

Maxima を使った力学演習ノート

溝口純敏

<http://www.mzplactice.com/>

平成 21 年 4 月 初版

平成 21 年 8 月 第一回改訂 球面振り子の線形化

平成 24 年 12 月 第二回改訂 全面改正

平成 28 年 7 月 第三回改訂 全面改正

目次

第 1 章	はじめに	6
第 2 章	質点の力学	8
2.1	運動方程式	8
2.1.1	x, y 座標における運動方程式	8
2.1.2	二次元極座標における運動方程式	8
2.1.3	三次元極座標における運動方程式	10
2.1.4	運動量と力積	12
2.1.5	角運動量	12
2.1.6	エネルギー保存	12
2.1.7	Lagrange の運動方程式	12
2.2	放出体の運動	13
2.2.1	鉛直放出体の運動	13
2.2.2	放物運動	14
2.2.3	速度に比例した抵抗のある放物運動	15
2.2.4	速度の二乗に比例する抵抗のある鉛直放出体の運動	17
2.3	振子の運動	19
2.3.1	単振動	19
2.3.2	単振子減衰振動	20
2.3.3	単振子強制振動	21
2.3.4	質点に作用する力が変位の 1 乗 + 2 乗に比例する場合の振動	22
2.3.5	質点に作用する力が変位の 1 乗 + 3 乗に比例する場合の振動	25
2.3.6	二つの振子振動	28
2.3.7	単振り子	29
2.3.8	円上を滑り落ちる質点	33
2.3.9	二重振り子	34
2.3.10	糸に吊した二つの振り子	40
2.3.11	水平ばね + 振り子	42
2.3.12	振り子の水平強制振動	43
2.3.13	振り子の鉛直強制振動	44
2.3.14	球面振り子	47
2.4	中心力による運動	64
2.4.1	惑星の運動	64
2.4.2	地球脱出速度	71
2.4.3	惑星の運動 (エネルギー式) と散乱角	72
2.4.4	探査機のスイングバイによる加速	75
2.4.5	ラザフォード散乱	76
2.4.6	平板上を回転する質点とそれと結び吊した質点	79
2.5	相対運動	82
2.5.1	並進座標系の運動方程式	82
2.5.2	回転座標系の運動方程式	83
2.5.3	一定の角速度をもつ座標系の運動方程式	84

2.5.4	自転する地球上に固定した座標系の運動方程式	86
2.5.5	エレベータ中の放物運動	90
2.5.6	列車中の単振り子	91
2.5.7	一定回転する円管に通した質点の運動	92
2.5.8	地球の自転を考慮した自由落下	94
2.5.9	地球の自転を考慮した投射運動とその着地点ずれ量	96
2.5.10	自転する地球上での単振り子の運動	99
2.5.11	自転する地球上で滑らかな水平面上の運動	101
2.6	運動量	102
2.6.1	弾性球の止まるまでの運動距離と時間	102
2.6.2	二つの弾性体の正面衝突	103
2.6.3	二つの弾性体の斜め衝突	104
2.6.4	弾丸の撃ち込み	104
2.6.5	砲身と砲弾の運動	105
2.6.6	大きくなっていく雨粒の落下	106
2.6.7	ロケットの運動	107
2.6.8	鎖の落下	108
第3章	剛体の運動	109
3.1	剛体のつりあい・安定性	109
3.1.1	剛体のつりあい運動方程式	109
3.1.2	立てかけたはしご	110
3.1.3	蝶番のある2本の棒	111
3.1.4	吊した二つの球	112
3.1.5	鉛直な円輪内に置いた棒	113
3.1.6	半球殻の上に置いた棒	114
3.1.7	向かい合った斜面に立てかけた棒	115
3.1.8	丸い穴にさして立てた円錐	117
3.1.9	円柱の上の立方体	119
3.1.10	懸垂曲線	120
3.1.11	一端固定、他端滑車に垂らした糸の釣合位置	123
3.2	剛体の平面運動	124
3.2.1	質点系の運動方程式	124
3.2.2	剛体の平面運動方程式	128
3.2.3	物理振り子	129
3.2.4	滑車につるされた質量	130
3.2.5	斜面頂上の滑車につるされた質量	131
3.2.6	斜面を転がる円柱	133
3.2.7	床に立てた棒	134
3.2.8	壁に立てかけた棒	138
3.2.9	固定中空円筒の中を転がる円柱	140
3.2.10	自由回転する中空円筒の中を転がる円柱	141
3.2.11	撃力	143
3.3	剛体の固定点まわりの運動	144
3.3.1	静止座標系の運動方程式	144
3.3.2	慣性楕円体	145
3.3.3	オイラー角の変換による静止座標系と運動座標系の関係	147
3.3.4	剛体の固定点まわりの運動方程式	149
3.3.5	外力を受けない固定点のある軸対称剛体の運動（地球自転軸の振れ）	150
3.3.6	対称こまの運動	154

3.3.7 ジャイロコンパスの指北原理	164
3.3.8 円板（または円輪）のころがり	171
付録 A よく使う Maxima の関数	177
A.1 wxMaxima を使用した演習の進め方	177
A.2 宣言文	177
A.3 数式操作	178
A.4 行列	181
A.5 微分・積分	182
A.6 複素数	185
A.7 極限・級数	186
A.8 プログラム	187
A.9 その他	187
A.10 グラフ作成	188

第1章 はじめに

理工系で物理学を学ぶ初心者を対象に、Maxima(数式処理システム)を使った力学演習ノートを作成しました。あくまで演習ノートであるので、式の詳細な導出や証明、解説は行っていません。これらについては、参考文献などのすばらしい書籍等があるので、それらを参考にしてください。

物理学を学ぼうとしている人にとって、数学は道具であり、それをある程度、しっかり理解することを通して、物理の概念、本質の理解を深めていけると思います。数学の数式展開や証明に主眼をおく必要はありません。ここでまとめた力学は、解析結果の結論と経験とが結びつく身近な問題が多いので、数式の展開に多くの時間をかけるのではなく、Maximaなどの数式処理システムを使って物理を学び、理解を深めるのが効率的な学び方ではないかと思い、本書をまとめました。

最近、インターネットや電子辞書・電子書籍で多くの知識を容易に得ることができ、音声認識システムで、話したことを文章化できたり、翻訳できます。そして、これらが可能な携帯情報端末が一般に使用される時代となっています。また、人工知能を使った数式処理システムで因数分解、微分、積分、微分方程式など、多くの数式処理がパーソナルコンピューターで容易に可能になっています。フリーの数式処理ソフト: Maximaも公開され、多くの人がこれを使用していると思われます。

一方、近年、科学の進歩で、多くのことが明らかになり、分野も広がっており、変化が激しい世の中となっています。その中で、時間も限られる状況下でどのような深い知恵を習得すべきなのでしょう。前述したように、現在、携帯情報端末で多くの情報、知識を容易に得ることができます。また、将来は、人工知能の発達で、更に我々に対し多くの事柄を補佐してくれるでしょう。このような時代に備え、我々は何を身につけておくべきなのでしょう。私は高い問題解決能力を身につけることが大切ではないかと思っています。

問題解決能力を高めるには、できる限り多くのよい問題を解くことを経験し、物事の本質を理解するとともに、問題解決のプロセスを習得することが重要とされています¹⁹⁾。ここにMaximaを活用して、多くの例題を効率よく解き、物事の本質の理解を深め、経験を積むことができます。例えば、運動方程式の導出やその極座

標系への変換では、手計算では気が遠くなるような作業であり、現実には本に書かれているようになるんですね、で終わってしまいます。しかし、Maximaなどの数式処理システムを用いれば、基本的な考え方をプログラムするだけで、後の大変な式の展開は計算機が実行してくれます。ここでは問題解決のプロセスを明らかにすることが要求され、効率よく問題解決能力を高める訓練が行えると思います。

本ノートは wxMaxima 13.04.2(Maxima-5.31.2) を使用してまとめました。これは会話形式で処理を実行でき、数式出力結果を Tex 出力・コピーができるとともに、グラフも出力・コピーできるので、大変便利です。また、これらを有効活用できる文書作成ソフト: L^AT_EX 2_ε を使用し、本ノートをまとめました。

以下では Maxima の入力部分を枠で囲って表し、出力結果をその後に数式で示しています。また、小文字は関数、変数を、大文字は定数を表すのに統一して使っています。Maxima の微分の出力で、例えば本来、 $\frac{\partial}{\partial x}$ と記述されるべきが、 $\frac{d}{dx}$ と出力されます。ここでは Maxima の出力通りに記述しているので誤解の無いように願います。また、Maxima のプログラムに統一性を欠いたり、例題の選定・記述などで不十分なところもありますが、まずは、まとめた結果を早期に公表し、皆様に供することとしたので、ご容赦願います。

本ノートをまとめるにあたり、Maxima および L^AT_EX 2_ε の開発や普及に携わられた方々に感謝いたします。

平成 21 年 8 月 第一回改訂 球面振り子の線形化 平成

21 年 4 月 初版では、球面振り子の線形化を初期値を中心に線形化を行ったが、結果が思わしくなかった。そこで、運動のモデルとして、旋回運動中心と底面近傍の振り子運動中心と考え、旋回運動中心は、定常状態で円錐運動を行っている状態から外乱を加えた運動を求めた。また、底面近傍の振り子運動では、質点の軌跡が楕円になることから、これに振り子の上下振幅の近似解と旋回角の近似解を基に楕円運動を修正した。

平成 24 年 12 月 第二回改訂 球面振り子、中心力による運動(惑星の運動)を大幅改訂した。その他図

を多く入れ、わかりやすくとともに、例題:地球脱出速度、散乱角、平板上を旋回する質点とそれを結び吊した質点、二つの弾性体の正面・斜め衝突、弾丸の撃ち込みを追加した。

平成 28 年 7 月 第三回改訂 これまでの「質点の力学」と「剛体運動」を合わせて、「力学演習」としてまとめ、全体を見直した。

第2章 質点の力学

2.1 運動方程式

質点の運動を求めるのに、下記の運動方程式を使用する。

2.1.1 x, y 座標における運動方程式

質量： M の質点に x, y 軸方向の力： F_x, F_y が作用するとき、質量： M の x, y 軸方向の変位： $x(t), y(t)$ 、 x, y 軸方向の速度： $v_x(t), v_y(t)$ とすると運動方程式は下記となる。

$$M \frac{d}{dt} v_x(t) = M \frac{d^2}{dt^2} x(t) = F_x \quad (2.1.1)$$

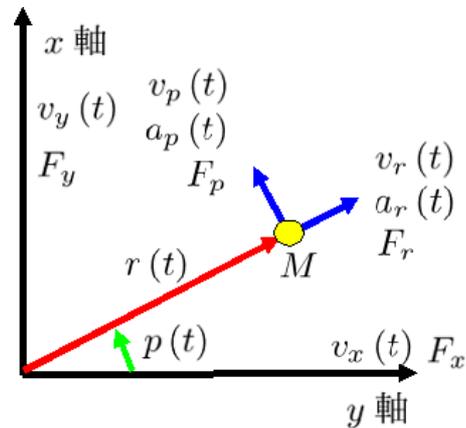
$$M \frac{d}{dt} v_y(t) = M \frac{d^2}{dt^2} y(t) = F_y \quad (2.1.2)$$

上式をベクトル表記すると、

$$M \frac{d}{dt} \vec{v} = M \frac{d^2}{dt^2} \vec{r} = \vec{F} \quad (2.1.3)$$

2.1.2 二次元極座標における運動方程式

下図に示す二次元極座標で、原点からの距離： r 、 r と x 軸との角度： p とする。質量： M の質点に極座標 r, p 方向の力： F_r, F_p が作用するとき、



```
kill(all);
X:x(t)=r(t)*cos(p(t));
Y:y(t)=r(t)*sin(p(t));
XY:matrix([ lhs(X)],[ lhs(Y) ])=matrix([
  rhs(X)],[ rhs(Y) ]);
VXY:diff(XY,t);
AXY:diff(VXY,t);
TR:matrix([cos(p(t)), sin(p(t))],
  [-sin(p(t)),cos(p(t))]);
VRP:trigsimp(TR.rhs(VXY));
v[r](t)=VRP[1,1];
v[p](t)=VRP[2,1];
ARP:trigsimp(TR.rhs(AXY));
a[r](t)=ARP[1,1];
a[p](t)=ARP[2,1];
EQR:M*ARP[1,1]=F[r];
EQP:M*ARP[2,1]=F[p];
```

x, y 座標と極座標： r, p の関係は、

$$x(t) = r(t) \cos(p(t))$$

$$y(t) = r(t) \sin(p(t))$$

これをベクトル表記して、

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(t) \cos(p(t)) \\ r(t) \sin(p(t)) \end{pmatrix} \quad (2.1.4)$$

これを時間： t で微分し、速度： \vec{v} 、加速度： \vec{a} を求めると、

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} x(t) \\ \frac{d}{dt} y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(p(t)) \left(\frac{d}{dt} r(t)\right) - r(t) \sin(p(t)) \left(\frac{d}{dt} p(t)\right) \\ \sin(p(t)) \left(\frac{d}{dt} r(t)\right) + r(t) \cos(p(t)) \left(\frac{d}{dt} p(t)\right) \end{pmatrix} \quad (2.1.5)$$

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \begin{pmatrix} \frac{d^2}{dt^2} x(t) \\ \frac{d^2}{dt^2} y(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(p(t)) \left(\frac{d^2}{dt^2} r(t)\right) - 2 \sin(p(t)) \left(\frac{d}{dt} p(t)\right) \left(\frac{d}{dt} r(t)\right) - r(t) \sin(p(t)) \left(\frac{d^2}{dt^2} p(t)\right) - r(t) \cos(p(t)) \left(\frac{d}{dt} p(t)\right)^2 \\ \sin(p(t)) \left(\frac{d^2}{dt^2} r(t)\right) + 2 \cos(p(t)) \left(\frac{d}{dt} p(t)\right) \left(\frac{d}{dt} r(t)\right) + r(t) \cos(p(t)) \left(\frac{d^2}{dt^2} p(t)\right) - r(t) \sin(p(t)) \left(\frac{d}{dt} p(t)\right)^2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

x, y 座標から極座標の変換マトリックス： TR は¹、

$$TR = \begin{pmatrix} \cos(p(t)) & \sin(p(t)) \\ -\sin(p(t)) & \cos(p(t)) \end{pmatrix} \quad (2.1.7)$$

(2.1.5) 式、(2.1.6) 式に掛けて、整理し、速度： \vec{v} 、加速度： \vec{a} を極座標表記に変換すると、

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} r(t) \\ r(t) \left(\frac{d}{dt} p(t)\right) \end{pmatrix} \\ \vec{a} &= \begin{pmatrix} \frac{d^2}{dt^2} r(t) - r(t) \left(\frac{d}{dt} p(t)\right)^2 \\ 2 \left(\frac{d}{dt} p(t)\right) \left(\frac{d}{dt} r(t)\right) + r(t) \left(\frac{d^2}{dt^2} p(t)\right) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

上式から、

$$\begin{aligned} a_r(t) &= \frac{d^2}{dt^2} r(t) - r(t) \left(\frac{d}{dt} p(t)\right)^2 \\ a_p(t) &= 2 \left(\frac{d}{dt} p(t)\right) \left(\frac{d}{dt} r(t)\right) + r(t) \left(\frac{d^2}{dt^2} p(t)\right) \end{aligned}$$

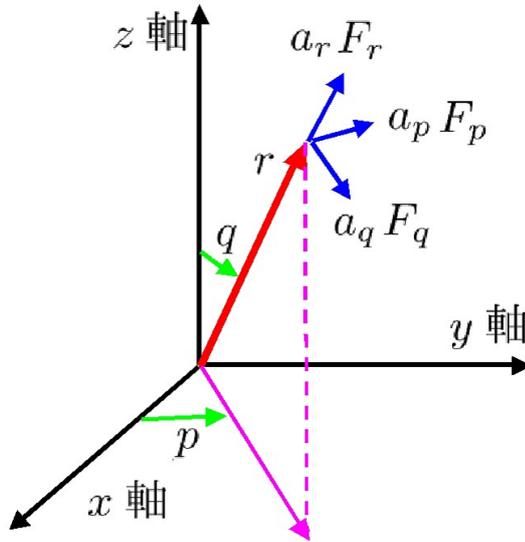
以上から、二次元極座標における運動方程式は下記となる。

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2}{dt^2} r(t) - r(t) \left(\frac{d}{dt} p(t)\right)^2\right) M &= F_r \\ \left(2 \left(\frac{d}{dt} p(t)\right) \left(\frac{d}{dt} r(t)\right) + r(t) \left(\frac{d^2}{dt^2} p(t)\right)\right) M &= F_p \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

¹溝口純敏 「Maxima を使った物理数学基礎演習ノート」、<http://www9.plala.or.jp/prac-maxima/>、P92、(4.5.2) 式参照

2.1.3 三次元極座標における運動方程式

下図に示す三次元極座標で、原点からの距離： \vec{r} 、 r 、 z 軸との角度： q 、 r の $x-y$ 平面の投影と x 軸との角度： p とする。質量： M の質点に極座標 r, q, p 方向の力： F_r, F_q, F_p が作用するとき、



```
kill(all);
X:x(t)=r(t)*sin(q(t))*cos(p(t));
Y:y(t)=r(t)*sin(q(t))*sin(p(t));
Z:z(t)=r(t)*cos(q(t));
XYZ:matrix([lhs(X)], [lhs(Y)], [lhs(Z)])=
matrix([rhs(X)], [rhs(Y)], [rhs(Z)]);
VXYZ:diff(XYZ,t,1);
AXYZ:diff(VXYZ,t,1);
TR:matrix([sin(q(t))*cos(p(t)), sin(q(t))
*sin(p(t)), cos(q(t)) ], [cos(q(t))*
cos(p(t)), cos(q(t))*sin(p(t)),
-sin(q(t)) ], [ -sin(p(t)), cos(p(t)), 0]);
VRQP:trigsimp(TR.rhs(VXYZ));
v[r](t)=VRQP[1,1];
v[q](t)=VRQP[2,1];
v[p](t)=VRQP[3,1];
ARQP:trigsimp(TR.rhs(AXYZ));
```

```
a[r](t)=ARQP[1,1];
a[q](t)=ARQP[2,1];
a[p](t)=ARQP[3,1];
EQR:M*ARQP[1,1]=F[r];
EQQ:M*ARQP[2,1]=F[q];
EQP:M*ARQP[3,1]=F[p];
```

x, y, z 座標と極座標： r, q, p の関係は、

$$\begin{aligned} x(t) &= r(t) \cos(p(t)) \sin(q(t)) \\ y(t) &= r(t) \sin(p(t)) \sin(q(t)) \\ z(t) &= r(t) \cos(q(t)) \end{aligned}$$

これをベクトル表記して、

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(t) \cos(p(t)) \sin(q(t)) \\ r(t) \sin(p(t)) \sin(q(t)) \\ r(t) \cos(q(t)) \end{pmatrix} \quad (2.1.9)$$

これを時間： t で微分し、速度： \vec{v} 、加速度： \vec{a} を求める。

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} x(t) \\ \frac{d}{dt} y(t) \\ \frac{d}{dt} z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(p(t)) \sin(q(t)) \left(\frac{d}{dt} r(t) \right) + r(t) \cos(p(t)) \cos(q(t)) \left(\frac{d}{dt} q(t) \right) - r(t) \sin(p(t)) \left(\frac{d}{dt} p(t) \right) \sin(q(t)) \\ \sin(p(t)) \sin(q(t)) \left(\frac{d}{dt} r(t) \right) + r(t) \sin(p(t)) \cos(q(t)) \left(\frac{d}{dt} q(t) \right) + r(t) \cos(p(t)) \left(\frac{d}{dt} p(t) \right) \sin(q(t)) \\ \cos(q(t)) \left(\frac{d}{dt} r(t) \right) - r(t) \sin(q(t)) \left(\frac{d}{dt} q(t) \right) \end{pmatrix}$$

加速度： \vec{a} については、記述が長くなるので省略する。 x, y, z 座標から極座標の変換マトリックス： TR^1 は、

¹溝口純敏 「Maxima を使った物理数学基礎演習ノート」、<http://www9.plala.or.jp/prac-maxima/>、P98、(4.5.18) 式参照

$$TR = \begin{pmatrix} \cos(p(t)) \sin(q(t)) & \sin(p(t)) \sin(q(t)) & \cos(q(t)) \\ \cos(p(t)) \cos(q(t)) & \sin(p(t)) \cos(q(t)) & -\sin(q(t)) \\ -\sin(p(t)) & \cos(p(t)) & 0 \end{pmatrix} \quad (2.1.10)$$

速度： \vec{v} 、加速度： \vec{a} に TR を掛けて極座標表記に変換すると、

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} r(t) \\ r(t) \left(\frac{d}{dt} q(t) \right) \\ r(t) \left(\frac{d}{dt} p(t) \right) \sin(q(t)) \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} \frac{d^2}{dt^2} r(t) - r(t) \left(\frac{d}{dt} q(t) \right)^2 - r(t) \left(\frac{d}{dt} p(t) \right)^2 \sin^2(q(t)) \\ 2 \left(\frac{d}{dt} q(t) \right) \left(\frac{d}{dt} r(t) \right) + r(t) \left(\frac{d^2}{dt^2} q(t) \right) - r(t) \left(\frac{d}{dt} p(t) \right)^2 \cos(q(t)) \sin(q(t)) \\ 2 \left(\frac{d}{dt} p(t) \right) \sin(q(t)) \left(\frac{d}{dt} r(t) \right) + 2r(t) \left(\frac{d}{dt} p(t) \right) \cos(q(t)) \left(\frac{d}{dt} q(t) \right) + r(t) \left(\frac{d^2}{dt^2} p(t) \right) \sin(q(t)) \end{pmatrix}$$

上式から、

$$a_r(t) = \frac{d^2}{dt^2} r(t) - r(t) \left(\frac{d}{dt} q(t) \right)^2 - r(t) \left(\frac{d}{dt} p(t) \right)^2 \sin^2(q(t))$$

$$a_q(t) = 2 \left(\frac{d}{dt} q(t) \right) \left(\frac{d}{dt} r(t) \right) + r(t) \left(\frac{d^2}{dt^2} q(t) \right) - r(t) \left(\frac{d}{dt} p(t) \right)^2 \cos(q(t)) \sin(q(t))$$

$$a_p(t) = 2 \left(\frac{d}{dt} p(t) \right) \sin(q(t)) \left(\frac{d}{dt} r(t) \right) + 2r(t) \left(\frac{d}{dt} p(t) \right) \cos(q(t)) \left(\frac{d}{dt} q(t) \right) + r(t) \left(\frac{d^2}{dt^2} p(t) \right) \sin(q(t))$$

以上から、三次元極座標における運動方程式は下記となる。

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d^2}{dt^2} r(t) - r(t) \left(\frac{d}{dt} q(t) \right)^2 - r(t) \left(\frac{d}{dt} p(t) \right)^2 \sin^2(q(t)) \right) M = F_r \\ & \left(2 \left(\frac{d}{dt} q(t) \right) \left(\frac{d}{dt} r(t) \right) + r(t) \left(\frac{d^2}{dt^2} q(t) \right) - r(t) \left(\frac{d}{dt} p(t) \right)^2 \cos(q(t)) \sin(q(t)) \right) M = F_q \\ & \left(2 \left(\frac{d}{dt} p(t) \right) \sin(q(t)) \left(\frac{d}{dt} r(t) \right) + 2r(t) \left(\frac{d}{dt} p(t) \right) \cos(q(t)) \left(\frac{d}{dt} q(t) \right) \right. \\ & \quad \left. + r(t) \left(\frac{d^2}{dt^2} p(t) \right) \sin(q(t)) \right) M = F_p \end{aligned} \quad (2.1.11)$$

2.1.4 運動量と力積

質量： M 、速度： v で運動している物体の $M\vec{v}$ を運動量という。運動量の時間： t 微分は、(2.1.3) 式から、

$$\frac{d}{dt} M\vec{v} = M \frac{d}{dt} \vec{v} = \vec{F} \quad (2.1.12)$$

上式を時間： t で積分すると、

$$M\vec{v}_1 - M\vec{v}_0 = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F} dt \quad (2.1.13)$$

運動量変化が力積になる。

2.1.5 角運動量

質量： M 、速度： v 、位置ベクトル： \vec{r} とする。次式の運動量： $M\vec{v}$ に位置ベクトル： \vec{r} を掛けたものを角運動量： \vec{L} とすると、

$$\vec{L} = M\vec{r} \times \vec{v}$$

ここで、 $\vec{r} \times \vec{v}$ は面積速度： \vec{A} とすると、

$$\vec{r} \times \vec{v} = 2\vec{A} \quad (2.1.14)$$

以上から、

$$\vec{L} = M\vec{r} \times \vec{v} = 2M\vec{A} \quad (2.1.15)$$

上式の角運動量を時間： t で微分すると、(2.1.3) 式から、モーメント： \vec{N} に等しくなる。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (M\vec{r} \times \vec{v}) &= M \frac{d}{dt} (\vec{r}) \times \vec{v} + M\vec{r} \times \frac{d}{dt} (\vec{v}) \\ &= M\vec{v} \times \vec{v} + M\vec{r} \times \frac{d}{dt} (\vec{v}) \\ &= M\vec{r} \times \frac{d}{dt} (\vec{v}) = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{N} \end{aligned} \quad (2.1.16)$$

2.1.6 エネルギー保存

速度の関係式から、

$$\vec{v} = \frac{d}{dt} \vec{r}, \quad \vec{v} dt = d\vec{r}$$

上式を (2.1.3) 式に掛け、

$$M \frac{d}{dt} \vec{v} \vec{v} dt = \vec{F} d\vec{r}$$

上式を積分すると、右辺は仕事： W であり、

$$M \int \vec{v} d\vec{v} = \int \vec{F} d\vec{r}$$

積分を実行すると、左辺は運動エネルギーとなる。

$$\frac{1}{2} M v_2^2 - \frac{1}{2} M v_1^2 = W_2 - W_1$$

ポテンシャル： U で $W = -U$ の関係とすると次式となり、運動エネルギーとポテンシャルの和が変化しないエネルギー保存則となる。

$$\frac{1}{2} M v_2^2 + U_2 = \frac{1}{2} M v_1^2 + U_1 \quad (2.1.17)$$

2.1.7 Lagrange の運動方程式

質点： i の座標： x_i 、作用力： F_i とする。総運動エネルギー： T 、総ポテンシャル： U は下記となる。

$$u_i(t) = \frac{d}{dt} x_i(t)$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_i M_i u_i(t)^2$$

$$U = - \sum_i \int F_i dx_i$$

Lagrange の運動方程式は下記となる。この式の導出については、「Maxima を使った物理数学基礎演習ノート」：溝口純敏、<http://www9.plala.or.jp/prac-maxima/>、平成27年7月の第8章 8.2 変分法 8.27 Lagrange の運動方程式、P.237 を参照願います。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dt} \frac{d}{dt} x_i \right) T \left(t, x_i, \frac{d}{dt} x_i \right) - \frac{d}{dx_i} T \left(t, x_i, \frac{d}{dt} x_i \right) \\ = \frac{d}{dx_i} U(t, x_i) \end{aligned} \quad (2.1.18)$$

ここで、ポテンシャル： U の例を示す。重力のように一定力： $-MG$ が作用する場合は、 x 軸の正方向が鉛直上向きとすると、

$$U = -\text{integrate}(-G*M, x(t));$$

$$U = x(t) G M$$

となる。

また、バネのように変位に比例する力が作用する場合は、 x 軸の正方向がバネの伸び方向とすると、

$$U = -\text{integrate}(-K*x(t), x(t));$$

$$U = \frac{x(t)^2 K}{2}$$

となる。

2.2 放出体の運動

例題 2.2.1 鉛直放出体の運動

鉛直方向に x 軸をとり、質量: M の物体を鉛直上方に原点: $x = 0$ から、初期速度: V_0 で放出する。重力加速度: G とし、物体に作用する抵抗はないものとする。軌跡: $x(t)$ 、速度: $v(t)$ を求める。

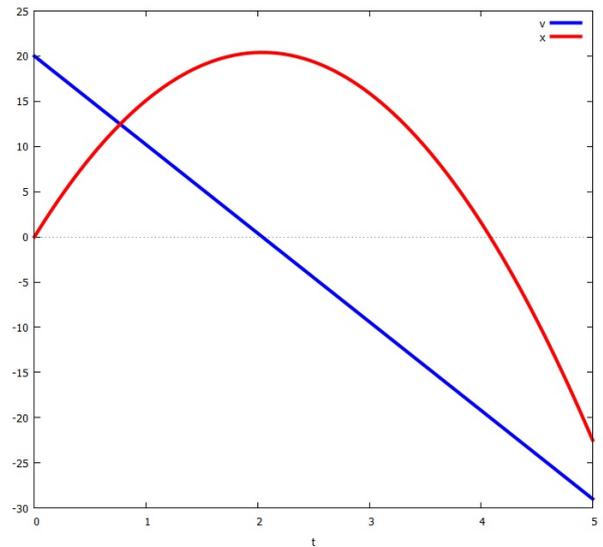
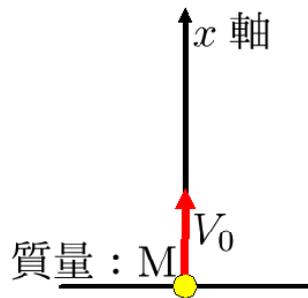


図 2.2.1: 鉛直放出体の運動

```
kill(all);
EQ:M*dif(v(t),t)=-M*G;
atvalue(v(t),t=0, V[0]);
ANS1:desolve(EQ,v(t));
ANS2:x(t) =integrate(rhs(%),t);
```

運動方程式は次式となる。

$$\left(\frac{d}{dt}v(t)\right)M = -GM$$

初期条件を与えて、解くと速度は、

$$v(t) = V_0 - tG$$

上式を積分し、軌跡は、

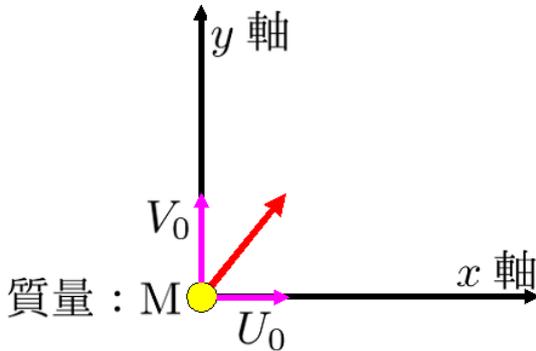
$$x(t) = V_0 t - \frac{t^2 G}{2}$$

$G = 9.8m/sec^2$ 、 $V_0 = 20m/sec$ として、軌跡と速度を描くと下記となる。

```
LI: [G=9.8, V[0]=20];
ANS11: subst(LI, rhs(ANS1));
ANS21: subst(LI, rhs(ANS2));
plot2d([ANS11, ANS21], [t, 0, 5], [ylabel,
  "v(t), x(t)", [legend, "v(t)", "x(t)"],
  [style, [lines, 3, 1], [lines, 3, 2]]);
```

例題 2.2.2 放物運動

水平方向に x 軸、鉛直上方向に y 軸をとり、原点から、水平初期速度： U_0 、鉛直初期速度： V_0 で質量： M の物体を放出する。重力加速度： G とし、物体に作用する抵抗はないものとする。水平運動： $x(t)$ 、鉛直運動： $y(t)$ とし、質量の軌跡を求める。



```
kill(all);
u(t):=diff(x(t),t);
v(t):=diff(y(t),t);
EQX:M*diff(u(t),t)=0;
atvalue(u(t),t=0, U[0]);
atvalue(x(t),t=0, 0);
atvalue(v(t),t=0, V[0]);
atvalue(y(t),t=0, 0);
desolve(EQX,x(t));
XX:X=rhs(%);
EQY:M*diff(v(t),t)=-M*G;
desolve(EQY,y(t));
YY:Y=rhs(%);
```

運動方程式は、 x 方向には力は作用せず、 y 方向には下方に重力： MG が作用することから、

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} x(t)\right) M = 0, \quad \left(\frac{d^2}{dt^2} y(t)\right) M = -GM$$

初期条件を与えて、解くと、

$$x(t) = U_0 t, \quad y(t) = V_0 t - \frac{t^2 G}{2}$$

```
EQ:subst([t=rhs(ANS[1])],YY);
EQ1:subst([U[0]=W[0]*cos(\alpha),
V[0]=W[0]*sin(\alpha)],%);
subst([Y=0],%);
solve(%,X);
%[1];
diff(%,\alpha,1);
subst([cos(\alpha)^2=1-sin(\alpha)^2],%);
solve(%,\alpha);
```

```
EQ11:subst([W[0]=10.0,\alpha=%pi/6,
G=9.8],rhs(EQ1));
EQ12:subst([W[0]=10.0,\alpha=%pi/4,
G=9.8],rhs(EQ1));
EQ13:subst([W[0]=10.0,\alpha=%pi/3,
G=9.8],rhs(EQ1));
plot2d([EQ11,EQ12,EQ13],[X,0,12],[y,-2,4],
[legend,"30deg","45deg","60deg"],
[style,[lines,3,1],[lines,3,2],
[lines,3,3]]);
```

上記の解で、 t を消去して、軌跡を求めると

$$t = \frac{X}{U_0}$$

$$Y = \frac{V_0 X}{U_0} - \frac{G X^2}{2 U_0^2}$$

初期速度： W_0 、 x 軸からの放出角度： α とすると、 $U_0 = W_0 \cos(\alpha)$ 、 $V_0 = W_0 \sin(\alpha)$ となり、上式は、

$$Y = \frac{\sin(\alpha) X}{\cos(\alpha)} - \frac{G X^2}{2 W_0^2 \cos(\alpha)^2}$$

x 軸上の到達距離は、上式で $Y = 0$ を解いて、

$$X = \frac{2 W_0^2 \cos(\alpha) \sin(\alpha)}{G}$$

最大到達距離となる放出角度は、上式を α で微分し、零と置いて、

$$\frac{2 W_0^2 \cos(\alpha)^2}{G} - \frac{2 W_0^2 \sin(\alpha)^2}{G} = 0$$

上式を解いて、最大到達距離となる放出角度は、

$$\alpha = \frac{\pi}{4}$$

$G = 9.8m/sec^2$ 、 $W_0 = 10m/sec$ として、軌跡を描くと下図となる。

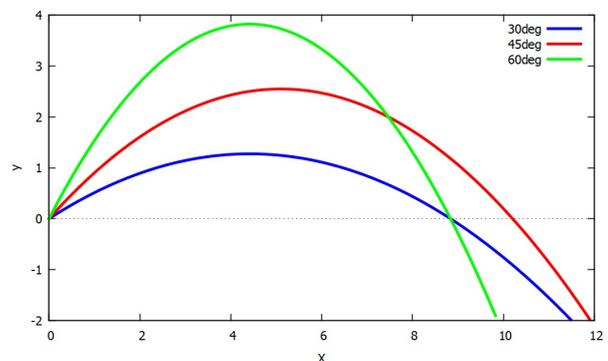
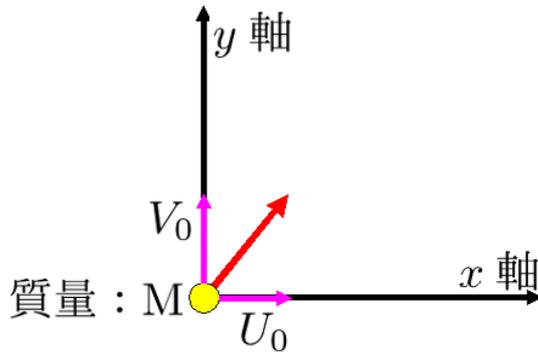


図 2.2.2: 放物運動

例題 2.2.3 速度に比例した抵抗のある放物運動

水平方向に x 軸、鉛直上方向に y 軸をとり、原点から、水平初期速度： U_0 、鉛直初期速度： V_0 で質量： M の物体を放出する。重力加速度： G とし、物体に作用する抵抗は速度に比例し、比例係数は $C \cdot M$ とする。水平運動： $x(t)$ 、鉛直運動： $y(t)$ とし、質量の軌跡を求める。



```
kill(all);
u(t):=diff(x(t),t);
v(t):=diff(y(t),t);
EQX:M*diff(u(t),t)+M*C*u(t)=0;
atvalue(u(t),t=0, U[0]);
atvalue(x(t),t=0, 0);
atvalue(v(t),t=0, V[0]);
atvalue(y(t),t=0, 0);
XX:desolve(EQX,x(t));
assume(C>0);
EQY:M*diff(v(t),t)+M*C*v(t)=-M*G;
YY:desolve(EQY,y(t));
XM:Xmax=limit(rhs(XX),t,inf);
XM1:subst([U[0]=W[0]*cos(alpha)],%);
diff(rhs(%),alpha,1)=0;
solve(% ,alpha)[1];
solve(XX,t)[1];
log(%);
solve(%,t)[1];
YY1:lhs(YY)=subst(%,rhs(YY));
YY2:subst([U[0]=W[0]*cos(alpha),
V[0]=W[0]*sin(alpha)],%);
```

物体に作用する抵抗は速度に比例して作用するので、 x 軸、 y 軸に分けて記述でき、運動方程式は、

$$\left(\frac{d}{dt}x(t)\right)CM + \left(\frac{d^2}{dt^2}x(t)\right)M = 0$$

$$\left(\frac{d}{dt}y(t)\right)CM + \left(\frac{d^2}{dt^2}y(t)\right)M = -GM$$

初期条件を与えて、解くと、

$$x(t) = \frac{U_0}{C} - \frac{U_0 e^{-tC}}{C} \quad (2.2.1)$$

$$y(t) = -\frac{e^{-tC}(G + V_0 C)}{C^2} + \frac{G + V_0 C}{C^2} - \frac{tG}{C} \quad (2.2.2)$$

十分時間が経った時の x 軸方向の最大到達距離は (2.2.1) 式で $t \rightarrow \infty$ とすると、下記となり、初期速度： W_0 、 x 軸からの放出角度： α とすると、 $U_0 = W_0 \cos(\alpha)$ 、 $V_0 = W_0 \sin(\alpha)$ となり、

$$X_{max} = \frac{U_0}{C} = \frac{W_0 \cos(\alpha)}{C}$$

(2.2.1) 式から t を求め、

$$t = \frac{\log\left(-\frac{U_0}{x(t)C - U_0}\right)}{C}$$

(2.2.2) 式に代入すると、

$$y(x) = \frac{(x(t)C - U_0)(G + V_0 C)}{U_0 C^2} + \frac{G + V_0 C}{C^2} - \frac{\log\left(-\frac{U_0}{x(t)C - U_0}\right)G}{C^2}$$

$$= \frac{(x(t)C - W_0 \cos(\alpha))(G + W_0 \sin(\alpha)C)}{W_0 \cos(\alpha)C^2} + \frac{G + W_0 \sin(\alpha)C}{C^2} - \frac{\log\left(-\frac{W_0 \cos(\alpha)}{x(t)C - W_0 \cos(\alpha)}\right)G}{C^2} \quad (2.2.3)$$

$G = 9.8m/sec^2$ 、 $C = 11/sec$ 、 $W_0 = 15m/sec$ とし、軌跡および最大到達距離を描くと下記となる。

```
LI:[W[0]=15,G=9.8,C=1,x(t)=x];
Y0:subst(LI,rhs(YY2));
Y1:subst([\alpha=%pi/180*60],Y0);
Y2:subst([\alpha=%pi/180*45],Y0);
Y3:subst([\alpha=%pi/180*40],Y0);
Y4:subst([\alpha=%pi/180*35],Y0);
Y5:subst([\alpha=%pi/180*30],Y0);
Y6:subst([\alpha=%pi/180*25],Y0);
subst(LI,rhs(XM1));
XM2:subst([\alpha=%pi/4],%);
XYM:[[XM2,5],[XM2,-30]];
plot2d([[discrete,XYM],Y2],[x,0,15],
[y,-30,10],[legend,"Xmax","45deg"],
[style,[lines,3,1],[lines,3,2]]);
plot2d([Y1,Y2,Y3,Y4,Y5,Y6],[x,0,10],
[y,-1,5],[legend,"60deg","45deg",
"40deg","35deg","30deg","25deg"],
[style,[lines,3,1],[lines,3,2],[lines,3,3],
[lines,3,4],[lines,3,5],
[lines,3,6]]);
```

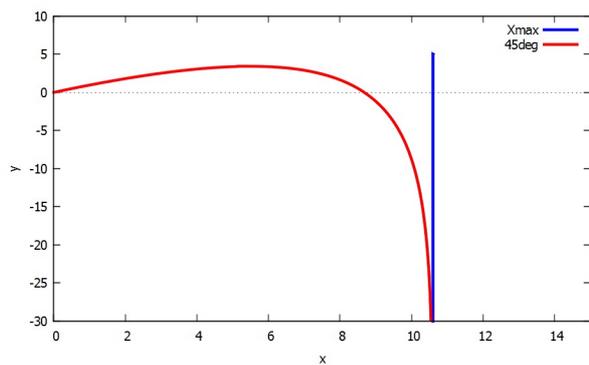


図 2.2.3: 速度に比例した抵抗のある放物運動

放出角度を変えた結果を下記に示す。x 軸上で最大到達距離となる角度は、抵抗がない場合の 45deg より低い角度で放出したほうがよい。

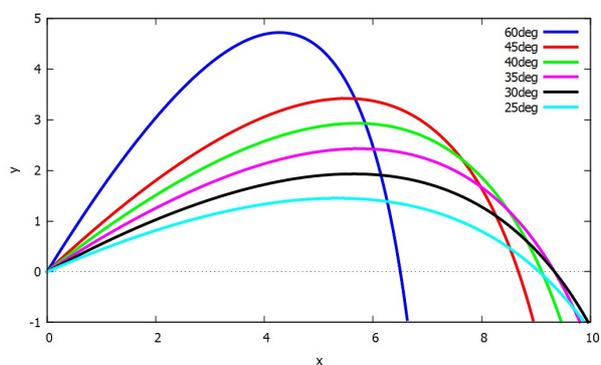
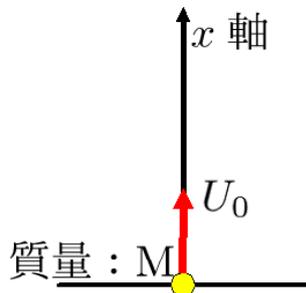


