]);
subst([K1],OM1);
sqrt(%);
subst([PH11],EQ2);
subst([Q1],%);
ev(%,diff);
ETQ1:subst([z=0],%);
ETQ11:subst([K1],%);
ETQ12:bessel_j(0,(3.831705916140149*r)/R);
subst([R=1],ETQ12);
plot2d(%,[r,-1,1]);
subst([r=sqrt(x^2+y^2),cos(\theta)=x/
 sqrt(x^2+y^2),R=1],ETQ12);
plot3d(%,[x,-1,1],[y,-1,1]);
```

波高：η は (9.1.6) 式から、

$$\eta = -\frac{\frac{d}{d\,t}\,\Phi}{g} \tag{9.6.27}$$

「9.4.3 三次元微小振幅波（円柱座標）」、596 頁の速度ポテンシャルの一般解は、(9.4.75) 式から、

$$\begin{aligned}\Phi =& \frac{g\cosh\left(k\,\left(z+h\right)\right)\,A}{\cosh\left(h\,k\right)\,\omega}\\ &\times\ \mathrm{bessel\_j}\left(q,k\,r\right)\,\left(\%d1\sin\left(\omega\,t\right)+\%d2\cos\left(\omega\,t\right)\right)\\ &\times\ \left(\%k1\sin\left(q\,\theta\right)+\%k2\cos\left(q\,\theta\right)\right)\end{aligned} \tag{9.6.28}$$

また、(9.4.72) 式から、

$$\omega^2 = \frac{g\,k\sinh\left(k\,z+h\,k\right)}{\cosh\left(k\,z+h\,k\right)} = g\,k\tanh\left(h\,k\right) \tag{9.6.29}$$

波の形から、速度ポテンシャル：Φ は、

$$\begin{aligned}\Phi =& \frac{g A}{\cosh\left(h\,k\right)\,\omega}\,\mathrm{bessel\_j}\left(q,k\,r\right)\\ &\times\ \cos\left(\omega\,t\right)\,\cos\left(q\,\theta\right)\,\cosh\left(k\,\left(z+h\right)\right)\end{aligned} \tag{9.6.30}$$

$q=0$ におけるモードのついて調べる。(9.6.30) 式に $q=0$ を代入し、

$$\begin{aligned}\Phi =& \frac{A\,g}{\cosh\left(h\,k\right)\,\omega}\mathrm{bessel\_j}\left(0,k\,r\right)\\ &\times\ \cos\left(\omega\,t\right)\,\cosh\left(k\,\left(z+h\right)\right)\end{aligned} \tag{9.6.31}$$

側壁：$r=R$ での境界条件：$\frac{d}{d\,r}\,\Phi=0$ から、

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\,r}\,\Phi =& -\frac{\mathrm{bessel\_j}\left(1,k\,r\right)\,g\,k A}{\cosh\left(h\,k\right)\,\omega}\\ &\times\ \cos\left(\omega\,t\right)\,\cosh\left(k\,\left(z+h\right)\right)\ =0\end{aligned}$$

---
[1] 浅水の場合：Sir Horance Lamb, Hydrodynamics sixth edition [11], Tidal Waves P.284 191.

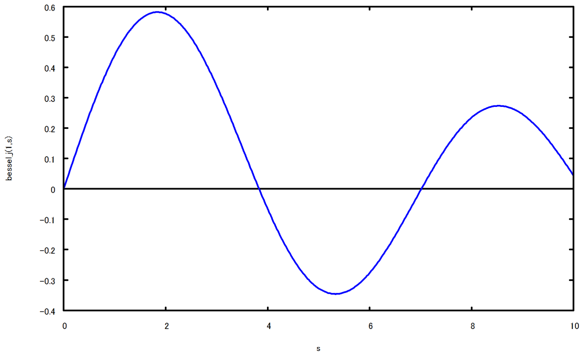


図 9.6.19: $q=0$ で $k\,R$ を求める図

上式が、時間：t、側壁の上下位置：z に無関係に成り立つためには、

$$\mathrm{bessel\_j}\left(1, k\,R\right)=0$$

上式の関係図は上図となり、横軸との最初の交点は、find_root 関数を使って、

$$k\,R=3.831705970207513, \quad k=\frac{3.831705916140149}{R}$$

このモードでの円振動周波数：ω は、

$$\omega=1.957474371770969\sqrt{\frac{g\tanh\left(\frac{3.831705916140149\,h}{R}\right)}{R}}$$

波高：η は、(9.6.27) 式に (9.6.31) 式を代入し、$z=0$ として、

$$\begin{aligned}\eta=&-\frac{\frac{d}{d\,t}\,\Phi}{g}\\ =&\mathrm{bessel\_j}\left(0, k\,r\right)\,\sin\left(\omega\,t\right)\,A\end{aligned}$$

以上から定常波の形は、上記 k を代入し、

$$\eta=\mathrm{bessel\_j}\left(0, \frac{3.831705916140149\,r}{R}\right)$$

上式の定常波の形は $q=0$ では z 軸対称となり、図示すると下記となる。

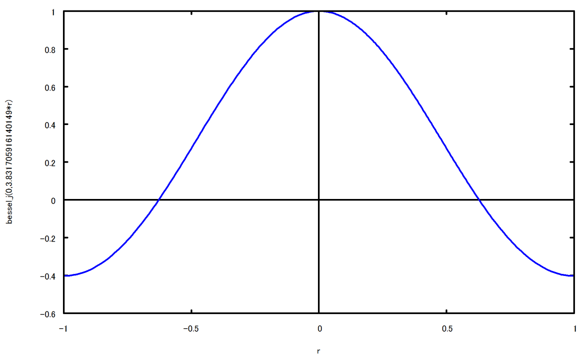


図 9.6.20: $q=0$ の x 軸上の定常波

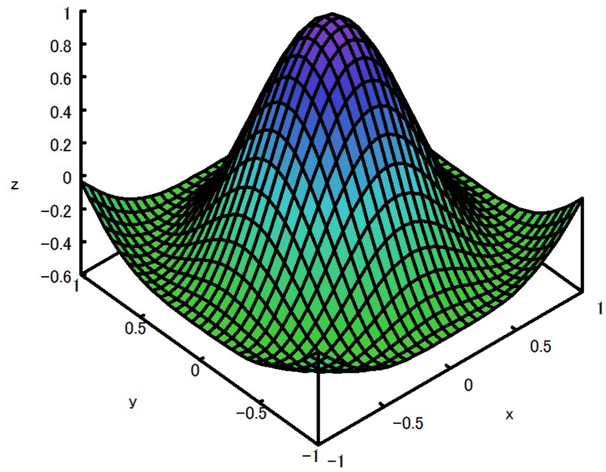


図 9.6.21: $q=0$ の定常波

```
Q1:q=1;
subst([Q1],PH11);
diff(%,r,1);
ev(%,diff);
subst([r=R],%);
KR11:bessel_j(0,k*R)-bessel_j(2,k*R)=0;
KR12:subst([Q1,k=s/R],%);
plot2d(lhs(KR12),[s,0,10]);
k*R=find_root(KR12,s,1,2);
K1:float(solve(%,k)[1]);
subst([K1],OM1);
sqrt(%);
subst([PH11],EQ2);
subst([Q1],%);
ev(%,diff);
ETQ2:subst([z=0],%);
ETQ21:subst([K1],%);
ETQ22:bessel_j(1,(1.841183779509771*r)/R)
 *cos(\theta);
subst([\theta=0,R=1],ETQ22);
plot2d(-%,[r,-1,1]);
subst([r=sqrt(x^2+y^2),cos(\theta)=x/
 sqrt(x^2+y^2),R=1],ETQ22);
plot3d(-%,[x,-1,1],[y,-1,1]);
k*R=find_root(KR12,s,4,6);
K1:float(solve(%,k)[1]);
subst([K1],OM1);
sqrt(%);
subst([PH11],EQ2);
subst([Q1],%);
```

```
ev(%,diff);
ETQ3:subst([z=0],%);
ETQ31:subst([K1],%);
ETQ32:bessel_j(1,(5.331442750797589*r)/R)
 *cos(\theta);
subst([\theta=0,R=1],ETQ32);
plot2d(%,[r,-1,1]);
subst([r=sqrt(x^2+y^2),cos(\theta)=x/
 sqrt(x^2+y^2),R=1],ETQ32);
plot3d(%,[x,-1,1],[y,-1,1]);
```

$q=1$ におけるモードのついて調べる。(9.6.30) 式に $q=1$ を代入し、

$$\Phi = \frac{\mathrm{bessel\_j}\left(1, k\, r\right)\, g}{\cosh\left(h\, k\right)\, \omega} \times \cos\left(\omega\, t\right)\, \cos\left(\theta\right)\, \cosh\left(k\, \left(z+h\right)\right)\, A \tag{9.6.32}$$

側壁：$r=R$ での境界条件：$\frac{d}{d\,r}\,\Phi=0$ から、

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\,r}\,\Phi =& \frac{g\, k \cosh\left(k\, \left(z+h\right)\right)\, A}{2\cosh\left(h\, k\right)\, \omega} \\ &\times \left(\mathrm{bessel\_j}\left(0, k\, r\right) - \mathrm{bessel\_j}\left(2, k\, r\right)\right) \\ &\times \cos\left(\omega\, t\right)\, \cos\left(\theta\right)\, = 0\end{aligned}$$

上式が、時間：t、側壁の上下位置：z に無関係に成り立つためには、

$$\mathrm{bessel\_j}\left(0, k\, R\right) - \mathrm{bessel\_j}\left(2, k\, R\right) = 0$$

上式の関係図は下図となり、横軸との最初の交点は、

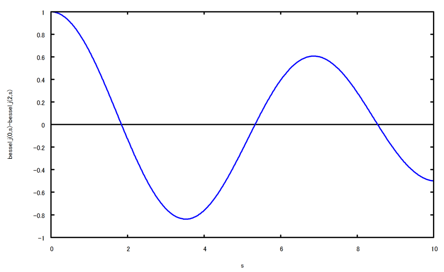


図 9.6.22: $q=1$ で $k\,R$ を求める図

find_root 関数を使って、

$$k\, R = 1.841183781340659, \quad k = \frac{1.841183779509771}{R}$$

このモードでの円振動周波数：ω は、

$$\omega = 1.356902273382196\sqrt{\frac{g\tanh\left(\frac{1.841183779509771\, h}{R}\right)}{R}}$$

波高：η は、(9.6.27) 式に (9.6.32) 式を代入し、$z=0$ として、

$$\begin{aligned}\eta =& -\frac{\frac{d}{d\,t}\,\Phi}{g} \\ =& \mathrm{bessel\_j}\left(1, k\, r\right)\, \sin\left(\omega\, t\right)\, \cos\left(\theta\right)\, A\end{aligned}$$

以上から定常波の形は、上記 k を代入し、

$$\eta = \mathrm{bessel\_j}\left(1, \frac{1.841183779509771\, r}{R}\right)\, \cos\left(\theta\right)$$

上式の定常波の形を図示すると下記となる。

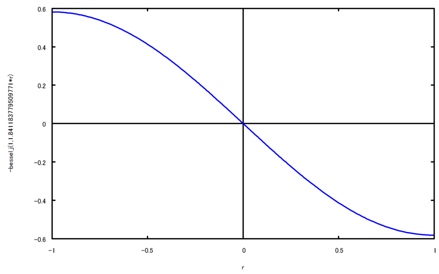


図 9.6.23: $q=1$、最初の x 軸上の定常波

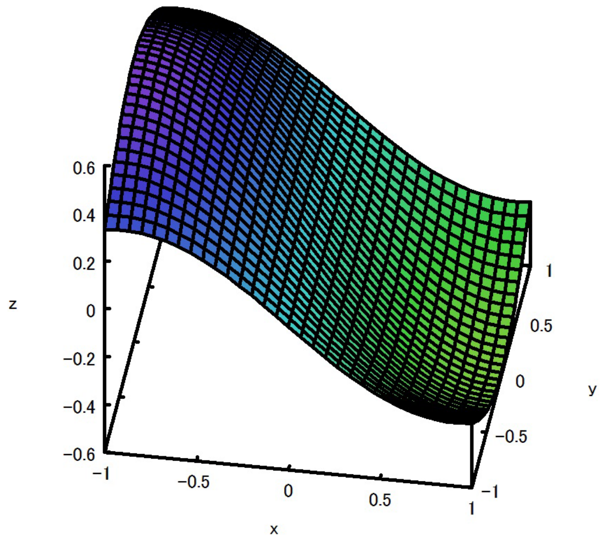


図 9.6.24: $q=1$、最初の定常波

```
#!/gnuplot
set xrange [-1:1]
set yrange [-1:1]
set isosamples 150,150
set contour base
set cntrparam levels incremental -10,0.02
 ,10
unset key
unset surface
set view map
splot besj1(1.841183779509771*sqrt(y**2
 +x**2))*x/sqrt(y**2+x**2)
#    EOF
```

横軸との 2 番目の交点は、find_root 関数を使って、

$$k\, R = 5.331442773525033, \quad k = \frac{5.331442750797589}{R}$$

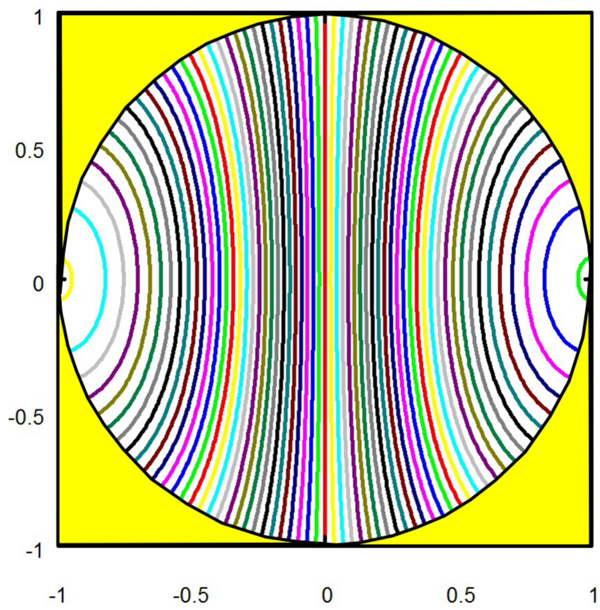


図 9.6.25: $q = 1$、最初の定常波波高分布

このモードでの円振動周波数：ω は、

$$\omega = 2.308991717351448\sqrt{\frac{g\tanh\left(\frac{5.331442750797589\,h}{R}\right)}{R}}$$

以上から定常波の形は、

$$\eta = \mathrm{bessel\_j}\left(1, \frac{5.331442750797589\,r}{R}\right)\cos\left(\theta\right)$$

上式の定常波の形を図示すると下記となる。

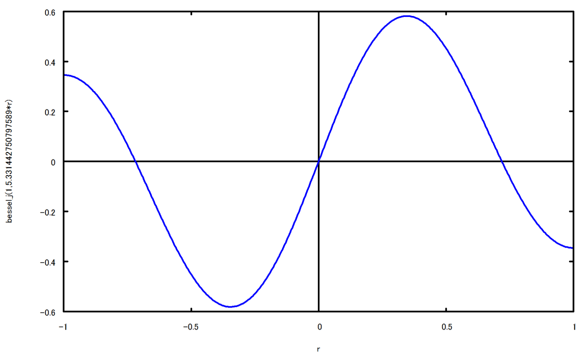


図 9.6.26: $q = 1$、二番目の x 軸上の定常波

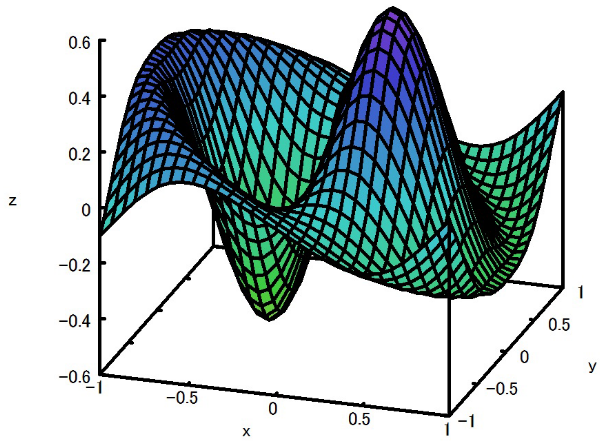


図 9.6.27: $q = 1$、二番目の定常波

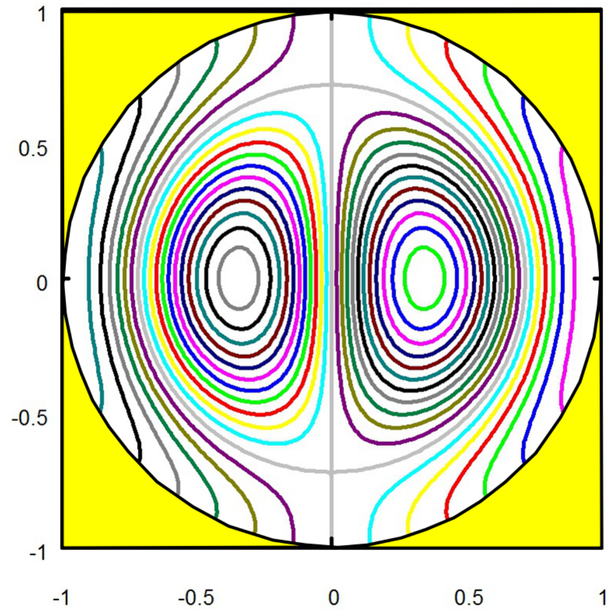


図 9.6.28: $q = 1$、二番目の定常波波高分布

```
#!/gnuplot
set xrange [-1:1]
set yrange [-1:1]
set isosamples 150,150
set contour base
set cntrparam levels incremental -10,0.05
 ,10
unset key
unset surface
set view map
splot besj1(5.331442750797589*sqrt(y**2+
 x**2))*x/sqrt(y**2+x**2)
#    EOF
```

例題 9.6.5　水平円筒タンクの液固有円周波数

中心軸を水平向に置いた円筒タンクの半径:a、長さ：l、水位：h としたときの、荷液の固有円周波数：ω_n は、MaCarty, J.L. と Stephens, D.G. により、実験的に求められ、下図から得られる[1]。

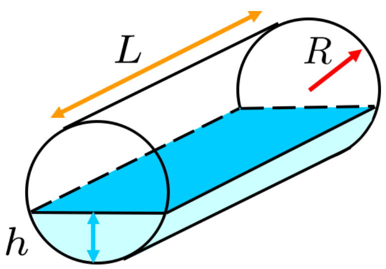


図 9.6.29: 水平円筒タンクの定常波

縦（長さ）方向の荷液の固有円周波数：ω_n は下図の γ_n から次式で得られる。

$$\omega_n = \gamma_n \sqrt{\frac{g \tanh\left(\frac{\pi\, h\, n}{L}\right)}{L}}$$

直方体内の荷液の固有円周波数では (9.6.6) 式から上式の $\gamma_n = \sqrt{\pi} \approx 1.77$ となっている。

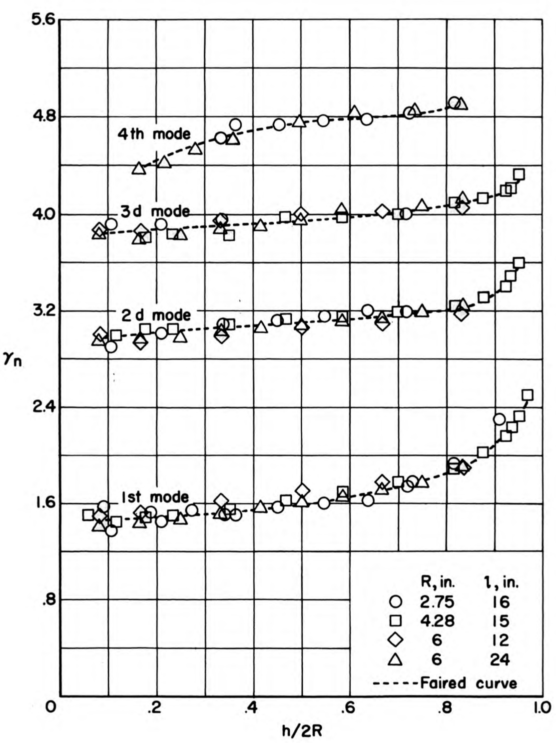


図 9.6.30: 水平円筒タンクの縦（長さ）方向の荷液の固有円周波数

横（半径）方向の荷液の固有円周波数：ω_n は下図の λ_n から次式で得られる。

$$\omega_n = \lambda_n \sqrt{\frac{g}{R}}$$

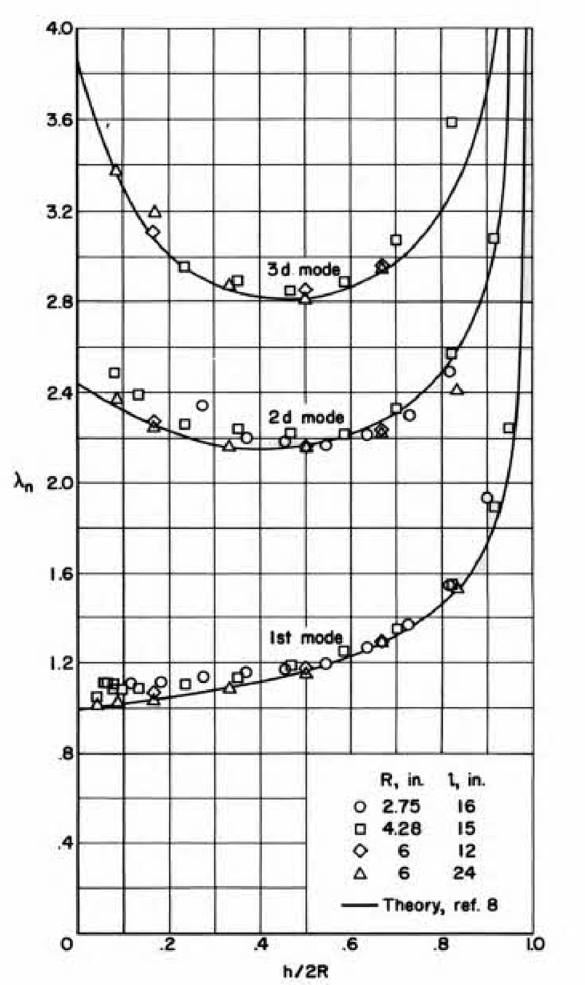


図 9.6.31: 水平円筒タンクの横（半径）方向の荷液の固有円周波数

[1] MaCarty, J.L. and Stephens, D.G. : Investigation of Natural Frequencies of Fluids in Spherical and Cylindrical Tanks, NASA Technical Note D-252, 1960

例題 9.6.6　球形タンクの液固有円周波数

球形タンクの半径:R、水位 : h としたときの、荷液の固有円周波数 : ω_n は、MaCarty, J.L. と Stephens, D.G. により、実験的に求められ、下図から得られる [1]。

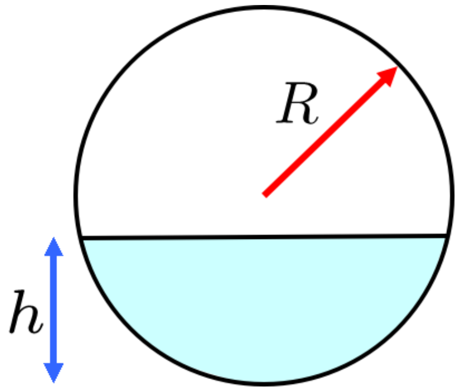


図 9.6.32: 球形タンクの定常波

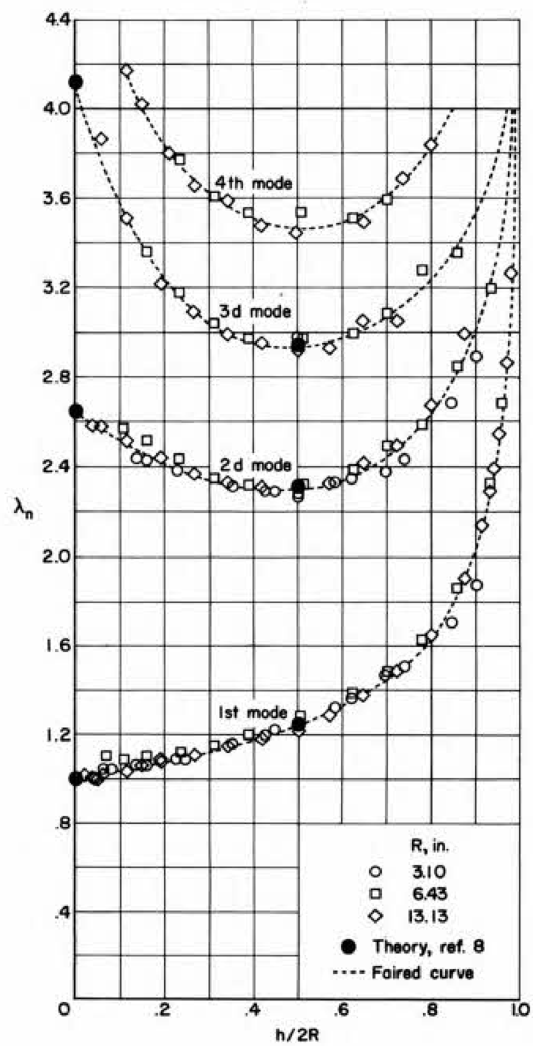


図 9.6.33: 球形タンクの荷液の固有円周波数

荷液の固有円周波数 : ω_n は下図の λ_n から次式で得られる。

$$\omega_n = \lambda_n \sqrt{\frac{g}{R}}$$

[1] MaCarty, J.L. and Stephens, D.G. : Investigation of Natural Frequencies of Fluids in Spherical and Cylindrical Tanks, NASA Technical Note D-252, 1960

9.7　着水衝撃

着水衝撃は速度を持った物体が水面に衝突したとき生じる現象で、着水時の飛行艇や波浪中動揺する船舶などにおいて発生する。

9.7.1　二次元着水衝撃 (Karman の理論)

質量：m、楔型（傾斜角：α）の二次元物体が速度：V_0 で、水面に垂直に突入し、物体の速度が v になったとする。楔型の接水幅：$2\,c$、水の密度：ρ とする。最初に Karman により、この問題は検討された [1]。ここでは物体の水面への突入で、水面は変化しないと仮定した。

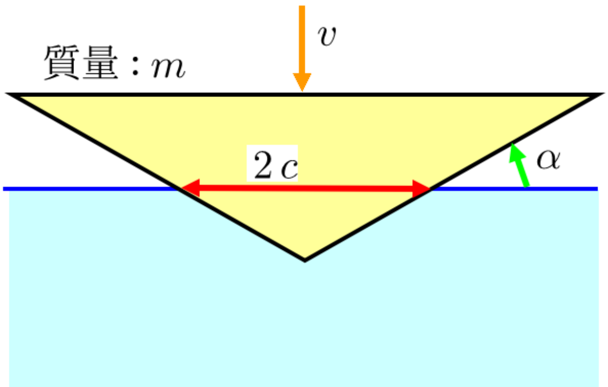


図 9.7.1: 着水衝撃 (Karman の理論)

```
/* Karman 二次元着水衝撃 */
kill(all);
load("vector");
depends(v,[t]);
depends(c,[t]);
MT1:m*V[0]=(m+m[V])*v;
V1:v=tan(\alpha)*diff(c,t,1);
T1:T=%pi*\rho*c^2*v^2/2;
T2:T=m[V]*v^2/2;
rhs(T1)=rhs(T2);
solve(%,m[V])[1];
MV1:lhs(%)=rhs(%)/2;
MT2:subst([MV1,V1],MT1);
DCT1:M1:solve(MT2,diff(c,t,1))[1];
DCT2:diff(%,t,1);
P1:P=-m*diff(v,t,1);
subst([V1],%);
ev(%,diff);
```

```
subst([DCT2],%);
P2:subst([DCT1],%);
P21:num(rhs(P2))/8/m^3/tan(\alpha)^2;
denom(rhs(P2))/8/m^3/tan(\alpha)^2;
factor(%);
P22:tan(alpha)*(%pi*c^2*rho/2/m+1)^3;
P3:P=P21/P22;
```

水面に突入前と突入後の運動量保存から、次式となる。ここで、m_V は流体による付加質量とする。

$$V_0\,m = v\,\left(m_V + m\right) \tag{9.7.1}$$

次に、物体速度 v と接水幅：c の関係は、

$$v = \tan\left(\alpha\right)\,\left(\frac{d}{d\,t}\,c\right) \tag{9.7.2}$$

一様流中の楕円柱まわり運動エネルギー：T は、「例題 5.3.5 一様流中の楕円柱まわりの流れ・作用力・運動エネルギー (Joukowski 変換)」の (5.3.30) 式、129 頁から次式となる。ここで、楕円の半軸：a, b、流速：V_x, V_y とする。

$$T = \frac{\pi\,\rho\,\left(a^2\,V_y^2 + b^2\,V_x^2\right)}{2}$$

上式から、半幅：c の平板が垂直方向に速度：v で動いたとき、まわりの流体に与える運動エネルギー：T は、

$$T = \frac{\pi\,c^2\,\rho\,v^2}{2}$$

流体に与えられる運動エネルギー：T を付加質量：m_V で表すと、

$$T = \frac{v^2\,m_V}{2}$$

以上から、付加質量：m_V は、

$$m_V = \pi\,c^2\,\rho \tag{9.7.3}$$

楔による付加質量は下半分であるから、上式の 1/2 となる。

$$m_V = \frac{\pi\,c^2\,\rho}{2} \tag{9.7.4}$$

(9.7.1) 式に (9.7.2) 式、(9.7.4) 式を代入すると、

$$V_0\,m = \tan\left(\alpha\right)\,\left(\frac{d}{d\,t}\,c\right)\,\left(\frac{\pi\,c^2\,\rho}{2} + m\right)$$

上式から、

$$\frac{d}{d\,t}\,c = \frac{2\,V_0\,m}{\pi\,\tan\left(\alpha\right)\,c^2\,\rho + 2\,\tan\left(\alpha\right)\,m} \tag{9.7.5}$$

上式を更に t で微分すると、

$$\frac{d^2}{d\,t^2}\,c = -\frac{4\,\pi\,V_0\,\tan\left(\alpha\right)\,c\,\left(\frac{d}{d\,t}\,c\right)\,m\,\rho}{\left(\pi\,\tan\left(\alpha\right)\,c^2\,\rho + 2\,\tan\left(\alpha\right)\,m\right)^2} \tag{9.7.6}$$

物体に作用する衝撃力：P は、運動結果から、

$$P = -m\,\left(\frac{d}{d\,t}\,v\right)$$

[1] von Karman, T. : The Impact on Seaplane Float During Landing, NACA Technical Note D-321, 1929

上式に、(9.7.2) 式を代入すると、

$$\begin{aligned}P &= -\left(\frac{d}{d\,t}\,\left(\tan\left(\alpha\right)\,\left(\frac{d}{d\,t}\,c\right)\right)\right)\,m\\&= -\tan\left(\alpha\right)\,\left(\frac{d^2}{d\,t^2}\,c\right)\,m\end{aligned}$$

上式に、(9.7.6) 式を代入すると、

$$P = \frac{4\,\pi\,V_0\,\tan\left(\alpha\right)^2\,c\,\left(\frac{d}{d\,t}\,c\right)\,m^2\,\rho}{\left(\pi\,\tan\left(\alpha\right)\,c^2\,\rho + 2\,\tan\left(\alpha\right)\,m\right)^2}$$

上式に、(9.7.5) 式を代入し、整理すると、衝撃力 : P は、

$$P = \frac{\pi\,V_0^2\,c\,\rho}{\tan\left(\alpha\right)\,\left(\frac{\pi\,c^2\,\rho}{2\,m} + 1\right)^3} \tag{9.7.7}$$

9.7.2　二次元着水衝撃 (Wagnern の理論)

質量：m、楔型（傾斜角：α）の二次元物体が速度：V_0 で、水面に垂直に突入し、物体の速度が v になったとする。Wagnern は楔が突入することによる水面の盛り上がりを考慮した[1]。ここで接水幅：$2\,c$、水の密度：ρ とする。

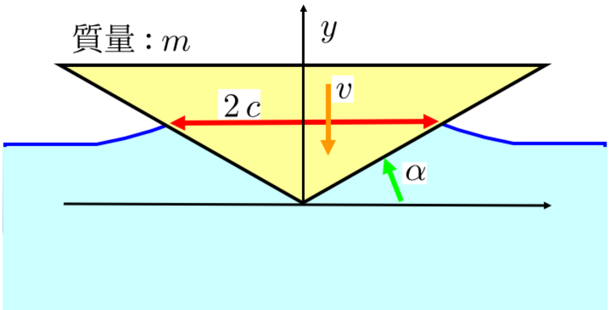


図 9.7.2: 着水衝撃 (Wagnern の理論)

```
/* Wagner 二次元着水衝撃 */
kill(all);
load("vector");
declare(z,complex);
declare(F,complex);
declare(\zeta,complex);
depends(v,[t]);
depends(c,[t]);
depends(u,[t]);
depends(p,[x]);
assume(c>0);
assume(x>c);
F1:F=(%e^(-%i*alpha)*z*(sqrt(1-(4*A^2)/z^2)
 +1)*U)/2-(%e^(%i*alpha)*z*(sqrt(1-(4*A^2)
 /z^2)-1)*R^2*U)/(2*A^2);
V2:v[X]-%i*v[Y]=diff(rhs(F1),z,1);
subst([z=x+%i*y,A=c/2,R=c/2,\alpha=%pi/2,
 y=0,U=v],V2);
factor(%);
VY1:subst([v[X]=0],%)*%i;
VY2:v[Y]=v/sqrt(1-c^2/x^2);
ET1:\eta='integrate(rhs(VY2),t,0,t);
U1:u=v/diff(c,t,1);
U2:solve(%,diff(c,t,1))[1];
ET3:\eta='integrate(u*rhs(VY2)/v,c,0,x);
B1:c/x=b;
B2:c=b*x;
```

[1] Wagner, H. : Uber Stoss-und Gleitvorgange an der Oberflache von Flussigkeiten, ZAMM 12, 1932

```
ET4:\eta='integrate(subst([B2],u*rhs(VY2)
 /v*x),b,0,1);
ev(%,integrate);
subst([\eta=x*tan(\alpha)],%);
U3:solve(%,u)[1];
```

楔が突入することによる水面の盛り上がり：η を水面の上下流速：v_Y から求める。この流速を平板の外端部の流速で近似するとする。一様流中の楕円柱まわり (外部流) の複素ポテンシャル：F は、「例題 5.3.5 一様流中の楕円柱まわりの流れ・作用力・運動エネルギー (Joukowski 変換)」の (5.3.24) 式、127 頁から次式となる。ここで、楕円に当たる流速：U とする。

$$F = \frac{e^{-i\,\alpha}\,z\,\left(\sqrt{1-\frac{4\,A^2}{z^2}}+1\right)\,U}{2} - \frac{e^{i\,\alpha}\,z\,\left(\sqrt{1-\frac{4\,A^2}{z^2}}-1\right)\,R^2\,U}{2\,A^2}$$

流速：v_X, v_Y は上式を z で微分して得られ、

$$\frac{d}{d\,z}\,F = v_X - i\,v_Y = -\frac{e^{i\,\alpha}\,\left(\sqrt{1-\frac{4\,A^2}{z^2}}-1\right)\,R^2\,U}{2\,A^2} - \frac{2\,e^{i\,\alpha}\,R^2\,U}{z^2\,\sqrt{1-\frac{4\,A^2}{z^2}}} + \frac{e^{-i\,\alpha}\,\left(\sqrt{1-\frac{4\,A^2}{z^2}}+1\right)\,U}{2} + \frac{2\,e^{-i\,\alpha}\,A^2\,U}{z^2\,\sqrt{1-\frac{4\,A^2}{z^2}}}$$

幅：$2\,c$ の平板に垂直な流れが当たった場合は、$z = x + i\,y,\ A = c/2,\ R = c/2,\ \alpha = \pi/2, U = v$ を代入し、

$$v_X - i\,v_Y = -\frac{i\,c^2\,v}{\sqrt{1-\frac{c^2}{x^2}}\,x^2} - \frac{i\,v\,\left(\sqrt{1-\frac{c^2}{x^2}}+1\right)}{2} - \frac{i\,v\,\left(\sqrt{1-\frac{c^2}{x^2}}-1\right)}{2}$$

以上から、水面の上下流速：v_Y は、

$$v_Y = \frac{v}{\sqrt{1-\frac{c^2}{x^2}}}, \quad (x > c)$$

水面の盛り上がり：η は、上式を積分し、

$$\eta = \int_0^t v_Y\,dt = \int_0^t \frac{v}{\sqrt{1-\frac{c^2}{x^2}}}\,dt \qquad (9.7.8)$$

下記に示す u を導入する。

$$u=\frac{v}{\frac{d}{d\,t}\,c},\quad \frac{d}{d\,t}\,c=\frac{v}{u} \tag{9.7.9}$$

盛り上がった水面は物体境界面でそれに沿った流れを生じるが、これは考慮しない。物体形状座標：(x,y) に $x=c,y=\eta$ となる点を考える。(9.7.8) 式を (9.7.9) 式で変換し、積分を実行すると、

$$\eta=u\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-\frac{c^2}{x^2}}}dc=\frac{\pi\,u\,x}{2} \tag{9.7.10}$$

楔型の形状を角度：α の直線とすると、

$$y=\tan(\alpha)\;x=\frac{\pi\,u\,x}{2}$$

以上から、

$$u=\frac{2\tan(\alpha)}{\pi} \tag{9.7.11}$$

```
MT1:m*V[0]=(m+m[V])*v;
T1:T=%pi*\rho*c^2*v^2/2;
T2:T=m[V]*v^2/2;
rhs(T1)=rhs(T2);
solve(%,m[V])[1];
MV1:lhs(%)=rhs(%)/2;
subst([MV1],MT1);
V1:solve(%,v)[1];
MT1:M[T]=m[V]*v;
MT2:subst([MV1],MT1);
P1:P=diff(rhs(MT2),t,1);
P2:subst([U2],%);
P3:P=-m*diff(v,t,1);
P4:solve(%,diff(v,t,1))[1];
subst([P4,V1],P2);
solve(%,P)[1];
factor(%);
P5:subst([U3],%);
P21:num(rhs(P5))/8/m^3;
denom(rhs(P5))/8/m^3;
factor(%);
P22:tan(alpha)*(%pi*c^2*rho/2/m+1)^3;
P6:P=P21/P22;
```

水面に突入前と突入後の運動量保存から、次式となる。ここで、m_V は流体による付加質量とする。

$$V_0\,m=v\,(m_V+m) \tag{9.7.12}$$

半幅：c の平板の付加質量の下半分：m_V は、(9.7.4) 式から、

$$m_V=\frac{\pi\,c^2\,\rho}{2} \tag{9.7.13}$$

(9.7.12) 式に (9.7.13) 式を代入し、

$$V_0\,m=\left(\frac{\pi\,c^2\,\rho}{2}+m\right)\,v$$

上式から、v を求めると、

$$v=\frac{2\,V_0\,m}{\pi\,c^2\,\rho+2\,m} \tag{9.7.14}$$

流体の運動量：M_T は、次式となる。

$$M_T=v\,m_V=\frac{\pi\,c^2\,\rho\,v}{2}$$

物体に作用する衝撃力：P は、上式の流体の運動量を時間：t で微分して得られ、(9.7.9) 式を代入し、

$$\begin{aligned}P=&\frac{\pi\,c^2\,\rho\,\left(\frac{d}{d\,t}\,v\right)}{2}+\pi\,c\,\left(\frac{d}{d\,t}\,c\right)\,\rho\,v\\=&\frac{\pi\,c^2\,\rho\,\left(\frac{d}{d\,t}\,v\right)}{2}+\frac{\pi\,c\,\rho\,v^2}{u}\end{aligned} \tag{9.7.15}$$

物体に作用する衝撃力：P は、運動結果から、

$$P=-m\,\left(\frac{d}{d\,t}\,v\right),\quad \frac{d}{d\,t}\,v=-\frac{P}{m}$$

上式を (9.7.15) 式に代入し、これに (9.7.14) 式を代入し、

$$P=\frac{4\,\pi\,V_0^2\,c\,m^2\,\rho}{(\pi\,c^2\,\rho+2\,m)^2\,u}-\frac{\pi\,c^2\,\rho\,P}{2\,m}$$

上式から、P を求め、(9.7.11) 式を代入し、整理すると、

$$\begin{aligned}P=&\frac{8\,\pi\,V_0^2\,c\,m^3\,\rho}{(\pi^3\,c^6\,\rho^3+6\,\pi^2\,c^4\,m\,\rho^2+12\,\pi\,c^2\,m^2\,\rho+8\,m^3)\,u}\\=&\frac{\pi^2\,V_0^2\,c\,\rho}{2\tan(\alpha)\,\left(\frac{\pi\,c^2\,\rho}{2\,m}+1\right)^3}\end{aligned} \tag{9.7.16}$$

```
forget(x>c);
assume(x<c);
Z1:z=\zeta+A^2/\zeta;
F2:F=%e^(-%i*\alpha)*U*\zeta
 +(%e^(%i*\alpha)*R^2*U)/\zeta;
Z2:\zeta=%e^(%i*\eta)*R;
X1:x=cos(\eta)*R+(cos(\eta)*A^2)/R;
Y1:y=sin(\eta)*R-(sin(\eta)*A^2)/R;
XY1:sin(\eta)^2+cos(\eta)^2=1;
R1:R=(b+a)/2;
A1:A=sqrt(a^2-b^2)/2;
subst([Z2,\alpha=%pi/2],F2);
PH1:\Phi=realpart(rhs(%));
```

```
XY2:solve(XY1,sin(\eta))[2];
solve(X1,cos(\eta))[1];
subst([%],XY2);
subst([%],PH1);
subst([R1,A1],%);
PH2:subst([b=0],%);
PH3:\Phi=-v*sqrt(c^2-x^2);
U1:v[x]='diff(\Phi,x,1);
-\rho*(v[x1]-v[x2])=(\Delta*p)*(\delta*t);
-\rho*diff(v[x],t,1)='diff(p,x,1);
subst([U1],%);
integrate(%,x);
P3:p=-\rho*'diff(\Phi,t,1);
subst([PH3],P3);
ev(%,diff);
expand(%);
```

物体に作用する衝撃力の圧力分布を求める。このため半幅：c の平板の表面流速を求める。「例題 5.3.5 一様流中の楕円柱まわりの流れ・作用力・運動エネルギー (Joukowski 変換)」から、写像関数：(5.3.16) 式、複素ポテンシャル：(5.3.17) 式、125 頁から次式となる。ここで、流速：U、楕円の半軸：a, b とする。

写像関数は、

$$z = x + i\,y = \zeta + \frac{A^2}{\zeta} \tag{9.7.17}$$

複素ポテンシャルは、

$$F = e^{-i\,\alpha}\,U\,\zeta + \frac{e^{i\,\alpha}\,R^2\,U}{\zeta} \tag{9.7.18}$$

物体表面では、下記であるから、

$$\zeta = e^{i\,\eta}\,R$$

上式を (9.7.17) 式に代入し、x, y を求めると、

$$\begin{aligned} x =& \cos(\eta)\;R + \frac{\cos(\eta)\;A^2}{R} \\ y =& \sin(\eta)\;R - \frac{\sin(\eta)\;A^2}{R} \end{aligned} \tag{9.7.19}$$

また、R, A と楕円の半軸：a, b の関係は、

$$R = \frac{b+a}{2}, \quad A = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{2} \tag{9.7.20}$$

$\alpha = \pi/2$ のときの複素ポテンシャルは、

$$F = i\,e^{-i\,\eta}\,R\,U - i\,e^{i\,\eta}\,R\,U$$

上式の実部は速度ポテンシャル：Φ であるから、

$$\Phi = 2\sin(\eta)\;R\,U \tag{9.7.21}$$

半幅：c の平板の表面流速を求めるためには、上式の速度ポテンシャル：Φ が x の関数である必要があるので、下記の関係から、

$$\sin(\eta) = \sqrt{1-\cos(\eta)^2}, \quad \cos(\eta) = \frac{x\,R}{R^2+A^2}$$

上式から、次式が得られる。

$$\sin(\eta) = \sqrt{1-\frac{x^2\,R^2}{\left(R^2+A^2\right)^2}}$$

上式を (9.7.21) 式に代入し、

$$\Phi = 2\,R\,\sqrt{1-\frac{x^2\,R^2}{\left(R^2+A^2\right)^2}}\,U$$

上式に (9.7.20) 式を代入し、平板とするには、$b=0$ として、

$$\begin{aligned} \Phi =& (b+a)\,\sqrt{1-\frac{(b+a)^2\,x^2}{4\left(\frac{(b+a)^2}{4}+\frac{a^2-b^2}{4}\right)^2}}\,U \\ =& a\,\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,U \end{aligned}$$

半幅：c の平板で端部へ行くほど流速が速くなるには、$b \to c,\ U \to -v$ とし、速度ポテンシャル：Φ、平板に沿った流速：u は、

$$\Phi = -v\,\sqrt{c^2-x^2}, \quad v_x = \frac{d}{d\,x}\,\Phi \tag{9.7.22}$$

急激な流速変化に基づく圧力は、運動量変化で近似でき、

$$-\rho\,\left(v_{x1}-v_{x2}\right) = \delta\,\Delta\,p\,t$$

上記から、

$$-\rho\,\left(\frac{d}{d\,t}\,v_x\right) = \frac{d}{d\,x}\,p \tag{9.7.23}$$

上式に (9.7.22) 式の流速：v_x を代入し、

$$-\left(\frac{d^2}{d\,t\,d\,x}\,\Phi\right)\,\rho = \frac{d}{d\,x}\,p$$

上式を x で積分し、

$$p = -\left(\frac{d}{d\,t}\,\Phi\right)\,\rho$$

上式に (9.7.22) 式を代入し、圧力分布：p が得られる。

$$p = \rho\,\left(\frac{d}{d\,t}\,v\right)\,\sqrt{c^2-x^2} + \frac{c\,\left(\frac{d}{d\,t}\,c\right)\,\rho\,v}{\sqrt{c^2-x^2}} \tag{9.7.24}$$

9.7.3　二次元着水衝撃の数値シミュレーション

前節の理論を数値解析することで、着水衝撃の性質を理解する。ここでは着水衝撃を直接受ける楔型の構造物とそれを支える支持材、後部構造物の全体の構造応答について検討する。そのモデルを下図に示す。楔型の構造物の質量：m_1、下方への運動：$y_1(t)$、後部構造物の質量：m_2、下方への運動：$y_2(t)$、楔型の構造物と後部構造物をつなぐ支持材のばね定数：k、バネによる力：F、浮力：B、衝撃力：P、楔の角度：α、水の密度：ρ、重力加速度：g とする。

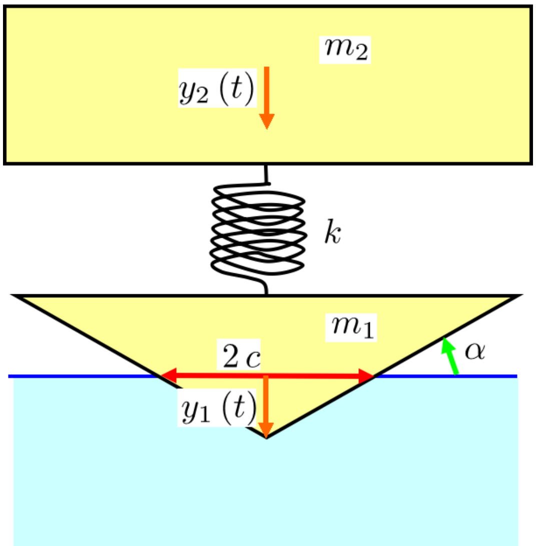


図 9.7.3: 着水衝撃の構造応答