図 2.2.4: 放出角度を変えた放物運動

例題 2.2.4 速度の二乗に比例する抵抗のある鉛直放出体の運動

鉛直上方に x 軸をとり、原点から鉛直初期速度： U_0 で質量： M の物体を放出する。重力加速度： G とし、物体に作用する抵抗が速度の二乗に比例する場合、比例係数は $C_2 \cdot M$ とする。また、物体に作用する抵抗が速度に比例する場合、比例係数は $C_1 \cdot M$ とする。物体に作用する抵抗が速度の二乗に比例する場合、速度に比例する場合、抵抗がない場合についての各速度： $u(t)$ を求める。

(1) 抵抗が速度の二乗に比例する場合



抵抗が速度の二乗に比例する場合には、抵抗の向きを上方と下方で運動方程式を別個にたてる必要があるので、分けて考える。

(a) 上方へ向かう場合

```
kill(all);
assume(G>0,C[2]>0);
EQ21:M*dif(u(t),t,1)=-G*M-M*C[2]*u(t)^2;
ANS21:ode2(EQ21,u(t),t);
subst([u(t)=U[0],t=0],ANS21);
C0:solve(%,%c)[1];
TT:subst([C0],ANS21);
ANS21F:solve(TT,u(t))[1];
subst([u(t)=0],TT);
TU0:solve(%,t)[1];
```

運動方程式は、

$$\left(\frac{d}{dt} u(t)\right) M = -GM - C_2 u(t)^2 M$$

上式は非線形であるので、ode2 関数で解いて、解は、

$$-\frac{\operatorname{atan}\left(\frac{\sqrt{C_2} u(t)}{\sqrt{G}}\right)}{\sqrt{C_2} \sqrt{G}} = t + \%c$$

初期条件に合う $\%c$ を求めると、

$$\%c = -\frac{\operatorname{atan}\left(\frac{U_0 \sqrt{C_2}}{\sqrt{G}}\right)}{\sqrt{C_2} \sqrt{G}}$$

以上から、

$$u(t) = -\frac{\tan\left(\sqrt{C_2} t \sqrt{G} - \operatorname{atan}\left(\frac{U_0 \sqrt{C_2}}{\sqrt{G}}\right)\right) \sqrt{G}}{\sqrt{C_2}}$$

上方に放出し、落下して速度： $u(t)$ が零となる時間は、

$$t = \frac{\operatorname{atan}\left(\frac{U_0 \sqrt{C_2}}{\sqrt{G}}\right)}{\sqrt{C_2} \sqrt{G}}$$

(b) 下方へ向かう場合

```
EQ22:M*dif(u(t),t,1)=-G*M+M*C[2]*u(t)^2;
ANS22:ode2(%,u(t),t);
subst([u(t)=0,t=0],ANS22);
C0:solve(%,%c)[1];
subst([%],ANS22);
solve(%,u(t))[1];
ANS22F:lhs(%)=subst([t=t-rhs(TU0)],
rhs(%));
UINF2:U[inf]=limit(rhs(ANS22F),t,inf);
```

運動方程式は、

$$\left(\frac{d}{dt} u(t)\right) M = C_2 u(t)^2 M - GM$$

上式は非線形であるので、ode2 関数で解いて、解は、

$$\frac{\log\left(\frac{-\sqrt{C_2} \sqrt{G} - C_2 u(t)}{\sqrt{C_2} \sqrt{G} + C_2 u(t)}\right)}{2 \sqrt{C_2} \sqrt{G}} = t + \%c$$

初期条件： $t = 0, u(t) = 0$ に合う $\%c$ を求めると、

$$\%c = \frac{\log(-1)}{2 \sqrt{C_2} \sqrt{G}}$$

以上から、

$$u(t) = -\frac{\sqrt{C_2} \sqrt{G} e^{2 \sqrt{C_2} t \sqrt{G}} - \sqrt{C_2} \sqrt{G}}{C_2 e^{2 \sqrt{C_2} t \sqrt{G}} + C_2}$$

上方に放出し、落下して速度が零となる時間分を修正すると、

$$u(t) = -\frac{\sqrt{C_2} \sqrt{G} e^{2 \sqrt{C_2} \left(t - \frac{\operatorname{atan}\left(\frac{U_0 \sqrt{C_2}}{\sqrt{G}}\right)}{\sqrt{C_2} \sqrt{G}}\right) \sqrt{G}} - \sqrt{C_2} \sqrt{G}}{C_2 e^{2 \sqrt{C_2} \left(t - \frac{\operatorname{atan}\left(\frac{U_0 \sqrt{C_2}}{\sqrt{G}}\right)}{\sqrt{C_2} \sqrt{G}}\right) \sqrt{G}} + C_2}$$

十分時間が経った時の速度： $u(t)$ は上式で $t \rightarrow \infty$ とすると、

$$U_\infty = -\frac{\sqrt{G}}{\sqrt{C_2}}$$

(2) 抵抗が速度に比例する場合

```
assume(C[1]>0);
EQ1:M*difff(u(t),t)=-M*G-M*C[1]*u(t);
atvalue(u(t),t=0, U[0]);
ANS1:desolve(EQ1,u(t));
UINF1:U[inf]=limit(rhs(ANS1),t,inf);
```

運動方程式は、

$$\left(\frac{d}{dt}u(t)\right)M = -GM - C_1 u(t)M$$

初期条件を与えて、解くと、

$$u(t) = \frac{e^{-C_1 t}(G + U_0 C_1)}{C_1} - \frac{G}{C_1}$$

十分時間が経った時の速度： $u(t)$ は上式で $t \rightarrow \infty$ とすると、

$$U_\infty = -\frac{G}{C_1}$$

(3) 抵抗がない場合

```
EQ0:M*difff(u(t),t)=-M*G;
ANS0:desolve(EQ0,u(t));
```

運動方程式は、

$$\left(\frac{d}{dt}u(t)\right)M = -GM$$

初期条件を与えて、解くと、

$$u(t) = U_0 - tG$$

$G = 9.8m/sec^2$ 、 $U_0 = 10m/sec$ 、 $C_1 = 1$ 、 $C_2 = 1$ として、速度変化を描くと下記となる。

```
LI:[C[1]=1,C[2]=1,U[0]=10,G=9.8];
ANS211:subst(LI,rhs(ANS21F));
ANS221:subst(LI,rhs(ANS22F));
ANS12:subst(LI,rhs(ANS1));
ANS02:subst(LI,rhs(ANS0));
TU2:subst(LI,rhs(TU0));
UINF21:subst(LI,rhs(UINF2));
UINF11:subst(LI,rhs(UINF1));
plot2d([[parametric,t,ANS02,[t,0,2.5]],
[parametric,t,ANS12,[t,0,5]],
[parametric,t,ANS211,[t,0,TU2]],
[parametric,t,ANS221,[t,TU2,5]],
[parametric,t,UINF11,[t,TU2,5]],
[parametric,t,UINF21,[t,TU2,5]]],
[ylabel,"u(t)],[legend,"No resist.",
"proportional to u(t)",
"proportional to u(t)**2",
"proportional to u(t)**2",
"u inf. proportional to u(t)",
"u inf. proportional to u(t)**2"],
[style,[lines,3,1],[lines,3,2],
[lines,3,3],[lines,3,3],[lines,3,4],
[lines,3,5]]];
```

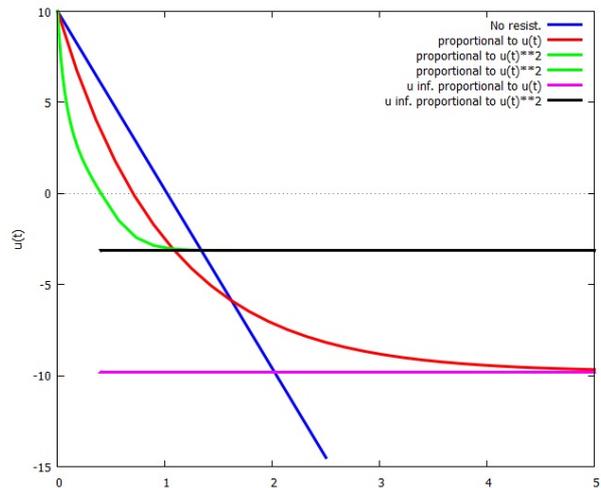


図 2.2.5: 各種抵抗の上方放出体の速度

2.3 振子の運動

例題 2.3.1 単振動

水平線： x 軸上を運動する質点（質量： M ）に、直線上の一点からの距離に比例する力（バネ定数： K ）が作用する。運動方程式および質点の運動は下記で表すことができる。

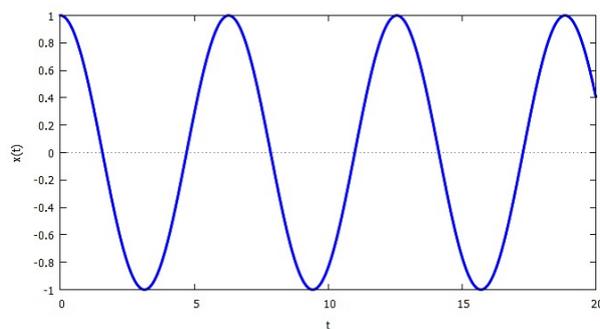
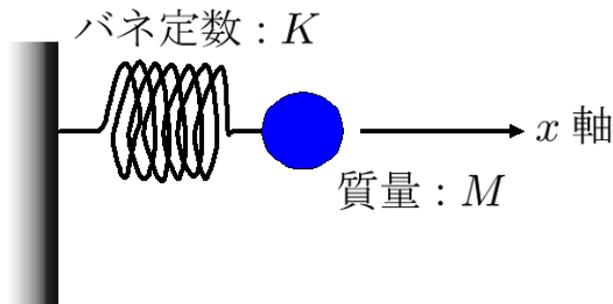


図 2.3.1: 単振動

```
kill(all);
assume(M>0,K>0,\omega[0]>0);
atvalue(diff(x(t),t),t=0,0);
atvalue(x(t),t=0,A);
EQ:M*diff(diff(x(t),t),t)+K*x(t)=0;
ANS:desolve(EQ,x(t));
W1:\omega[0]=sqrt(K)/sqrt(M);
W2:solve(W1,K);
subst(W2,ANS);
T[W]*rhs(W1)=2*\pi;
solve(%,T[W])[1];
```

運動方程式は下記となる。

$$\left(\frac{d^2}{dt^2}x(t)\right)M + x(t)K = 0$$

初期変位： A 、初期速度：零として解くと変位は下記となる。

$$x(t) = A \cos\left(\frac{t\sqrt{K}}{\sqrt{M}}\right)$$

自由振動の円周波数を ω_0 とすると、

$$x(t) = \cos(\omega_0 t) A \quad \omega_0 = \frac{\sqrt{K}}{\sqrt{M}} \quad (2.3.1)$$

周期： T_{W0} は、

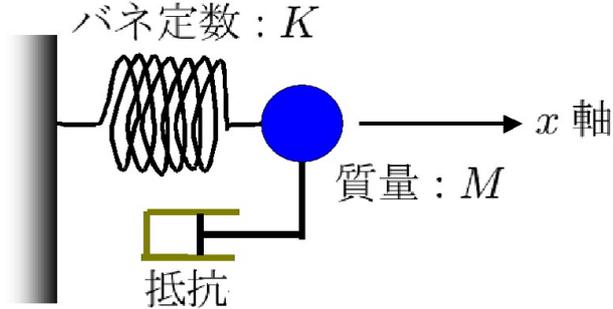
$$T_{W0} = \frac{2\pi\sqrt{M}}{\sqrt{K}}$$

質点の運動変位を描くと下記となる。

```
LI: [A=1,M=1,K=1];
ANS1:subst(LI,rhs(ANS));
plot2d(ANS1,[t,0,20],[ylabel,"x(t)"],
[style,[lines,3,1]]);
```

例題 2.3.2 単振子減衰振動

水平線: x 軸上を運動する質点 (質量: M) に、直線上の一点からの距離に比例する力 (バネ定数: K) が作用する。抵抗は速さに比例し抵抗係数を R とする。運動方程式および質点の運動は下記で表すことができる。



```
kill(all);
assume(M>0);
assume(K>0);
assume(R>0);
EQ1:M*dif(dif(x(t),t),t)+R*dif(x(t),t)
+K*x(t)=0;
```

運動方程式は下記となる。

$$\left(\frac{d}{dt}x(t)\right)R + \left(\frac{d^2}{dt^2}x(t)\right)M + x(t)K = 0$$

初期変位: A 、初期速度: 零として解くと、

(1) $4KM > R^2$ のとき、

```
atvalue(dif(x(t),t),t=0,0);
atvalue(x(t),t=0,A);
assume(R^2<4*M*K);
ANS1:desolve(EQ1,x(t));
assume(\omega[0]>0);
W1:\omega[0]=sqrt(4*K*M-R^2)/(2*M);
W2:solve(W1,K);
subst(W2,ANS1);
T[W0]*rhs(W1)=2*\pi;
solve(%,T[W0])[1];
```

変位は下記となる。

$$x(t) = \frac{e^{-\frac{tR}{2M}}}{M} \left(\frac{AMR \sin\left(\frac{t\sqrt{4KM-R^2}}{2M}\right)}{\sqrt{4KM-R^2}} + AM \cos\left(\frac{t\sqrt{4KM-R^2}}{2M}\right) \right)$$

自由振動の円周波数を ω_0 とすると、

$$\omega_0 = \frac{\sqrt{4KM-R^2}}{2M}$$

$$x(t) = \frac{\left(\frac{\sin(\omega_0 t) AR}{2\omega_0} + \cos(\omega_0 t) AM\right) e^{-\frac{tR}{2M}}}{M}$$

周期: T_{W0} は、

$$T_{W0} = \frac{4\pi M}{\sqrt{4KM-R^2}}$$

(2) $R^2 > 4KM$ のとき、

```
forget(R^2<4*M*K);
assume(R^2>4*M*K);
ANS2:desolve(EQ1,x(t));
```

変位は下記となる。

$$x(t) = \frac{e^{-\frac{tR}{2M}}}{M} \left(\frac{AMR \sinh\left(\frac{t\sqrt{R^2-4KM}}{2M}\right)}{\sqrt{R^2-4KM}} + AM \cosh\left(\frac{t\sqrt{R^2-4KM}}{2M}\right) \right)$$

質点の運動変位を描くと下記となる。

```
LI1:[A=1,M=1,K=1,R=0.3];
LI2:[A=1,M=1,K=1,R=2.5];
ANS11:subst(LI1,rhs(ANS1));
ANS21:subst(LI2,rhs(ANS2));
plot2d([ANS11,ANS21],[t,0,20],[ylabel,
"x(t)],[legend,"R**2<4MK",
"R**2>4MK"],[style,[lines,3,1],
[lines,3,2]]);
```

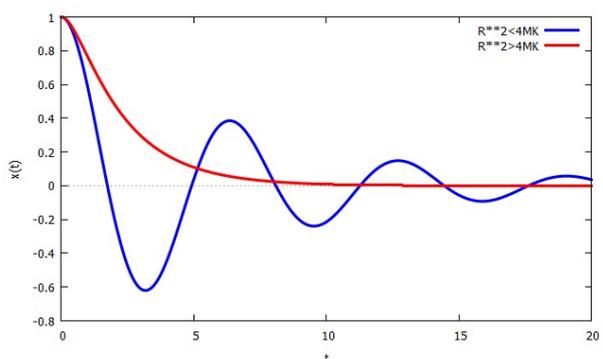
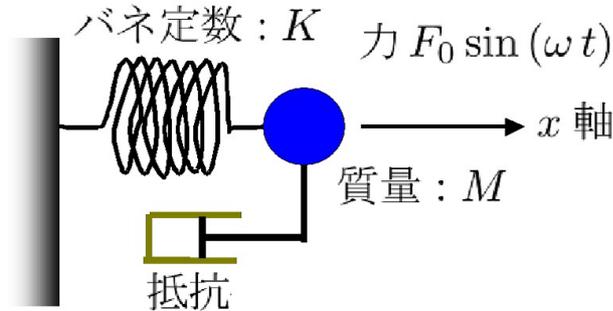


図 2.3.2: 単振子減衰振動

例題 2.3.3 単振子強制振動

水平線： x 軸上を運動する質点（質量： M ）に、直線上の一点からの距離に比例する力（バネ定数： K ）が作用する。抵抗は速さに比例し抵抗係数を R とする。質点に振幅 F_0 、円周波数： ω の正弦波の力が作用するものとし、この運動特性を求める。



```
kill(all);
assume(M>0,R>0,K>0,F[0]>0);
assume(\omega[0]>0,\omega>0);
EQ:M*difff(difff(x(t),t),t)+R*difff(x(t),t)+
K*x(t)=F[0]*sin(\omega*t);
assume(R^2<4*M*K);
ANS1:ode2(EQ,x(t),t);
ANS11:lhs(%)=factor(rest(rhs(%),1));
forget(R^2<4*M*K);
assume(R^2>4*M*K);
ANS2:ode2(EQ,x(t),t);
ANS21:lhs(%)=factor(rest(rhs(%),2));
```

運動方程式は下記となる。

$$\left(\frac{d}{dt} x(t)\right) R + \left(\frac{d^2}{dt^2} x(t)\right) M + x(t) K = F_0 \sin(\omega t)$$

$4KM > R^2$ のとき、ode2 関数で解くと下記となる。
%k1,%k2 は積分定数である。

$$x(t) = e^{-\frac{tR}{2M}} \left(\%k1 \sin\left(\frac{t\sqrt{\frac{4K}{M} - \frac{R^2}{M^2}}}{2}\right) + \%k2 \cos\left(\frac{t\sqrt{\frac{4K}{M} - \frac{R^2}{M^2}}}{2}\right) \right) - \frac{F_0 \omega \cos(\omega t) R + F_0 \omega^2 \sin(\omega t) M - F_0 \sin(\omega t) K}{\omega^2 R^2 + \omega^4 M^2 - 2\omega^2 KM + K^2}$$

$R^2 > 4KM$ のとき、ode2 関数で解くと下記となる。

$$x(t) = \%k1 e^{\frac{t\left(\sqrt{\frac{R^2}{M^2} - \frac{4K}{M}} - \frac{R}{M}\right)}{2}} + \%k2 e^{\frac{t\left(-\sqrt{\frac{R^2}{M^2} - \frac{4K}{M}} - \frac{R}{M}\right)}{2}} - \frac{F_0 \omega \cos(\omega t) R + F_0 \omega^2 \sin(\omega t) M - F_0 \sin(\omega t) K}{\omega^2 R^2 + \omega^4 M^2 - 2\omega^2 KM + K^2}$$

両者とも、十分時間がたつと、次式の定常振動運動となる。

$$x(t) = -\frac{F_0 (\omega \cos(\omega t) R + \omega^2 \sin(\omega t) M - \sin(\omega t) K)}{\omega^2 R^2 + \omega^4 M^2 - 2\omega^2 KM + K^2}$$

```
ANS3:expand(ANS21);
AMP1:sqrt((coeff(rhs(ANS3),sin(\omega*t),1))^2
+(coeff(rhs(ANS3),cos(\omega*t),1))^2);
AMP2:factor(%);
subst([F[0]=M*\omega[0]^2,K=\omega[0]^2*M],%);
subst([R=2*R[1]*M*\omega[0],\omega[0]=\omega/\omega[1]],%);
AMPA:factor(%);
```

上式の定常運動の振幅： X を整理すると次式となる。

$$X = \frac{F_0}{\sqrt{\omega^2 R^2 + \omega^4 M^2 - 2\omega^2 KM + K^2}}$$

質点に加える外力の振幅： F_0 を下記として、

$$F_0 = \omega_0^2 M$$

下記の関係式を上式に代入すると、

$$\omega_0 = \frac{\sqrt{K}}{\sqrt{M}}, \quad R = 2\omega_0 R_1 M, \quad \omega_1 = \frac{\omega}{\omega_0}$$

振幅特性は、

$$Amp. = \frac{1}{\sqrt{4\omega_1^2 R_1^2 + \omega_1^4 - 2\omega_1^2 + 1}}$$

抵抗係数を変えて、定常振幅特性を図示すると、

```
AMP0:subst([\omega[1]=W1],AMPA);
AMP01:subst([R[1]=1],AMP0);
AMP02:subst([R[1]=0.5],AMP0);
AMP03:subst([R[1]=0.2],AMP0);
AMP04:subst([R[1]=0.1],AMP0);
plot2d([AMP01,AMP02,AMP03,AMP04],[W1,0,3],
[ylabel,"Amp.],[legend,"R1=1","R1=0.5","R1=0.2","R1=0.1"],[style,[lines,3,1],[lines,3,2],[lines,3,3],[lines,3,4]]];
```

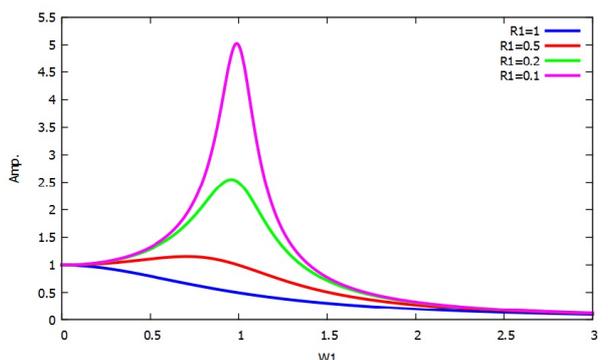


図 2.3.3: 振幅特性

例題 2.3.4 質点に作用する力が変位の1乗+2乗に比例する場合の振動

水平線： x 軸上を運動する質点（質量： M ）に、直線上の一点からの距離の1乗と2乗に比例する力（定数： K, B ）が作用するとする。運動方程式を解析的に解くことができないので、数値計算法であるルンゲ・クッタ法により解く。質点の変位と速度の変化を調べる。

```
kill(all);
load("dynamics");
assume(M>0,K>0,B>0);
FX:F[x]=-K*x(t)+B*x(t)^2;
EQ1:M*'diff(x(t),t,2)=rhs(FX);
EQ2:subst(X,x(t),EQ1/M);
U0:U=-integrate(rhs(FX),x(t));
U2:subst([x(t)=X],U0);
```

質点に作用する力は、

$$F_x = x(t)^2 B - x(t) K$$

運動方程式は下記となる。

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} x(t) \right) M = x(t)^2 B - x(t) K$$

ルンゲ・クッタ法で数値解析する微分方程式は、

$$\frac{d^2}{dt^2} X = \frac{B X^2 - K X}{M}$$

ポテンシャル： U は下記で表現できる。

$$U = - \int F_x dx = \frac{x(t)^2 K}{2} - \frac{x(t)^3 B}{3}$$

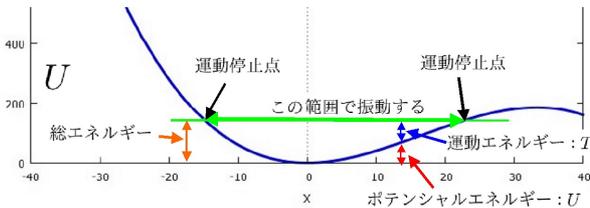


図 2.3.4: ポテンシャル： U

運動エネルギー： T とポテンシャルエネルギー： U の総和： $T+U$ はエネルギー保存から一定である。物体にある総エネルギーを与えると、図中水平な線で表せる。この総エネルギー一定線とポテンシャル： U の交点では $T=0$ となり運動停止点となる。

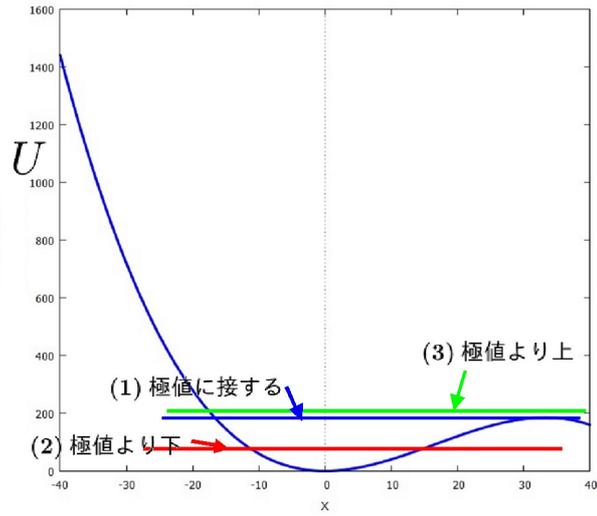


図 2.3.5: ポテンシャル： U

```
UD0:diff(rhs(U2),X,1)=0;
solve(UD0,X);
U10:subst(rhs(%[1]),X,U2);
U1X:rhs(U2)=rhs(U10);
solve(U1X,X);
Xin:rhs(%[1]);
LI:[K=1,M=10,B=0.03];
U21:subst(LI,rhs(U2));
Xin1:subst(LI,Xin);
EQ21:subst(LI,rhs(EQ2));
plot2d(U21,[X,-40,40]);
```

運動は U 一定の直線と U の曲線の交点間で動く。次に極値に接する U 一定の直線と U の曲線の左の交点の場所： Xin を求める。

ポテンシャル： U は下記で、それを X で微分し、極値となる X を求めると、

$$U = \frac{K X^2}{2} - \frac{B X^3}{3}$$

$$\frac{d}{dX} U = K X - B X^2 = 0$$

$$X = \frac{K}{B}, X = 0$$

$X = \frac{K}{B}$ におけるポテンシャル： U は、

$$U = \frac{K^3}{6 B^2}$$

$$U = \frac{K X^2}{2} - \frac{B X^3}{3} = \frac{K^3}{6 B^2}$$

上式を解いて、極値に接する総エネルギー一定線とポテンシャル： U の交点は下記となる。以上から、極値に接する場合のルンゲ・クッタ法で数値解析する初期変位： Xin は、

$$X = Xin = -\frac{K}{2B}, X = \frac{K}{B}$$

(1) 極値に接する

上図の右の極値に接する U 一定の直線と U の曲線の左の交点の場所: $X_{in} = -\frac{K}{2B}$ とし、ここを初期変位: X_{in} 、速度: 零で数値計算を行った (図ポテンシャル: U の青色の線)。変位 (赤色)、速度 (青色) の時系列結果を下記に示す。ここで、ルンゲ・クッタ法の関数: rk の結果のリストを sol に入れ、それをグラフで使用する $listA$ や $list1$ などに整理し直している。

```
Tmax:100;
dT:0.2;
Nplot:fix(Tmax/dT);
sol:rk([Y,EQ21],[X,Y],[Xin1,0],[t,0,Tmax,
dT]);
listA:[[sol[1][2],sol[1][3]]];
for I:2 thru Nplot do(listA:append(listA,
[[sol[I][2],sol[I][3]]]));
plot2d([discrete,listA],[xlabel,"x"],
[ylabel,"u"],[style,[lines,3,1]]);
list1:[[sol[1][1],sol[1][2]]];
for J:2 thru Nplot do(list1:append(list1,
[[sol[J][1],sol[J][2]]]));
list2:[[sol[1][1],sol[1][3]]];
for J:2 thru Nplot do(list2:append(list2,
[[sol[J][1],sol[J][3]]]));
plot2d([discrete,list2],[discrete,
list1]);
```

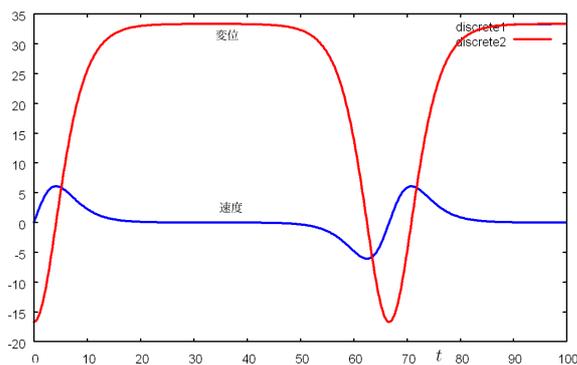


図 2.3.6: (1) 極値に接する場合 時系列結果

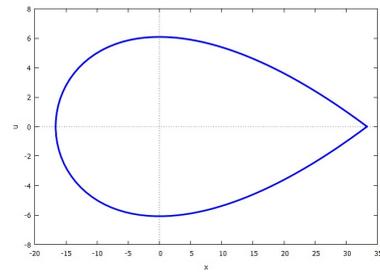


図 2.3.7: (1) 極値に接する場合 変位・速度の位相面

(2) 極値より下の場合

極値より下であるので、 U の曲線と両端で交わり、この x の範囲で振動する。 U の曲線の左端を初期変位: -7 、速度: 零として数値計算を行った (図ポテンシャル: U の赤色の線)。変位 (赤色)、速度 (青色) の時系列結果を下記に示す。

```
sol:rk([Y,EQ21],[X,Y],[-7,0],[t,0,Tmax,
dT]);
listB:[[sol[1][2],sol[1][3]]];
for I:2 thru Nplot do(listB:append(listB,
[[sol[I][2],sol[I][3]]]));
plot2d([discrete,listB],[xlabel,"x"],
[ylabel,"u"],[style,[lines,3,1]]);
list1:[[sol[1][1],sol[1][2]]];
for J:2 thru Nplot do(list1:append(list1,
[[sol[J][1],sol[J][2]]]));
list2:[[sol[1][1],sol[1][3]]];
for J:2 thru Nplot do(list2:append(list2,
[[sol[J][1],sol[J][3]]]));
plot2d([discrete,list2],[discrete,
list1]);
```

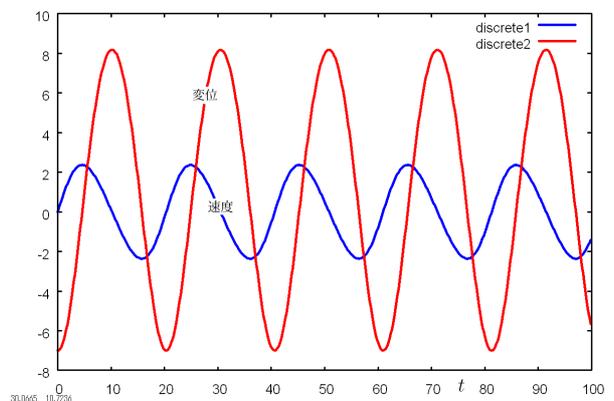


図 2.3.8: (2) 極値より下の場合 時系列結果

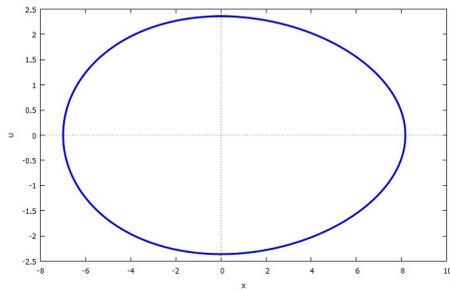


図 2.3.9: (2) 極値より下の場合 変位・速度の位相面

(3) 極値より上の場合

極値より上であるので、Uの曲線と左端でのみ交わる。この場合運動は発散する。極値の少し上で、Uの曲線の左端を初期変位：-17、速度：零として数値計算を行った（図ポテンシャル：Uのピンク色の線）。変位（赤色）、速度（青色）の時系列結果を下記に示す。

```

Nplot1:110;
sol:rk([Y,EQ21],[X,Y],[-17.0,0],[t,0,Tmax,
dT]);
listC:[[sol[1][2],sol[1][3]];
for I:2 thru Nplot1 do(listC:append(listC,
[[sol[I][2],sol[I][3]]]);
plot2d([discrete,listC],[xlabel,"x"],
[ylabel,"u"],[style,[lines,3,1]]);
list1:[[sol[1][1],sol[1][2]];
for J:2 thru Nplot1 do(list1:append(list1,
[[sol[J][1],sol[J][2]]]);
list2:[[sol[1][1],sol[1][3]];
for J:2 thru Nplot1 do(list2:append(list2,
[[sol[J][1],sol[J][3]]]);
plot2d([[discrete,list2],[discrete,
list1]]);
plot2d([[discrete,listA],[discrete,listB],
[discrete,listC]]);
    
```

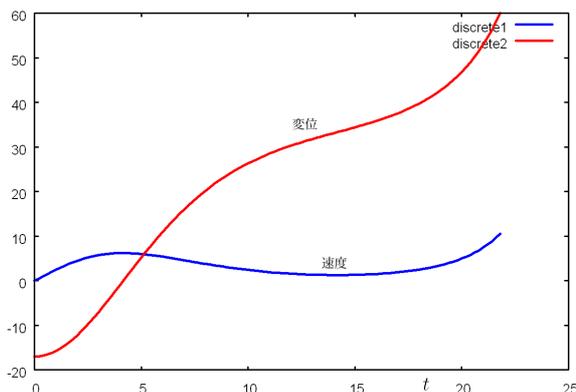


図 2.3.10: (3) 極値より上の場合 時系列結果

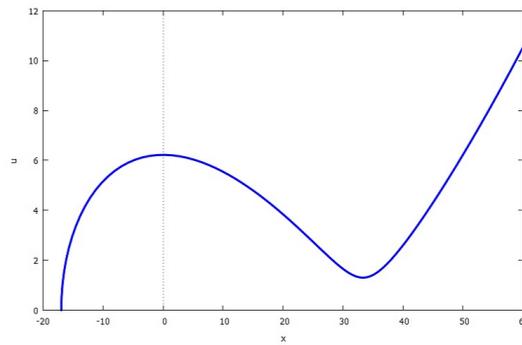


図 2.3.11: (3) 極値より上の場合 変位・速度の位相面

上の3条件の変位・速度の位相面図を下記に示す。(1) 極値に接するは青色、(2) 極値より下の場合は赤色、(3) 極値より上の場合を緑色で示す。

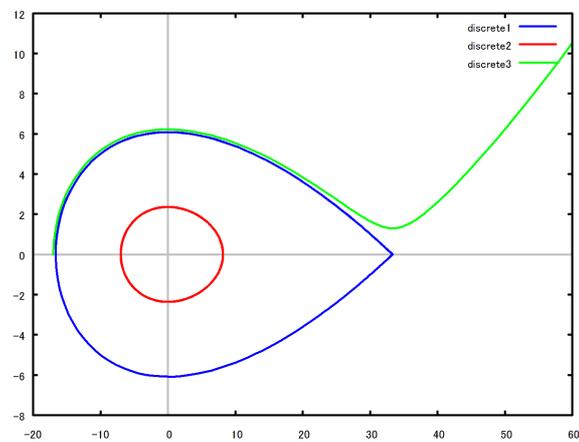


図 2.3.12: 変位・速度の位相面

例題 2.3.5 質点に作用する力が変位の 1 乗 + 3 乗に比例する場合の振動

水平線： x 軸上を運動する質点（質量： M ）に、直線上の一点からの距離の 1 乗と 3 乗に比例する力（定数： K, B ）が作用するとする。運動方程式を解析的に解くことができないので、数値計算法であるルンゲ・クッタ法により解く。質点の変位と速度の変化を調べる。

```
kill(all);
load("dynamics");
assume(M>0,K>0,B>0);
FX:F[x]=+K*x(t)-B*x(t)^3;
EQ1:M*'diff(x(t),t,2)=rhs(FX);
EQ2:subst(X,x(t),EQ1/M);
U0:U=-integrate(rhs(FX),x(t));
U1:subst(X,x(t),U0);
solve(rhs(U1)=0,X);
Xin0:Xin=rhs(%[1]);
Xin1:rhs%)-0.001;
LI:[K=5,M=10,B=0.01];
U2:subst(LI,rhs(U1));
EQ21:subst(LI,rhs(EQ2));
Xin2:subst(LI,Xin1);
plot2d(U2,[X,-40,40],[style,[lines,3,1]]);
```

質点に作用する力は、

$$F_x = x(t) K - x(t)^3 B$$

運動方程式は下記となる。

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} x(t) \right) M = x(t) K - x(t)^3 B$$

ルンゲ・クッタ法で数値解析する方程式は下記となる。

$$\frac{d^2}{dt^2} X = \frac{K X - B X^3}{M}$$

ポテンシャル： U は下記で表現できる。

$$U = - \int F_x dx = \frac{x(t)^4 B}{4} - \frac{x(t)^2 K}{2}$$

運動は U 一定の直線と U の曲線の交点間で動く。ここで極値に接する U 一定の直線と U の曲線の左の交点の場所： X_{in} を求める。

$x(t) \rightarrow X$ と置き換え、

$$U = \frac{B X^4}{4} - \frac{K X^2}{2}$$

U は $U = 0$ で極値を持つので、 $U = 0$ として解を求めると、 X は、

$$X = -\frac{\sqrt{2}\sqrt{K}}{\sqrt{B}}, X = \frac{\sqrt{2}\sqrt{K}}{\sqrt{B}}, X = 0$$

以上から、極値に接する場合のルンゲ・クッタ法で数値解析する初期変位： X_{in} は、

$$X_{in} = -\frac{\sqrt{2}\sqrt{K}}{\sqrt{B}}$$

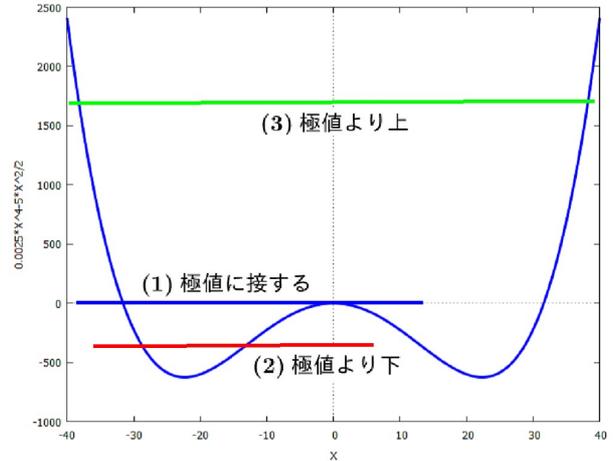


図 2.3.13: ポテンシャル： U

(1) 極値にほぼ接する

上図の右の極値に接する U 一定の直線と U の曲線の左の交点の場所: X_{in} とし、これより少し上を初期値として、数値計算を行った (図ポテンシャル: U の青色の線)。変位、速度の時系列結果を下記に示す。

```
Tmax:50;
dT:0.1;
Nplot:fix(Tmax/dT);
sol:rk([Y,EQ21],[X,Y],[Xin2,0],[t,0,Tmax,
dT]);
listA:[[sol[1][2],sol[1][3]]];
for I:2 thru Nplot do(listA:append(listA,
[[sol[I][2],sol[I][3]]]));
plot2d([discrete,listA],[style,
[lines,3,1]]);
list1:[[sol[1][1],sol[1][2]]];
for J:2 thru Nplot do(list1:append(list1,
[[sol[J][1],sol[J][2]]]));
list2:[[sol[1][1],sol[1][3]]];
for J:2 thru Nplot do(list2:append(list2,
[[sol[J][1],sol[J][3]]]));
plot2d([[discrete,list2],[discrete,list1]],
[style,[lines,3,1],[lines,3,2]]);
```

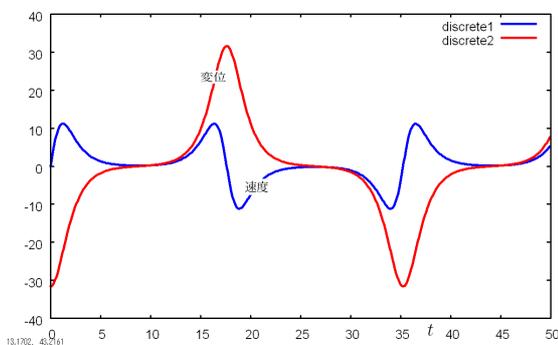


図 2.3.14: (1) 極値にほぼ接する場合 時系列結果

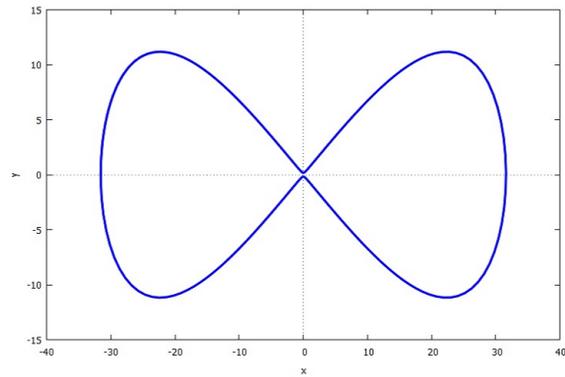


図 2.3.15: (1) 極値にほぼ接する場合 変位・速度の位相面

(2) 極値より下の場合

極値より下であるので、 U の曲線と 4 点で交わるが、それぞれの x の範囲で振動する。左端を初期値として数値計算を行った (図ポテンシャル: U のピンク色の線)。変位、速度の時系列結果を下記に示す。

```
sol:rk([Y,EQ21],[X,Y],[-30,0],[t,0,Tmax,
dT]);
listB:[[sol[1][2],sol[1][3]]];
for I:2 thru Nplot do(listB:append(listB,
[[sol[I][2],sol[I][3]]]));
plot2d([discrete,listB],[style,
[lines,3,1]]);
list1:[[sol[1][1],sol[1][2]]];
for J:2 thru Nplot do(list1:append(list1,
[[sol[J][1],sol[J][2]]]));
list2:[[sol[1][1],sol[1][3]]];
for J:2 thru Nplot do(list2:append(list2,
[[sol[J][1],sol[J][3]]]));
plot2d([[discrete,list2],[discrete,list1]],
[style,[lines,3,1],[lines,3,2]]);
```

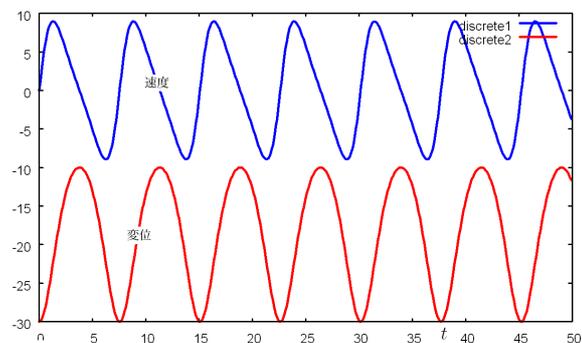


図 2.3.16: (2) 極値より下の場合 時系列結果

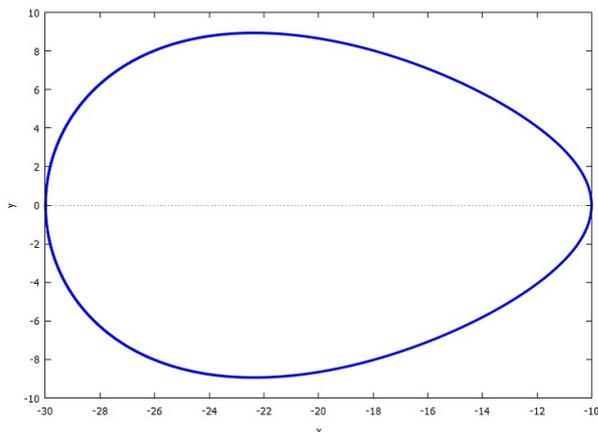


図 2.3.17: (2) 極値より下の場合 変位・速度の位相面

(3) 極値より上の場合

極値より上であるので、U の曲線と 2 点で交わる。左端を初期値として数値計算を行った（図ポテンシャル：U の赤色の線）。変位、速度の時系列結果を下記に示す。

```
sol:rk([Y,EQ21],[X,Y],[-40,0],[t,0,Tmax,
dT]);
listC:[[sol[1][2],sol[1][3]]];
for I:2 thru Nplot do(listC:append(listC,
[[sol[I][2],sol[I][3]]]));
plot2d([discrete,listC],[style,
[lines,3,1]]);
list1:[[sol[1][1],sol[1][2]]];
for J:2 thru Nplot do(list1:append(list1,
[[sol[J][1],sol[J][2]]]));
list2:[[sol[1][1],sol[1][3]]];
for J:2 thru Nplot do(list2:append(list2,
[[sol[J][1],sol[J][3]]]));
plot2d([[discrete,list2],[discrete,list1]]
,[style,[lines,3,1],[lines,3,2]]);
plot2d([[discrete,listA],[discrete,listB]
,[discrete,listC],[style,[lines,3,1],
[lines,3,2],[lines,3,3]]);
```

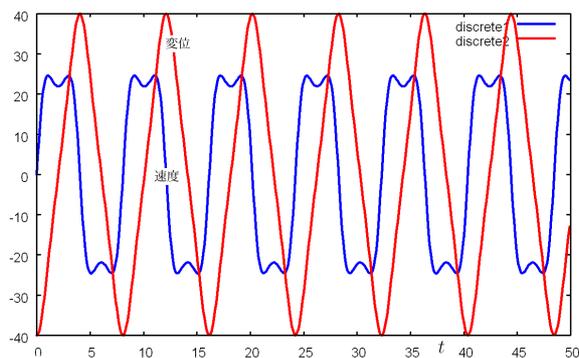


図 2.3.18: (3) 極値より上の場合 時系列結果

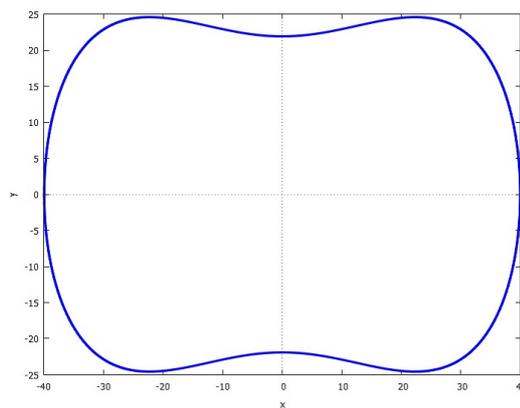


図 2.3.19: (3) 極値より上の場合 変位・速度の位相面

上の 3 条件の変位・速度の位相面図を下記に示す。

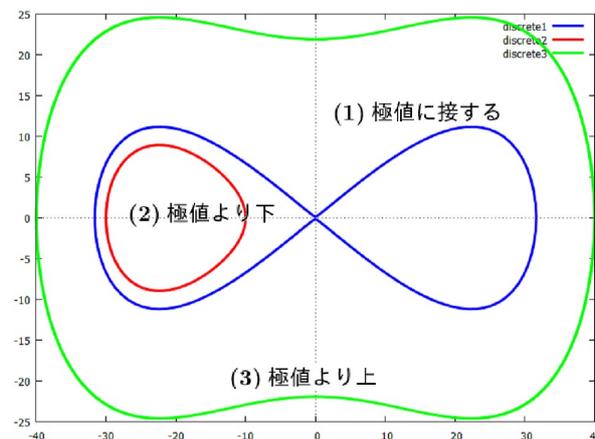
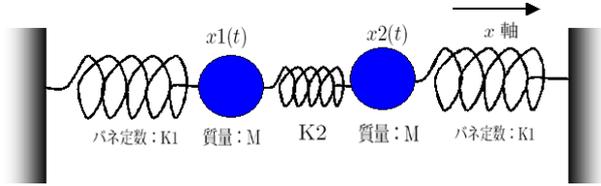


図 2.3.20: 変位・速度の位相面

例題 2.3.6 二つの振子振動

水平線: x 軸上を運動する2質点(質量: M)に、左右両壁から距離に比例する力(バネ定数: K_1)が作用する。そして、2つの質点間に距離に比例する力(バネ定数: K_2)が作用する。



(1) 質点に作用する力の分析

質点に作用する力の分析から、質点の変位: $x_1(t), x_2(t)$ に関する運動方程式は下記となる。

```
kill(all);
EQ1:M*diff(diff(x1(t),t),t)=-K[1]*x1(t)
+K[2]*(x2(t)-x1(t));
EQ2:M*diff(diff(x2(t),t),t)=-K[1]*x2(t)
-K[2]*(x2(t)-x1(t));
```

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} x_1(t)\right) M = K_2 (x_2(t) - x_1(t)) - K_1 x_1(t)$$

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} x_2(t)\right) M = -K_2 (x_2(t) - x_1(t)) - K_1 x_2(t)$$

(2) Lagrange の運動方程式

質点の変位: $x_1(t), x_2(t)$ から、運動エネルギー: T 、ポテンシャルエネルギー: U は下記となり、Lagrange の運動方程式から、下記の運動方程式を得る。

```
kill(all);
assume(M>0,K[1]>0,K[2]>0);
T:1/2*M*(diff(x1(t),t,1))^2+1/2*M*(diff(x2(t),t,1))^2;
U:1/2*K[1]*x1(t)^2+1/2*K[2]*(x2(t)-x1(t))^2+1/2*K[1]*x2(t)^2;
EQ1:diff(diff(T,diff(x1(t),t,1)),t,1)-diff(T,x1(t),1)+diff(U,x1(t),1)=0;
EQ2:diff(diff(T,diff(x2(t),t,1)),t,1)-diff(T,x2(t),1)+diff(U,x2(t),1)=0;
atvalue(diff(x1(t),t),t=0,0);
atvalue(x1(t),t=0,A[1]);
atvalue(diff(x2(t),t),t=0,0);
atvalue(x2(t),t=0,A[2]);
ANS:desolve([EQ1,EQ2],[x1(t),x2(t)]);
```

運動エネルギー: T は下記となる。

$$T = \frac{\left(\frac{d}{dt} x_2(t)\right)^2 M}{2} + \frac{\left(\frac{d}{dt} x_1(t)\right)^2 M}{2}$$

ポテンシャルエネルギー: U は、バネの変位から容易に求まり、

$$U = \frac{K_2 (x_2(t) - x_1(t))^2}{2} + \frac{K_1 x_2(t)^2}{2} + \frac{K_1 x_1(t)^2}{2}$$

上記の運動エネルギー: T とポテンシャルエネルギー: U を Lagrange の運動方程式: (2.1.18) 式、12 ページに代入すると、下記の運動方程式が得られる。

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} x_1(t)\right) M - K_2 (x_2(t) - x_1(t)) + K_1 x_1(t) = 0$$

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} x_2(t)\right) M + K_2 (x_2(t) - x_1(t)) + K_1 x_2(t) = 0$$

運動方程式は両方法とも同じものが得られる。初期条件として、 $x_1(0) = A_1, x_2(0) = A_2$ 、初期速度を零とすると解は下記となる。

$$x_1(t) = \frac{(A_2 + A_1) \cos\left(\frac{\sqrt{K_1} t}{\sqrt{M}}\right)}{2} - \frac{(A_2 - A_1) \cos\left(\frac{\sqrt{2K_2 + K_1} t}{\sqrt{M}}\right)}{2},$$

$$x_2(t) = \frac{(A_2 - A_1) \cos\left(\frac{\sqrt{2K_2 + K_1} t}{\sqrt{M}}\right)}{2} + \frac{(A_2 + A_1) \cos\left(\frac{\sqrt{K_1} t}{\sqrt{M}}\right)}{2}$$

上式から、下記の二つの円周波数: ω_1, ω_2 の運動の合成となっている。

$$\omega_1 = \frac{\sqrt{K_1}}{\sqrt{M}}, \quad \omega_2 = \frac{\sqrt{2K_2 + K_1}}{\sqrt{M}}$$

条件を与え、各質点の運動を描くと下図となる。

```
LI:[M=1,K[1]=1,K[2]=2,A[1]=1,A[2]=2];
subst(LI,ANS);
plot2d([rhs(%[1]),rhs(%[2])],[t,0,20],[y,-2,2.5],[xlabel,"t"],[ylabel,"x"],[legend,"x1","x2"],[style,[lines,3,1],[lines,3,2]]);
```

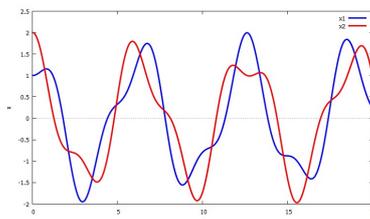
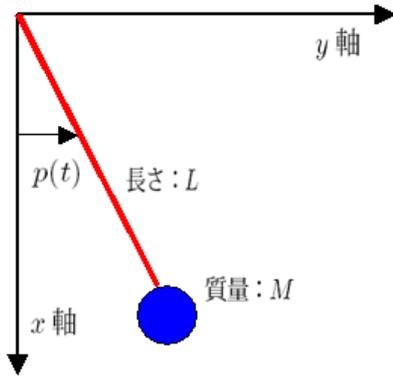


図 2.3.21: 二つの振子振動

例題 2.3.7 単振り子

鉛直下方向に x 軸、水平方向に y 軸をとり、質量: M 、



長さ: L の単振り子の運動について調べる。振り子と x 軸との角度を $p(t)$ 、重力加速度: G 、初期角度: P_0 とすると、運動方程式および質点の運動は下記で表すことができる。

(1) 質点に作用する力の分析

「2.1.2 二次元極座標における運動方程式」(8 ページ) に示す運動方程式で、 $r(t)$ を L に置き換えて、質点の運動を下記のように表現する。

$$x(t) = \cos(p(t)) L$$

$$y(t) = \sin(p(t)) L$$

```
kill(all);
X:L*cos(p(t));
Y:L*sin(p(t));
XY:matrix([ X ],[ Y ]);
VXY:diff(XY,t);
AXY:diff(VXY,t);
TR:matrix([cos(p(t)), sin(p(t))],
[ -sin(p(t)),cos(p(t))]);
ARP:trigsimp(TR.AXY);
EQR:M*ARP[1,1]=F[r];
EQP:M*ARP[2,1]=F[p];
FP:F[p]=-M*G*sin(p(t));
EQ1:subst([F[p]=rhs(FP)],EQP);
```

二次元極座標の運動方程式は、 $x - y$ 座標と二次元極座標の関係式を 2 回時間微分し、 $x - y$ 座標の加速度を $r - p$ で表現すると、

$$\begin{pmatrix} -\sin(p(t)) \left(\frac{d^2}{dt^2} p(t) \right) L - \cos(p(t)) \left(\frac{d}{dt} p(t) \right)^2 L \\ \cos(p(t)) \left(\frac{d^2}{dt^2} p(t) \right) L - \sin(p(t)) \left(\frac{d}{dt} p(t) \right)^2 L \end{pmatrix}$$

上式に二次元極座標への変換マトリックスをかけると、極座標系の下記の運動方程式が得られる。

$$-\left(\frac{d}{dt} p(t) \right)^2 L M = F_r$$

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} p(t) \right) L M = F_p$$
(2.3.2)

質点には下記の力が作用するので、

$$F_p = -\sin(p(t)) G M$$

運動方程式は、

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} p(t) \right) L M = -\sin(p(t)) G M$$
(2.3.3)

(2) Lagrange の運動方程式

総運動エネルギー: T 、総ポテンシャル: U を求め、「2.1.7 Lagrange の運動方程式」の (2.1.18) 式、12 ページに代入すると下記の運動方程式が得られる。初期条件として、初期角度: P_0 とする。

```
kill(all);
X:L*cos(p(t));
Y:L*sin(p(t));
XY:matrix([ X ],[ Y ]);
VXY:diff(XY,t,1);
TT:T=1/2*M*trigsimp(transpose(VXY).VXY);
U:U=L*(1-cos(p(t)))*M*G;
EQ1:diff(diff(rhs(TT),diff(p(t),t,1)),t,1)
-diff(rhs(TT),p(t),1)+diff(rhs(U),p(t),1)
=0;
assume(M>0,G>0,L>0);
atvalue(p(t),t=0,P[0]);
atvalue(diff(p(t),t),t=0,0);
desolve(EQ1,p(t));
ode2(EQ1,p(t),t);
ANS:%[2];
```

$$T = \frac{\left(\frac{d}{dt} p(t) \right)^2 L^2 M}{2}$$

$$U = (1 - \cos(p(t))) G L M$$

上記と同じ下記の運動方程式が得られた。

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} p(t) \right) L^2 M + \sin(p(t)) G L M = 0$$
(2.3.4)

上式は、desolve 関数では解けない。ode2 関数では下記の解となり積分が残っている。

$$\int \frac{1}{\sqrt{\cos(p(t)) - \%k1}} dp(t) \sqrt{L} = t + \%k2$$
(2.3.5)

(3) 線形化

非線形運動方程式の $\sin(p(t))$ を Taylor 展開し、運動が小さいとして下記の線形運動方程式に変換する。

```
sin(P)=taylor(sin(P),P,0,7);
EQ10:subst([sin(p(t))=p(t)],EQ1);
ANSO:desolve(EQ10,p(t));
T00:T[W]=2*%pi/((sqrt(G))/sqrt(L));
```

$$\sin(P) = P - \frac{P^3}{6} + \frac{P^5}{120} - \frac{P^7}{5040} + \dots$$

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} p(t)\right) L^2 M + p(t) G L M = 0 \quad (2.3.6)$$

初期条件から、運動および周期: T_W は

$$p(t) = P_0 \cos\left(\frac{t\sqrt{G}}{\sqrt{L}}\right), \quad T_W = \frac{2\pi\sqrt{L}}{\sqrt{G}} \quad (2.3.7)$$

(4) 運動周期

運動が小さい場合の周期は上記で得られた。運動が大きい場合の周期は、非線形運動方程式を ode2 関数で解いた解から、

```
assume(P[0]>0);
assume(sin(P[0]/2)>0 and sin(P[0])<1);
assume(sin(p/2)>=0 and sin(p/2)<=1);
assume(sin(q)>=0 and sin(q)<=1);
assume(cos(q)>=0 and cos(q)<=1);
diff(lhs(ANS),p(t));
EQIN:subst([%k1=cos(P[0]),p(t)=p],%);
T[W]=4*integrate(EQIN,p,0,P[0]);
```

p が $0 \rightarrow P_0 \rightarrow 0 \rightarrow -P_0 \rightarrow 0$ で一周期の運動となるため、周期は積分範囲: $0 \sim P_0$ の4倍から得られ、下記となる。

$$T_W = \frac{4 \int_0^{P_0} \frac{1}{\sqrt{\cos(p) - \cos(P_0)}} dp \sqrt{L}}{\sqrt{2} \sqrt{G}}$$

```
EQCOS:cos(p)=1-2*(sin(p/2))^2;
EQCOS0:cos(P[0])=1-2*(sin(P[0]/2))^2;
EQIN1:dT[W]=4*(subst([EQCOS,EQCOS0],EQIN))
*dp;
EQSIN:sin(p/2)=sin(P[0]/2)*sin(q);
subst([p=p(q)],%);
diff(% ,q,1);
subst([p(q)=p],%);
solve(% , 'diff(p,q,1))[1];
DPDQ:dp=rhs(%)*dq;
cos(p/2)^2+sin(p/2)^2=1;
EQCOS1:solve(% ,cos(p/2))[2];
```

```
subst([EQSIN,DPDQ],EQIN1);
subst([EQCOS1],%);
trigsimp(subst([EQSIN],%));
EQIN2:expand(subst([cos(q)^2=1-sin(q)^2],%));
TOEL:T[W]=integrate(rhs(EQIN2/dq),q,0,%pi/2);
```

下記のように変換を行う。

$$\cos(p) = 1 - 2 \sin\left(\frac{p}{2}\right)^2, \quad \cos(P_0) = 1 - 2 \sin\left(\frac{P_0}{2}\right)^2$$

上式を代入し、被積分関数は、

$$dT_W = \frac{2^{\frac{5}{2}} dp \sqrt{L}}{\sqrt{2 \sin\left(\frac{P_0}{2}\right)^2 - 2 \sin\left(\frac{p}{2}\right)^2} \sqrt{G}}$$

変数: p を次式の変数: q に変換する。これにより、積分範囲は $0 \sim P_0$ から、 $0 \sim \pi/2$ に変わる。

$$\sin\left(\frac{p}{2}\right) = \sin\left(\frac{P_0}{2}\right) \sin(q)$$

上式の関係から、

$$dp = \frac{2 \sin\left(\frac{P_0}{2}\right) dq \cos(q)}{\cos\left(\frac{p}{2}\right)}$$

上式を代入し、整理すると、

$$\begin{aligned} dT_W &= \frac{2^{\frac{5}{2}} \sin\left(\frac{P_0}{2}\right) dq \cos(q) \sqrt{L}}{\cos\left(\frac{p}{2}\right) \sqrt{2 \sin\left(\frac{P_0}{2}\right)^2 - 2 \sin\left(\frac{p}{2}\right)^2} \sin(q)^2 \sqrt{G}} \\ &= \frac{2^{\frac{5}{2}} \sin\left(\frac{P_0}{2}\right) dq \cos(q) \sqrt{L}}{\sqrt{1 - \sin\left(\frac{P_0}{2}\right)^2} \sqrt{2 \sin\left(\frac{P_0}{2}\right)^2 - 2 \sin\left(\frac{P_0}{2}\right)^2 \sin(q)^2} \sin(q)^2 \sqrt{G}} \\ &= \frac{4 dq \sqrt{L}}{\sqrt{\sin\left(\frac{P_0}{2}\right)^2 \cos(q)^2 - \sin\left(\frac{P_0}{2}\right)^2 + 1} \sqrt{G}} \\ &= \frac{4 dq \sqrt{L}}{\sqrt{1 - \sin\left(\frac{P_0}{2}\right)^2 \sin(q)^2} \sqrt{G}} \end{aligned}$$

周期は上式を積分し、第一種完全楕円積分で得られる。Maxima では `elliptic_kc` 関数で値が得られる。

$$T_W = \frac{4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - \sin\left(\frac{P_0}{2}\right)^2 \sin(q)^2}} dq \sqrt{L}}{\sqrt{G}} \quad (2.3.8)$$

```
EQSIN0:(sin(P[0]/2))^2=M;
EQSIN01:solve(EQSIN0,M)[1];
subst([EQSIN0],rhs(EQIN2)/dq);
taylor(% ,M,0,4);
subst([EQSIN01],%);
TOEX:expand(integrate(% ,q,0,%pi/2));
TOEX1:T[W]=rest(TOEX,3);
```

より計算しやすい記述として、級数表示式を求める。
 上式の被積分関数で、運動振幅が小さいときには、
 $\sin\left(\frac{P_0}{2}\right)^2 \ll 1$ なので、これを基に被積分関数を級数
 展開すると、

$$dT_W = \frac{35 \sin\left(\frac{P_0}{2}\right)^8 \sin(q)^8 \sqrt{L}}{32 \sqrt{G}} + \frac{5 \sin\left(\frac{P_0}{2}\right)^6 \sin(q)^6 \sqrt{L}}{4 \sqrt{G}} \\ + \frac{3 \sin\left(\frac{P_0}{2}\right)^4 \sin(q)^4 \sqrt{L}}{2 \sqrt{G}} + \frac{2 \sin\left(\frac{P_0}{2}\right)^2 \sin(q)^2 \sqrt{L}}{\sqrt{G}} \\ + \frac{4 \sqrt{L}}{\sqrt{G}}$$

上式を積分して周期を求めると、

$$T_W \approx \frac{1225 \pi \sqrt{L} \sin\left(\frac{P_0}{2}\right)^8}{8192 \sqrt{G}} + \frac{25 \pi \sqrt{L} \sin\left(\frac{P_0}{2}\right)^6}{128 \sqrt{G}} \\ + \frac{9 \pi \sqrt{L} \sin\left(\frac{P_0}{2}\right)^4}{32 \sqrt{G}} + \frac{\pi \sqrt{L} \sin\left(\frac{P_0}{2}\right)^2}{2 \sqrt{G}} + \frac{2 \pi \sqrt{L}}{\sqrt{G}}$$

2項までの近似は下記となる。

$$T_W \approx \frac{\pi \sqrt{L} \sin\left(\frac{P_0}{2}\right)^2}{2 \sqrt{G}} + \frac{2 \pi \sqrt{L}}{\sqrt{G}} \quad (2.3.9)$$

上記の線形運動方程式から得られる周期はこの初期項
 である。 $L = 1, G = 9.8$ のときの各周期比較を下图に
 示す。

```
CON3: [L=1,M=1,G=9.8];
T00EL:4*sqrt(L)/sqrt(G)*elliptic_kc (
    sin(P0/2)^2);
T00EX:subst(P0,P[0],rhs(T0EX1));
T00EL1:subst([CON3],T00EL);
T00EX1:subst([CON3],T00EX);
T001:subst([CON3],rhs(T00));
plot2d([T001,T00EL1,T00EX1],[P0,0,%pi/2],
    [nticks,100],[y,0,3],[ylabel,"Tw"],
    [xlabel,"P0"],[legend,"Small amp.",
    "Non-linear","Non-linear approx."],
    [style,[lines,3,1],[lines,3,2],
    [lines,3,3]]);
```

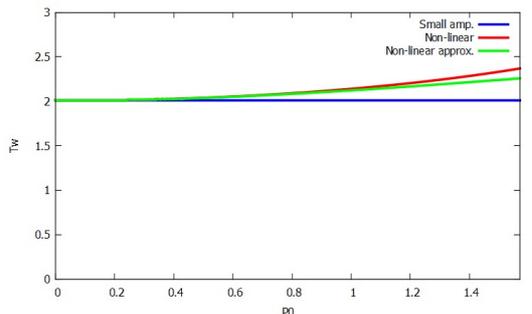


図 2.3.22: 周期

(5) 線形・非線型運動の比較

次に、ポテンシャルと運動について調べる。

```
U1:subst([p(t)=P],rhs(U));
U2:G*L*M*P^2/2;
U11:subst([CON3],U1);
U21:subst([CON3],U2);
plot2d([U11,U21],[P,-%pi,%pi],[ylabel,"U"],
    [xlabel,"P"],[legend,"Non-linear",
    "Small amp."],[style,[lines,3,1],
    [lines,3,2]]);
```

非線形、線形の場合のポテンシャルは下記となる。

$$U_N = G L M (1 - \cos(P))$$

$$U_L = \frac{G L M P^2}{2}$$

非線形ポテンシャルは \cos 形状で、この線より高い場所
 では振動せず、回転が続くこととなる。振動するための
 条件は

$$\frac{L^2 M W_0^2}{2} < 2 G L M$$

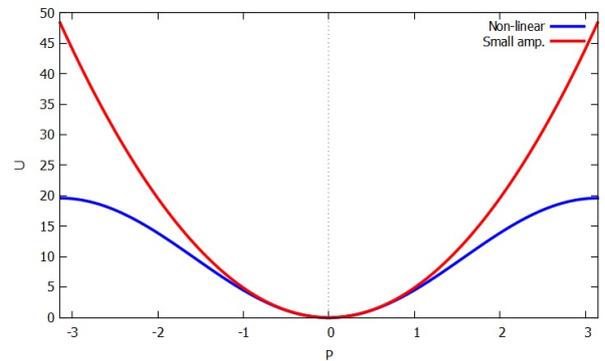


図 2.3.23: ポテンシャル

線形運動方程式、非線形運動方程式を用いて、初期の振幅を変えると運動差がどのように出るかをルンゲ・クッタ法 (Maxima の関数: rk) を用いて、数値解析する。計算結果をリスト: sol の中に納め、図に必要な部分を list12 に再格納する。運動が小さいときには線形方程式で十分表現できている。このことはポテンシャルの図からも解る。

```
solve(EQ1,diff(p(t),t,2))[1];
EQ2:subst([p(t)=Z],%);
EQ21:subst([CON3],rhs(EQ2));
ANSO1:subst([CON3],rhs(ANSO));
Tmax:3;
dT:0.03;
Nplot:fix(Tmax/dT);
P[0]:0.785;
sol:rk([S,EQ21],[Z,S],[P[0],0],[t,0,Tmax,
dT]);
list12:[[sol[1][1],sol[1][2]]];
for J:2 thru Nplot do(list12:append(
list12,[[sol[J][1],sol[J][2]]]));
plot2d([ANSO1,[discrete,list12]],[t,0,
Tmax],[nticks,Nplot],[ylabel,"P"],
[xlabel,"t"],[legend,"Small amp.",
"Non-linear"],[style,[lines,3,1],
[lines,3,2]]);
```

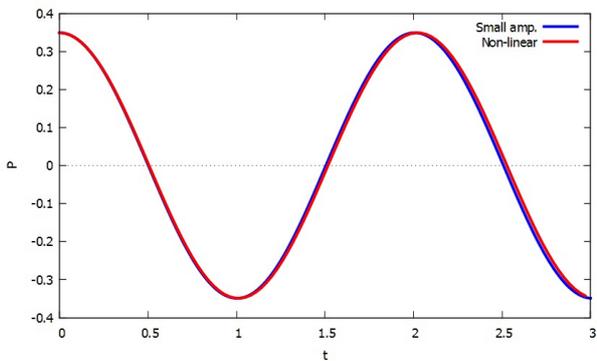


図 2.3.24: $P_0 = \frac{\pi}{9}$

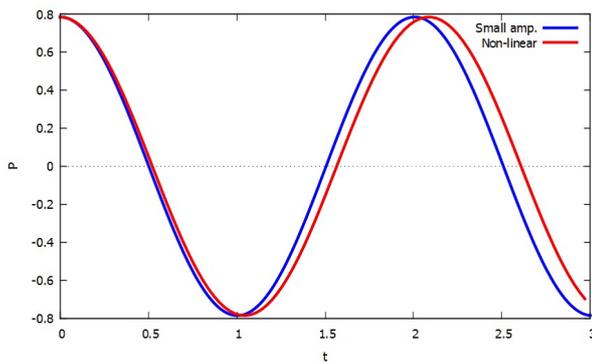
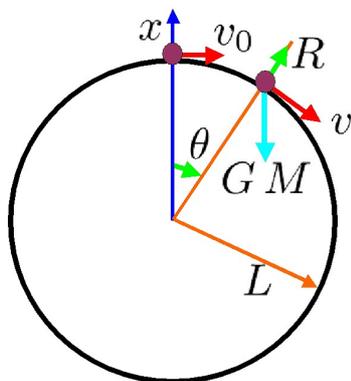


図 2.3.25: $P_0 = \frac{\pi}{4}$

例題 2.3.8 円上を滑り落ちる質点

滑らかな円上の頂点で速度： v_0 で質点を滑り落ちる。質点が円を離れる位置を求める。鉛直上方向に x 軸、 x 軸との角度を θ 、円の半径： L 、質量： M 、重力加速度： G とする。



$$R = \frac{((2 - 2 \cos(\theta)) GL + v_0^2) M}{L} - \cos(\theta) GM$$

質点が円を離れる位置では $R = 0$ であるから、

$$0 = \frac{((2 - 2 \cos(\theta)) GL + v_0^2) M}{L} - \cos(\theta) GM$$

上式から、

$$\cos(\theta) = \frac{2GL + v_0^2}{3GL}$$

以上から、質点が円を離れる位置は、

$$\theta = \arccos\left(\frac{v_0^2}{3GL} + \frac{2}{3}\right)$$

```
kill(all);
depends(\theta,t);
EQ0:-(diff(\theta,t,1))^2*L*M=F[r];
EQ2:R=-M*G*cos(\theta)+M*L*\omega^2;
OM1:L*\omega=v;
EQ1:M*v[0]^2/2+M*G*L=M*v^2/2+M*G*L*cos(\theta);
OM2:solve(OM1,\omega)[1];
EQ21:subst([OM2],EQ2);
EQ11:solve(EQ1,v^2)[1];
subst([EQ11],EQ21);
subst([R=0],%);
solve(%,cos(\theta))[1];
solve(%,\theta)[1];
```

二次元極座標の運動方程式：(2.3.2) 式、29 から、

$$-\left(\frac{d}{dt}\theta\right)^2 LM = F_r$$

半径方向の反力： R を求めると、

$$R = \omega^2 LM - \cos(\theta) GM \quad (2.3.10)$$

位置エネルギーと運動エネルギーの和は等しいから、頂上と角度： θ では、

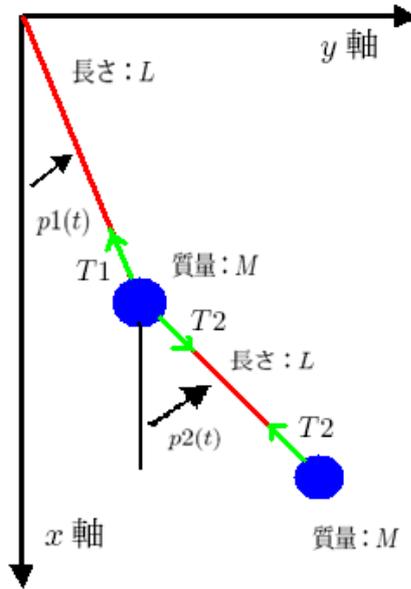
$$GLM + \frac{v_0^2 M}{2} = \cos(\theta) GLM + \frac{v^2 M}{2} \quad (2.3.11)$$

$$\omega = \frac{v}{L}$$

を(2.3.10)式に代入し、(2.3.11)式から v を消去すると、

例題 2.3.9 二重振り子

鉛直下方向に x 軸、水平方向に y 軸をとり、質量： M 、長さ： L の糸の振り子が二つ繋がっている運動について調べる。振り子と x 軸との角度： $p_1(t)$ 、 $p_2(t)$ 、糸に作用する張力： T_1 、 T_2 、重力加速度： G とすると、運動方程式および質点の運動は下記で表すことができる。



(1) 質点に作用する力の分析

「2.1.2 二次元極座標における運動方程式」(8 ページ) に示す運動方程式で、 $r(t)$ を L に置き換えて、各質点の位置は $x-y$ 座標で下記となる。

$$X_1 = L \cos(p_1(t)), \quad Y_1 = L \sin(p_1(t))$$

$$X_2 = L \cos(p_2(t)) + X_1, \quad Y_2 = L \sin(p_2(t)) + Y_1$$

```
kill(all);
assume(M>0,G>0,L>0);
X1:L*cos(p1(t));
Y1:L*sin(p1(t));
XY1:matrix([X1],[Y1]);
AXY1:diff(XY1,t,2);
X2:X1+L*cos(p2(t));
Y2:Y1+L*sin(p2(t));
```

```
XY2:matrix([X2],[Y2]);
AXY2:diff(XY2,t,2);
TR1:matrix([cos(p1(t)), sin(p1(t))],
[-sin(p1(t)), cos(p1(t))]);
TR2:matrix([cos(p2(t)), sin(p2(t))],
[-sin(p2(t)), cos(p2(t))]);
ARP1:trigsimp(TR1.AXY1);
ARP2:trigsimp(TR2.AXY2);
EQR1:trigexpand(M*ARP1[1,1]=-T1+M*G*
cos(p1(t))+T2*cos(p2(t)-p1(t)));
EQP1:trigexpand(M*ARP1[2,1]=-M*G*
sin(p1(t))+T2*sin(p2(t)-p1(t)));
EQR2:trigexpand(M*ARP2[1,1]=-T2+M*G*
cos(p2(t)));
EQP2:trigexpand(M*ARP2[2,1]=-M*G*
sin(p2(t)));
```

これらをマトリックス表示し、微分して変換マトリックス： TR を掛けることにより、極座標表示の加速度： a の成分を得る。各質点において、張力も考慮した力の分析を行い下記の運動方程式を得る。

X_1, Y_1 を二階微分して、

$$a_1 = \frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(p_1(t)) \left(\frac{d^2}{dt^2} p_1(t) \right) L - \cos(p_1(t)) \left(\frac{d}{dt} p_1(t) \right)^2 L \\ \cos(p_1(t)) \left(\frac{d^2}{dt^2} p_1(t) \right) L - \sin(p_1(t)) \left(\frac{d}{dt} p_1(t) \right)^2 L \end{pmatrix} \quad (2.3.12)$$

X_2, Y_2 を二階微分して、

$$\begin{aligned}
 a_2 &= \frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -\sin(p_2(t)) \left(\frac{d^2}{dt^2} p_2(t)\right) L - \cos(p_2(t)) \left(\frac{d}{dt} p_2(t)\right)^2 L - \sin(p_1(t)) \left(\frac{d^2}{dt^2} p_1(t)\right) L - \cos(p_1(t)) \left(\frac{d}{dt} p_1(t)\right)^2 L \\ \cos(p_2(t)) \left(\frac{d^2}{dt^2} p_2(t)\right) L - \sin(p_2(t)) \left(\frac{d}{dt} p_2(t)\right)^2 L + \cos(p_1(t)) \left(\frac{d^2}{dt^2} p_1(t)\right) L - \sin(p_1(t)) \left(\frac{d}{dt} p_1(t)\right)^2 L \end{pmatrix} \quad (2.3.13)
 \end{aligned}$$

上式に変換マトリックスを掛けて、 $r-p$ 方向の加速度に変更する。

上部の質点の運動方程式は、

$$\begin{aligned}
 -\left(\frac{d}{dt} p_1(t)\right)^2 L M &= \cos(p_2(t) - p_1(t)) T_2 - T_1 + \cos(p_1(t)) G M \\
 \left(\frac{d^2}{dt^2} p_1(t)\right) L M &= \sin(p_2(t) - p_1(t)) T_2 - \sin(p_1(t)) G M
 \end{aligned}$$

下部の質点の運動方程式は、

$$\begin{aligned}
 &-\left(\frac{d}{dt} p_2(t)\right)^2 + \left(\cos(p_1(t)) \left(\frac{d^2}{dt^2} p_1(t)\right) - \sin(p_1(t)) \left(\frac{d}{dt} p_1(t)\right)^2\right) \sin(p_2(t)) \\
 &+ \left(-\sin(p_1(t)) \left(\frac{d^2}{dt^2} p_1(t)\right) - \cos(p_1(t)) \left(\frac{d}{dt} p_1(t)\right)^2\right) \cos(p_2(t)) L M = \cos(p_2(t)) G M - T_2 \\
 &\left(\frac{d^2}{dt^2} p_2(t) + \left(\sin(p_1(t)) \left(\frac{d^2}{dt^2} p_1(t)\right) + \cos(p_1(t)) \left(\frac{d}{dt} p_1(t)\right)^2\right) \sin(p_2(t))\right. \\
 &\left. + \left(\cos(p_1(t)) \left(\frac{d^2}{dt^2} p_1(t)\right) - \sin(p_1(t)) \left(\frac{d}{dt} p_1(t)\right)^2\right) \cos(p_2(t))\right) L M = -\sin(p_1(t)) G M
 \end{aligned}$$

上式を解くことはできないので、運動方程式は $\sin(P)$, $\cos(P)$ を Taylor 展開し、運動が小さいとして、高次項を省略とし、下記の線形運動方程式を得る。

$$\begin{aligned}
 \sin(P) &= P - \frac{P^3}{6} + \frac{P^5}{120} - \frac{P^7}{5040} + \dots \\
 \cos(P) &= 1 - \frac{P^2}{2} + \frac{P^4}{24} - \frac{P^6}{720} + \dots
 \end{aligned}$$

```

ANS:solve([EQR12,EQP12,EQR22,EQP22],
[diff(p1(t),t,2),diff(p2(t),t,2),T1,T2]);
EQA1:expand(ANS[1][1]);
EQB1:expand(ANS[1][2]);

```

$$0 = T_2 - T_1 + G M$$

```

sin(P)=taylor(sin(P),P,0,7);
cos(P)=taylor(cos(P),P,0,7);
LIN:[cos(p1(t))=1,cos(p2(t))=1,sin(p1(t))
=p1(t),sin(p2(t))=p2(t),diff(p1(t),t,1)
^2=0,diff(p2(t),t,1)^2=0];
EQR11:subst([LIN],expand(EQR1));
EQP11:subst([LIN],expand(EQP1));
EQR21:subst([LIN],expand(EQR2));
EQP21:subst([LIN],expand(EQP2));
EQR12:lhs(EQR11)=rest(rhs(EQR11),1);
EQP12:factor(EQP11);
EQR22:0=rhs(EQR21);
EQP22:first(lhs(EQP21))+last(lhs(EQP21))
=rhs(EQP21);

```

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} p_1(t)\right) L M = (p_2(t) - p_1(t)) T_2 - p_1(t) G M$$

$$0 = G M - T_2$$

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} p_2(t) + \frac{d^2}{dt^2} p_1(t)\right) L M = -p_2(t) G M$$

T_1, T_2 を消去して、運動方程式は下記となる。

$$\frac{d^2}{dt^2} p_1(t) = \frac{p_2(t) G}{L} - \frac{2p_1(t) G}{L} \quad (2.3.14)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} p_2(t) = \frac{2p_1(t) G}{L} - \frac{2p_2(t) G}{L} \quad (2.3.15)$$

(2)Lagrange の運動方程式

上記に示すように各質点の位置を $x-y$ 座標で表現し、「2.1.7Lagrange の運動方程式」(12 ページ) に示す方法で総運動エネルギー: T 、総ポテンシャル: U を求め、下記のようにして運動方程式を導く。

```
kill(all);
X1:L*cos(p1(t));
Y1:L*sin(p1(t));
XY1:matrix([X1],[Y1]);
VXY1:diff(XY1,t);
X2:X1+L*cos(p2(t));
Y2:Y1+L*sin(p2(t));
XY2:matrix([X2],[Y2]);
VXY2:diff(XY2,t);
TR1:matrix([cos(p1(t)), sin(p1(t))],
[-sin(p1(t)), cos(p1(t))]);
TR2:matrix([cos(p2(t)), sin(p2(t))],
[-sin(p2(t)), cos(p2(t))]);
VRP1:trigsimp(TR1.VXY1);
VRP2:trigsimp(TR2.VXY2);
U:M*G*(L-X1)+M*G*(2*L-X2);
```

```
T:expand(1/2*M*trigsimp(transpose(VXY1).
VXY1)+1/2*M*trigsimp(transpose(VXY2).
VXY2));
EQ1:expand((diff(diff(T,diff(p1(t),t),1)),
t,1)-diff(T,p1(t),1)+diff(U,p1(t),1)=0)
/M/L/L);
EQ2:expand((diff(diff(T,diff(p2(t),t),1)),
t,1)-diff(T,p2(t),1)+diff(U,p2(t),1)=0)
/M/L/L);
```

総ポテンシャル: U は、

$$U = G(-\cos(p_2(t))L - \cos(p_1(t))L + 2L)M + G(L - \cos(p_1(t))L)M$$

上部質点の速度: v_1 は、

$$v_1 = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} X1 \\ Y1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(p_1(t)) \left(\frac{d}{dt} p_1(t)\right) L \\ \cos(p_1(t)) \left(\frac{d}{dt} p_1(t)\right) L \end{pmatrix}$$

上式に変換マトリックスを掛け、極座標表示をすると、

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \left(\frac{d}{dt} p_1(t)\right) L \end{pmatrix}$$

下部質点の速度: v_2 は、

$$v_2 = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} X2 \\ Y2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(p_2(t)) \left(\frac{d}{dt} p_2(t)\right) L - \sin(p_1(t)) \left(\frac{d}{dt} p_1(t)\right) L \\ \cos(p_2(t)) \left(\frac{d}{dt} p_2(t)\right) L + \cos(p_1(t)) \left(\frac{d}{dt} p_1(t)\right) L \end{pmatrix}$$

上式に変換マトリックスを掛け、極座標表示をすると、

$$v_2 = \begin{pmatrix} (\cos(p_1(t)) \left(\frac{d}{dt} p_1(t)\right) \sin(p_2(t)) - \sin(p_1(t)) \left(\frac{d}{dt} p_1(t)\right) \cos(p_2(t))) L \\ \left(\frac{d}{dt} p_2(t) + \sin(p_1(t)) \left(\frac{d}{dt} p_1(t)\right) \sin(p_2(t)) + \cos(p_1(t)) \left(\frac{d}{dt} p_1(t)\right) \cos(p_2(t))\right) L \end{pmatrix}$$

上式から、総運動エネルギー: T は、

$$\begin{aligned} T &= H \frac{v_1^2 M}{2} + \frac{v_2^2 M}{2} \\ &= \frac{\left(\frac{d}{dt} p_2(t)\right)^2 L^2 M}{2} + \sin(p_1(t)) \left(\frac{d}{dt} p_1(t)\right) \sin(p_2(t)) \left(\frac{d}{dt} p_2(t)\right) L^2 M \\ &\quad + \cos(p_1(t)) \left(\frac{d}{dt} p_1(t)\right) \cos(p_2(t)) \left(\frac{d}{dt} p_2(t)\right) L^2 M + \left(\frac{d}{dt} p_1(t)\right)^2 L^2 M \end{aligned}$$

Lagrange の運動方程式から、運動方程式は、

$$\begin{aligned} \frac{\sin(p_2(t)) G}{L} + \frac{d^2}{dt^2} p_2(t) + \sin(p_1(t)) \left(\frac{d^2}{dt^2} p_1(t)\right) \sin(p_2(t)) + \cos(p_1(t)) \left(\frac{d}{dt} p_1(t)\right)^2 \sin(p_2(t)) \\ + \cos(p_1(t)) \left(\frac{d^2}{dt^2} p_1(t)\right) \cos(p_2(t)) - \sin(p_1(t)) \left(\frac{d}{dt} p_1(t)\right)^2 \cos(p_2(t)) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{2 \sin(p_1(t)) G}{L} + \sin(p_1(t)) \sin(p_2(t)) \left(\frac{d^2}{dt^2} p_2(t)\right) + \cos(p_1(t)) \cos(p_2(t)) \left(\frac{d^2}{dt^2} p_2(t)\right) \\ - \cos(p_1(t)) \sin(p_2(t)) \left(\frac{d}{dt} p_2(t)\right)^2 + \sin(p_1(t)) \cos(p_2(t)) \left(\frac{d}{dt} p_2(t)\right)^2 + 2 \left(\frac{d^2}{dt^2} p_1(t)\right) = 0 \end{aligned}$$