```
/* Karman 二次元着水衝撃数値解  */
kill(all);
assume(m[1]>0);
assume(m[2]>0);
assume(k>0);
Y20:m[2]*diff(y[2](t),t,2)=m[2]*g
 -k*(y[2](t)-y[1](t));
Y10:m[1]*diff(y[1](t),t,2)=m[1]*g
 +k*(y[2](t)-y[1](t))-B-P;
F1:F=k*(y[2](t)-y[1](t));
B1:B=y[1](t)^2/tan(\alpha)*\rho*g;
P1:P=%pi*c(t)^2*\rho*diff(v(t),t,1)/2
 +%pi*c(t)*diff(c(t),t,1)*\rho*v(t);
subst([c(t)=y[1](t)/tan(\alpha),v(t)
 =diff(y[1](t),t,1)],P1);
P2:ev(%,diff);
```

```
solve(Y20,diff(y[2](t),t,2))[1];
Y22:expand(%);
subst([P2,B1],Y10);
Y12:solve(%,diff(y[1](t),t,2))[1];
Y13:solve(Y10,diff(y[1](t),t,2))[1];
```

楔型の構造物および後部構造物の運動方程式は以下となる。

$$m_2\left(\frac{d^2}{d\,t^2}\,y_2\left(t\right)\right)=m_2\,g-k\,\left(y_2\left(t\right)-y_1\left(t\right)\right) \tag{9.7.25}$$

$$m_1\left(\frac{d^2}{d\,t^2}\,y_1\left(t\right)\right)=-P-B+k\,\left(y_2\left(t\right)-y_1\left(t\right)\right)+m_1\,g \tag{9.7.26}$$

バネによる力：F は以下となる。

$$F=k\,\left(y_2\left(t\right)-y_1\left(t\right)\right) \tag{9.7.27}$$

浮力：B は以下となる。

$$B=\frac{g\,\rho\,y_1\left(t\right)^2}{\tan\left(\alpha\right)} \tag{9.7.28}$$

着水衝撃荷重：P として、Karman の理論を用いる。ここでは下記の (9.7.16) 式を用いる。

$$P=\frac{\pi\,\rho\,\mathrm{c}\left(t\right)^2\,\left(\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{v}\left(t\right)\right)}{2}+\pi\,\rho\,\mathrm{c}\left(t\right)\,\mathrm{v}\left(t\right)\,\left(\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{c}\left(t\right)\right)$$

ここで、$\mathrm{v}\left(t\right)=\frac{d}{d\,t}\,y_1\left(t\right)\,,\,\mathrm{c}\left(t\right)=\frac{y_1(t)}{\tan(\alpha)}$ であるから、上式は、

$$\begin{aligned}P=&\frac{\pi\,\rho\,y_1\left(t\right)\,\left(\frac{d}{d\,t}\,y_1\left(t\right)\right)\,\left(\frac{d}{d\,t}\,\frac{y_1(t)}{\tan(\alpha)}\right)}{\tan\left(\alpha\right)}\\&+\frac{\pi\,\rho\,y_1\left(t\right)^2\,\left(\frac{d^2}{d\,t^2}\,y_1\left(t\right)\right)}{2\tan\left(\alpha\right)^2}\\=&\frac{\pi\,\rho\,y_1\left(t\right)^2\,\left(\frac{d^2}{d\,t^2}\,y_1\left(t\right)\right)}{2\tan\left(\alpha\right)^2}+\frac{\pi\,\rho\,y_1\left(t\right)\,\left(\frac{d}{d\,t}\,y_1\left(t\right)\right)^2}{\tan\left(\alpha\right)^2}\end{aligned} \tag{9.7.29}$$

(9.7.26) 式に (9.7.27) 式、(9.7.28) 式、(9.7.29) 式を代入し、

$$\begin{aligned}m_1\left(\frac{d^2}{d\,t^2}\,y_1\left(t\right)\right)=&-\frac{\pi\,\rho\,y_1\left(t\right)^2\,\left(\frac{d^2}{d\,t^2}\,y_1\left(t\right)\right)}{2\tan\left(\alpha\right)^2}\\&-\frac{\pi\,\rho\,y_1\left(t\right)\,\left(\frac{d}{d\,t}\,y_1\left(t\right)\right)^2}{\tan\left(\alpha\right)^2}\\&+k\,\left(y_2\left(t\right)-y_1\left(t\right)\right)\\&-\frac{g\,\rho\,y_1\left(t\right)^2}{\tan\left(\alpha\right)}+m_1\,g\end{aligned} \tag{9.7.30}$$

(9.7.25) 式、(9.7.30) 式の運動方程式を整理すると、

$$\frac{d^2}{d\,t^2}\,y_2\,(t) = -\,\frac{k\,y_2\,(t)}{m_2} + \frac{k\,y_1\,(t)}{m_2} + g$$
$$\frac{d^2}{d\,t^2}\,y_1\,(t) = -\,\frac{2\,\pi\,\rho\,y_1\,(t)\,\left(\frac{d}{d\,t}\,y_1\,(t)\right)^2 - 2\tan(\alpha)^2\,k\,y_2\,(t) + 2\tan(\alpha)\,g\,\rho\,y_1\,(t)^2 + 2\tan(\alpha)^2\,k\,y_1\,(t) - 2\,m_1\tan(\alpha)^2\,g}{\pi\,\rho\,y_1\,(t)^2 + 2\,m_1\tan(\alpha)^2} \tag{9.7.31}$$

```
Y14:'diff(y[1](t),t,1)=y[D1](t);
Y13:subst(['diff(y[1](t),t,2)='diff(y[D1]
 (t),t,1),'diff(y[1](t),t,1)=y[D1](t)],Y12);
Y24:'diff(y[2](t),t,1)=y[D2](t);
Y23:subst(['diff(y[2](t),t,2)='diff(y[D2]
 (t),t,1),'diff(y[2](t),t,1)=y[D2](t)],Y22);
RK1:subst([y[1](t)=Y1,y[D1](t)=YD1,
 y[2](t)=Y2,y[D2](t)=YD2],Y14);
RK2:subst([y[1](t)=Y1,y[D1](t)=YD1,
 y[2](t)=Y2,y[D2](t)=YD2],Y13);
RK3:subst([y[1](t)=Y1,y[D1](t)=YD1,
 y[2](t)=Y2,y[D2](t)=YD2],Y24);
RK4:subst([y[1](t)=Y1,y[D1](t)=YD1,
 y[2](t)=Y2,y[D2](t)=YD2],Y23);
P4:subst(['diff(y[1](t),t,2)=YDD1,
 'diff(y[1](t),t,1)=YD1,y[1](t)=Y1],P2);
```

```
B4:subst([y[1](t)=Y1,y[D1](t)=YD1,
 y[2](t)=Y2,y[D2](t)=YD2],B1);
F4:subst([y[1](t)=Y1,y[D1](t)=YD1,
 y[2](t)=Y2,y[D2](t)=YD2],F1);
Y2A:subst([g=0,y[1](t)=a(t),
 y[2](t)=b(t)],Y20);
Y1A:subst([g=0,y[1](t)=a(t),
 y[2](t)=b(t),P=0,B=0],Y10);
atvalue(a(t),t=0,0);
atvalue(diff(a(t),t,1),t=0,0);
atvalue(b(t),t=0,Y[20]);
atvalue(diff(b(t),t,1),t=0,0);
desolve([Y2A,Y1A],[a(t),b(t)]);
(sqrt(m[2]+m[1])*sqrt(k)*T[W1])/(sqrt(m[1])
 *sqrt(m[2]))=2*%pi;
TW1:solve(%,T[W1])[1];
TW2:T[W0]=(2*%pi*sqrt(m[1]))/(sqrt(k));
```

上式を Runge-Kutta 法で解くため、下記のように書き換える。

$$\frac{d}{d\,t}\,y_1\,(t) = y_{D1}\,(t)$$
$$\frac{d}{d\,t}\,y_{D1}\,(t) = -\,\frac{2\,\pi\,\rho\,y_1\,(t)\,y_{D1}\,(t)^2 - 2\tan(\alpha)^2\,k\,y_2\,(t) + 2\tan(\alpha)\,g\,\rho\,y_1\,(t)^2 + 2\tan(\alpha)^2\,k\,y_1\,(t) - 2\,m_1\tan(\alpha)^2\,g}{\pi\,\rho\,y_1\,(t)^2 + 2\,m_1\tan(\alpha)^2}$$
$$\frac{d}{d\,t}\,y_2\,(t) = y_{D2}\,(t)$$
$$\frac{d}{d\,t}\,y_{D2}\,(t) = -\,\frac{k\,y_2\,(t)}{m_2} + \frac{k\,y_1\,(t)}{m_2} + g \tag{9.7.32}$$

楔型の構造物、支える支持材および後部構造物のみの固有周期：T_W を求める。この系のみの運動方程式は下記となる。ここで、$y_1\,(t) = \mathrm{a}\,(t)$, $y_2\,(t) = \mathrm{b}\,(t)$ と置き換えると、次式となる。

$$m_2\left(\frac{d^2}{d\,t^2}\,\mathrm{b}\,(t)\right) = -\,k\,\left(\mathrm{b}\,(t) - \mathrm{a}\,(t)\right)$$
$$m_1\left(\frac{d^2}{d\,t^2}\,\mathrm{a}\,(t)\right) = k\,\left(\mathrm{b}\,(t) - \mathrm{a}\,(t)\right) \tag{9.7.33}$$

上式を desolve で解くと、

$$\mathrm{a}\,(t) = \frac{m_2\,Y_{20}}{m_2 + m_1} - \frac{m_2\,Y_{20}\cos\left(\frac{\sqrt{m_2+m_1}\,\sqrt{k}\,t}{\sqrt{m_1}\,\sqrt{m_2}}\right)}{m_2 + m_1},$$
$$\mathrm{b}\,(t) = \frac{m_1\,Y_{20}\cos\left(\frac{\sqrt{m_2+m_1}\,\sqrt{k}\,t}{\sqrt{m_1}\,\sqrt{m_2}}\right)}{m_2 + m_1} + \frac{m_2\,Y_{20}}{m_2 + m_1}$$

上式から、固有周期：T_W、固有周波数：f_W は、

$$T_W = \frac{1}{f_W} = \frac{2\,\pi\,\sqrt{m_1}\,\sqrt{m_2}}{\sqrt{m_2 + m_1}\,\sqrt{k}} \tag{9.7.34}$$

```
CLIS:[\rho=102,g=9.8,m[1]=0.1,m[2]=0.9,
 \alpha=%pi/18,k=4000000000];
RK11:subst(CLIS,RK1);
RK21:subst(CLIS,RK2);
RK31:subst(CLIS,RK3);
RK41:subst(CLIS,RK4);
P5:subst(CLIS,P4);
B5:subst(CLIS,B4);
F5:subst(CLIS,F4);
Tmax:0.05;
dt:0.00001;
Nd:fix(Tmax/dt);
Ndd:Nd-1;
V0:4;
sol:rk([rhs(RK11),rhs(RK21),rhs(RK31),
 rhs(RK41)],[Y1,YD1,Y2,YD2],[0,V0,0,V0],
  [t,0,Tmax,dt]);
listY1:[[sol[1][1],sol[1][2]*10]];
for J:2 thru Nd do(listY1:append(listY1,
  [[sol[J][1],sol[J][2]*10]]));
listY11:[[sol[1][1],sol[1][3]*10]];
for J:2 thru Nd do(listY11:append(listY11,
  [[sol[J][1],sol[J][3]*10]]));
listY12:[[sol[1][1],float((sol[2][3]
 -sol[1][3])/dt)]];
for J:2 thru Ndd do(listY12:append(listY12,
  [[sol[J][1],float((sol[J+1][3]
 -sol[J-1][3])/2/dt)]]));
listY12:append(listY12, [[sol[Nd][1],
 float((sol[Nd][3]-sol[Nd-1][3])/dt)]]);
listY2:[[sol[1][1],sol[1][4]*10]];
for J:2 thru Nd do(listY2:append(listY2,
  [[sol[J][1],sol[J][4]*10]]));
listB:[[sol[1][1],float(subst([Y1=
 sol[1][2]],float(rhs(B5))))]];
for J:2 thru Nd do(listB:append(listB,
  [[sol[J][1],float(subst([Y1=sol[J][2]],
  rhs(B5)))]]));
listF:[[sol[1][1],float(subst([Y1=sol[1][2],
 Y2=sol[1][4]],rhs(F5)))]];
for J:2 thru Nd do(listF:append(listF,
  [[sol[J][1],float(subst([Y1=sol[J][2],
  Y2=sol[J][4]],rhs(F5)))]]));
listP:[[sol[1][1],float(subst([Y1=sol[1][2],
 YD1=sol[1][3],YDD1=listY12[1][2]],
 rhs(P5)))]];
for J:2 thru Nd do(listP:append(listP,
  [[sol[J][1],float(subst([Y1=sol[J][2],
  YD1=sol[J][3],YDD1=listY12[J][2]],
  rhs(P5)))]]));
plot2d([[discrete,listY1],
 [discrete,listY11],[discrete,listY12],
 [discrete,listY2]],[legend, "10Y1",
 "10YD1","YDD1","10Y2"],[style,
 [lines,2,1],[lines,2,2],[lines,2,3],
 [lines,2,4]]);
float(subst([CLIS],TW1));
1/%;
float(subst([CLIS],TW2));
1/%;
plot2d([[discrete,listB],
 [discrete,listF],[discrete,listP]],
 [legend, "B","F","P"],
 [style,[lines,2,1],[lines,2,2],[lines,2,3]
 ]);
write_data(listP,
 "m:listP-V4-M01-A18-K4000000000.cvs");
```

$\rho = 102kgs^2/m^4$, $g = 9.8m/s$, $m_1 = 0.1kgs/m$, $m_2 = 0.9kgs/m$ とし、バネ定数：k は剛体として $k = 4 \times 10^9 kg/m$ の高い数値とした。楔の傾斜角:$\alpha = 10deg$、水面への突入初期速度:$\frac{d}{dt}y_1(t) = y_{D1}(t) = 4m/s, \frac{d}{dt}y_2(t) = y_{D2}(t) = 4m/s$ の条件で上記の Runge-Kutta 法で求めた結果を下記に示す。

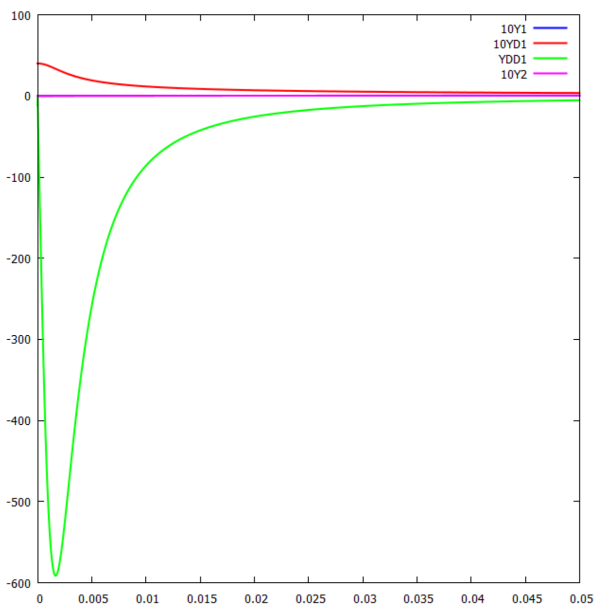


図 9.7.4: 楔の運動 $v = 4m/s, \alpha = 10deg$

非常に短時間の衝撃加速度が観察される。

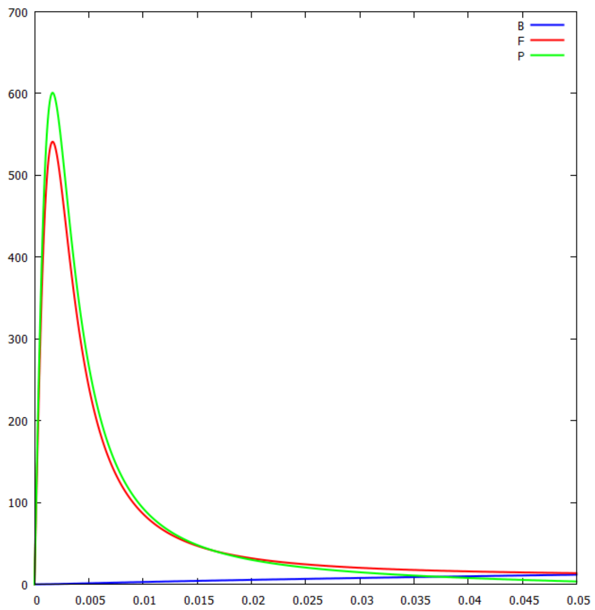


図 9.7.5: 衝撃荷重　$v = 4m/s, \alpha = 10deg$

バネによる力 : F、浮力 : B、衝撃力 : P から、非常に短時間の衝撃力 : P が観察され、それとほぼ同じバネによる力 : F が見られる。この衝撃が発生した時間では、浮力 : B は非常に小さく、衝撃問題への貢献はほとんど無い。

楔の傾斜角 : $\alpha = 45deg$、水面への突入初期速度 : $\frac{d}{dt}y_1(t) = y_{D1}(t) = 2m/s, \frac{d}{dt}y_2(t) = y_{D2}(t) = 2m/s$ の条件で上記の Runge-Kutta 法で求めた結果を下記に示す。

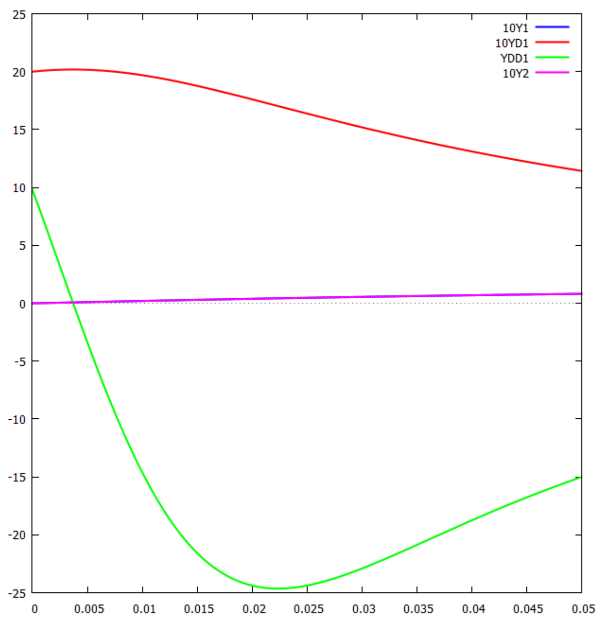


図 9.7.6: 楔の運動　$v = 2m/s, \alpha = 45deg$

楔の傾斜角を小さく、水面への突入初期速度を遅くしたことにより、小さく、緩やかな衝撃加速度となっている。

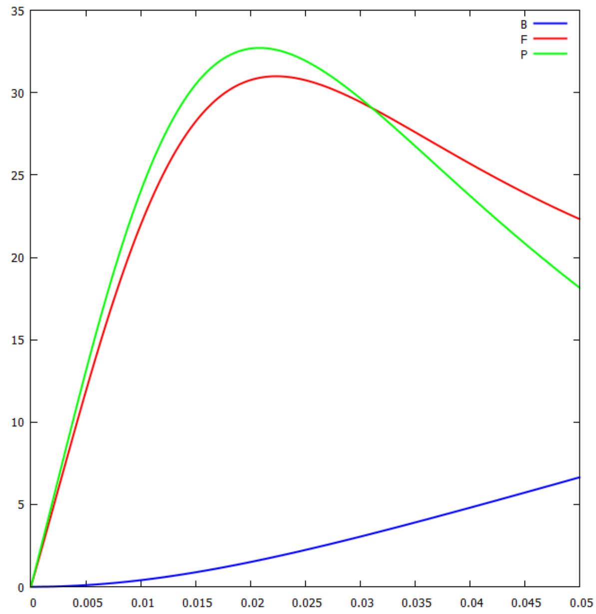


図 9.7.7: 衝撃荷重　$v = 2m/s, \alpha = 45deg$

バネによる力 : F、浮力 : B、衝撃力 : P から、衝撃力 : P、バネによる力 : F は緩やかな変化となり、浮力 : B は比較的に小さい。

(1) 楔角度の影響

```
/* Karman 二次元着水衝撃数値解　Plot */
kill(all);
list:read_list("
 M:\listP-V4-M01-A36-K4000000000.cvs");
for J:1 thru 5000 do(
if J=1 then listP1:[[list[1],list[2]]]
 else listP1:append(listP1, [[list[2*J-1],
  list[2*J]]]));
list:read_list("
 M:\listP-V4-M01-A18-K4000000000.cvs");
for J:1 thru 5000 do(
if J=1 then listP2:[[list[1],list[2]]]
 else listP2:append(listP2, [[list[2*J-1],
  list[2*J]]]));
list:read_list("
 M:\listP-V4-M01-A9-K4000000000.cvs");
for J:1 thru 5000 do(
if J=1 then listP3:[[list[1],list[2]]]
 else listP3:append(listP3, [[list[2*J-1],
  list[2*J]]]));
```

```
list:read_list("
 M:\listP-V4-M01-A6-K4000000000.cvs");
for J:1 thru 5000 do(
if J=1 then listP4:[[list[1],list[2]]]
 else listP4:append(listP4, [[list[2*J-1],
  list[2*J]]]));
list:read_list("
 M:\listP-V4-M01-A4-K4000000000.cvs");
for J:1 thru 5000 do(
if J=1 then listP5:[[list[1],list[2]]]
 else listP5:append(listP5, [[list[2*J-1],
  list[2*J]]]));
plot2d([[discrete,listP1],[discrete,listP2]
 ,[discrete,listP3],[discrete,listP4]
 ,[discrete,listP5]],[legend, "5deg","10deg"
 ,"20deg","30deg","45deg"],[style,
 [lines,2,1],[lines,2,2],[lines,2,3],
 [lines,2.4],[lines,2,5]]);
```

楔角度の影響について調べる。$\rho = 102kgs^2/m^4$, $g = 9.8m/s$, $m_1 = 0.1kgs/m$, $m_2 = 0.9kgs/m$ とし、バネ定数：k は剛体として $k = 4 \times 10^9 kg/m$ の高い数値とした。水面への突入初期速度：$\frac{d}{dt} y_1(t) = y_{D1}(t) = 4m/s, \frac{d}{dt} y_2(t) = y_{D2}(t) = 4m/s$ の条件で、楔の傾斜角として、$\alpha = 5deg, 10deg, 20deg, 30deg, 45deg$ と変える。上記の Runge-Kutta 法で求めた結果を下記に示す。

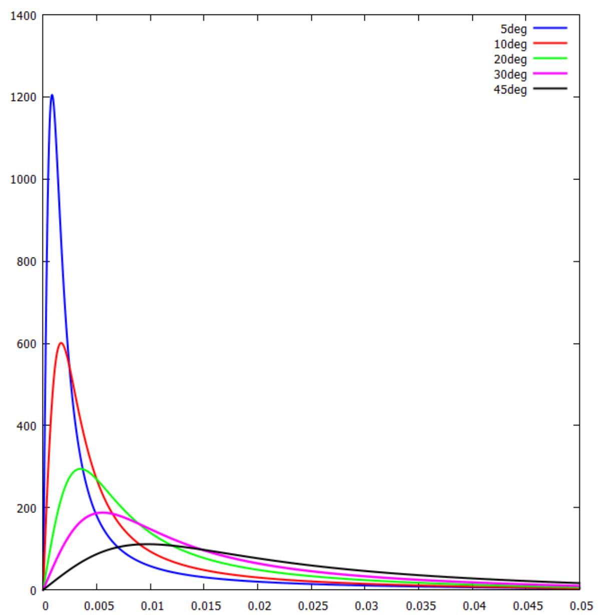


図 9.7.8: 衝撃荷重　楔角度の影響

上図の結果から、楔角度が小さくなると衝撃圧のピーク値は急激に上昇している。

(2) 突入速度の影響

```
list:read_list("
 M:\listP-V1-M01-A18-K4000000000.cvs");
for J:1 thru 5000 do(
if J=1 then listP1:[[list[1],list[2]]]
 else listP1:append(listP1, [[list[2*J-1],
 list[2*J]]]));
list:read_list("
 M:\listP-V2-M01-A18-K4000000000.cvs");
for J:1 thru 5000 do(
if J=1 then listP2:[[list[1],list[2]]]
 else listP2:append(listP2, [[list[2*J-1],
 list[2*J]]]));
list:read_list("
 M:\listP-V4-M01-A18-K4000000000.cvs");
for J:1 thru 5000 do(
if J=1 then listP3:[[list[1],list[2]]]
 else listP3:append(listP3, [[list[2*J-1]
  ,list[2*J]]]));
list:read_list("
 M:\listP-V8-M01-A18-K4000000000.cvs");
for J:1 thru 5000 do(
if J=1 then listP4:[[list[1],list[2]]]
 else listP4:append(listP4, [[list[2*J-1],
 list[2*J]]]));
plot2d([[discrete,listP1],[discrete,listP2]
 ,[discrete,listP3],[discrete,listP4]]
 ,[legend, "1m/s","2m/s","4m/s",
 "8m/s"],[style,[lines,2,1],[lines,2,2],
 [lines,2,3],[lines,2.4]]);
plot2d([[discrete,listP1],[discrete,listP2]
 ,[discrete,listP3],[discrete,listP4]]
 ,[logy],[legend, "1m/s","2m/s","4m/s"
 ,"8m/s"],[style,[lines,2,1],[lines,2,2],
 [lines,2,3],[lines,2.4]]);
```

突入速度の影響について調べる。$\rho = 102kgs^2/m^4$, $g = 9.8m/s$, $m_1 = 0.1kgs/m$, $m_2 = 0.9kgs/m$ とし、バネ定数:k は剛体として $k = 4 \times 10^9 kg/m$ の高い数値とした。楔の傾斜角として、$\alpha = 10deg$ の条件で、水面への突入初期速度:$\frac{d}{dt} y_1(t) = \frac{d}{dt} y_2(t) = 1m/s, 2m/s, 4m/s, 8m/s$ と変える。上記の Runge-Kutta 法で求めた結果を下記に示す。

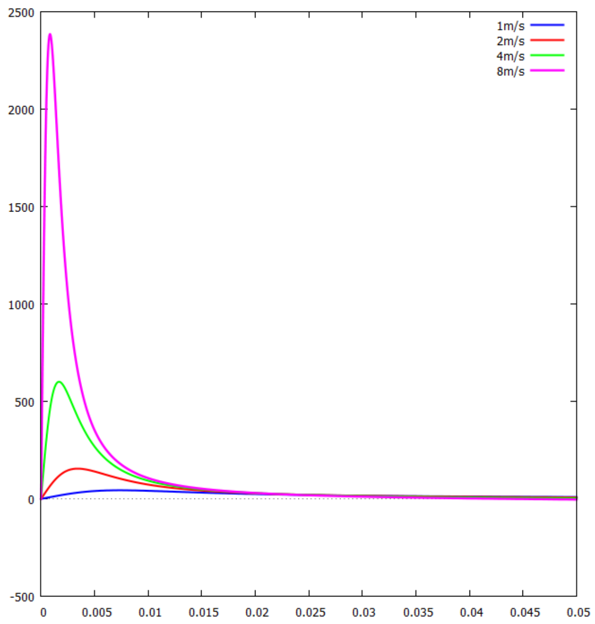


図 9.7.9: 衝撃荷重　突入速度の影響

上図の結果から、水面への突入初期速度が大きくなると衝撃圧のピーク値は急激に上昇している。

(3) 構造の剛性の影響

```
list:read_list("
 M:\listP-V4-M01-A18-K4000000000.cvs");
for J:1 thru 5000 do(
if J=1 then listP1:[[list[1],list[2]]]
 else listP1:append(listP1, [[list[2*J-1],
 list[2*J]]]));
list:read_list("
 M:\listP-V4-M01-A18-K400000.cvs");
for J:1 thru 5000 do(
if J=1 then listP2:[[list[1],list[2]]]
 else listP2:append(listP2, [[list[2*J-1],
 list[2*J]]]));
list:read_list("
 M:\listP-V4-M01-A18-K40000.cvs");
for J:1 thru 5000 do(
if J=1 then listP3:[[list[1],list[2]]]
 else listP3:append(listP3, [[list[2*J-1],
 list[2*J]]]));
plot2d([[discrete,listP1],[discrete,listP2]
 ,[discrete,listP3]],[legend, "Stiff",
 "f=318Hz","f=100Hz"], [style,
 [lines,2,1],[lines,2,2],[lines,2,3]]);
```

衝撃力を直接受ける表面の構造と飛行艇や船舶などの大きな構造物とは一般的にバネで結合されている構造体と考えられる。このような構造体に衝撃力が作用したとき、構造体はどのような応答をするかを認識しておく必要がある。

バネ定数:k の影響について調べる。$\rho = 102 kgs^2/m^4$, $g = 9.8m/s$, $m_1 = 0.1kgs/m$, $m_2 = 0.9kgs/m$、楔の傾斜角：$\alpha = 10deg$、の条件で、水面への突入初期速度：$\frac{d}{dt} y_1(t) = \frac{d}{dt} y_2(t) = 4m/s$ の条件で、バネ定数：k として、$k = 4 \times 10^9 kg/m$, $4 \times 10^5 kg/m$, $4 \times 10^{4kg/m}$ と変える。このとき (9.7.34) 式から固有周波数はそれぞれ約 $31,830Hz$, $318Hz$, $100Hz$ となる。このときの上記の Runge-Kutta 法で求めた結果を下記に示す。ここで構造の振動問題では、接水振動での付加質量を用いるべきであるが、ここでは衝撃問題の付加質量を使用しており、正確ではない。

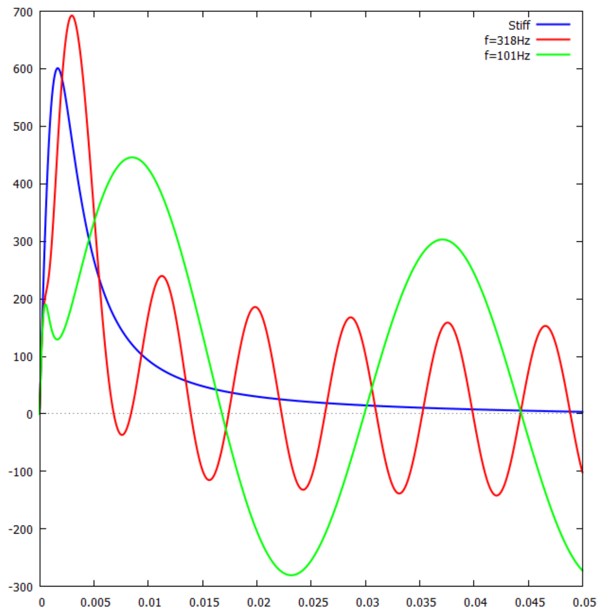


図 9.7.10: 衝撃荷重　構造の剛性の影響

上記の結果は正確な解析ではないが、着水衝撃で、構造強度を検討する場合、この構造応答も重要な部分を占めていることがわかる。

付 録A　数学公式

A.1　時間微分

まず、時間に関係しているベクトルの微分[1] について、位置ベクトル：$\overrightarrow{r}$、時間：t とすると、速度：$\overrightarrow{V}$ は、

$$\overrightarrow{V} = \frac{d}{d\,t}\overrightarrow{r}$$

変数：α が時間と位置により変化するとすると、

$$\alpha = f(\overrightarrow{r},\, t)$$

上式を時間：t で微分すると、

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\,t}\alpha =& \frac{\partial}{\partial\,t}\alpha + \frac{d}{d\,t}\overrightarrow{r}\frac{\partial}{\partial\,\overrightarrow{r}}f(\overrightarrow{r},\, t)\\ =& \frac{\partial}{\partial\,t}\alpha + \overrightarrow{V}\frac{\partial}{\partial\,\overrightarrow{r}}f(\overrightarrow{r},\, t)\\ =& \frac{\partial}{\partial\,t}\alpha + \overrightarrow{V}\frac{\partial}{\partial\,\overrightarrow{r}}\alpha\end{aligned}$$

上式から、

$$\frac{d}{d\,t}\alpha = \frac{\partial}{\partial\,t}\alpha + \overrightarrow{V}\nabla\alpha \tag{A.1.1}$$

いま、(A.1.1) 式で $\alpha \rightarrow \overrightarrow{A}$ と置くと、

$$\frac{d}{d\,t}\overrightarrow{A} = \frac{\partial}{\partial\,t}\overrightarrow{A} + \overrightarrow{V}\nabla\overrightarrow{A} \tag{A.1.2}$$

[1]Maxima を使った物理数学基礎演習ノート、4.3.5 ∇ を使った演算　時間微分

A.2　Gauss の定理

下記の Gauss の定理を証明する。

$$\iint P\overrightarrow{n}dS = \iiint grad(P)dV \tag{A.2.1}$$

または、

$$\sum_i \iint P\overrightarrow{n}dS = \iiint div(P)dV \tag{A.2.2}$$

上式でその一要素である xyz 座標の $i = 1$ の場合の x 方向について記述すると、$n_x dS$ はその投影面積 $dydz$ となり、Gauss の定理は、

$$\iint Pdydz = \iiint \frac{\partial}{\partial\,x}Pdxdydz$$

上記右辺は、x について部分積分すると、

$$\int \frac{\partial}{\partial\,x}Pdx = P$$

であるから、下記となり、

$$\iiint \frac{\partial}{\partial\,x}Pdxdydz = \iint Pdydz$$

Gauss の定理が証明できた。

ベクトル表記すると、ガウスの定理[2] は下記のようにも記述できる。

$$\iiint_V \nabla\overrightarrow{P}dV = \iint_S \overrightarrow{P}\,\overrightarrow{n}\,dS \tag{A.2.3}$$

[2]Maxima を使った物理数学基礎演習ノート、4.4.2 ガウスの定理

A.3　Green の定理

下記の Green の定理を証明する。

$$\iiint \left(Q\,\nabla^2 R+\mathrm{grad}\,(Q)\cdot\mathrm{grad}\,(R)\right)dV = \iint \left(Q\,\frac{\partial}{\partial\,n}\,R\right)dS \tag{A.3.1}$$

$$\iiint \left(Q\,\nabla^2 R-R\,\nabla^2 Q\right)dV = \iint \left(Q\,\frac{\partial}{\partial\,n}\,R-R\,\frac{\partial}{\partial\,n}\,Q\right)dS \tag{A.3.2}$$

Gauss の定理で下記の置き換えを行う。

$$P=Q\mathrm{grad}\,(R)$$

上式を Gauss の定理：(A.2.1) 式に代入すると、

$$\iiint div\,(Q\mathrm{grad}\,(R))\,dV=\sum_i \iint Q\,\mathrm{grad}\,(R)\,\vec{n}\,dS \tag{A.3.3}$$

```
/* Green の定理 */
kill(all);
load("vect")
depends(Q,[x,y,z]);
depends(R,[x,y,z]);
div(Q*grad(R));
express(%);
DIVGRA1:'div(Q*'grad(R))=ev(%,diff);
QG1:grad(Q);
express(%);
ev(%,diff);
QG2:transpose(%);
RG1:grad(R);
express(%);
ev(%,diff);
RG2:transpose(%);
'grad(Q).'grad(R)=QG2.RG2;
```

(A.3.3) 式の左辺の被積分関数は下記のように展開できる。

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\,(Q\,\mathrm{grad}\,(R)) &= Q\left(\frac{d^2}{d\,z^2}\,R\right)+\left(\frac{d}{d\,z}\,Q\right)\left(\frac{d}{d\,z}\,R\right)\\ &+Q\left(\frac{d^2}{d\,y^2}\,R\right)+\left(\frac{d}{d\,y}\,Q\right)\left(\frac{d}{d\,y}\,R\right)\\ &+Q\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,R\right)+\left(\frac{d}{d\,x}\,Q\right)\left(\frac{d}{d\,x}\,R\right)\end{aligned}$$

ここで、

$$\mathrm{grad}\,(Q)=\begin{pmatrix}\frac{d}{d\,x}\,Q\\ \frac{d}{d\,y}\,Q\\ \frac{d}{d\,z}\,Q\end{pmatrix}$$

上記から、

$$\begin{aligned}&\mathrm{grad}\,(Q)\cdot\mathrm{grad}\,(R)\\ &=\left(\frac{d}{d\,z}\,Q\right)\left(\frac{d}{d\,z}\,R\right)+\left(\frac{d}{d\,y}\,Q\right)\left(\frac{d}{d\,y}\,R\right)\\ &+\left(\frac{d}{d\,x}\,Q\right)\left(\frac{d}{d\,x}\,R\right)\end{aligned}$$

以上から、

$$\mathrm{div}\,(Q\,\mathrm{grad}\,(R))=Q\,\nabla^2 R+\mathrm{grad}\,(Q)\cdot\mathrm{grad}\,(R)$$

(A.3.3) 式の右辺の被積分関数で、

$$\frac{\partial}{\partial\,n}\equiv\vec{n}\cdot\mathrm{grad}$$

上記の二式から下記が得られ、(A.3.1) 式が証明された。

$$\iiint \left(Q\,\nabla^2 R+\mathrm{grad}\,(Q)\cdot\mathrm{grad}\,(R)\right)dV = \iint \left(Q\,\frac{\partial}{\partial\,n}\,R\right)dS$$

上式で $Q\to R,\ R\to Q$ に置き換えると、

$$\iiint \left(R\,\nabla^2 Q+\mathrm{grad}\,(R)\cdot\mathrm{grad}\,(Q)\right)dV = \iint \left(R\,\frac{\partial}{\partial\,n}\,Q\right)dS$$

上記の二式から、(A.3.2) 式が証明された。

$$\iiint \left(Q\,\nabla^2 R-R\,\nabla^2 Q\right)dV = \iint \left(Q\,\frac{\partial}{\partial\,n}\,R-R\,\frac{\partial}{\partial\,n}\,Q\right)dS$$

A.4 Transport Theorem

下記の Transpor Theorem の定理を証明する。

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\,t}\iiint_V f(\overrightarrow{x},t)dV =& \iiint_V \frac{\partial}{\partial\,t}\,f(\overrightarrow{x},t)dV \\ &+ \iint_S f(\overrightarrow{x},t)\,U_n\,dS\end{aligned} \tag{A.4.1}$$

下記の一般的な体積分：$I(t)$ とする。

$$I(t) = \iiint_V f(\overrightarrow{x},t)dV \tag{A.4.2}$$

Δt 変化したときの上記の変化 ΔI は、

$$\begin{aligned}\Delta I =& I(t+\Delta t) - I(t) \\ =& \iiint_{V+\Delta V} f(\overrightarrow{x},t+\Delta t)dV - \iiint_V f(\overrightarrow{x},t)dV\end{aligned}$$

ここで関数：$f(\overrightarrow{x},t)$ が Δt 変化したとき、下記のように書ける。

$$f(\overrightarrow{x},t+\Delta t) = f(\overrightarrow{x},t) + \Delta t\,\frac{\partial}{\partial\,t}\,f(\overrightarrow{x},t)$$

以上から、ΔI は下記のように書ける。

$$\begin{aligned}\Delta I =& \iiint_{V+\Delta V} f(\overrightarrow{x},t+\Delta t)dV - \iiint_V f(\overrightarrow{x},t)dV \\ =& \Delta t\iiint_V \frac{\partial}{\partial\,t}\,f(\overrightarrow{x},t) + \iiint_{\Delta V} f(\overrightarrow{x},t)dV\end{aligned}$$

ところで、体積分の変化分：ΔV は境界が $U_n\Delta t$ で変化し、面積：S であるから、下記のように書ける。

$$\Delta V = U_n \Delta t S$$

ここで Δt が十分小さいと、体積分の変化分の幅は小さく、この部分では境界：S の $f(\overrightarrow{x},t)$ と変わらないと考えられるから、

$$\Delta I = \Delta t\iiint_V \frac{\partial}{\partial\,t}\,f(\overrightarrow{x},t) + \iint_S U_n \Delta t\,f(\overrightarrow{x},t)dS$$

以上から、$\Delta t \to 0$ としたとき、

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\,t}\iiint_V f(\overrightarrow{x},t)dV =& \iiint_V \frac{\partial}{\partial\,t}\,f(\overrightarrow{x},t)dV \\ &+ \iint_S f(\overrightarrow{x},t)\,U_n\,dS\end{aligned}$$

上記で証明できた。

A.5 渦無し流れの運動エネルギー

領域における流体の総運動エネルギー：T は、速度ポッテンシャル：Φ とすると、

$$T = \iiint \frac{\rho}{2}\,v^2 dV = \frac{\rho}{2}\iiint \left(\mathrm{grad}\,(\Phi)\right)^2 dV \tag{A.5.1}$$

Green の定理：(A.3.1) 式で $Q \to \Phi$, $R \to \Phi$ に置き換えると下記が得られる。

$$\begin{aligned}&\iiint \left(\Phi\,\nabla^2\Phi + \mathrm{grad}\,(\Phi)\cdot\mathrm{grad}\,(\Phi)\right) dV \\ &\qquad = \iint \left(\Phi\,\frac{\partial}{\partial\,n}\,\Phi\right) dS\end{aligned}$$

ここで、渦無し流れでは質量保存の方程式：(2.9.5) 式、(33 ページ) から、

$$\frac{d^2}{d\,z^2}\,\Phi + \frac{d^2}{d\,y^2}\,\Phi + \frac{d^2}{d\,x^2}\,\Phi = 0$$

上式を代入すると、

$$\begin{aligned}&\iiint \left(\mathrm{grad}\,(\Phi)\right)^2 dV \\ &\qquad = \iint \left(\Phi\,\frac{\partial}{\partial\,n}\,\Phi\right) dS\end{aligned}$$

上式を (A.5.1) 式に代入すると、

$$T = \iiint \frac{\rho}{2}\,v^2 dV = \frac{\rho}{2}\iint \left(\Phi\,\frac{\partial}{\partial\,n}\,\Phi\right) dS \tag{A.5.2}$$

二次元の場合、運動エネルギーは次式で得られる。

$$\begin{aligned}T =& \frac{\rho}{2}\iint \left(\frac{d}{d\,y}\,\Phi\right)^2 + \left(\frac{d}{d\,x}\,\Phi\right)^2 dxdy \\ =& -\frac{\rho}{2}\oint \Phi\frac{d}{d\,n}\,\Phi\,d\ell\end{aligned} \tag{A.5.3}$$

ここで $\frac{d}{d\,n}\,\Phi = -\frac{d}{d\,s}\,\Psi$ から、

$$T = \frac{\rho}{2}\oint \Phi d\,\Psi \tag{A.5.4}$$

A.6 Parseval の等式