上記と同様に、 $\sin(P), \cos(P)$ を Taylor 展開し、運動が小さいとして、高次成分を省略し、下記の線形運動方程式を得る。

```

sin(P)=taylor(sin(P),P,0,7);
cos(P)=taylor(cos(P),P,0,7);
LIN:[cos(p1(t))=1,cos(p2(t))=1,sin(p1(t))
=p1(t),sin(p2(t))=p2(t),diff(p1(t),t,1)
^2=0,diff(p2(t),t,1)^2=0];
EQ11:subst([LIN],EQ1);
EQ21:subst([LIN],EQ2);
EQ12:rest(lhs(EQ11),-3)+rest(lhs(EQ11),2)
=rhs(EQ11);
EQ22:rest(lhs(EQ21),-2)+rest(lhs(EQ21),3)
=rhs(EQ21);
ANS:solve([EQ12,EQ22],[diff(p1(t),t,2),
diff(p2(t),t,2)]);
EQA1:expand(ANS[1][1]);
EQB1:expand(ANS[1][2]);
EQA2:lhs(EQA1)-rhs(EQA1)=0;
EQB2:lhs(EQB1)-rhs(EQB1)=0;

```

```

atvalue(p1(t),t=0,P[1]);
atvalue(diff(p1(t),t,1),t=0,0);
atvalue(p2(t),t=0,P[2]);
atvalue(diff(p2(t),t,1),t=0,0);
desolve([EQA2,EQB2],[p1(t),p2(t)]);
P1:p1(t)=A*e^(%i*W1*t);
P2:p2(t)=B*e^(%i*W2*t);
subst([P1,P2],EQA2);
P11:expand(ev(%,diff));
subst([P1,P2],EQB2);
P21:expand(ev(%,diff));
MXEQ1:matrix([coeff(lhs(P11),%e^(%i*W1*t))
),coeff(lhs(P11),%e^(%i*W2*t))],[coeff(
lhs(P21),%e^(%i*W1*t)),coeff(lhs(P21),
%e^(%i*W2*t))]);
MXEQ2:subst([W1=W,W2=W,A=1,B=1],MXEQ1);
EQW:determinant(MXEQ2)=0;
ANSW:solve(%,W);
WW1:W1=rhs(ANSW[2]);
WW2:W2=rhs(ANSW[4]);

```

上式に下記の式を代入し、

$$p_1(t) = A e^{itW_1}, \quad p_2(t) = B e^{itW_2}$$

下記を得る。

$$-\frac{BG e^{itW_2}}{L} - AW_1^2 e^{itW_1} + \frac{2AG e^{itW_1}}{L} = 0$$

$$-BW_2^2 e^{itW_2} + \frac{2BG e^{itW_2}}{L} - \frac{2AG e^{itW_1}}{L} = 0$$

e^{itW_1}, e^{itW_2} の係数から、下記の行列式を得る。

$$\begin{vmatrix} \frac{2G}{L} - W^2 & -\frac{G}{L} \\ -\frac{2G}{L} & \frac{2G}{L} - W^2 \end{vmatrix} = 0$$

上式を解いて、円周波数： W_1, W_2 を得る。

$$\left(\frac{2G}{L} - W^2\right)^2 - \frac{2G^2}{L^2} = 0$$

$$W_1 = \sqrt{\sqrt{2} + 2} \sqrt{\frac{G}{L}}, \quad W_2 = \sqrt{2 - \sqrt{2}} \sqrt{\frac{G}{L}}$$

$$\frac{2p_1(t)G}{L} + \frac{d^2}{dt^2} p_2(t) + 2 \left(\frac{d^2}{dt^2} p_1(t) \right) = 0$$

$$\frac{p_2(t)G}{L} + \frac{d^2}{dt^2} p_2(t) + \frac{d^2}{dt^2} p_1(t) = 0$$

上式を整理し、

$$\frac{d^2}{dt^2} p_1(t) = \frac{p_2(t)G}{L} - \frac{2p_1(t)G}{L} \quad (2.3.16)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} p_2(t) = \frac{2p_1(t)G}{L} - \frac{2p_2(t)G}{L} \quad (2.3.17)$$

上記「(1) 質点に作用する力の分析、(2.3.14) 式、(2.3.15) 式」と同じ運動方程式が得られた。しかし、なぜか `desolve` 関数では解けなかった。そこで、運動方程式の右辺を左辺に移し、教科書通りに、演算子を用いて定数係数連立線形微分方程式を解く。

$$-\frac{p_2(t)G}{L} + \frac{2p_1(t)G}{L} + \frac{d^2}{dt^2} p_1(t) = 0 \quad (2.3.18)$$

$$\frac{2p_2(t)G}{L} - \frac{2p_1(t)G}{L} + \frac{d^2}{dt^2} p_2(t) = 0 \quad (2.3.19)$$

```

P13:p1(t)=A[1]*cos(W1*t)+A[2]*sin(W1*t);
P23:p2(t)=B[1]*cos(W1*t)+B[2]*sin(W1*t);
subst([P13,P23],EQA2);
EQA3:trigsimp(ev(%),diff);
AB1:coeff(expand(lhs(EQA3)),cos(W1*t))=0;
AB2:coeff(expand(lhs(EQA3)),sin(W1*t))=0;
AB11:factor(solve(AB1,B[1])[1]);
AB21:factor(solve(AB2,B[2])[1]);
P33:p1(t)=A[3]*cos(W2*t)+A[4]*sin(W2*t);
P43:p2(t)=B[3]*cos(W2*t)+B[4]*sin(W2*t);
subst([P33,P43],EQB2);
EQA4:trigsimp(ev(%),diff);
AB3:coeff(expand(lhs(EQA4)),cos(W2*t))=0;
AB4:coeff(expand(lhs(EQA4)),sin(W2*t))=0;
AB31:factor(solve(AB3,B[3])[1]);
AB41:factor(solve(AB4,B[4])[1]);
P13:p1(t)=A[1]*cos(W1*t)+A[2]*sin(W1*t)+
A[3]*cos(W2*t)+A[4]*sin(W2*t);
P23:p2(t)=B[1]*cos(W1*t)+B[2]*sin(W1*t)+
B[3]*cos(W2*t)+B[4]*sin(W2*t);
P231:subst([AB11,AB21,AB31,AB41],P23);
P14:subst([WW1,WW2,t=0],rhs(P13)=A[0]);
P24:subst([WW1,WW2,t=0],rhs(P231)=B[0]);
P34:subst([WW1,WW2,t=0],rhs(diff(P13,t,1)
)=0);
P44:subst([WW1,WW2,t=0],rhs(diff(P231,t,1)
)=0);
AA0:solve([P14,P24,P34,P44],[A[1],A[2],
A[3],A[4]])[1];
AA1:AA0[1];
AA2:AA0[2];
AA3:AA0[3];
AA4:AA0[4];
P15:trigsimp(subst([WW1,WW2,AA1,AA2,AA3,
AA4],P13));
P16:trigsimp(subst([WW1,WW2,AA1,AA2,AA3,
AA4],P231));

```

$W1$ について、

$$p1(t) = A_2 \sin(tW1) + A_1 \cos(tW1)$$

$$p2(t) = B_2 \sin(tW1) + B_1 \cos(tW1)$$

上式を (2.3.18) 式に代入し、下記の関係を得る。

$$B_1 = -\frac{A_1(LW1^2 - 2G)}{G}, \quad B_2 = -\frac{A_2(LW1^2 - 2G)}{G}$$

$W2$ についても同様に行うと、

$$B_3 = -\frac{2A_3G}{LW2^2 - 2G}, \quad B_4 = -\frac{2A_4G}{LW2^2 - 2G}$$

以上から、

$$p1(t) = A_4 \sin(tW2) + A_3 \cos(tW2) + A_2 \sin(tW1) + A_1 \cos(tW1)$$

$$p2(t) = -\frac{2A_4G \sin(tW2)}{LW2^2 - 2G} - \frac{2A_3G \cos(tW2)}{LW2^2 - 2G} - \frac{A_2(LW1^2 - 2G) \sin(tW1)}{G} - \frac{A_1(LW1^2 - 2G) \cos(tW1)}{G}$$

$p1(t)$ の初期値 : A_0 、 $p2(t)$ の初期値 : B_0 で停止しているとする、

$$A_1 = \frac{2A_0 - \sqrt{2}B_0}{4}, \quad A_2 = 0, \quad A_3 = \frac{\sqrt{2}B_0 + 2A_0}{4}, \quad A_4 = 0$$

$$p1(t) = -\frac{(\sqrt{2}B_0 - 2A_0)}{4} \cos\left(\sqrt{\sqrt{2} + 2t} \sqrt{\frac{G}{L}}\right) + \frac{(-\sqrt{2}B_0 - 2A_0)}{4} \cos\left(\sqrt{2 - \sqrt{2}t} \sqrt{\frac{G}{L}}\right)$$

$$p2(t) = \frac{(\sqrt{2}B_0 - 2A_0)}{2^{\frac{3}{2}}} \cos\left(\sqrt{\sqrt{2} + 2t} \sqrt{\frac{G}{L}}\right) + \frac{(\sqrt{2}B_0 + 2A_0)}{2^{\frac{3}{2}}} \cos\left(\sqrt{2 - \sqrt{2}t} \sqrt{\frac{G}{L}}\right)$$

運動の時系列結果の例を下記に示す。ここで上部質量の運動 : $p1(t)$ を青線で、下部質量の運動 : $p2(t)$ を赤線で示す。また、下記の時、同方向に同期して動く、

$$A_0 = \frac{B_0}{\sqrt{2}}$$

下記の時、反対方向に同期して動く、

$$A_0 = -\frac{B_0}{\sqrt{2}}$$

運動の例を下記に示す。

```

sqrt(2)*B[0]-2*A[0]=0;
solve(%,A[0]);
sqrt(2)*B[0]+2*A[0]=0;
solve(%,A[0]);
LI: [G=9.8,L=1,A[0]=0.03,B[0]=0.1];
P151:subst(LI,rhs(P15));
P161:subst(LI,rhs(P16));
plot2d([P151,P161],[t,0,10],[nticks,100],
[ylabel,"p"],[xlabel,"t"],[legend,"p1",
"p2"],[style,[lines,3,1],[lines,3,2]]);
LI: [G=9.8,L=1,A[0]=0.07071,B[0]=0.1];
P151:subst(LI,rhs(P15));
P161:subst(LI,rhs(P16));
plot2d([P151,P161],[t,0,10],[nticks,100],
[ylabel,"p"],[xlabel,"t"],[legend,"p1",
"p2"],[style,[lines,3,1],[lines,3,2]]);
LI: [G=9.8,L=1,A[0]=0.07071,B[0]=-0.1];
P151:subst(LI,rhs(P15));
P161:subst(LI,rhs(P16));
plot2d([P151,P161],[t,0,10],[nticks,100],
[y,-0.1,0.12],[ylabel,"p"],[xlabel,"t"],
[legend,"p1","p2"],[style,[lines,3,1],
[lines,3,2]]);

```

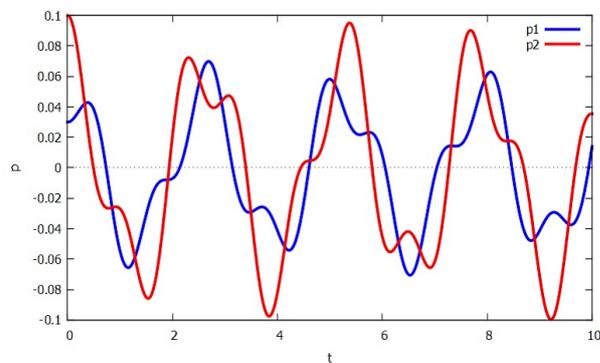


図 2.3.26: 二質点と同方向 $A_0 = 0.03, B_0 = 0.1$

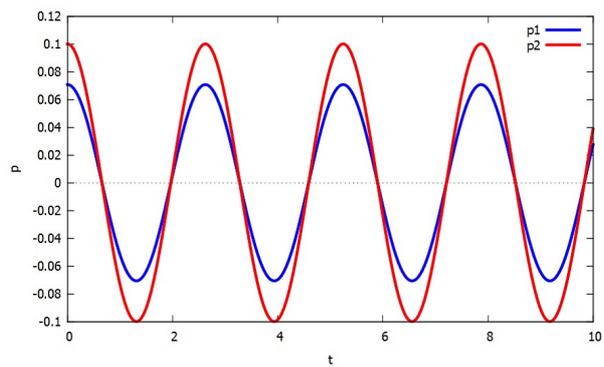


図 2.3.27: 二質点と同方向に同期 $A_0 = 0.07071, B_0 = 0.1$

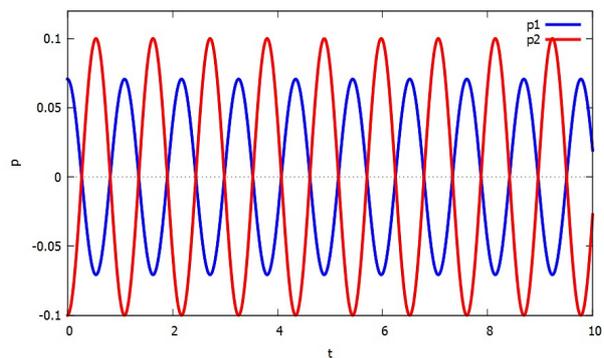
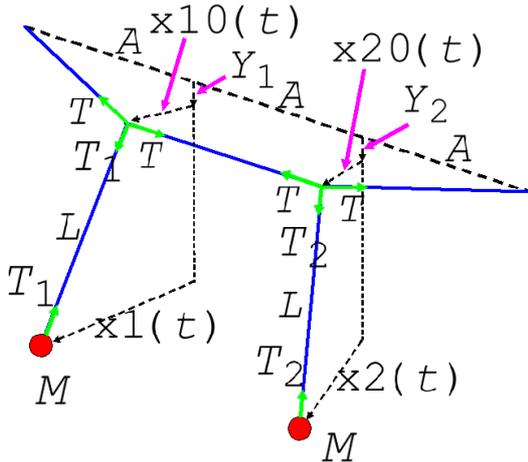


図 2.3.28: 二質点が反対方向に同期 $A_0 = 0.07071, B_0 = -0.1$

例題 2.3.10 糸に吊した二つの振り子

長さ: $3A$ の糸を水平に張り、それを 3 等分した分割点に、長さ: L 、質量: M の振り子を吊す。分割点で糸は Y_1, Y_2 だけ下方に変位する。糸に垂直な面内で、振り子が振れるとき、糸の分割点の水平変位を $x_{10}(t), x_{20}(t)$ 、質点の水平変位を $x_1(t), x_2(t)$ とする。糸の張力を T 、振り子の張力を T_1, T_2 、重力加速度を G とする。



ここで、 $x_1(t), y_1(t), x_{10}(t), y_{10}(t), Y_1, Y_2$ は十分小さいとする。このとき、糸の分割点における力の釣り合いは、

$$T_1 - T \frac{Y_1}{A} = 0, \quad T_2 - T \frac{Y_2}{A} = 0$$

$$\frac{(x_1(t) - x_{10}(t)) T_1}{L} + \frac{(x_{20}(t) - x_{10}(t)) T}{A} - \frac{x_{10}(t) T}{A} = 0$$

$$\frac{(x_2(t) - x_{20}(t)) T_2}{L} - \frac{(x_{20}(t) - x_{10}(t)) T}{A} - \frac{x_{20}(t) T}{A} = 0$$

振り子の質点の釣り合いは、

$$T_1 = GM$$

$$\frac{(x_1(t) - x_{10}(t)) T_1}{L} + \left(\frac{d^2}{dt^2} x_1(t) \right) M = 0$$

$$T_2 = GM$$

$$\frac{(x_2(t) - x_{20}(t)) T_2}{L} + \left(\frac{d^2}{dt^2} x_2(t) \right) M = 0$$

```
kill(all);
assume(A>0,M>0,G>0,L>0);
EQY10:T1-T*Y1/A=0;
EQX10:T1*(x1(t)-x10(t))/L-T*x10(t)/A+T*(x20(t)-x10(t))/A=0;
EQY20:T2-T*Y2/A=0;
EQX20:T2*(x2(t)-x20(t))/L-T*x20(t)/A-T*(x20(t)-x10(t))/A=0;
EQY1:T1=G*M;
EQX1:M*diff(x1(t),t,2)+T1*(x1(t)-x10(t))/L=0;
EQY2:T2=G*M;
EQX2:M*diff(x2(t),t,2)+T2*(x2(t)-x20(t))/L=0;
EQ:solve([EQY10,EQX10,EQY20,EQX20,EQY1,EQX1,EQY2,EQX2],[diff(x1(t),t,2),diff(x2(t),t,2),x10(t),x20(t),T1,T2,Y1,Y2]);
```

連立方程式を解き、 T_1, T_2, Y_1, Y_2 を消去して、

$$\left[\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} x_1(t) &= -\frac{3x_1(t)GLT^2 + (2x_1(t) - x_2(t))AG^2MT}{3L^2T^2 + 4AGLMT + A^2G^2M^2}, \\ \frac{d^2}{dt^2} x_2(t) &= -\frac{3x_2(t)GLT^2 + (2x_2(t) - x_1(t))AG^2MT}{3L^2T^2 + 4AGLMT + A^2G^2M^2}, \\ x_{10}(t) &= \frac{(x_2(t) + 2x_1(t))AGLMT + x_1(t)A^2G^2M^2}{3L^2T^2 + 4AGLMT + A^2G^2M^2}, \\ x_{20}(t) &= \frac{(2x_2(t) + x_1(t))AGLMT + x_2(t)A^2G^2M^2}{3L^2T^2 + 4AGLMT + A^2G^2M^2}, \\ T_1 &= GM, T_2 = GM, Y_1 = \frac{AGM}{T}, Y_2 = \frac{AGM}{T} \end{aligned} \right]$$

$T \gg GM$ として簡略化すると、

$$\frac{d^2}{dt^2} x_1(t) = \frac{x_2(t)AG^2M}{3L^2T} - \frac{2x_1(t)AG^2M}{3L^2T} - \frac{x_1(t)G}{L}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} x_2(t) = -\frac{2x_2(t)AG^2M}{3L^2T} + \frac{x_1(t)AG^2M}{3L^2T} - \frac{x_2(t)G}{L}$$

下記の置き換えを行うと、

$$W_1^2 = \frac{AGM}{3LT}, \quad W_0^2 = \frac{G}{L}$$

質点の運動方程式は下記となる。

```

EQX11:EQ[1][1];
EQX21:EQ[1][2];
EQX12:lhs(EQX11)=expand(num(rhs(EQX11))
/rest(denom(rhs(EQX11)),-2));
EQX22:lhs(EQX21)=expand(num(rhs(EQX21))
/rest(denom(rhs(EQX21)),-2));
WW1:W[1]^2=G*M*A/(L*T*3);
WW0:W[0]^2=G/L;
subst([A=W[1]^2*L*T*3/G/M],EQX12);
EQX13:expand(subst([L=G/W[0]^2],%));
subst([A=W[1]^2*L*T*3/G/M],EQX22);
EQX23:expand(subst([L=G/W[0]^2],%));

```

```

LI:[G=9.8,A=1,M=1,L=1,T=100];
WW1:sqrt(subst(LI,WW1));
WW0:sqrt(subst(LI,WW0));
ANS11:subst([WW1,WW0,P[1]=0,P[2]=0.1],
rhs(ANS1));
ANS21:subst([WW1,WW0,P[1]=0,P[2]=0.1],
rhs(ANS2));
plot2d([ANS11,ANS21],[t,0,70],[nticks,500]
,[y,-0.1,0.13],[ylabel,"x"],[xlabel,"t"],
[legend,"x1","x2"],[style,[lines,3,1],
[lines,3,2]]);

```

$$\frac{d^2}{dt^2} x_1(t) = W_0^2 W_1^2 x_2(t) - 2W_0^2 W_1^2 x_1(t) - W_0^2 x_1(t)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} x_2(t) = -2W_0^2 W_1^2 x_2(t) - W_0^2 x_2(t) + W_0^2 W_1^2 x_1(t)$$

各質点の初期条件として、各変位が P_1, P_2 で静止しているとして、desolve 関数で解くと各質点の運動は下記となる。

```

assume(W[1]>0);
assume(W[0]>0);
atvalue(x1(t),t=0,P[1]);
atvalue(x2(t),t=0,P[2]);
atvalue(diff(x1(t),t,1),t=0,0);
atvalue(diff(x2(t),t,1),t=0,0);
ANS:desolve([EQX13,EQX23],[x1(t),x2(t)]);
ANS1:trigsimp(ANS[1]);
ANS2:trigsimp(ANS[2]);

```

$$x_1(t) = -\frac{(P_2 - P_1) \cos(W_0 \sqrt{3W_1^2 + 1}t) + (-P_2 - P_1) \cos(W_0 \sqrt{W_1^2 + 1}t)}{2}$$

$$x_2(t) = \frac{(P_2 - P_1) \cos(W_0 \sqrt{3W_1^2 + 1}t) + (P_2 + P_1) \cos(W_0 \sqrt{W_1^2 + 1}t)}{2}$$

質点2にのみ変位を与えた運動結果を下記に示す。質点1は静止しているが徐々に運動を始め、運動が最大になったときには、質点2は静止している。

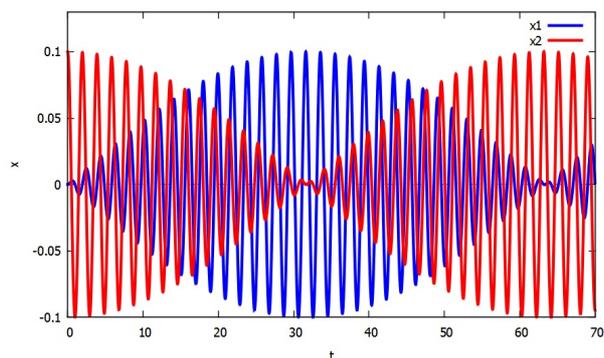
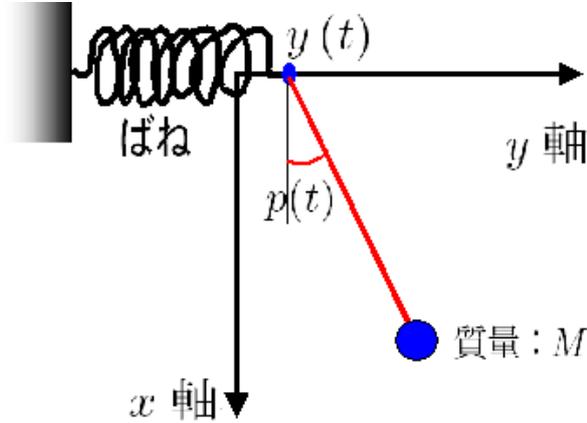


図 2.3.29: 2つの振り子の運動

例題 2.3.11 水平ばね+振り子

鉛直下方向に x 軸、水平方向に y 軸をとり、バネ定数： K のばねと質量： M 、長さ： L の振り子が繋がっている運動について調べる。振り子と x 軸との角度： $p(t)$ 、バ



ネ変位： $y(t)$ 、重力加速度： G とする。質点の運動は下記で表すことができる。

$$X : \cos(p(t)) L$$

$$Y : \sin(p(t)) L + y(t)$$

運動方程式は、「2.1.7Lagrange の運動方程式」(12 ページ) に示す方程式で、総運動エネルギー： T 、総ポテンシャル： U を求め、下記のようにして導く。

```
kill(all);
X:L*cos(p(t));
Y:y(t)+L*sin(p(t));
XY:matrix([X],[Y]);
VXY:diff(XY,t,1);
T:expand(1/2*M*trigsimp(transpose(VXY).
VXY));
U:L*(1-cos(p(t)))*M*G+1/2*K*y(t)^2;
EQ1:expand(diff(diff(T,diff(p(t),t,1)),
t,1)-diff(T,p(t),1)+diff(U,p(t),1)=0);
EQ2:expand(diff(diff(T,diff(y(t),t,1)),
t,1)-diff(T,y(t),1)+diff(U,y(t),1)=0);
```

各速度成分は、上記の変位を時間： t で微分して、

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \cos(p(t)) L \\ \sin(p(t)) L + y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(p(t)) \left(\frac{d}{dt} p(t)\right) L \\ \cos(p(t)) \left(\frac{d}{dt} p(t)\right) L + \frac{d}{dt} y(t) \end{pmatrix}$$

総運動エネルギー： T は、

$$T = \frac{\left(\frac{d}{dt} p(t)\right)^2 L^2 M}{2} + \cos(p(t)) \left(\frac{d}{dt} p(t)\right) \left(\frac{d}{dt} y(t)\right) L M + \frac{\left(\frac{d}{dt} y(t)\right)^2 M}{2}$$

総ポテンシャル： U は、

$$U = (1 - \cos(p(t))) G L M + \frac{y(t)^2 K}{2}$$

Lagrange の運動方程式から、運動方程式は、

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2}{dt^2} p(t)\right) L^2 M + \sin(p(t)) G L M \\ + \cos(p(t)) \left(\frac{d^2}{dt^2} y(t)\right) L M = 0 \\ \cos(p(t)) \left(\frac{d^2}{dt^2} p(t)\right) L M \\ - \sin(p(t)) \left(\frac{d}{dt} p(t)\right)^2 L M \\ + \left(\frac{d^2}{dt^2} y(t)\right) M + y(t) K = 0 \end{aligned}$$

$\sin(p(t))$, $\cos(p(t))$ を Taylor 展開し、 $p(t)$ の運動が小さいとして、高次の項を省略し、

```
LIN:[sin(p(t))=p(t),cos(p(t))=1,
diff(p(t),t,1)^2=0];
EQ11:subst([LIN],EQ1);
EQ21:subst([LIN],EQ2);
assume(M>0,G>0,L>0,K>0);
atvalue(p(t),t=0,P[0]);
atvalue(diff(p(t),t),t=0,0);
atvalue(y(t),t=0,y[0]);
atvalue(diff(y(t),t),t=0,0);
factor(desolve([EQ11,EQ21],[p(t),y(t)]));
```

運動方程式は下記となる。

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2}{dt^2} p(t)\right) L^2 M + p(t) G L M + \left(\frac{d^2}{dt^2} y(t)\right) L M = 0 \\ \left(\frac{d^2}{dt^2} p(t)\right) L M + \left(\frac{d^2}{dt^2} y(t)\right) M + y(t) K = 0 \end{aligned}$$

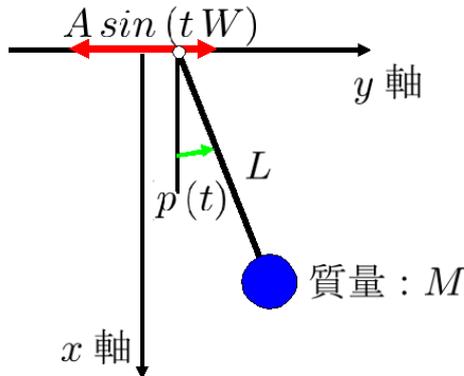
初期値： $y(t) = y_0$, $p(t) = P_0$ として、上記の運動方程式の解は `desolve` 関数で得られ、

$$p(t) = \frac{K (P_0 L + y_0) \cos\left(\frac{t\sqrt{G}\sqrt{K}}{\sqrt{GM+KL}}\right)}{GM + KL},$$

$$y(t) = \frac{G (P_0 L + y_0) M \cos\left(\frac{t\sqrt{G}\sqrt{K}}{\sqrt{GM+KL}}\right)}{GM + KL}$$

例題 2.3.12 振り子の水平強制振動

鉛直下方向に x 軸、水平方向に y 軸をとり、質量： M 、長さ： L の振り子の上端が振幅： A で水平方向に振動する運動について調べる。



振り子と x 軸との角度： $p(t)$ 、振り子上端の水平振動変位： $A \sin(tW)$ 、重力加速度： G とする。質点の運動は下記で表す。質点の位置は、

$$X : \cos(p(t)) L$$

$$Y : A \sin(tW) + \sin(p(t)) L$$

「2.1.7 Lagrange の運動方程式」(12 ページ) に示す方程式で、総運動エネルギー： T 、総ポテンシャル： U を求め、下記のようにして運動方程式を導く。

```
kill(all);
X:L*cos(p(t));
Y:A*sin(W*t)+L*sin(p(t));
XY:matrix([X],[Y]);
VXY:diff(XY,t,1);
T:expand(1/2*M*trigsimp(transpose(VXY).
VXY));
U:L*(1-cos(p(t)))*M*G;
EQ1:diff(diff(T,diff(p(t),t,1)),t,1)
-diff(T,p(t),1)+diff(U,p(t),1)=0;
```

質点の各速度成分は、上記の変位を時間： t で微分して、

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \cos(p(t)) L \\ A \sin(tW) + \sin(p(t)) L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(p(t)) \left(\frac{d}{dt} p(t)\right) L \\ A W \cos(tW) + \cos(p(t)) \left(\frac{d}{dt} p(t)\right) L \end{pmatrix}$$

上式から、総運動エネルギー： T は、

$$T = \frac{A^2 M W^2 \cos(tW)^2}{2} + \cos(p(t)) \left(\frac{d}{dt} p(t)\right) A L M W \cos(tW) + \frac{\left(\frac{d}{dt} p(t)\right)^2 L^2 M}{2}$$

総ポテンシャル： U は、

$$U = (1 - \cos(p(t))) G L M$$

Lagrange の運動方程式から、運動方程式は下記となる。

$$-\cos(p(t)) A L M W^2 \sin(tW) + \left(\frac{d^2}{dt^2} p(t)\right) L^2 M + \sin(p(t)) G L M = 0$$

$\sin(p(t)), \cos(p(t))$ を Taylor 展開し、 $p(t)$ の運動が小さいとして、高次の項を省略し、

```
LIN:[sin(p(t))=p(t),cos(p(t))=1];
EQ11:subst([LIN],EQ1);
assume(M>0,G>0,L>0,A>0,W>0);
atvalue(p(t),t=0,P[0]);
atvalue(diff(p(t),t),t=0,0);
expand(desolve(EQ11,p(t)));
```

運動方程式は、

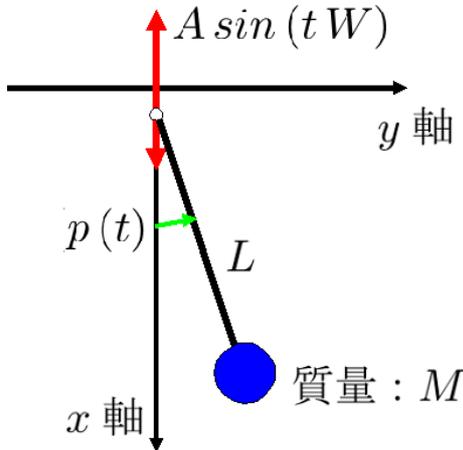
$$-A L M W^2 \sin(tW) + \left(\frac{d^2}{dt^2} p(t)\right) L^2 M + p(t) G L M = 0$$

初期条件として、 $p(0) = P_0$ とし、desolve 関数で解を求めると、

$$p(t) = -\frac{A W^2 \sin(tW)}{L W^2 - G} + \frac{A \sin\left(\frac{t\sqrt{G}}{\sqrt{L}}\right) \sqrt{L} W^3}{\sqrt{G} L W^2 - G^{\frac{3}{2}}} + P_0 \cos\left(\frac{t\sqrt{G}}{\sqrt{L}}\right)$$

例題 2.3.13 振り子の鉛直強制振動

鉛直下方向に x 軸、水平方向に y 軸をとり、質量： M 、長さ： L の振り子の上端が振幅： A で鉛直方向に振動する運動について調べる。振り子と x 軸との角度： $p(t)$ 、



振り子上端の鉛直振動変位： $A \sin(tW)$ 、重力加速度： G とする。質点の運動は下記で表現できる。

$$X : A \sin(tW) + \cos(p(t)) L$$

$$Y : \sin(p(t)) L$$

「2.1.7Lagrange の運動方程式」(12 ページ) に示す方程式で、総運動エネルギー： T 、総ポテンシャル： U を求め、下記のようにして運動方程式を導く。

```
kill(all);
X:A*sin(W*t)+L*cos(p(t));
Y:L*sin(p(t));
XY:matrix([X],[Y]);
VXY:diff(XY,t,1);
T:expand(1/2*M*trigsimp(transpose(VXY).
VXY));
U:L*(1-cos(p(t)))*M*G-A*sin(W*t)*M*G;
W0:W[0]^2=G/L;
EQ0:expand(diff(diff(T,diff(p(t),t,1)),
t,1)-diff(T,p(t),1)+diff(U,p(t),1)=0);
EQ1:expand(subst([G=W[0]^2*L,sin(p(t))=
p(t)],%)/L^2/M);
```

上記を時間微分して質点の速度は、

$$V_X : A W \cos(tW) - \sin(p(t)) \left(\frac{d}{dt} p(t) \right) L$$

$$V_Y : \cos(p(t)) \left(\frac{d}{dt} p(t) \right) L$$

上式から、総運動エネルギー： T は、

$$T = \frac{A^2 M W^2 \cos(tW)^2}{2} - \sin(p(t)) \left(\frac{d}{dt} p(t) \right) A L M W \cos(tW) + \frac{\left(\frac{d}{dt} p(t) \right)^2 L^2 M}{2}$$

総ポテンシャル： U は、

$$U = (1 - \cos(p(t))) G L M - A G M \sin(tW)$$

Lagrange の運動方程式から運動方程式は下記となる。

$$\sin(p(t)) A L M W^2 \sin(tW) + \left(\frac{d^2}{dt^2} p(t) \right) L^2 M + \sin(p(t)) G L M = 0$$

(2.3.20)

$W_0^2 = \frac{G}{L}$ と置き換えて、運動： $p(t)$ が小さいとし、高次の項を省略すると

$$\frac{p(t) A W^2 \sin(tW)}{L} + \frac{d^2}{dt^2} p(t) + W_0^2 p(t) = 0$$

(2.3.21)

$W_0^2 \gg A W^2 / L$ とすると単振り子の運動となる。そこで、この単振り子の運動： $p_0(t)$ と他の微小運動： $p_1(t)$ に分けて扱う。

```
rest(lhs(EQ1),1)=rhs(EQ1);
EQ10:subst(p0(t),p(t),%);
assume(M>0,G>0,L>0,A>0,W>0,W[0]>0);
atvalue(p0(t),t=0,P[0]);
atvalue(diff(p0(t),t),t=0,0);
P00:desolve(EQ10,p0(t));
```

上記から、

$$p(t) = p_1(t) + p_0(t)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} p_0(t) + W_0^2 p_0(t) = 0$$

上式の解は、

$$p_0(t) = P_0 \cos(W_0 t)$$

上記の関係を運動方程式に代入し、 $p_1(t)$ の運動方程式は、

```

EQP:p(t)=rhs(%) + p1(t);
DDEQP:diff(EQP,t,2);
subst([DDEQP],EQ1);
expand(subst([EQP],%));
trigreduce(%);
EQ2:subst([sin(t*W)=0],%);
assume(W > W[0]);
atvalue(p1(t),t=0,0);
atvalue(diff(p1(t),t),t=0,0);
P1:desolve(EQ2,p1(t));
rhs(P1)-first(rhs(P1))-last(rhs(P1));
subst([W[0]=W01],%);
limit(%,W,W01);
EQ3:subst([W*t=2*W[0]*t],EQ2);
P2:desolve(EQ3,p1(t));

```

$$\frac{P_0 \cos(W_0 t) A W^2 \sin(t W)}{L} + \frac{p_1(t) A W^2 \sin(t W)}{L} + \frac{d^2}{dt^2} p_1(t) + W_0^2 p_1(t) = 0$$

$P_0 \gg p_1(t)$ として、左辺第 2 項の $p_1(t) \sin(Wt)$ の項は省略でき、 $\sin(tW) \cos(tW_0)$ を展開し、

$$\frac{P_0 A W^2 \sin(t W + W_0 t)}{2L} + \frac{P_0 A W^2 \sin(t W - W_0 t)}{2L} + \frac{d^2}{dt^2} p_1(t) + W_0^2 p_1(t) = 0 \quad (2.3.22)$$

これを解くと、

$$p_1(t) = \frac{(P_0 A W^2 + P_0 W_0 A W) \sin(t(W + W_0))}{(W + W_0)(2LW + 4W_0L)} + \frac{(P_0 A W^2 - P_0 W_0 A W) \sin(t(W - W_0))}{(W - W_0)(2LW - 4W_0L)} - \frac{\sin(W_0 t) (P_0 A W^3 - 2P_0 W_0^2 A W)}{W_0(LW^2 - 4W_0^2L)}$$

上式の右辺第二項は $W \rightarrow W_0$ のとき、零に収束する。 $W = 2W_0$ のときには上式は値を持たないので、この関係を元の運動方程式 (2.3.22) 式に代入すると

$$\frac{2P_0 W_0^2 \sin(3W_0 t) A}{L} + \frac{2P_0 W_0^2 \sin(W_0 t) A}{L} + \frac{d^2}{dt^2} p_1(t) + W_0^2 p_1(t) = 0$$

解は下記となる。運動が徐々に拡大していく $t \cos(tW_0)$

の項が含まれている。

$$p_1(t) = \frac{P_0 \sin(3W_0 t) A}{4L} - \frac{7P_0 \sin(W_0 t) A}{4L} + \frac{P_0 W_0 t \cos(W_0 t) A}{L}$$

次に、上記解析解の精度を検証するため、ルンゲ・クッタ法により数値計算結果と比較する。(2.3.20) 式を変形し、ルンゲ・クッタ法用の運動方程式は下記となる。

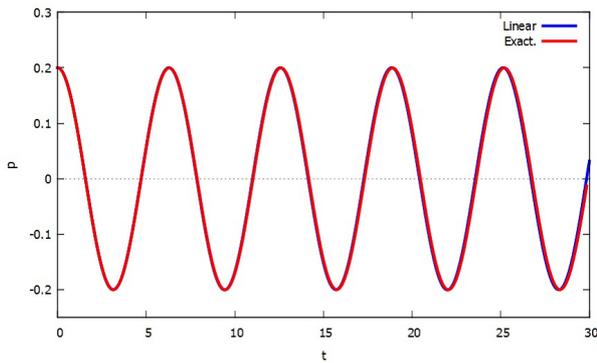
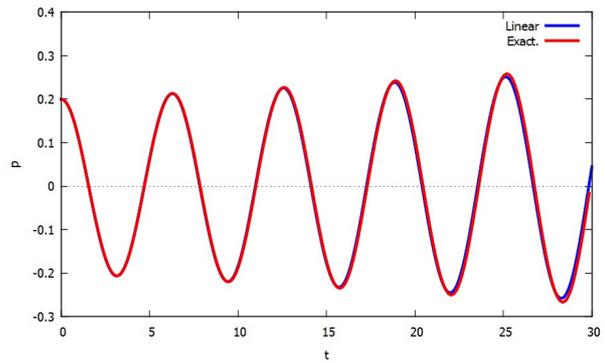
$$\frac{d^2}{dt^2} XX = -\frac{A W^2 \sin(t W) \sin(XX) + G \sin(XX)}{L}$$

```

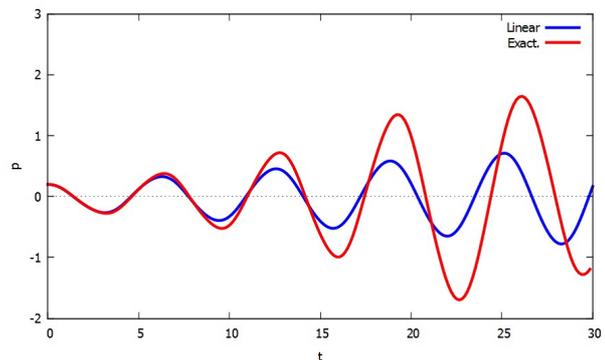
solve(EQ0, diff(p(t), t, 2)) [1];
EQRK:subst(XX,p(t),%);
EQRK1:subst([L=9.8,A=0.1,G=9.8,W[0]=1,
W=0.5],EQRK);
P001:subst([L=9.8,A=0.1,G=9.8,W[0]=1,
W=0.5],rhs(P00+P1));
EQRK2:subst([L=9.8,A=0.1,G=9.8,W[0]=1,
W=2],EQRK);
P002:subst([L=9.8,A=0.1,G=9.8,W[0]=1,
W=2],rhs(P00+P2));
EQRK3:subst([L=9.8,A=1.0,G=9.8,W[0]=1,
W=2],EQRK);
P003:subst([L=9.8,A=1.0,G=9.8,W[0]=1,
W=2],rhs(P00+P2));
P[0]:0.2;
TT:30;
NN:200;
DT:TT/NN;
sol:rk([YY,rhs(EQRK1)], [XX,YY], [P[0],0],
[t,0,TT,DT]);
list11:[[sol[1][1],sol[1][2]]];
for J:2 thru NN do(list11:append(list11,
[[sol[J][1],sol[J][2]]]));
plot2d([P001,[discrete,list11]],[t,0,TT],
[nticks,NN],[y,-0.25,0.3],[ylabel,"p"],
[xlabel,"t"],[legend,"Linear","Exact."],
[style,[lines,3,1],[lines,3,2]]);

```

$W \neq 2W_0$ のとき $p_1(t)$ の項は小さく、解析解と数値解の差はない。

図 2.3.30: $W = 0.5W_0$, $A = 0.1 \ll L$ 図 2.3.31: $W = 2W_0$, $A = 0.1 \ll L$

$W = 2W_0$ のときは $p_1(t)$ の項は徐々に大きくなり、 $A \ll L$ の場合には解析解と数値解の差は小さいが、 A が大きくなってくると、その差は大きく解析解の精度が悪くなっている。数値解では $W = 2W_0$ のときに徐々に発散していく条件を見つけるのは出来ないが、解析的手法ではこの条件： $W = 2W_0$ を明らかに出来る。