```
kill(all);
/* Parseval の等式  */
f(x)=a[0]/2+sum(a[n]*cos(n*%pi*x/L)+b[n]
 *sin(n*%pi*x/L),n,1,inf);
AN1:a[n]=1/L*integrate(f(x)*cos(n*%pi*x/L),
 x,-L,L);
AN0:subst([n=0],%);
BN1:b[n]=1/L*integrate(f(x)*sin(n*%pi*x/L),
 x,-L,L);
AN01:rhs(AN0)*L=lhs(AN0)*L;
AN11:rhs(AN1)*L=lhs(AN1)*L;
BN11:rhs(BN1)*L=lhs(BN1)*L;
integrate(f(x)^2,x,-L,L)=integrate(f(x)*
 a[0]/2,x,-L,L)+sum(integrate(f(x)*a[n]
 *cos(n*%pi*x/L),x,-L,L)+integrate(f(x)
 *b[n]*sin(n*%pi*x/L),x,-L,L),n,1,inf);
subst([AN01,AN11,BN11],%);
```

下記にフーリエ変換の式を示す。

$$\mathrm{f}\left(x\right)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\left(\frac{\pi\,n\,x}{L}\right)+a_n\cos\left(\frac{\pi\,n\,x}{L}\right)\right)+\frac{a_0}{2}$$

ここで、
$$a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\mathrm{f}\left(x\right)\cos\left(\frac{\pi\,n\,x}{L}\right)dx$$
$$a_0=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\mathrm{f}\left(x\right)dx$$
$$b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\mathrm{f}\left(x\right)\sin\left(\frac{\pi\,n\,x}{L}\right)dx \tag{A.6.1}$$

上式に $f(x)$ を掛け、積分すると、

$$\begin{aligned}\int_{-L}^{L}\mathrm{f}\left(x\right)^2dx=&\left(\sum_{n=1}^{\infty}b_n\int_{-L}^{L}\mathrm{f}\left(x\right)\sin\left(\frac{\pi\,n\,x}{L}\right)dx\right.\\&\left.+a_n\int_{-L}^{L}\mathrm{f}\left(x\right)\cos\left(\frac{\pi\,n\,x}{L}\right)dx\right)\\&+\frac{a_0\int_{-L}^{L}\mathrm{f}\left(x\right)dx}{2}\end{aligned}$$

上式を整理すると、次式となり、 Parseval の等式が証明された。

$$\int_{-L}^{L}\mathrm{f}\left(x\right)^2dx=\left(\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2\,L+a_n^2\,L\right)+\frac{a_0^2\,L}{2}$$

```
F(k)=1/(2*%pi)*integrate(f(x)*%e^(-%i*k*x),
 x,-inf,inf);
subst([k=-k],%);
FK1:rhs(%)*2*%pi=lhs(%)*2*%pi;
f(x)=integrate(F(k)*%e^(%i*k*x),k,-inf,
inf);
integrate(f(x)^2,x,-inf,inf)=integrate(
 integrate(f(x)*F(k)*%e^(%i*k*x),x,-inf,
 inf),k,-inf,inf);
subst([FK1],%);
f(y)='integrate(F[1]*cos(u*y)+F[2]*sin(u*y)
 ,u,-inf,inf);
subst([cos(u*y)=(%e^(%i*u*y)+%e^(-%i*u*y))
 /2,sin(u*y)=(%e^(%i*u*y)-%e^(-%i*u*y))/2]
 ,%);
expand(%);
assume(F[1]^2>0);
assume(F[2]^2>0);
'integrate(f(y)^2,y,-inf,inf)=2*%pi*
 'integrate((F[1]/2)^2*2+(F[2]/2)^2*2,u,
 minf,inf);
```

上式のフーリエ積分への拡張は、次式のフーリエ積分の関係式から、

$$\mathrm{f}\left(x\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{F}\left(k\right)\,e^{i\,k\,x}dk \tag{A.6.2}$$

ここで、

$$\mathrm{F}\left(k\right)=\frac{1}{2\,\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\,k\,x}\,\mathrm{f}\left(x\right)dx$$
$$\mathrm{F}\left(-k\right)=\frac{1}{2\,\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\,k\,x}\,\mathrm{f}\left(x\right)dx$$

(A.6.2) 式に $f(x)$ を掛け、積分すると、

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{f}\left(x\right)^2dx=&\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{F}\left(k\right)\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\,k\,x}\,\mathrm{f}\left(x\right)dxdk\\=&2\,\pi\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{F}\left(-k\right)\,\mathrm{F}\left(k\right)dk\end{aligned}$$

以上の関係から、次の関係が得られる。

$$\begin{aligned}\mathrm{f}\left(y\right)=&\int_{-\infty}^{\infty}F_2\sin\left(u\,y\right)+F_1\cos\left(u\,y\right)du\\=&\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F_1\,\left(e^{i\,u\,y}+e^{-i\,u\,y}\right)}{2}\\&+\frac{F_2\,\left(e^{i\,u\,y}-e^{-i\,u\,y}\right)}{2}du\\=&\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F_2\,e^{i\,u\,y}}{2}+\frac{F_1\,e^{i\,u\,y}}{2}\\&-\frac{F_2\,e^{-i\,u\,y}}{2}+\frac{F_1\,e^{-i\,u\,y}}{2}du\end{aligned} \tag{A.6.3}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{f}\left(y\right)^2dy=2\,\pi\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{F_2^2}{2}+\frac{F_1^2}{2}\right)du \tag{A.6.4}$$

A.7 Riemann-Lebesgue の定理

```
/* Riemann-Lebesgue の定理 */
kill(all);
assume(n>0);
DF1:f(x)*%e^(-%i*n*x);
F1:F='integrate(DF1,x,a,b);
X1:x=t+%pi/n;
X11:expand(solve(%,t)[1]);
DF2:subst([X1],DF1);
F2:F='integrate(DF2,t,a-%pi/n,b-%pi/n);
F1+F2;
F11:F='integrate(DF1,x,a,b-%pi/n)
 +'integrate(DF1,x,b-%pi/n,b);
F21:F='integrate(DF2,t,a-%pi/n,a)
 +'integrate(DF2,t,a,b-%pi/n);
F11+F21;
F12:first(rhs(F11));
F13:last(rhs(F11));
F22:first(rhs(F21));
F23:subst([t=x],last(rhs(F21)));
F13+F23;
integrate(%e^(-%i*n*x)*f(x)-%e^(-%i*n*x)
 *f(x+%pi/n),x,a,b-%pi/n);
F123:factor(%);
2*F=F12+F123+F22;
```

フーリエ係数を定義した下記の式で、$n \to \infty$ とした時、係数：F が零に収束することを証明する。

$$F=\int_{a}^{b} e^{-i\,n\,x}\,\mathrm{f}\left(x\right)dx \tag{A.7.1}$$

上式を下記の変換を行うと、

$$x=t+\frac{\pi}{n} \tag{A.7.2}$$

(A.7.1) 式は下記となる。

$$F=-\int_{a-\frac{\pi}{n}}^{b-\frac{\pi}{n}} e^{-i\,n\,t}\,\mathrm{f}\left(t+\frac{\pi}{n}\right)dt \tag{A.7.3}$$

(A.7.1) 式と (A.7.3) 式の和は、

$$2\,F=\int_{a}^{b} e^{-i\,n\,x}\,\mathrm{f}\left(x\right)dx-\int_{a-\frac{\pi}{n}}^{b-\frac{\pi}{n}} e^{-i\,n\,t}\,\mathrm{f}\left(t+\frac{\pi}{n}\right)dt$$

(A.7.1) 式の積分範囲を下記のように分割する。

$$F=\int_{b-\frac{\pi}{n}}^{b} e^{-i\,n\,x}\,\mathrm{f}\left(x\right)dx+\int_{a}^{b-\frac{\pi}{n}} e^{-i\,n\,x}\,\mathrm{f}\left(x\right)dx \tag{A.7.4}$$

また、(A.7.3) 式の積分範囲を下記のように分割する。

$$\begin{aligned}F=&-\int_{a-\frac{\pi}{n}}^{a} e^{-i\,n\,t}\,\mathrm{f}\left(t+\frac{\pi}{n}\right)dt\\&-\int_{a}^{b-\frac{\pi}{n}} e^{-i\,n\,t}\,\mathrm{f}\left(t+\frac{\pi}{n}\right)dt\end{aligned} \tag{A.7.5}$$

(A.7.4) 式と (A.7.5) 式の和は、

$$\begin{aligned}2\,F=&\int_{b-\frac{\pi}{n}}^{b} e^{-i\,n\,x}\,\mathrm{f}\left(x\right)dx+\int_{a}^{b-\frac{\pi}{n}} e^{-i\,n\,x}\,\mathrm{f}\left(x\right)dx\\&-\int_{a-\frac{\pi}{n}}^{a} e^{-i\,n\,t}\,\mathrm{f}\left(t+\frac{\pi}{n}\right)dt\\&-\int_{a}^{b-\frac{\pi}{n}} e^{-i\,n\,t}\,\mathrm{f}\left(t+\frac{\pi}{n}\right)dt\end{aligned} \tag{A.7.6}$$

上式を整理すると、

$$\begin{aligned}2\,F=&-\int_{a}^{\frac{b\,n-\pi}{n}} e^{-i\,n\,x}\left(\mathrm{f}\left(\frac{n\,x+\pi}{n}\right)-\mathrm{f}\left(x\right)\right)dx\\&+\int_{b-\frac{\pi}{n}}^{b} e^{-i\,n\,x}\,\mathrm{f}\left(x\right)dx\\&-\int_{a-\frac{\pi}{n}}^{a} e^{-i\,n\,t}\,\mathrm{f}\left(t+\frac{\pi}{n}\right)dt\end{aligned} \tag{A.7.7}$$

上式で $n \to \infty$ とすると、上式右辺第一項は被積分関数：$\mathrm{f}\left(\frac{n\,x+\pi}{n}\right)-\mathrm{f}\left(x\right) \to 0$ となり積分結果は零となる。上式右辺第二、三項は積分範囲が零となり積分結果は零となる。以上からフーリエ係数：F は $F \to 0$ となる。

A.8 非常に多くの正弦波を積分範囲内に有する積分法 (Kelvin の方法)

```
/* ケルビン積分法  */
kill(all);
assume(m>0);
DIF0:s(k)*%e^(%i*f(k));
SF0:'integrate(DIF0,k,minf,inf);
KF1:k=d+\xi;
F0:f(k);
subst([KF1],F0);
F0=taylor(%,\xi,0,3);
F1:f(k)=f(d)+'diff(f(d),\xi,1)*xi
 + 'diff( f(d),\xi,2)*xi^2/2
 +'diff(f(d),\xi,3)*xi^3/6;
F11:'diff(f(d),xi,1)=0;
subst([F11],F1);
F2:lhs(%)=rhs(%)-first(rhs(%));
DIF1:s(d)*%e^(%i*first(rhs(F2)))
 *%e^(%i*last(rhs(F2)));
SF0=s(d)*%e^(%i*last(rhs(F2)))*integrate(
 %e^(%i*first(rhs(F2))),\xi,minf,inf);
SF1:%;
SFB1:'integrate(%e^(%i*m^2*\xi^2),\xi,minf
 ,inf);
SFB11:SFB1=ev(%,integrate);
%e^(%i*%pi/4);
SF2:SF0=%e^('%i*(f(d)+%pi/4))*s(d)
 *sqrt(%pi) /sqrt(abs('diff(f(d),xi,2))/2);
DXT1:\delta='diff(f(d),k,3)/
 sqrt(abs('diff(f(d),k,2))^3);
```

いま、次式のような積分式を考える。$\mathrm{s}\left(k\right)$ は緩やかに変化する関数で、$e^{i\,\mathrm{f}(k)}$ は三角関数で積分範囲内で非常に多くの周期を有している。このような積分の近似的法がケルビンにより下記のように示されている [1]。

$$u=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\,\mathrm{f}(k)}\,\mathrm{s}\left(k\right)dk \tag{A.8.1}$$

変数：k を次式と置き換える。ここで ξ は小さい値とする。

$$k=\xi+d \tag{A.8.2}$$

$\mathrm{f}\left(k\right)$ を上式を使って、Taylot 展開し、

$$\begin{aligned}\mathrm{f}\left(k\right)=&\frac{\left(\frac{d^3}{d\,\xi^3}\,\mathrm{f}\left(d\right)\right)\xi^3}{6}+\frac{\left(\frac{d^2}{d\,\xi^2}\,\mathrm{f}\left(d\right)\right)\xi^2}{2}\\&+\left(\frac{d}{d\,\xi}\,\mathrm{f}\left(d\right)\right)\xi+\mathrm{f}\left(d\right)\end{aligned} \tag{A.8.3}$$

次式が成り立つ d をとる。

$$\frac{d}{d\,\xi}\,\mathrm{f}\left(d\right)=0 \tag{A.8.4}$$

このとき、(A.8.3) 式は ξ の二次の項までとすると、

$$\mathrm{f}\left(k\right)=\frac{\left(\frac{d^2}{d\,\xi^2}\,\mathrm{f}\left(d\right)\right)\xi^2}{2}+\mathrm{f}\left(d\right) \tag{A.8.5}$$

上式を (A.8.1) 式に代入すると、$\mathrm{s}\left(k\right)\rightarrow\mathrm{s}\left(d\right)$ となり、

$$u=e^{i\,\mathrm{f}(d)}\,\mathrm{s}\left(d\right)\int_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{i\left(\frac{d^2}{d\,\xi^2}\,\mathrm{f}(d)\right)\xi^2}{2}}d\xi$$

上式の無限積分は Maxima で得られ、次式となり、

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\,m^2\,\xi^2}d\xi=-\frac{\sqrt{\pi}\,e^{\frac{i\,\pi}{4}}}{m}$$

上式を代入し、(A.8.1) 式は、

$$\begin{aligned}u=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\,\mathrm{f}(k)}\,\mathrm{s}\left(k\right)dk=&\frac{\sqrt{2}\,\sqrt{\pi}\,e^{i\left(\mathrm{f}(d)+\frac{1}{4}\,\pi\right)}\,\mathrm{s}\left(d\right)}{\sqrt{\left|\frac{d^2}{d\,\xi^2}\,\mathrm{f}\left(d\right)\right|}}\\=&\frac{\sqrt{2}\,\sqrt{\pi}\,\left(\frac{i}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)e^{i\,\mathrm{f}(d)}\,\mathrm{s}\left(d\right)}{\sqrt{\left|\frac{d^2}{d\,\xi^2}\,\mathrm{f}\left(d\right)\right|}}\end{aligned} \tag{A.8.6}$$

(A.8.3) 式の展開式を (A.8.5) 式で近似するので、次式が小さいという条件となる。

$$\delta=\frac{\frac{d^3}{d\,k^3}\,\mathrm{f}\left(d\right)}{\left|\frac{d^2}{d\,k^2}\,\mathrm{f}\left(d\right)\right|^{\frac{3}{2}}} \tag{A.8.7}$$

[1] Sir Horance Lamb, Hydrodynamics sixth edition [11]), P.395 241.

A.9 数学公式

A.9.1 Hunkel 関数

Hunkel 関数の定義は、森口　繁一他：岩波数学公式 3　特殊函数、岩波書店　2002 [34), P.145 から、

第一種 Hunkel 関数

$$\mathrm{hankel\_1}\left(v,r\right)=i\,\mathrm{bessel\_y}\left(v,r\right)+\mathrm{bessel\_j}\left(v,r\right) \tag{A.9.1}$$

第二種 Hunkel 関数

$$\mathrm{hankel\_2}\left(v,r\right)=\mathrm{bessel\_j}\left(v,r\right)-i\,\mathrm{bessel\_y}\left(v,r\right) \tag{A.9.2}$$

A.9.2 Hunkel の漸近級数初項

Bessel 関数は、r が大きいとき ($|r|\to\infty$)、Hunkel の漸近級数初項で近似できる。森口　繁一他：岩波数学公式 3　特殊函数、岩波書店　2002 [34), P.154 から、
第一種 Bessel 関数

$$\begin{aligned}&\mathrm{bessel\_j}\left(v,r\right)\\&\quad=\sqrt{\frac{2}{\pi\,r}}\cos\left(r-\frac{\pi\,\left(2\,v+1\right)}{4}\right)\end{aligned} \tag{A.9.3}$$

複素表記では、

$$\mathrm{bessel\_j}\left(0,z\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi\,z}}\,e^{i\,z}\,i^{-\frac{1}{2}} \tag{A.9.4}$$

第二種 Bessel 関数

$$\mathrm{bessel\_y}\left(v,r\right)=-\frac{\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi\,(2\,v+1)}{4}-r\right)}{\sqrt{\pi}\,\sqrt{r}} \tag{A.9.5}$$

第一種 Hunkel 関数

$$\mathrm{hankel\_1}\left(v,r\right)=\frac{\sqrt{2}\,e^{r-\frac{\pi\,(2\,v+1)}{4}}}{\sqrt{\pi}\,\sqrt{r}} \tag{A.9.6}$$

第二種 Hunkel 関数

$$\mathrm{hankel\_2}\left(v,r\right)=\frac{\sqrt{2}\,e^{\frac{\pi\,(2\,v+1)}{4}-r}}{\sqrt{\pi}\,\sqrt{r}} \tag{A.9.7}$$

A.9.3 第一種 Bessel 関数の積分表示

森口　繁一他：岩波数学公式 3　特殊函数、岩波書店　2002 [34), P.178 から、

$$\begin{aligned}&\mathrm{bessel\_j}\left(0,\sqrt{a^2-b^2}\right)\\&\quad=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}e^{b\cos(\theta)}\cos\left(a\sin\left(\theta\right)\right)d\theta\end{aligned} \tag{A.9.8}$$

A.9.4 Hunkel 関数の積分表示 (Heine の積分表示)

森口　繁一他：岩波数学公式 3　特殊函数、岩波書店　2002 [34), P.183 から、

第一種 Hunkel 関数

$$\begin{aligned}&\mathrm{hankel\_1}\left(v,z\right)\\&\quad=-\frac{2\,i}{\pi}\,e^{-\frac{i\,\pi\,v}{2}}\int_0^{\infty}e^{i\,z\cosh(t)}\cosh\left(t\,v\right)dt\\&\qquad|\Re v|<1,\quad\pm\Im z>0\end{aligned} \tag{A.9.9}$$

第二種 Hunkel 関数

$$\begin{aligned}&\mathrm{hankel\_2}\left(v,z\right)\\&\quad=\frac{2\,i}{\pi}\,e^{\frac{i\,\pi\,v}{2}}\int_0^{\infty}e^{-i\,z\cosh(t)}\cosh\left(t\,v\right)dt\\&\qquad|\Re v|<1,\quad\pm\Im z>0\end{aligned} \tag{A.9.10}$$

A.9.5 Lipschitz の積分公式

森口　繁一他：岩波数学公式 3　特殊函数、岩波書店　2002 [34), P.198 から、

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\\&\quad=\int_0^{\infty}\mathrm{bessel\_j}\left(0,b\,x\right)\,e^{-a\,x}dx\quad\Re\left(a\pm\,i\,b\right)>0\end{aligned} \tag{A.9.11}$$

A.9.6 $\frac{b}{a^2+b^2}$ の積分表示

森口　繁一他：岩波数学公式 1　微分積分・平面曲線、岩波書店　2003 [32), P.231 から、

$$\frac{b}{a^2+b^2}=\int_0^{\infty}e^{-a\,x}\sin\left(b\,x\right)\,dx\quad a>0 \tag{A.9.12}$$

A.9.7 $\frac{a}{a^2+b^2}$ の積分表示

森口　繁一他：岩波数学公式 1　微分積分・平面曲線、岩波書店　2003 [32), P.231 から、

$$\frac{a}{a^2+b^2}=\int_0^{\infty}e^{-a\,x}\cos\left(b\,x\right)\,dx\quad a>0 \tag{A.9.13}$$

付 録B　座標変換

B.1　円柱座標系への変換

円柱座標系の質量保存の方程式や運動方程式等を求める。xyz 座標系の流速を u, v, w、円柱座標系の流速を v_r, v_θ, v_z とする。下記に円柱座標系を示す。

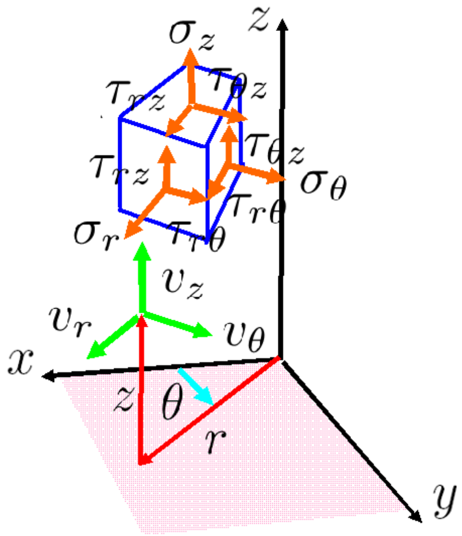


図 B.1.1: 円柱座標系

```
kill(all);
load("vect")
depends(r,[t,x,y]);
depends(\theta,[t,x,y]);
depends([z],[t]);
XR:x=r*cos(\theta);
YR:y=r*sin(\theta);
LXR1:diff(XR,x,1);
LYR1:diff(YR,x,1);
solve([LXR1,LYR1],['diff(r,x,1),
 'diff(\theta,x,1)]);
LXYR1:trigrat(%)[1];
LXR2:diff(XR,y,1);
LYR2:diff(YR,y,1);
solve([LXR2,LYR2],['diff(r,y,1),
 'diff(\theta,y,1)]);
```

```
LXYR2:trigrat(%)[1];
TR:matrix([cos(\theta),sin(\theta),0],
 [-sin(\theta),cos(\theta),0],[0,0,1]);
TR1:transpose(TR);
```

xyz 座標と円柱座標の関係とその関係式は、

$$\begin{gathered} x = r\cos(\theta), \quad y = r\sin(\theta) \\ \frac{d}{d\,x}\,r = \cos(\theta), \frac{d}{d\,x}\,\theta = -\frac{\sin(\theta)}{r}, \\ \frac{d}{d\,y}\,r = \sin(\theta), \frac{d}{d\,y}\,\theta = \frac{\cos(\theta)}{r} \end{gathered} \tag{B.1.1}$$

xyz 座標から円柱座標に変換する変換マトリックス：TR は、

$$TR = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{B.1.2}$$

```
ERTZ:matrix([e[r]],[e[\theta]],[e[z]]);
EXYZ:matrix([e[x]],[e[y]],[e[z]]);
ERTZ1:TR.EXYZ;
VXYZ:matrix([u],[v],[w]);
VRTZ:matrix([a],[b],[c]);
depends(u,[t,x,y,z]);
depends(v,[t,x,y,z]);
depends(w,[t,x,y,z]);
depends(a,[t,r,\theta,z]);
depends(b,[t,r,\theta,z]);
depends(c,[t,r,\theta,z]);
VXYZ1:VXYZ=TR1.VRTZ;
VRTZ1:VRTZ=TR.VXYZ;
VA1:lhs(VXYZ1)[1][1]=rhs(VXYZ1)[1][1];
VB1:lhs(VXYZ1)[2][1]=rhs(VXYZ1)[2][1];
VC1:lhs(VXYZ1)[3][1]=rhs(VXYZ1)[3][1];
```

xyz 座標の単位ベクトル：$\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z}$ と円柱座標の単位ベクトル：$\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z}$ の関係は、

$$\begin{pmatrix} e_r \\ e_\theta \\ e_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{pmatrix} \tag{B.1.3}$$

$\overrightarrow{V}$ の xyz 座標表記、$\overrightarrow{V}$ の円柱座標表記は、

$$\overrightarrow{V}=\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}\qquad \overrightarrow{V}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}v_r\\v_\theta\\v_z\end{pmatrix}$$

ここで、サフィックス付きの v_r, v_θ, v_z では、微分展開がMaxima でうまくいかないため、一時的に a, b, c の表記を使用し、t, r, θ, z の関数とする。$\overrightarrow{V}$ の xyz 座標表記と円柱座標表記の関係は、

$$\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=TR.\overrightarrow{V}=\begin{pmatrix}\sin(\theta)\ v+\cos(\theta)\ u\\\cos(\theta)\ v-\sin(\theta)\ u\\w\end{pmatrix}\tag{B.1.4}$$

$$\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}=TR^T.\overrightarrow{V}=\begin{pmatrix}a\cos(\theta)-b\sin(\theta)\\a\sin(\theta)+b\cos(\theta)\\c\end{pmatrix}\tag{B.1.5}$$

B.1.1 gradient

```
/* gradient */
depends(A,[r,\theta,z]);
grad(A);
transpose(express(%));
ev(%,diff);
subst(LXYR1,%);
subst(LXYR2,%);
GRADA:trigsimp(TR.%);
```

gradient は xyz 座標表記で下記にように表現できる。

$$grad(A)=\begin{pmatrix}\frac{d}{d\,x}A\\\frac{d}{d\,y}A\\\frac{d}{d\,z}A\end{pmatrix}\tag{B.1.6}$$

A が r, θ, z の関数として上式の微分を実行すると下記のように展開できる。Maxima では、depends 関数を使用すると容易に展開できる。

$$grad(A)=\begin{pmatrix}\left(\frac{d}{d\,x}\theta\right)\left(\frac{d}{d\,\theta}A\right)+\left(\frac{d}{d\,x}r\right)\left(\frac{d}{d\,r}A\right)\\\left(\frac{d}{d\,y}\theta\right)\left(\frac{d}{d\,\theta}A\right)+\left(\frac{d}{d\,y}r\right)\left(\frac{d}{d\,r}A\right)\\\frac{d}{d\,z}A\end{pmatrix}$$

上式に (B.1.1) 式の関係を代入し、座標変換マトリックスを掛けることにより、円柱座標系へ変換する。結果を整理して下記を得る。

$$grad(A)=\begin{pmatrix}\frac{d}{d\,r}A\\\frac{\frac{d}{d\,\theta}A}{r}\\\frac{d}{d\,z}A\end{pmatrix}\tag{B.1.7}$$

B.1.2 divergence

```
/* divergence */
div(transpose(VXYZ)[1]);
express(%);
DIVXYZ:ev(%,diff);
subst([VA1,VB1,VC1],%);
ev(%,diff);
subst(LXYR1,%);
subst(LXYR2,%);
DIVXRT11:expand(trigsimp(%));
DIVXRT2:subst([a=v[r],b=v[\theta],c=v[z]]
 ,%);
MS1:DIVXYZ=0;
```

divergence は xyz 座標表記で下記にように表現できる。

$$div(\overrightarrow{V})=\frac{d}{d\,z}w+\frac{d}{d\,y}v+\frac{d}{d\,x}u\tag{B.1.8}$$

上式に (B.1.5) 式の関係を代入し、a, b, c が r, θ, z の関数として微分を実行すると下記のように展開でき、

$$\begin{aligned}&div(\overrightarrow{V})\\=&\frac{d}{d\,x}\left(a\cos(\theta)-b\sin(\theta)\right)\\&+\frac{d}{d\,y}\left(a\sin(\theta)+b\cos(\theta)\right)+\frac{d}{d\,z}c\\=&\cos(\theta)\left(\left(\frac{d}{d\,\theta}b\right)\left(\frac{d}{d\,y}\theta\right)+\left(\frac{d}{d\,r}b\right)\left(\frac{d}{d\,y}r\right)\right)\\&+\sin(\theta)\left(\left(\frac{d}{d\,\theta}a\right)\left(\frac{d}{d\,y}\theta\right)+\left(\frac{d}{d\,r}a\right)\left(\frac{d}{d\,y}r\right)\right)\\&-b\sin(\theta)\left(\frac{d}{d\,y}\theta\right)+a\cos(\theta)\left(\frac{d}{d\,y}\theta\right)\\&-\sin(\theta)\left(\left(\frac{d}{d\,\theta}b\right)\left(\frac{d}{d\,x}\theta\right)+\left(\frac{d}{d\,r}b\right)\left(\frac{d}{d\,x}r\right)\right)\\&+\cos(\theta)\left(\left(\frac{d}{d\,\theta}a\right)\left(\frac{d}{d\,x}\theta\right)+\left(\frac{d}{d\,r}a\right)\left(\frac{d}{d\,x}r\right)\right)\\&-a\sin(\theta)\left(\frac{d}{d\,x}\theta\right)-b\cos(\theta)\left(\frac{d}{d\,x}\theta\right)+\frac{d}{d\,z}c\end{aligned}$$

上式に (B.1.1) 式の関係を代入整理し、$a, b, c \to v_r, v_\theta, v_z$ に置き換えると、円柱座標系の結果が得られる。

$$div(\overrightarrow{V})=\frac{d}{d\,z}v_z+\frac{\frac{d}{d\,\theta}v_\theta}{r}+\frac{d}{d\,r}v_r+\frac{v_r}{r}\tag{B.1.9}$$

円柱座標系の非圧縮流体の質量保存の方程式は、

$$\frac{d}{d\,z}v_z+\frac{\frac{d}{d\,\theta}v_\theta}{r}+\frac{d}{d\,r}v_r+\frac{v_r}{r}=0\tag{B.1.10}$$

B.1.3　∇^2

```
NABA:'diff(A,x,2)+'diff(A,y,2)
 +'diff(A,z,2);
LXDDR1:diff(XR,x,2);
LXDDR2:subst(LXYR1,%);
LYDDR1:diff(YR,x,2);
LYDDR2:subst(LXYR1,%);
LXYR11:solve([LXDDR2,LYDDR2],
 ['diff(r,x,2), 'diff(\theta,x,2)])[1];
LXDDR11:diff(XR,y,2);
LXDDR21:subst(LXYR2,%);
LYDDR11:diff(YR,y,2);
LYDDR21:subst(LXYR2,%);
LXYR21:solve([LXDDR21,LYDDR21],
 ['diff(r,y,2),'diff(\theta,y,2)])[1];
ev(NABA,diff);
subst(LXYR11,%);
subst(LXYR21,%);
subst(LXYR1,%);
subst(LXYR2,%);
NABRA2:expand(trigsimp(%));
```

∇^2 は、xyz 座標表記で下記にように表現できる。

$$\nabla^2 A = \frac{d^2}{d\,z^2}\,A + \frac{d^2}{d\,y^2}\,A + \frac{d^2}{d\,x^2}\,A \tag{B.1.11}$$

A が r,θ,z の関数として上式の微分を実行すると、

$$\begin{aligned}
&\nabla^2 A\\
=&\frac{d^2}{d\,z^2}\,A + \left(\frac{d}{d\,y}\,\theta\right)\left(\left(\frac{d}{d\,y}\,\theta\right)\left(\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,A\right)\right.\\
&\left.+\left(\frac{d}{d\,y}\,r\right)\left(\frac{d^2}{d\,r\,d\,\theta}\,A\right)\right)\\
&+\left(\frac{d}{d\,x}\,\theta\right)\left(\left(\frac{d}{d\,x}\,\theta\right)\left(\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,A\right)\right.\\
&\left.+\left(\frac{d}{d\,x}\,r\right)\left(\frac{d^2}{d\,r\,d\,\theta}\,A\right)\right)\\
&+\left(\frac{d^2}{d\,y^2}\,\theta\right)\left(\frac{d}{d\,\theta}\,A\right)+\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,\theta\right)\left(\frac{d}{d\,\theta}\,A\right)\\
&+\left(\frac{d}{d\,y}\,r\right)\left(\left(\frac{d}{d\,y}\,r\right)\left(\frac{d^2}{d\,r^2}\,A\right)\right.\\
&\left.+\left(\frac{d}{d\,y}\,\theta\right)\left(\frac{d^2}{d\,r\,d\,\theta}\,A\right)\right)\\
&+\left(\frac{d}{d\,x}\,r\right)\left(\left(\frac{d}{d\,x}\,r\right)\left(\frac{d^2}{d\,r^2}\,A\right)\right.\\
&\left.+\left(\frac{d}{d\,x}\,\theta\right)\left(\frac{d^2}{d\,r\,d\,\theta}\,A\right)\right)\\
&+\left(\frac{d^2}{d\,y^2}\,r\right)\left(\frac{d}{d\,r}\,A\right)+\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,r\right)\left(\frac{d}{d\,r}\,A\right)
\end{aligned}$$

(B.1.1) 式や下記の関係式を代入し、

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2}{d\,x^2}\,r = \frac{\sin(\theta)^2}{r},\ \frac{d^2}{d\,x^2}\,\theta = \frac{2\cos(\theta)\,\sin(\theta)}{r^2}\\
&\frac{d^2}{d\,y^2}\,r = \frac{\cos(\theta)^2}{r},\ \frac{d^2}{d\,y^2}\,\theta = -\frac{2\cos(\theta)\,\sin(\theta)}{r^2}
\end{aligned} \tag{B.1.12}$$

整理すると、下記の円柱座標系の結果が得られる。

$$\nabla^2 A = \frac{d^2}{d\,z^2}\,A + \frac{\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,A}{r^2} + \frac{d^2}{d\,r^2}\,A + \frac{\frac{d}{d\,r}\,A}{r} \tag{B.1.13}$$

B.1.4　rotation

```
/* rotation */
curl(transpose(VXYZ)[1]);
express(%);
VXYZCURL:transpose(%);
subst([VA1,VB1,VC1],%);
ev(%,diff);
subst(LXYR1,%);
subst(LXYR2,%);
VXRTCURL0:trigrat(expand(TR.%));
VXRTCURL:subst([a=v[r],b=v[\theta],
   c=v[z]],%);
```

rotation は xyz 座標表記で下記にように表現できる。

$$curl\left(\overrightarrow{V}\right) = curl\left([u,v,w]\right) = \begin{pmatrix} \frac{d}{d\,y}\,w - \frac{d}{d\,z}\,v \\ \frac{d}{d\,z}\,u - \frac{d}{d\,x}\,w \\ \frac{d}{d\,x}\,v - \frac{d}{d\,y}\,u \end{pmatrix} \tag{B.1.14}$$

上記右辺項に、(B.1.5) 式の関係を代入し、

$$\begin{pmatrix} \frac{d}{d\,y}\,c - \frac{d}{d\,z}\,(a\sin(\theta)+b\cos(\theta)) \\ \frac{d}{d\,z}\,(a\cos(\theta)-b\sin(\theta)) - \frac{d}{d\,x}\,c \\ \frac{d}{d\,x}\,(a\sin(\theta)+b\cos(\theta)) - \frac{d}{d\,y}\,(a\cos(\theta)-b\sin(\theta)) \end{pmatrix}$$

上式の a,b,c が r,θ,z の関数として微分を実行し、(B.1.1) 式を代入し、座標変換マトリックス：TR を掛け、$a,b,c \rightarrow v_r, v_\theta, v_z$ に置き換えることにより、円柱座標系へ変換する。結果を整理して下記を得る。

$$curl\left(\overrightarrow{V}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{r\left(\frac{d}{d\,z}\,v_\theta\right) - \frac{d}{d\,\theta}\,v_z}{r} \\ \frac{d}{d\,z}\,v_r - \frac{d}{d\,r}\,v_z \\ \frac{r\left(\frac{d}{d\,r}\,v_\theta\right) + v_\theta - \frac{d}{d\,\theta}\,v_r}{r} \end{pmatrix} \tag{B.1.15}$$

B.1.5 Navier-Stokes の式

Navier-Stokes の式をベクトル表記すると、(2.6.4) 式から、

$$\rho\left(\frac{d}{dt}\overrightarrow{V}+(\overrightarrow{V}\cdot grad)\overrightarrow{V}\right)=F-grad(p)+\mu\nabla^2\overrightarrow{V} \tag{B.1.16}$$

上式を基に、加速度項、粘性項などに分けて円柱座標系の Navier-Stokes の式を求める。

(1) 加速度項　ベクトルの式による

```
/* differential of V with respect to t */
VRTZ2:subst([a=diff(r,t,1),b=r*diff(
 \theta,t,1),c=diff(z,t,1)],VRTZ);
VRTZDT:'diff(VRTZ,t,1)*ERTZ+VRTZ*
 'diff(ERTZ,t,1);
ER:ERTZ[1][1]=ERTZ1[1][1];
ET:ERTZ[2][1]=ERTZ1[2][1];
EZ:ERTZ[3][1]=ERTZ1[3][1];
EIJK:trigsimp(solve([ER,ET,EZ],
 [e[x],e[y],e[z]]))[1];
DER:'diff(e[r],t,1)=diff(rhs(ER),t,1);
DET:'diff(e[\theta],t,1)=diff(rhs(ET),t,1);
DEZ:'diff(e[z1],t,1)=diff(rhs(EZ),t,1);
DER1:trigsimp(subst(EIJK,DER));
DET1:trigsimp(subst(EIJK,DET));
DEZ1:trigsimp(subst(EIJK,DEZ));
DE1:expand(rhs(DER1)*VRTZ2[1][1]
 +rhs(DET1)*VRTZ2[2][1]+rhs(DEZ1)
 *VRTZ2[3][1]);
VERTDT:matrix([coeff(DE1,e[r],1)],
 [coeff(DE1,e[\theta],1)],
 [coeff(DE1,e[z1],1)]);
'diff(VRTZ2,t,1);
express(%);
ERTDT3:ev(%,diff);
ERTDT5:VRTZDT=ERTDT3+(VERTDT);
```

下記の加速度項の内、

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{V}+(\overrightarrow{V}\cdot grad)\overrightarrow{V}$$

$\frac{d}{dt}\overrightarrow{V}$ を求める。加速度を求める場合、xyz 座標系では、時間変化がないので、速度の時間微分が加速度となる。しかし、円柱座標系では時間変化があるので、下記のように速度の微分項と座標系の微分項、両方について調査する必要がある。

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{V}=\left(\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}e_r\\e_\theta\\e_z\end{pmatrix}+\left(\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}e_r\\e_\theta\\e_z\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$$

円柱座標系の時間変化は、

$$e_r=\sin(\theta)\ e_y+\cos(\theta)\ e_x,\quad e_\theta=\cos(\theta)\ e_y-\sin(\theta)\ e_x,$$

から、これらを微分し、xyz 座標の単位ベクトル:$\overrightarrow{e_x},\overrightarrow{e_y},\overrightarrow{e_z}$ を円柱座標の単位ベクトル：$\overrightarrow{e_r},\overrightarrow{e_\theta},\overrightarrow{e_z}$ に置き換えて整理すると下記となる。

$$\frac{d}{dt}e_r=e_\theta\left(\frac{d}{dt}\theta\right),\quad \frac{d}{dt}e_\theta=-e_r\left(\frac{d}{dt}\theta\right)$$

$$\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{d}{dt}r\\r\left(\frac{d}{dt}\theta\right)\\\frac{d}{dt}z\end{pmatrix}$$

から、上式に掛け、極座標の単位ベクトル：$\overrightarrow{e_r},\overrightarrow{e_\theta},\overrightarrow{e_z}$ で整理すると、

$$\left(\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}e_r\\e_\theta\\e_z\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-r\left(\frac{d}{dt}\theta\right)^2\\\left(\frac{d}{dt}r\right)\left(\frac{d}{dt}\theta\right)\\0\end{pmatrix}$$

速度の時間微分は、下記となる。

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\frac{d}{dt}r\\r\left(\frac{d}{dt}\theta\right)\\\frac{d}{dt}z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{d^2}{dt^2}r\\r\left(\frac{d^2}{dt^2}\theta\right)+\left(\frac{d}{dt}r\right)\left(\frac{d}{dt}\theta\right)\\\frac{d^2}{dt^2}z\end{pmatrix}$$

```
RT1:'diff(r,t,1)=v[r];
RT2:r*'diff(\theta,t,1)=v[\theta];
RT21:'diff(\theta,t,1)=v[\theta]/r;
RT3:'diff(r,t,2)='diff(v[r],t,1);
RT4:r*'diff(\theta,t,2)+'diff(r,t,1)
 *'diff(\theta,t,1)='diff(v[\theta],t,1);
RT41:solve(RT4,'diff(\theta,t,2))[1];
subst([RT41,'diff(z,t,2)='diff(v[z],t,1)]
 ,ERTDT5);
subst([RT1,RT21,RT3,a=v[r],b=v[\theta],
 c=v[z]],%);
VRTDT:rhs(%);
```

$$\frac{d}{dt}r=v_r,\quad \frac{d}{dt}\theta=\frac{v_\theta}{r},\quad \frac{d^2}{dt^2}r=\frac{d}{dt}v_r$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\theta=\frac{\frac{d}{dt}v_\theta-\left(\frac{d}{dt}r\right)\left(\frac{d}{dt}\theta\right)}{r}$$

上記の関係を代入し、下記を得る。

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{V}=\left(\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}e_r\\e_\theta\\e_z\end{pmatrix}+\left(\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}e_r\\e_\theta\\e_z\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{d}{dt}v_r-\frac{v_\theta^2}{r}\\\frac{d}{dt}v_\theta+\frac{v_r\,v_\theta}{r}\\\frac{d}{dt}v_z\end{pmatrix} \tag{B.1.17}$$

```
/* (V grad)V term */
VVRTX:matrix([v[r]],[v[\theta]],[v[z]]);
VGRADV1:VVRTX.subst([A=v[r]],GRADA);
VGRADV2:VVRTX.subst([A=v[\theta]],GRADA);
VGRADV3:VVRTX.subst([A=v[z]],GRADA);
VGRADV:matrix([VGRADV1],[VGRADV2],
 [VGRADV3]);
```

加速度項の内、$(\overrightarrow{V}\cdot grad)\overrightarrow{V}$ の項について、$grad(v_r)$ は (B.1.7) 式から下記となり、

$$grad(v_r)=\begin{pmatrix}\frac{d}{d\,r}\,v_r\\ \frac{\frac{d}{d\,\theta}\,v_r}{r}\\ \frac{d}{d\,z}\,v_r\end{pmatrix}$$

v_θ, v_z についても同様に行い、$\overrightarrow{V}$ を掛けると、

$$(\overrightarrow{V}\cdot grad)\overrightarrow{V}=\begin{pmatrix}\left(\frac{d}{d\,z}\,v_r\right)\,v_z+\frac{\left(\frac{d}{d\,\theta}\,v_r\right)v_\theta}{r}+v_r\,\left(\frac{d}{d\,r}\,v_r\right)\\ \left(\frac{d}{d\,z}\,v_\theta\right)\,v_z+\frac{v_\theta\,\left(\frac{d}{d\,\theta}\,v_\theta\right)}{r}+v_r\,\left(\frac{d}{d\,r}\,v_\theta\right)\\ v_z\,\left(\frac{d}{d\,z}\,v_z\right)+\frac{v_\theta\,\left(\frac{d}{d\,\theta}\,v_z\right)}{r}+v_r\,\left(\frac{d}{d\,r}\,v_z\right)\end{pmatrix} \tag{B.1.18}$$

(2) 加速度項　物質微分による

```
/* differential of V with respect to*/
diff(rhs(VXYZ1),t,1);
TR.%;
subst([diff(r,t,1)=a,diff(\theta,t,1)=b/r,
 diff(z,t,1)=c],%);
expand(trigsimp(%));
VRTDT1:subst([a=v[r],b=v[\theta],c=v[z]],
 %);
VRTDT+VGRADV-VRTDT1;
```

$\overrightarrow{V}$ の xyz 座標表記と円柱座標表記の関係は、(B.1.5) 式から、

$$\overrightarrow{V}=\begin{pmatrix}u\\ v\\ w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\cos(\theta)-b\sin(\theta)\\ a\sin(\theta)+b\cos(\theta)\\ c\end{pmatrix}$$

上式右辺の a,b,c が t,r,θ,z の関数として時間：t の微分を実行し、座標変換マトリックスを掛け、(B.1.1) 式および $\frac{d}{dt}r=v_r, \frac{d}{dt}\theta=v_\theta/r, \frac{d}{dt}z=v_z$ を代入することにより、円柱座標系へ変換する。結果を整理して、$a,b,c\rightarrow v_r,v_\theta,v_z$ に置き換えると、物質微分による加速度項を得る。

$$\frac{d}{d\,t}\overrightarrow{V}=\begin{pmatrix}\left(\frac{d}{d\,z}\,v_r\right)\,v_z-\frac{v_\theta^2}{r}+\frac{\left(\frac{d}{d\,\theta}\,v_r\right)v_\theta}{r}+\frac{d}{d\,t}\,v_r+v_r\,\left(\frac{d}{d\,r}\,v_r\right)\\ \left(\frac{d}{d\,z}\,v_\theta\right)\,v_z+\frac{v_\theta\,\left(\frac{d}{d\,\theta}\,v_\theta\right)}{r}+\frac{d}{d\,t}\,v_\theta+v_r\,\left(\frac{d}{d\,r}\,v_\theta\right)+\frac{v_r\,v_\theta}{r}\\ v_z\,\left(\frac{d}{d\,z}\,v_z\right)+\frac{v_\theta\,\left(\frac{d}{d\,\theta}\,v_z\right)}{r}+\frac{d}{d\,t}\,v_z+v_r\,\left(\frac{d}{d\,r}\,v_z\right)\end{pmatrix} \tag{B.1.19}$$

当然であるが、上式は (B.1.17) 式と (B.1.18) 式の和と一致している。

(3) 外力項他