図 2.3.32: $W = 2W_0$, $A = 1 < L$

```
sol:rk([YY,rhs(EQRK2)],[XX,YY],[P[0],0],
[t,0,TT,DT]);
list12:[[sol[1][1],sol[1][2]]];
for J:2 thru NN do(list12:append(list12,
[[sol[J][1],sol[J][2]]]));
plot2d([P002,[discrete,list12]],[t,0,TT],
[nticks,NN],[y,-0.3,0.4],[ylabel,"p"],
[xlabel,"t"],[legend,"Linear","Exact."],
[style,[lines,3,1],[lines,3,2]]);
sol:rk([YY,rhs(EQRK3)],[XX,YY],[P[0],0],
[t,0,TT,DT]);
list13:[[sol[1][1],sol[1][2]]];
for J:2 thru NN do(list13:append(list13,
[[sol[J][1],sol[J][2]]]));
plot2d([P003,[discrete,list13]],[t,0,TT],
[nticks,NN],[y,-2,3],[ylabel,"p"],
[xlabel,"t"],[legend,"Linear","Exact."],
[style,[lines,3,1],[lines,3,2]]);
```

例題 2.3.14 球面振り子

鉛直下方向に z 軸、水平方向に x 軸、 y 軸をとり、質量： M 、長さ： L の糸の振り子の鉛直平面内の運動のみでなく、三次元の運動について調べる。「2.1.3 三次元極座標における運動方程式」(10 ページ) に示す極座標を用い、質点の原点からの距離： L 、 z 軸との角度： $q(t)$ 、 L の $x-y$ 平面の投影と x 軸との角度： $p(t)$ 、重力加速度： G とする。そして、 z 軸との角度： Q_0 から水平に W_0 の角速度で質量を放出する。

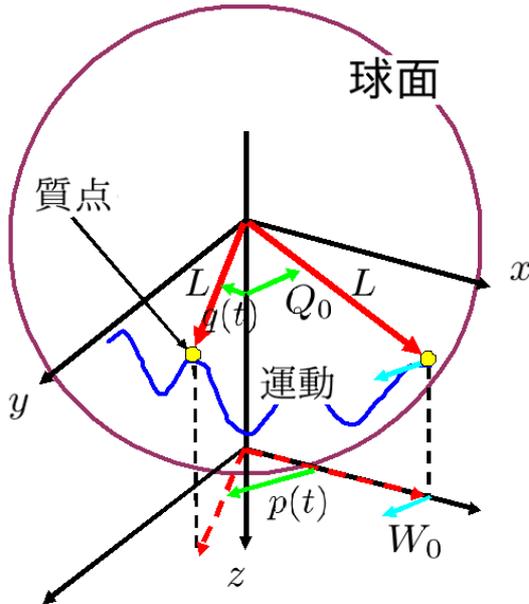


図 2.3.33: 球面振り子の運動 (極座標)

```
kill(all);
assume(Q[0]>0,DQ>0,G>0,L>0,W[0]>0);
assume(sin(Q[0])>0 and sin(Q[0])<1);
assume(cos(Q[0])>0 and cos(Q[0])<1);
assume(1>P[0] and P[0]>0);
X:L*sin(q(t))*cos(p(t));
Y:L*sin(q(t))*sin(p(t));
Z:L*cos(q(t));
XYZ:matrix([X],[Y],[Z]);
VXYZ:diff(XYZ,t,1);
TT:1/2*M*trigsimp(transpose(VXYZ).VXYZ);
UU:M*G*L*(1-cos(q(t)));
E:TT+UU;
EQ10:diff(diff(TT,diff(p(t),t,1)),t,1)
-diff(TT,p(t),1)+diff(U,p(t),1)=0;
EQ20:diff(diff(TT,diff(q(t),t,1)),t,1)
-diff(TT,q(t),1)+diff(UU,q(t),1)=0;
```

このときの質点の $x-y-z$ 座標は下記となる。

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(p(t)) \sin(q(t)) L \\ \sin(p(t)) \sin(q(t)) L \\ \cos(q(t)) L \end{pmatrix}$$

上式を時間で微分して、質点の速度は、

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \cos(p(t)) \cos(q(t)) \left(\frac{d}{dt} q(t)\right) L - \sin(p(t)) \left(\frac{d}{dt} p(t)\right) \sin(q(t)) L \\ \sin(p(t)) \cos(q(t)) \left(\frac{d}{dt} q(t)\right) L + \cos(p(t)) \left(\frac{d}{dt} p(t)\right) \sin(q(t)) L \\ -\sin(q(t)) \left(\frac{d}{dt} q(t)\right) L \end{pmatrix}$$

総運動エネルギー： T 、総ポテンシャル： U を求めると、

$$T = M \vec{v} \cdot \vec{v} \\ = \frac{\left(\left(\frac{d}{dt} q(t)\right)^2 + \left(\frac{d}{dt} p(t)\right)^2 \sin^2(q(t))\right) L^2 M}{2}$$

$$U = (1 - \cos(q(t))) G L M$$

総エネルギーは下記となる。

$$T + U = \frac{\left(\left(\frac{d}{dt} q(t)\right)^2 + \left(\frac{d}{dt} p(t)\right)^2 \sin^2(q(t))\right) L^2 M}{2} \\ + (1 - \cos(q(t))) G L M \quad (2.3.23)$$

「2.1.7Lagrange の運動方程式」(12 ページ) (2.1.18) 式に上式を代入し、下記の運動方程式を得る。

$$2 \left(\frac{d}{dt} p(t)\right) \cos(q(t)) \sin(q(t)) \left(\frac{d}{dt} q(t)\right) L^2 M \\ + \left(\frac{d^2}{dt^2} p(t)\right) \sin^2(q(t)) L^2 M = 0 \quad (2.3.24)$$

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} q(t)\right) L^2 M \\ - \left(\frac{d}{dt} p(t)\right)^2 \cos(q(t)) \sin(q(t)) L^2 M \\ + \sin(q(t)) G L M = 0 \quad (2.3.25)$$

```
ode2(EQ10,p(t),t);
EQ11:diff(%,t,1);
EQ101:subst([%k1=W[0]*sin(Q[0])^2],%);
subst(rhs(EQ101),lhs(EQ101),EQ20);
EQ201:expand(solve(%,diff(q(t),t,2))[1]);
```

(2.3.24) 式を $ode2$ 関数を用いて解き時間微分すると、面積速度一定であることを示す式を得る。これに初期条件を加味すると下記の式を得る。

$$p(t) = \%k1 \int \frac{1}{\sin^2(q(t))} dt + \%k2 \\ \frac{d}{dt} p(t) = \frac{\%k1}{\sin^2(q(t))} \\ \frac{d}{dt} p(t) = \frac{W_0 \sin(Q_0)^2}{\sin^2(q(t))} \quad (2.3.26)$$

これを (2.3.25) 式に代入すると、 $q(t)$ のみの下式となる。

$$\frac{d^2}{dt^2} q(t) = \frac{W_0^2 \sin(Q_0)^4 \cos(q(t))}{\sin^3(q(t))} - \frac{\sin(q(t)) G}{L} \quad (2.3.27)$$

(1) 振り子の振動上下幅と周期

次に、振り子の振動上下幅や周期について調べる。

```

/* 振動上下幅と周期 */
EQTE:TE=subst([EQ101],E);
TE0:subst([diff(q(t),t,1)=0,q(t)=Q[0]],
EQTE);
rhs(EQTE)=rhs(TE0);
EQTE1:expand(solve(%,diff(q(t),t,1)^2
[1]));
EQTR:cos(q(t))=qd(t);
diff(EQTR,t,1);
EQTRD:solve(%,diff(q(t),t,1))[1];
P01:P[0]=cos(Q[0]);
P02:rhs(P01)=lhs(P01);
subst([EQTRD],EQTE1);
subst([sin(q(t))^2=1-cos(q(t))^2],%);
subst([EQTR],%);
expand(solve(%,diff(qd(t),t,1)^2)[1]);
subst([sin(Q[0])^4=(1-cos(Q[0])^2)^2,
sin(Q[0])^2=1-cos(Q[0])^2],%);
EQTE2:expand(partfrac(subst([P02],%,
qd(t))));

```

球面振り子の運動エネルギーと位置エネルギー（ポテンシャル）の総和： $T+U$ は (2.3.23) 式で得られる。これに (2.3.26) 式を代入して、整理すると

$$T+U = \frac{\left(\left(\frac{d}{dt} q(t) \right)^2 + \frac{W_0^2 \sin(Q_0)^4}{\sin(q(t))^2} \right) L^2 M}{2} + (1 - \cos(q(t))) G L M$$

上式に初期条件を加味すると、

$$\begin{aligned} & \frac{\left(\left(\frac{d}{dt} q(t) \right)^2 + \frac{W_0^2 \sin(Q_0)^4}{\sin(q(t))^2} \right) L^2 M}{2} \\ & + (1 - \cos(q(t))) G L M \\ & = \frac{W_0^2 \sin(Q_0)^2 L^2 M}{2} + (1 - \cos(Q_0)) G L M \end{aligned}$$

上式を整理し、

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} q(t) \right)^2 &= \frac{2 \cos(q(t)) G}{L} - \frac{2 \cos(Q_0) G}{L} \\ &\quad - \frac{W_0^2 \sin(Q_0)^4}{\sin(q(t))^2} + W_0^2 \sin(Q_0)^2 \end{aligned}$$

振り子はこの関係式上で、右辺が正の範囲で運動する。左辺の $\left(\frac{d}{dt} q(t) \right)^2$ が零の 때가振動の上限と下限の条件である。次に下記のように置き換えて解く。

$$\cos(q(t)) = qd(t)$$

上式から、

$$\frac{d}{dt} q(t) = -\frac{\frac{d}{dt} qd(t)}{\sin(q(t))}, \quad P_0 = \cos(Q_0)$$

上式に代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{\left(\frac{d}{dt} qd(t) \right)^2}{\sin(q(t))^2} &= \frac{2 \cos(q(t)) G}{L} - \frac{2 \cos(Q_0) G}{L} \\ &\quad - \frac{W_0^2 \sin(Q_0)^4}{\sin(q(t))^2} + W_0^2 \sin(Q_0)^2 \end{aligned}$$

上式を整理して、

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} qd(t) \right)^2 &= -\frac{2 qd(t)^3 G}{L} + \frac{2 P_0 qd(t)^2 G}{L} \\ &\quad + \frac{2 qd(t) G}{L} - \frac{2 P_0 G}{L} \\ &\quad + P_0^2 W_0^2 qd(t)^2 - W_0^2 qd(t)^2 \\ &\quad - P_0^4 W_0^2 + P_0^2 W_0^2 \end{aligned} \quad (2.3.28)$$

```

ANSTE:solve(rhs(EQTE2)=0,qd(t));
Q11:Q10=rhs(expand(ANSTE[1]));
Q21:Q20=rhs(ANSTE[3]);
Q31:Q30=rhs(expand(ANSTE[2]));
C3:coeff(expand(rhs(EQTE2)),qd(t),3);
depends(Q,[t]);
FF0:C3*(Q-Q10)*(Q-Q20)*(Q-Q30);
assume(G>0,L>0,(Q20-Q10)>0,(Q30-Q10)>0,
(Q30-Q20)>0,(Q-Q10)>0);
QFF1:(diff(Q,t,1))^2=FF0;
QFF2:diff(Q,t,1)=sqrt(FF0);
DTFF0:denom(rhs(QFF2))/num(rhs(QFF2));
TFF0:t=integrate(DTFF0,Q);
TW:T[W]=2*integrate(DTFF0,Q,Q20,Q30);

```

$qd(t)$ の三次式となり、右辺： $f(qd(t))$ を零としたときの根を小さい順に Q_1, Q_2, Q_3 とすると、それぞれ下記で得られ、関係は下図のようになる。

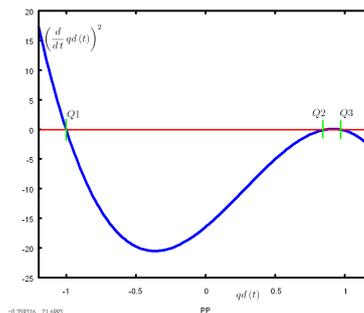


図 2.3.34: $\left(\frac{d}{dt} qd(t) \right)^2$ の特性

根 : $Q1, Q2, Q3$ は下記となる。

$$Q1 = -\frac{\sqrt{P_0^4 W_0^4 L^2 - 2 P_0^2 W_0^4 L^2 + W_0^4 L^2 + 8 P_0^3 W_0^2 G L - 8 P_0 W_0^2 G L + 16 G^2}}{4 G} + \frac{P_0^2 W_0^2 L}{4 G} - \frac{W_0^2 L}{4 G} \quad (2.3.29)$$

$$Q2 = P_0 \quad (2.3.30)$$

$$Q3 = \frac{\sqrt{P_0^4 W_0^4 L^2 - 2 P_0^2 W_0^4 L^2 + W_0^4 L^2 + 8 P_0^3 W_0^2 G L - 8 P_0 W_0^2 G L + 16 G^2}}{4 G} + \frac{P_0^2 W_0^2 L}{4 G} - \frac{W_0^2 L}{4 G} \quad (2.3.31)$$

$\left(\frac{d}{dt} qd(t)\right)^2 > 0$ であるから、特性曲線が正の範囲 : $Q2 \sim Q3$ で上下振動する。

ここで、 $Q10 = Q1, Q20 = Q2, Q30 = Q3$ とすると、(2.3.28) 式は下記のように表現できる。

$$f(Q) = -\frac{2 G (Q - Q10) (Q - Q20) (Q - Q30)}{L}$$

$$\left(\frac{d}{dt} Q\right)^2 = f(Q)$$

$$\frac{d}{dt} Q = \sqrt{f(Q)}$$

$$t = \int \frac{1}{\sqrt{f(Q)}} dQ$$

上記の関係から Q が動く範囲 : $Q20 \sim Q30$ で積分し、2倍すると周期 : T_W が得られる。

$$T_W = \frac{\sqrt{2} \sqrt{L} \int_{Q20}^{Q30} \frac{1}{\sqrt{Q-Q10} \sqrt{-(Q-Q20)} (Q-Q30)} dQ}{\sqrt{G}}$$

```

assume(P>0);
assume(sin(P)<=1 and sin(P)>0);
QTR:Q=Q30+(Q20-Q30)*sin(P)^2;
QTR1:solve(QTR,P)[2];
changevar(TW,lhs(QTR1)-rhs(QTR1),P,Q);
expand(subst([sqrt(1-sin(P))=cos(P)/
sqrt(sin(P)+1)],%));
EQCH1:subst([sin(P)^2*Q20=-sin(P)^2*
(Q30-Q20)+sin(P)^2*Q30],%);
MM:(Q30-Q20)/(Q30-Q10)=M;
MM1:MM*(Q30-Q10);
TW0:factor((subst([MM1],EQCH1)));
MMM1:(Q30-Q20)/(Q30-Q10);
KK1:elliptic_kc(MMM1);
TW01:T[W]=sqrt((8*L)/(G*(Q30-Q10)))*KK1;
TW02:subst([Q11,Q21,Q31,P01],%);
TW03:subst([W[0]=WW],rhs(%));

```

下記の関係式で、変数 : Q から変数 : P へ変数変換する。

$$Q = Q30 + \sin(P)^2 (Q20 - Q30)$$

上記は P について、2個の解を持つので、下記に特定する。

$$P = a \sin\left(\frac{\sqrt{Q30 - Q}}{\sqrt{Q30 - Q20}}\right)$$

Maxima の積分の変数変換関数 : `changevar` を使用して積分変数変換を行う。積分範囲が $Q20 \sim Q30$ から $0 \sim \pi/2$ になり、下記が得られる。

$$T_W = \frac{4 \sqrt{L} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{-\sin(P)^2 Q30 + Q30 + \sin(P)^2 Q20 - Q10}} dP}{\sqrt{2} \sqrt{G}}$$

下記の変換を行うと周期は下記の第一種完全楕円積分を使って得られる。

$$M = \frac{Q30 - Q20}{Q30 - Q10}$$

$$T_W = \frac{4 \sqrt{L} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - M \sin(P)^2}} dP}{\sqrt{2} \sqrt{G} \sqrt{Q30 - Q10}} \quad (2.3.32)$$

ここで、Maxima では第一種完全楕円積分の関数 : `elliptic_kc(m)` があり、容易に計算できる。

$$\text{elliptic_kc}(m) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - m \sin(x)^2}} dx$$

第一種完全楕円積分の関数 : `elliptic_kc(m)` を使って T_W は、

$$T_W = \frac{2^{\frac{3}{2}} \sqrt{L} \text{elliptic_kc}\left(\frac{Q30 - Q20}{Q30 - Q10}\right)}{\sqrt{G} \sqrt{Q30 - Q10}} \quad (2.3.33)$$

```

/* 級数表示 */
TWEX0:1/sqrt(1-M*sin(P)^2);
taylor(TWEX0,M,0,4);
expand(integrate(%,P,0,%pi/2));
TWEX1:T[W]=sqrt((8*L)/(G*(Q30-Q10)))*%;
TWEX11:subst([rhs(MM)=lhs(MM)],%);
TWEX5:subst([M^4=0,M^3=0],TWEX1);
TWEX51:subst([rhs(MM)=lhs(MM)],%);
TWEX2:subst([M^4=0,M^3=0,M^2=0],TWEX1);
TWEX21:subst([rhs(MM)=lhs(MM)],%);
TWEX3:subst([M=0],TWEX1);
TWEX31:subst([Q11,Q21,Q31,P01,W[0]=0],%);

```

次に、上式の簡易式を導く。

$M \ll 1$ であることから、第一種完全楕円積分の被積分関数を下記のように級数展開し、

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\sqrt{1 - M \sin(P)^2}} \\
 &= 1 + \frac{\sin(P)^2 M}{2} + \frac{3 \sin(P)^4 M^2}{8} + \frac{5 \sin(P)^6 M^3}{16} \\
 & \quad + \frac{35 \sin(P)^8 M^4}{128} + \dots
 \end{aligned}$$

上式の M の高次の項を省略し、(2.3.32) 式に代入し、積分して周期を求めると下記となる。4 次の項までとると、

$$\begin{aligned}
 T_W &= \frac{2^{\frac{3}{2}} \sqrt{L} \left(\frac{1225 \pi M^4}{32768} + \frac{25 \pi M^3}{512} + \frac{9 \pi M^2}{128} + \frac{\pi M}{8} + \frac{\pi}{2} \right)}{\sqrt{G} \sqrt{Q30 - Q10}} \\
 &= \frac{2^{\frac{3}{2}} \sqrt{L} \left(\frac{1225 \pi (Q30 - Q20)^4}{32768 (Q30 - Q10)^4} + \frac{25 \pi (Q30 - Q20)^3}{512 (Q30 - Q10)^3} + \frac{9 \pi (Q30 - Q20)^2}{128 (Q30 - Q10)^2} + \frac{\pi (Q30 - Q20)}{8 (Q30 - Q10)} + \frac{\pi}{2} \right)}{\sqrt{G} \sqrt{Q30 - Q10}} \quad (2.3.34)
 \end{aligned}$$

2 次の項までとると、

$$\begin{aligned}
 T_W &= \frac{2^{\frac{3}{2}} \sqrt{L} \left(\frac{9 \pi M^2}{128} + \frac{\pi M}{8} + \frac{\pi}{2} \right)}{\sqrt{G} \sqrt{Q30 - Q10}} \\
 &= \frac{2^{\frac{3}{2}} \sqrt{L} \left(\frac{9 \pi (Q30 - Q20)^2}{128 (Q30 - Q10)^2} + \frac{\pi (Q30 - Q20)}{8 (Q30 - Q10)} + \frac{\pi}{2} \right)}{\sqrt{G} \sqrt{Q30 - Q10}} \quad (2.3.35)
 \end{aligned}$$

1 次の項までとると、

$$T_W = \frac{2^{\frac{3}{2}} \sqrt{L} \left(\frac{\pi M}{8} + \frac{\pi}{2} \right)}{\sqrt{G} \sqrt{Q30 - Q10}} = \frac{2^{\frac{3}{2}} \sqrt{L} \left(\frac{\pi (Q30 - Q20)}{8 (Q30 - Q10)} + \frac{\pi}{2} \right)}{\sqrt{G} \sqrt{Q30 - Q10}} \quad (2.3.36)$$

(2) 定常旋回近傍における線型化

上記の運動方程式：(2.3.27) 式は解析的に解くことができない。そこで、定常的に旋回する z 軸との角度： $q(t)$ の変動が小さい場合で、質点が球の側面を旋回している場合について検討する。線型化に当たっては、定常旋回している角度： Q_M と旋回角速度： W_M を中心に、それから、少しずれた運動について検討する。

```

/* 線形化 */
QMD1:q(t)=Q[M]+q1(t);
PMD1:p(t)=W[M]*t+p1(t);
SINCD:sin(Q[M]+q1(t));
COSCD:cos(Q[M]+q1(t));
subst([q1(t)=d],SINCD);
taylor(%,d,0,3);
SINCD1:SINCD=subst([d^2=0,d^3=0,d=q1(t)],%);
subst([q1(t)=d],COSCD);
taylor(%,d,0,3);
COSCD1:COSCD=subst([d^2=0,d^3=0,d=q1(t)],%);
W[M]^2*cos(Q[M])*sin(Q[M])*L=G*sin(Q[M]);
BC1:solve(%,W[M])[2];
BC11:W[0]=rhs(%) + w;
Q21L:P[0]=cos(Q[M]+\delta);
Q30=cos(Q[M]-\delta);
Q32:subst([Q31],lhs(%) - rhs(%) = 0);
subst([BC11,Q21L],%);
taylor(lhs(%),w,0,2);
taylor(lhs(%),\delta,0,2);
subst([w^2=0,\delta^2=0],%) = 0;
DW1:factor(solve(%,w)[1]);
DW1N:num(rhs(DW1));
DW1D:denom(rhs(DW1));
subst([\delta=0],DW1D);
DW2:w=DW1N/%;
BC2:subst([DW2],BC11);
Q41:Q[0]=Q[M]+\delta;

```

(2.3.31) 式から、

$$-\cos(Q_M - \delta) + \frac{\sqrt{P_0^4 W_0^4 L^2 - 2 P_0^2 W_0^4 L^2 + W_0^4 L^2 + 8 P_0^3 W_0^2 G L - 8 P_0 W_0^2 G L + 16 G^2}}{4 G} + \frac{P_0^2 W_0^2 L}{4 G} - \frac{W_0^2 L}{4 G} = 0$$

上式に (2.3.40) 式、(2.3.41) 式を代入し、 w が小さいとして、高次の微小項を省略すると、

$$w = -\frac{2 \delta \sqrt{G} \sqrt{\cos(Q_M)} \left(3 \cos(Q_M)^2 + 1\right)^2 \sin(Q_M)}{\sqrt{L} \left(-9 \cos(Q_M)^6 + 3 \cos(Q_M)^4 + 5 \cos(Q_M)^2 + 1\right)}$$

```

Q42:solve(%,Q[M])[1];
subst([Q21L,BC2,Q42],Q32);
taylor(lhs(%),\delta,0,2)=0;

```

$q(t), p(t)$ の微小項： $q_1(t), p_1(t)$ として、下記のように表す。

$$q(t) = Q_M + q_1(t) \quad (2.3.37)$$

$$p(t) = t W_M + p_1(t) \quad (2.3.38)$$

また、左辺は右辺のように近似できる。

$$\sin(Q_M + q_1(t)) = \sin(Q_M) + q_1(t) \cos(Q_M)$$

$$\cos(Q_M + q_1(t)) = \cos(Q_M) - q_1(t) \sin(Q_M)$$

定常旋回している場合、角度： Q_M と旋回角速度： W_M とすると、遠心力成分は $M L W_M^2 \cos(Q_M)$ 、重力成分は $M G$ で、 q 方向の力の平衡条件から、下記の関係式を得る。

$$L W_M^2 \cos(Q_M) \sin(Q_M) = G \sin(Q_M) \quad (2.3.39)$$

定常旋回角速度： W_M を求めると、

$$W_M = \frac{\sqrt{G}}{\sqrt{L} \sqrt{\cos(Q_M)}}$$

初期旋回角速度： W_0 を上記の W_M と微小量： w で表す。

$$W_0 = \frac{\sqrt{G}}{\sqrt{L} \sqrt{\cos(Q_M)}} + w \quad (2.3.40)$$

初期角度： Q_0 を上記の Q_M と微小量： δ で表す。

$$Q_0 = Q_M + \delta \quad (2.3.41)$$

(2.3.30) 式から、

$$P_0 = \cos(Q_M + \delta) \quad (2.3.42)$$

振動の下限は、

$$Q_3 = \cos(Q_M - \delta)$$

(2.3.40) 式から、

$$W_0 = \frac{\sqrt{G}}{\sqrt{L} \sqrt{\cos(Q_M)}} - \frac{2\delta \sqrt{G} \sqrt{\cos(Q_M)} \left(3 \cos(Q_M)^2 + 1\right)^2 \sin(Q_M)}{\sqrt{L} \left(-9 \cos(Q_M)^6 + 3 \cos(Q_M)^4 + 5 \cos(Q_M)^2 + 1\right)} \quad (2.3.43)$$

```
subst([QMD1,PMD1],EQ10);
ev(%,diff);
expand(%);
subst(['diff(p1(t),t,1)=0],%);
expand(%/sin(Q[M]+q1(t)));
subst([SINCD1,COSCD1],%);
expand(%);
subst(['diff(Q[M],t,1)=0],%);
EQL10:lhs(%) - first(lhs(%)) - last(lhs(%)) =
rhs(%) ;
```

```
subst([QMD1,PMD1],EQ20);
ev(%,diff);
subst([SINCD1,COSCD1],%);
expand(%);
subst(['diff(Q[M],t,2)=0],%);
EQL20:subst([q1(t)^2=0,'diff(p1(t),t,1)^2=0,
'diff(p1(t),t,1)^2=0,2*q1(t)*('diff(p1(t),t,1))
*L^2*M*W[M]*sin(Q[M])^2=0,2*q1(t)*('diff(p1(t),t,1))
*W[M]*cos(Q[M])^2*L^2*M=0],%);
```

(2.3.26) 式、(2.3.27) 式に (2.3.37) 式、(2.3.38) 式、(2.3.42) 式、(2.3.43) 式を代入し、 δ が十分小さいとして、高次の微小項を省略すると、次式の線型方程式が得られる。

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} p_1(t)\right) L^2 M \sin(Q_M) + 2 \left(\frac{d}{dt} q_1(t)\right) L^2 M W_M \cos(Q_M) = 0 \quad (2.3.44)$$

$$q_1(t) L^2 M W_M^2 \sin(Q_M)^2 - L^2 M W_M^2 \cos(Q_M) \sin(Q_M) - 2 \left(\frac{d}{dt} p_1(t)\right) L^2 M W_M \cos(Q_M) \sin(Q_M) + G L M \sin(Q_M) - q_1(t) L^2 M W_M^2 \cos(Q_M)^2 + q_1(t) G L M \cos(Q_M) + \left(\frac{d^2}{dt^2} q_1(t)\right) L^2 M = 0 \quad (2.3.45)$$

```
atvalue(p1(t),t=0,0);
atvalue(diff(p1(t),t,1),t=0,w);
atvalue(q1(t),t=0,\delta);
atvalue(diff(q1(t),t,1),t=0,0);
assume(cos(Q[M])>0);
assume(sin(Q[M])>0);
assume(G>0);
assume(W[0]>0);
assume(cos(Q[M])*(G*sin(Q[M])^2+4*W[0]^2
*L*cos(Q[M])^3)>0);
ANSL12:desolve([EQL10,EQL20],[p1(t),
q1(t)]);
subst([ANSL12[1]],PMD1);
subst([BC1,DW2],%);
LP1:expand(factor(rhs(%)));
LP11:factor(coeff(LP1,t,1));
factor(LP1-LP11*t);
trigsimp(%) ;
```

```
LP12:factor(%) ;
LP13:trigsimp(factor(LP11));
ANSLP1:p(t)=LP13*t+LP12;
diff(rhs(ANSLP1),t,1);
subst(['diff(Q[M],t,1)=0,t=0],%);
%-rhs(BC2);
trigsimp(%) ;
subst([ANSL12[2]],QMD1);
subst([BC1,DW2],%);
LQ11:expand(rhs(%));
LQ111:trigsimp(coeff(LQ11,\delta,1));
LQ113:trigsimp(coeff(LQ11,\delta,0));
ANSLQ1:q(t)=LQ111*\delta+LQ113;
subst([t=0],ANSLQ1);
trigsimp(%) ;
(t*sqrt(3*G*cos(Q[M])^2+G))/(sqrt(L)*
sqrt(cos(Q[M])))=2*%pi;
subst([t=T[W]],%);
TWL11:factor(solve(%,T[W]))[1];
```

上式を desolve 関数で解き、 $p_1(t)$ 、 $q_1(t)$ の解を (2.3.37) 式、(2.3.38) 式に代入し、整理すると下記となり、線型解が得られた。

$$p(t) = \frac{2\delta \cos(Q_M) \left(3 \cos(Q_M)^2 + 1\right) \sin\left(\frac{t\sqrt{G}\sqrt{3\cos(Q_M)^2+1}}{\sqrt{L}\sqrt{\cos(Q_M)}}\right)}{\sin(Q_M) \sqrt{4 - 3 \sin(Q_M)^2} \left(3 \sin(Q_M)^2 - 4\right)} + \frac{t\sqrt{G}}{\sqrt{L}\sqrt{\cos(Q_M)}} \quad (2.3.46)$$

$$q(t) = \frac{\delta \left(3 \cos(Q_M)^4 - 2 \cos(Q_M)^2 - 1\right) \cos\left(\frac{t\sqrt{3G\cos(Q_M)^2+G}}{\sqrt{L}\sqrt{\cos(Q_M)}}\right)}{3 \sin(Q_M)^4 - 4 \sin(Q_M)^2} + Q_M \quad (2.3.47)$$

上式から周期は、

$$T_W = \frac{2\pi\sqrt{L}\sqrt{\cos(Q_M)}}{\sqrt{G}\sqrt{3\cos(Q_M)^2+1}} \quad (2.3.48)$$

(2.4) 線形近似と数値計算結果との比較

周期: T_W の厳密解、その級数近似解と線形近似結果の比較を行う。

```

/* TW 比較 */
QMO:Q[0]=Q[M]+\delta;
PO11:subst([QMO],P01);
Q110:subst([BC2,P011],Q11);
lhs(%)=taylor(rhs(%),\delta,0,3);
Q111:subst([\delta^2=0,\delta^3=0],%);
Q210:subst([P011],Q21);
lhs(%)=taylor(rhs(%),\delta,0,3);
Q211:subst([\delta^2=0,\delta^3=0],%);
Q310:subst([BC2,P011],Q31);
lhs(%)=taylor(rhs(%),\delta,0,3);
Q311:subst([\delta^2=0,\delta^3=0],%);
subst([Q11,Q21,Q31],TWEX11);
TWEX12:subst([BC2,P[0]=cos(Q[M]+\delta)],%);
subst([Q11,Q21,Q31],TWEX51);
TWEX52:subst([BC2,P[0]=cos(Q[M]+\delta)],%);

```

```

subst([Q11,Q21,Q31],TWEX21);
TWEX22:subst([BC2,P[0]=cos(Q[M]+\delta)],%);
TWEX111:subst([BC2,Q[0]=Q[M]+\delta],TWL11);
TWEX311:subst([WW=W[0],BC2,Q[0]=Q[M]+\delta],TW03);
INS11:[Q[M]=1.0,G=9.8,L=1];
TWEX2P:subst([INS11],rhs(TWEX12));
TWEX5P:subst([INS11],rhs(TWEX52));
TWEX4P:subst([INS11],rhs(TWEX22));
TWEX1P:subst([INS11],rhs(TWEX111));
TWEX3P:subst([INS11],TWEX311);
plot2d([TWEX1P,TWEX4P,TWEX5P,TWEX2P,TWEX3P],[\delta,0,0.3],[y,1,1.15],[ylabel,"Tw"],[xlabel,"d"],[legend,"Linear","M1","M2","M4","Exact"],[style,[lines,3,1],[lines,3,2],[lines,3,3],[lines,3,4],[lines,3,5]]);

```

δ が小さいときには、周期は、当然、厳密解、級数解と線形結果は一致する。 δ が大きい時には、厳密解と4次の級数解はほぼ一致する。

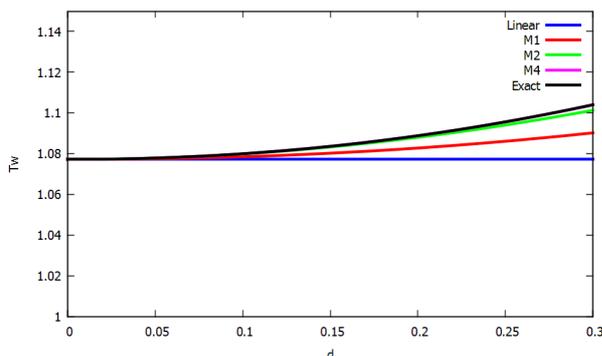


図 2.3.35: 周期: T_W の比較 ($Q_M = 1.0, L = 1$)

次に各種 Q_0, δ について、線形近似計算結果とルンゲ・クッタ法による厳密数値計算結果とを比較する。また、時系列結果には上下振幅範囲： Q_2, Q_3 を合わせて示す。

```

/* 線形近似と数値計算結果との比較 */
INS21: [BC2, Q[0]=Q[M]+\delta, Q[M]=1.0,
  \delta=0.1, G=9.8, L=1];
ANSLP11: subst([INS21], rhs(ANSLP1));
ANSLQ11: subst([INS21], rhs(ANSLQ1));
L*sin(ANSLQ11)*cos(ANSLP11);
X1: subst(INS21, %);
L*sin(ANSLQ11)*sin(ANSLP11);
Y1: subst(INS21, %);
LL: subst(INS21, L);
EQRK11: DP=(sin(Q[0])^2*W[0])/(sin(QQ)^2);
EQRK21: DDQ=cos(QQ)*sin(Q[0])^4*W[0]^2/(
  sin(QQ)^3)-(sin(QQ)*G)/L;
EQRK12: subst([INS21], EQRK11);
EQRK22: subst([INS21], EQRK21);
QQ11: subst([t=0], ANSLQ11);
sol: rk([rhs(EQRK12), rhs(EQRK22), DQ], [PP,
  DQ, QQ], [0, 0, QQ11], [t, 0, 5, 0.005]);
list11: [[sol[1][1], sol[1][4]]];
for J:2 thru 1000 do(list11:append(list11,
  [[sol[J][1], sol[J][4]]]));
subst([P01, BC2], Q21);
Q212: acos(subst([INS21], %));
subst([P01, BC2], Q31);
Q312: acos(subst([INS21], %));
plot2d([ANSLQ11, [discrete, list11],
  [discrete, [[0, rhs(Q212)], [5, rhs(Q212)]]],
  [discrete, [[0, rhs(Q312)], [5, rhs(Q312)]]]
], [t, 0, 5], [nticks, 1000], [y, 0, 1.57],
[ylabel, "p(t)"], [xlabel, "t"], [legend,
"Linear", "Exact", "Upper", "Lower"],
[style, [lines, 3, 1], [lines, 3, 2],
[lines, 3, 3], [lines, 3, 4]]);
list13: [[LL*sin(sol[1][4])*cos(sol[1][2]),
L*sin(sol[1][4])*sin(sol[1][2])]];
for J:2 thru 400 do(list13:append(list13,
  [[LL*sin(sol[J][4])*cos(sol[J][2]),
LL*sin(sol[J][4])*sin(sol[J][2])]]));
plot2d([[parametric, X1, Y1, [t, 0, 2],
[nticks, 1000]], [discrete, list13],
[x, -1, 1], [y, -1, 1], [legend, "Linear",
"Exact"], [style, [lines, 3, 1], [lines, 3, 2]
]);

```

線形近似した結果は、運動が小さいときには数値解析結果とよく一致している。振幅が大きくなると、線形近

似は数値解析結果と一致度が悪くなるが、概ね運動を表している。

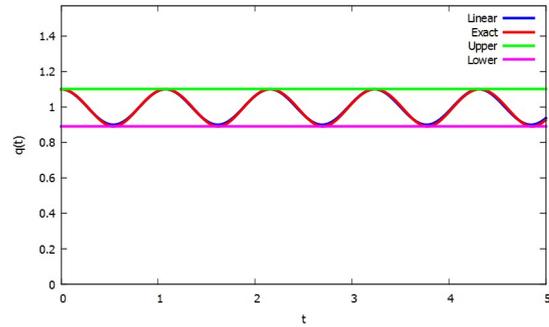


図 2.3.36: $Q_M = 1.0, \delta = 0.1, L = 1$ 時系列結果

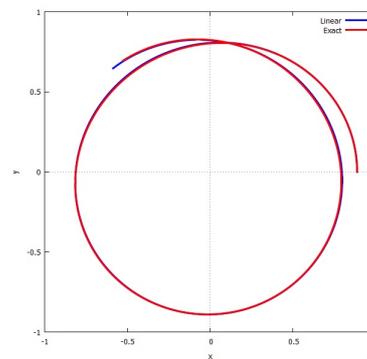


図 2.3.37: $Q_0 = 1.0, \delta = 0.1, L = 1$ $x - y$ 平面軌跡

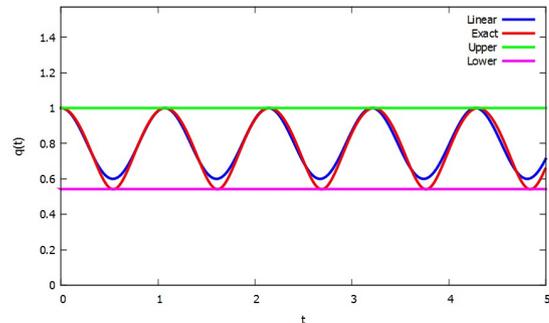
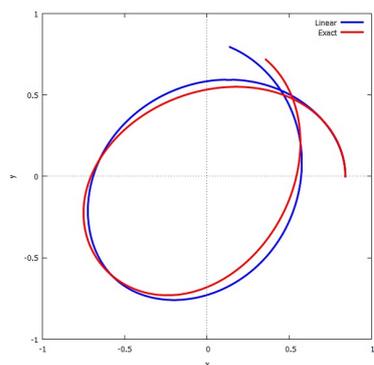
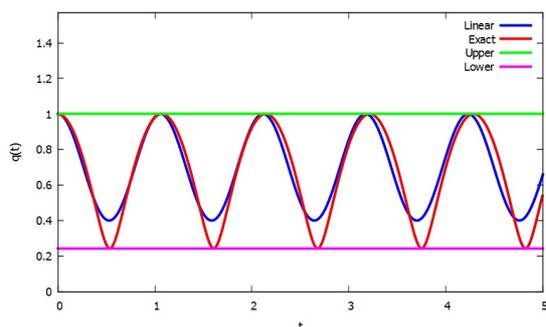
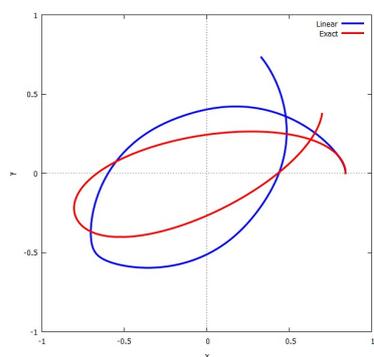


図 2.3.38: $Q_0 = 0.8, \delta = 0.2, L = 1$ 時系列結果

図 2.3.39: $Q_0 = 0.8, \delta = 0.2, L = 1$ $x - y$ 平面軌跡図 2.3.40: $Q_0 = 0.7, \delta = 0.3, L = 1$ 時系列結果図 2.3.41: $Q_0 = 0.7, \delta = 0.3, L = 1$ $x - y$ 平面軌跡

(3) 底面近傍の運動 (円柱座標系による運動表記)

球面の底面近くでは上記の線形化ではうまく表現できなかった。そこで底面近くの運動について調べる。鉛直上方向に z 軸、水平方向に x 軸、 y 軸をとり、質量： M 、長さ： L の糸の振り子の三次元の運動について調べる。円柱座標を用い、質点の原点からの距離： L 、 z 軸からの距離： $r(t)$ 、 L の $x - y$ 平面の投影と x 軸との角度： $p(t)$ 、重力加速度： G とする。このときの質点の円柱座標の関係式は下記となる。

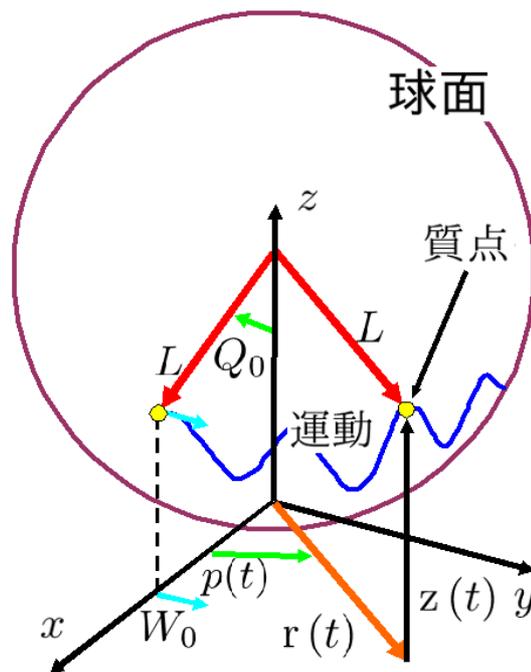


図 2.3.42: 球面振り子の運動 (円柱座標)

```
kill(all);
X:r(t)*cos(p(t));
Y:r(t)*sin(p(t));
XYZ:matrix([X],[Y],[Z]);
VXYZ:diff(XYZ,t,1);
AXYZ:diff(XYZ,t,2);
TR:matrix([cos(p(t)), sin(p(t)), 0 ],
  , [ -sin(p(t)), cos(p(t)), 0 ], [0,0,1]);
VRQP:trigsimp(TR.VXYZ);
ARQP:trigsimp(TR.AXYZ);
T0:1/2*M*trigsimp(transpose(VXYZ).VXYZ);
U0:M*G*z(t);
E:T0+U0;
L1:L^2=r(t)^2+(L-z(t))^2;
R0:solve(L1,r(t))[2];
subst([R0],T0);
T1:ev(%,diff);
U1:subst([R0],U0);
E1:T1+U1;
```

円柱座標の位置関係は下記となる。

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(t) \cos(p(t)) \\ r(t) \sin(p(t)) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

円柱座標の変換マトリックスは、

$$TR = \begin{pmatrix} \cos(p(t)) & \sin(p(t)) & 0 \\ -\sin(p(t)) & \cos(p(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