```
/* force term */
FXRT:matrix([F[r]],[F[\theta]],[F[z]]);
PGRAD:-subst([A=p],GRADA);
```

物質力項：$\overrightarrow{F}$、圧力項：$\overrightarrow{P}=-grad(p)$ は下記となる。

$$\overrightarrow{F}=\begin{pmatrix}F_r\\ F_\theta\\ F_z\end{pmatrix},\qquad \overrightarrow{P}=\begin{pmatrix}-\frac{d}{d\,r}\,p\\ -\frac{\frac{d}{d\,\theta}\,p}{r}\\ -\frac{d}{d\,z}\,p\end{pmatrix} \tag{B.1.20}$$

(4) 変形速度テンソル

```
/* 変形速度テンソル */
DD1:matrix(express(grad(u)),express(
 grad(v)),express(grad(w)));
DD:DD1+transpose(DD1);
subst([VA1,VB1,VC1],DD);
ev(%,diff);
subst(LXYR1,%);
subst(LXYR2,%);
%.TR1;
TR.%;
expand(trigsimp(%));
DD11:subst([a=v[r],b=v[\theta],c=v[z]],%);
DD12:matrix([e[rr],e[rt],e[rz]],[e[rt],
 e[tt],e[tz]],[e[rz],e[tz],e[zz]]);
DD13:matrix([\sigma[r],\tau[rt],\tau[rz]]
 ,[\tau[rt],\sigma[t],\tau[tz]],
 [\tau[rz],\tau[tz],\sigma[z]]);
SG111:lhs(DD12)[1][1]=DD11[1][1];
SG121:lhs(DD12)[1][2]=DD11[1][2];
SG131:lhs(DD12)[1][3]=DD11[1][3];
SG221:lhs(DD12)[2][2]=DD11[2][2];
SG231:lhs(DD12)[2][3]=DD11[2][3];
SG331:lhs(DD12)[3][3]=DD11[3][3];
DD13=\mu*DD12;
DD13=\mu*DD11;
```

$x-y-z$ 座標系の変形速度テンソルは (2.6.2) 式から、

$$\begin{pmatrix} e_{xx} & e_{xy} & e_{xz} \\ e_{xy} & e_{yy} & e_{yz} \\ e_{xz} & e_{yz} & e_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\left(\frac{d}{d\,x}u\right) & \frac{d}{d\,x}v+\frac{d}{d\,y}u & \frac{d}{d\,x}w+\frac{d}{d\,z}u \\ \frac{d}{d\,x}v+\frac{d}{d\,y}u & 2\left(\frac{d}{d\,y}v\right) & \frac{d}{d\,y}w+\frac{d}{d\,z}v \\ \frac{d}{d\,x}w+\frac{d}{d\,z}u & \frac{d}{d\,y}w+\frac{d}{d\,z}v & 2\left(\frac{d}{d\,z}w\right) \end{pmatrix}$$

上記右辺項に、(B.1.5) 式の関係を代入し、a,b,c が r,θ,z の関数として微分を実行し、(B.1.1) 式を代入する。ここでテンソル：C の座標変換は、座標変換マトリックス：TR を使用して、「C.4.3 テンソルの座標変換 (695 頁)」に示されている $C'=TR.C.TR^T$ を活用し、$x-y-z$ 座標系の変形速度テンソルを円柱座標系へ変換する。結果を整理して下記を得る。

$$\begin{pmatrix} 2\left(\frac{d}{d\,r}a\right) & -\frac{b}{r}+\frac{\frac{d}{d\,\theta}a}{r}+\frac{d}{d\,r}b & \frac{d}{d\,r}c+\frac{d}{d\,z}a \\ -\frac{b}{r}+\frac{\frac{d}{d\,\theta}a}{r}+\frac{d}{d\,r}b & \frac{2\left(\frac{d}{d\,\theta}b\right)}{r}+\frac{2\,a}{r} & \frac{\frac{d}{d\,\theta}c}{r}+\frac{d}{d\,z}b \\ \frac{d}{d\,r}c+\frac{d}{d\,z}a & \frac{\frac{d}{d\,\theta}c}{r}+\frac{d}{d\,z}b & 2\left(\frac{d}{d\,z}c\right) \end{pmatrix}$$

以上から、円柱座標系の変形速度テンソルは $a,b,c\to v_r,v_\theta,v_z$ に置き換えると、

$$\begin{pmatrix} e_{rr} & e_{r\theta} & e_{rz} \\ e_{r\theta} & e_{\theta\theta} & e_{\theta z} \\ e_{rz} & e_{\theta z} & e_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\left(\frac{d}{d\,r}v_r\right) & \frac{d}{d\,r}v_\theta-\frac{v_\theta}{r}+\frac{\frac{d}{d\,\theta}v_r}{r} & \frac{d}{d\,r}v_z+\frac{d}{d\,z}v_r \\ \frac{d}{d\,r}v_\theta-\frac{v_\theta}{r}+\frac{\frac{d}{d\,\theta}v_r}{r} & \frac{2\left(\frac{d}{d\,\theta}v_\theta\right)}{r}+\frac{2\,v_r}{r} & \frac{\frac{d}{d\,\theta}v_z}{r}+\frac{d}{d\,z}v_\theta \\ \frac{d}{d\,r}v_z+\frac{d}{d\,z}v_r & \frac{\frac{d}{d\,\theta}v_z}{r}+\frac{d}{d\,z}v_\theta & 2\left(\frac{d}{d\,z}v_z\right) \end{pmatrix}$$

$$e_{rr}=2\left(\frac{d}{d\,r}v_r\right),\quad e_{r\theta}=\frac{d}{d\,r}v_\theta-\frac{v_\theta}{r}+\frac{\frac{d}{d\,\theta}v_r}{r},\quad e_{rz}=\frac{d}{d\,r}v_z+\frac{d}{d\,z}v_r \tag{B.1.21}$$

$$e_{\theta\theta}=\frac{2\left(\frac{d}{d\,\theta}v_\theta\right)}{r}+\frac{2\,v_r}{r},\quad e_{\theta z}=\frac{\frac{d}{d\,\theta}v_z}{r}+\frac{d}{d\,z}v_\theta,\quad e_{zz}=2\left(\frac{d}{d\,z}v_z\right)$$

円柱座標系の応力テンソルは、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \sigma_r & \tau_{r\theta} & \tau_{rz} \\ \tau_{r\theta} & \sigma_\theta & \tau_{\theta z} \\ \tau_{rz} & \tau_{\theta z} & \sigma_z \end{pmatrix} &= \mu \begin{pmatrix} e_{rr} & e_{r\theta} & e_{rz} \\ e_{r\theta} & e_{\theta\theta} & e_{\theta z} \\ e_{rz} & e_{\theta z} & e_{zz} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2\,\mu\left(\frac{d}{d\,r}v_r\right) & \mu\left(\frac{d}{d\,r}v_\theta-\frac{v_\theta}{r}+\frac{\frac{d}{d\,\theta}v_r}{r}\right) & \mu\left(\frac{d}{d\,r}v_z+\frac{d}{d\,z}v_r\right) \\ \mu\left(\frac{d}{d\,r}v_\theta-\frac{v_\theta}{r}+\frac{\frac{d}{d\,\theta}v_r}{r}\right) & \mu\left(\frac{2\left(\frac{d}{d\,\theta}v_\theta\right)}{r}+\frac{2\,v_r}{r}\right) & \mu\left(\frac{\frac{d}{d\,\theta}v_z}{r}+\frac{d}{d\,z}v_\theta\right) \\ \mu\left(\frac{d}{d\,r}v_z+\frac{d}{d\,z}v_r\right) & \mu\left(\frac{\frac{d}{d\,\theta}v_z}{r}+\frac{d}{d\,z}v_\theta\right) & 2\,\mu\left(\frac{d}{d\,z}v_z\right) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{B.1.22}$$

(5) 粘性項　ベクトルの式

```
/* vector difinition of nabla^2 */
NAB:matrix(['diff(e[x],x,1)],
 ['diff(e[y],y,1)],['diff(e[z],z,1)]);
NAB1:NAB*VXYZ;
subst([u=1,v=1,w=1],%);
subst([e[x]=u,e[y]=v,e[z]=w],%);
col(adjoint(transpose(addcol(NAB,VXYZ,
 matrix([1],[1],[1])))),3);
subst([u=1,v=1,w=1],%);
subst([e[x]=u,e[y]=v,e[z]=w],%);
div(transpose(VXYZ)[1]);
express(%);
ev(%,diff);
grad(%);
express(%);
ev(%,diff);
NABRAXYZ1:transpose(%);
curl(transpose(VXYZ)[1]);
express(%);
ev(%,diff);
curl(%);
express(%);
ev(%,diff);
NABRAXYZ2:transpose(%);
NABRAXYZ:NABRAXYZ1-NABRAXYZ2;
```

粘性項は $\nabla^2\overrightarrow{V}$ で表せる。下記の関係式を証明する。

$$\nabla^2\overrightarrow{V} = grad(div(\overrightarrow{V})) - curl(curl(\overrightarrow{V})) \qquad \text{(B.1.23)}$$

$$grad(div(\overrightarrow{V})) = grad\left(\frac{d}{d\,z}\,w + \frac{d}{d\,y}\,v + \frac{d}{d\,x}\,u\right)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{d^2}{d\,x\,d\,z}\,w + \frac{d^2}{d\,x\,d\,y}\,v + \frac{d^2}{d\,x^2}\,u \\ \frac{d^2}{d\,y\,d\,z}\,w + \frac{d^2}{d\,y^2}\,v + \frac{d^2}{d\,x\,d\,y}\,u \\ \frac{d^2}{d\,z^2}\,w + \frac{d^2}{d\,y\,d\,z}\,v + \frac{d^2}{d\,x\,d\,z}\,u \end{pmatrix}$$

$$curl(curl(\overrightarrow{V}))$$

$$= curl\left([\frac{d}{d\,y}\,w - \frac{d}{d\,z}\,v, \frac{d}{d\,z}\,u - \frac{d}{d\,x}\,w, \frac{d}{d\,x}\,v - \frac{d}{d\,y}\,u]\right)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{d^2}{d\,x\,d\,z}\,w + \frac{d^2}{d\,x\,d\,y}\,v - \frac{d^2}{d\,z^2}\,u - \frac{d^2}{d\,y^2}\,u \\ \frac{d^2}{d\,y\,d\,z}\,w - \frac{d^2}{d\,z^2}\,v - \frac{d^2}{d\,x^2}\,v + \frac{d^2}{d\,x\,d\,y}\,u \\ -\frac{d^2}{d\,y^2}\,w - \frac{d^2}{d\,x^2}\,w + \frac{d^2}{d\,y\,d\,z}\,v + \frac{d^2}{d\,x\,d\,z}\,u \end{pmatrix}$$

上記の二つの式から、

$$grad(div(\overrightarrow{V})) - curl(curl(\overrightarrow{V}))$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{d^2}{d\,z^2}\,u + \frac{d^2}{d\,y^2}\,u + \frac{d^2}{d\,x^2}\,u \\ \frac{d^2}{d\,z^2}\,v + \frac{d^2}{d\,y^2}\,v + \frac{d^2}{d\,x^2}\,v \\ \frac{d^2}{d\,z^2}\,w + \frac{d^2}{d\,y^2}\,w + \frac{d^2}{d\,x^2}\,w \end{pmatrix}$$

$$= \nabla^2\overrightarrow{V}$$

で証明できた。

```
/* viscous term */
subst([A=DIVXRT11],GRADA);
NABRARTX1:ev(%,diff);
CURL1:v[1]=row(VXRTCURL0,1)[1][1];
CURL2:v[2]=row(VXRTCURL0,2)[1][1];
CURL3:v[3]=row(VXRTCURL0,3)[1][1];
VXRTCURL1:subst([a=v[1],b=v[2],c=v[3]],
 VXRTCURL0);
subst([CURL1,CURL2,CURL3],VXRTCURL1);
NABRARTX2:expand(ev(%,diff));
expand(NABRARTX1-NABRARTX2);
NABRARTX:subst([a=v[r],b=v[\theta],
 c=v[z]],%);
```

円柱座標系について、まず、粘性項の $grad(div(\overrightarrow{V}))$ について、(B.1.9) 式から div の式が得られているので、

$$div(\overrightarrow{V}) = \left(\frac{\frac{d}{d\,\theta}\,b}{r} + \frac{a}{r} + \frac{d}{d\,z}\,c + \frac{d}{d\,r}\,a\right) = A$$

これを $grad$ の式：(B.1.7) 式に代入し、

$$grad(A) = \begin{pmatrix} \frac{d}{d\,r}\,A \\ \frac{\frac{d}{d\,\theta}\,A}{r} \\ \frac{d}{d\,z}\,A \end{pmatrix}$$

微分を実行すると下記となる。

$$grad(div(\overrightarrow{V}))=\begin{pmatrix}\frac{d}{dr}\left(\frac{\frac{d}{d\theta}b}{r}+\frac{a}{r}+\frac{d}{dz}c+\frac{d}{dr}a\right)\\ \frac{\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\frac{d}{d\theta}b}{r}+\frac{a}{r}+\frac{d}{dz}c+\frac{d}{dr}a\right)}{r}\\ \frac{d}{dz}\left(\frac{\frac{d}{d\theta}b}{r}+\frac{a}{r}+\frac{d}{dz}c+\frac{d}{dr}a\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\frac{d^2}{dr\,d\theta}b}{r}+\frac{\frac{d}{dr}a}{r}-\frac{\frac{d}{d\theta}b}{r^2}-\frac{a}{r^2}+\frac{d^2}{dr\,dz}c+\frac{d^2}{dr^2}a\\ \frac{\frac{\frac{d^2}{d\theta^2}b}{r}+\frac{\frac{d}{d\theta}a}{r}+\frac{d^2}{d\theta\,dz}c+\frac{d^2}{dr\,d\theta}a}{r}\\ \frac{\frac{d^2}{d\theta\,dz}b}{r}+\frac{\frac{d}{dz}a}{r}+\frac{d^2}{dz^2}c+\frac{d^2}{dr\,dz}a\end{pmatrix}\quad\text{(B.1.24)}$$

$curl(curl(\overrightarrow{V}))$ について、(B.1.15) 式の $curl(\overrightarrow{V})$ の各項を下記のように v_1,v_2,v_3 と対応させ、

$$v_1=-\frac{\left(\frac{d}{dz}b\right)r-\frac{d}{d\theta}c}{r},\qquad v_2=\frac{d}{dz}a-\frac{d}{dr}c,\qquad v_3=\frac{\left(\frac{d}{dr}b\right)r+b-\frac{d}{d\theta}a}{r}$$

上記の関係を代入して、展開すると下記となる。

$$curl(curl(\overrightarrow{V}))=\begin{pmatrix}-\frac{\left(\frac{d}{dz}v_2\right)r-\frac{d}{d\theta}v_3}{r}\\ \frac{d}{dz}v_1-\frac{d}{dr}v_3\\ \frac{\left(\frac{d}{dr}v_2\right)r-\frac{d}{d\theta}v_1+v_2}{r}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{\left(\frac{d}{dz}\left(\frac{d}{dz}a-\frac{d}{dr}c\right)\right)r-\frac{d}{d\theta}\frac{\left(\frac{d}{dr}b\right)r+b-\frac{d}{d\theta}a}{r}}{r}\\ \frac{d}{dz}\left(-\frac{\left(\frac{d}{dz}b\right)r-\frac{d}{d\theta}c}{r}\right)-\frac{d}{dr}\frac{\left(\frac{d}{dr}b\right)r+b-\frac{d}{d\theta}a}{r}\\ \frac{-\frac{d}{d\theta}\left(-\frac{\left(\frac{d}{dz}b\right)r-\frac{d}{d\theta}c}{r}\right)+\left(\frac{d}{dr}\left(\frac{d}{dz}a-\frac{d}{dr}c\right)\right)r-\frac{d}{dr}c+\frac{d}{dz}a}{r}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{\frac{d^2}{dr\,d\theta}b}{r}+\frac{\frac{d}{d\theta}b}{r^2}-\frac{\frac{d^2}{d\theta^2}a}{r^2}+\frac{d^2}{dr\,dz}c-\frac{d^2}{dz^2}a\\ \frac{\frac{d^2}{d\theta\,dz}c}{r}-\frac{\frac{d}{dr}b}{r}+\frac{\frac{d^2}{dr\,d\theta}a}{r}+\frac{b}{r^2}-\frac{\frac{d}{d\theta}a}{r^2}-\frac{d^2}{dz^2}b-\frac{d^2}{dr^2}b\\ -\frac{\frac{d}{dr}c}{r}+\frac{\frac{d^2}{d\theta\,dz}b}{r}+\frac{\frac{d}{dz}a}{r}-\frac{\frac{d^2}{d\theta^2}c}{r^2}-\frac{d^2}{dr^2}c+\frac{d^2}{dr\,dz}a\end{pmatrix}\quad\text{(B.1.25)}$$

(B.1.24) 式、(B.1.25) 式から $a,b,c\rightarrow v_r,v_\theta,v_z$ に置き換えると、粘性項は、

$$\nabla^2\overrightarrow{V}=grad(div(\overrightarrow{V}))-curl(curl(\overrightarrow{V}))=\begin{pmatrix}-\frac{2\left(\frac{d}{d\theta}v_\theta\right)}{r^2}+\frac{d^2}{dz^2}v_r+\frac{\frac{d^2}{d\theta^2}v_r}{r^2}+\frac{d^2}{dr^2}v_r+\frac{\frac{d}{dr}v_r}{r}-\frac{v_r}{r^2}\\ \frac{d^2}{dz^2}v_\theta+\frac{\frac{d^2}{d\theta^2}v_\theta}{r^2}+\frac{d^2}{dr^2}v_\theta+\frac{\frac{d}{dr}v_\theta}{r}-\frac{v_\theta}{r^2}+\frac{2\left(\frac{d}{d\theta}v_r\right)}{r^2}\\ \frac{d^2}{dz^2}v_z+\frac{\frac{d^2}{d\theta^2}v_z}{r^2}+\frac{d^2}{dr^2}v_z+\frac{\frac{d}{dr}v_z}{r}\end{pmatrix}\quad\text{(B.1.26)}$$

(6) 粘性項　$\nabla^2\mathbf{V}$ の変換

```
/* viscous term R-1 */
div(DD[1]);
express(%);
PX1:ev(%,diff);
div(DD[2]);
express(%);
PX2:ev(%,diff);
div(DD[3]);
express(%);
PX3:ev(%,diff);
MSX1:diff(DIVXYZ=0,x,1);
MSX11:solve(%,'diff(w,x,1,z,1))[1];
MSY1:diff(DIVXYZ=0,y,1);
MSY11:solve(%,'diff(w,y,1,z,1))[1];
```

```
MSZ1:diff(DIVXYZ=0,z,1);
MSZ11:solve(%,'diff(v,y,1,z,1))[1];
DD2:matrix([subst([MSX11],PX1)],[subst(
 [MSY11],PX2)],[subst([MSZ11],PX3)]);
subst([VA1,VB1,VC1],DD2);
ev(%,diff);
subst(LXYR11,%);
subst(LXYR21,%);
subst(LXYR1,%);
subst(LXYR2,%);
TR.%;
DD2RTZ1:expand(trigsimp(%));
NABRARTX1:subst([a=v[r],b=v[\theta],
 c=v[z]],%);
NABRARTX1-NABRARTX;
/* Navier-Stokes Equations */
\rho*(VRTDT+VGRADV)=FXRT+PGRAD+\mu
 *NABRARTX;
DIVXRT2=0;
subst([A=\Phi],NABRA2)=0;
```

$x-y-z$ 座標系の $\nabla^2\overrightarrow{V}$ は (2.6.3) 式から下記である。

$$\nabla^2\overrightarrow{V}=\begin{pmatrix}\frac{d^2}{d\,z^2}\,u+\frac{d^2}{d\,y^2}\,u+\frac{d^2}{d\,x^2}\,u\\ \frac{d^2}{d\,z^2}\,v+\frac{d^2}{d\,y^2}\,v+\frac{d^2}{d\,x^2}\,v\\ \frac{d^2}{d\,z^2}\,w+\frac{d^2}{d\,y^2}\,w+\frac{d^2}{d\,x^2}\,w\end{pmatrix}$$

上式右辺に (B.1.5) 式の関係を代入し、a,b,c が r,θ,z の関数として微分を実行する。更に、(B.1.1) 式および (B.1.12) 式を代入し、座標変換マトリックス：TR を掛けることにより、円柱座標系へ変換し、結果は下記となる。

$$\begin{pmatrix}\frac{\frac{d}{d\,r}\,a}{r}-\frac{2\left(\frac{d}{d\,\theta}\,b\right)}{r^2}+\frac{\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,a}{r^2}-\frac{a}{r^2}+\frac{d^2}{d\,z^2}\,a+\frac{d^2}{d\,r^2}\,a\\ \frac{\frac{d}{d\,r}\,b}{r}+\frac{\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,b}{r^2}-\frac{b}{r^2}+\frac{2\left(\frac{d}{d\,\theta}\,a\right)}{r^2}+\frac{d^2}{d\,z^2}\,b+\frac{d^2}{d\,r^2}\,b\\ \frac{\frac{d}{d\,r}\,c}{r}+\frac{\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,c}{r^2}+\frac{d^2}{d\,z^2}\,c+\frac{d^2}{d\,r^2}\,c\end{pmatrix}$$

$a,b,c\to v_r,v_\theta,v_z$ に置き換え、

$$\nabla^2\overrightarrow{V}=\begin{pmatrix}-\frac{2\left(\frac{d}{d\,\theta}\,v_\theta\right)}{r^2}+\frac{d^2}{d\,z^2}\,v_r+\frac{\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,v_r}{r^2}+\frac{d^2}{d\,r^2}\,v_r+\frac{\frac{d}{d\,r}\,v_r}{r}-\frac{v_r}{r^2}\\ \frac{d^2}{d\,z^2}\,v_\theta+\frac{\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,v_\theta}{r^2}+\frac{d^2}{d\,r^2}\,v_\theta+\frac{\frac{d}{d\,r}\,v_\theta}{r}-\frac{v_\theta}{r^2}+\frac{2\left(\frac{d}{d\,\theta}\,v_r\right)}{r^2}\\ \frac{d^2}{d\,z^2}\,v_z+\frac{\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,v_z}{r^2}+\frac{d^2}{d\,r^2}\,v_z+\frac{\frac{d}{d\,r}\,v_z}{r}\end{pmatrix}\tag{B.1.27}$$

上式は当然であるが、(B.1.26) 式と一致する。

(7)Navier-Stokes の式他まとめ

円柱座標系の各式をここにまとめる。非圧縮性流体の Navier-Stokes の式は下記となる。

$$\begin{pmatrix}\rho\left(\left(\frac{d}{d\,z}\,v_r\right)\,v_z-\frac{v_\theta^2}{r}+\frac{\left(\frac{d}{d\,\theta}\,v_r\right)v_\theta}{r}+\frac{d}{d\,t}\,v_r+v_r\,\left(\frac{d}{d\,r}\,v_r\right)\right)\\ \rho\left(\left(\frac{d}{d\,z}\,v_\theta\right)\,v_z+\frac{v_\theta\left(\frac{d}{d\,\theta}\,v_\theta\right)}{r}+\frac{d}{d\,t}\,v_\theta+v_r\,\left(\frac{d}{d\,r}\,v_\theta\right)+\frac{v_r\,v_\theta}{r}\right)\\ \rho\left(v_z\,\left(\frac{d}{d\,z}\,v_z\right)+\frac{v_\theta\left(\frac{d}{d\,\theta}\,v_z\right)}{r}+\frac{d}{d\,t}\,v_z+v_r\,\left(\frac{d}{d\,r}\,v_z\right)\right)\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\mu\left(-\frac{2\left(\frac{d}{d\,\theta}\,v_\theta\right)}{r^2}+\frac{d^2}{d\,z^2}\,v_r+\frac{\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,v_r}{r^2}+\frac{d^2}{d\,r^2}\,v_r+\frac{\frac{d}{d\,r}\,v_r}{r}-\frac{v_r}{r^2}\right)+F_r-\frac{d}{d\,r}\,p\\ \mu\left(\frac{d^2}{d\,z^2}\,v_\theta+\frac{\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,v_\theta}{r^2}+\frac{d^2}{d\,r^2}\,v_\theta+\frac{\frac{d}{d\,r}\,v_\theta}{r}-\frac{v_\theta}{r^2}+\frac{2\left(\frac{d}{d\,\theta}\,v_r\right)}{r^2}\right)+F_\theta-\frac{\frac{d}{d\,\theta}\,p}{r}\\ \mu\left(\frac{d^2}{d\,z^2}\,v_z+\frac{\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,v_z}{r^2}+\frac{d^2}{d\,r^2}\,v_z+\frac{\frac{d}{d\,r}\,v_z}{r}\right)+F_z-\frac{d}{d\,z}\,p\end{pmatrix}\tag{B.1.28}$$

非圧縮流体の質量保存の方程式は、

$$div(\overrightarrow{V})=\frac{d}{d\,z}\,v_z+\frac{\frac{d}{d\,\theta}\,v_\theta}{r}+\frac{d}{d\,r}\,v_r+\frac{v_r}{r}=0\tag{B.1.29}$$

非圧縮流体の速度ポッテンシャルの質量保存の方程式は、

$$\nabla^2\Phi=\frac{d^2}{d\,z^2}\,\Phi+\frac{\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,\Phi}{r^2}+\frac{d^2}{d\,r^2}\,\Phi+\frac{\frac{d}{d\,r}\,\Phi}{r}=0\tag{B.1.30}$$

B.2 極座標系への変換

極座標系の質量保存の方程式や運動方程式等を求める。下記に極座標系を示す。

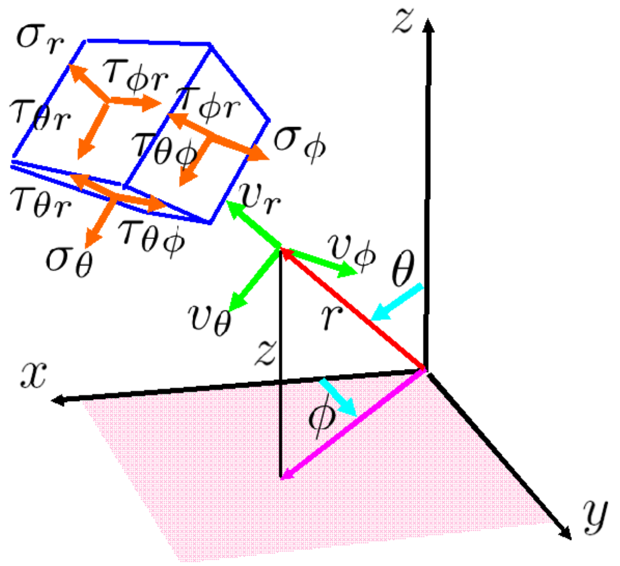


図 B.2.1: 極座標系

```
/* 座標変換　極座標へ R-1 */
kill(all);
load("vect")$
depends(r,[t,x,y,z]);
depends(\phi,[t,x,y,z]);
depends(\theta,[t,x,y,z]);
XR:x=r*sin(\theta)*cos(\phi);
YR:y=r*sin(\theta)*sin(\phi);
ZR:z=r*cos(\theta);
LXR1:diff(XR,x,1);
LYR1:diff(YR,x,1);
LZR1:diff(ZR,x,1);
solve([LXR1,LYR1,LZR1],['diff(r,x,1),
 'diff(\theta,x,1),'diff(\phi,x,1)]);
LXYZR1:trigsimp(%)[1];
LXR2:diff(XR,y,1);
LYR2:diff(YR,y,1);
LZR2:diff(ZR,y,1);
solve([LXR2,LYR2,LZR2],['diff(r,y,1),
 'diff(\theta,y,1),'diff(\phi,y,1)]);
LXYZR2:trigsimp(%)[1];
LXR3:diff(XR,z,1);
LYR3:diff(YR,z,1);
LZR3:diff(ZR,z,1);
solve([LXR3,LYR3,LZR3],['diff(r,z,1),
 'diff(\theta,z,1),'diff(\phi,z,1)]);
LXYZR3:trigsimp(%)[1];
```

xyz 座標と極座標の関係は、

$$x=\cos(\phi)\, r\sin(\theta) \qquad y=\sin(\phi)\, r\sin(\theta)$$

$$z=r\cos(\theta)$$

上記の関係から、

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}r=\cos(\phi)\,\sin(\theta), \quad \frac{d}{dx}\theta=\frac{\cos(\phi)\,\cos(\theta)}{r},\\
&\frac{d}{dx}\phi=-\frac{\sin(\phi)}{r\sin(\theta)} \quad \frac{d}{dy}r=\sin(\phi)\,\sin(\theta),\\
&\frac{d}{dy}\theta=\frac{\sin(\phi)\,\cos(\theta)}{r}, \quad \frac{d}{dy}\phi=\frac{\cos(\phi)}{r\sin(\theta)}\\
&\frac{d}{dz}r=\cos(\theta), \quad \frac{d}{dz}\theta=-\frac{\sin(\theta)}{r}, \quad \frac{d}{dz}\phi=0
\end{aligned} \tag{B.2.1}$$

xyz 座標から極座標に変換する変換マトリックス:TR は、

$$TR=\begin{pmatrix}\cos(\phi)\,\cos(\theta) & \sin(\phi)\,\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) & 0\\ \cos(\phi)\,\sin(\theta) & \sin(\phi)\,\sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix} \tag{B.2.2}$$

```
TR:matrix([cos(\theta)*cos(\phi),cos(
 \theta)*sin(\phi),-sin(\theta)],[-sin
 (\phi),cos(\phi),0],[sin(\theta)*cos
 (\phi),sin(\theta)*sin(\phi),
 cos(\theta)]);
TR1:transpose(TR);
ERTP:matrix([e[\theta]],[e[\phi]],[e[r]]);
EXYZ:matrix([e[x]],[e[y]],[e[z]]);
ERTP1:ERTP=TR.EXYZ;
VXYZ:matrix([u],[v],[w]);
VRTP:matrix([a],[b],[c]);
depends(u,[t,x,y,z]);
depends(v,[t,x,y,z]);
depends(w,[t,x,y,z]);
depends(a,[t,r,\theta,\phi]);
depends(b,[t,r,\theta,\phi]);
depends(c,[t,r,\theta,\phi]);
VXYZ1:VXYZ=TR1.VRTP;
VRTP1:VRTP=TR.VXYZ;
VA1:lhs(VXYZ1)[1][1]=rhs(VXYZ1)[1][1];
VB1:lhs(VXYZ1)[2][1]=rhs(VXYZ1)[2][1];
VC1:lhs(VXYZ1)[3][1]=rhs(VXYZ1)[3][1];
```

xyz 座標の単位ベクトル：$\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z}$ と極座標の単位ベクトル：$\overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_\phi}, \overrightarrow{e_r}$ の関係は、

$$\begin{pmatrix} e_\theta \\ e_\phi \\ e_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\phi)\cos(\theta) & \sin(\phi)\cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ \cos(\phi)\sin(\theta) & \sin(\phi)\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{pmatrix} \tag{B.2.3}$$

$\overrightarrow{V}$ の xyz 座標表記、$\overrightarrow{V}$ の極座標表記はそれぞれ下記である。

$$\overrightarrow{V}(xyz\ \text{座標}) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{V}(\text{極座標}) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_\theta \\ v_\phi \\ v_r \end{pmatrix}$$

ここで、サフィックス付きの v_θ, v_ϕ, v_r では、微分展開が Maxima でうまくいかないため、一時的に a, b, c の表記を使用し、t, θ, ϕ, r の関数とする。$\overrightarrow{V}$ の xyz 座標表記と極座標表記の関係は、

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = TR.\overrightarrow{V} = \begin{pmatrix} \cos(\phi)\cos(\theta) & \sin(\phi)\cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ \cos(\phi)\sin(\theta) & \sin(\phi)\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \tag{B.2.4}$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = TR^T.\overrightarrow{V} = \begin{pmatrix} \cos(\phi)\cos(\theta) & -\sin(\phi) & \cos(\phi)\sin(\theta) \\ \sin(\phi)\cos(\theta) & \cos(\phi) & \sin(\phi)\sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \tag{B.2.5}$$

B.2.1　gradient(∇)

```
/* grad(A) */
depends(A,[r,\theta,\phi]);
grad(A);
transpose(express(%));
ev(%,diff);
subst(LXYZR1,%);
subst(LXYZR2,%);
subst(LXYZR3,%);
GRADA:trigsimp(TR.%);
```

gradient は xyz 座標表記で下記にように表現できる。

$$grad(A) = \begin{pmatrix} \frac{d}{d\,x} A \\ \frac{d}{d\,y} A \\ \frac{d}{d\,z} A \end{pmatrix} \tag{B.2.6}$$

A が θ, ϕ, r の関数として上式の微分を実行すると下記のように展開できる。Maxima では、depends 関数を使用すると容易に展開できる。

$$grad(A) = \begin{pmatrix} \left(\frac{d}{d\,x}\theta\right)\left(\frac{d}{d\,\theta}A\right) + \left(\frac{d}{d\,x}r\right)\left(\frac{d}{d\,r}A\right) + \left(\frac{d}{d\,x}\phi\right)\left(\frac{d}{d\,\phi}A\right) \\ \left(\frac{d}{d\,y}\theta\right)\left(\frac{d}{d\,\theta}A\right) + \left(\frac{d}{d\,y}r\right)\left(\frac{d}{d\,r}A\right) + \left(\frac{d}{d\,y}\phi\right)\left(\frac{d}{d\,\phi}A\right) \\ \left(\frac{d}{d\,z}\theta\right)\left(\frac{d}{d\,\theta}A\right) + \left(\frac{d}{d\,z}r\right)\left(\frac{d}{d\,r}A\right) + \left(\frac{d}{d\,z}\phi\right)\left(\frac{d}{d\,\phi}A\right) \end{pmatrix}$$

上式に (B.2.1) 式の関係を代入し、座標変換マトリックス：TR を掛けることにより、極座標系へ変換する。結果を整理して下記を得る。

$$grad(A) = \begin{pmatrix} \frac{\frac{d}{d\,\theta}A}{r} \\ \frac{\frac{d}{d\,\phi}A}{r\sin(\theta)} \\ \frac{d}{d\,r}A \end{pmatrix} \tag{B.2.7}$$

B.2.2 divergence

```
/* divergence */
div(transpose(VXYZ)[1]);
express(%);
DIVXYZ:ev(%,diff);
subst([VA1,VB1,VC1],%);
ev(%,diff);
subst(LXYZR1,%);
subst(LXYZR2,%);
subst(LXYZR3,%);
DIVXRT11:expand(trigsimp(%));
DIVXRT2:subst([c=v[r],a=v[\theta],
 b=v[\phi]],%);
MS1:DIVXYZ=0;
```

divergence は xyz 座標表記で下記にように表現できる。

$$div(\overrightarrow{V})=\frac{d}{d\,z}\,w+\frac{d}{d\,y}\,v+\frac{d}{d\,x}\,u \tag{B.2.8}$$

上式右辺に (B.2.5) 式の関係を代入し、

$$\begin{aligned}&\frac{d}{d\,y}\,\left(c\sin\left(\phi\right)\,\sin\left(\theta\right)+a\sin\left(\phi\right)\,\cos\left(\theta\right)+b\cos\left(\phi\right)\right)\\&+\frac{d}{d\,x}\,\left(c\cos\left(\phi\right)\,\sin\left(\theta\right)+a\cos\left(\phi\right)\,\cos\left(\theta\right)-b\sin\left(\phi\right)\right)\\&+\frac{d}{d\,z}\,\left(c\cos\left(\theta\right)-a\sin\left(\theta\right)\right)\end{aligned}$$

a,b,c が θ,ϕ,r の関数として微分を実行し、(B.2.1) 式の関係を代入し、整理すると、円柱座標系の結果が得られる。

$$div(\overrightarrow{V})=\frac{a\cos\left(\theta\right)}{r\sin\left(\theta\right)}+\frac{\frac{d}{d\,\phi}\,b}{r\sin\left(\theta\right)}+\frac{2\,c}{r}+\frac{\frac{d}{d\,\theta}\,a}{r}+\frac{d}{d\,r}\,c \tag{B.2.9}$$

以上から、$a,b,c\rightarrow v_\theta,v_\phi,v_r$ に置き換えると、

$$div(\overrightarrow{V})=\frac{\frac{d}{d\,\theta}\,v_\theta}{r}+\frac{v_\theta\cos\left(\theta\right)}{r\sin\left(\theta\right)}+\frac{\frac{d}{d\,\phi}\,v_\phi}{r\sin\left(\theta\right)}+\frac{d}{d\,r}\,v_r+\frac{2\,v_r}{r}$$

円柱座標系の非圧縮流体の質量保存の方程式は、

$$\frac{\frac{d}{d\,\theta}\,v_\theta}{r}+\frac{v_\theta\cos\left(\theta\right)}{r\sin\left(\theta\right)}+\frac{\frac{d}{d\,\phi}\,v_\phi}{r\sin\left(\theta\right)}+\frac{d}{d\,r}\,v_r+\frac{2\,v_r}{r}=0$$

B.2.3 ∇^2

```
/* nabla^2 */
NABA:'diff(A,x,2)+'diff(A,y,2)
 +'diff(A,z,2);
LXDDR1:diff(XR,x,2);
LXDDR2:subst(LXYZR1,%);
LYDDR1:diff(YR,x,2);
LYDDR2:subst(LXYZR1,%);
LZDDR1:diff(ZR,x,2);
LZDDR2:subst(LXYZR1,%);
LXYZR11:trigsimp(solve([LXDDR2,LYDDR2,
 LZDDR2],['diff(r,x,2),'diff(\theta,x,2),
 'diff(\phi,x,2)])[1]);
LXDDR11:diff(XR,y,2);
LXDDR21:subst(LXYZR2,%);
LYDDR11:diff(YR,y,2);
LYDDR21:subst(LXYZR2,%);
LZDDR11:diff(ZR,y,2);
LZDDR21:subst(LXYZR2,%);
LXYZR21:trigsimp(solve([LXDDR21,LYDDR21,
 LZDDR21],['diff(r,y,2),'diff(\theta,y,2),
 'diff(\phi,y,2)])[1]);
LXDDR12:diff(XR,z,2);
LXDDR22:subst(LXYZR3,%);
LYDDR12:diff(YR,z,2);
LYDDR22:subst(LXYZR3,%);
LZDDR12:diff(ZR,z,2);
LZDDR22:subst(LXYZR3,%);
LXYZR31:solve([LXDDR22,LYDDR22,LZDDR22],
 ['diff(r,z,2),'diff(\theta,z,2),
 'diff(\phi,z,2)])[1];
ev(NABA,diff);
subst(LXYZR11,%);
subst(LXYZR21,%);
subst(LXYZR31,%);
subst(LXYZR1,%);
subst(LXYZR2,%);
subst(LXYZR3,%);
NABRA2:expand(trigsimp(%));
```

∇^2 は、xyz 座標表記で下記にように表現できる。

$$\nabla^2 A=\frac{d^2}{d\,z^2}\,A+\frac{d^2}{d\,y^2}\,A+\frac{d^2}{d\,x^2}\,A \tag{B.2.10}$$

A を θ, ϕ, r の関数とすると、上式の右辺最終項は下記のように展開できる。

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2}{d\,x^2}\,A =& \left(\frac{d}{d\,x}\,\theta\right)\,\left(\left(\frac{d}{d\,x}\,\theta\right)\,\left(\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,A\right)+\left(\frac{d}{d\,x}\,r\right)\,\left(\frac{d^2}{d\,r\,d\,\theta}\,A\right)+\left(\frac{d}{d\,x}\,\phi\right)\,\left(\frac{d^2}{d\,\phi\,d\,\theta}\,A\right)\right)\\
&+\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,\theta\right)\,\left(\frac{d}{d\,\theta}\,A\right)+\left(\frac{d}{d\,x}\,r\right)\,\left(\left(\frac{d}{d\,x}\,r\right)\,\left(\frac{d^2}{d\,r^2}\,A\right)+\left(\frac{d}{d\,x}\,\theta\right)\,\left(\frac{d^2}{d\,r\,d\,\theta}\,A\right)+\left(\frac{d}{d\,x}\,\phi\right)\,\left(\frac{d^2}{d\,\phi\,d\,r}\,A\right)\right)\\
&+\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,r\right)\,\left(\frac{d}{d\,r}\,A\right)+\left(\frac{d}{d\,x}\,\phi\right)\,\left(\left(\frac{d}{d\,x}\,\phi\right)\,\left(\frac{d^2}{d\,\phi^2}\,A\right)+\left(\frac{d}{d\,x}\,\theta\right)\,\left(\frac{d^2}{d\,\phi\,d\,\theta}\,A\right)+\left(\frac{d}{d\,x}\,r\right)\,\left(\frac{d^2}{d\,\phi\,d\,r}\,A\right)\right)\\
&+\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,\phi\right)\,\left(\frac{d}{d\,\phi}\,A\right)
\end{aligned}
$$

他の項も同様に展開し、(B.2.1) 式や下記の関係式を代入し、

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2}{d\,x^2}\,r =&\frac{\cos(\phi)^2\cos(\theta)^2+\sin(\phi)^2}{r},\\
\frac{d^2}{d\,x^2}\,\theta =&-\frac{2\cos(\phi)^2\cos(\theta)\,\sin(\theta)^2-\sin(\phi)^2\cos(\theta)}{r^2\sin(\theta)},\\
\frac{d^2}{d\,x^2}\,\phi =&\frac{2\cos(\phi)\,\sin(\phi)}{r^2\sin(\theta)^2}\\
\frac{d^2}{d\,y^2}\,r =&\frac{\sin(\phi)^2\cos(\theta)^2+\cos(\phi)^2}{r},\\
\frac{d^2}{d\,y^2}\,\theta =&-\frac{2\sin(\phi)^2\cos(\theta)\,\sin(\theta)^2-\cos(\phi)^2\cos(\theta)}{r^2\sin(\theta)},\\
\frac{d^2}{d\,y^2}\,\phi =&-\frac{2\cos(\phi)\,\sin(\phi)}{r^2\sin(\theta)^2}\\
\frac{d^2}{d\,z^2}\,r =&\frac{\sin(\theta)^2}{r},\ \frac{d^2}{d\,z^2}\,\theta=\frac{2\cos(\theta)\,\sin(\theta)}{r^2},\ \frac{d^2}{d\,z^2}\,\phi=0
\end{aligned}
\tag{B.2.11}
$$

整理すると、下記の極座標系の結果が得られる。

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 A =&\frac{\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,A}{r^2}+\frac{\cos(\theta)\,\left(\frac{d}{d\,\theta}\,A\right)}{r^2\sin(\theta)}+\frac{d^2}{d\,r^2}\,A\\
&+\frac{2\,\left(\frac{d}{d\,r}\,A\right)}{r}+\frac{\frac{d^2}{d\,\phi^2}\,A}{r^2\sin(\theta)^2}
\end{aligned}
\tag{B.2.12}
$$

B.2.4 rotation

```
/* rotation */
curl(transpose(VXYZ)[1]);
express(%);
VXYZCURL:transpose(ev(%,diff));
subst([VA1,VB1,VC1],VXYZCURL);
ev(%,diff);
subst(LXYZR1,%);
subst(LXYZR2,%);
subst(LXYZR3,%);
VXRTCURL0:expand(trigrat(TR.%));
VXRTCURL:subst([c=v[r],a=v[\theta],
 b=v[\phi]],%);
```

rotation は xyz 座標表記で下記にように表現できる。

$$
curl\left(\overrightarrow{V}\right)=curl\left([u,v,w]\right)=\begin{pmatrix}\frac{d}{d\,y}\,w-\frac{d}{d\,z}\,v\\ \frac{d}{d\,z}\,u-\frac{d}{d\,x}\,w\\ \frac{d}{d\,x}\,v-\frac{d}{d\,y}\,u\end{pmatrix}
\tag{B.2.13}
$$

上記右辺項に、(B.2.5) 式の xyz 座標と極座標の関係式を代入し、

$$
\begin{pmatrix}
\frac{d}{d\,y}\,(c\cos(\theta)-a\sin(\theta))-\frac{d}{d\,z}\,(c\sin(\phi)\,\sin(\theta)+a\sin(\phi)\,\cos(\theta)+b\cos(\phi))\\
\frac{d}{d\,z}\,(c\cos(\phi)\,\sin(\theta)+a\cos(\phi)\,\cos(\theta)-b\sin(\phi))-\frac{d}{d\,x}\,(c\cos(\theta)-a\sin(\theta))\\
\frac{d}{d\,x}\,(c\sin(\phi)\,\sin(\theta)+a\sin(\phi)\,\cos(\theta)+b\cos(\phi))-\frac{d}{d\,y}\,(c\cos(\phi)\,\sin(\theta)+a\cos(\phi)\,\cos(\theta)-b\sin(\phi))
\end{pmatrix}
$$

更に、(B.2.1) 式の関係式を代入し、座標変換マトリックス：TR を掛けることにより、極座標系へ変換する。結果を $a, b, c \rightarrow v_\theta, v_\phi, v_r$ に置き換え、整理して下記を得る。

$$
curl\left(\overrightarrow{V}\right)=\begin{pmatrix}
-\frac{\left(\left(\frac{d}{d\,r}\,v_\phi\right)r+v_\phi\right)\sin(\theta)-\frac{d}{d\,\phi}\,v_r}{r\sin(\theta)}\\
\frac{r\left(\frac{d}{d\,r}\,v_\theta\right)+v_\theta-\frac{d}{d\,\theta}\,v_r}{r}\\
\frac{-\frac{d}{d\,\phi}\,v_\theta+\left(\frac{d}{d\,\theta}\,v_\phi\right)\sin(\theta)+v_\phi\cos(\theta)}{r\sin(\theta)}
\end{pmatrix}
\tag{B.2.14}
$$

B.2.5　Navier-Stokes の式

Navier-Stokes の式をベクトル表記すると、(B.1.16) 式となり、その加速度項、粘性項などに分けて極座標系の Navier-Stokes の式を求める。

(1) 加速度項　ベクトルの式による

```
/* differential of V with respect to t */
VRTP1:subst([c=diff(r,t,1),a=r*diff(\theta,
 t,1),b=r*diff(\phi,t,1)*sin(\theta)],
 VRTP);
VRTPDT:'diff(VRTP,t,1)*ERTP+VRTP*
 'diff(ERTP,t,1);
ER:ERTZ[1][1]=ERTZ1[1][1];
ET:ERTZ[2][1]=ERTZ1[2][1];
EZ:ERTZ[3][1]=ERTZ1[3][1];
ET:ERTP[1][1]=rhs(ERTP1)[1][1];
EH:ERTP[2][1]=rhs(ERTP1)[2][1];
ER:ERTP[3][1]=rhs(ERTP1)[3][1];
EIJK:trigsimp(solve([ET,EH,ER],[e[x],e[y],
 e[z]]))[1];
DET:'diff(e[\theta],t,1)=diff(rhs(ET),t,1);
DEH:'diff(e[\phi],t,1)=diff(rhs(EH),t,1);
DER:'diff(e[r],t,1)=diff(rhs(ER),t,1);
DET1:trigsimp(subst(EIJK,DET));
DEH1:trigsimp(subst(EIJK,DEH));
DER1:trigsimp(subst(EIJK,DER));
DE1:expand(rhs(DET1)*VRTP1[1][1]+rhs(DEH1)
 *VRTP1[2][1]+rhs(DER1)*VRTP1[3][1]);
VERTDT:matrix([coeff(DE1,e[\theta],1)],
 [coeff(DE1,e[\phi],1)],
 [coeff(DE1,e[r],1)]);
'diff(VRTP1,t,1);
express(%);
ERTDT3:ev(%,diff);
ERTDT5:VRTPDT=expand(ERTDT3+VERTDT);
```

下記の加速度項の内、

$$\frac{d}{d\,t}\,\overrightarrow{V}+(\overrightarrow{V}\cdot grad)\overrightarrow{V}$$

$\frac{d}{d\,t}\,\overrightarrow{V}$ を求める。加速度を求める場合、xyz 座標系では、時間変化がないので、速度の時間微分が加速度となる。しかし、極座標系では時間変化があるので、下記のように速度の微分項と座標系の微分項、両方について調査する必要がある。

$$\frac{d}{d\,t}\,\overrightarrow{V}=\left(\frac{d}{d\,t}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}e_r\\e_\theta\\e_z\end{pmatrix}+\left(\frac{d}{d\,t}\begin{pmatrix}e_r\\e_\theta\\e_z\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$$

極座標系の時間変化は、

$$e_\theta=-\sin(\theta)\;e_z+\sin(\phi)\;\cos(\theta)\;e_y+\cos(\phi)\;\cos(\theta)\;e_x$$

$$e_\phi=\cos(\phi)\;e_y-\sin(\phi)\;e_x$$

$$e_r=\cos(\theta)\;e_z+\sin(\phi)\;\sin(\theta)\;e_y+\cos(\phi)\;\sin(\theta)\;e_x$$

から、これらを微分し、xyz 座標の単位ベクトル：$\overrightarrow{e_x},\overrightarrow{e_y},\overrightarrow{e_z}$ を極座標の単位ベクトル：$\overrightarrow{e_\theta},\overrightarrow{e_\phi},\overrightarrow{e_r}$ に置き換えて整理すると下記となる。

$$\frac{d}{d\,t}\,e_\theta=e_\phi\,\left(\frac{d}{d\,t}\,\phi\right)\,\cos(\theta)-e_r\,\left(\frac{d}{d\,t}\,\theta\right)$$

$$\frac{d}{d\,t}\,e_\phi=-\left(\frac{d}{d\,t}\,\phi\right)\,e_r\sin(\theta)-\left(\frac{d}{d\,t}\,\phi\right)\,e_\theta\cos(\theta)$$

$$\frac{d}{d\,t}\,e_r=e_\theta\,\left(\frac{d}{d\,t}\,\theta\right)+e_\phi\,\left(\frac{d}{d\,t}\,\phi\right)\,\sin(\theta)$$

$$\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r\,\left(\frac{d}{d\,t}\,\theta\right)\\\left(\frac{d}{d\,t}\,\phi\right)\,r\sin(\theta)\\\frac{d}{d\,t}\,r\end{pmatrix}$$

から、上式に掛け、極座標の単位ベクトル：$\overrightarrow{e_\theta},\overrightarrow{e_\phi},\overrightarrow{e_r}$ で整理すると、

$$\left(\frac{d}{d\,t}\begin{pmatrix}e_\theta\\e_\phi\\e_r\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\left(\frac{d}{d\,t}\,r\right)\,\left(\frac{d}{d\,t}\,\theta\right)-\left(\frac{d}{d\,t}\,\phi\right)^2\,r\cos(\theta)\,\sin(\theta)\\\left(\frac{d}{d\,t}\,\phi\right)\,r\cos(\theta)\,\left(\frac{d}{d\,t}\,\theta\right)+\left(\frac{d}{d\,t}\,\phi\right)\,\left(\frac{d}{d\,t}\,r\right)\,\sin(\theta)\\-r\,\left(\frac{d}{d\,t}\,\theta\right)^2-\left(\frac{d}{d\,t}\,\phi\right)^2\,r\sin(\theta)^2\end{pmatrix}\tag{B.2.15}$$

速度の時間微分は、下記となる。

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}r\,\left(\frac{d}{dt}\theta\right)\\\left(\frac{d}{dt}\phi\right)\,r\sin\left(\theta\right)\\\frac{d}{dt}r\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r\,\left(\frac{d^2}{dt^2}\theta\right)+\left(\frac{d}{dt}r\right)\,\left(\frac{d}{dt}\theta\right)\\\left(\frac{d}{dt}\phi\right)\,r\cos\left(\theta\right)\,\left(\frac{d}{dt}\theta\right)+\left(\frac{d}{dt}\phi\right)\,\left(\frac{d}{dt}r\right)\,\sin\left(\theta\right)+\left(\frac{d^2}{dt^2}\phi\right)\,r\sin\left(\theta\right)\\\frac{d^2}{dt^2}r\end{pmatrix}\tag{B.2.16}$$

(B.2.15) 式と (B.2.16) 式を合わせて、

$$\begin{aligned}&\left(\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}e_\theta\\e_\phi\\e_r\end{pmatrix}+\left(\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}e_\theta\\e_\phi\\e_r\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}r\,\left(\frac{d^2}{dt^2}\theta\right)+2\,\left(\frac{d}{dt}r\right)\,\left(\frac{d}{dt}\theta\right)-\left(\frac{d}{dt}\phi\right)^2 r\cos\left(\theta\right)\,\sin\left(\theta\right)\\2\,\left(\frac{d}{dt}\phi\right)\,r\cos\left(\theta\right)\,\left(\frac{d}{dt}\theta\right)+2\,\left(\frac{d}{dt}\phi\right)\,\left(\frac{d}{dt}r\right)\,\sin\left(\theta\right)+\left(\frac{d^2}{dt^2}\phi\right)\,r\sin\left(\theta\right)\\-r\,\left(\frac{d}{dt}\theta\right)^2-\left(\frac{d}{dt}\phi\right)^2 r\sin\left(\theta\right)^2+\frac{d^2}{dt^2}r\end{pmatrix}\end{aligned}$$

```
RT1:'diff(r,t,1)=v[r];
RT2:r*'diff(\theta,t,1)=v[\theta];
RT21:'diff(\theta,t,1)=v[\theta]/r;
RT3:'diff(r,t,2)='diff(v[r],t,1);
RT4:r*'diff(\theta,t,2)+'diff(r,t,1)
 *'diff(\theta,t,1)='diff(v[\theta],t,1);
RT41:solve(RT4,'diff(\theta,t,2))[1];
RT5:r*diff(\phi,t,1)*sin(\theta)=v[\phi];
RT51:solve(RT5,'diff(\phi,t,1))[1];
RT6:diff(RT5,t,1);
RT61:solve(RT6,'diff(\phi,t,2))[1];
expand(subst([RT41,RT61],ERTDT5));
subst([RT1,RT21,RT3,RT51],%);
VRTDT:rhs(%);
```

$$\frac{d}{dt}r=v_r,\quad \frac{d}{dt}\theta=\frac{v_\theta}{r},\quad \frac{d^2}{dt^2}r=\frac{d}{dt}v_r$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\theta=\frac{\frac{d}{dt}v_\theta-\left(\frac{d}{dt}r\right)\,\left(\frac{d}{dt}\theta\right)}{r},\quad \frac{d}{dt}\phi=\frac{v_\phi}{r\sin\left(\theta\right)}$$

$$\begin{aligned}&\frac{d^2}{dt^2}\phi=\\&-\frac{\left(\frac{d}{dt}\phi\right)\,r\cos\left(\theta\right)\,\left(\frac{d}{dt}\theta\right)+\left(\frac{d}{dt}\phi\right)\,\left(\frac{d}{dt}r\right)\,\sin\left(\theta\right)-\frac{d}{dt}v_\phi}{r\sin\left(\theta\right)}\end{aligned}$$

上記の関係を代入し、下記を得る。

$$\begin{aligned}&\left(\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}e_\theta\\e_\phi\\e_r\end{pmatrix}+\left(\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}e_\theta\\e_\phi\\e_r\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\frac{d}{dt}v_\theta-\frac{v_\phi^2\cos(\theta)}{r\sin(\theta)}+\frac{v_r\,v_\theta}{r}\\\frac{v_\phi\,v_\theta\cos(\theta)}{r\sin(\theta)}+\frac{v_\phi\,v_r}{r}+\frac{d}{dt}v_\phi\\-\frac{v_\theta^2}{r}+\frac{d}{dt}v_r-\frac{v_\phi^2}{r}\end{pmatrix}\end{aligned}\tag{B.2.17}$$

```
/* (V grad)V term */
VVRTP:matrix([v[\theta]],[v[\phi]],[v[r]]);
VGRADV1:VVRTP.subst([A=v[\theta]],GRADA);
VGRADV2:VVRTP.subst([A=v[\phi]],GRADA);
VGRADV3:VVRTP.subst([A=v[r]],GRADA);
VGRADV:matrix([VGRADV1],[VGRADV2],
 [VGRADV3]);
```

加速度項の内、$(\overrightarrow{V}\cdot grad)\overrightarrow{V}$ の項について、$grad(v_\theta)$ は (B.2.7) 式から下記となる。

$$grad(v_\theta)=\begin{pmatrix}\frac{\frac{d}{d\theta}v_\theta}{r}\\\frac{\frac{d}{d\phi}v_\theta}{r\sin(\theta)}\\\frac{d}{dr}v_\theta\end{pmatrix}$$

v_ϕ, v_r についても同様に行い、$\overrightarrow{V}$ を掛けると、

$$(\overrightarrow{V}\cdot grad)\overrightarrow{V}=\begin{pmatrix}\frac{v_\theta\left(\frac{d}{d\theta}v_\theta\right)}{r}+v_r\,\left(\frac{d}{dr}v_\theta\right)+\frac{v_\phi\left(\frac{d}{d\phi}v_\theta\right)}{r\sin(\theta)}\\\frac{v_\phi\left(\frac{d}{d\phi}v_\phi\right)}{r\sin(\theta)}+\frac{\left(\frac{d}{d\theta}v_\phi\right)v_\theta}{r}+\left(\frac{d}{dr}v_\phi\right)\,v_r\\\frac{v_\phi\left(\frac{d}{d\phi}v_r\right)}{r\sin(\theta)}+\frac{\left(\frac{d}{d\theta}v_r\right)v_\theta}{r}+v_r\,\left(\frac{d}{dr}v_r\right)\end{pmatrix}\tag{B.2.18}$$

(2) 加速度項　物質微分による

```
/* differential of V with respect to t
 R-1 */
diff(rhs(VXYZ1),t,1);
TR.%;
subst([diff(r,t,1)=c,diff(\theta,t,1)=a/r,
 diff(\phi,t,1)=b/r/sin(\theta)],%);
expand(trigsimp(%));
VRTDT1:subst([a=v[\theta],b=v[\phi],
 c=v[r]],%);
VRTDT+VGRADV-VRTDT1;
```

$\overrightarrow{V}$ の xyz 座標表記と極座標表記の関係は、(B.2.5) 式から、

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\cos(\phi)\,\sin(\theta) + a\cos(\phi)\,\cos(\theta) - b\sin(\phi) \\ c\sin(\phi)\,\sin(\theta) + a\sin(\phi)\,\cos(\theta) + b\cos(\phi) \\ c\cos(\theta) - a\sin(\theta) \end{pmatrix}$$

上式右辺の a, b, c が t, r, θ, ϕ の関数として時間：t の微分を実行し、座標変換マトリックスを掛け、(B.2.1) 式および $\frac{d}{d\,t}\,r = c, \frac{d}{d\,t}\,\theta = a/r, \frac{d}{d\,t}\,\phi = b/(r\sin(\theta))$ を代入することにより、極座標系へ変換する。

$$\frac{d}{d\,t}\begin{pmatrix} c\cos(\phi)\,\sin(\theta) + a\cos(\phi)\,\cos(\theta) - b\sin(\phi) \\ c\sin(\phi)\,\sin(\theta) + a\sin(\phi)\,\cos(\theta) + b\cos(\phi) \\ c\cos(\theta) - a\sin(\theta) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{b^2\cos(\theta)}{r\sin(\theta)} + \frac{\left(\frac{d}{d\,\phi}\,a\right)b}{r\sin(\theta)} + \frac{a\,c}{r} + \frac{a\left(\frac{d}{d\,\theta}\,a\right)}{r} + \left(\frac{d}{d\,r}\,a\right)\,c + \frac{d}{d\,t}\,a \\ \frac{a\,b\cos(\theta)}{r\sin(\theta)} + \frac{b\left(\frac{d}{d\,\phi}\,b\right)}{r\sin(\theta)} + \frac{b\,c}{r} + \frac{a\left(\frac{d}{d\,\theta}\,b\right)}{r} + \left(\frac{d}{d\,r}\,b\right)\,c + \frac{d}{d\,t}\,b \\ \frac{b\left(\frac{d}{d\,\phi}\,c\right)}{r\sin(\theta)} + \frac{a\left(\frac{d}{d\,\theta}\,c\right)}{r} - \frac{b^2}{r} - \frac{a^2}{r} + \frac{d}{d\,t}\,c + c\,\left(\frac{d}{d\,r}\,c\right) \end{pmatrix}$$

$a, b, c \rightarrow v_\theta, v_\phi, v_r$ の置き換えを行って、物質微分による加速度項を得る。

$$\frac{d}{d\,t}\,\overrightarrow{V} + (\overrightarrow{V}\cdot grad)\overrightarrow{V} = \begin{pmatrix} \frac{v_\theta\left(\frac{d}{d\,\theta}\,v_\theta\right)}{r} + \frac{d}{d\,t}\,v_\theta + v_r\,\left(\frac{d}{d\,r}\,v_\theta\right) + \frac{v_\phi\left(\frac{d}{d\,\phi}\,v_\theta\right)}{r\sin(\theta)} - \frac{v_\phi^2\cos(\theta)}{r\sin(\theta)} + \frac{v_r\,v_\theta}{r} \\ \frac{v_\phi\,v_\theta\cos(\theta)}{r\sin(\theta)} + \frac{v_\phi\left(\frac{d}{d\,\phi}\,v_\phi\right)}{r\sin(\theta)} + \frac{\left(\frac{d}{d\,\theta}\,v_\phi\right)v_\theta}{r} + \frac{v_\phi\,v_r}{r} + \left(\frac{d}{d\,r}\,v_\phi\right)\,v_r + \frac{d}{d\,t}\,v_\phi \\ \frac{v_\phi\left(\frac{d}{d\,\phi}\,v_r\right)}{r\sin(\theta)} - \frac{v_\theta^2}{r} + \frac{\left(\frac{d}{d\,\theta}\,v_r\right)v_\theta}{r} + \frac{d}{d\,t}\,v_r + v_r\,\left(\frac{d}{d\,r}\,v_r\right) - \frac{v_\phi^2}{r} \end{pmatrix} \quad \text{(B.2.19)}$$

当然であるが、上式は (B.2.17) 式と (B.2.18) 式の和と一致している。

(3) 外力項他

```
/* force term */
FXRT:matrix([F[\theta]],[F[\phi]],[F[r]]);
PGRAD:-subst([A=p],GRADA);
```

物質力項：$\overrightarrow{F}$、圧力項：$\overrightarrow{P} = -grad(p)$ は下記となる。

$$\overrightarrow{F} = \begin{pmatrix} F_\theta \\ F_\phi \\ F_r \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{P} = \begin{pmatrix} -\frac{\frac{d}{d\,\theta}\,p}{r} \\ -\frac{\frac{d}{d\,\phi}\,p}{r\sin(\theta)} \\ -\frac{d}{d\,r}\,p \end{pmatrix} \quad \text{(B.2.20)}$$

(4) 変形速度テンソル

```
/* 変形速度ひずみ */
DD1:matrix(express(grad(u)),express(
 grad(v)),express(grad(w)));
DD:DD1+transpose(DD1);
subst([VA1,VB1,VC1],DD);
ev(%,diff);
subst(LXYZR1,%);
```

```
subst(LXYZR2,%);
subst(LXYZR3,%);
%.TR1;
TR.%;
expand(trigsimp(%));
DD11:subst([a=v[\theta],b=v[\phi],c=v[r]],
 %);
DD12:matrix([e[tt],e[tp],e[tr]],[e[tp],
 e[pp],e[pr]],[e[tr],e[pr],e[rr]]);
DD13:matrix([\sigma[t],\tau[tp],\tau[tr]],
 [\tau[tp],\sigma[p],\tau[pr]],[\tau[tr],
 \tau[pr],\sigma[r]]);
SG111:lhs(DD12)[1][1]=DD11[1][1];
SG121:lhs(DD12)[1][2]=DD11[1][2];
SG131:lhs(DD12)[1][3]=DD11[1][3];
SG221:lhs(DD12)[2][2]=DD11[2][2];
SG231:lhs(DD12)[2][3]=DD11[2][3];
SG331:lhs(DD12)[3][3]=DD11[3][3];
DD13=\mu*DD12;
DD13=\mu*DD11;
```

$x-y-z$ 座標系の変形速度テンソルは (2.6.2) 式から、

$$\begin{pmatrix} e_{xx} & e_{xy} & e_{xz} \\ e_{xy} & e_{yy} & e_{yz} \\ e_{xz} & e_{yz} & e_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\left(\frac{d}{d\,x}\,u\right) & \frac{d}{d\,x}\,v+\frac{d}{d\,y}\,u & \frac{d}{d\,x}\,w+\frac{d}{d\,z}\,u \\ \frac{d}{d\,x}\,v+\frac{d}{d\,y}\,u & 2\left(\frac{d}{d\,y}\,v\right) & \frac{d}{d\,y}\,w+\frac{d}{d\,z}\,v \\ \frac{d}{d\,x}\,w+\frac{d}{d\,z}\,u & \frac{d}{d\,y}\,w+\frac{d}{d\,z}\,v & 2\left(\frac{d}{d\,z}\,w\right) \end{pmatrix}$$

上記右辺項に、(B.2.5) 式の関係を代入し、a,b,c が r,θ,ϕ の関数として微分を実行し、(B.2.1) 式を代入する。ここでテンソル：C の座標変換は、座標変換マトリックス：TR を使用して、「C.4.3 テンソルの座標変換 (695 頁)」に示されている $C'=TR.C.TR^T$ で $x-y-z$ 座標系の変形速度テンソルを極座標系へ変換する。結果を整理して下記を得る。

$$\begin{pmatrix} \frac{2\,c}{r}+\frac{2\left(\frac{d}{d\,\theta}\,a\right)}{r} & -\frac{b\cos(\theta)}{r\sin(\theta)}+\frac{\frac{d}{d\,\phi}\,a}{r\sin(\theta)}+\frac{\frac{d}{d\,\theta}\,b}{r} & \frac{\frac{d}{d\,\theta}\,c}{r}-\frac{a}{r}+\frac{d}{d\,r}\,a \\ -\frac{b\cos(\theta)}{r\sin(\theta)}+\frac{\frac{d}{d\,\phi}\,a}{r\sin(\theta)}+\frac{\frac{d}{d\,\theta}\,b}{r} & \frac{2\,a\cos(\theta)}{r\sin(\theta)}+\frac{2\left(\frac{d}{d\,\phi}\,b\right)}{r\sin(\theta)}+\frac{2\,c}{r} & \frac{\frac{d}{d\,\phi}\,c}{r\sin(\theta)}-\frac{b}{r}+\frac{d}{d\,r}\,b \\ \frac{\frac{d}{d\,\theta}\,c}{r}-\frac{a}{r}+\frac{d}{d\,r}\,a & \frac{\frac{d}{d\,\phi}\,c}{r\sin(\theta)}-\frac{b}{r}+\frac{d}{d\,r}\,b & 2\left(\frac{d}{d\,r}\,c\right) \end{pmatrix}$$

以上から、$a,b,c \to v_\theta, v_\phi, v_r$ の置き換えを行って極座標の変形速度テンソルは、

$$\begin{pmatrix} e_{\theta\theta} & e_{\theta\phi} & e_{\theta r} \\ e_{\theta\phi} & e_{\phi\phi} & e_{\phi r} \\ e_{\theta r} & e_{\phi r} & e_{rr} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2\left(\frac{d}{d\,\theta}\,v_\theta\right)}{r}+\frac{2\,v_r}{r} & \frac{\frac{d}{d\,\phi}\,v_\theta}{r\sin(\theta)}-\frac{v_\phi\cos(\theta)}{r\sin(\theta)}+\frac{\frac{d}{d\,\theta}\,v_\phi}{r} & \frac{d}{d\,r}\,v_\theta-\frac{v_\theta}{r}+\frac{\frac{d}{d\,\theta}\,v_r}{r} \\ \frac{\frac{d}{d\,\phi}\,v_\theta}{r\sin(\theta)}-\frac{v_\phi\cos(\theta)}{r\sin(\theta)}+\frac{\frac{d}{d\,\theta}\,v_\phi}{r} & \frac{2\,v_\theta\cos(\theta)}{r\sin(\theta)}+\frac{2\left(\frac{d}{d\,\phi}\,v_\phi\right)}{r\sin(\theta)}+\frac{2\,v_r}{r} & \frac{\frac{d}{d\,\phi}\,v_r}{r\sin(\theta)}-\frac{v_\phi}{r}+\frac{d}{d\,r}\,v_\phi \\ \frac{d}{d\,r}\,v_\theta-\frac{v_\theta}{r}+\frac{\frac{d}{d\,\theta}\,v_r}{r} & \frac{\frac{d}{d\,\phi}\,v_r}{r\sin(\theta)}-\frac{v_\phi}{r}+\frac{d}{d\,r}\,v_\phi & 2\left(\frac{d}{d\,r}\,v_r\right) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} e_{\theta\theta} &= \frac{2\left(\frac{d}{d\,\theta}\,v_\theta\right)}{r}+\frac{2\,v_r}{r}, \quad e_{\theta\phi}=\frac{\frac{d}{d\,\phi}\,v_\theta}{r\sin(\theta)}-\frac{v_\phi\cos(\theta)}{r\sin(\theta)}+\frac{\frac{d}{d\,\theta}\,v_\phi}{r} \\ e_{\theta r} &= \frac{d}{d\,r}\,v_\theta-\frac{v_\theta}{r}+\frac{\frac{d}{d\,\theta}\,v_r}{r}, \quad e_{\phi\phi}=\frac{2\,v_\theta\cos(\theta)}{r\sin(\theta)}+\frac{2\left(\frac{d}{d\,\phi}\,v_\phi\right)}{r\sin(\theta)}+\frac{2\,v_r}{r} \\ e_{\phi r} &= \frac{\frac{d}{d\,\phi}\,v_r}{r\sin(\theta)}-\frac{v_\phi}{r}+\frac{d}{d\,r}\,v_\phi, \quad e_{rr}=2\left(\frac{d}{d\,r}\,v_r\right) \end{aligned} \tag{B.2.21}$$

極座標の応力テンソルは、

$$\begin{pmatrix} \sigma_\theta & \tau_{\theta\phi} & \tau_{\theta r} \\ \tau_{\theta\phi} & \sigma_\phi & \tau_{\phi r} \\ \tau_{\theta r} & \tau_{\phi r} & \sigma_r \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} e_{\theta\theta} & e_{\theta\phi} & e_{\theta r} \\ e_{\theta\phi} & e_{\phi\phi} & e_{\phi r} \\ e_{\theta r} & e_{\phi r} & e_{rr} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \mu\left(\frac{2\left(\frac{d}{d\,\theta}\,v_\theta\right)}{r}+\frac{2\,v_r}{r}\right) & \mu\left(\frac{\frac{d}{d\,\phi}\,v_\theta}{r\sin(\theta)}-\frac{v_\phi\cos(\theta)}{r\sin(\theta)}+\frac{\frac{d}{d\,\theta}\,v_\phi}{r}\right) & \mu\left(\frac{d}{d\,r}\,v_\theta-\frac{v_\theta}{r}+\frac{\frac{d}{d\,\theta}\,v_r}{r}\right) \\ \mu\left(\frac{\frac{d}{d\,\phi}\,v_\theta}{r\sin(\theta)}-\frac{v_\phi\cos(\theta)}{r\sin(\theta)}+\frac{\frac{d}{d\,\theta}\,v_\phi}{r}\right) & \mu\left(\frac{2\,v_\theta\cos(\theta)}{r\sin(\theta)}+\frac{2\left(\frac{d}{d\,\phi}\,v_\phi\right)}{r\sin(\theta)}+\frac{2\,v_r}{r}\right) & \mu\left(\frac{\frac{d}{d\,\phi}\,v_r}{r\sin(\theta)}-\frac{v_\phi}{r}+\frac{d}{d\,r}\,v_\phi\right) \\ \mu\left(\frac{d}{d\,r}\,v_\theta-\frac{v_\theta}{r}+\frac{\frac{d}{d\,\theta}\,v_r}{r}\right) & \mu\left(\frac{\frac{d}{d\,\phi}\,v_r}{r\sin(\theta)}-\frac{v_\phi}{r}+\frac{d}{d\,r}\,v_\phi\right) & 2\,\mu\left(\frac{d}{d\,r}\,v_r\right) \end{pmatrix} \tag{B.2.22}$$

(5) 粘性項　ベクトルの式

粘性項は $\nabla^2\overrightarrow{V}$ で表せる。下記の関係式から、

$$\nabla^2\overrightarrow{V} = grad(div(\overrightarrow{V})) - curl(curl(\overrightarrow{V})) \qquad \text{(B.2.23)}$$

```
/* viscous term */
subst([A=DIVXRT11],GRADA);
NABRARTX1:ev(%,diff);
CURL1:v[1]=row(VXRTCURL0,1)[1][1];
CURL2:v[2]=row(VXRTCURL0,2)[1][1];
CURL3:v[3]=row(VXRTCURL0,3)[1][1];
VXRTCURL1:subst([a=v[1],b=v[2],c=v[3]],
 VXRTCURL0);
subst([CURL1,CURL2,CURL3],VXRTCURL1);
expand(%);
```

```
NABRARTX2:expand(ev(%,diff));
expand(NABRARTX1-NABRARTX2);
subst([a=v[\theta],b=v[\phi],c=v[r]],%);
NABRARTX:subst([v[\phi]/r^2=-v[\phi]*cos(
 \theta) ^2/r^2/sin(\theta)^2+v[\phi]/r^2/
 sin(\theta)^2],%);
NABRA2X:matrix([subst([A=v[\theta]],
 NABRA2)], [subst([A=v[\phi]],NABRA2)],
 [subst([A=v[r]],NABRA2)]);
NABRARTX-NABRA2X;
```

$grad(div(\overrightarrow{V}))$ 項について、(B.2.9) 式から div の式が得られているので、これを $grad$ の式 : (B.2.7) 式に代入し、微分を実行すると下記となる。

$$
\begin{aligned}
grad(div(\overrightarrow{V})) &= \begin{pmatrix}
\dfrac{\frac{d}{d\theta}\left(\frac{a\cos(\theta)}{r\sin(\theta)}+\frac{\frac{d}{d\phi}b}{r\sin(\theta)}+\frac{2c}{r}+\frac{\frac{d}{d\theta}a}{r}+\frac{d}{dr}c\right)}{r} \\
\dfrac{\frac{d}{d\phi}\left(\frac{a\cos(\theta)}{r\sin(\theta)}+\frac{\frac{d}{d\phi}b}{r\sin(\theta)}+\frac{2c}{r}+\frac{\frac{d}{d\theta}a}{r}+\frac{d}{dr}c\right)}{r\sin(\theta)} \\
\frac{d}{dr}\left(\frac{a\cos(\theta)}{r\sin(\theta)}+\frac{\frac{d}{d\phi}b}{r\sin(\theta)}+\frac{2c}{r}+\frac{\frac{d}{d\theta}a}{r}+\frac{d}{dr}c\right)
\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}
\dfrac{\frac{\left(\frac{d}{d\theta}a\right)\cos(\theta)}{r\sin(\theta)}+\frac{\frac{d^2}{d\phi\,d\theta}b}{r\sin(\theta)}-\frac{a\cos(\theta)^2}{r\sin(\theta)^2}-\frac{\left(\frac{d}{d\phi}b\right)\cos(\theta)}{r\sin(\theta)^2}+\frac{2\left(\frac{d}{d\theta}c\right)}{r}+\frac{\frac{d^2}{d\theta^2}a}{r}-\frac{a}{r}+\frac{d^2}{dr\,d\theta}c}{r} \\
\dfrac{\frac{\left(\frac{d}{d\phi}a\right)\cos(\theta)}{r\sin(\theta)}+\frac{\frac{d^2}{d\phi^2}b}{r\sin(\theta)}+\frac{2\left(\frac{d}{d\phi}c\right)}{r}+\frac{\frac{d^2}{d\phi\,d\theta}a}{r}+\frac{d^2}{d\phi\,dr}c}{r\sin(\theta)} \\
\frac{\left(\frac{d}{dr}a\right)\cos(\theta)}{r\sin(\theta)}-\frac{a\cos(\theta)}{r^2\sin(\theta)}+\frac{\frac{d^2}{d\phi\,dr}b}{r\sin(\theta)}-\frac{\frac{d}{d\phi}b}{r^2\sin(\theta)}+\frac{2\left(\frac{d}{dr}c\right)}{r}+\frac{\frac{d^2}{dr\,d\theta}a}{r}-\frac{2c}{r^2}-\frac{\frac{d}{d\theta}a}{r^2}+\frac{d^2}{dr^2}c
\end{pmatrix}
\end{aligned}
\qquad \text{(B.2.24)}
$$

$curl(curl(\overrightarrow{V}))$ について、(B.2.14) 式の $curl(\overrightarrow{V})$ の各項を下記のように v_1, v_2, v_3 と対応させ、

$$v_1 = -\frac{\left(\left(\frac{d}{dr}b\right)r+b\right)\sin(\theta)-\frac{d}{d\phi}c}{r\sin(\theta)}, \quad v_2 = \frac{\left(\frac{d}{dr}a\right)r-\frac{d}{d\theta}c+a}{r}, \quad v_3 = \frac{\left(\frac{d}{d\theta}b\right)\sin(\theta)+b\cos(\theta)-\frac{d}{d\phi}a}{r\sin(\theta)}$$

上記の関係を代入して、

$$
\begin{aligned}
curl(curl(\overrightarrow{V})) &= \begin{pmatrix}
-\dfrac{\left(\left(\frac{d}{dr}v_2\right)r+v_2\right)\sin(\theta)-\frac{d}{d\phi}v_3}{r\sin(\theta)} \\
\dfrac{\left(\frac{d}{dr}v_1\right)r-\frac{d}{d\theta}v_3+v_1}{r} \\
\dfrac{\left(\frac{d}{d\theta}v_2\right)\sin(\theta)+v_2\cos(\theta)-\frac{d}{d\phi}v_1}{r\sin(\theta)}
\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}
\frac{\frac{d^2}{d\phi\,d\theta}b}{r^2\sin(\theta)}+\frac{\left(\frac{d}{d\phi}b\right)\cos(\theta)}{r^2\sin(\theta)^2}-\frac{\frac{d^2}{d\phi^2}a}{r^2\sin(\theta)^2}+\frac{\frac{d^2}{dr\,d\theta}c}{r}-\frac{2\left(\frac{d}{dr}a\right)}{r}-\frac{d^2}{dr^2}a \\
-\frac{\left(\frac{d}{d\theta}b\right)\cos(\theta)}{r^2\sin(\theta)}+\frac{\frac{d^2}{d\phi\,dr}c}{r\sin(\theta)}+\frac{\frac{d^2}{d\phi\,d\theta}a}{r^2\sin(\theta)}+\frac{b\cos(\theta)^2}{r^2\sin(\theta)^2}-\frac{\left(\frac{d}{d\phi}a\right)\cos(\theta)}{r^2\sin(\theta)^2}-\frac{2\left(\frac{d}{dr}b\right)}{r}-\frac{\frac{d^2}{d\theta^2}b}{r^2}+\frac{b}{r^2}-\frac{d^2}{dr^2}b \\
\frac{\left(\frac{d}{dr}a\right)\cos(\theta)}{r\sin(\theta)}-\frac{\left(\frac{d}{d\theta}c\right)\cos(\theta)}{r^2\sin(\theta)}+\frac{a\cos(\theta)}{r^2\sin(\theta)}+\frac{\frac{d^2}{d\phi\,dr}b}{r\sin(\theta)}+\frac{\frac{d}{d\phi}b}{r^2\sin(\theta)}-\frac{\frac{d^2}{d\phi^2}c}{r^2\sin(\theta)^2}+\frac{\frac{d^2}{dr\,d\theta}a}{r}-\frac{\frac{d^2}{d\theta^2}c}{r^2}+\frac{\frac{d}{d\theta}a}{r^2}
\end{pmatrix}
\end{aligned}
\qquad \text{(B.2.25)}
$$

(B.2.24) 式と (B.2.25) 式に $a,b,c \to v_\theta, v_\phi, v_r$ の置き換えを行って、粘性項は、

$$
\begin{aligned}
\nabla^2\overrightarrow{V} &= grad(div(\overrightarrow{V})) - curl(curl(\overrightarrow{V})) \\
&= \begin{pmatrix}
\frac{\frac{d^2}{d\theta^2}v_\theta}{r^2} + \frac{\cos(\theta)\left(\frac{d}{d\theta}v_\theta\right)}{r^2\sin(\theta)} + \frac{d^2}{dr^2}v_\theta + \frac{2\left(\frac{d}{dr}v_\theta\right)}{r} + \frac{\frac{d^2}{d\phi^2}v_\theta}{r^2\sin(\theta)^2} - \frac{v_\theta\cos(\theta)^2}{r^2\sin(\theta)^2} - \frac{2\left(\frac{d}{d\phi}v_\phi\right)\cos(\theta)}{r^2\sin(\theta)^2} - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{2\left(\frac{d}{d\theta}v_r\right)}{r^2} \\
\frac{2\cos(\theta)\left(\frac{d}{d\phi}v_\theta\right)}{r^2\sin(\theta)^2} + \frac{\left(\frac{d}{d\theta}v_\phi\right)\cos(\theta)}{r^2\sin(\theta)} + \frac{2\left(\frac{d}{d\phi}v_r\right)}{r^2\sin(\theta)} + \frac{\frac{d^2}{d\phi^2}v_\phi}{r^2\sin(\theta)^2} - \frac{v_\phi}{r^2\sin(\theta)^2} + \frac{2\left(\frac{d}{dr}v_\phi\right)}{r} + \frac{\frac{d^2}{d\theta^2}v_\phi}{r^2} + \frac{d^2}{dr^2}v_\phi \\
-\frac{2\left(\frac{d}{d\theta}v_\theta\right)}{r^2} - \frac{2v_\theta\cos(\theta)}{r^2\sin(\theta)} + \frac{\left(\frac{d}{d\theta}v_r\right)\cos(\theta)}{r^2\sin(\theta)} - \frac{2\left(\frac{d}{d\phi}v_\phi\right)}{r^2\sin(\theta)} + \frac{\frac{d^2}{d\phi^2}v_r}{r^2\sin(\theta)^2} + \frac{\frac{d^2}{d\theta^2}v_r}{r^2} + \frac{d^2}{dr^2}v_r + \frac{2\left(\frac{d}{dr}v_r\right)}{r} - \frac{2v_r}{r^2}
\end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{B.2.26}
$$

(6) 粘性項　$\nabla^2\mathbf{V}$ の変換

```
/* viscous term R-1 */
div(DD[1]);
express(%);
PX1:ev(%,diff);
div(DD[2]);
express(%);
PX2:ev(%,diff);
div(DD[3]);
express(%);
PX3:ev(%,diff);
MSX1:diff(MS1,x,1);
MSX11:solve(%,'diff(w,x,1,z,1))[1];
MSY1:diff(MS1,y,1);
MSY11:solve(%,'diff(w,y,1,z,1))[1];
MSZ1:diff(MS1,z,1);
MSZ11:solve(%,'diff(v,y,1,z,1))[1];
DD2:matrix([subst([MSX11],PX1)],[subst(
 [MSY11], PX2)],[subst([MSZ11],PX3)]);
subst([VA1,VB1,VC1],DD2);
ev(%,diff);
subst(LXYZR11,%);
```