位置関係を時間微分して速度を求めると、

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \cos(p(t)) \left(\frac{d}{dt} r(t)\right) - r(t) \sin(p(t)) \left(\frac{d}{dt} p(t)\right) \\ \sin(p(t)) \left(\frac{d}{dt} r(t)\right) + r(t) \cos(p(t)) \left(\frac{d}{dt} p(t)\right) \\ \frac{d}{dt} z(t) \end{pmatrix}$$

上式に変換マトリックスを掛けて、円柱座標系の速度は、

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} r(t) \\ r(t) \left(\frac{d}{dt} p(t)\right) \\ \frac{d}{dt} z(t) \end{pmatrix}$$

上式から、総運動エネルギー： T 、総ポテンシャル： U は、

$$T = \frac{\left(\left(\frac{d}{dt} z(t)\right)^2 + \left(\frac{d}{dt} r(t)\right)^2 + r(t)^2 \left(\frac{d}{dt} p(t)\right)^2\right) M}{2} \quad (2.3.49)$$

$$U = z(t) GM \quad (2.3.50)$$

この関係式を代入して、総運動エネルギー、総エネルギーを $z(t)$ で表現すると、

$$T = \frac{\left(\frac{2\left(\frac{d}{dt} z(t)\right) L - 2z(t) \left(\frac{d}{dt} z(t)\right)^2}{4\left(2z(t) L - z(t)^2\right)} + \left(\frac{d}{dt} p(t)\right)^2 \left(2z(t) L - z(t)^2\right) + \left(\frac{d}{dt} z(t)\right)^2\right) M}{2} \quad (2.3.52)$$

$$T + U = \frac{\left(\frac{2\left(\frac{d}{dt} z(t)\right) L - 2z(t) \left(\frac{d}{dt} z(t)\right)^2}{4\left(2z(t) L - z(t)^2\right)} + \left(\frac{d}{dt} p(t)\right)^2 \left(2z(t) L - z(t)^2\right) + \left(\frac{d}{dt} z(t)\right)^2\right) M}{2} + z(t) GM \quad (2.3.53)$$

「2.1.7Lagrange の運動方程式」(12 ページ) (2.1.18) 式に (2.3.52) 式 (2.3.50) 式を代入し、下記の運動方程式を得る。

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{(2L-2z(t)) \left(2\left(\frac{d}{dt} z(t)\right) L - 2z(t) \left(\frac{d}{dt} z(t)\right)^2\right)}{4\left(2z(t) L - z(t)^2\right)^2} - \frac{\left(\frac{d}{dt} z(t)\right) \left(2\left(\frac{d}{dt} z(t)\right) L - 2z(t) \left(\frac{d}{dt} z(t)\right)\right)}{2z(t) L - z(t)^2} + \left(\frac{d}{dt} p(t)\right)^2 (2L - 2z(t)) \right) M \\ & \left(\left(-\frac{(2L-2z(t)) \left(2\left(\frac{d}{dt} z(t)\right) L - 2z(t) \left(\frac{d}{dt} z(t)\right)^2\right)}{2\left(2z(t) L - z(t)^2\right)^2} \right. \right. \\ & + \frac{(2L-2z(t)) \left(2\left(\frac{d^2}{dt^2} z(t)\right) L - 2z(t) \left(\frac{d^2}{dt^2} z(t)\right) - 2\left(\frac{d}{dt} z(t)\right)^2\right)}{2\left(2z(t) L - z(t)^2\right)} \\ & - \frac{\left(\frac{d}{dt} z(t)\right) \left(2\left(\frac{d}{dt} z(t)\right) L - 2z(t) \left(\frac{d}{dt} z(t)\right)\right)}{2z(t) L - z(t)^2} \\ & \left. \left. - \frac{\left(\frac{d}{dt} z(t)\right) \left(2\left(\frac{d}{dt} z(t)\right) L - 2z(t) \left(\frac{d}{dt} z(t)\right)\right)}{2z(t) L - z(t)^2} \right) M \right) / 2 + GM = 0 \end{aligned} \quad (2.3.54)$$

総エネルギーは下記となる。

$$T+U = z(t) GM + \frac{\left(\left(\frac{d}{dt} z(t)\right)^2 + \left(\frac{d}{dt} r(t)\right)^2 + r(t)^2 \left(\frac{d}{dt} p(t)\right)^2\right) M}{2} \quad (2.3.51)$$

$r(t), z(t)$ の関係は、

$$L^2 = (L - z(t))^2 + r(t)^2, \quad r(t) = \sqrt{2z(t) L - z(t)^2}$$

```
EQ10:diff(diff(T1,diff(z(t),t,1)),t,1)
-diff(T1,z(t),1)+diff(U1,z(t),1)=0;
EQ20:diff(diff(T1,diff(p(t),t,1)),t,1)
-diff(T1,p(t),1)+diff(U1,p(t),1)=0;
H1:rhs(R0)^2*(diff(p(t),t,1))=H;
diff(H1,t,1);
M%-EQ20;
factor(%);
DPH1:solve(H1,diff(p(t),t,1))[1];
DPH10:subst([diff(p(t),t,1)=W[0],z(t)=
Z[0]],DPH1);
HH10:solve(%,H)[1];
E11:subst([DPH1],E1);
E12:subst([diff(z(t),t,1)=0,z(t)=Z[0]],
E11);
E11=E12;
ZD2:solve(%,(diff(z(t),t,1))^2)[1];
```

$$\left(\frac{d}{dt} p(t)\right) \left(2 \left(\frac{d}{dt} z(t)\right) L - 2z(t) \left(\frac{d}{dt} z(t)\right)\right) M + \left(\frac{d^2}{dt^2} p(t)\right) \left(2z(t) L - z(t)^2\right) M = 0 \quad (2.3.55)$$

(2.3.55) 式を積分し、

$$\left(\frac{d}{dt} p(t)\right) \left(2z(t) L - z(t)^2\right) = H$$

上式は、x-y 平面の面積速度一定を表している。

$$\frac{d}{dt} p(t) = \frac{H}{2z(t) L - z(t)^2} \quad (2.3.56)$$

初期条件との関係は、

$$W_0 = \frac{H}{2Z_0 L - Z_0^2}, \quad H = 2W_0 Z_0 L - W_0 Z_0^2 \quad (2.3.57)$$

総エネルギーの (2.3.53) 式に初期条件を考慮して、

$$\frac{\left(\frac{2\left(\frac{d}{dt} z(t)\right) L - 2z(t) \left(\frac{d}{dt} z(t)\right)\right)^2}{4\left(2z(t) L - z(t)^2\right)} + \frac{H^2}{2z(t) L - z(t)^2} + \left(\frac{d}{dt} z(t)\right)^2}{2} M + z(t) G M = \frac{H^2 M}{2\left(2Z_0 L - Z_0^2\right)} + Z_0 G M$$

$\left(\frac{d}{dt} z(t)\right)^2$ の項でまとめると、 $z(t)$ の 3 次式で表現できる。

$$\left(\frac{d}{dt} z(t)\right)^2 = -\frac{(8Z_0 z(t)^2 - 8Z_0^2 z(t)) G L^2 + ((2Z_0 - 2z(t)) H^2 + (4Z_0^3 z(t) - 4Z_0 z(t)^3) G) L + (z(t)^2 - Z_0^2) H^2 + (2Z_0^2 z(t)^3 - 2Z_0^3 z(t)^2) G}{2Z_0 L^3 - Z_0^2 L^2} \quad (2.3.58)$$

```
ZD2F:diff(z(t),t,1)^2=f(z(t));
ZD2SQ:diff(z(t),t,1)=sqrt(f(z(t)));
ode2(ZD2SQ,z(t),t);
FF:expand(subst([HH10],rhs(ZD2)));
INS1:[Z[0]=0.1,W[0]=1.0,z(t)=Z,L=1,G=9.8];
FFP1:subst(INS1,FF);
plot2d(FFP1,[Z,-1,3]);
plot2d(FFP1,[Z,-0.1,0.2],[y,-1,1]);
FFZ3:factor(coeff(FF,z(t),3));
FFZ2:factor(coeff(FF,z(t),2));
FFZ1:factor(coeff(FF,z(t),1));
FFZ0:factor(coeff(FF,z(t),0));
ANSZ:solve(FF=0,z(t));
ANSZ1:expand(ANSZ);
Z1:rhs(ANSZ1[1]);
Z2:rhs(ANSZ1[3]);
Z3:rhs(ANSZ1[2]);
FF1:FFZ3*(z(t)-Z1)*(z(t)-Z2)*(z(t)-Z3);
FF2:factor((FF1-FF));
FF0:FFZ3*(Z-Z10)*(Z-Z20)*(Z-Z30);
assume(L>0,G>0,(Z20-Z10)>0,(Z30-Z10)>0,
(Z30-Z20)>0,(Z-Z10)>0,(Z-Z20)<0,(Z-Z30)
<0);
TW:T[W]=2*integrate(1/sqrt(FF0),Z,Z10,
Z20);
```

```
assume(P>0,sin(P)<1,sin(P)>0);
ZTR:Z=Z20+(Z10-Z20)*sin(P)^2;
ZTR1:solve(ZTR,P)[2];
changevar(rhs(TW),lhs(ZTR1)-rhs(ZTR1),P,
Z);
lhs(TW)=expand(subst([sqrt(1-sin(P))
=cos(P)
/sqrt(sin(P)+1)],%));
TW1:subst([sin(P)^2*Z10=-sin(P)^2*(Z20-
Z10)+sin(P)^2*Z20],%);
```

(2.3.58) 式の右辺を $f(z(t))$ と置き、

$$\left(\frac{d}{dt} z(t)\right)^2 = f(z(t)), \quad \frac{d}{dt} z(t) = \sqrt{f(z(t))} \quad (2.3.59)$$

上式を ode2 関数で解いて、

$$\int \frac{1}{\sqrt{f(z(t))}} dz(t) = t + \%c \quad (2.3.60)$$

(2.3.58) 式の三次式の根を $Z10, Z20, Z30$ とすると下記のように表現できる。図示すると下図のようになる。

$$f(Z) = \frac{2G(Z-Z10)(Z-Z20)(Z-Z30)}{L^2} \quad (2.3.61)$$

ここで、 $Z10, Z20, Z30$ は下記となる。

$$\begin{aligned}
 Z_{10} &= -\frac{\sqrt{16G^2L^2 - 16W_0^2Z_0GL^2 + 4W_0^4Z_0^2L^2 + 24W_0^2Z_0^2GL - 4W_0^4Z_0^3L - 8W_0^2Z_0^3G + W_0^4Z_0^4}}{4G} + \frac{W_0^2Z_0L}{2G} + L - \frac{W_0^2Z_0^2}{4G} \\
 Z_{20} &= Z_0 \\
 Z_{30} &= \frac{\sqrt{16G^2L^2 - 16W_0^2Z_0GL^2 + 4W_0^4Z_0^2L^2 + 24W_0^2Z_0^2GL - 4W_0^4Z_0^3L - 8W_0^2Z_0^3G + W_0^4Z_0^4}}{4G} + \frac{W_0^2Z_0L}{2G} + L - \frac{W_0^2Z_0^2}{4G}
 \end{aligned}
 \tag{2.3.62}$$

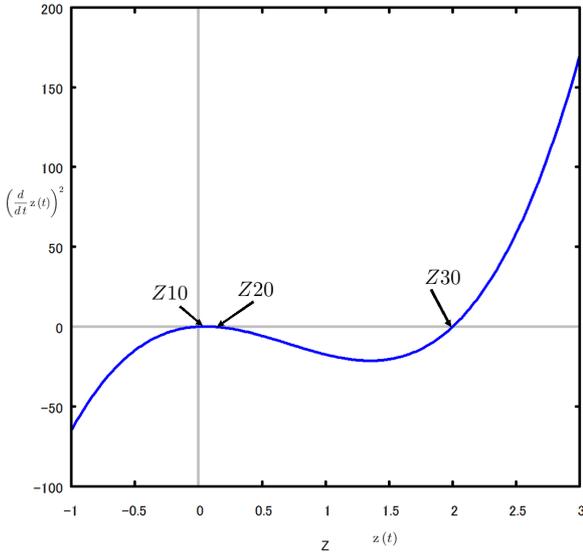


図 2.3.43: $(\frac{d}{dt}z(t))^2$

(2.3.60) 式は右肩上がりで、正の範囲で運動するので、運動は $Z_{10} \sim Z_{20}$ の範囲で動く。この振幅範囲で積分し、それを二倍して運動周期が得られる。

$$\begin{aligned}
 T_W &= 2 \int_{Z_{10}}^{Z_{20}} \frac{1}{\sqrt{f(z(t))}} dz(t) \\
 &= \frac{\sqrt{2}L}{\sqrt{G}} \int_{Z_{10}}^{Z_{20}} \frac{1}{\sqrt{Z - Z_{10}} \sqrt{Z_{20} - Z} \sqrt{Z_{30} - Z}} dZ
 \end{aligned}
 \tag{2.3.63}$$

下記の変数変換を行い、

$$Z = Z_{20} + \sin(P)^2 (Z_{10} - Z_{20})$$

$$P = \text{asin} \left(\frac{\sqrt{Z_{20} - Z}}{\sqrt{Z_{20} - Z_{10}}} \right)$$

```

assume(P>0,sin(P)<1,sin(P)>0);
ZTR:Z=Z20+(Z10-Z20)*sin(P)^2;
ZTR1:solve(ZTR,P)[2];
changevar(rhs(TW),lhs(ZTR1)-rhs(ZTR1),P,Z);
lhs(TW)=expand(subst([sqrt(1-sin(P))=cos(P)/sqrt(sin(P)+1)],%));
TW1:subst([sin(P)^2*Z10=-sin(P)^2*(Z20-Z10)+sin(P)^2*Z20],%);
MM:M=-(Z20-Z10)/(Z30-Z20);
MM1:MM*(Z30-Z20);
TW0:factor((subst([-rhs(MM1)=-lhs(MM1)],TW1)));
    
```

changevar 関数を用いて、積分の $Z \rightarrow P$ の変数変換を行う。

$$T_W = \frac{2^{\frac{3}{2}}L}{\sqrt{G}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{Z_{30} + \sin(P)^2 Z_{20} - Z_{20} - \sin(P)^2 Z_{10}}} dP$$

下記の変数: M で置き換えると、運動周期は下記の第一種完全楕円関数で表現できる。

$$M = \frac{Z_{10} - Z_{20}}{Z_{30} - Z_{20}}$$

$$T_W = \frac{2^{\frac{3}{2}}L}{\sqrt{G}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - M \sin(P)^2} \sqrt{Z_{30} - Z_{20}}} dP \tag{2.3.64}$$

```

/* 周期の近似解 */
1/sqrt(1-M*sin(P)^2);
taylor(% ,M,0,4);
expand((2^(5/2)*L*integrate(% ,P,0,%pi/2))
/(sqrt(G)*sqrt(Z30-Z20)));
subst([MM],%);
TWEX:T[W]=rest(%,-3);
TWEX0:lhs(TWEX)=rest(rhs(TWEX),-1);
TWEX1:subst([Z10=Z1,Z20=Z2,Z30=Z3,W[0]=0,
Z[0]=0],%);

```

(2.3.64) 式の被積分関数を M で Taylor 展開すると下記となる。

$$\frac{1}{\sqrt{1-M\sin(P)^2}} = 1 + \frac{\sin(P)^2 M}{2} + \frac{3\sin(P)^4 M^2}{8} + \frac{5\sin(P)^6 M^3}{16} + \frac{35\sin(P)^8 M^4}{128} + \dots$$

上式を (2.3.64) 式に代入して積分し、 M の高次項を省略すると、下記の近似式を得る。

$$T_W = \frac{2^{\frac{3}{2}} \pi L}{\sqrt{G} \sqrt{Z30 - Z20}} + \frac{\pi L (Z10 - Z20)}{\sqrt{2} \sqrt{G} (Z30 - Z20)^{\frac{3}{2}}} \quad (2.3.65)$$

(3.1) 底面近傍の運動軌跡

xyz 座標で底面近傍の質点の運動軌跡の近似式を求める。

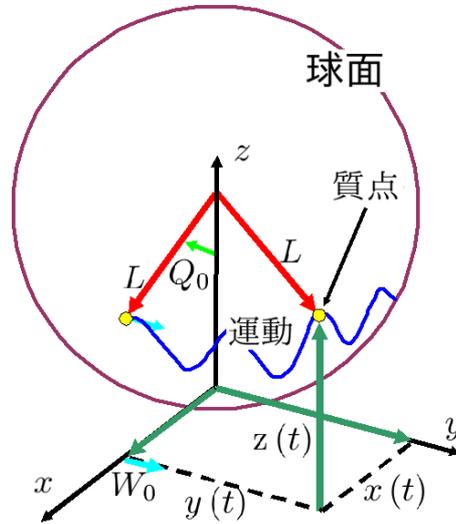


図 2.3.44: 球面振り子の運動 (xyz 座標)

```

/* 底面近傍 xyz 座標 */
TS0:1/2*M*(diff(x(t),t,1)^2+diff(y(t),t,
1)^2+diff(z(t),t,1)^2);
US0:M*G*z(t);
ES0:TS0+US0;
LS1:L^2=x(t)^2+y(t)^2+(L-z(t))^2;
ZS0:solve(LS1,z(t))[1];
subst([ZS0],TS0);
TS1:ev(% ,diff);
US1:subst([ZS0],US0);
ES1:TS1+US1;
EQS10:diff(diff(TS1,diff(x(t),t,1)),t,1)
-diff(TS1,x(t),1)+diff(US1,x(t),1)=0;
EQS20:diff(diff(TS1,diff(y(t),t,1)),t,1)
-diff(TS1,y(t),1)+diff(US1,y(t),1)=0;
expand(subst([x(t)^2=0,y(t)^2=0,x(t)^3=0,
y(t)^3=0,diff(x(t),t,1)^2=0,
diff(y(t),t,1)^2=0],expand(EQS10)));
EQS11:first(lhs(%))+last(lhs(%))=rhs(%);
expand(subst([x(t)^2=0,y(t)^2=0,x(t)^3=0,
y(t)^3=0,diff(x(t),t,1)^2=0,
diff(y(t),t,1)^2=0],expand(EQS20)));
EQS21:first(lhs(%))+last(lhs(%))=rhs(%);
atvalue(x(t),t=0,Q[2]*L);
atvalue(diff(x(t),t,1),t=0,0);
atvalue(y(t),t=0,0);
atvalue(diff(y(t),t,1),t=0,Q[1]*L*
sqrt(G/L));
ANSXY:desolve([EQS11,EQS21],[x(t),y(t)]);

```

総運動エネルギー： T 、総ポテンシャル： U は、

$$T = \frac{\left(\left(\frac{d}{dt} z(t)\right)^2 + \left(\frac{d}{dt} y(t)\right)^2 + \left(\frac{d}{dt} x(t)\right)^2\right) M}{2}, \quad U = z(t) G M$$

$z(t)$ と $x(t), y(t)$ の関係は、

$$L^2 = (L - z(t))^2 + y(t)^2 + x(t)^2, \quad z(t) = L - \sqrt{L^2 - y(t)^2 - x(t)^2}$$

上式を総運動エネルギー： T 、総ポテンシャル： U の代入し、 $x(t), y(t)$ の関数とすると、

$$T = \frac{\left(\frac{(-2y(t)\left(\frac{d}{dt} y(t)\right) - 2x(t)\left(\frac{d}{dt} x(t)\right))^2}{4(L^2 - y(t)^2 - x(t)^2)} + \left(\frac{d}{dt} y(t)\right)^2 + \left(\frac{d}{dt} x(t)\right)^2\right) M}{2}$$

$$U = G \left(L - \sqrt{L^2 - y(t)^2 - x(t)^2}\right) M$$

「2.1.7Lagrange の運動方程式」(12 ページ) (2.1.18) 式に上式を代入し、下記の運動方程式を得る。

$$\frac{x(t) G M}{\sqrt{L^2 - y(t)^2 - x(t)^2}} + \frac{\left(\frac{x(t)(-2y(t)\left(\frac{d}{dt} y(t)\right) - 2x(t)\left(\frac{d}{dt} x(t)\right))^2}{2(L^2 - y(t)^2 - x(t)^2)^2} - \frac{\left(\frac{d}{dt} x(t)\right)(-2y(t)\left(\frac{d}{dt} y(t)\right) - 2x(t)\left(\frac{d}{dt} x(t)\right))}{L^2 - y(t)^2 - x(t)^2}\right) M}{2} = 0$$

$$\frac{y(t) G M}{\sqrt{L^2 - y(t)^2 - x(t)^2}} + \frac{\left(\frac{y(t)(-2y(t)\left(\frac{d}{dt} y(t)\right) - 2x(t)\left(\frac{d}{dt} x(t)\right))^2}{2(L^2 - y(t)^2 - x(t)^2)^2} - \frac{\left(\frac{d}{dt} y(t)\right)(-2y(t)\left(\frac{d}{dt} y(t)\right) - 2x(t)\left(\frac{d}{dt} x(t)\right))}{L^2 - y(t)^2 - x(t)^2}\right) M}{2} = 0$$

$x(t), y(t)$ が底面で微少運動をしているとして、高次項を省略すると、下記の線型運動方程式を得る。

$$\frac{x(t) G M}{L} + \left(\frac{d^2}{dt^2} x(t)\right) M = 0$$

$$\frac{y(t) G M}{L} + \left(\frac{d^2}{dt^2} y(t)\right) M = 0$$

上式の運動軌跡は楕円運動であり、その長半径、短半径を各々 z 軸との角度 Q_1, Q_2 で表現すると $Q_1 L, Q_2 L$ となり、

$$\begin{aligned} x(t) &= Q_2 \cos\left(\frac{t\sqrt{G}}{\sqrt{L}}\right) L \\ y(t) &= Q_1 \sin\left(\frac{t\sqrt{G}}{\sqrt{L}}\right) L \end{aligned} \quad (2.3.66)$$

(3.2) 周期と旋回角度の近似解

楕円運動軌跡の長半径、短半径を各々 z 軸との角度 Q_1, Q_2 で表現し、その Q_1, Q_2 で周期と平均旋回角度を求める。

```
assume(Q[1]>0,Q[2]>0,Q[0]>0);
Z30=Z3;
Z31:subst([W[0]=0],%);
Q10:L-Z10=cos(Q[1])*L;
Q11:cos(Q[1]);
taylor(Q11,Q[1],0,5);
```

```
Q12:Q11=rest(%,-1);
subst([Q12],Q10);
Q13:solve(% ,Z10)[1];
Q23:Z20=subst([Q[1]=Q[2]],rhs(Q13));
TWEX2:factor(subst([Z31,Q13,Q23],TWEX));
(1/(4-Q[2]^2))^(3/2);
taylor(% ,Q[2],0,5);
rest(%,-1);
sqrt(4-Q[2]^2)=1/((2-Q[2])/(2+Q[2]));
factor(subst([],TWEX2));
expand(%);
TWEX3:factor(lhs(%)=rest(rhs(%),2));
```

Q_1, Q_2 が微少であるとする、

$$L - Z10 = \cos(Q_1) L = \left(1 - \frac{Q_1^2}{2}\right) L$$

上式および (2.3.62) 式で運動が小さいとすると、

$$Z10 = \frac{Q_1^2 L}{2}, \quad Z20 = \frac{Q_2^2 L}{2}, \quad Z30 = 2L \quad (2.3.67)$$

上式を周期の級数近似式：(2.3.65) 式に代入し、

$$T_W = \frac{\pi (5Q_2^2 - Q_1^2 - 16) \sqrt{L}}{(Q_2 - 2)(Q_2 + 2) \sqrt{4 - Q_2^2} \sqrt{G}}$$

高次項を省略すると、

$$T_W = \frac{\pi (Q_2^2 + Q_1^2 + 16) \sqrt{L}}{8\sqrt{G}} \quad (2.3.68)$$

```

/* 旋回角度の近似解 */
PD2Z:diff(p(z),z,1)=rhs(DPH1)/rhs(ZD2SQ);
PD2Z1:subst([f(z(t))=FF0,z(t)=Z,z=Z],
  PD2Z);
assume(L>0,Z>0,Z<L,Z>Z10,Z10>0,Z20>0,
  Z<Z20,Z20<Z30,Z30>0,Z<Z30,Z20<2*L);
P0:P[0]=4*integrate(rhs(PD2Z1),Z,Z10,Z20);
PD2Z2:factor(subst([Z31],PD2Z1));
PD3:1/(2*L-Z)^(3/2);
taylor(%,Z,0,3);
PD31:PD3=rest(%, -2);
PD31*(2*L-Z);
PD32:1/lhs(%)=1/rhs(%) ;
factor(subst([PD32],PD2Z2));
PD2Z2:expand(%) ;
lhs(P0)=4*'integrate(rhs(PD2Z2),Z,Z10,
  Z20);

```

```

ev(%,integrate);
P01:expand(subst([Z20^2=(Z20-Z10)^2-(-2
  *Z10*Z20+Z10^2)],%));
assume(H>0);
subst([Z[0]=Z10],E12)=subst([Z[0]=Z20],
  E12);
HH11:solve(%,H^2)[1];
HH12:subst([Q13,Q23],HH11);
DHH:denom(rhs(HH12));
NHH:expand(num(rhs(HH12)));
DHH1:rest(DHH,2);
NHH1:subst([Q[1]^4=0,Q[2]^4=0],NHH);
HH13:lhs(HH12)=NHH1/DHH1;
HH14:sqrt(HH13);
P02:subst([HH14,Q13,Q23],P01);
lhs(P02)=first(rhs(P02))/rhs(TWEX3);
PW0:subst([Q[1]^2=0,Q[2]^2=0],%);

```

(2.3.56) 式と (2.3.59) 式から、

$$\frac{d}{dz} p(z) = \frac{d}{dt} p(t) / \frac{d}{dt} z(t) = \frac{H}{\sqrt{f(z(t))} (2z(t)L - z(t)^2)}$$

(2.3.61) 式と (2.3.67) 式の $Z30 = 2L$ を代入し、

$$\frac{d}{dZ} p(Z) = -\frac{HL}{\sqrt{2}\sqrt{G}\sqrt{2L-Z}Z(Z-2L)\sqrt{Z-Z10}\sqrt{Z20-Z}}$$

上式の一部を Taylor 展開し、高次項を省略し、下記を得る。

$$\frac{1}{(2L-Z)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{L}L} + \frac{3\sqrt{2}Z}{16\sqrt{L}L^2} + \frac{15\sqrt{2}Z^2}{128\sqrt{L}L^3} + \frac{35\sqrt{2}Z^3}{512\sqrt{L}L^4} + \dots = \frac{1}{(2L-Z)^{\frac{3}{2}}} = \frac{3Z}{2^{\frac{7}{2}}L^{\frac{5}{2}}} + \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}L^{\frac{3}{2}}}$$

上式の関係から、一周期の旋回角は、積分範囲： $Z10 \sim Z20$ の積分の 4 倍で得られる。

$$P_0 = 4 \int_{Z10}^{Z20} \frac{d}{dZ} p(Z) dZ = 4 \int_{Z10}^{Z20} \frac{H}{4\sqrt{G}\sqrt{L}Z\sqrt{Z-Z10}\sqrt{Z20-Z}} + \frac{3H}{16\sqrt{G}L^{\frac{3}{2}}\sqrt{Z-Z10}\sqrt{Z20-Z}} dZ$$

上式の積分を実行し、

$$P_0 = \frac{\pi H}{\sqrt{G}\sqrt{L}\sqrt{Z10}\sqrt{Z20}} + \frac{3\pi H}{4\sqrt{G}L^{\frac{3}{2}}} \quad (2.3.69)$$

面積速度一定の (2.3.56) 式を、 $Z10, Z20$ に適用し、

$$\begin{aligned} & \frac{H^2 M}{2(2LZ10 - Z10^2)} + GMZ10 \\ &= \frac{H^2 M}{2(2LZ20 - Z20^2)} + GMZ20 \end{aligned}$$

(2.3.67) 式の関係代入し、 Q_1, Q_2 で表現し、整理すると、

$$H^2 = -\frac{\frac{Q_2^3 L (4Q_1^2 G L^3 - Q_1^4 G L^3)}{2} + \frac{Q_2^4 L^2 \left(\frac{Q_1^4 G L^2}{2} - 2Q_1^2 G L^2 \right)}{4}}{\frac{Q_2^3 L}{2} + \frac{Q_1^2 L}{2} - 2L}$$

Q_1, Q_2 が微小であるとして、高次項の微小項を省略し、

$$H = Q_1 Q_2 \sqrt{G} L^{\frac{3}{2}}$$

上式を (2.3.69) 式に代入し、

$$P_0 = \frac{3\pi Q_1 Q_2}{4} + 2\pi \quad (2.3.70)$$

旋回角速度は上式の右辺第 1 項を (2.3.68) 式の周期で割り、

$$\frac{P_0}{T_W} = \frac{6Q_1 Q_2 \sqrt{G}}{(Q_2^2 + Q_1^2 + 16)\sqrt{L}}$$

高次項の微小項を省略し、

$$\frac{P_0}{T_W} = \frac{3Q_1 Q_2 \sqrt{G}}{8\sqrt{L}} \quad (2.3.71)$$

(3.3) 線形近似と数値計算結果との比較

線形近似計算結果とルンゲ・クッタ法による数値解析結果の軌跡を比較する。

```

/* 線形近似と数値計算結果との比較 */
Z10=subst([Z[0]^2=0,Z[0]^3=0,Z[0]^4=0],
  Z1);
lhs(%)=taylor(rhs(%),Z[0],0,3);
Z12:lhs(%)=first(rhs(%));
Z22:Z20=Z[0];
subst([Z20=Z[0]],Q23);
Z23:subst([Q[2]=Q[0]],%);
Q24:Q[2]=Q[0];
subst([Q13],Z12);
solve(%,Q[1])[2];
Q14:subst([Z23],%);
XD:rhs(ANSXY[1]);
YD:rhs(ANSXY[2]);
XD1:subst([Q14,Q24],XD);
YD1:subst([Q14,Q24],YD);
XQ:XD*cos(rhs(PW0)*t)-YD*sin(rhs(PW0)*t);
YQ:XD*sin(rhs(PW0)*t)+YD*cos(rhs(PW0)*t);
XQ1:subst([Q14,Q24],XQ);
YQ1:subst([Q14,Q24],YQ);
EQRK11:DP=(W[0]*sin(Q[0])^2)/sin(QQ)^2;
EQRK21:DDQ=(W[0]^2*sin(Q[0])^4*cos(QQ))
  /sin(QQ)^3-(G*sin(QQ))/L;
INS21:[L=1,G=9.8,Q[0]=0.3,W[0]=1.0];
QQ1:Q[0];
QQ11:subst(INS21,QQ1);
subst(INS21,Q24);
EQRK12:subst(INS21,EQRK11);
EQRK22:subst(INS21,EQRK21);
X1:subst(INS21,XQ1);
Y1:subst(INS21,YQ1);
LL:1;
sol:rk([rhs(EQRK12),rhs(EQRK22),DQ],[PP,
  DQ,QQ],[0,0,QQ11],[t,0,5,0.005]);
list13:[[LL*sin(sol[1][4])*cos(sol[1][2]),
  LL*sin(sol[1][4])*sin(sol[1][2])]];
for J:2 thru 1000 do(list13:append(list13,
  [[LL*sin(sol[J][4])*cos(sol[J][2]),
  LL*sin(sol[J][4])*sin(sol[J][2])]]);
plot2d([parametric,X1,Y1,[t,0,5],
  [nticks,1000]],[discrete,list13],
  [x,-0.4,0.4],[y,-0.4,0.4]);

```

Z_{10}, Z_{20} 等を初期条件: Q_0, W_0 で表現する。(2.3.62) 式の Z_{10} で高次の微少項を削除し、Taylor 展開し、更

に高次の微少項を削除して、

$$\begin{aligned}
 Z_{10} &= -\frac{\sqrt{16G^2L^2 - 16W_0^2Z_0GL^2}}{4G} + \frac{W_0^2Z_0L}{2G} + L \\
 &= \frac{W_0^2LZ_0}{G} + \frac{W_0^4LZ_0^2}{8G^2} + \frac{W_0^6LZ_0^3}{16G^3} + \dots \\
 &= \frac{W_0^2Z_0L}{G}
 \end{aligned}$$

(2.3.67) 式から、

$$\frac{Q_1^2L}{2} = \frac{W_0^2Z_0L}{G}$$

上式を整理し、

$$Q_1 = \frac{\sqrt{2}W_0\sqrt{Z_0}}{\sqrt{G}} = \frac{Q_0W_0\sqrt{L}}{\sqrt{G}}, \quad Q_2 = Q_0 \quad (2.3.72)$$

定常旋回速度を (2.3.71) 式の $\frac{P_0}{T_W}$ 、x,y 座標を XD, YD とすると、軌跡は下記となる。

$$\begin{aligned}
 x(t) &= XD \cos\left(\frac{P_0}{T_W}t\right) - YD \sin\left(\frac{P_0}{T_W}t\right) \\
 y(t) &= XD \sin\left(\frac{P_0}{T_W}t\right) + YD \cos\left(\frac{P_0}{T_W}t\right)
 \end{aligned}$$

上式で、(2.3.66) 式の $x(t) \rightarrow XD$ に、 $y(t) \rightarrow YD$ に代入し、定常旋回速度の (2.3.71) 式を代入し、

$$\begin{aligned}
 x(t) &= Q_2 \cos\left(\frac{t\sqrt{G}}{\sqrt{L}}\right) \cos\left(\frac{3Q_1Q_2t\sqrt{G}}{8\sqrt{L}}\right) L \\
 &\quad - Q_1 \sin\left(\frac{t\sqrt{G}}{\sqrt{L}}\right) \sin\left(\frac{3Q_1Q_2t\sqrt{G}}{8\sqrt{L}}\right) L \\
 y(t) &= Q_2 \cos\left(\frac{t\sqrt{G}}{\sqrt{L}}\right) \sin\left(\frac{3Q_1Q_2t\sqrt{G}}{8\sqrt{L}}\right) L \\
 &\quad + Q_1 \sin\left(\frac{t\sqrt{G}}{\sqrt{L}}\right) \cos\left(\frac{3Q_1Q_2t\sqrt{G}}{8\sqrt{L}}\right) L
 \end{aligned}$$

(2.3.72) 式の Q_1, Q_2 を Q_0, W_0 で表現すると、

$$\begin{aligned}
 x(t) &= Q_0 \cos\left(\frac{3Q_0^2W_0t}{8}\right) \cos\left(\frac{t\sqrt{G}}{\sqrt{L}}\right) L \\
 &\quad - \frac{Q_0W_0 \sin\left(\frac{3Q_0^2W_0t}{8}\right) \sin\left(\frac{t\sqrt{G}}{\sqrt{L}}\right) L^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{G}} \\
 y(t) &= \frac{Q_0W_0 \cos\left(\frac{3Q_0^2W_0t}{8}\right) \sin\left(\frac{t\sqrt{G}}{\sqrt{L}}\right) L^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{G}} \\
 &\quad + Q_0 \sin\left(\frac{3Q_0^2W_0t}{8}\right) \cos\left(\frac{t\sqrt{G}}{\sqrt{L}}\right) L
 \end{aligned}$$

下記に線形近似計算結果と数値解析結果の軌跡の比較図を示す。線形近似計算では大枠を押さえた結果となっているため、数値解析結果と比較的よく一致している。

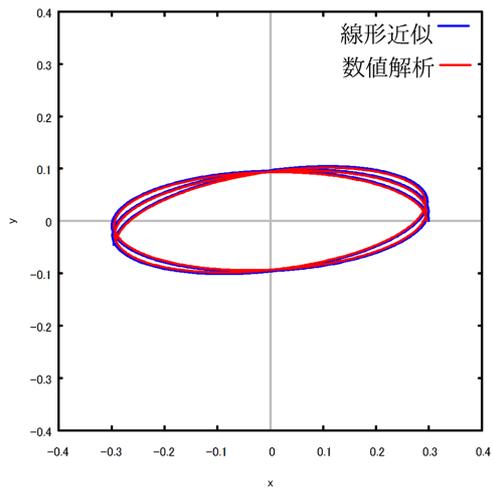


図 2.3.45: $Q_0 = 0.3, W_0 = 1.0$ $x - y$ 平面軌跡

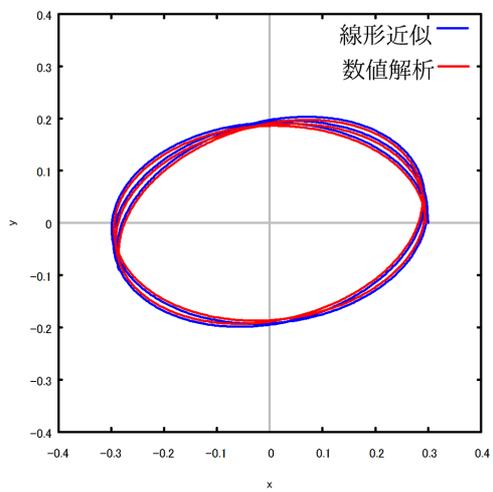


図 2.3.46: $Q_0 = 0.3, W_0 = 2.0$ $x - y$ 平面軌跡

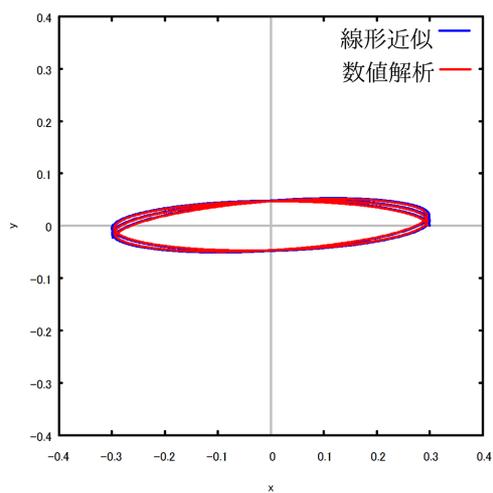


図 2.3.47: $Q_0 = 0.3, W_0 = 0.5$ $x - y$ 平面軌跡

2.4 中心力による運動

例題 2.4.1 惑星の運動

動かない中央の太陽(質量: M_0)の万有引力による惑星(質量: M)の平面運動について調べる。「2.1.2 二次元極座標における運動方程式」(8ページ)に示す極座標を用い、惑星までの距離: r 、 x 軸との角度: p 、惑星に作用する中心力を $F(r)$ とする。惑星は太陽から R_0 離れ、 y 軸方向に初期速度: $V[0]$ で移動するものとする。

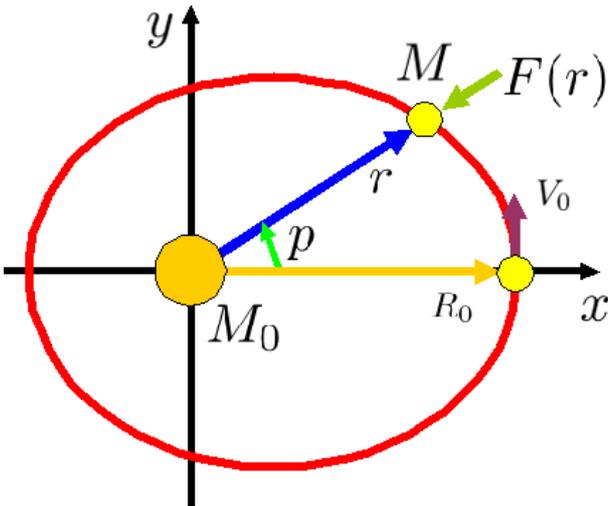


図 2.4.1: 中心力による運動 (極座標)

このときの質点の $x-y$ 座標は下記となる。

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} \cos(p) r \\ \sin(p) r \end{pmatrix}$$

上式を微分し、座標変換マトリックス: TR を掛け、極座標表示の速度: \vec{v} 、加速度: $\vec{\alpha}$ は、

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} r \\ \left(\frac{d}{dt} p\right) r \end{pmatrix} \quad (2.4.1)$$

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} \frac{d^2}{dt^2} r - \left(\frac{d}{dt} p\right)^2 r \\ 2 \left(\frac{d}{dt} p\right) \left(\frac{d}{dt} r\right) + \left(\frac{d^2}{dt^2} p\right) r \end{pmatrix}$$

r 方向の中心力: $F(r)$ とし、上記加速度の式から運動方程式は下記となる。

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} r - \left(\frac{d}{dt} p\right)^2 r\right) M = F(r) \quad (2.4.2)$$

$$\left(2 \left(\frac{d}{dt} p\right) \left(\frac{d}{dt} r\right) + \left(\frac{d^2}{dt^2} p\right) r\right) M = 0 \quad (2.4.3)$$

(2.4.3) 式を積分すると下記となり、面積速度: H が一定であることを表している。

$$\left(\frac{d}{dt} p\right) r^2 = H \quad (2.4.4)$$

(1) 有効ポテンシャル

```
kill(all);
load("vector");
depends(r,t);
depends(z,p);
depends(p,t);
assume(r>0,H>0,G>0,M[0]>0,M>0);
X:r*cos(p);
Y:r*sin(p);
XY:matrix([X],[Y]);
VXY:diff(XY,t,1);
AXY:diff(VXY,t,1);
TR:matrix([cos(p), sin(p)],[-sin(p),
cos(p)]);
VRP:trigsimp(TR.VXY);
ARP:trigsimp(TR.AXY);
EQR:M*ARP[1][1]=F(r);
EQP:M*ARP[2][1]=0;
EQR1:expand(EQR/M);
/* 面積速度 */
EQH:r^2*diff(p,t,1)=H;
r*lhs(EQP)-diff(lhs(EQH),t)*M;
factor(%);
solve(EQH,diff(p,t,1))[1];
EQHD:'diff(p,t,1)=H/r^2;
```

```
/* エネルギー */
T1:T=1/2*M*(transpose(VRP).VRP);
T2:expand(subst([EQHD],T1));
UC1:U[C]=first(rhs(T2));
FR1:F(r)=-M*M[0]*G/(r^2);
UG1:U[G]=\integrate(F(r),r,r,inf);
subst([FR1],UG1);
UG2:ev(%,integrate);
UE1:U[eff]=rhs(UC1)+rhs(UG2);
FC1:F[C]=M*r*'diff(p,t,1)^2;
FC2:subst([EQHD],%);
UC2:U[C]='integrate(rhs(FC2),r,r,inf);
ev(%,integrate);
lhs(UE1)='limit(rhs(UE1),r,inf);
ev(%,limit);
lhs(UE1)='limit(rhs(UE1),r,0);
ev(%,limit);
LI:[M[0]=1000,M=1,G=9.8,H=100];
subst([LI],rhs(UE1));
plot2d(%,[r,0.3,10],[x,0,10],[y,-10000,
10000],[ylabel,"Ueff"],
[style,[lines,3,1]]);
```

質点の運動エネルギーは(2.4.1)式の速度から得られ、(2.4.4)式の面積速度: H が一定の関係から次式となる。

$$T = \frac{\left(\left(\frac{d}{dt}r\right)^2 + \left(\frac{d}{dt}p\right)^2 r^2\right) M}{2}$$

$$= \frac{H^2 M}{2r^2} + \frac{\left(\frac{d}{dt}p\right)^2 M}{2}$$

右辺第1項は r の関数であり、

$$U_C = \frac{H^2 M}{2r^2}$$

次式の遠心力を、

$$F_C = \left(\frac{d}{dt}p\right)^2 r M = \frac{H^2 M}{r^3}$$

基準を無限遠にとって、積分を行うと、次式となり、遠心力ポテンシャルという。

$$U_C = \int_r^\infty \frac{1}{r^3} dr H^2 M = \frac{H^2 M}{2r^2}$$

質点に作用する万有引力は次式となり、

$$F(r) = -\frac{M_0 G M}{r^2}$$

基準を無限遠にとって、積分を行うと、次式となる。

$$U_G = -M_0 \int_r^\infty \frac{1}{r^2} dr G M = -\frac{M_0 G M}{r}$$

遠心力ポテンシャル: U_C と万有引力によるポテンシャル: U_G の和を有効ポテンシャルといい、次式となる。これを図示すると下図となる。

$$U_{eff} = \frac{H^2 M}{2r^2} - \frac{M_0 G M}{r} \quad (2.4.5)$$

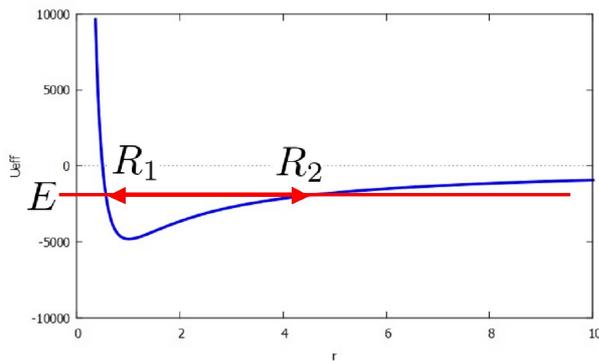


図 2.4.2: 有効ポテンシャル

U_{eff} は $r \rightarrow \infty$ で零となり、

$$U_{eff} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{H^2 M}{2r^2} - \frac{M_0 G M}{r} = 0$$

U_{eff} は $r \rightarrow 0$ で ∞ となる。

$$U_{eff} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{H^2 M}{2r^2} - \frac{M_0 G M}{r} = \infty$$

質点のエネルギー: E とすると、 $E \geq 0$ の時には、質点は無限遠に行く。また、 U_{eff} の最下点を U_{min} とすると、 $U_{min} \leq E < 0$ では R_1 と R_2 間で運動する。

(2) 軌道

```
EQZR:z=1/r;
EQRZ:solve(EQZR,r)[1];
DRT1:diff(%,t,1);
EQHD1:subst([EQRZ],EQHD);
DRT11:subst([EQHD1],DRT1);
diff(DRT11,t,1);
DRT2:subst([EQHD1],%);
subst([DRT2,EQHD1,EQRZ],EQR1);
EQR2:expand(%/z^2/H^2*(-1));
FR1:F(r)=-M*M[0]*G/(r^2);
FR2:subst([EQRZ],%);
EQR3:subst([FR2],EQR2);
ZP1:ode2(%,z,p);
```

r と p の軌道の式を得るため、変数: $z = \frac{1}{r}$ を用いて t を消去する。

$$z = \frac{1}{r} \quad (2.4.6)$$

$\frac{d}{dt}r, \frac{d}{dt}p$ を z で表現すると、

$$\frac{d}{dt}r = -\frac{\left(\frac{d}{dt}p\right)\left(\frac{d}{dp}z\right)}{z^2}, \quad \frac{d}{dt}p = z^2 H \quad (2.4.7)$$

上式から、

$$\frac{d}{dt}r = -\left(\frac{d}{dp}z\right) H \quad (2.4.8)$$

上式から $\frac{d^2}{dt^2}r$ は、

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}r &= -\left(\frac{d}{dt}p\right)\left(\frac{d^2}{dp^2}z\right) H \\ &= -z^2\left(\frac{d^2}{dp^2}z\right) H^2 \end{aligned} \quad (2.4.9)$$

(2.4.7)式と(2.4.9)式を運動方程式:(2.4.2)式に代入し、

$$-z^2\left(\frac{d^2}{dp^2}z\right) H^2 - z^3 H^2 = \frac{F\left(\frac{1}{z}\right)}{M}$$

上式を整理して、

$$\frac{d^2}{dp^2}z + z = -\frac{F\left(\frac{1}{z}\right)}{z^2 H^2 M}$$

引力の中心力は下記で得られ、 z で表現して、

$$F(r) = -\frac{M_0 G M}{r^2}, \quad F\left(\frac{1}{z}\right) = -M_0 z^2 G M \quad (2.4.10)$$

上式から、

$$\frac{d^2}{dp^2}z + z = \frac{M_0 G}{H^2}$$

上記の解は ode2 関数で得られ、

$$z = \frac{M_0 G}{H^2} + \%k1 \sin(p) + \%k2 \cos(p)$$

```

subst([z=Z[0],p=0],ZP1);
ZP11:solve(%,%k2)[1];
diff(ZP1,p,1);
subst([diff(z,p,1)=0,p=0],%);
ZP12:solve(%,%k1)[1];
subst([ZP11,ZP12],ZP1);
ZP2:factor(%);
R[0]*diff(p,t,1)=V[0];
solve(%,diff(p,t,1))[1];
subst([%,r=R[0]],EQH);
H01:solve(%,H)[1];
subst([EQZR,H01,Z[0]=1/R[0]],ZP2);
RP2:solve(%,r)[1];
RPN1:num(rhs(RP2));
RPD1:expand(denom(rhs(RP2)));
CRPD1:coeff(RPD1,cos(p),1);
CRPD0:coeff(RPD1,cos(p),0);
L1:L[0]=RPN1/CRPD0;
E1:E[0]=CRPD1/CRPD0;
RP3:r=L[0]/(1+E[0]*cos(p));

```

初期条件： $p=0$ で $z=Z_0$, $\frac{d}{dt}r=0$ である。(2.4.8) 式から $\frac{d}{dp}z=0$ となり、

$$\%k2 = \frac{Z_0 H^2 - M_0 G}{H^2}, \quad \%k1 = 0$$

上式を代入し、

$$z = \frac{\cos(p) (Z_0 H^2 - M_0 G)}{H^2} + \frac{M_0 G}{H^2}$$

また、 $H = R_0 V_0$ で、 z を r で表現すると、

$$\frac{1}{r} = \frac{-M_0 \cos(p) G + M_0 G + R_0 V_0^2 \cos(p)}{R_0^2 V_0^2}$$

上式から、

$$r = -\frac{R_0^2 V_0^2}{(M_0 \cos(p) - M_0) G - R_0 V_0^2 \cos(p)}$$

下記のように置くと、

$$L_0 = \frac{R_0^2 V_0^2}{M_0 G}, \quad E_0 = -\frac{M_0 G - R_0 V_0^2}{M_0 G} \quad (2.4.11)$$

惑星の軌跡は下記となる。

$$r = \frac{L_0}{E_0 \cos(p) + 1} \quad (2.4.12)$$

(3) 軌道の xy 座標表記

```

assume(R[1]>0,A[0]>0,V[0]>0,R[0]>0);
LC1:L[0]=E[0]*C[0];
CL1:solve(%,C[0])[1];
subst([LC1],RP3);
solve(%,E[0])[1];
RP4:lhs(%)*denom(rhs(%)=num(rhs(%));
RP5:%^2;
RXY1:r^2=x^2+y^2;
RX1:x=r*cos(p);
RX2:solve(RX1,cos(p))[1];
XY1:subst([RXY1,RX2],RP5);
/* E[0]=1 */
subst([E[0]=1],XY1);
XYE1:expand(solve(%,x)[1]);
XYE11:subst([CL1,E[0]=1],%);

```

下記の C_0 を導入する。

$$C_0 = \frac{L_0}{E_0} \quad (2.4.13)$$

(2.4.12) 式に代入し、変形して、

$$r = \frac{C_0 E_0}{E_0 \cos(p) + 1}$$

$$E_0 = -\frac{r}{\cos(p) r - C_0}$$

$$E_0 (\cos(p) r - C_0) = -r$$

両辺を二乗し、

$$E_0^2 (\cos(p) r - C_0)^2 = r^2$$

下記の関係式を上式に代入し、

$$r^2 = y^2 + x^2, \quad x = \cos(p) r$$

軌道の xy 座標表記式が得られた。

$$E_0^2 (x - C_0)^2 = y^2 + x^2 \quad (2.4.14)$$

(3.1) $E_0 = 1$ の場合

(2.4.12) 式に $E_0 = 1$ を代入すると、

$$(x - C_0)^2 = y^2 + x^2$$

整理すると、

$$x = \frac{C_0}{2} - \frac{y^2}{2C_0} = \frac{L_0}{2} - \frac{y^2}{2L_0} \quad (2.4.15)$$

軌跡は放物線となる。

(3.2) $E_0 < 1$ の場合

```

/* E[0].NE.1 */
rhs(XY1)-lhs(XY1)=0;
XYE2:partfrac(%,x);
CY2:coeff(lhs(XYE2),y,2);
CX2:coeff(lhs(XYE2),x,2);
CX1:coeff(lhs(XYE2),x,1);
CX0:-last(lhs(XYE2));
R31:R[3]=CX1/CX2/2;
XYE20:CY2/CX2*y^2+x^2+2*R[3]*x=CX0/CX2;
XYE21:XYE20+R[3]^2;
RH1:factor(subst([R31],rhs(XYE21)));
XE21:factor(lhs(XYE21)-first(lhs(XYE21)));
XYE3:first(lhs(XYE21))+XE21=RH1;
R12:R[1]^2=RH1;
XYE31:first(lhs(XYE21))/R[1]^2+XE21/
R[1]^2=1;
XYE32:y^2/R[2]^2+XE21/R[1]^2=1;
assume(E[0]>0 and E[0]<1);
assume(C[0]>0,R[1]>0,R[2]>0);
R22:R[2]^2=denom(first(lhs(XYE31)));
sqrt(R12);
R11:subst([CL1],%);
subst([R12],R22);
sqrt(%);
R21:subst([CL1],%);
S1:S=%pi*R[1]*R[2];
S2:subst([R11,R21],S1);
S3:factor(subst([L1,E1],%));
TW1:T[W]=S/(H/2);
TW2:subst([S3,H01],TW1);

```

(2.4.14) 式を展開し、左辺にまとめると、

$$y^2 + (1 - E_0^2) x^2 + 2 C_0 E_0^2 x - C_0^2 E_0^2 = 0$$

上式は $E_0 < 1$ の場合、楕円となる。楕円の径: R_1, R_2 を求める。下記の置き換えを行い、

$$R_3 = \frac{C_0 E_0^2}{1 - E_0^2}$$

下記の式の展開を行い、

$$\frac{y^2}{1 - E_0^2} + x^2 + 2 R_3 x = \frac{C_0^2 E_0^2}{1 - E_0^2}$$

$$\frac{y^2}{1 - E_0^2} + x^2 + 2 R_3 x + R_3^2 = R_3^2 + \frac{C_0^2 E_0^2}{1 - E_0^2}$$

$$\frac{y^2}{1 - E_0^2} + (x + R_3)^2 = \frac{C_0^2 E_0^2}{(E_0 - 1)^2 (E_0 + 1)^2}$$

R_1^2 を下記のように置き、両辺をこれで割ると、

$$R_1^2 = \frac{C_0^2 E_0^2}{(E_0 - 1)^2 (E_0 + 1)^2}$$

$$\frac{y^2}{(1 - E_0^2) R_1^2} + \frac{(x + R_3)^2}{R_1^2} = 1 \quad (2.4.16)$$

$E_0 < 1$ とすると、軌跡は下記となり楕円となる。

$$\frac{y^2}{R_2^2} + \frac{(x + R_3)^2}{R_1^2} = 1 \quad (2.4.17)$$

ここで楕円の径: R_1, R_2 は、

$$R_1 = \frac{L_0}{(1 - E_0)(E_0 + 1)}, \quad R_2 = \frac{\sqrt{1 - E_0^2} L_0}{(1 - E_0)(E_0 + 1)} \quad (2.4.18)$$

惑星の周回周期: T_W は、楕円面積を面積速度で割ること得られ、

$$S = \pi R_1 R_2, \quad T_W = \frac{2S}{H}$$

上式から、

$$T_W = \frac{2\pi M_0 R_0^{\frac{3}{2}} G}{(2M_0 G - R_0 V_0^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (2.4.19)$$

(3.3) $E_0 > 1$ の場合

```
forget(E[0]>0 and E[0]<1);
assume(E[0]>1);
XYE32:-y^2/R[2]^2+XE21/R[1]^2=1;
R23:R[2]^2=-denom(first(lhs(XYE31)));
subst([R12],R23);
sqrt(%);
R23:subst([CL1],%);
y=R[2]/R[1]*(x+R[3]);
subst([R23,R11,R31,CL1],%);
```

```
subst([L1,E1],%);
Y3:factor(%);
forget(E[0]>1);
```

(2.4.16) 式で $E_0 > 1$ とすると、軌跡は下記となり双曲線となる。

$$\frac{(x + R_3)^2}{R_1^2} - \frac{y^2}{R_2^2} = 1 \quad (2.4.20)$$

$$R_2 = \frac{\sqrt{E_0^2 - 1} L_0}{(E_0 - 1)(E_0 + 1)} \quad (2.4.21)$$

双曲線の漸近線は、

$$y = \frac{R_2 (x + R_3)}{R_1}$$

$$y = -\frac{\sqrt{R_0 V_0} \sqrt{R_0 V_0^2 - 2 M_0 G} (2 M_0 x G - M_0 R_0 G - R_0 V_0^2 x + R_0^2 V_0^2)}{M_0 G (2 M_0 G - R_0 V_0^2)}$$

(4) 数値解析結果との比較

(2.4.2) 式と (2.4.3) 式の運動方程式を数値解析を Runge-Kutta 法で解ける下記の形に変更する。

```
/* 数値計算 */
X1:rhs(RP2)*cos(p);
Y1:rhs(RP2)*sin(p);
INS1:[R[0]=1,G=1,M[0]=1,V[0]=1.2];
subst([INS1],X1);
X2:subst([p=t],%);
subst([INS1],Y1);
Y2:subst([p=t],%);
TW3:float(subst([INS1],rhs(TW2)));
/* 楕円軌道 */
subst([FR1],EQR);
EQR4:%/M;
EQP4:EQP/M;
depends(s,t);
depends(q,t);
EQR41:diff(r,t,1)=s;
DS1:diff(EQR41,t,1);
EQP41:diff(p,t,1)=q;
DQ1:diff(EQP41,t,1);
subst([EQR41,DS1,EQP41,DQ1],EQR4);
EQR42:expand(solve(%),diff(s,t,1))[1];
subst([EQR41,DS1,EQP41,DQ1],EQP4);
EQP42:expand(solve(%),diff(q,t,1))[1];
```

図に描くため、(2.4.12) 式の軌跡の極座標表記を xy 座標表記にすると、

$$x = r \cos(p) = -\frac{R_0^2 V_0^2 \cos(p)}{(M_0 \cos(p) - M_0) G - R_0 V_0^2 \cos(p)}$$

$$y = r \sin(p) = -\frac{R_0^2 V_0^2 \sin(p)}{(M_0 \cos(p) - M_0) G - R_0 V_0^2 \cos(p)}$$

```
EQR51:subst([INS1],rhs(EQR41));
EQR52:subst([INS1],rhs(EQR42));
EQP51:subst([INS1],rhs(EQP41));
EQP52:subst([INS1],rhs(EQP42));
V[0]/R[0];
P0:subst([INS1],%);
R0:subst([INS1],R[0]);
TW4:TW3+1;
DTW:TW4/1000;
sol:rk([EQR51,EQR52,EQP51,EQP52],[r,s,p,q],[R0,0,0,P0],[t,0,TW4,DTW]);
list11:[[sol[1][2]*cos(sol[1][4]),sol[1][2]*sin(sol[1][4])]];
for J:2 thru 1000 do(list11:append(list11,[[sol[J][2]*cos(sol[J][4]),sol[J][2]*sin(sol[J][4])]]));
plot2d([[parametric,X2,Y2,[t,-%pi,%pi],[nticks,300]],[discrete,list11]],[x,-3,1.2],[y,-2,2]);
list12:[[sol[1][1],sol[1][2]]];
for J:2 thru 1000 do(list12:append(list12,[[sol[J][1],sol[J][2]]]));
plot2d([[discrete,list12],[discrete,[TW3,TW3],[0.9,1.1]]]);
```

下記に $R_0 = 1, G = 1, M_0 = 1$ で $E_0 < 1$ となる $V_0 = 0.7, 1.2$ の $x - y$ 平面軌跡と r の時系列変化で惑星の周回周期: T_W を比較した結果を下記に示す。(2.4.12) 式で求めた軌跡と数値解析による軌跡はよく一致している。また、 r の時系列変化で得られる惑星の周回周期: T_W と解析結果とよく一致している。

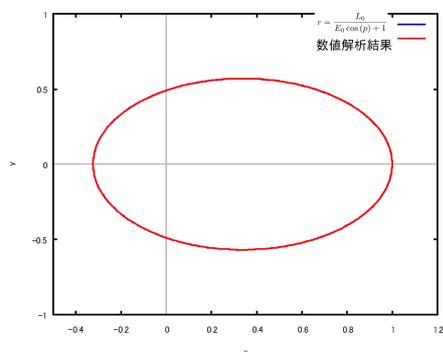


図 2.4.3: $V_0 = 0.7$ $x - y$ 平面軌跡 (楕円)

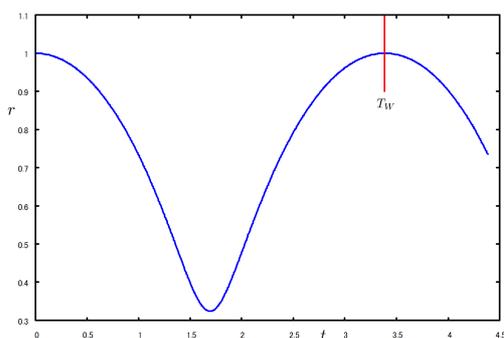


図 2.4.4: $V_0 = 0.7$ r の時系列

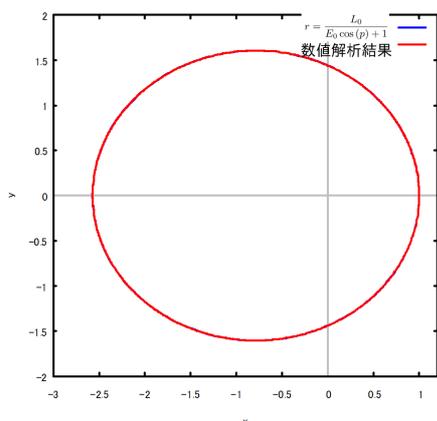


図 2.4.5: $V_0 = 1.2$ $x - y$ 平面軌跡 (楕円)

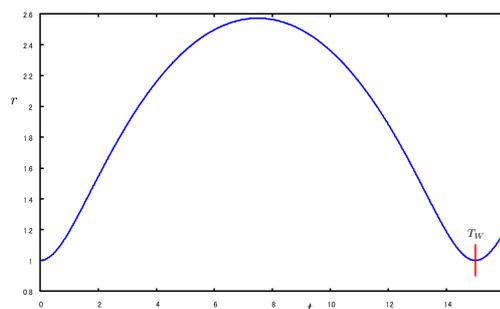


図 2.4.6: $V_0 = 1.2$ r の時系列

```

/* 放物線軌道 */
RP6:subst([E[0]=1,L1],RP3);
X1:rhs(RP6)*cos(p);
Y1:rhs(RP6)*sin(p);
INS1:[R[0]=1,G=1,M[0]=1,V[0]=1.4142];
subst([INS1],X1);
X2:subst([p=t],%);
subst([INS1],Y1);
Y2:subst([p=t],%);
EQR51:subst([INS1],rhs(EQR41));
EQR52:subst([INS1],rhs(EQR42));
EQP51:subst([INS1],rhs(EQP41));
EQP52:subst([INS1],rhs(EQP42));
V[0]/R[0];
P0:subst([INS1],%);
R0:subst([INS1],R[0]);
sol:rk([EQR51,EQR52,EQP51,EQP52],[r,s,p,
q],[R0,0,0,P0],[t,0,100,0.1]);
list11:[[sol[1][2]*cos(sol[1][4]),
sol[1][2]*sin(sol[1][4])]];
for J:2 thru 1000 do(list11:append(list11,
[[sol[J][2]*cos(sol[J][4]),sol[J][2]
*sin(sol[J][4])]]));
plot2d([[parametric,X2,Y2,[t,-2.5,
2.5],[nticks,300]],[discrete,list11],
[x,-5,1.2],[y,-5,5]);

```

下記に $R_0 = 1, G = 1, M_0 = 1$ で $E_0 = 1$ となる $V_0 = 1.4142$ の $x - y$ 平面軌跡を下記に示す。(2.4.12) 式で求めた軌跡と数値解析による軌跡はよく一致している。

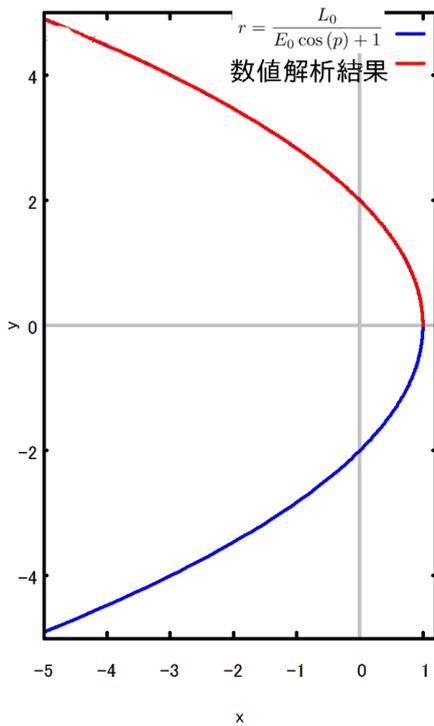


図 2.4.7: $V_0 = 1.4142$ $x - y$ 平面軌跡 (放物線)

```

/* 双曲線軌道 */
X1:rhs(RP2)*cos(p);
Y1:rhs(RP2)*sin(p);
INS1:[R[0]=1,G=1,M[0]=1,V[0]=2.0];
subst([INS1],X1);
X2:subst([p=t],%);
subst([INS1],Y1);
Y2:subst([p=t],%);
EQR51:subst([INS1],rhs(EQR41));
EQR52:subst([INS1],rhs(EQR42));
EQP51:subst([INS1],rhs(EQP41));
EQP52:subst([INS1],rhs(EQP42));
V[0]/R[0];
P0:subst([INS1],%);
R0:subst([INS1],R[0]);
Y4:expand(rhs(subst([INS1],Y3)));
Y5:-Y4;
sol:rk([EQR51,EQR52,EQP51,EQP52],[r,s,p,
q],[R0,0,0,P0],[t,0,100,0.1]);
list11:[[sol[1][2]*cos(sol[1][4]),
sol[1][2]*sin(sol[1][4])]];
for J:2 thru 1000 do(list11:append(list11,
[[sol[J][2]*cos(sol[J][4]),sol[J][2]
*sin(sol[J][4])]]));
plot2d([Y4,Y5],[parametric,X2,Y2,
[t,-1.8,1.8],[nticks,300]],
[discrete,list11],[Y4,[t,-3,2],
[nticks,300]]],[x,-3,2],[y,-15,15]);

```

下記に $R_0 = 1, G = 1, M_0 = 1$ で $E_0 > 1$ となる $V_0 = 2$ の $x - y$ 平面軌跡を下記に示す。(2.4.12) 式で求めた軌跡と数値解析による軌跡はよく一致している。初

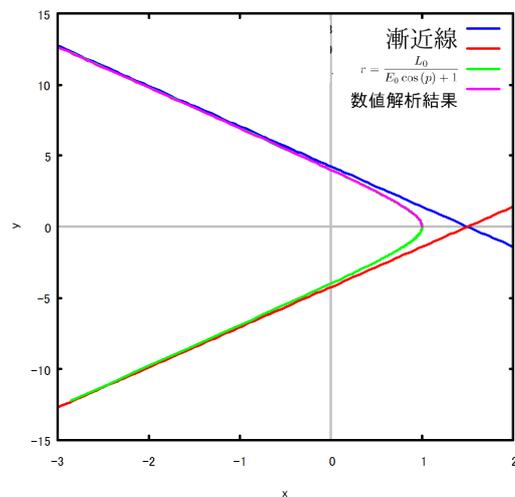


図 2.4.8: $V_0 = 2$ $x - y$ 平面軌跡 (双曲線)

期速度を徐々に上げると中心が遠い焦点の楕円から円、中心が近い焦点の楕円、放物線、双曲線へと変化する。

例題 2.4.2 地球脱出速度

質量： M_0 、半径： R の地球から質量： M の衛星が地球の引力圏から脱出するための速度： v を求める。

```
kill(all);
assume(r>0,R>0);
F1:F=-G*M[0]*M/r^2;
U[G]=-'integrate(rhs(F1),r,R,inf);
U1:lhs(%)=ev(rhs(%),integrate);
M*v^2/2>rhs(U1);
E1:M*v^2/2=rhs(U1);
solve(E1,v)[2];
v>rhs(%)
```

地球と衛星の引力： F は、

$$F = -\frac{M_0 G M}{r^2}$$

衛星の引力ポテンシャルエネルギー： U_G は上式を下記のように積分して、

$$U_G = M_0 \int_R^\infty \frac{1}{r^2} dr G M = \frac{M_0 G M}{R}$$

衛星が脱出するための条件は、

$$\frac{v^2 M}{2} > \frac{M_0 G M}{R}$$

以上から、衛星が脱出するための速度： v は、

$$v > \frac{\sqrt{2} \sqrt{M_0 G}}{\sqrt{R}}$$

例題 2.4.3 惑星の運動（エネルギー式）と散乱角

動かない惑星（質量： M_0 ）の万有引力による衛星（質量： M ）の平面運動をエネルギー式で求める。衛星は、惑星から十分離れた位置で速度： v_0 、惑星から最短距離： D の方向で動いている。このときの衛星の運動と散乱角： θ を求める。

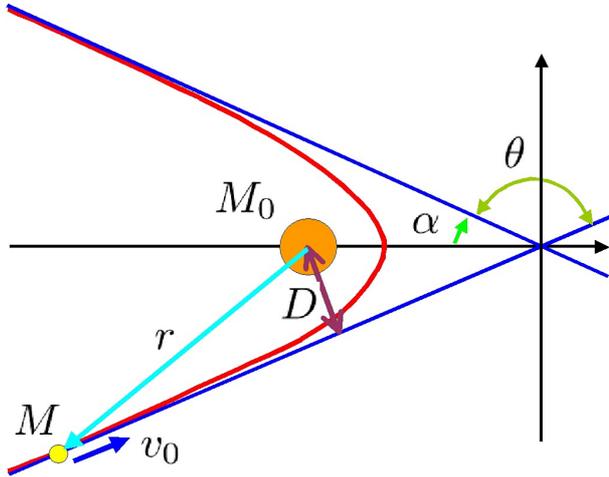


図 2.4.9: 散乱角

```
kill(all);
load("vector");
depends(r,t);
depends(p,t);
depends(z,p);
X:r*cos(p);
Y:r*sin(p);
XY:matrix([X],[Y]);
VXY:diff(XY,t,1);
TR:matrix([cos(p), sin(p)],
[-sin(p), cos(p)]);
VRP:trigsimp(TR.VXY);
T1:T=M*VRP.VRP/2;
assume(r>0,R>0);
F1:F=-G*M[0]*M/r^2;
'integrate(rhs(F1),r,R,inf);
U=ev(%,integrate);
U1:subst([R=r],%);
E1:E=rhs(T1)+rhs(U1);
```

二次元極座標における速度： \vec{v} は次式で表せる。

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} r \\ \left(\frac{d}{dt} p\right) r \end{pmatrix}$$

以上から運動エネルギー： T は、

$$T = \frac{\left(\left(\frac{d}{dt} r\right)^2 + \left(\frac{d}{dt} p\right)^2 r^2\right) M}{2}$$

惑星と衛星の間に働く引力は、

$$F = -\frac{M_0 G M}{r^2}$$

引力によるポテンシャルエネルギー： U_G は上式を積分し、

$$U_G = -M_0 \int_R^\infty \frac{1}{r^2} dr G M = -\frac{M_0 G M}{r}$$

総エネルギー： E は、

$$E = \frac{M \left(\left(\frac{d}{dt} r\right)^2 + \left(\frac{d}{dt} p\right)^2 r^2 \right)}{2} - \frac{M_0 G M}{r} \quad (2.4.22)$$

/* 面積速度 */

```
EQH:r^2*diff(p,t,1)=H;
solve(EQH,diff(p,t,1))[1];
EQHD:'diff(p,t,1)=H/r^2;
EQZR:z=1/r;
EQRZ:solve(EQZR,r)[1];
DRT1:diff(%,t,1);
EQHD1:subst([EQRZ],EQHD);
DRT11:subst([EQHD1],DRT1);
diff(DRT11,t,1);
DRT2:subst([EQHD1],%);
E2:subst([DRT1,EQHD1,EQRZ],E1);
E3:E2/(M*H^2/2);
EQ4:expand(solve(E3,diff(z,p,1)^2)[1]);
EQ41:first(rhs(EQ4));
EQ42:last(rhs(EQ4));
EQ43:rhs(EQ4)-EQ41-EQ42;
EQ45:-(EQ41/2/z)^2;
EQ46:factor(EQ41+EQ42+EQ45);
EQ47:EQ43-EQ45;
EQ48:lhs(EQ4)=EQ46+EQ47;
```

面積速度： H 一定であるから、

$$\left(\frac{d}{dt} p\right) r^2 = H$$

下記の変換を行い、

$$z = \frac{1}{r}$$

上記の関係から、

$$\frac{d}{dt} r = -\frac{\left(\frac{d}{dt} p\right) \left(\frac{d}{dp} z\right)}{z^2} = -\left(\frac{d}{dp} z\right) H \quad (2.4.23)$$

$$\frac{d}{dt} p = z^2 H$$

上式の関係をも (2.4.22) 式に代入し、

$$E = \frac{M \left(\left(\frac{d}{dp} z\right)^2 H^2 + z^2 H^2 \right)}{2} - M_0 z G M$$

上式を整理して、

$$\left(\frac{d}{dp}z\right)^2 = -\frac{(z^2 H^2 M - E)^2}{z^2 H^4 M^2} + \frac{E^2}{z^2 H^4 M^2} + \frac{2 M_0 z G}{H^2} \quad (2.4.24)$$

```
assume(G>0,M[0]>0,H^2>0,E>0,M>0,E[0]>0,
H>0,v[0]>0,L[0]>0);
L1:L[0]=H^2/G/M[0];
L2:solve(L1,H)[2];
E1:E[0]=sqrt(1+2*E*H^2/G^2/M[0]^2/M);
E1^2;
E2:solve(%,E)[1];
subst([E2,L2],expand(EQ48));
EQ5:expand(%)
'diff(z,p,1)=sqrt(rhs(EQ5));
EQ51:'diff(p,z,1)=1/rhs(%)
p+p[0]='integrate(rhs(EQ51),z);
ev(%,integrate);
sin(%)
EQ52:subst([p[0]=p[0]+%pi/2],%);
solve(%,z)[1];
diff(%,p,1);
subst([p+p[0]=p[0]],rhs(%)=0);
P01:solve(%,p[0])[1];
subst([EQZR,P01],EQ52);
EQ6:solve(%,r)[1];
```

下記のように置く。

$$L_0 = \frac{H^2}{M_0 G}, \quad E_0 = \sqrt{\frac{2 E H^2}{M_0^2 G^2 M} + 1} \quad (2.4.25)$$

上式を (2.4.24) 式に代入し、整理すると、

$$\left(\frac{d}{dp}z\right)^2 = -z^2 + \frac{2z}{L_0} + \frac{E_0^2}{L_0^2} - \frac{1}{L_0^2}$$

上式から、

$$\frac{d}{dz}p = \frac{1}{\sqrt{-z^2 + \frac{2z}{L_0} + \frac{E_0^2}{L_0^2} - \frac{1}{L_0^2}}}$$

上式を積分して、

$$p + p_0 = \int \frac{1}{\sqrt{-z^2 + \frac{2z}{L_0} + \frac{E_0^2}{L_0^2} - \frac{1}{L_0^2}}} dz$$

$$= -\operatorname{asin}\left(\frac{\frac{2}{L_0} - 2z}{\sqrt{4\left(\frac{E_0^2}{L_0^2} - \frac{1}{L_0^2}\right) + \frac{4}{L_0^2}}}\right)$$

両辺の sin をとり、

$$\sin(p + p_0) = -\frac{\frac{2}{L_0} - 2z}{\sqrt{4\left(\frac{E_0^2}{L_0^2} - \frac{1}{L_0^2}\right) + \frac{4}{L_0^2}}}$$

積分定数: $p_0 \rightarrow p_0 + \frac{\pi}{2}$ としてもよいので、

$$\cos(p + p_0) = -\frac{\frac{2}{L_0} - 2z}{\sqrt{4\left(\frac{E_0^2}{L_0^2} - \frac{1}{L_0^2}\right) + \frac{4}{L_0^2}}}$$

z を求めると、

$$z = \frac{E_0 \cos(p + p_0) + 1}{L_0}$$

$p = 0$ で $\frac{d}{dt}r = 0$ とすると、(2.4.23) 式から、

$$\frac{d}{dp}z = -\frac{E_0 \sin(p + p_0)}{L_0} = 0$$

以上から、 $p_0 = 0$ となり、

$$z = \frac{E_0 \cos(p) + 1}{L_0}$$

上式より、惑星の軌跡は下記となり、(2.4.12) 式と同じ式が得られた。

$$r = \frac{L_0}{E_0 \cos(p) + 1} \quad (2.4.26)$$

```
R1:R[1]=L[0]/((1-E[0])*(E[0]+1));
R2:R[2]=(sqrt(E[0]^2-1)*L[0])/((E[0]-1)
*(E[0]+1));
tan(\alpha)=-R[2]/R[1];
TNA1:factor(subst([R1,R2],%));
TNA2:subst([E1],TNA1);
E4:E=M*v[0]^2/2;
H4:H=v[0]*D;
TNA3:subst([E4,H4],TNA2);
TH:\theta=%pi-2*\alpha;
solve(TH,\alpha)[1];
tan(%)
expand(%)
lhs(%)=1/(tan(\theta/2));
subst([TNA3],%);
solve(%,tan(\theta/2))[1];
solve(%,\theta)[1];
```

運動は双曲線運動であるから、(2.4.18) 式と (2.4.21) 式から、

$$R_1 = \frac{L_0}{(1 - E_0)(E_0 + 1)}, \quad R_2 = \frac{\sqrt{E_0^2 - 1} L_0}{(E_0 - 1)(E_0 + 1)}$$

漸近線の角度: α は (2.4.20) 式から、

$$\tan(\alpha) = -\frac{R_2}{R_1} = \sqrt{E_0^2 - 1} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{E}H}{\sqrt{M}GM_0}$$

惑星から十分離れた位置で速度: v_0 で惑星から最短距離: D の位置に向けて動いている。このとき総エネルギー: E と面積速度: H は、

$$E = \frac{v_0^2 M}{2}, \quad H = v_0 D$$

以上から、

$$\tan(\alpha) = \frac{v_0^2 D}{G M_0} \quad (2.4.27)$$

散乱角： θ と漸近線の角度： α との関係は、

$$\theta = \pi - 2\alpha$$

以上から、

$$\tan(\alpha) = -\tan\left(\frac{\theta - \pi}{2}\right) = \frac{1}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

以上から、散乱角： θ は次式で得られる。

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{M_0 G}{v_0^2 D} \quad (2.4.28)$$

例題 2.4.4 探査機のスイングバイによる加速

速度: V で x 軸方向に移動している惑星 (質量: M_0) の万有引力を利用して、探査機 (質量: M) を加速させる。探査機は、最初、惑星から十分離れた位置で相対速度: v_0 、惑星から最短相対距離: D の方向で動いている。このときの運動エネルギー増加を求める。

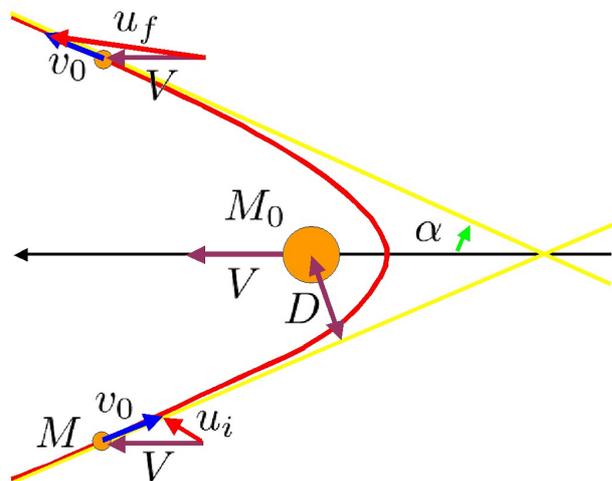


図 2.4.10: スイングバイ

運動エネルギー増加は、

$$T_f - T_i = 2 v_0 \cos(\alpha) M V$$

(2.4.27) 式から、 α は、

$$\tan(\alpha) = \frac{v_0^2 D}{M_0 G}$$

上式を代入し、運動エネルギー増加は、

$$T_f - T_i = \frac{2 v_0 M V}{\sqrt{\frac{v_0^4 D^2}{M_0^2 G^2} + 1}}$$

```
kill(all);
V1:u[i]=matrix([V-v[0]*cos(\alpha)],
[v[0]*sin(\alpha)]);
V2:u[f]=matrix([V+v[0]*cos(\alpha)],
[v[0]*sin(\alpha)]);
T1:T[i]=M/2*(transpose(rhs(V1)).rhs(V1));
T2:T[f]=M/2*(transpose(rhs(V2)).rhs(V2));
T2-T1;
DT1:trigsimp(%);
TN1:tan(\alpha)=(v[0]^2*D)/(M[0]*G);
TN2:solve(TN1,\alpha)[1];
subst(%,DT1);
```

探査機が惑星に近づく前の絶対速度: u_i は、

$$u_i = \begin{pmatrix} V - v_0 \cos(\alpha) \\ v_0 \sin(\alpha) \end{pmatrix}$$

探査機が惑星から遠ざかった後の絶対速度: u_f は、

$$u_f = \begin{pmatrix} V + v_0 \cos(\alpha) \\ v_0 \sin(\alpha) \end{pmatrix}$$

それぞれの運動エネルギーは、

$$T_i = \frac{M \left((V - v_0 \cos(\alpha))^2 + v_0^2 \sin^2(\alpha) \right)}{2}$$

$$T_f = \frac{M \left((V + v_0 \cos(\alpha))^2 + v_0^2 \sin^2(\alpha) \right)}{2}$$

例題 2.4.5 ラザフォード散乱

反発力を受ける例として、ラザフォード散乱がある。質量： M 、電荷： $+2e$ の α 粒子が静止している電荷： $+Ze$ の原子核に、十分離れた位置で速度： v_0 、最短距離： D の方向で向かってくるとする。このときの α 粒子の運動と散乱角： θ を求める。

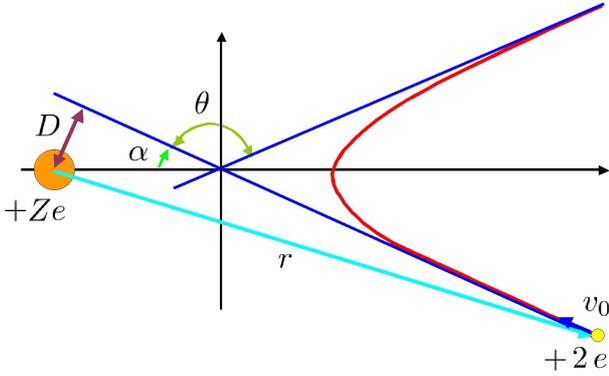


図 2.4.11: 反発力を受ける粒子運動

```
kill(all);
load("vector");
depends(r,t);
depends(z,p);
depends(p,t);
assume(r>0,H>0,Z>0,e>0,M>0,K>0,C>0);
X:r*cos(p);
Y:r*sin(p);
XY:matrix([X],[Y]);
VXY:diff(XY,t,1);
AXY:diff(VXY,t,1);
TR:matrix([cos(p), sin(p)],
[-sin(p), cos(p)]);
VRP:trigsimp(TR.VXY);
ARP:trigsimp(TR.AXY);
EQR:M*ARP[1][1]=F(r);
EQP:M*ARP[2][1]=0;
EQR1:expand(EQR/M);
EQH:r^2*diff(p,t,1)=H;
r*lhs(EQP)-diff(lhs(EQH),t)*M;
factor(%);
solve(EQH,diff(p,t,1))[1];
EQHD:'diff(p,t,1)=H/r^2;
```