```
subst(LXYZR21,%);
subst(LXYZR31,%);
subst(LXYZR1,%);
subst(LXYZR2,%);
subst(LXYZR3,%);
TR.%;
DD2RTZ1:expand(trigsimp(%));
NABRARTX1:subst([a=v[\theta],b=v[\phi],
 c=v[r]],%);
trigsimp(NABRARTX1-NABRARTX);
/* Navier-Stokes Equations */
\rho*(VRTDT+VGRADV)=FXRT+PGRAD
 +\mu*NABRARTX;
DIVXRT2=0;
subst([A=\Phi],NABRA2)=0;
```

$x-y-z$ 座標系の $\nabla^2\overrightarrow{V}$ は (2.6.3) 式から下記である。

$$
\nabla^2\overrightarrow{V} = \begin{pmatrix}
\frac{d^2}{dz^2}u + \frac{d^2}{dy^2}u + \frac{d^2}{dx^2}u \\
\frac{d^2}{dz^2}v + \frac{d^2}{dy^2}v + \frac{d^2}{dx^2}v \\
\frac{d^2}{dz^2}w + \frac{d^2}{dy^2}w + \frac{d^2}{dx^2}w
\end{pmatrix}
$$

上式に (B.2.5) 式の関係を代入し、a,b,c が r,θ,ϕ の関数として微分を実行する。更に、(B.2.1) 式および (B.2.11) 式を代入し、座標変換マトリックス：TR を掛けることにより、極座標系へ変換し、結果は下記となる。

$$
\begin{pmatrix}
\frac{\left(\frac{d}{d\theta}a\right)\cos(\theta)}{r^2\sin(\theta)} - \frac{2\left(\frac{d}{d\phi}b\right)\cos(\theta)}{r^2\sin(\theta)^2} + \frac{\frac{d^2}{d\phi^2}a}{r^2\sin(\theta)^2} - \frac{a}{r^2\sin(\theta)^2} + \frac{2\left(\frac{d}{dr}a\right)}{r} + \frac{2\left(\frac{d}{d\theta}c\right)}{r^2} + \frac{\frac{d^2}{d\theta^2}a}{r^2} + \frac{d^2}{dr^2}a \\
\frac{\left(\frac{d}{d\theta}b\right)\cos(\theta)}{r^2\sin(\theta)} + \frac{2\left(\frac{d}{d\phi}c\right)}{r^2\sin(\theta)} + \frac{2\left(\frac{d}{d\phi}a\right)\cos(\theta)}{r^2\sin(\theta)^2} + \frac{\frac{d^2}{d\phi^2}b}{r^2\sin(\theta)^2} - \frac{b}{r^2\sin(\theta)^2} + \frac{2\left(\frac{d}{dr}b\right)}{r} + \frac{\frac{d^2}{d\theta^2}b}{r^2} + \frac{d^2}{dr^2}b \\
\frac{\left(\frac{d}{d\theta}c\right)\cos(\theta)}{r^2\sin(\theta)} - \frac{2a\cos(\theta)}{r^2\sin(\theta)} - \frac{2\left(\frac{d}{d\phi}b\right)}{r^2\sin(\theta)} + \frac{\frac{d^2}{d\phi^2}c}{r^2\sin(\theta)^2} + \frac{2\left(\frac{d}{dr}c\right)}{r} + \frac{\frac{d^2}{d\theta^2}c}{r^2} - \frac{2c}{r^2} - \frac{2\left(\frac{d}{d\theta}a\right)}{r^2} + \frac{d^2}{dr^2}c
\end{pmatrix}
$$

$a,b,c \to v_\theta, v_\phi, v_r$ に置き換え、

$$
\nabla^2\overrightarrow{V} = \begin{pmatrix}
\frac{\frac{d^2}{d\theta^2}v_\theta}{r^2} + \frac{\cos(\theta)\left(\frac{d}{d\theta}v_\theta\right)}{r^2\sin(\theta)} + \frac{d^2}{dr^2}v_\theta + \frac{2\left(\frac{d}{dr}v_\theta\right)}{r} + \frac{\frac{d^2}{d\phi^2}v_\theta}{r^2\sin(\theta)^2} - \frac{2\left(\frac{d}{d\phi}v_\phi\right)\cos(\theta)}{r^2\sin(\theta)^2} - \frac{v_\theta}{r^2\sin(\theta)^2} + \frac{2\left(\frac{d}{d\theta}v_r\right)}{r^2} \\
\frac{2\cos(\theta)\left(\frac{d}{d\phi}v_\theta\right)}{r^2\sin(\theta)^2} + \frac{\left(\frac{d}{d\theta}v_\phi\right)\cos(\theta)}{r^2\sin(\theta)} + \frac{2\left(\frac{d}{d\phi}v_r\right)}{r^2\sin(\theta)} + \frac{\frac{d^2}{d\phi^2}v_\phi}{r^2\sin(\theta)^2} - \frac{v_\phi}{r^2\sin(\theta)^2} + \frac{2\left(\frac{d}{dr}v_\phi\right)}{r} + \frac{\frac{d^2}{d\theta^2}v_\phi}{r^2} + \frac{d^2}{dr^2}v_\phi \\
-\frac{2\left(\frac{d}{d\theta}v_\theta\right)}{r^2} - \frac{2v_\theta\cos(\theta)}{r^2\sin(\theta)} + \frac{\left(\frac{d}{d\theta}v_r\right)\cos(\theta)}{r^2\sin(\theta)} - \frac{2\left(\frac{d}{d\phi}v_\phi\right)}{r^2\sin(\theta)} + \frac{\frac{d^2}{d\phi^2}v_r}{r^2\sin(\theta)^2} + \frac{\frac{d^2}{d\theta^2}v_r}{r^2} + \frac{d^2}{dr^2}v_r + \frac{2\left(\frac{d}{dr}v_r\right)}{r} - \frac{2v_r}{r^2}
\end{pmatrix}
\tag{B.2.27}
$$

上式は当然であるが、(B.2.26) 式と一致する。

(7)Navier-Stokes の式他まとめ

極座標系の各式をここにまとめる。非圧縮性流体の Navier-Stokes の式は下記となる。

$$\begin{pmatrix} \rho\left(\frac{v_\theta\left(\frac{d}{d\theta}v_\theta\right)}{r}+\frac{d}{dt}v_\theta+v_r\left(\frac{d}{dr}v_\theta\right)+\frac{v_\phi\left(\frac{d}{d\phi}v_\theta\right)}{r\sin(\theta)}-\frac{v_\phi^2\cos(\theta)}{r\sin(\theta)}+\frac{v_r\,v_\theta}{r}\right) \\ \rho\left(\frac{v_\phi\,v_\theta\cos(\theta)}{r\sin(\theta)}+\frac{v_\phi\left(\frac{d}{d\phi}v_\phi\right)}{r\sin(\theta)}+\frac{\left(\frac{d}{d\theta}v_\phi\right)v_\theta}{r}+\frac{v_\phi\,v_r}{r}+\left(\frac{d}{dr}v_\phi\right)v_r+\frac{d}{dt}v_\phi\right) \\ \rho\left(\frac{v_\phi\left(\frac{d}{d\phi}v_r\right)}{r\sin(\theta)}-\frac{v_\theta^2}{r}+\frac{\left(\frac{d}{d\theta}v_r\right)v_\theta}{r}+\frac{d}{dt}v_r+v_r\left(\frac{d}{dr}v_r\right)-\frac{v_\phi^2}{r}\right) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \mu\left(\frac{\frac{d^2}{d\theta^2}v_\theta}{r^2}+\frac{\cos(\theta)\left(\frac{d}{d\theta}v_\theta\right)}{r^2\sin(\theta)}+\frac{d^2}{dr^2}v_\theta+\frac{2\left(\frac{d}{dr}v_\theta\right)}{r}+\frac{\frac{d^2}{d\phi^2}v_\theta}{r^2\sin(\theta)^2}-\frac{v_\theta\cos(\theta)^2}{r^2\sin(\theta)^2}-\frac{2\left(\frac{d}{d\phi}v_\phi\right)\cos(\theta)}{r^2\sin(\theta)^2}-\frac{v_\theta}{r^2}+\frac{2\left(\frac{d}{d\theta}v_r\right)}{r^2}\right)+F_\theta-\frac{\frac{d}{d\theta}p}{r} \\ \mu\left(\frac{2\cos(\theta)\left(\frac{d}{d\phi}v_\theta\right)}{r^2\sin(\theta)^2}+\frac{\left(\frac{d}{d\theta}v_\phi\right)\cos(\theta)}{r^2\sin(\theta)}+\frac{2\left(\frac{d}{d\phi}v_r\right)}{r^2\sin(\theta)}+\frac{\frac{d^2}{d\phi^2}v_\phi}{r^2\sin(\theta)^2}-\frac{v_\phi}{r^2\sin(\theta)^2}+\frac{2\left(\frac{d}{dr}v_\phi\right)}{r}+\frac{\frac{d^2}{d\theta^2}v_\phi}{r^2}+\frac{d^2}{dr^2}v_\phi\right)-\frac{\frac{d}{d\phi}p}{r\sin(\theta)}+F_\phi \\ \mu\left(-\frac{2\left(\frac{d}{d\theta}v_\theta\right)}{r^2}-\frac{2\,v_\theta\cos(\theta)}{r^2\sin(\theta)}+\frac{\left(\frac{d}{d\theta}v_r\right)\cos(\theta)}{r^2\sin(\theta)}-\frac{2\left(\frac{d}{d\phi}v_\phi\right)}{r^2\sin(\theta)}+\frac{\frac{d^2}{d\phi^2}v_r}{r^2\sin(\theta)^2}+\frac{\frac{d^2}{d\theta^2}v_r}{r^2}+\frac{d^2}{dr^2}v_r+\frac{2\left(\frac{d}{dr}v_r\right)}{r}-\frac{2\,v_r}{r^2}\right)+F_r-\frac{d}{dr}p \end{pmatrix} \tag{B.2.28}$$

非圧縮流体の質量保存の方程式は、

$$div(\overrightarrow{V})=\frac{\frac{d}{d\theta}v_\theta}{r}+\frac{v_\theta\cos(\theta)}{r\sin(\theta)}+\frac{\frac{d}{d\phi}v_\phi}{r\sin(\theta)}+\frac{d}{dr}v_r+\frac{2\,v_r}{r}=0 \tag{B.2.29}$$

非圧縮流体の速度ポッテンシャルの質量保存の方程式は、

$$\nabla^2\Phi=\frac{\left(\frac{d}{d\theta}\Phi\right)\cos(\theta)}{r^2\sin(\theta)}+\frac{\frac{d^2}{d\phi^2}\Phi}{r^2\sin(\theta)^2}+\frac{2\left(\frac{d}{dr}\Phi\right)}{r}+\frac{\frac{d^2}{d\theta^2}\Phi}{r^2}+\frac{d^2}{dr^2}\Phi=0 \tag{B.2.30}$$

B.3 直交曲線座標系への座標変換

直交座標系：x, y, z の点は、$x =$ 一定, $y =$ 一定, $z =$ 一定 のお互いに垂直な面の交点で与えられる。直交座標系：x, y, z の単位ベクトルを各々$\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ とする。

いま、直交座標系：u_1, u_2, u_3 とする。これを x, y, z 座標系で表すと、

$$\begin{aligned} x =& f_1(u_1, u_2, u_3),\ y = f_2(u_1, u_2, u_3), \\ z =& f_3(u_1, u_2, u_3) \end{aligned}$$

直交座標系：u_1, u_2, u_3 の点は、$u_1 =$ 一定, $u_2 =$ 一定, $u_3 =$ 一定 のお互いに垂直な面の交点で与えられる。u_1, u_2, u_3 の単位ベクトルを各々$\vec{i_1}$, $\vec{i_2}$, $\vec{i_3}$ とする。u_1, u_2, u_3 と $u_1 + du_1, u_2 + du_2, u_3 + du_3$ に対応する面で、端部：$h_1\, du_1, h_2\, du_2, h_3\, du_3$ の直方体の図を描くと下図となる。

ここで h_1, h_2, h_3 は下記の関係式で得られる。

$$ds^2 = dz^2 + dy^2 + dx^2 \tag{B.3.1}$$

ここで、

$$\begin{aligned} dx =& du_3 \left(\frac{d}{d\,u_3}\,x\right) + du_2 \left(\frac{d}{d\,u_2}\,x\right) + du_1 \left(\frac{d}{d\,u_1}\,x\right) \\ dy =& du_3 \left(\frac{d}{d\,u_3}\,y\right) + du_2 \left(\frac{d}{d\,u_2}\,y\right) + du_1 \left(\frac{d}{d\,u_1}\,y\right) \\ dz =& du_3 \left(\frac{d}{d\,u_3}\,z\right) + du_2 \left(\frac{d}{d\,u_2}\,z\right) + du_1 \left(\frac{d}{d\,u_1}\,z\right) \end{aligned} \tag{B.3.2}$$

(B.3.1) 式に (B.3.2) 式を代入すると、

$$\begin{aligned} ds^2 =& \left(du_3 \left(\frac{d}{d\,u_3}\,z\right) + du_2 \left(\frac{d}{d\,u_2}\,z\right) + du_1 \left(\frac{d}{d\,u_1}\,z\right)\right)^2 \\ &+ \left(du_3 \left(\frac{d}{d\,u_3}\,y\right) + du_2 \left(\frac{d}{d\,u_2}\,y\right) + du_1 \left(\frac{d}{d\,u_1}\,y\right)\right)^2 \\ &+ \left(du_3 \left(\frac{d}{d\,u_3}\,x\right) + du_2 \left(\frac{d}{d\,u_2}\,x\right) + du_1 \left(\frac{d}{d\,u_1}\,x\right)\right)^2 \end{aligned} \tag{B.3.3}$$

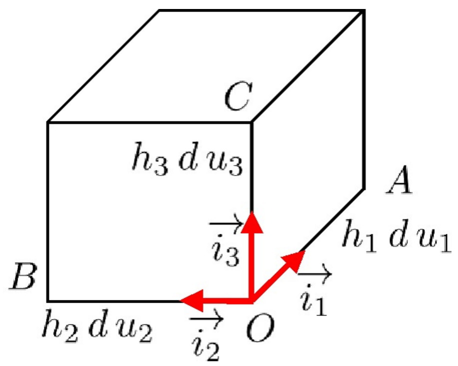


図 B.3.1: 直交曲線座標

```
kill(all);
depends([x,y,z,\Phi],[u[1],u[2],u[3]]);
DS1:(ds)^2=(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2;
DS2:(ds)^2=h[1]^2*(du[1])^2+h[2]^2
 *(du[2])^2+h[3]^2*(du[3])^2;
DX1:dx=diff(x,u[1])*du[1]+diff(x,u[2])
 *du[2]+diff(x,u[3])*du[3];
DY1:dy=diff(y,u[1])*du[1]+diff(y,u[2])
 *du[2]+diff(y,u[3])*du[3];
DZ1:dz=diff(z,u[1])*du[1]+diff(z,u[2])
 *du[2]+diff(z,u[3])*du[3];
DS2:subst([DX1,DY1,DZ1],DS1);
subst([du[2]=0,du[3]=0],DS2);
factor(%);
%/(du[1])^2;
H12:h[1]^2=rhs(%);
subst([du[3]=0,du[1]=0],DS2);
factor(%);
%/(du[2])^2;
H22:h[2]^2=rhs(%);
subst([du[1]=0,du[2]=0],DS2);
factor(%);
%/(du[3])^2;
H32:h[3]^2=rhs(%);
```

上式で直交座標系の性質から、$du_1\, du_2$ の高次項を無視する。また、du_1 について、du_1 の方向に対して、du_2、du_3 の方向は直角であるため、上式で $du_2 = 0$, $du_3 = 0$ と置くことができ、下記の関係式を得る。

$$ds^2 = du_1^2 \left(\left(\frac{d}{d\,u_1}\,z\right)^2 + \left(\frac{d}{d\,u_1}\,y\right)^2 + \left(\frac{d}{d\,u_1}\,x\right)^2\right)$$

上式から、h_1 は下記となる。

$$h_1^2 = \left(\frac{d}{d\,u_1}\,z\right)^2 + \left(\frac{d}{d\,u_1}\,y\right)^2 + \left(\frac{d}{d\,u_1}\,x\right)^2$$

上記から、

$$\begin{aligned} ds^2 =& dz^2 + dy^2 + dx^2 \\ =& du_3^2\, h_3^2 + du_2^2\, h_2^2 + du_1^2\, h_1^2 \end{aligned} \tag{B.3.4}$$

ここで、

$$\begin{aligned} h_1^2 =& \left(\frac{d}{d\,u_1}\,z\right)^2 + \left(\frac{d}{d\,u_1}\,y\right)^2 + \left(\frac{d}{d\,u_1}\,x\right)^2 \\ h_2^2 =& \left(\frac{d}{d\,u_2}\,z\right)^2 + \left(\frac{d}{d\,u_2}\,y\right)^2 + \left(\frac{d}{d\,u_2}\,x\right)^2 \\ h_3^2 =& \left(\frac{d}{d\,u_3}\,z\right)^2 + \left(\frac{d}{d\,u_3}\,y\right)^2 + \left(\frac{d}{d\,u_3}\,x\right)^2 \end{aligned} \tag{B.3.5}$$

直交座標系：x, y, z では ∇ は (C.3.9) 式から、

$$\nabla = \frac{d}{d\,x}\,\vec{i} + \frac{d}{d\,y}\,\vec{j} + \frac{d}{d\,z}\,\vec{k} \tag{B.3.6}$$

∇ を直交座標系：u_1, u_2, u_3 で表すと、

$$\begin{aligned}\nabla F =& \frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial u_1}F\vec{i_1} + \frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial u_2}F\vec{i_2} + \frac{1}{h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}F\vec{i_3}\\ =& F_1\,\vec{i_1} + F_2\,\vec{i_2} + F_3\,\vec{i_3}\end{aligned}$$

ここで、 $F_1 = \dfrac{1}{h_1}\dfrac{\partial}{\partial u_1}F,$

$$F_2 = \frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial u_2}F, \quad F_3 = \frac{1}{h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}F \tag{B.3.7}$$

また、

$$\nabla = \frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial u_1}\vec{i_1} + \frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial u_2}\vec{i_2} + \frac{1}{h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}\vec{i_3} \tag{B.3.8}$$

$\nabla\vec{F}$ について、(B.3.7) 式から、

$$\begin{aligned}\nabla\vec{F} =& F_1\,\nabla\vec{i_1} + \vec{i_1}\,\nabla F_1 + F_2\,\nabla\vec{i_2} + \vec{i_2}\,\nabla F_2\\ &+ F_3\,\nabla\vec{i_3} + \vec{i_3}\,\nabla F_3\end{aligned} \tag{B.3.9}$$

上式の ∇F_1 について、$\vec{i_1}\cdot\vec{i_1} = 1,\ \vec{i_1}\cdot\vec{i_2} = 0,\ \vec{i_1}\cdot\vec{i_3} = 0$ であるから、

$$\vec{i_1}\,\nabla F_1 = \frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial u_1}F_1$$

同様に、

$$\begin{aligned}\vec{i_1}\,\nabla F_1 =& \frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial u_1}F_1\\ \vec{i_2}\,\nabla F_2 =& \frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial u_2}F_2\\ \vec{i_3}\,\nabla F_3 =& \frac{1}{h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}F_3\end{aligned} \tag{B.3.10}$$

(B.3.9) 式の $\nabla\vec{i_1}$ について、(C.3.15) 式から、

$$\nabla\vec{i_1} = \nabla\left(\vec{i_2}\times\vec{i_3}\right) = \vec{i_3}\left(\nabla\times\vec{i_2}\right) - \vec{i_2}\left(\nabla\times\vec{i_3}\right)$$

同様にして、

$$\begin{aligned}\nabla\vec{i_1} =& \nabla\left(\vec{i_2}\times\vec{i_3}\right) = \vec{i_3}\left(\nabla\times\vec{i_2}\right) - \vec{i_2}\left(\nabla\times\vec{i_3}\right)\\ \nabla\vec{i_2} =& \nabla\left(\vec{i_3}\times\vec{i_1}\right) = \vec{i_1}\left(\nabla\times\vec{i_3}\right) - \vec{i_3}\left(\nabla\times\vec{i_1}\right)\\ \nabla\vec{i_3} =& \nabla\left(\vec{i_1}\times\vec{i_2}\right) = \vec{i_2}\left(\nabla\times\vec{i_1}\right) - \vec{i_1}\left(\nabla\times\vec{i_2}\right)\end{aligned} \tag{B.3.11}$$

さらに、$\nabla\times\vec{i_1}$ について、(C.3.20) 式から、

$$\frac{1}{h_1}\left(\nabla\times\vec{i_1}\right) = \nabla\times\left(\vec{i_1}\,\frac{1}{h_1}\right) + \vec{i_1}\times\nabla\left(\frac{1}{h_1}\right)$$

(B.3.8) 式から $\vec{i_1}\,\frac{1}{h_1} = \nabla u_1$ で上式の右辺第一項は $\nabla\times(\nabla u_1) = 0$ から零となる。よって、上式は、

$$\begin{aligned}\frac{1}{h_1}\left(\nabla\times\vec{i_1}\right) =& \vec{i_1}\times\nabla\left(\frac{1}{h_1}\right)\\ =& -\vec{i_1}\times\left(\frac{1}{h_1^3}\frac{\partial}{\partial u_1}h_1\,\vec{i_1}\right.\\ &\left. + \frac{1}{h_1^2 h_2}\frac{\partial}{\partial u_2}h_1\,\vec{i_2} + \frac{1}{h_1^2 h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}h_1\,\vec{i_3}\right)\\ =& -\frac{1}{h_1^2 h_2}\frac{\partial}{\partial u_2}h_1\,\vec{i_3} + \frac{1}{h_1^2 h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}h_1\,\vec{i_2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{h_2}\left(\nabla\times\vec{i_2}\right) =& \vec{i_2}\times\nabla\left(\frac{1}{h_2}\right)\\ =& -\vec{i_2}\times\left(\frac{1}{h_1 h_2^2}\frac{\partial}{\partial u_1}h_2\,\vec{i_1}\right.\\ &\left. + \frac{1}{h_2^3}\frac{\partial}{\partial u_2}h_2\,\vec{i_2} + \frac{1}{h_2^2 h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}h_2\,\vec{i_3}\right)\\ =& \frac{1}{h_1 h_2^2}\frac{\partial}{\partial u_1}h_2\,\vec{i_3} - \frac{1}{h_2^2 h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}h_2\,\vec{i_1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{h_3}\left(\nabla\times\vec{i_3}\right) =& \vec{i_3}\times\nabla\left(\frac{1}{h_3}\right)\\ =& -\vec{i_3}\times\left(\frac{1}{h_1 h_3^2}\frac{\partial}{\partial u_1}h_3\,\vec{i_1}\right.\\ &\left. + \frac{1}{h_2 h_3^2}\frac{\partial}{\partial u_2}h_3\,\vec{i_2} + \frac{1}{h_3^3}\frac{\partial}{\partial u_3}h_3\,\vec{i_3}\right)\\ =& -\frac{1}{h_1 h_3^2}\frac{\partial}{\partial u_1}h_3\,\vec{i_2} + \frac{1}{h_2 h_3^2}\frac{\partial}{\partial u_2}h_3\,\vec{i_1}\end{aligned}$$

上式から、

$$\begin{aligned}\nabla\times\vec{i_1} =& -\frac{1}{h_1 h_2}\frac{\partial}{\partial u_2}h_1\,\vec{i_3} + \frac{1}{h_1 h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}h_1\,\vec{i_2}\\ \nabla\times\vec{i_2} =& +\frac{1}{h_1 h_2}\frac{\partial}{\partial u_1}h_2\,\vec{i_3} - \frac{1}{h_2 h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}h_2\,\vec{i_1}\\ \nabla\times\vec{i_3} =& -\frac{1}{h_1 h_3}\frac{\partial}{\partial u_1}h_3\,\vec{i_2} + \frac{1}{h_2 h_3}\frac{\partial}{\partial u_2}h_3\,\vec{i_1}\end{aligned} \tag{B.3.12}$$

(B.3.11) 式に (B.3.12) 式を代入し、

$$\begin{aligned}\nabla\vec{i_1} =& \frac{1}{h_1 h_2}\frac{\partial}{\partial u_1}h_2 + \frac{1}{h_1 h_3}\frac{\partial}{\partial u_1}h_3\\ =& \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2 h_3)\\ \nabla\vec{i_2} =& \frac{1}{h_2 h_3}\frac{\partial}{\partial u_2}h_3 + \frac{1}{h_1 h_2}\frac{\partial}{\partial u_2}h_1\\ =& \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\frac{\partial}{\partial u_2}(h_1 h_3)\\ \nabla\vec{i_3} =& \frac{1}{h_1 h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}h_1 + \frac{1}{h_2 h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}h_2\\ =& \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}(h_1 h_2)\end{aligned} \tag{B.3.13}$$

(B.3.9) 式に (B.3.10) 式、(B.3.13) 式を代入し、

$$
\begin{aligned}
\nabla\overrightarrow{F} =& \frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial u_1}F_1 + \frac{F_1}{h_1h_2h_3}\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2h_3) \\
&+\frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial u_2}F_2 + \frac{F_2}{h_1 h_2h_3}\frac{\partial}{\partial u_2}(h_1h_3) \\
&+\frac{1}{h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}F_3 + \frac{F_3}{h_1 h_2h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}(h_1h_2) \\
=& \frac{1}{h_1h_2h_3}\frac{\partial}{\partial u_1}(F_1h_2h_3) \\
&+\frac{1}{h_1 h_2h_3}\frac{\partial}{\partial u_2}(F_2h_1h_3) \\
&+\frac{1}{h_1 h_2h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}(F_3h_1h_2)
\end{aligned}
\tag{B.3.14}
$$

$\nabla^2 F$ について、上式に (B.3.7) 式の下記の関係を代入し、

$$
F_1=\frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial u_1}F,\quad F_2=\frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial u_2}F,\quad F_3=\frac{1}{h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}F
$$

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 F = \nabla(\nabla F) =& \frac{1}{h_1h_2h_3}\left(\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial}{\partial u_1}F\right)\right. \\
&+\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_1h_3}{h_2}\frac{\partial}{\partial u_2}F\right) \\
&\left.+\frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}F\right)\right)
\end{aligned}
\tag{B.3.15}
$$

$\nabla\times\overrightarrow{F}$ について、(B.3.7) 式から、

$$
\nabla\times\overrightarrow{F} = \nabla\times\left(F_1\overrightarrow{i_1}+F_2\overrightarrow{i_2}+F_3\overrightarrow{i_3}\right)
$$

(C.3.20) 式から、上式は、

$$
\begin{aligned}
\nabla\times\overrightarrow{F} =& -\overrightarrow{i_1}\times\nabla F_1 + F_1\left(\nabla\times\overrightarrow{i_1}\right) \\
&-\overrightarrow{i_2}\times\nabla F_2 + F_2\left(\nabla\times\overrightarrow{i_2}\right) \\
&-\overrightarrow{i_3}\times\nabla F_3 + F_3\left(\nabla\times\overrightarrow{i_3}\right)
\end{aligned}
$$

上式に (B.3.7) 式、(B.3.12) 式から、

$$
\begin{aligned}
\nabla\times\overrightarrow{F} =& -\overrightarrow{i_1}\times\left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial u_1}F_1\overrightarrow{i_1}+\frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial u_2}F_1\overrightarrow{i_2}+\frac{1}{h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}F_1\overrightarrow{i_3}\right) - \frac{F_1}{h_1h_2}\frac{\partial}{\partial u_2}h_1\overrightarrow{i_3} + \frac{F_1}{h_1h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}h_1\overrightarrow{i_2} \\
&-\overrightarrow{i_2}\times\left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial u_1}F_2\overrightarrow{i_1}+\frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial u_2}F_2\overrightarrow{i_2}+\frac{1}{h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}F_2\overrightarrow{i_3}\right) + \frac{F_2}{h_1h_2}\frac{\partial}{\partial u_1}h_2\overrightarrow{i_3} - \frac{F_2}{h_2h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}h_2\overrightarrow{i_1} \\
&-\overrightarrow{i_3}\times\left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial u_1}F_3\overrightarrow{i_1}+\frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial u_2}F_3\overrightarrow{i_2}+\frac{1}{h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}F_3\overrightarrow{i_3}\right) - \frac{F_3}{h_1h_3}\frac{\partial}{\partial u_1}h_3\overrightarrow{i_2} + \frac{F_3}{h_2h_3}\frac{\partial}{\partial u_2}h_3\overrightarrow{i_1}
\end{aligned}
$$

上式に単位ベクトル：$\overrightarrow{i_1},\overrightarrow{i_2},\overrightarrow{i_3}$ の外積から、

$$
\begin{aligned}
\nabla\times\overrightarrow{F} =& -\frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial u_2}F_1\overrightarrow{i_3} + \frac{1}{h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}F_1\overrightarrow{i_2} - \frac{F_1}{h_1h_2}\frac{\partial}{\partial u_2}h_1\overrightarrow{i_3} + \frac{F_1}{h_1h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}h_1\overrightarrow{i_2} \\
&+\frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial u_1}F_2\overrightarrow{i_3} - \frac{1}{h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}F_2\overrightarrow{i_1} + \frac{F_2}{h_1h_2}\frac{\partial}{\partial u_1}h_2\overrightarrow{i_3} - \frac{F_2}{h_2h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}h_2\overrightarrow{i_1} \\
&-\frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial u_1}F_3\overrightarrow{i_2} + \frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial u_2}F_3\overrightarrow{i_1} - \frac{F_3}{h_1h_3}\frac{\partial}{\partial u_1}h_3\overrightarrow{i_2} + \frac{F_3}{h_2h_3}\frac{\partial}{\partial u_2}h_3\overrightarrow{i_1} \\
=& -\frac{1}{h_1h_2}\frac{\partial}{\partial u_2}h_1F_1\overrightarrow{i_3} + \frac{1}{h_1h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}h_1F_1\overrightarrow{i_2} + \frac{1}{h_1h_2}\frac{\partial}{\partial u_1}h_2F_2\overrightarrow{i_3} - \frac{1}{h_2h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}h_2F_2\overrightarrow{i_1} \\
&-\frac{1}{h_1h_3}\frac{\partial}{\partial u_1}h_3F_3\overrightarrow{i_2} + \frac{1}{h_2h_3}\frac{\partial}{\partial u_2}h_3F_3\overrightarrow{i_1}
\end{aligned}
$$

上式から、

$$
\begin{aligned}
\nabla\times\overrightarrow{F} ==& +\frac{1}{h_2h_3}\left(\frac{\partial}{\partial u_2}h_3F_3 - \frac{\partial}{\partial u_3}h_2F_2\right)\overrightarrow{i_1} + \frac{1}{h_1h_3}\left(\frac{\partial}{\partial u_3}h_1F_1 - \frac{\partial}{\partial u_1}h_3F_3\right)\overrightarrow{i_2} \\
&+\frac{1}{h_1h_2}\left(\frac{\partial}{\partial u_1}h_2F_2 - \frac{\partial}{\partial u_2}h_1F_1\right)\overrightarrow{i_3}
\end{aligned}
\tag{B.3.16}
$$

上記までの式をまとめる。ここでベクトルをマトリックスで表現する。

$$\overrightarrow{F} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} \tag{B.3.17}$$

$$\nabla F = \begin{pmatrix} \frac{\frac{d}{d\,u_1} F}{h_1} \\ \frac{\frac{d}{d\,u_2} F}{h_2} \\ \frac{\frac{d}{d\,u_3} F}{h_3} \end{pmatrix} \tag{B.3.18}$$

$$\begin{aligned} \nabla \overrightarrow{F} =& \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial\,u_1}\ (F_1 h_2 h_3) \\ &+ \frac{1}{h_1\,h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial\,u_2}\ (F_2 h_1 h_3) \\ &+ \frac{1}{h_1\,h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial\,u_3}\ (F_3 h_1 h_2) \end{aligned} \tag{B.3.19}$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 F =& \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left(\frac{\partial}{\partial\,u_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial}{\partial\,u_1} F \right) \right. \\ &+ \frac{\partial}{\partial\,u_2} \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial}{\partial\,u_2} F \right) \\ &\left. + \frac{\partial}{\partial\,u_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial}{\partial\,u_3} F \right) \right) \end{aligned} \tag{B.3.20}$$

$$\nabla \times \overrightarrow{F} = \begin{pmatrix} \frac{1}{h_2 h_3} \left(\frac{\partial}{\partial\,u_2}\, h_3 F_3 - \frac{\partial}{\partial\,u_3}\, h_2 F_2 \right) \\ \frac{1}{h_1\,h_3} \left(\frac{\partial}{\partial\,u_3}\, h_1 F_1 - \frac{\partial}{\partial\,u_1}\, h_3 F_3 \right) \\ \frac{1}{h_1 h_2} \left(\frac{\partial}{\partial\,u_1}\, h_2 F_2 - \frac{\partial}{\partial\,u_2}\, h_1 F_1 \right) \end{pmatrix} \tag{B.3.21}$$

上記の結果をプログラムすると、

```
/* 直角座標系 */
kill(all);
depends([x,y,z,F],[u[1],u[2],u[3]]);
DS1:(ds)^2=(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2;
DS2:(ds)^2=h[1]^2*(du[1])^2+h[2]^2
 *(du[2])^2+h[3]^2*(du[3])^2;
DX1:dx=diff(x,u[1])*du[1]+diff(x,u[2])
 *du[2]+diff(x,u[3])*du[3];
DY1:dy=diff(y,u[1])*du[1]+diff(y,u[2])
 *du[2]+diff(y,u[3])*du[3];
DZ1:dz=diff(z,u[1])*du[1]+diff(z,u[2])
 *du[2]+diff(z,u[3])*du[3];
DS2:subst([DX1,DY1,DZ1],DS1);
subst([du[2]=0,du[3]=0],DS2);
factor(%);
%/(du[1])^2;
H12:h[1]^2=rhs(%);
subst([du[3]=0,du[1]=0],DS2);
factor(%);
%/(du[2])^2;
H22:h[2]^2=rhs(%);
subst([du[1]=0,du[2]=0],DS2);
factor(%);
%/(du[3])^2;
H32:h[3]^2=rhs(%);
DF1:\nabla*F=matrix([ 1/h[1]*'diff(F,u[1]
 ,1) ],[ 1/h[2]*'diff(F,u[2],1) ],[ 1/h[3]
 *'diff(F,u[3],1) ]);
DF2:\nabla*F=1/(h[1]*h[2]*h[3])*('diff(
 (h[2]*h[3]*F[1]),u[1],1)+ 'diff((h[3]*
 h[1]*F[2]),u[2],1)+ 'diff((h[1]*h[2]
 *F[3]),u[3],1));
DF3:\nabla^2*F=1/(h[1]*h[2]*h[3])*(
 'diff(h[2]*h[3]/h[1]*'diff(F,u[1]),u[1])
 +'diff(h[1]*h[3]/h[2]*'diff(F,u[2]),u[2])
 +'diff(h[2]*h[1]/h[3]*'diff(F,u[3]),
 u[3]));
DF4:\nabla*F=matrix([ 1/(h[2]*h[3])*
 ('diff((h[3]*F[3]),u[2],1)-'diff((h[2]
 *F[2]), u[3],1) )],[ 1/(h[3]*h[1])*(
 'diff((h[1]*F[1]),u[3],1)-'diff((h[3]
 *F[3]),u[1],1) )],[1/(h[1]*h[2])*
 ('diff((h[2]*F[2]),u[1],1)-'diff((h[1]
 *F[1]),u[2],1) )]);
```

円柱座標系

```
/* 円柱座標系 */
depends([x,y,z,F],[r,\theta,t]);
X1:x=r*cos(\theta);
Y1:y=r*sin(\theta);
Z1:z=t;
U1:u[1]=r;
U2:u[2]=\theta;
U3:u[3]=t;
subst([U1,U2,U3],H12);
subst([X1,Y1,Z1],%);
ev(%,diff);
trigsimp(%);
H13:h[1]=1;
subst([U1,U2,U3],H22);
subst([X1,Y1,Z1],%);
ev(%,diff);
trigsimp(%);
H23:h[2]=r;
subst([U1,U2,U3],H32);
subst([X1,Y1,Z1],%);
ev(%,diff);
trigsimp(%);
H33:h[3]=1;
subst([H13,H23,H33,U1,U2,U3],DF1);
ev(%,diff);
expand(%);
subst([H13,H23,H33,U1,U2,U3],DF2);
ev(%,diff);
DF21:expand(%);
subst([H13,H23,H33,U1,U2,U3],DF3);
ev(%,diff);
expand(%);
subst([H13,H23,H33,U1,U2,U3],DF4);
ev(%,diff);
expand(%);
```

xyz 座標と円柱座標の関係式は、

$$x = r\cos(\theta), \quad y = r\sin(\theta), \quad z = t \qquad \text{(B.3.22)}$$

円柱座標の変数は、

$$u_1 = r, \quad u_2 = \theta, \quad u_3 = t \qquad \text{(B.3.23)}$$

(B.3.5) 式に (B.3.22) 式、(B.3.23) 式を代入し、

$$h_1 = 1, \quad h_2 = r, \quad h_3 = 1 \qquad \text{(B.3.24)}$$

(B.3.18) 式に (B.3.23) 式、(B.3.24) 式を代入し、

$$\nabla F = \begin{pmatrix} \frac{d}{d\,r} F \\ \frac{\frac{d}{d\,\theta} F}{r} \\ \frac{d}{d\,t} F \end{pmatrix}$$

(B.3.19) 式に (B.3.23) 式、(B.3.24) 式を代入し、

$$\nabla \overrightarrow{F} = \frac{\frac{d}{d\,\theta} F_2}{r} + \frac{F_1}{r} + \frac{d}{d\,t} F_3 + \frac{d}{d\,r} F_1$$

(B.3.20) 式 (B.3.23) 式、(B.3.24) 式を代入し、

$$\nabla^2 F = \frac{\frac{d^2}{d\,\theta^2} F}{r^2} + \frac{d^2}{d\,t^2} F + \frac{d^2}{d\,r^2} F + \frac{\frac{d}{d\,r} F}{r}$$

(B.3.21) 式に (B.3.23) 式、(B.3.24) 式を代入し、

$$\nabla \times \overrightarrow{F} = \begin{pmatrix} \frac{\frac{d}{d\,\theta} F_3}{r} - \frac{d}{d\,t} F_2 \\ \frac{d}{d\,t} F_1 - \frac{d}{d\,r} F_3 \\ -\frac{\frac{d}{d\,\theta} F_1}{r} + \frac{F_2}{r} + \frac{d}{d\,r} F_2 \end{pmatrix}$$

極座標系

```
/* 極座標系 */
depends([x,y,z,F],[r,\theta,\phi]);
X1:x=r*cos(\phi)*sin(\theta);
Y1:y=r*sin(\phi)*sin(\theta);
Z1:z=r*cos(\theta);
U1:u[1]=r;
U2:u[2]=\theta;
U3:u[3]=\phi;
subst([U1,U2,U3],H12);
subst([X1,Y1,Z1],%);
ev(%,diff);
trigsimp(%);
H13:h[1]=1;
subst([U1,U2,U3],H22);
subst([X1,Y1,Z1],%);
ev(%,diff);
trigsimp(%);
H23:h[2]=r;
subst([U1,U2,U3],H32);
subst([X1,Y1,Z1],%);
ev(%,diff);
trigsimp(%);
H33:h[3]=r*sin(\theta);
subst([H13,H23,H33,U1,U2,U3],DF1);
ev(%,diff);
expand(%);
subst([H13,H23,H33,U1,U2,U3],DF2);
ev(%,diff);
expand(%);
subst([H13,H23,H33,U1,U2,U3],DF3);
ev(%,diff);
expand(%);
subst([H13,H23,H33,U1,U2,U3],DF4);
ev(%,diff);
expand(%);
```

xyz 座標と極座標の関係式は、

$$x = \cos(\phi)\, r \sin(\theta), \quad y = \sin(\phi)\, r\sin(\theta) \\ z = r\cos(\theta) \tag{B.3.25}$$

極座標の変数は、

$$u_1 = r, \quad u_2 = \theta, \quad u_3 = \phi \tag{B.3.26}$$

(B.3.5) 式に (B.3.25) 式、(B.3.26) 式を代入し、

$$h_1 = 1, \quad h_2 = r, \quad h_3 = r\sin(\theta) \tag{B.3.27}$$

(B.3.18) 式に (B.3.26) 式、(B.3.27) 式を代入し、

$$\nabla F = \begin{pmatrix} \frac{d}{d\,r} F \\ \frac{\frac{d}{d\,\theta} F}{r} \\ \frac{\frac{d}{d\,\phi} F}{r\sin(\theta)} \end{pmatrix}$$

(B.3.19) 式に (B.3.26) 式、(B.3.27) 式を代入し、

$$\nabla \overrightarrow{F} = \frac{F_2\cos(\theta)}{r\sin(\theta)} + \frac{\frac{d}{d\,\phi} F_3}{r\sin(\theta)} + \frac{\frac{d}{d\,\theta} F_2}{r} + \frac{2\,F_1}{r} + \frac{d}{d\,r} F_1$$

(B.3.20) 式に (B.3.26) 式、(B.3.27) 式を代入し、

$$\nabla^2 F = \frac{\frac{d^2}{d\,\theta^2} F}{r^2} + \frac{\cos(\theta)\left(\frac{d}{d\,\theta} F\right)}{r^2\sin(\theta)} + \frac{d^2}{d\,r^2} F + \frac{2\left(\frac{d}{d\,r} F\right)}{r} \\ + \frac{\frac{d^2}{d\,\phi^2} F}{r^2\sin(\theta)^2}$$

(B.3.21) 式に (B.3.26) 式、(B.3.27) 式を代入し、

$$\nabla \times \overrightarrow{F} = \begin{pmatrix} \frac{F_3\cos(\theta)}{r\sin(\theta)} - \frac{\frac{d}{d\,\phi} F_2}{r\sin(\theta)} + \frac{\frac{d}{d\,\theta} F_3}{r} \\ \frac{\frac{d}{d\,\phi} F_1}{r\sin(\theta)} - \frac{F_3}{r} - \frac{d}{d\,r} F_3 \\ -\frac{\frac{d}{d\,\theta} F_1}{r} + \frac{F_2}{r} + \frac{d}{d\,r} F_2 \end{pmatrix}$$

付 録C　Maximaによるベクトルとテンソル演算

演習問題を解くに当たり、ベクトルとテンソルの基本的な関係を、Maximaを使って簡単な説明を以下に示す。詳細な説明は数学や物理の解説書やMaximaの解説書を参考願う。

C.1　ベクトルの表現

ベクトルの表現方法として、下記の横マトリックス、

```
MTAR:matrix([A[1],A[2],A[3]]);
```

$$\overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \end{pmatrix}$$

と下記の縦マトリックスの表現がある。ここでは、式の表現などから下記の縦マトリックスを使用する。

```
MTA:matrix([A[1]],[A[2]],[A[3]]);
```

$$\overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}$$

C.2　ベクトルの演算

C.2.1　和

ベクトルの和は下記で得られる。

```
MTA:matrix([A[1]],[A[2]],[A[3]]);
MTB:matrix([B[1]],[B[2]],[B[3]]);
MTSUM:MTA+MTB;
```

$$\overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{B} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} = \begin{pmatrix} B_1 + A_1 \\ B_2 + A_2 \\ B_3 + A_3 \end{pmatrix}$$

C.2.2　係数の積

ベクトルに係数をかける演算は下記で得られる。

```
a*MTA;
```

$$a\overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} A_1\, a \\ A_2\, a \\ A_3\, a \end{pmatrix}$$

C.2.3　ベクトル各要素同士の積

ベクトル同士の積の結果は下記となる。

```
MTA*MTB;
```

$$\begin{pmatrix} A_1\, B_1 \\ A_2\, B_2 \\ A_3\, B_3 \end{pmatrix}$$

C.2.4　内積（スカラー積）

ベクトルの内積は下記で得られる。

```
SPR:MTA.MTB;
```

$$\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} = A_3\, B_3 + A_2\, B_2 + A_1\, B_1$$

```
SPRAB:MTA.MTB;
SPRBA:MTB.MTA;
expand(SPRAB-SPRBA);
```

ベクトルの内積の順序を入れ替えても変わらない。

$$\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} = A_3\, B_3 + A_2\, B_2 + A_1\, B_1$$

$$\overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{A} = A_3\, B_3 + A_2\, B_2 + A_1\, B_1$$

$$\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} = \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{A} \qquad \text{(C.2.1)}$$

C.2.5　内積（スカラー積）の分配法則

```
MTC:matrix([C[1]],[C[2]],[C[3]]);
MTBC:MTB+MTC;
MTABC:MTA.MTBC;
MTAB:MTA.MTB;
MTAC:MTA.MTC;
MTABC1:MTAB+MTAC;
expand(MTABC-MTABC1);
```

ベクトルの内積の分配は、

$$\overrightarrow{A}\cdot(\overrightarrow{B}+\overrightarrow{C}) = A_3\ (C_3+B_3)+A_2\ (C_2+B_2) + A_1\ (C_1+B_1)$$

$$\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B} = A_3\,B_3+A_2\,B_2+A_1\,B_1$$

$$\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{C} = A_3\,C_3+A_2\,C_2+A_1\,C_1$$

以上から、

$$\overrightarrow{A}\cdot(\overrightarrow{B}+\overrightarrow{C}) = \overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}+\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{C} \tag{C.2.2}$$

C.2.6　外積（ベクトル積）

ベクトルの外積は下記で得られる。

```
col(adjoint(transpose(addcol(MTA,MTB,
  matrix([1],[1],[1])))),3);
```

$$\overrightarrow{A}\times\overrightarrow{B} = \begin{pmatrix} A_2\,B_3-B_2\,A_3 \\ B_1\,A_3-A_1\,B_3 \\ A_1\,B_2-B_1\,A_2 \end{pmatrix}$$

```
VPRAB:col(adjoint(transpose(addcol(MTA,MTB,
  matrix([1],[1],[1])))),3);
VPRBA:col(adjoint(transpose(addcol(MTB,MTA,
  matrix([1],[1],[1])))),3);
expand(VPRAB-(-VPRBA));
```

ベクトルの外積の順序を入れ替えると、負となる。

$$\overrightarrow{A}\times\overrightarrow{B} = \begin{pmatrix} A_2\,B_3-B_2\,A_3 \\ B_1\,A_3-A_1\,B_3 \\ A_1\,B_2-B_1\,A_2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{B}\times\overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} B_2\,A_3-A_2\,B_3 \\ A_1\,B_3-B_1\,A_3 \\ B_1\,A_2-A_1\,B_2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{A}\times\overrightarrow{B} = -\overrightarrow{B}\times\overrightarrow{A} \tag{C.2.3}$$

C.2.7　外積（ベクトル積）の分配法則

```
VPRABC:col(adjoint(transpose(addcol(MTA,
 MTBC,matrix([1],[1],[1])))),3);
VPRAB:col(adjoint(transpose(addcol(MTA,MTB,
  matrix([1],[1],[1])))),3);
VPRAC:col(adjoint(transpose(addcol(MTA,MTC,
  matrix([1],[1],[1])))),3);
expand(VPRABC-(VPRAB+VPRAC));
```

ベクトルの外積の分配は、

$$\overrightarrow{A}\times(\overrightarrow{B}+\overrightarrow{C}) = \begin{pmatrix} A_2\ (C_3+B_3)-(C_2+B_2)\ A_3 \\ (C_1+B_1)\ A_3-A_1\ (C_3+B_3) \\ A_1\ (C_2+B_2)-(C_1+B_1)\ A_2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{A}\times\overrightarrow{B} = \begin{pmatrix} A_2\,B_3-B_2\,A_3 \\ B_1\,A_3-A_1\,B_3 \\ A_1\,B_2-B_1\,A_2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{A}\times\overrightarrow{C} = \begin{pmatrix} A_2\,C_3-C_2\,A_3 \\ C_1\,A_3-A_1\,C_3 \\ A_1\,C_2-C_1\,A_2 \end{pmatrix}$$

以上から、

$$\overrightarrow{A}\times(\overrightarrow{B}+\overrightarrow{C}) = \overrightarrow{A}\times\overrightarrow{B}+\overrightarrow{A}\times\overrightarrow{C} \tag{C.2.4}$$

C.2.8　スカラー３重積

```
VPRBC:col(adjoint(transpose(addcol(MTB,MTC,
  matrix([1],[1],[1])))),3);
SPRABC:MTA.(VPRBC);
SPRBCA:MTB.(-VPRAC);
SPRCAB:MTC.VPRAB;
expand(SPRABC-SPRBCA);
expand(SPRBCA-SPRCAB);
```

$$\overrightarrow{A}\cdot(\overrightarrow{B}\times\overrightarrow{C}) = A_1\ (B_2\,C_3-C_2\,B_3) + A_2\ (C_1\,B_3-B_1\,C_3) + (B_1\,C_2-C_1\,B_2)\ A_3$$

$$\overrightarrow{B}\cdot(\overrightarrow{C}\times\overrightarrow{A}) = B_1\ (C_2\,A_3-A_2\,C_3) + B_2\ (A_1\,C_3-C_1\,A_3) + (C_1\,A_2-A_1\,C_2)\ B_3$$

$$\overrightarrow{C}\cdot(\overrightarrow{A}\times\overrightarrow{B}) = (A_1\,B_2-B_1\,A_2)\ C_3 + C_1\ (A_2\,B_3-B_2\,A_3) + C_2\ (B_1\,A_3-A_1\,B_3)$$

以上から

$$\overrightarrow{A}\cdot(\overrightarrow{B}\times\overrightarrow{C}) = \overrightarrow{B}\cdot(\overrightarrow{C}\times\overrightarrow{A}) = \overrightarrow{C}\cdot(\overrightarrow{A}\times\overrightarrow{B}) \tag{C.2.5}$$

C.2.9 ベクトル３重積

ベクトルの外積の入れ替えの関係式から、

$$\overrightarrow{A}\times(\overrightarrow{B}\times\overrightarrow{C}) = \overrightarrow{A}\times(\overrightarrow{C}\times\overrightarrow{B}) = (\overrightarrow{C}\times\overrightarrow{B})\times\overrightarrow{A}) \quad (C.2.6)$$

```
VPRABC1:col(adjoint(transpose(addcol(MTA,
  VPRBC,matrix([1],[1],[1])))),3);
PMTB:p*MTB;
QMTC:q*MTC;
PAC:p=MTA.MTC;
QAB:q=MTA.MTB;
VPRABC2:subst([PAC],PMTB)-subst([QAB],
 QMTC);
expand(VPRABC1-VPRABC2);
```

$\overrightarrow{A}\times(\overrightarrow{B}\times\overrightarrow{C})$ について考える。$\overrightarrow{B}\times\overrightarrow{C}$ は $\overrightarrow{B}$ と $\overrightarrow{C}$ の作る面に垂直である。また、$\overrightarrow{A}\times(\overrightarrow{B}\times\overrightarrow{C})$ は $\overrightarrow{A}$ と $\overrightarrow{B}\times\overrightarrow{C}$ の作る面に垂直である。以上から、$\overrightarrow{A}\times(\overrightarrow{B}\times\overrightarrow{C})$ は $\overrightarrow{B}$ と $\overrightarrow{C}$ の作る面内にある。これを式で書くと、

$$\overrightarrow{A}\times(\overrightarrow{B}\times\overrightarrow{C}) = p\overrightarrow{B}+q\overrightarrow{C}$$

$$\overrightarrow{A}\times(\overrightarrow{B}\times\overrightarrow{C})$$
$$= \begin{pmatrix} A_2\,(B_1\,C_2-C_1\,B_2)-A_3\,(C_1\,B_3-B_1\,C_3) \\ A_3\,(B_2\,C_3-C_2\,B_3)-A_1\,(B_1\,C_2-C_1\,B_2) \\ A_1\,(C_1\,B_3-B_1\,C_3)-A_2\,(B_2\,C_3-C_2\,B_3) \end{pmatrix}$$

$p=\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{C}$、$q=-\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}$ とすると、

$$p = A_3\,C_3+A_2\,C_2+A_1\,C_1$$

$$q = A_3\,B_3+A_2\,B_2+A_1\,B_1$$

$$(\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{C})\overrightarrow{B}+(-\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B})\overrightarrow{C}$$
$$= \begin{pmatrix} B_1\,(A_3\,C_3+A_2\,C_2+A_1\,C_1)-C_1\,(A_3\,B_3+A_2\,B_2+A_1\,B_1) \\ B_2\,(A_3\,C_3+A_2\,C_2+A_1\,C_1)-C_2\,(A_3\,B_3+A_2\,B_2+A_1\,B_1) \\ B_3\,(A_3\,C_3+A_2\,C_2+A_1\,C_1)-(A_3\,B_3+A_2\,B_2+A_1\,B_1)\,C_3 \end{pmatrix}$$

以上から、

$$\overrightarrow{A}\times(\overrightarrow{B}\times\overrightarrow{C}) = (\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{C})\overrightarrow{B}-(\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B})\overrightarrow{C} \quad (C.2.7)$$

C.2.10 ベクトルの座標変換

ベクトルの座標変換は座標変換マトリックス：L を使用して行う。

```
/* ベクトルの座標変換 */
TNL2:matrix([l[11],l[12],l[13]],[l[21],
  l[22],l[23]],[l[31],l[32],l[33]]);
MTB=TNL2.MTA;
TRRE:TNL2.transpose(TNL2)=ident(3);
TR11:lhs(TRRE)[1][1]=1;
TR12:lhs(TRRE)[2][2]=1;
TR13:lhs(TRRE)[3][3]=1;
TR14:lhs(TRRE)[1][2]=0;
TR15:lhs(TRRE)[1][3]=0;
TR16:lhs(TRRE)[2][3]=0;
```

座標変換マトリックス：L として、

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{B} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} = L\overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} A_3\,l_{13}+A_2\,l_{12}+A_1\,l_{11} \\ A_3\,l_{23}+A_2\,l_{22}+A_1\,l_{21} \\ A_3\,l_{33}+A_2\,l_{32}+A_1\,l_{31} \end{pmatrix}$$

座標変換マトリックスは下記の関係がある。

$$LL^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

即ち、

$$l_{13}^2+l_{12}^2+l_{11}^2 = 1$$

$$l_{23}^2+l_{22}^2+l_{21}^2 = 1$$

$$l_{33}^2+l_{32}^2+l_{31}^2 = 1$$

$$l_{13}\,l_{23}+l_{12}\,l_{22}+l_{11}\,l_{21} = 0$$

$$l_{13}\,l_{33}+l_{12}\,l_{32}+l_{11}\,l_{31} = 0$$

$$l_{23}\,l_{33}+l_{22}\,l_{32}+l_{21}\,l_{31} = 0$$

C.3　ベクトルの微分

微分演算で gradient,divergence,rotation を演算する場合、load(”vect”)$　を事前に実行しておく必要がある。

C.3.1　微分

ベクトルを微分すると下記となる。

```
MTVU:matrix([u[x](x,y,z)],[u[y](x,y,z)],
            [u[z](x,y,z)]);
MTVV:matrix([v[x](x,y,z)],[v[y](x,y,z)],
            [v[z](x,y,z)]);
diff(MTVU,x,1);
```

$$\overrightarrow{u}=\begin{pmatrix}u_x(x,y,z)\\u_y(x,y,z)\\u_z(x,y,z)\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{v}=\begin{pmatrix}v_x(x,y,z)\\v_y(x,y,z)\\v_z(x,y,z)\end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{d\,x}\overrightarrow{u}=\begin{pmatrix}\frac{d}{d\,x}u_x(x,y,z)\\\frac{d}{d\,x}u_y(x,y,z)\\\frac{d}{d\,x}u_z(x,y,z)\end{pmatrix}$$

```
diff(MTVU*MTVV,x,1);
```

$$\begin{pmatrix}u_x(x,y,z)\left(\frac{d}{d\,x}v_x(x,y,z)\right)+v_x(x,y,z)\left(\frac{d}{d\,x}u_x(x,y,z)\right)\\u_y(x,y,z)\left(\frac{d}{d\,x}v_y(x,y,z)\right)+v_y(x,y,z)\left(\frac{d}{d\,x}u_y(x,y,z)\right)\\u_z(x,y,z)\left(\frac{d}{d\,x}v_z(x,y,z)\right)+v_z(x,y,z)\left(\frac{d}{d\,x}u_z(x,y,z)\right)\end{pmatrix}$$

C.3.2　gradient（傾き）

ベクトルの gradient は下記となる。

```
grad (x^2 + y^2 + z^2);
express (%);
ev (%, diff);
```

$$\begin{aligned}&\mathrm{grad}\left(z^2+y^2+x^2\right)\\&=[\frac{d}{d\,x}\left(z^2+y^2+x^2\right),\frac{d}{d\,y}\left(z^2+y^2+x^2\right),\\&\quad\frac{d}{d\,z}\left(z^2+y^2+x^2\right)]\\&=[2\,x,2\,y,2\,z]\end{aligned}$$

```
grad(u[x](x,y,z));
express (%);
ev(%,diff);
```

$$\begin{aligned}&\mathrm{grad}\left(u_x(x,y,z)\right)\\&=[\frac{d}{d\,x}u_x(x,y,z),\frac{d}{d\,y}u_x(x,y,z),\frac{d}{d\,z}u_x(x,y,z)]\end{aligned}$$

```
grad(MTVU);
express (%);
ev(%,diff);
```

$$\mathrm{grad}\left(\begin{pmatrix}u_x(x,y,z)\\u_y(x,y,z)\\u_z(x,y,z)\end{pmatrix}\right)$$

$$=[\begin{pmatrix}\frac{d}{d\,x}u_x(x,y,z)\\\frac{d}{d\,x}u_y(x,y,z)\\\frac{d}{d\,x}u_z(x,y,z)\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{d}{d\,y}u_x(x,y,z)\\\frac{d}{d\,y}u_y(x,y,z)\\\frac{d}{d\,y}u_z(x,y,z)\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{d}{d\,z}u_x(x,y,z)\\\frac{d}{d\,z}u_y(x,y,z)\\\frac{d}{d\,z}u_z(x,y,z)\end{pmatrix}]$$

```
grad(transpose(MTVU));
express (%);
ev(%,diff);
```

$$\begin{aligned}&\mathrm{grad}\left(\begin{pmatrix}u_x(x,y,z)&u_y(x,y,z)&u_z(x,y,z)\end{pmatrix}\right)\\&=[\begin{pmatrix}\frac{d}{d\,x}u_x(x,y,z)&\frac{d}{d\,x}u_y(x,y,z)&\frac{d}{d\,x}u_z(x,y,z)\end{pmatrix},\\&\quad\begin{pmatrix}\frac{d}{d\,y}u_x(x,y,z)&\frac{d}{d\,y}u_y(x,y,z)&\frac{d}{d\,y}u_z(x,y,z)\end{pmatrix},\\&\quad\begin{pmatrix}\frac{d}{d\,z}u_x(x,y,z)&\frac{d}{d\,z}u_y(x,y,z)&\frac{d}{d\,z}u_z(x,y,z)\end{pmatrix}]\end{aligned}$$

C.3.3　divergence（発散）

ベクトルの divergence は下記となる。

```
div ([x^2, y^2, z^2]);
express (%);
ev (%, diff);
```

$$\begin{aligned}&\mathrm{div}\left([x^2,y^2,z^2]\right)\\&=\frac{d}{d\,z}z^2+\frac{d}{d\,y}y^2+\frac{d}{d\,x}x^2\\&=2\,z+2\,y+2\,x\end{aligned}$$

```
div(transpose(MTVU)[1]);
express (%);
ev(%,diff);
```

$$\begin{aligned}&\mathrm{div}\left([u_x(x,y,z),u_y(x,y,z),u_z(x,y,z)]\right)\\&=\frac{d}{d\,z}u_z(x,y,z)+\frac{d}{d\,y}u_y(x,y,z)+\frac{d}{d\,x}u_x(x,y,z)\end{aligned}$$

C.3.4　rotation（回転）

ベクトルの rotation は下記となる。

```
curl ([x^2, y^2, z^2]);
express (%);
ev (%, diff);
```

$$\mathrm{curl}\left([x^2,y^2,z^2]\right)$$
$$=[\frac{d}{d\,y}\,z^2-\frac{d}{d\,z}\,y^2,\frac{d}{d\,z}\,x^2-\frac{d}{d\,x}\,z^2,\frac{d}{d\,x}\,y^2-\frac{d}{d\,y}\,x^2]$$
$$=[0,0,0]$$

```
curl(transpose(MTVU)[1]);
express (%);
ev(%,diff);
```

$$\mathrm{curl}\left([u_x\left(x,y,z\right),u_y\left(x,y,z\right),u_z\left(x,y,z\right)]\right)$$
$$=[\frac{d}{d\,y}\,u_z\left(x,y,z\right)-\frac{d}{d\,z}\,u_y\left(x,y,z\right),$$
$$\frac{d}{d\,z}\,u_x\left(x,y,z\right)-\frac{d}{d\,x}\,u_z\left(x,y,z\right),$$
$$\frac{d}{d\,x}\,u_y\left(x,y,z\right)-\frac{d}{d\,y}\,u_x\left(x,y,z\right)]$$

C.3.5　depends 関数を使った微分

depends 関数を用いれば、下記に示すような展開形式の微分も扱える。ただし、使用できる変数、関数は一文字で表現し、サフィックスは使用できない。

```
depends(r,[t,x,y]);
depends(\theta,[t,x,y]);
depends(z,[t]);
depends(A,[r,\theta,z]);
ADFX1:'diff(A,x,1)=diff(A,x,1);
```

変数の定義は、

$$\mathrm{r}\left(t,x,y\right),\theta\left(t,x,y\right),\mathrm{z}\left(t\right)$$

関数の定義は、

$$\mathrm{A}\left(r,\theta,z\right)$$

A を x で微分すると、

$$\frac{d}{d\,x}\,A=\left(\frac{d}{d\,x}\,\theta\right)\,\left(\frac{d}{d\,\theta}\,A\right)+\left(\frac{d}{d\,x}\,r\right)\,\left(\frac{d}{d\,r}\,A\right)$$

C.3.6　div(grad　)),div(curl(　)), curl(grad(　)),curl(curl(　))

grad,div,curl の組み合わせの関係式を求める。

```
depends(f,[x,y,z]);
depends(g,[x,y,z]);
depends(h,[x,y,z]);
/* div(grad f) */
NAB:grad(f);
transpose(express(%));
div(transpose(%)[1]);
express(%);
/*div(curl  ) */
curl(transpose(MTFGH)[1]);
transpose(express(%));
div(transpose(%)[1]);
express(%);
ev(%,diff);
/* curl(grad f) */
NAB:grad(f);
transpose(express(%));
curl(transpose(%)[1]);
express(%);
```

上記の $grad, div, curl$ から、下記の関係を得る。

$$\mathrm{div}\left(\mathrm{grad}\left(f\right)\right)=\mathrm{div}\left([\frac{d}{d\,x}\,f,\frac{d}{d\,y}\,f,\frac{d}{d\,z}\,f]\right)$$
$$=\frac{d^2}{d\,z^2}\,f+\frac{d^2}{d\,y^2}\,f+\frac{d^2}{d\,x^2}\,f \tag{C.3.1}$$

$$\mathrm{div}\left(\mathrm{curl}\left([f,g,h]\right)\right)$$
$$=\mathrm{div}\left([\frac{d}{d\,y}\,h-\frac{d}{d\,z}\,g,\frac{d}{d\,z}\,f-\frac{d}{d\,x}\,h,\frac{d}{d\,x}\,g-\frac{d}{d\,y}\,f]\right)$$
$$=\frac{d}{d\,x}\,\left(\frac{d}{d\,y}\,h-\frac{d}{d\,z}\,g\right)+\frac{d}{d\,y}\,\left(\frac{d}{d\,z}\,f-\frac{d}{d\,x}\,h\right)$$
$$+\frac{d}{d\,z}\,\left(\frac{d}{d\,x}\,g-\frac{d}{d\,y}\,f\right)$$
$$=0 \tag{C.3.2}$$

$$\mathrm{curl}\left(\mathrm{grad}\left(f\right)\right)=\mathrm{curl}\left([\frac{d}{d\,x}\,f,\frac{d}{d\,y}\,f,\frac{d}{d\,z}\,f]\right) \tag{C.3.3}$$
$$=[0,0,0]$$

いま、下記のように ∇ を定義すると、

$$\nabla=\frac{d}{d\,x}\,\vec{i}+\frac{d}{d\,y}\,\vec{j}+\frac{d}{d\,z}\,\vec{k} \tag{C.3.4}$$

下記の関係を得る。

$$\nabla\,f=\mathrm{grad}(f) \tag{C.3.5}$$

$$\nabla\cdot\,\vec{A}=\mathrm{div}\,\vec{A} \tag{C.3.6}$$

$$\nabla\times\,\vec{A}=\mathrm{curl}\,\vec{A} \tag{C.3.7}$$

$curl(curl(\quad))$ については、下記のように表現できる。

$$\mathrm{curl}\,(\mathrm{curl}\,\overrightarrow{C}) = \nabla\times(\nabla\times\ \overrightarrow{C})$$

3 ベクトルの外積の (C.2.7) 式から、

$$\begin{aligned}\mathrm{curl}\,(\mathrm{curl}\,\overrightarrow{C}) =&\nabla\times(\nabla\times\ \overrightarrow{C})\\ =&(\nabla\cdot\ \overrightarrow{C})\nabla-(\nabla\cdot\nabla)\,\overrightarrow{C})\\ =&\nabla(\nabla\cdot\ \overrightarrow{C})-\nabla^2\,\overrightarrow{C}\\ =&grad(div\,\overrightarrow{C})-\nabla^2\,\overrightarrow{C}\end{aligned}\tag{C.3.8}$$

C.3.7　∇ を使った演算

∇ は下記の微分を含んだベクトルの式とする。

$$\nabla = \frac{d}{d\,x}\,\overrightarrow{i}+\frac{d}{d\,y}\,\overrightarrow{j}+\frac{d}{d\,z}\,\overrightarrow{k}\tag{C.3.9}$$

また、行列表記すると、

$$\nabla = \begin{pmatrix}\frac{d}{dx}\\ \frac{d}{dy}\\ \frac{d}{dz}\end{pmatrix}$$

∇ とスカラー積 → grad

```
kill(all);
load("vect")$
depends([f,g,h],[x,y,z]);
depends([a,b,c],[x,y,z]);
MTA:matrix([a],[b],[c]);
MTB:matrix([f],[g],[h]);
NABM:matrix([d/dx],[d/dy],[d/dz]);
NABM*f;
grad(f);
transpose(express(%));
```

ベクトル：$\overrightarrow{A}$、ベクトル：$\overrightarrow{B}$ を下記とする。

$$\overrightarrow{A} = \begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{B} = \begin{pmatrix}f\\ g\\ h\end{pmatrix}$$

∇ とスカラー：f の積は、

$$\nabla\,f = \begin{pmatrix}\frac{d\,f}{dx}\\ \frac{d\,f}{dy}\\ \frac{d\,f}{dz}\end{pmatrix}$$

上記は $\mathrm{grad}\,(f)$ であり、次の公式となる。

$$\nabla\,f = \mathrm{grad}\,(f) = \begin{pmatrix}\frac{d}{d\,x}\,f\\ \frac{d}{d\,y}\,f\\ \frac{d}{d\,z}\,f\end{pmatrix}\tag{C.3.10}$$

∇ と内積 → div

```
NABM.MTB;
div(transpose(MTB)[1]);
express(%);
```

∇ とベクトル：$\overrightarrow{B}$ の内積は、

$$\nabla\,\overrightarrow{B} = \frac{d\,h}{dz}+\frac{d\,g}{dy}+\frac{d\,f}{dx}$$

上記は $\mathrm{div}\left(\overrightarrow{B}\right)$ であり、次の公式となる。

$$\nabla\,\overrightarrow{B} = \mathrm{div}\,([f,g,h]) = \frac{d}{d\,z}\,h+\frac{d}{d\,y}\,g+\frac{d}{d\,x}\,f\tag{C.3.11}$$

∇ と外積 $\rightarrow$ curl

```
col(adjoint(transpose(addcol(NABM,MTB,
 matrix([1],[1],[1])))),3);
curl(transpose(MTB)[1]);
transpose(express(%));
ev(%,diff);
```

∇ とベクトル：$\overrightarrow{B}$ の外積は、

$$\nabla\ \times \overrightarrow{B} = \begin{pmatrix} \frac{d\,h}{dy} - \frac{d\,g}{dz} \\ \frac{d\,f}{dz} - \frac{d\,h}{dx} \\ \frac{d\,g}{dx} - \frac{d\,f}{dy} \end{pmatrix}$$

上記は $\operatorname{curl}\left(\overrightarrow{B}\right)$ であり、次の公式となる。

$$\nabla\ \times \overrightarrow{B} = \operatorname{curl}\left([f,g,h]\right) = \begin{pmatrix} \frac{d}{d\,y}\,h - \frac{d}{d\,z}\,g \\ \frac{d}{d\,z}\,f - \frac{d}{d\,x}\,h \\ \frac{d}{d\,x}\,g - \frac{d}{d\,y}\,f \end{pmatrix} \quad \text{(C.3.12)}$$

∇^2

```
expand((NABM.NABM)*f);
NAB:grad(f);
transpose(express(%));
div(transpose(%)[1]);
express(%);
expand((NABM.NABM)*MTB);
matrix([div(grad(MTB[1][1]))],
 [div(grad(MTB[2][1]))],
 [div(grad(MTB[3][1]))]);
express(%);
```

∇^2 は、∇ の内積で、∇^2 はスカラーであり、

$$\nabla^2\ = \left(\nabla\,\nabla\right)\ = \frac{d^2}{dz^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dx^2}$$

∇^2 とスカラー：f の積は、

$$\nabla^2\,f = \frac{d^2\,f}{dz^2} + \frac{d^2\,f}{dy^2} + \frac{d^2\,f}{dx^2}$$

上記は $\operatorname{div}\left(\operatorname{grad}\left(f\right)\right)$ であり、次の公式となる。

$$\begin{aligned}\nabla^2\,f =&\operatorname{div}\left(\operatorname{grad}\left(f\right)\right) = \operatorname{div}\left(\left[\frac{d}{d\,x}\,f, \frac{d}{d\,y}\,f, \frac{d}{d\,z}\,f\right]\right) \\ =&\frac{d^2}{d\,z^2}\,f + \frac{d^2}{d\,y^2}\,f + \frac{d^2}{d\,x^2}\,f\end{aligned} \quad \text{(C.3.13)}$$

∇^2 とベクトル：$\overrightarrow{B}$ の積は、

$$\nabla^2\,\overrightarrow{B} = \begin{pmatrix} \frac{d^2\,f}{dz^2} + \frac{d^2\,f}{dy^2} + \frac{d^2\,f}{dx^2} \\ \frac{d^2\,g}{dz^2} + \frac{d^2\,g}{dy^2} + \frac{d^2\,g}{dx^2} \\ \frac{d^2\,h}{dz^2} + \frac{d^2\,h}{dy^2} + \frac{d^2\,h}{dx^2} \end{pmatrix}$$

上記は div (grad (ベクトルの各要素)) であり、次の公式となる。

$$\begin{aligned}\nabla^2\,\overrightarrow{B} &= \begin{pmatrix} \operatorname{div}\left(\operatorname{grad}\left(f\right)\right) \\ \operatorname{div}\left(\operatorname{grad}\left(g\right)\right) \\ \operatorname{div}\left(\operatorname{grad}\left(h\right)\right) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{d^2}{d\,z^2}\,f + \frac{d^2}{d\,y^2}\,f + \frac{d^2}{d\,x^2}\,f \\ \frac{d^2}{d\,z^2}\,g + \frac{d^2}{d\,y^2}\,g + \frac{d^2}{d\,x^2}\,g \\ \frac{d^2}{d\,z^2}\,h + \frac{d^2}{d\,y^2}\,h + \frac{d^2}{d\,x^2}\,h \end{pmatrix}\end{aligned} \quad \text{(C.3.14)}$$

$\nabla\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)$

∇ を作用させないものにサフィックス : 0 を付けると、下記のように書ける。

$$\nabla\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)=\nabla\left(\vec{A}\times\vec{B_0}\right)+\nabla\left(\vec{A_0}\times\vec{B}\right)$$

スカラー 3 重積 : (C.2.5) 式から、

$$\begin{aligned}\nabla\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)=&\nabla\left(\vec{A}\times\vec{B_0}\right)+\nabla\left(\vec{A_0}\times\vec{B}\right)\\=&\vec{B_0}\left(\nabla\times\vec{A}\right)-\vec{A_0}\left(\nabla\times\vec{B}\right)\end{aligned}$$

上式から、

$$\nabla\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)=\vec{B}\left(\nabla\times\vec{A}\right)-\vec{A}\left(\nabla\times\vec{B}\right)\quad\text{(C.3.15)}$$

$\nabla\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)$

∇ を作用させないものにサフィックス : 0 を付けると、下記のように書ける。

$$\nabla\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)=\nabla\left(\vec{A_0}\cdot\vec{B}\right)+\nabla\left(\vec{B_0}\cdot\vec{A}\right)$$

ベクトル 3 重積 : (C.2.7) 式から下記となる。

$$\nabla\left(\vec{A_0}\cdot\vec{B}\right)=\vec{A_0}\times\left(\nabla\times\vec{B}\right)+\left(\vec{A_0}\cdot\nabla\right)\cdot\vec{B}$$

$$\nabla\left(\vec{B_0}\cdot\vec{A}\right)=\vec{B_0}\times\left(\nabla\times\vec{A}\right)+\left(\vec{B_0}\cdot\nabla\right)\cdot\vec{A}$$

以上から、

$$\begin{aligned}&\nabla\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)\\&=\vec{A}\times\left(\nabla\times\vec{B}\right)+\left(\vec{A}\,\nabla\right)\cdot\vec{B}\\&\quad+\vec{B}\times\left(\nabla\times\vec{A}\right)+\left(\vec{B}\,\nabla\right)\cdot\vec{A}\end{aligned}\quad\text{(C.3.17)}$$

$\nabla\times\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)$

∇ を作用させないものにサフィックス : 0 を付けると、下記のように書ける。

$$\nabla\times\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)=\nabla\times\left(\vec{A}\times\vec{B_0}\right)+\nabla\times\left(\vec{A_0}\times\vec{B}\right)$$

ベクトル 3 重積 : (C.2.7) 式から下記となる。ここで、$\nabla\vec{A_0}\to\vec{A_0}\nabla$、$\nabla\vec{B_0}\to\vec{B_0}\nabla$ とする。

$$\nabla\times\left(\vec{A}\times\vec{B_0}\right)=\left(\vec{B_0}\nabla\right)\vec{A}-\left(\nabla\vec{A}\right)\vec{B_0}$$

$$\nabla\times\left(\vec{A_0}\times\vec{B}\right)=\left(\nabla\vec{B}\right)\vec{A_0}-\left(\vec{A_0}\nabla\right)\vec{B}$$

以上から、

$$\begin{aligned}&\nabla\times\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\\&=\nabla\times\left(\vec{A}\times\vec{B_0}\right)+\nabla\times\left(\vec{A_0}\times\vec{B}\right)\\&=\left(\vec{B_0}\nabla\right)\vec{A}-\left(\nabla\vec{A}\right)\vec{B_0}\\&\quad+\left(\nabla\vec{B}\right)\vec{A_0}-\left(\vec{A_0}\nabla\right)\vec{B}\end{aligned}$$

上式から、

$$\begin{aligned}&\nabla\times\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\\&=\left(\vec{B}\nabla\right)\vec{A}-\left(\nabla\vec{A}\right)\vec{B}\\&\quad+\left(\nabla\vec{B}\right)\vec{A}-\left(\vec{A}\nabla\right)\vec{B}\end{aligned}\quad\text{(C.3.16)}$$

$\left(\overrightarrow{A}\nabla\right)\overrightarrow{B}$

(C.3.16) 式から、

$$\begin{aligned}&\left(\overrightarrow{A}\nabla\right)\overrightarrow{B}\\&=\left(\overrightarrow{B}\nabla\right)\overrightarrow{A}-\left(\nabla\overrightarrow{A}\right)\overrightarrow{B}\\&\quad+\left(\nabla\overrightarrow{B}\right)\overrightarrow{A}-\nabla\times\left(\overrightarrow{A}\times\overrightarrow{B}\right)\end{aligned}$$

(C.3.17) 式から、

$$\begin{aligned}&\left(\overrightarrow{A}\,\nabla\right)\cdot\overrightarrow{B}\\&=\nabla\left(\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}\right)-\overrightarrow{A}\times\left(\nabla\times\overrightarrow{B}\right)\\&\quad-\overrightarrow{B}\times\left(\nabla\times\overrightarrow{A}\right)-\left(\overrightarrow{B}\,\nabla\right)\cdot\overrightarrow{A}\end{aligned}$$

上記二式の和を取ると、

$$\begin{aligned}&\left(\overrightarrow{A}\,\nabla\right)\cdot\overrightarrow{B}\\&=\frac{1}{2}\Bigg(-\left(\nabla\overrightarrow{A}\right)\overrightarrow{B}\\&\quad+\left(\nabla\overrightarrow{B}\right)\overrightarrow{A}-\nabla\times\left(\overrightarrow{A}\times\overrightarrow{B}\right)\\&\quad+\nabla\left(\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}\right)-\overrightarrow{A}\times\left(\nabla\times\overrightarrow{B}\right)\\&\quad-\overrightarrow{B}\times\left(\nabla\times\overrightarrow{A}\right)\Bigg)\end{aligned}\tag{C.3.18}$$

いま、上式を $\overrightarrow{B}\to\overrightarrow{A}$ と置くと、

$$\left(\overrightarrow{A}\,\nabla\right)\overrightarrow{A}=\frac{1}{2}\nabla\left(\overrightarrow{A}^2\right)-\overrightarrow{A}\times\left(\nabla\times\overrightarrow{A}\right)\tag{C.3.19}$$

$\nabla\times\left(\overrightarrow{A}\phi\right)$

$$\begin{aligned}\nabla\times\left(\overrightarrow{A}\phi\right)&=\nabla\times\left(\overrightarrow{A_0}\phi\right)+\nabla\times\left(\overrightarrow{A}\phi_0\right)\\&=-\overrightarrow{A}\times(\nabla\phi)+\phi\left(\nabla\times\overrightarrow{A}\right)\end{aligned}\tag{C.3.20}$$

物質微分 (時間微分)

まず、時間に関係しているベクトルの微分について、位置ベクトル：$\overrightarrow{r}$、時間：t とすると、速度：$\overrightarrow{V}$ は、

$$\overrightarrow{V}=\frac{d}{d\,t}\overrightarrow{r}$$

変数：α が時間と位置により変化するとすると、

$$\alpha=f(\overrightarrow{r},\,t)$$

上式を時間：t で微分すると、

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\,t}\alpha&=\frac{\partial}{\partial\,t}\alpha+\frac{d}{d\,t}\overrightarrow{r}\frac{\partial}{\partial\,\overrightarrow{r}}f(\overrightarrow{r},\,t)\\&=\frac{\partial}{\partial\,t}\alpha+\overrightarrow{V}\frac{\partial}{\partial\,\overrightarrow{r}}f(\overrightarrow{r},\,t)\\&=\frac{\partial}{\partial\,t}\alpha+\overrightarrow{V}\frac{\partial}{\partial\,\overrightarrow{r}}\alpha\end{aligned}$$

上式から、

$$\frac{d}{d\,t}\alpha=\frac{\partial}{\partial\,t}\alpha+\overrightarrow{V}\nabla\alpha\tag{C.3.21}$$

いま、(C.3.21) 式で $\alpha\to\overrightarrow{A}$ と置くと、

$$\frac{d}{d\,t}\overrightarrow{A}=\frac{\partial}{\partial\,t}\overrightarrow{A}+\overrightarrow{V}\nabla\overrightarrow{A}\tag{C.3.22}$$

C.4　テンソル

C.4.1　テンソルの演算

```
MTA:matrix([A[1]],[A[2]],[A[3]]);
MTB:matrix([B[1]],[B[2]],[B[3]]);
TNL:matrix([l[11],l[12],l[13]],[l[21],
 l[22],l[23]],[l[31],l[32],l[33]]);
TNM:matrix([m[11],m[12],m[13]],[m[21],
 m[22],m[23]],[m[31],m[32],m[33]]);
MTB=TNM.MTA;
```

ベクトル：$\overrightarrow{A}$、$\overrightarrow{B}$、テンソル：L、M を下記のように定義する。

$$\overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{B} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix}$$

テンソルは下記の様式で使われることが多い。Maxima ではテンソル同士の積やベクトルとの積を　.　を使って演算できる。

$$\overrightarrow{B} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} = M\overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} A_3\, m_{13} + A_2\, m_{12} + A_1\, m_{11} \\ A_3\, m_{23} + A_2\, m_{22} + A_1\, m_{21} \\ A_3\, m_{33} + A_2\, m_{32} + A_1\, m_{31} \end{pmatrix}$$

また、下記のように積の展開などが行える。

$$M(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}) = M\overrightarrow{A} + M\overrightarrow{B}$$

$$M(k\overrightarrow{A}) = k(M\overrightarrow{A})$$

$$M(L\overrightarrow{A}) = (ML)\overrightarrow{A}$$

この確かめ算を下記に示す。

```
TN11:TNM.(MTA+MTB);
TN12:TNM.MTA+TNM.MTB;
expand(TN11-TN12);

TN21:TNM.(k*MTA);
TN22:k*(TNM.MTA);
expand(TN21-TN22);

TN31:TNL.TNM;
TN32:TNM.(TNL.MTA);
TN33:(TNM.TNL).MTA;
expand(TN32-TN33);
```

C.4.2　テンソルの行列式

テンソルの行列式その行列の行列式であると定義する。

```
/* テンソル（行列式） */
TN41:determinant(TNL);
TN42:determinant(TNL.TNM);
TN43:determinant(TNL)*determinant(TNM);
expand(TN42-TN43);
```

下記のテンソルの積の行列式はそれぞれの行列式の式に等しくなる。

$$det[LM] = det[L]det[M]$$

C.4.3　二階テンソルの座標変換

```
/* テンソル（座標変換１） */
TN51:MTA.transpose(MTB);
TN52:TNL.MTA;
TN53:TNL.MTB;
TN54:transpose(MTB).transpose(TNL);
TN55:TN52.TN54;
TN56:(TNL.TN51).transpose(TNL);
expand(TN55-TN56);
```

ベクトル $\overrightarrow{A}$ と $\overrightarrow{B}$ を使った下記のテンソル：C からテンソルの座標変換法を調べる。

$$C = \overrightarrow{A}\overrightarrow{B}^T = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_1\, B_1 & A_1\, B_2 & A_1\, B_3 \\ B_1\, A_2 & A_2\, B_2 & A_2\, B_3 \\ B_1\, A_3 & B_2\, A_3 & A_3\, B_3 \end{pmatrix}$$

```
/* テンソル（座標変換１） */
TN51:MTA.transpose(MTB);
TN52:TNL.MTA;
TN53:TNL.MTB;
TN54:transpose(MTB).transpose(TNL);
TN55:TN52.TN54;
TN56:(TNL.TN51).transpose(TNL);
expand(TN55-TN56);
```

座標変換マトリックス：L とすると、

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix}$$

ベクトル $\overrightarrow{A}$ は $L\overrightarrow{A}$ で、
$\overrightarrow{B}^T$ は $\overrightarrow{B}^T L^T$ で変換できる 。

以上から、上記のテンソルは下記の方法で座標変換できる [31]。

$$C' = L\overrightarrow{A}\overrightarrow{B}^T L^T = LCL^T$$

$\overrightarrow{B} = M\overrightarrow{A}$ において、座標変換を行う。上記の結果から、$M \to LML^T$、$\overrightarrow{A} \to L\overrightarrow{A}$ となり、合わせると、

$$\overrightarrow{B}' = LML^T L\overrightarrow{A}$$

ここで $L^T L$ について調べる。xyz 座標の各座標の単位ベクトルを $\overrightarrow{i}$、$\overrightarrow{j}$、$\overrightarrow{k}$ とし、$x'y'z'$ 座標の各座標の単位ベクトルを $\overrightarrow{e_1}$、$\overrightarrow{e_2}$、$\overrightarrow{e_3}$ とする。この関係を下図に示す。

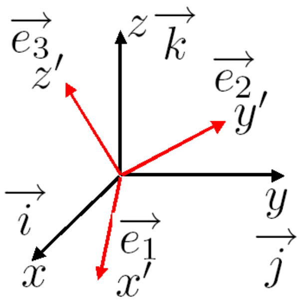


図 C.4.1: 座標変換

```
/* テンソル（座標変換２） */
TN71:transpose(TNL).TNL;
EV1:TNL.matrix([1],[0],[0]);
EV2:TNL.matrix([0],[1],[0]);
EV3:TNL.matrix([0],[0],[1]);
TR11:EV1.EV1=1;
TR12:EV2.EV2=1;
TR13:EV3.EV3=1;
TR14:EV1.EV2=0;
TR15:EV2.EV3=0;
TR16:EV3.EV1=0;
TR110:solve(TR11,l[31]^2)[1];
TR120:solve(TR12,l[32]^2)[1];
TR130:solve(TR13,l[33]^2)[1];
TR140:solve(TR14,l[11]*l[12])[1];
TR150:solve(TR15,l[12]*l[13])[1];
TR160:solve(TR16,l[11]*l[13])[1];
subst([TR110,TR120,TR130,TR140,TR150,
 TR160],TN71);
```

$$\overrightarrow{i} = l_{11}\overrightarrow{e_1} + l_{21}\overrightarrow{e_2} + l_{31}\overrightarrow{e_3}$$
$$\overrightarrow{j} = l_{12}\overrightarrow{e_1} + l_{22}\overrightarrow{e_2} + l_{32}\overrightarrow{e_3}$$
$$\overrightarrow{k} = l_{13}\overrightarrow{e_1} + l_{23}\overrightarrow{e_2} + l_{33}\overrightarrow{e_3}$$

この単位ベクトル：$\overrightarrow{i}$、$\overrightarrow{j}$、$\overrightarrow{k}$ のスカラー積から下記の関係を得る。

$$l_{31}^2 + l_{21}^2 + l_{11}^2 = 1$$
$$l_{32}^2 + l_{22}^2 + l_{12}^2 = 1$$
$$l_{33}^2 + l_{23}^2 + l_{13}^2 = 1$$
$$l_{31}\, l_{32} + l_{21}\, l_{22} + l_{11}\, l_{12} = 0$$
$$l_{32}\, l_{33} + l_{22}\, l_{23} + l_{12}\, l_{13} = 0$$
$$l_{31}\, l_{33} + l_{21}\, l_{23} + l_{11}\, l_{13} = 0$$

上式を $L^T L$ に代入すると下記の単位マトリクスとなる。

$$L^T L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

この結果から下記となり、確かに座標変換されている。

$$\overrightarrow{B}' = LML^T L\overrightarrow{A} = LM\overrightarrow{A} = L\overrightarrow{B}$$

C.4.4　テンソルの不変量

テンソル：M、座標変換マトリックス：L とする。このとき座標変換後も対角要素の和：$m_{33} + m_{22} + m_{11}$ が一定であることを示す。

```
/* テンソル（不変量１） */
TN57:(TNL.TNM).transpose(TNL);
TN571:expand(TN57[1][1]+TN57[2][2]
  +TN57[3][3]);
TN572:expand(subst([TR110,TR120,TR130,
  TR140*m[12],TR150*m[23],TR160*m[13]],
  TN571));
TN573:expand(subst([TR140*m[21],TR150
 *m[32],TR160*m[31]],TN572));
```

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix}$$

テンソル：M を座標変換し、その対角要素の和を求め、上記の単位ベクトル：$\overrightarrow{i}$、$\overrightarrow{j}$、$\overrightarrow{k}$ のスカラー積の関係式を代入すると、対角要素の和が元の和となる。

$$\begin{aligned}
tr(LML^T) =& l_{33}^2\, m_{33} + l_{23}^2\, m_{33} + l_{13}^2\, m_{33} + l_{32}\, m_{32}\, l_{33} \\
&+ m_{23}\, l_{32}\, l_{33} + l_{31}\, m_{31}\, l_{33} + m_{13}\, l_{31}\, l_{33} \\
&+ l_{22}\, l_{23}\, m_{32} + l_{12}\, l_{13}\, m_{32} + m_{22}\, l_{32}^2 \\
&+ m_{21}\, l_{31}\, l_{32} + m_{12}\, l_{31}\, l_{32} + l_{21}\, l_{23}\, m_{31} \\
&+ l_{11}\, l_{13}\, m_{31} + m_{11}\, l_{31}^2 + l_{22}\, l_{23}\, m_{23} \\
&+ l_{12}\, l_{13}\, m_{23} + m_{13}\, l_{21}\, l_{23} + l_{22}^2\, m_{22} \\
&+ l_{12}^2\, m_{22} + l_{21}\, m_{21}\, l_{22} + m_{12}\, l_{21}\, l_{22} \\
&+ l_{11}\, l_{12}\, m_{21} + m_{11}\, l_{21}^2 + l_{11}\, l_{13}\, m_{13} \\
&+ l_{11}\, l_{12}\, m_{12} + l_{11}^2\, m_{11} \\
=& m_{33} + m_{22} + m_{11}
\end{aligned}$$

テンソル：M の主方向を選び、

```
/* テンソル（不変量１） */
TN61:matrix([\sigma[1],0,0],[0,\sigma[2],
 0],[0,0,\sigma[3]]);
TN62:matrix([\sigma,0,0],[0,\sigma,0],
  [0,0,\sigma]);
TN63:TN61-TN62;
TN64:partfrac(expand(determinant(TN63)),
  \sigma);
coeff(TN64,\sigma^2);
-expand(coeff(TN64,\sigma));
last(TN64);
```

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$$

これは座標のとり方に無関係に定まる。

$$\begin{aligned} det & \begin{pmatrix} \sigma_1 - \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 - \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 - \sigma \end{pmatrix} \\ &= -\sigma^3 + (\sigma_3 + \sigma_2 + \sigma_1)\,\sigma^2 \\ &\quad + ((-\sigma_2 - \sigma_1)\,\sigma_3 - \sigma_1\,\sigma_2)\,\sigma + \sigma_1\,\sigma_2\,\sigma_3 \\ &= 0 \end{aligned}$$

以上の結果から、

$$\text{第 1 不変量}:\sigma_3 + \sigma_2 + \sigma_1$$

$$\text{第 2 不変量}:\sigma_2\,\sigma_3 + \sigma_1\,\sigma_3 + \sigma_1\,\sigma_2$$

$$\text{第 3 不変量}:\sigma_1\,\sigma_2\,\sigma_3$$

第３不変量については、テンソル：M の座標変換したテンソルの行列式から、

$$\begin{aligned} det[LML^T] = det[L]det[M]det[L^T] = det[M]det[LL^T] \\ = detM] \end{aligned}$$

となり、テンソルを座標変換しても元のテンソルの行列式となり不変となる。

C.4.5　主応力

xyz 軸に対して傾斜した物体表面：ds に作用する応力：$\vec{p}$ と物体要素に作用する応力の関係図と関係式を下記に示す。$\vec{p}$ の xyz 軸に対する方向余弦を $[l, m, n]$ と

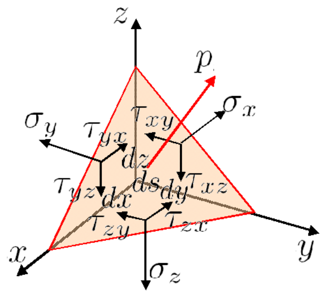


図 C.4.2: 物体要素の応力成分

すると、

```
kill(all);
X1:p[x]*ds=\sigma[x]*dydz/2+\tau[yx]*dzdx/2
           +\tau[zx]*dxdy/2;
Y1:p[y]*ds=\sigma[y]*dzdx/2+\tau[zy]*dxdy/2
           +\tau[xy]*dydz/2;
Z1:p[z]*ds=\sigma[z]*dxdy/2+\tau[yz]*dzdx/2
           +\tau[xz]*dydz/2;
DSLMN:[dydz=2*ds*l,dzdx=2*ds*m,dxdy=2*ds
  *n];
X2:subst([DSLMN],X1);
Y2:subst([DSLMN],Y1);
Z2:subst([DSLMN],Z1);
X3:factor(X2/ds);
Y3:factor(Y2/ds);
Z3:factor(Z2/ds);
```

$$ds\,p_x = \frac{dxdy\,\tau_{zx}}{2} + \frac{dzdx\,\tau_{yx}}{2} + \frac{dydz\,\sigma_x}{2}$$
$$ds\,p_y = \frac{dxdy\,\tau_{zy}}{2} + \frac{dzdx\,\sigma_y}{2} + \frac{dydz\,\tau_{xy}}{2}$$
$$ds\,p_z = \frac{dxdy\,\sigma_z}{2} + \frac{dzdx\,\tau_{yz}}{2} + \frac{dydz\,\tau_{xz}}{2}$$
$$[dydz = 2\,ds\,l, dzdx = 2\,ds\,m, dxdy = 2\,ds\,n]$$

上記の関係から、

$$p_x = n\,\tau_{zx} + m\,\tau_{yx} + l\,\sigma_x$$
$$p_y = n\,\tau_{zy} + m\,\sigma_y + l\,\tau_{xy}$$
$$p_z = n\,\sigma_z + m\,\tau_{yz} + l\,\tau_{xz}$$

これをマトリックスで表現し、$\vec{p}$ が ds に垂直な場合、p を σ に置き換えて、剪断応力が零となり、下記で表現できる。

$$\begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}$$

```
MXYZL:matrix([lhs(X3)],[lhs(Y3)],
  [lhs(Z3)]);
MXYZC:matrix([coeff(rhs(X3),l,1),
    coeff(rhs(X3),m,1),coeff(rhs(X3),n,1)],
   [coeff(rhs(Y3),l,1),coeff(rhs(Y3),m,1),
    coeff(rhs(Y3),n,1)],
   [coeff(rhs(Z3),l,1),coeff(rhs(Z3),m,1),
    coeff(rhs(Z3),n,1)]);
MXYZV:matrix([l],[m],[n]);
MXYZ:MXYZL=MXYZC.MXYZV;
MXYZC1:MXYZC-\sigma*ident(3);
MXYZC2:subst([\tau[yx]=\tau[xy],
 \tau[zy]=\tau[yz],\tau[xz]=\tau[zx]],
  MXYZC1);
EQS:partfrac(determinant(MXYZC2)=0,\sigma);
```

剪断力の下記の関係を考慮して、

$$[\tau_{yx} = \tau_{xy}, \tau_{zy} = \tau_{yz}, \tau_{xz} = \tau_{zx}]$$

下記の行列式を解くことで、主応力：$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ が得られる。

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} &\sigma\ \left(\tau_{zx}^2 + (-\sigma_y - \sigma_x)\ \sigma_z + \tau_{yz}^2 - \sigma_x\,\sigma_y + \tau_{xy}^2\right) \\ &- \sigma_y\,\tau_{zx}^2 + 2\,\tau_{xy}\,\tau_{yz}\,\tau_{zx} \\ &+ \sigma^2\ (\sigma_z + \sigma_y + \sigma_x) + \left(\sigma_x\,\sigma_y - \tau_{xy}^2\right)\ \sigma_z - \sigma_x\,\tau_{yz}^2 \\ &- \sigma^3 = 0 \end{aligned}$$

得られた主応力：$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ を元の連立方程式に代入し、方向余弦：$[l, m, n]$ を求めることができる。

付 録D　よく使うMaximaの関数

演習問題を解くに当たり、Maximaを使った進め方とここでよく使うMaximaの関数の使用例の簡単な説明を以下に示す。詳細な説明はMaximaの解説書を参考願う。

D.1　wxMaximaを使用した演習の進め方

wxMaximaを使用して、入力、出力を会話形式で実行できる。しかし、トライアンドエラー的に一歩一歩進めていくので、入力結果を残しておいた方が便利である。まず、wxMaximaの設定を確認する。wxMaximaの編集→設定で、「Enterでセルを評価する」にチェックを入れる。ワードパッドやメモ帳などのテキストエディターでMaximaの実行テキストを作成しておき、この評価させたい部分をコピーし、wxMaximaに貼り付け、Enterで評価、実行できる。これを繰り返し、意図した結果となっているか確認しながら、作業を進めていくのがよいと思います。

また、最初の行には必ず、$kill(all);$ を入力し、これまでの設定を解除しておく。ファイル内のリストの区切りはセミコロン　;　であるので、必ず記述の最後に　;　をつける。記述が長く、2行にまたがってもよいが、必ず記述の最後につける。

リスト、TEX出力

wxMaximaの数式出力結果を左クリックで網掛けし、右クリックで「コピー」を選択すると、wxMaximaの実行テキストが得られ、テキストエディターに貼り付けすることができる。

また、wxMaximaの数式出力結果を左クリックで網掛けし、右クリックで「Latexとしてコピー」を選択すると、Latexの実行テキストが得られる。Texworksなどの Latexエディターに貼り付けすることができ、数式を綺麗に出力できる文書作成フリーソフト：$\LaTeX\,2_\varepsilon$ の数式記述として使える。

D.2　宣言文

関数定義：depends([f,g],[x,y])

f, gy が変数:x, y の関数であることを宣言する。現状の関数定義の確認:$dependencies$;、定義の削除:$remove(f, y)$;が他にある

```
kill(all);
depends ([f, g], x);
depends ([r, s], [u, v]);
depends (u, t);
dependencies;
diff (r*s, u);
diff (r*s, t);
remove (r, dependency);
diff (r.s, t);
```

出力結果：

$$done$$

$$[\mathrm{f}\left(x\right), \mathrm{g}\left(x\right)]$$

$$[\mathrm{r}\left(u,v\right), \mathrm{s}\left(u,v\right)]$$

$$[\mathrm{u}\left(t\right)]$$

$$[\mathrm{f}\left(x\right), \mathrm{g}\left(x\right), \mathrm{r}\left(u,v\right), \mathrm{s}\left(u,v\right), \mathrm{u}\left(t\right)]$$

$$r\left(\frac{d}{d\,u}\,s\right)+\left(\frac{d}{d\,u}\,r\right)\,s$$

$$r\left(\frac{d}{d\,u}\,s\right)\left(\frac{d}{d\,t}\,u\right)+\left(\frac{d}{d\,u}\,r\right)\,s\,\left(\frac{d}{d\,t}\,u\right)$$

$$done$$

$$r.\left(\frac{d}{d\,u}\,s\right)\left(\frac{d}{d\,t}\,u\right)$$

変数宣言：declare(x,A)

変数：x に整数や実数などの属性：A を宣言する。

```
declare(i,integer);
declare(x,real);
declare(z,complex);
```

仮定：assume(A)

変数の正負などの仮定を宣言する。現状の仮定の確認：$facts()$;、仮定の削除：$forget(A)$; が他にある。

```
assume(A>0);
assume(B>=2);
assume(C<1 and C>0);
facts();
forget(A>0);
```

出力結果：

D.3　数式操作

数式の定義：X:A=B

数式：$A = B$ を X として、入力、定義する。以降、X で $A = B$ を呼び出せる。

```
X:x(t)=r(t)*cos(p(t));
Y:y(t)=r(t)*sin(p(t));
```

出力結果：

$$x(t) = r(t)\ cos(p(t))$$

$$y(t) = r(t)\ sin(p(t))$$

右辺抽出：rhs(X)

式の右辺を抽出する。そして、XR として入力、定義する。

```
X:x(t)=r(t)*cos(p(t));
XR:rhs(X);
```

出力結果：

$$x(t) = r(t)\ cos(p(t)) \to r(t)\ cos(p(t))$$

左辺抽出：lhs(X)

式の左辺を抽出する。

```
X:x(t)=r(t)*cos(p(t));
lhs(X);
```

出力結果：

$$x(t) = r(t)\ cos(p(t)) \to x(t)$$

置換：subst(B,A,EQ)

数式：EQ の中に含まれる A を→ B に置き換える。

```
X:x(t)=r(t)*cos(p(t));
subst(L,r(t),X);
```

出力結果：

$$x(t) = r(t)\ cos(p(t)) \to x(t) = cos(p(t))\ L$$

置換：subst([A=B],EQ)

数式：EQ の中に含まれる A を→ B に置き換える。

```
X:x(t)=r(t)*cos(p(t));
subst([r(t)=L],X);
```

出力結果：

$$x(t) = r(t)\ cos(p(t)) \to x(t) = cos(p(t))\ L$$

因数分解：factor(EQ)

式 EQ を因数分解する。

```
EQ:2*x^2+x-6;
factor(EQ);
```

出力結果：

$$2\,x^2+x-6 \rightarrow (x+2)\,(2\,x-3)$$

展開：expand(EQ)

式 EQ の和の積を展開し、積の和にする。

```
EQ1:(x+2)*(2*x-3);
expand(EQ1);
```

出力結果：

$$(x+2)\,(2\,x-3) \rightarrow 2\,x^2+x-6$$

有理式の簡素化：ratsimp(EQ)

展開、通分、約分で簡易化する

```
EQ2:x/(x^2+x);
ratsimp(EQ2);
```

出力結果：

$$\frac{x}{x^2+x} \rightarrow \frac{1}{x+1}$$

有理式の簡素化：partfrac(EQ,x)

x で簡易化する

```
EQ:(2*x+3)*(A*x-2)*(x+B);
EQ1:expand(%);
partfrac(EQ1,x);
factor(EQ1);
```

出力結果：

$$(2\,x+3)\,(x\,A-2)\,(B+x) \rightarrow$$

$$2\,x^2\,A\,B+3\,x\,A\,B-4\,x\,B-6\,B+2\,x^3\,A+3\,x^2\,A \\ -4\,x^2-6\,x$$

$partfrac(EQ1,x);$ の結果

$$x\,((3\,A-4)\,B-6)+x^2\,(2\,A\,B+3\,A-4) \\ -6\,B+2\,x^3\,A$$

$factor(EQ1);$ の結果

$$(2\,x+3)\,(x\,A-2)\,(B+x)$$

三角関数の簡素化：trigsimp(EQ)

三角関数が含まれる式を $sin(x)^2+cos(x)^2=1$ と $cosh(x)^2-sinh(x)^2=1$ を使って簡素化する。行列の積を参照。

三角関数の簡素化：trigreduce(EQ)

三角関数の積を倍角公式などを使って簡素化する。

```
EQ1:sin(A)*cos(B);
trigreduce(EQ1);
```

出力結果：

$$sin\,(A)\;cos\,(B) \rightarrow \frac{sin\,(B+A)}{2}-\frac{sin\,(B-A)}{2}$$

三角関数の簡素化：trigexpand(EQ)

三角関数が含まれる式を倍角公式などを使って展開する。

```
EQ2:sin(A*x+y);
trigexpand(EQ2);
```

出力結果：

$$sin\,(x\,A+y) \rightarrow cos\,(y)\;sin\,(x\,A)+sin\,(y)\;cos\,(x\,A)$$

三角関数の簡略化準線形形式：trigrat(EQ)

三角関数の式の標準的な簡略化準線形形式を与える。

```
E0:sin(3*a)/sin(a+%pi/3);
E0=trigrat(E0);
E1:(1-%e^(%i*\theta))/(1+%e^(%i*\theta));
E2:E1=trigrat(E1);
```

出力結果：

$$\frac{\sin\,(3\,a)}{\sin\left(a+\frac{\pi}{3}\right)}=\sqrt{3}\sin\,(2\,a)+\cos\,(2\,a)-1$$

$$\frac{1-e^{i\,\theta}}{e^{i\,\theta}+1}=-\frac{i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

対数関数の簡素化：logcontact(EQ)

対数関数を含む式の簡易化をする。

```
EQ:2*log(x)+2*log(y);
logcontract(EQ);
```

出力結果：

$$2\,log\,(y)+2\,log\,(x) \rightarrow log\left(x^2\,y^2\right)$$

指数、対数の簡素化：radcan(EQ)

指数、対数のを含む式の簡易化をする。

```
(log(x+x^2)-log(x))^a/log(1+x)^(a/2);
radcan(%);
((%e^x-1)/(1+%e^(x/2)));
radcan(%);
```

出力結果：

$$\frac{\left(\log\left(x^2+x\right)-\log\left(x\right)\right)^a}{\log\left(x+1\right)^{\frac{a}{2}}} \to \log\left(x+1\right)^{\frac{a}{2}}$$

$$\frac{e^x-1}{e^{\frac{x}{2}}+1} \to e^{\frac{x}{2}}-1$$

係数：coeff(EQ,X,N)

式 EQ の X の N 乗の係数を抽出する。

```
EQ:2*x^2+x-6;
coeff(EQ,x,2);
```

出力結果：

$$2\,x^2+x-6 \to 2$$

最初の項：first(EQ)

式 EQ の最初の項を抽出する。

```
EQ:2*x^2+x-6;
first(EQ);
```

出力結果：

$$2\,x^2+x-6 \to 2\,x^2$$

最後の項：last(EQ)

式 EQ の最後の項を抽出する。

```
EQ:2*x^2+x-6;
last(EQ);
```

出力結果：

$$2\,x^2+x-6 \to -6$$

項の削除：rest(EQ,N)

式 EQ の最初から N 個成分を除いた項を出力する。ここで、N を負とすると、最後から N 個成分を除いた項を出力する。

```
EQ:2*x^2+x-6;
rest(EQ,2);
```

出力結果：

$$2\,x^2+x-6 \to -6$$

分子：num(EQ)

式 EQ の分子を出力する。

```
EQ:x/(x^2+x);
num(EQ);
```

出力結果：

$$\frac{x}{x^2+x} \to x$$

分母：denom(EQ)

式 EQ の分母を出力する。

```
EQ:x/(x^2+x);
denom(EQ);
```

出力結果：

$$\frac{x}{x^2+x} \to x^2+x$$

方程式を解く：solve([EQ1,EQ2],[x,y])

式 $EQ1, EQ2$ を x, y について解く。結果は行列表示で出力される。

```
EQ:2*x^2+x-6=0;
solve(EQ,x);
```

出力結果：

$$2\,x^2+x-6=0$$

$$[x=\frac{3}{2}, x=-2]$$

```
EQ1:2*x+y=4;
EQ2:x+3*y=7;
ANS:solve([EQ1,EQ2],[x,y]);
ANS[1][1];
ANS[1][2];
```

出力結果：

$$y+2\,x=4$$

$$3\,y+x=7$$

$$[[x=1, y=2]]$$

$$x=1$$

$$y=2$$

D.4　行列

行列の定義：matrix([A,B],[C,D])

行列を入力、定義する。

```
XY:matrix([A,B],[C,D]);
```

出力結果：

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

運動を行列で表現するときには、下記のように列行列で表現した方が、変数変換行列の表現、演算表現で教科書に近い表現となり、理解しやすい。

```
kill(all);
X:x(t)=r(t)*cos(p(t));
Y:y(t)=r(t)*sin(p(t));
XY:matrix([ rhs(X)],[ rhs(Y) ]);
VXY:diff(XY,t);
AXY:diff(VXY,t);
TR:matrix([cos(p(t)), sin(p(t))],
          [ -sin(p(t)),cos(p(t))]);
VRP:trigsimp(TR.VXY);
v[r](t)=VRP[1,1];
v[p](t)=VRP[2,1];
ARP:trigsimp(TR.AXY);
a[r](t)=ARP[1,1];
a[p](t)=ARP[2,1];
EQR:M*ARP[1,1]=F[r];
EQP:M*ARP[2,1]=F[p];
```

要素の抽出：M[N][M]

N 行、M 列目の要素を抽出する。

```
XY:matrix([A,B],[C,D]);
XY[2][1];
```

出力結果：

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

$$\to C$$

行列の積：A.B

行列：A と行列：B の積を求める。

```
M1:matrix([A,B],[C,D]);
M2:matrix([E,F],[G,H]);
M1.M2;
```

出力結果：

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} B\,G+A\,E & B\,H+A\,F \\ D\,G+C\,E & D\,H+C\,F \end{bmatrix}$$

転置行列：transpose(M)

行列：M の転置行列を求める。

```
M1:matrix([A,B],[C,D]);
M2:matrix([A],[B]);
transpose(M1);
transpose(M2);
```

出力結果：

$$\begin{bmatrix} A & C \\ B & D \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}$$

運動エネルギーを求めるとき、各速度成分の二乗和が必要となる。速度の行列表現の転置行列と元行列の積から容易に求まる。

```
T:1/2*M*trigsimp(transpose(VXY).VXY);
```

行列式：determinant(M)

行列：M の行列式を求める。

```
M:matrix([2*D^2+2, D^2],[D^2,D^2+1]);
determinant(M);
```

出力結果：

$$\begin{bmatrix} 2\,D^2+2 & D^2 \\ D^2 & D^2+1 \end{bmatrix}$$

$$\to \left(D^2+1\right)\,\left(2\,D^2+2\right)-D^4$$

行列の作成：genmatrix(a,M,N)

定義された h の行列を作成する。

```
h[i,j]:=1/(i+j);
genmatrix(h,4,4);
```

出力結果：

$$h_{i,j} := \frac{1}{i+j}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

条件文が入った定義された a の行列を作成する。

```
AJK:1/(j+k);
a[m,n]:=block([b],
if m=4 then if n=4 then b:1 else b:0
else b:subst([k=n,j=m],AJK), return(b));
genmatrix(a,4,4);
```

出力結果：

$$\frac{1}{k+j}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

逆行列の計算：invert(a)

定義された a の逆行列を計算する。

```
h[i,j]:=1/(i+j);
genmatrix(h,4,4);
invert(%);
```

出力結果：

$$h_{i,j} := \frac{1}{i+j}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 200 & -1200 & 2100 & -1120 \\ -1200 & 8100 & -15120 & 8400 \\ 2100 & -15120 & 29400 & -16800 \\ -1120 & 8400 & -16800 & 9800 \end{pmatrix}$$

D.5 微分・積分

微分：diff(EX,x,N)

EX を微分変数：x で N 階微分を行う。N を省略すれば、1 階微分をする。

```
EX:x^3;
diff(EX,x,1);
diff(EX,x,2);
```

出力結果：

$$x^3 \to$$

$$3\,x^2$$

$$6\,x$$

```
X:x(t)=r(t)*cos(p(t));
diff(X,t,1);
```

$$x(t) = r(t)\ cos(p(t)) \to$$

$$\frac{d}{d\,t}\,x(t) = cos(p(t))\left(\frac{d}{d\,t}\,r(t)\right) - r(t)\ sin(p(t))\left(\frac{d}{d\,t}\,p(t)\right)$$

積分：integrate(EX,x,A,B)

EX を積分変数：x で、A から B の積分を行う。、A、B を省略すれば、不定積分となる。

```
EX:x^2;
integrate(EX,x,0,2);
integrate(EX,x);
```

$$x^2 \to$$

$$\frac{8}{3}$$

$$\frac{x^3}{3}$$

```
EX:y(x)^2;
integrate(EX,x);
integrate(EX,y(x));
```

$$y(x)^2 \to$$

$$\int y(x)^2 dx$$

$$\frac{y(x)^3}{3}$$

積分における変数変換：changevar(EX,EQ,B,A)

積分記述：EX を式：$EQ=0$ の関係を使って、変数：A から変数：B に変換する。

```
EX:'integrate(%e^(sqrt(a*y)),y,0,4);
EQ:y-z^2/a=0;
changevar(EX,lhs(EQ),z,y);
```

$$\int_0^4 e^{\sqrt{a\,y}}dy$$

$$y-\frac{z^2}{a}=0$$

$$-\frac{2\int_{-2\,\sqrt{a}}^{0} z\,e^{|z|}dz}{a}$$

微分方程式を解く：desolve([EQ1,EQ2],[f1(x),f2(x)])

連立微分方程式：$EQ1$、$EQ2$、で従属変数：$f1(x)$、$f2(x)$ を解く。初期条件は下記のようにして、従属変数の初期条件における値を定義する。連立微分方程式の場合、解は行列表示となる。

```
EQ1:diff(y(x),x,2)+2*y(x)+z(x)=0;
EQ2:y(x)+diff(z(x),x,2)+2*z(x)=0;
atvalue(y(x),x=0,1);
atvalue(diff(y(x),x,1),x=0,0);
atvalue(z(x),x=0,2);
atvalue(diff(z(x),x,1),x=0,0);
desolve([EQ1,EQ2],[y(x),z(x)]);
```

$$\frac{d^2}{d\,x^2}\,y\,(x)+z\,(x)+2\,y\,(x)=0$$

$$\frac{d^2}{d\,x^2}\,z\,(x)+2\,z\,(x)+y\,(x)=0$$

$$[y\,(x)=\frac{3\,cos\,(\sqrt{3}\,x)}{2}-\frac{cos\,(x)}{2}$$

$$,z\,(x)=\frac{3\,cos\,(\sqrt{3}\,x)}{2}+\frac{cos\,(x)}{2}]$$

微分方程式を解く：ode2(EQ,f(x),x)

2 階以下の微分方程式：EQ で従属変数：$f(x)$、独立変数：x を解く。境界条件は下記のように、関数：ode2 を実行後に、関数：ic1,ic2,bc2 を使用して定義する。

一階微分方程式の場合

```
kill(all);
EQ: diff(y(x),x,1)=-(x-C)/y(x);
ANS:ode2(EQ,y(x),x);
ANS1:ic1(ANS,x=0,y(x)=1);
```

下記に出力結果を示す。$y\,(x)$ の関数形で解は得られるが、境界条件を ic1 で求めた結果は満足ではない。

$$\frac{d}{d\,x}\,y\,(x)=\frac{C-x}{y\,(x)}$$

$$\frac{y\,(x)^2}{2}=\frac{2\,x\,C-x^2}{2}+\%c$$

$$\frac{y\,(x)^2}{2}=\frac{2\,x\,C-x^2+y\,(0)^2}{2}$$

```
kill(all);
depends(y,x);
EQ: diff(y,x,1)=-(x-C)/y;
ANS:ode2(EQ,y,x);
ANS1:ic1(ANS,x=0,y=1);
```

下記に depends を使った関数形の出力結果を示す。境界条件を ic1 で求めた結果は満足できる。

$$[\mathrm{y}\,(x)]$$

$$\frac{d}{d\,x}\,y=\frac{C-x}{y}$$

$$\frac{y^2}{2}=\frac{2\,x\,C-x^2}{2}+\%c$$

$$\frac{y^2}{2}=\frac{2\,x\,C-x^2+1}{2}$$

二階微分方程式の場合

```
kill(all);
EQ:x^2*diff(y(x),x,2)+x*diff(y(x),x,1)
  -4*y(x)=0;
ANS:ode2(EQ,y(x),x);
ANS1:ic2(ANS,x=1,y(x)=1,diff(y(x),x,1)=0);
ANS2:bc2(ANS,x=1,y(x)=0,x=2,y(x)=1);
```

下記に出力結果を示す。$y\,(x)$ の関数形で解は得られるが、境界条件を ic2,bc2 で求めた結果は満足ではない。

$$x^2\,\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,y\,(x)\right)+x\,\left(\frac{d}{d\,x}\,y\,(x)\right)-4\,y\,(x)=0$$

$$y\,(x)=\%k1\,x^2+\frac{\%k2}{x^2}$$

$$y\,(x)=\frac{y\,(1)\;x^2}{2}+\frac{y\,(1)}{2\,x^2}$$

$$y(x) = \frac{16\,y(1) - 4\,y(2)}{15\,x^2} - \frac{(y(1) - 4\,y(2))\,x^2}{15}$$

```
kill(all);
depends(y,x);
EQ:x^2*diff(y,x,2)+x*diff(y,x,1)
  -4*y=0;
ANS:ode2(EQ,y,x);
ANS1:ic2(ANS,x=1,y=1,diff(y,x,1)=0);
ANS2:bc2(ANS,x=1,y=0,x=2,y=1);
```

下記に depends を使った関数形の出力結果を示す。境界条件を ic2,bc2 で求めた結果は満足できる。

$$[\mathrm{y}(x)]$$

$$x^2\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,y\right) + x\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right) - 4\,y = 0$$

$$y = \%k1\,x^2 + \frac{\%k2}{x^2}$$

$$y = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2\,x^2}$$

$$y = \frac{4\,x^2}{15} - \frac{4}{15\,x^2}$$

微分方程式の数値解：$rk([EQ1, EQ2], [x, y], [X0, Y0], [t, T0, T1, DT])$

ルンゲ・クッタ法で微分方程式を数値解析する。左辺が 1 階微分の形で微分方程式を表現する。右辺を $EQ1$、$EQ2$ で表し、左辺の従属変数を x、y とする。それぞれの、初期値を $X0$、$Y0$ とし、独立変数を t とする。独立変数の $T0$ から $T1$ まで、DT 間隔で数値解析する。ここで独立変数は $x(t)$ の形は扱えない。実行する前に、ルンゲ・クッタ法のプログラムをロードする必要があるので、$load("dynamics")$; を入力する。

$$\frac{d}{d\,t}\,x = -4\,y^2 - x^2 + 4$$

$$\frac{d}{d\,t}\,y = y^2 - x^2 + 1$$

の場合、

```
EQ1:'diff(x,t)=4-x^2-4*y^2;
EQ2:'diff(y,t)=y^2-x^2+1;
load("dynamics");
sol:rk([rhs(EQ1),rhs(EQ2)],[x,y],
  [-1.25,0.75],[t,0,4,0.02]);
```

入っている出力は、リストの形式で出力されるので、下記の例に示すように sol に結果を入れ、必要な項目を $list12$ に入れなおす。そして、下記の図形関数：$plot2d$ などで見ることができる。

$$\frac{d^2}{d\,t^2}\,x = -sin(x)$$

の場合、下記の 1 階連立微分方程式に置き換えて解く。

$$\frac{d}{d\,t}\,x = y$$

$$\frac{d}{d\,t}\,y = -sin(x)$$

```
kill(all);
EQ1:'diff(x,t,2)=-sin(x);
Tmax:3;
dT:0.03;
Nplot:fix(Tmax/dT);
load("dynamics");
P[0]:%pi/9;
sol:rk([y,rhs(EQ1)],[x,y],[P[0],0],
  [t,0,Tmax,dT]);
list12:[[sol[1][1],sol[1][2]]];
for J:2 thru Nplot do(list12:append(list12,
  [[sol[J][1],sol[J][2]]]));
plot2d([discrete,list12]);
```

D.6　複素数

複素変数宣言：declare(z,complex)

z が複素変数であることを宣言する。

```
declare(z,complex);
```

実部：realpart(z)

複素数:z の実部を出力する。

```
kill(all);
declare(z,complex);
Z1:z=x[1]+%i*y[1];
realpart(rhs(Z1));
```

$$z = i\,y_1 + x_1 \rightarrow x_1$$

虚部：imagpart(z)

複素数:z の虚部を出力する。

```
kill(all);
declare(z,complex);
Z1:z=x[1]+%i*y[1];
imagpart(rhs(Z1));
```

$$z = i\,y_1 + x_1 \rightarrow y_1$$

複素共役：conjugate(z)

複素数:z の複素共役を出力する。

```
kill(all);
declare(z,complex);
Z1:z=x[1]+%i*y[1];
conjugate(rhs(Z1))
```

$$z = i\,y_1 + x_1 \rightarrow x_1 - i\,y_1$$

極座標表示：polarform(z)

複素数:z を極座標表示で出力する。

```
kill(all);
declare(z,complex);
Z1:z=x[1]+%i*y[1];
polarform(rhs(Z1));
```

$$z = i\,y_1 + x_1 \rightarrow \sqrt{y_1^2 + x_1^2}\, e^{i\,\mathrm{atan2}(y_1, x_1)}$$

xy 座標表示：rectform(z)

複素数:z を極座標表示で出力する。

```
kill(all);
declare(z,complex);
Z1:z=r*%e^(%i*\theta);
rectform(rhs(Z1));
```

$$z = r\,e^{i\,\theta} \rightarrow i\,r\sin(\theta) + r\cos(\theta)$$

留数：residue(EQ,z,z[0])

式：EQ、変数：z で、z_0 における留数を求める。

```
kill(all);
declare(z,complex);
residue (z/(z^2+a^2), z, a*%i);
residue (sin(a*z)/z^4, z, 0);
```

$$\frac{1}{2}$$

$$-\frac{a^3}{6}$$

D.7 極限・級数

極限：limit(EQ,x,A,dir)

変数 x を方向:dir から A に接近する場合、式：EQ の極限を計算する。dir としては、$plus$ か $minus$ を入力する。A に接近した場合、値が分かれない場合は、dir は入力しなくてよい。ここでプラス無限大は inf、マイナス無限大は $minf$ である。

$$x(t) = \frac{U0}{C} - \frac{e^{-t\,C}\,U0}{C}$$

$$Xmax = \frac{U0}{C}$$

```
kill(all);
XX:x(t)=U0/C-(%e^(-t*C)*U0)/C;
Xmax=limit(rhs(XX),t,inf);
```

$$x(t) = \frac{U0}{C} - \frac{e^{-t\,C}\,U0}{C}$$

$$Xmax = \frac{U0}{C}$$

級数展開：taylor(EX,x,A,N)

式 EX を A のまわりで、変数：x の Taylor 級数を N 乗まで求める。

```
taylor(sin(x),x,0,7);
```

$$sin(x) \to x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \ldots$$

級数和：sum(EX,n,n1,n2)

式 EX を変数：n の $n1$ から $n2$ までの級数和を求める。

```
HH:h=h[0]+2*sum(h[0]*E^(2*n),n,1,inf);
h=h[0]+2*sum(h[0]*E^(2*n),n,1,4);
```

$$h = 2\,h_0\left(\sum_{n=1}^{\infty} E^{2\,n}\right) + h_0$$

$$h = 2\,\left(h_0\,E^8 + h_0\,E^6 + h_0\,E^4 + h_0\,E^2\right) + h_0$$

級数和の簡素化：simpsum

上部で定義されている級数和を、true にすることで簡素化する。結果が得られたら、false にする。

```
assume(E>0, E<1);
HH:h[0]+2*sum(h[0]*E^(2*n),n,1,inf);
HH, simpsum;
sum(1/n^2,n,1,inf);
sum(1/n^2,n,1,inf), simpsum;
sum (1/3^i, i, 1, inf);
%,simpsum;
```

$$2\,h_0\left(\sum_{n=1}^{\infty} E^{2\,n}\right) + h_0 \to \frac{2\,h_0\,E^2}{1-E^2} + h_0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \to \frac{\pi^2}{6}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{3^i} \to \frac{1}{2}$$

級数積：product(EX,n,n1,n2)

式 EX を変数：n の $n1$ から $n2$ までの級数積を求める。

```
kill(all);
product(k,k,1,n);
```

$$\prod_{k=1}^{n} k$$

級数積の簡素化：simpproduct

定義されている級数積を、簡素化する。

```
kill(all);
product (k,k,1,n), simpproduct;
```

$$n!$$

D.8　プログラム

反復：for N:k step l thru m do(A);

A を N が k から m まで i ステップ毎に反復実行する。A で複数の処理をする場合は , で区切る。

条件分岐：if B then C else D;

条件式：B が真なら C を実行し、虚なら D を実行する。条件式として、$N=1, N>0$ などである。

```
kill(all);
for J:1 thru 10 do(
if J=1 then listUU20:[[1,2]]
 else listUU20:append(listUU20,
 [[2*J-1,2*J]]));
listUU20;
```

リストのファイル出力、読み込み：write_data,　read_list

計算結果などのリストデータを外部メディアにファイル出力し、外部メディアにファイル出力したリストを読み込む。

```
kill(all);
listUU:[[1,11],[2,22],[3,33]];
write_data(listUU,"M:\listUU20.cvs");
list:read_list("M:\listUU20.cvs");
for J:1 thru 100 do(
if J=1 then listUU20:[[list[1],list[2]]]
 else listUU20:append(listUU20,
 [[list[2*J-1],list[2*J]]]));
listUU20;
```

リストデータ:listUU を作成する。

$$[[1,11],[2,22],[3,33]]$$

外部メディアにファイル：M:listUU20.cvs の名前で、出力する。
外部メディアにファイル：M:listUU20.cvs をリストとして読み込む。読み込んだ結果は下記、

$$[1,11,2,22,3,33]$$

連続したデータリストとなっているので、振り分け作業を行い、元の形にする。

$$[[1,11],[2,22],[3,33]]$$

D.9　その他

第一種完全楕円積分関数：elliptic_kc(m)

下記の第一種完全楕円積分関数を求める。

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-m\,sin\,(x)^2}}dx$$

第一種ベッセル関数：bessel_j(n,x)

次数：n で変数：x の第一種ベッセル関数を求める。

第二種ベッセル関数：bessel_y(n,x)

次数：n で変数：x の第二種ベッセル関数を求める。

第一種変形ベッセル関数：bessel_i(n,x)

次数:n で変数:x の第一種変形ベッセル関数を求める。

第二種変形ベッセル関数：bessel_k(n,x)

次数:n で変数:x の第二種変形ベッセル関数を求める。

根を得る：find_root(Fn,x,a,b)

根を数値解析で得る。関数：Fn を与え、変数：x が a〜b の範囲で $FN=0$ の根を求める。

```
kill(all);
find_root(bessel_j(1,x),x,2,4);
```

$bessel_j(1,x)$ の根を x が 2 から 4 の範囲で求める。

定数：π：%pi

定数：自然対数の底：%e

定数：虚数：%i

定数：正の無限大：inf

定数：負の無限大：minf

浮動小数点で近似値：float(EQ)

D.10　グラフ作成

二次元グラフ：plot2d([EX1,EX2],[range],[op])

二次元のグラフを作成する。$EX1$、$EX2$ に数式や点列の指定、$range$ に横軸の計算レンジ、op に縦軸に指定などのオプションを指定する。

(1) 数式を与えて

数式と x の計算レンジを与えたグラフの作成をする。

```
plot2d (x^3+2, [x, -3, 3]);
```

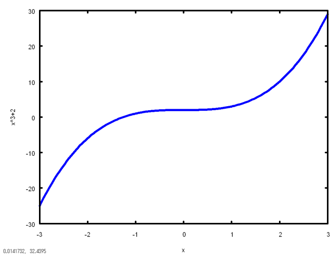


図 D.10.1: 数式を与えて

(2) 数式を与えて軌跡

x、y の変数：t の数式を与え、$x-y$ 面上のグラフの作成をする。$nticks$ で分割点数を与える。

```
plot2d ([parametric,2*cos(t),10*sin(t),
   [t,-5,5],[nticks,80]]);
```

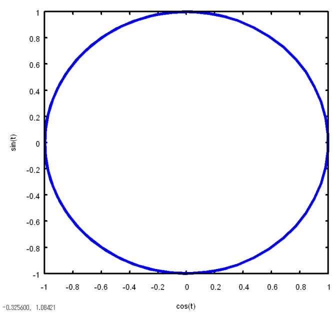


図 D.10.2: 数式を与えて軌跡

(3) 点列を与えて

x、y の点列の行列を与え、グラフの作成をする。

```
xy:[[-2,30],[-1,20],[0,10],[1,-10],
  [2,-20]];
plot2d([discrete,xy]);
```

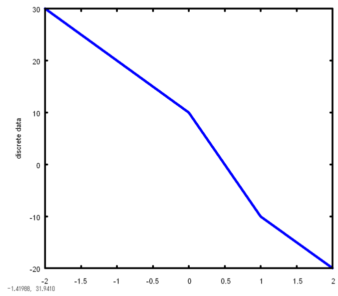


図 D.10.3: 点列を与えて

(4) 複数の数式を与えて

数式と x の計算レンジを与えたグラフの作成をする。

```
plot2d ([-10*x,2*x^2-2,x^3+2],[x,-3, 3]);
```

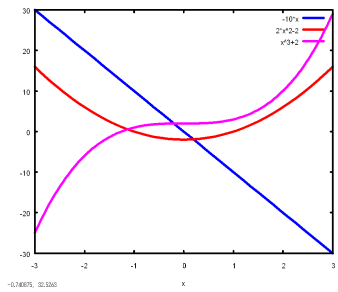


図 D.10.4: 複数の数式を与えて

(5) 複数のグラフの合成

数式と x の計算レンジを与えたグラフの作成をする。

```
plot2d ([x^3+2,[parametric,2*cos(t),
   10*sin(t),[t,-5,5],[nticks,80]],
   [discrete,xy]],
   [x,-3,3]);
```

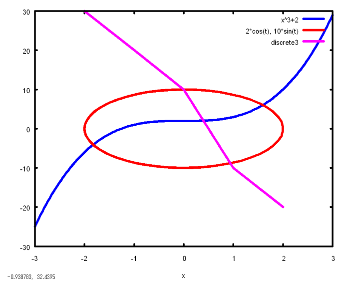


図 D.10.5: 複数のグラフの合成

(6) オプション

線の種類を指定

$[style, [lines, l1, l2]]$

l1：線の太さ、l2：線の色を指定する。lines：線で描くが、これを points、linespoints、dots と指定することもできる。

```
plot2d([x,2*x,-x,-2*x],[x,-10,10],
 [y,-10,10],[nticks,5],[style,[lines,8,1],
 [points,4,2],[linespoints,2,3],
 [dots,8,4]]);
```

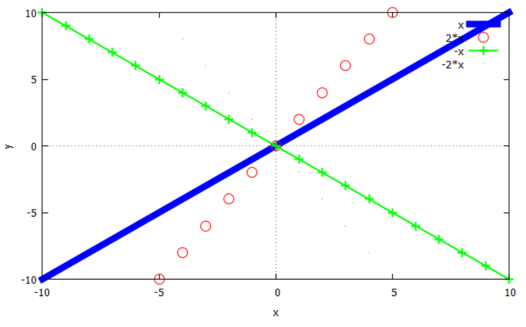


図 D.10.6: 線の種類

線のコメント

```
plot2d([x,2*x,-x,-2*x],[x,-10,10],
 [y,-10,10],[legend, "A","B","C","D"]);
```

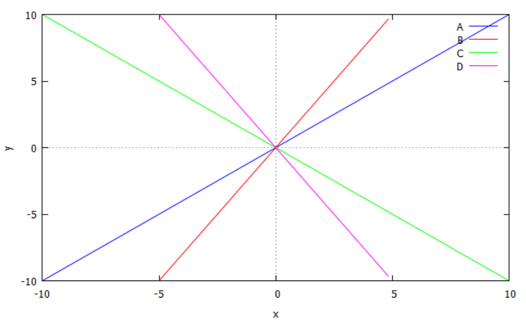


図 D.10.7: 線にコメント

縦軸、横軸のコメント

```
plot2d (x^3+2,[x,-3,3],[y,-40,50],
    [xlabel, "X axis"],[ylabel, "Y axis"]);
```

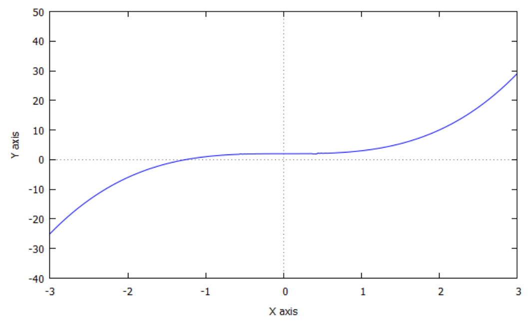


図 D.10.8: 縦軸、横軸コメント

対数軸

```
plot2d(%e^x,[x,-100,100],[logy]);
plot2d(log(x),[x,0.1,100],[logx]);
```

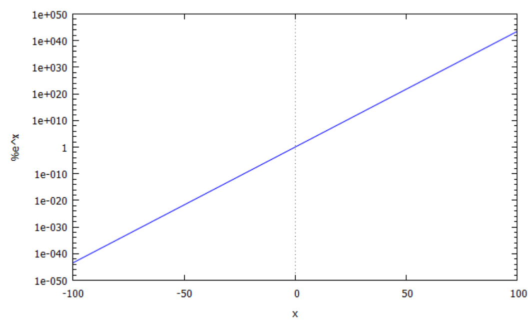


図 D.10.9: y 軸対数軸

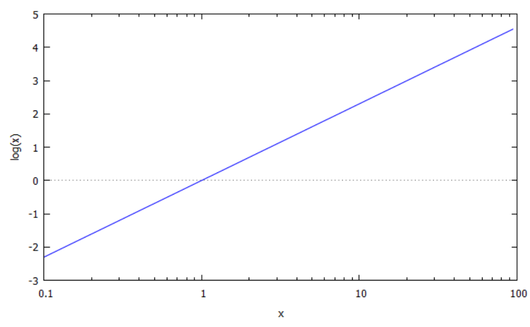


図 D.10.10: x 軸対数軸

三次元グラフ：plot3d(EX1,[x range],[y range])

三次元のグラフを作成する。$EX1$ に数式の指定、$xrange$ に横軸の計算レンジ、$yrange$ に縦軸の計算レンジの指定などのオプションを指定する。

数式と x, y の計算レンジを与えたグラフの作成をする。

```
plot3d (2^(-u^2+v^2),[u,-3,3],[v,-2,2]);
```

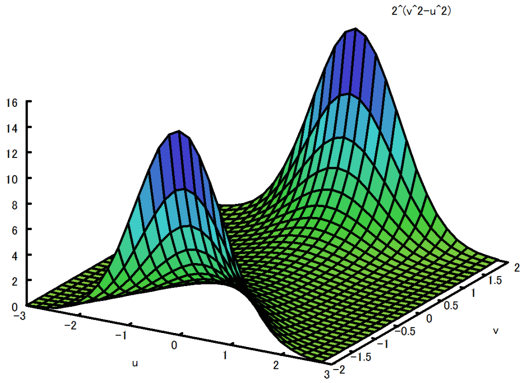


図 D.10.11: 三次元グラフ

円柱座標三次元グラフ：

円柱座標三次元グラフを作成する。

```
plot3d(r^2,[r,0,1],[\theta,0,2*%pi],
 [grid,20,50],[transform_xy,polar_to_xy]);
```

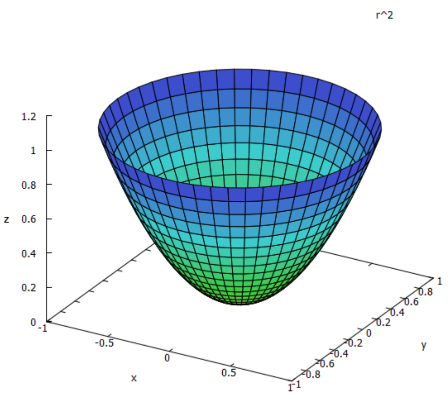


図 D.10.12: 円柱座標三次元グラフ

等高線グラフ (gnuplot による)

等高線グラフを gnuplot で作成する。

set xrange [X1:X2]　x range
set xrange [Y1:Y2]　y range
set isosamples NX,NY　x,y 軸の分割点数
set cntrparam levels incremental Z1,dz,Z2　z 軸の初期値、増分、終値
splot EX　数式

```
#!/gnuplot
set xrange [-3:3]
set yrange [-3:3]
set isosamples 150,150
set contour base
set cntrparam levels incremental -3,0.2,4
unset key
unset surface
set view map
splot (7*log(y**2+x**2))/(2*pi)
 -y/(y**2+x**2)+y
#    EOF
```

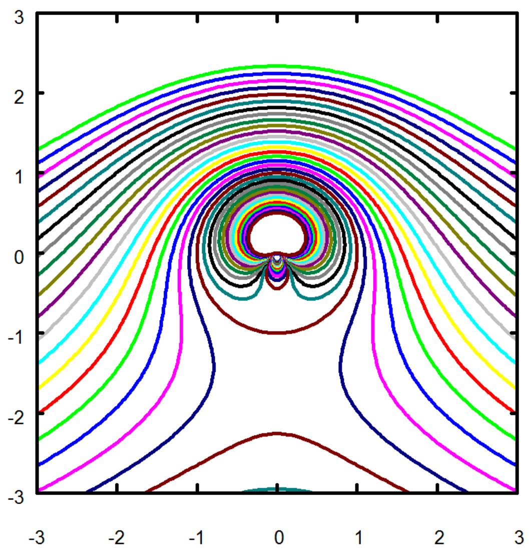


図 D.10.13: 等高線グラフ

参考文献

1) Maxima の公式ホームページ、http://maxima.sourceforge.net/

2) 横田博史：はじめての Maxima、工学社 2005

3) 竹内 薫：はじめての数式処理ソフト CD-ROM 付、 (ブルーバックス) (新書) 2007

4) 中川義行：Maxima 入門ノート 1.2.1 、http://www.eonet.ne.jp/ kyo-ju/maxima.pdf

5) 横田博史：Maxima 簡易マニュアル、 http://www.bekkoame.ne.jp/ ponpoko/Math/books/ManualBook.pdf

6) Maxima 普及委員会、 http://www.cymric.jp/maxima/top.html

7) Profesional Maxima、 http://www.muskmelon.jp/maxima/pro-maxima-20080303.pdf

8) 奥村晴彦：[改訂第 4 版]LaTeX 2$_{\varepsilon}$ 美文書作成入門、技術評論社 2007

9) 山本昌志：gnuplot の精義、株式会社カットシステム 2010

10) Robert L. Zimmerman, Fredrick I. Olness： Mathematica for Physics, 訳：武藤　覚、小泉　悟、ピアソン・エデュケーション　1999

11) Sir Horance Lamb, Hydrodynamics sixth edition, Cambridge University Press, 1932

12) Dr Harmann Schlihting, Boundary Layer Theory, McGRAW-HILL BOOK C., 1955

13) 近藤次郎：積分方程式とその応用、、コロナ社 1959

14) Victor L. Streeter：Handbook of Fluid Dynamics, McGRAW-HILL BOOK C., 1961

15) L. M. Milne-Thomson：Theretical Hydrodynamics, Fourth Edition, Macmillan & Co. Ltd., 1962

16) 藤本武助：流体力学、養賢堂、1965

17) エリ・ランダウ、イェ・リフシッツ、竹内　均：ランダウーリフシッツ理論物理学教程：流体力学　1・2、東京図書 (株)　1971

18) G. K. Batchelor, 橋本英典、松信八十男訳：入門　流体力学、東京電機大学出版、1972

19) 今井　功：流体力学（前編)、裳華房、1973

20) Victor L. Streeter, E. Benjamin Wylie：竹中利夫訳：流体過渡現象、日本工業新聞、1973

21) J. N. Newman, Marine Hydrodynamics, The MIT Press, 1977

22) Raymond L. Bisplinghoff, Holt Ashley, Robert L. Halfman, Aeroelasticity, DoverPublications, inc, 1983

23) 太田　栄一、南和　一郎、小山　正晴：流体力学演習、学献社、1987

24) ラム：今井　功、橋本　英典訳：流体力学（1・2・3)、東京図書（株)、1988

25) 今井　功：複素解析と流体力学、日本評論社、1989

26) 吉野　章男、菊山　功嗣、宮田　勝文、山下　新太郎：詳解　流体力学演習、共立出版（株）1989

27) 今木　清康：詳解　水力学（第 2 版)、理工学社、1990

28) 神部　勉：基礎演習シリーズ　流体力学、裳華房、1995

29) 森下　悦生：Excel で学ぶ流体力学、丸善（株)、2000

30) 吉澤　徴：流体力学、東京大学出版会、2001

31) 京谷　孝史：よくわかる連続体力学ノート、非線形 CAE 協会編、森北出版（株）2008

32) 森口　繁一、宇田川　久、一松　信：岩波数学公式 1　微分積分・平面曲線、岩波書店　2003

33) 森口　繁一、宇田川　久、一松　信：岩波数学公式 2　級数・フーリエ解析、岩波書店　1998

34) 森口　繁一、宇田川　久、一松　信：岩波数学公式 3　特殊函数、岩波書店　2002

35) G. ポリア、柿内賢信訳：いかにして問題を解くか、丸善出版　1954

36) 漏れ試験、（社）日本非破壊検査協会、PP.14、PP.152 (1995)

37) 溝口純敏：Maxima を使った物理数学基礎演習ノート、http://www9.plala.or.jp/prac-maxima/