中心力による平面運動であるから、「2.4.1 惑星の運動」(2.4.2)式、(2.4.4)式、64頁から運動方程式は下記となる。

$$\left(\frac{d^2}{dt^2}r - \left(\frac{d}{dt}p\right)^2 r\right) M = F(r) \quad (2.4.29)$$

$$\left(\frac{d}{dt}p\right) r^2 = H \quad (2.4.30)$$

```
EQZR:z=1/r;
EQRZ:solve(EQZR,r)[1];
DRT1:diff(%,t,1);
EQHD1:subst([EQRZ],EQHD);
DRT11:subst([EQHD1],DRT1);
diff(DRT11,t,1);
DRT2:subst([EQHD1],%);
subst([DRT2,EQHD1,EQRZ],EQR1);
EQR2:expand(%/z^2/H^2*(-1));
FR0:F(r)=K*Z[0]*e*Z*e/(r^2);
C1:C=K*Z[0]*e*Z*e/M;
subst([Z[0]=2],C1);
C2:solve(C1,K)[1];
FR1:subst([C2],FR0);
FR2:subst([EQRZ],%);
EQR3:subst([FR2],EQR2);
ZP1:ode2(%,z,p);
```

r と p の軌跡の式を得るため、変数： $z = \frac{1}{r}$ を用いて t を消去する。

$$z = \frac{1}{r} \quad (2.4.31)$$

$\frac{d}{dt}r$, $\frac{d}{dt}p$ を z で表現すると、

$$\frac{d}{dt}r = -\frac{\left(\frac{d}{dt}p\right)\left(\frac{d}{dp}z\right)}{z^2}, \quad \frac{d}{dt}p = z^2 H \quad (2.4.32)$$

上式から、

$$\frac{d}{dt}r = -\left(\frac{d}{dp}z\right) H \quad (2.4.33)$$

上式から $\frac{d^2}{dt^2}r$ は、

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}r &= -\left(\frac{d}{dt}p\right)\left(\frac{d^2}{dp^2}z\right) H \\ &= -z^2\left(\frac{d^2}{dp^2}z\right) H^2 \end{aligned} \quad (2.4.34)$$

(2.4.32)式と(2.4.34)式を運動方程式:(2.4.29)式に代入し、

$$-z^2\left(\frac{d^2}{dp^2}z\right) H^2 - z^3 H^2 = \frac{F\left(\frac{1}{z}\right)}{M}$$

上式を整理して、

$$\frac{d^2}{dp^2}z + z = -\frac{F\left(\frac{1}{z}\right)}{z^2 H^2 M}$$

粒子間の反発力は下記で得られ、

$$F(r) = \frac{2eZeK}{r^2}$$

下記の C を導入し、

$$C = \frac{2e^2 K Z}{M} \quad (2.4.35)$$

粒子間の反発力は下記となり、 z で表現して、

$$F(r) = \frac{CM}{r^2}, \quad F\left(\frac{1}{z}\right) = z^2 CM \quad (2.4.36)$$

上記から、運動方程式は、

$$\frac{d^2}{dp^2} z + z = -\frac{C}{H^2}$$

上式を ode2 関数で解いて、

$$z = -\frac{C}{H^2} + \%k1 \sin(p) + \%k2 \cos(p)$$

```
diff(ZP1,p,1);
subst([diff(z,p,1)=0,p=0],%);
ZP12:solve(%,%k1)[1];
subst([ZP12],ZP1);
ZP2:factor(%);
E1:%k2=E[0]/L[0];
L1:1/L[0]=C/H^2;
L2:solve(L1,C)[1];
subst([E1,L2,z=1/r],ZP2);
RP2:solve(% ,r)[1];
```

上式を p で微分し、

$$\frac{d}{dp} z = \%k1 \cos(p) - \%k2 \sin(p)$$

$p = 0$ で $\frac{d}{dt} r = 0$ である。(2.4.8) 式から $\frac{d}{dp} z = 0$ となり、

$$\%k1 = 0$$

上記から、

$$z = \%k2 \cos(p) - \frac{C}{H^2} = \frac{\%k2 \cos(p) H^2 - C}{H^2}$$

下記とおき、

$$\%k2 = \frac{E_0}{L_0}, \quad \frac{1}{L_0} = \frac{C}{H^2} \quad (2.4.37)$$

上式に代入すると、

$$\frac{1}{r} = \frac{\frac{E_0 \cos(p) H^2}{L_0} - \frac{H^2}{L_0}}{H^2}$$

上式を整理し、

$$r = \frac{L_0}{E_0 \cos(p) - 1} \quad (2.4.38)$$

上式の反発力を受ける運動は下図の右の双曲線(青色)となり、次式の向心力を受ける運動は下図の左の双曲線(赤色)となる。

$$r = \frac{L_0}{E_0 \cos(p) + 1}$$

```
RP3:subst([E[0]=2,L[0]=0.5],rhs(RP2));
list11:[[0.02*(-50+1),subst([p=0.02*(-50+1)],RP3)]];
for J:2 thru 100 do(list11:append(list11,
[[0.02*(-50+J),subst([p=0.02*(-50+J)],
RP3)]));
list12:[[list11[1][2]*cos(list11[1][1]),
list11[1][2]*sin(list11[1][1])]];
for J:2 thru 100 do(list12:append(list12,
[[list11[J][2]*cos(list11[J][1]),list11
[J][2]*sin(list11[J][1])]]));
plot2d ([[discrete,list12],[x,-1,2],
[y,-2,2],[style,[lines,3,1]]);
subst([-1+=1],RP2);
RP4:subst([E[0]=2,L[0]=0.5],rhs(%));
list11:[[0.02*(-100+1),subst([p=0.02*(-100+1)],RP4)]];
for J:2 thru 200 do(list11:append(list11,
[[0.02*(-100+J),subst([p=0.02*(-100+J)],
RP4)]));
list13:[[list11[1][2]*cos(list11[1][1]),
list11[1][2]*sin(list11[1][1])]];
for J:2 thru 200 do(list13:append(list13,
[[list11[J][2]*cos(list11[J][1]),list11
[J][2]*sin(list11[J][1])]]));
plot2d ([[discrete,list12],[discrete,
list13],[x,-1,2.5],[y,-2,2],[style,
[lines,3,1],[lines,3,2]],[legend,"L0/
(E0*cos(p)-1)","L0/(E0*cos(p)+1)"]);
```

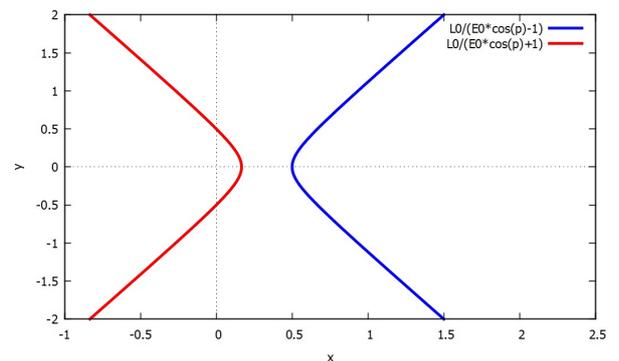


図 2.4.12: 反発力と向心力を受ける運動

```
TAL1:tan(\alpha)=(v[0]^2*D)/(M[0]*G);
TTH1:tan(\theta/2)=(M[0]*G)/(v[0]^2*D);
F=-(M[0]*G*M)/r^2;
rhs(%)=rhs(FR1);
GM2:solve(%,M[0])[1];
%*G;
TTH2:subst([GM2],TTH1);
```

惑星の受ける向心力は (2.4.10) 式から、

$$F = -\frac{M_0 G M}{r^2}$$

(2.4.36) 式から、下記の関係が得られる。

$$M_0 G = -C$$

双曲線の漸近線は、反発力を受ける運動の場合と向心力を受ける運動の場合と同じとなる。散乱角は向心力を受ける運動の場合の (2.4.28) 式で得られた次式と反発力を受ける運動の場合と同じである。

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{M_0 G}{v_0^2 D}$$

以上から、上記の関係を代入すると反発力を受ける場合の散乱角は、

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = -\frac{C}{v_0^2 D}$$

例題 2.4.6 平板上を回転する質点とそれと結び吊した質点

滑らかな水平板があり、そこに滑らかな小さな穴が開いている。ひもの付いた質点2のひもを板の小さな穴に通して質点2を吊るし、板上の質点1と連結する。質点1の質量を M_1 、質点2の質量を M_2 、糸の長さ: L とし、板上の質点1を円周方向に初速度: v_0 の運動を与える。

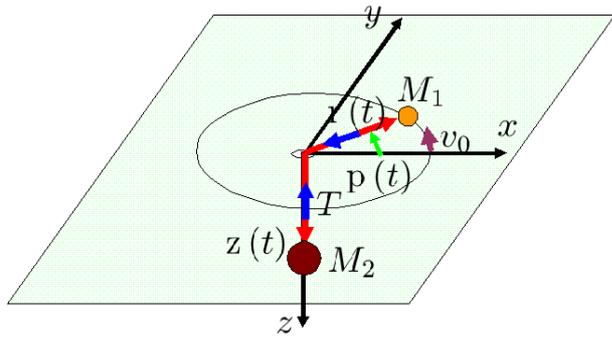


図 2.4.13: 平板上を回転する質点とそれと結び吊した質点

```
kill(all);
X:r(t)*cos(p(t));
Y:r(t)*sin(p(t));
XY:matrix([X],[Y]);
VXY:diff(XY,t,1);
AXY:diff(VXY,t,1);
TR:matrix([cos(p(t)), sin(p(t))],
[-sin(p(t)), cos(p(t))]);
VRP:trigsimp(TR.VXY);
ARP:trigsimp(TR.AXY);
EQR:M[1]*ARP[1][1]=F(r);
EQP:M[1]*ARP[2][1]=0;
EQR1:expand(EQR);
EQH:r(t)^2*diff(p(t),t,1)=H;
r(t)*lhs(EQP)-diff(lhs(EQH),t)*M[1];
factor(%);
```

水平板上の質点1の運動方程式は二次元極座標を用いて、下記の二式となる。

$$M_1 \left(\frac{d^2}{dt^2} r(t) \right) - M_1 r(t) \left(\frac{d}{dt} p(t) \right)^2 = F(r) \quad (2.4.39)$$

$$M_1 \left(2 \left(\frac{d}{dt} p(t) \right) \left(\frac{d}{dt} r(t) \right) + r(t) \left(\frac{d^2}{dt^2} p(t) \right) \right) = 0$$

上式に $r(t)$ を掛けて積分すると、

$$r(t)^2 \left(\frac{d}{dt} p(t) \right) = H \quad (2.4.40)$$

```
EQ1:subst([F(r)=-T],EQR1);
EQ2:EQH;
EQ3:M[2]*diff(z(t),t,2)=M[2]*G-T;
EQ4:r(t)+z(t)=L;
diff(EQ4,t,2);
EQ41:solve(%,diff(z(t),t,2))[1];
subst([EQ41],EQ3);
EQ31:solve(%,T)[1];
EQ21:solve(EQ2,diff(p(t),t,1))[1];
EQ11:subst([EQ31,EQ21],EQ1);
```

(2.4.39) 式でひもの張力: T とすると、質点1に関する運動方程式は、

$$M_1 \left(\frac{d^2}{dt^2} r(t) \right) - M_1 r(t) \left(\frac{d}{dt} p(t) \right)^2 = -T \quad (2.4.41)$$

$$r(t)^2 \left(\frac{d}{dt} p(t) \right) = H$$

質点2の運動方程式は、

$$M_2 \left(\frac{d^2}{dt^2} z(t) \right) = M_2 G - T \quad (2.4.42)$$

糸の長さ一定から次式となり、これを二階微分して、

$$z(t) + r(t) = L, \quad \frac{d^2}{dt^2} z(t) + \frac{d^2}{dt^2} r(t) = 0 \quad (2.4.43)$$

上式から、(2.4.42) 式は、

$$-M_2 \left(\frac{d^2}{dt^2} r(t) \right) = M_2 G - T$$

上式と (2.4.41) 式から T を消去し、

$$M_1 \left(\frac{d^2}{dt^2} r(t) \right) - \frac{M_1 H^2}{r(t)^3} = -M_2 G - M_2 \left(\frac{d^2}{dt^2} r(t) \right) \quad (2.4.44)$$

```
expand(EQ11*diff(r(t),t,1));
lhs(%) - rhs(%) = 0;
integrate(expand(%),t);
EQ12:lhs(%) = C;
DR2:solve(%,diff(r(t),t,1)^2)[1];
H1:H=r[0]*v[0];
subst([diff(r(t),t,1)=0,r(t)=r[0],H1],
DR2);
C4:solve(%,C)[1];
DR21:subst([C4,H1],DR2);
RR1:num(rhs(DR21))=0;
R012:solve(%,r(t));
R1:r[1]=rhs(R012[2]);
R2:r[2]=rhs(R012[1]);
C3:coeff(lhs(RR1),r(t)^3);
RR2:C3*(r(t)-r[0])*(r(t)-r[1])*(r(t)-r[2]);
DR22:lhs(DR21)=RR2/denom(rhs(DR21));
```

(2.4.44) 式に $\frac{d}{dt} r(t)$ を掛けて、

$$-\frac{M_1 \left(\frac{d}{dt} r(t)\right) H^2}{r(t)^3} + M_2 \left(\frac{d}{dt} r(t)\right) G + M_2 \left(\frac{d}{dt} r(t)\right) \left(\frac{d^2}{dt^2} r(t)\right) + M_1 \left(\frac{d}{dt} r(t)\right) \left(\frac{d^2}{dt^2} r(t)\right) = 0$$

上式を積分すると、次式となる。ここで C は積分定数である。

$$\frac{M_1 H^2}{2 r(t)^2} + M_2 r(t) G + \frac{M_2 \left(\frac{d}{dt} r(t)\right)^2}{2} + \frac{M_1 \left(\frac{d}{dt} r(t)\right)^2}{2} = C$$

上式を整理して、

$$\left(\frac{d}{dt} r(t)\right)^2 = -\frac{M_1 H^2 + 2 M_2 r(t)^3 G - 2 r(t)^2 C}{(M_2 + M_1) r(t)^2} \quad (2.4.45)$$

初期条件: $r(t) = r_0, H = r_0 v_0, \frac{d}{dt} r(t) = 0$ at $t = 0$ から、

$$C = \frac{2 r_0 M_2 G + v_0^2 M_1}{2}$$

上式を (2.4.45) 式に代入し、

$$\left(\frac{d}{dt} r(t)\right)^2 = -\frac{-r(t)^2 (2 r_0 M_2 G + v_0^2 M_1) + 2 M_2 r(t)^3 G + r_0^2 v_0^2 M_1}{(M_2 + M_1) r(t)^2}$$

上式の右辺 > 0 で、その分子 $= 0$ とし、

$$r(t)^2 (2 r_0 M_2 G + v_0^2 M_1) - 2 M_2 r(t)^3 G - r_0^2 v_0^2 M_1 = 0$$

その根: r_1, r_2, r_3 を求めると、

$$r_1 = \frac{v_0 \sqrt{8 r_0 M_1 M_2 G + v_0^2 M_1^2} + v_0^2 M_1}{4 M_2 G}, \quad r_2 = -\frac{v_0 \sqrt{8 r_0 M_1 M_2 G + v_0^2 M_1^2} - v_0^2 M_1}{4 M_2 G}, \quad r_3 = r_0$$

(2.4.44) 式は下記のように表現できる。

$$\left(\frac{d}{dt} r(t)\right)^2 = -\frac{2 M_2 (r(t) - r_0) (r(t) - r_1) (r(t) - r_2) G}{(M_2 + M_1) r(t)^2}$$

$r_2 < 0$ で、 $r_1, r_0 > 0$ であるので、右辺 > 0 となるには、 $r(t)$ は r_1 と r_0 の間をとり、この間で、振動することを示している。

```

subst([diff(r(t),t,2)=0,T=M[2]*G],EQ1);
subst([diff(p(t),t,1)=v[0]/r[0],r(t)=r[0]),%);
V00:solve(%,v[0])[2];
radcan(subst([V00],R1));
assume(r[0]>0,G>0,M[1]>0,M[2]>0);
R0:r(t)=r[0]+rd(t);
DDR0:diff(R0,t,2);
EQ111:solve(EQ11,diff(r(t),t,2))[1];
EQ112:subst([H1,V00],%);
EQ113:subst([DDR0,R0,H1],%);
subst([rd(t)=RD],rhs(%));
lhs(EQ113)=taylor(%,RD,0,1);
factor(subst([RD=rd(t)],%));
ode2(%,rd(t),t);

```

```

2*pi=(sqrt(3)*sqrt(M[2])*T[W]*sqrt(G))
/sqrt(r[0]*M[2]+r[0]*M[1]);
solve(%,T[W])[1];

```

質点 1 が振動せず、円軌道を描くとき、(2.4.41) 式に、 $\frac{d^2}{dt^2} r(t) = 0, T = M_2 G$ を代入し、

$$-M_1 r(t) \left(\frac{d}{dt} p(t)\right)^2 = -M_2 G$$

$\frac{d}{dt} p(t) = v_0/r_0, r(t) = r_0$ を代入すると、

$$-\frac{v_0^2 M_1}{r_0} = -M_2 G$$

上記から、初期速度: v_0 が下記の時、質点 1 が振動せず、円軌道を描く。

$$v_0 = \sqrt{\frac{r_0 M_2 G}{M_1}}$$

上記の状態から、質点 1 を少し: $rd(t)$ だけ変位させると、

$$r(t) = rd(t) + r_0, \quad \frac{d^2}{dt^2} r(t) = \frac{d^2}{dt^2} rd(t) \quad (2.4.46)$$

(2.4.44) 式に円軌道を描く初期速度の関係などを代入し、上式を解くと、整理すると、

$$\frac{d^2}{dt^2} r(t) = \frac{r_0^3 M_2 G - M_2 r(t)^3 G}{(M_2 + M_1) r(t)^3} \quad rd(t) = k_1 \sin\left(\frac{\sqrt{3} \sqrt{M_2} t \sqrt{G}}{\sqrt{r_0 M_2 + r_0 M_1}}\right) + k_2 \cos\left(\frac{\sqrt{3} \sqrt{M_2} t \sqrt{G}}{\sqrt{r_0 M_2 + r_0 M_1}}\right) \quad (2.4.47)$$

(2.4.46) 式を上式に代入し、 $rd(t)$ が小さいとして、Taylor 展開し、高次項を省略すると、上式から、振動周期： T_W は、

$$\frac{d^2}{dt^2} rd(t) = -\frac{3 M_2 rd(t) G}{r_0 (M_2 + M_1)} \quad T_W = \frac{2 \pi \sqrt{r_0 M_2 + r_0 M_1}}{\sqrt{3} \sqrt{M_2} \sqrt{G}}$$

2.5 相対運動

2.5.1 並進座標系の運動方程式

慣性系 $O-x, y, z$ とし、 $xm(t), ym(t), zm(t)$ で並進移動する座標系 $O'-xd, yd, zd$ 上における運動方程式を求める。まず、 $O'-xd, yd, zd$ 上の点を慣性系 $O-x, y, z$ で表現すると、下記となる。

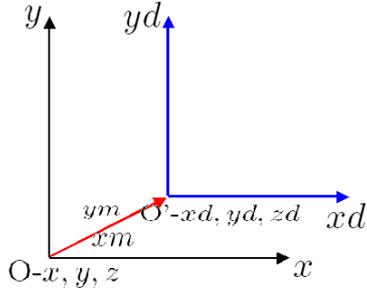


図 2.5.1: 並進座標系

$$x(t) = xm(t) + xd(t)$$

$$y(t) = ym(t) + yd(t)$$

$$z(t) = zm(t) + zd(t)$$

これを微分して、質点の質量を M とし、慣性系における運動方程式を求め、並進移動する運動方程式を求めると下記となる。

```
kill(all);
X:x(t)=xm(t)+xd(t);
Y:y(t)=ym(t)+yd(t);
Z:z(t)=zm(t)+zd(t);
XYZ:matrix([ rhs(X) ],[ rhs(Y) ],[ rhs(Z)
]);
VXYZ:diff(XYZ,t);
AXYZ:diff(VXYZ,t);
EQX:M*AXYZ[1][1]=F[xd];
solve(EQX,diff(diff(xd(t),t),t))[1]*M;
EQY:M*AXYZ[2][1]=F[yd];
solve(EQY,diff(diff(yd(t),t),t))[1]*M;
EQZ:M*AXYZ[3][1]=F[zd];
solve(EQZ,diff(diff(zd(t),t),t))[1]*M;
```

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} xd(t) \right) M = F_{xd} - \left(\frac{d^2}{dt^2} xm(t) \right) M$$

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} yd(t) \right) M = F_{yd} - \left(\frac{d^2}{dt^2} ym(t) \right) M$$

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} zd(t) \right) M = F_{zd} - \left(\frac{d^2}{dt^2} zm(t) \right) M$$

2.5.2 回転座標系の運動方程式

運動座標系： S_2 は静止座標系： S_1 の原点まわりを角速度： $\vec{\omega}$ で回転しているとする。

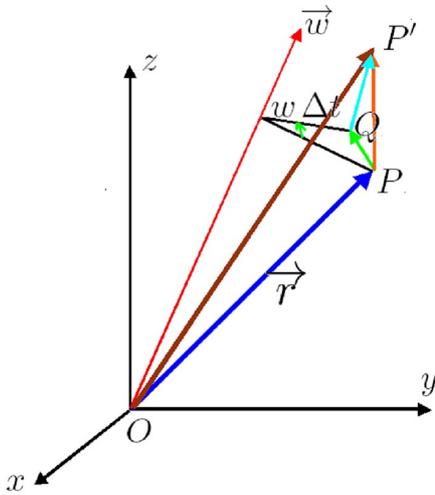


図 2.5.2: 回転座標系

静止座標系での変位： \vec{r} は、微小時間： Δt の間に P 点から P' 点に移れば、下記の関係が成り立つ。

$$\overrightarrow{PP'} = (\Delta \vec{r})_1 \quad \text{静止座標系における変位変化}$$

$$\overrightarrow{QP'} = (\Delta \vec{r})_2 \quad \text{運動座標系における変位変化}$$

また、

$$\overrightarrow{PQ} = \vec{\omega} \Delta t \times \vec{r}$$

$$\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP'}$$

以上のことから、変位変化は、

$$(\Delta \vec{r})_1 = (\Delta \vec{r})_2 + \vec{\omega} \Delta t \times \vec{r}$$

上式を Δt で割り、

$$\left(\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \right)_1 = \left(\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \right)_2 + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

上式から、

$$\left(\frac{d}{dt} \vec{r} \right)_1 = \left(\frac{d}{dt} \vec{r} \right)_2 + \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (2.5.1)$$

この関係は変位： \vec{r} 以外でも適用できる。上式から速度： \vec{v} は、

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_2 + \vec{\omega} \times \vec{r} \quad \text{ここで、} \vec{v} = \frac{d}{dt} \vec{r} \quad (2.5.2)$$

上式を t で微分し、加速度を求めると、

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} \vec{v} \right)_1 &= \left(\frac{d}{dt} \vec{v} \right)_2 + \vec{\omega} \times \vec{v} \\ &= \left(\frac{d}{dt} (\vec{v}_2 + \vec{\omega} \times \vec{r}) \right)_2 \\ &\quad + \vec{\omega} \times (\vec{v}_2 + \vec{\omega} \times \vec{r}) \\ &= \frac{d}{dt} \vec{v}_2 + \frac{d}{dt} \vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d}{dt} \vec{r} \\ &\quad + \vec{\omega} \times \vec{v}_2 + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \end{aligned}$$

ここで、

$$\left(\frac{d}{dt} \vec{\omega} \right)_1 = \left(\frac{d}{dt} \vec{\omega} \right)_2 + \vec{\omega} \times \vec{\omega} = \left(\frac{d}{dt} \vec{\omega} \right)_2$$

以上から、回転座標系の加速度は、

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} \vec{v} \right)_1 &= \frac{d}{dt} \vec{v}_2 + \frac{d}{dt} \vec{\omega} \times \vec{r} \\ &\quad + 2 \vec{\omega} \times \vec{v}_2 + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \end{aligned} \quad (2.5.3)$$

以上から、回転座標系の運動方程式は、外力： \vec{F} とすると、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \vec{v}_2 + \frac{d}{dt} \vec{\omega} \times \vec{r} + 2 \vec{\omega} \times \vec{v}_2 \\ + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{F} \end{aligned} \quad (2.5.4)$$

2.5.3 一定の角速度をもつ座標系の運動方程式

慣性系 $O-x, y, z$ とし、 z 軸を共通にし、 z 軸のまわりに一定の角速度： W で回転する座標系： $O'-xd, yd, zd$ 上における運動方程式を求める。

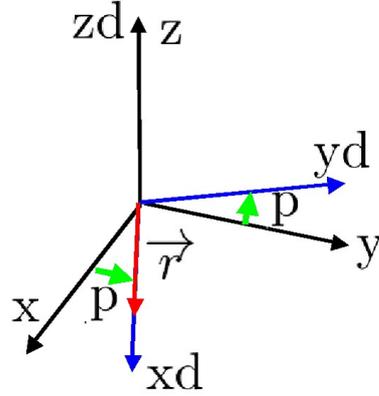


図 2.5.3: 一定の角速度をもつ座標系

```
kill(all);
un:matrix([1],[1],[1]);
XYZD:matrix([xd(t)],[yd(t)],[zd(t)]);
PZD:matrix([0],[0],[diff(p(t),t,1)]);
col(adjoint(append(transpose(PZD),
  transpose(XYZD),transpose(un))),3);
VD:diff(XYZD,t,1)+%;
col(adjoint(append(transpose(PZD),
  transpose(VD),transpose(un))),3);
AD:diff(VD,t,1)+%;
expand(M*%)=matrix([F[xd]],[F[yd]],[F[zd]]);
subst(['diff(p(t),t,2)=0','diff(p(t),t,1)
=W],%);
```

「2.5.2 回転座標系の運動方程式」に従って解析する。
変位： \vec{r} および z 軸まわりに回転する角速度： \vec{w} は、
上図の座標系では、

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} xd(t) \\ yd(t) \\ zd(t) \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{d}{dt} p(t) \end{pmatrix}$$

(2.5.2) 式から速度： \vec{v} は、

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= \vec{v}_2 + \vec{w} \times \vec{r} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} xd(t) - yd(t) \left(\frac{d}{dt} p(t) \right) \\ \frac{d}{dt} yd(t) + xd(t) \left(\frac{d}{dt} p(t) \right) \\ \frac{d}{dt} zd(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

回転座標系の加速度は (2.5.3) 式から、

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} \vec{v} \right)_1 &= \left(\frac{d}{dt} \vec{v} \right)_2 + \vec{w} \times \vec{v} \\ &= \begin{pmatrix} -2 \left(\frac{d}{dt} p(t) \right) \left(\frac{d}{dt} yd(t) \right) M + \left(\frac{d^2}{dt^2} xd(t) \right) M - yd(t) \left(\frac{d^2}{dt^2} p(t) \right) M - xd(t) \left(\frac{d}{dt} p(t) \right)^2 M \\ \left(\frac{d^2}{dt^2} yd(t) \right) M + 2 \left(\frac{d}{dt} p(t) \right) \left(\frac{d}{dt} xd(t) \right) M + xd(t) \left(\frac{d^2}{dt^2} p(t) \right) M - yd(t) \left(\frac{d}{dt} p(t) \right)^2 M \\ \left(\frac{d^2}{dt^2} zd(t) \right) M \end{pmatrix} \end{aligned}$$

上式から、一定の角速度を持つ座標系の運動方程式は、上式に $\frac{d}{dt} p(t) = W$, $\frac{d^2}{dt^2} p(t) = 0$ と置いて、

$$\begin{pmatrix} -xd(t) M W^2 - 2 \left(\frac{d}{dt} yd(t) \right) M W + \left(\frac{d^2}{dt^2} xd(t) \right) M \\ -yd(t) M W^2 + 2 \left(\frac{d}{dt} xd(t) \right) M W + \left(\frac{d^2}{dt^2} yd(t) \right) M \\ \left(\frac{d^2}{dt^2} zd(t) \right) M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{xd} \\ F_{yd} \\ F_{zd} \end{pmatrix} \quad (2.5.5)$$

```

X:x(t)=r(t)*cos(p(t));
Y:y(t)=r(t)*sin(p(t));
XYZ:matrix([x(t)],[y(t)],[z(t)])=matrix(
[r(t)*cos(p(t))],[r(t)*sin(p(t))],
[z(t)]);
XD:subst([r(t)=xd(t),z(t)=0],rhs(XYZ));
YD:subst([r(t)=yd(t),p(t)=p(t)+%pi/2,z(t)
=0],rhs(XYZ));
ZD:subst([r(t)=0,z(t)=zd(t)],rhs(XYZ));
XYZ1:lhs(XYZ)=XD+YD+ZD;
AXYZ:diff(XYZ1,t,2);
AXYZ1:subst(['diff(p(t),t,2)=0,
'diff(p(t),t,1)=W],%);
TR:matrix([cos(p(t)),sin(p(t)),0],
[-sin(p(t)),cos(p(t)),0],[0,0,1]);
trigsimp(TR.rhs(AXYZ1));
EQ1:expand(%*M)=matrix([F[xd]],[F[yd]],
[F[zd]]);
lhs(EQ1)[1][1]=rhs(EQ1)[1][1];
expand(solve(%,'diff(xd(t),t,2))[1]*M);
lhs(EQ1)[2][1]=rhs(EQ1)[2][1];
expand(solve(%,'diff(yd(t),t,2))[1]*M);
lhs(EQ1)[3][1]=rhs(EQ1)[3][1];
expand(solve(%,'diff(zd(t),t,2))[1]*M);

```

O'- xd, yd, zd 上の点を慣性系 O- x, y, z で表現する。
「2.1.2 二次元極座標における運動方程式」(8 ページ)

に示す極座標を用いて、 $r(t)$ との関係は下記のように表現できる。

$$x(t) = r(t) \cos(p(t))$$

$$y(t) = r(t) \sin(p(t))$$

$xd(t)$ は、 $r(t)$ そのものであり、 $r(t) \rightarrow xd(t)$ と置き換え、 $yd(t)$ は、 $r(t)$ を $\pi/2$ 回転させたものであり、 $r(t) \rightarrow yd(t)$, $p(t) \rightarrow p(t) + \pi/2$ と置き換える。これを基に O'- xd, yd, zd 上の点を慣性系 O- x, y, z で表現すると下記となる。

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xd(t) \cos(p(t)) - yd(t) \sin(p(t)) \\ xd(t) \sin(p(t)) + yd(t) \cos(p(t)) \\ zd(t) \end{pmatrix} \quad (2.5.6)$$

上式を時間 t で 2 階微分し加速度項を求める。これは x, y, z 座標系であるから、下記：(2.1.7) 式の変換マトリックスをかけて、

$$\begin{pmatrix} \cos(p(t)) & \sin(p(t)) & 0 \\ -\sin(p(t)) & \cos(p(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

xd, yd, zd 座標系に変換する。その結果は、

$$\begin{pmatrix} -xd(t) W^2 - 2 \left(\frac{d}{dt} yd(t) \right) W + \frac{d^2}{dt^2} xd(t) \\ -yd(t) W^2 + 2 \left(\frac{d}{dt} xd(t) \right) W + \frac{d^2}{dt^2} yd(t) \\ \frac{d^2}{dt^2} zd(t) \end{pmatrix}$$

上式から、運動方程式は下記となり、(2.5.5) 式と一致している。

$$\begin{pmatrix} -xd(t) M W^2 - 2 \left(\frac{d}{dt} yd(t) \right) M W + \left(\frac{d^2}{dt^2} xd(t) \right) M \\ -yd(t) M W^2 + 2 \left(\frac{d}{dt} xd(t) \right) M W + \left(\frac{d^2}{dt^2} yd(t) \right) M \\ \left(\frac{d^2}{dt^2} zd(t) \right) M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{xd} \\ F_{yd} \\ F_{zd} \end{pmatrix}$$

上式を整理し、

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2}{dt^2} xd(t) \right) M &= xd(t) M W^2 + 2 \left(\frac{d}{dt} yd(t) \right) M W + F_{xd} \\ \left(\frac{d^2}{dt^2} yd(t) \right) M &= yd(t) M W^2 - 2 \left(\frac{d}{dt} xd(t) \right) M W + F_{yd} \\ \left(\frac{d^2}{dt^2} zd(t) \right) M &= F_{zd} \end{aligned} \quad (2.5.7)$$

2.5.4 自転する地球上に固定した座標系の運動方程式

慣性系 $O-x, y, z$ とし、 z 軸のまわりに一定の角速度: W で自転する半径: R の地球上に固定した座標系: $O'-xd, yd, zd$ 上における運動方程式を求める。まず、 $O'-xd, yd, zd$ 上の点を慣性系 $O-x, y, z$ で表現する。

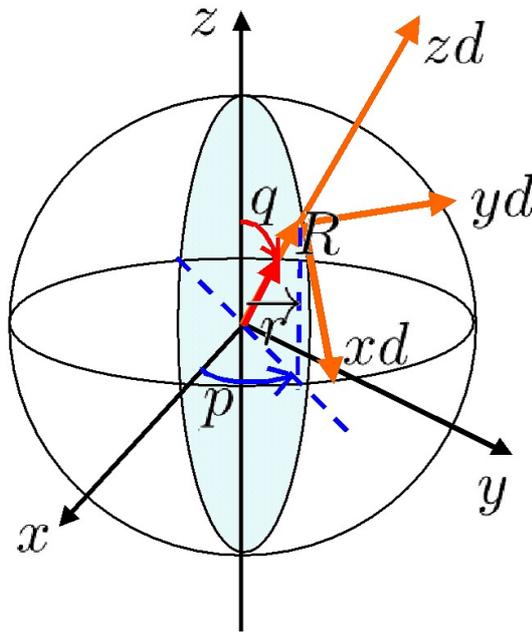


図 2.5.4: 自転する地球上に固定した座標系

```
kill(all);
un:matrix([1],[1],[1]);
XYZD:matrix([xd(t)+R*cos(L[AM])
)*sin(L[AM]),[yd(t)],[zd(t)
+R*cos(L[AM])*cos(L[AM])]);
PZD:matrix([-W*sin(%pi/2-L[AM])],[0],
[W*cos(%pi/2-L[AM])]);
col(adjoint(append(transpose(PZD),
transpose(XYZD),transpose(un))),3);
VD:diff(XYZD,t,1)+%;
col(adjoint(append(transpose(PZD),
transpose(VD),transpose(un))),3);
AD:trigsimp(diff(VD,t,1)+%);
EQD2:expand(M*%)=matrix([F[zd]], [F[xd]],
[F[yd]]);
```

「2.5.2 回転座標系の運動方程式」に従って解析する。
変位: \vec{r} および z 軸まわりに回転する角速度: $\vec{\omega}$ は、
上図の座標系では、

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} \cos(L_{AM}) \sin(L_{AM}) R + xd(t) \\ yd(t) \\ \cos(L_{AM})^2 R + zd(t) \end{pmatrix}$$

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} -\cos(L_{AM}) W \\ 0 \\ \sin(L_{AM}) W \end{pmatrix}$$

(2.5.2) 式から速度: \vec{v} は、

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= \vec{v}_2 + \vec{\omega} \times \vec{r} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} xd(t) - yd(t) \sin(L_{AM}) W \\ \sin(L_{AM}) (\cos(L_{AM}) \sin(L_{AM}) R + xd(t)) W + \cos(L_{AM}) (\cos(L_{AM})^2 R + zd(t)) W + \frac{d}{dt} yd(t) \\ \frac{d}{dt} zd(t) - yd(t) \cos(L_{AM}) W \end{pmatrix} \end{aligned}$$

回転座標系の加速度は (2.5.3) 式から、

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt}\vec{v}\right)_1 &= \left(\frac{d}{dt}\vec{v}\right)_2 + \vec{\omega} \times \vec{v} \\ &= \begin{pmatrix} (-\cos(L_{AM}) \sin(L_{AM}) R - zd(t) \cos(L_{AM}) \sin(L_{AM}) + xd(t) \cos(L_{AM})^2 - xd(t)) W^2 - 2 \left(\frac{d}{dt} yd(t)\right) \sin(L_{AM}) W + \frac{d^2}{dt^2} xd(t) \\ -yd(t) W^2 + 2 \left(\frac{d}{dt} xd(t)\right) \sin(L_{AM}) + 2 \left(\frac{d}{dt} zd(t)\right) \cos(L_{AM}) W + \frac{d^2}{dt^2} yd(t) \\ (-\cos(L_{AM})^2 R - xd(t) \cos(L_{AM}) \sin(L_{AM}) - zd(t) \cos(L_{AM})^2) W^2 - 2 \left(\frac{d}{dt} yd(t)\right) \cos(L_{AM}) W + \frac{d^2}{dt^2} zd(t) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.5.8)$$

```
XYZ:matrix([x(t)], [y(t)], [z(t)])=matrix(
[r(t)*sin(q(t))*cos(p(t))], [r(t)*
sin(q(t))*sin(p(t))], [r(t)*cos(q(t))]);
XD:subst([r(t)=xd(t), q(t)=q(t)+%pi/2],
rhs(XYZ));
YD:subst([r(t)=yd(t), p(t)=p(t)+%pi/2,
q(t)=%pi/2], rhs(XYZ));
ZD:subst([r(t)=zd(t)+R], rhs(XYZ));
XYZ1:lhs(XYZ)=XD+YD+ZD;
AXYZ:diff(XYZ1, t, 2);
TR:matrix([sin(q(t))*cos(p(t)), sin(q(t))
*sin(p(t)), cos(q(t)) ],
[cos(q(t))*cos(p(t)), cos(q(t))
*sin(p(t)), -sin(q(t)) ],
[ -sin(p(t)), cos(p(t)), 0]);
AXYZD:trigsimp(TR.rhs(AXYZ));
subst(['diff(p(t), t, 2)=0, 'diff(p(t), t, 1)
=W], AXYZD);
AXYZD1:subst(['diff(q(t), t, 2)=0, 'diff(
q(t), t, 1)=0, q(t)=%pi/2-L[AM]], %);
EQD1:expand(AXYZD1*M)=matrix([F[zd]],
[F[xd]], [F[yd]]);
trigsimp(lhs(EQD2)[1]-lhs(EQD1)[2]);
trigsimp(lhs(EQD2)[2]-lhs(EQD1)[3]);
trigsimp(lhs(EQD2)[3]-lhs(EQD1)[1]);
```

まず、 O' - xd, yd, zd 上の点を慣性系 O - x, y, z で表現する。「2.1.3 三次元極座標における運動方程式」(10 ページ) に示す極座標を用いて、 x, y, z 座標と極座標 $: r, q, p$ の関係は (2.1.9) 式から下記となる。

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(t) \cos(p(t)) \sin(q(t)) \\ r(t) \sin(p(t)) \sin(q(t)) \\ r(t) \cos(q(t)) \end{pmatrix} \quad (2.5.9)$$

$xd(t)$ は (2.5.9) 式で $r(t) \rightarrow xd(t)$, $q(t) \rightarrow q(t) + \pi/2$ と置き換える。

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xd(t) \cos(p(t)) \cos(q(t)) \\ xd(t) \sin(p(t)) \cos(q(t)) \\ -xd(t) \sin(q(t)) \end{pmatrix}$$

$yd(t)$ は (2.5.9) 式で $r(t) \rightarrow yd(t)$, $q(t) \rightarrow \pi/2$, $p(t) \rightarrow p(t) + \pi/2$ と置き換える。

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -yd(t) \sin(p(t)) \\ yd(t) \cos(p(t)) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$zd(t)$ は (2.5.9) 式で $r(t) \rightarrow R + zd(t)$ と置き換える。

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(p(t)) \sin(q(t)) (R + zd(t)) \\ \sin(p(t)) \sin(q(t)) (R + zd(t)) \\ \cos(q(t)) (R + zd(t)) \end{pmatrix}$$

これを基に O' - xd, yd, zd 上の点を慣性系 O - x, y, z で表現すると上式の和から下記となる。

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(p(t)) \sin(q(t)) (R + zd(t)) + xd(t) \cos(p(t)) \cos(q(t)) - yd(t) \sin(p(t)) \\ \sin(p(t)) \sin(q(t)) (R + zd(t)) + xd(t) \sin(p(t)) \cos(q(t)) + yd(t) \cos(p(t)) \\ \cos(q(t)) (R + zd(t)) - xd(t) \sin(q(t)) \end{pmatrix}$$

上式を時間 t で 2 階微分し加速度項を求める。これは x, y, z 座標系であるから、下記: (2.1.12) 式の変換マトリックスをかけて、

$$\begin{pmatrix} \cos(p(t)) \sin(q(t)) & \sin(p(t)) \sin(q(t)) & \cos(q(t)) \\ \cos(p(t)) \cos(q(t)) & \sin(p(t)) \cos(q(t)) & -\sin(q(t)) \\ -\sin(p(t)) & \cos(p(t)) & 0 \end{pmatrix}$$

xd, yd, zd 座標系に変換する。その結果の加速度は、下記となり、(2.5.8) 式と一致している。

$$\begin{pmatrix} M \left(-\cos(L_{AM})^2 R W^2 - xd(t) \cos(L_{AM}) \sin(L_{AM}) W^2 - zd(t) \cos(L_{AM})^2 W^2 - 2 \left(\frac{d}{dt} yd(t) \right) \cos(L_{AM}) W + \frac{d^2}{dt^2} zd(t) \right) \\ M \left(-\cos(L_{AM}) \sin(L_{AM}) R W^2 - zd(t) \cos(L_{AM}) \sin(L_{AM}) W^2 + xd(t) \cos(L_{AM})^2 W^2 - xd(t) W^2 - 2 \left(\frac{d}{dt} yd(t) \right) \sin(L_{AM}) W + \frac{d^2}{dt^2} xd(t) \right) \\ M \left(-yd(t) W^2 + 2 \left(\frac{d}{dt} xd(t) \right) \sin(L_{AM}) W + 2 \left(\frac{d}{dt} zd(t) \right) \cos(L_{AM}) W + \frac{d^2}{dt^2} yd(t) \right) \end{pmatrix}$$

```
lhs(EQD1)[1][1]=rhs(EQD1)[1][1];
EQZD:expand(solve(%, 'diff(zd(t),t,2))[1]
*M);
lhs(EQD1)[2][1]=rhs(EQD1)[2][1];
EQXD:expand(solve(%, 'diff(xd(t),t,2))[1]
*M);
lhs(EQD1)[3][1]=rhs(EQD1)[3][1];
EQYD:expand(solve(%, 'diff(yd(t),t,2))[1]
*M);
EQXD1:lhs(EQXD)=first(rhs(EQXD))+rest(
rhs(EQXD),4);
EQYD1:lhs(EQYD)=rest(rhs(EQYD),1);
EQZD1:lhs(EQZD)=first(rhs(EQZD))+rest(
rhs(EQZD),3);
```

```
GEQ:(G[LAM]=sqrt((first(rhs(EQXD1))/M)^2
+(G-first(rhs(EQZD1))/M)^2));
expand(%);
subst([W^4=0],%);
%/G;
G[LAM]/G=sqrt(1-2*cos(L[AM])^2/G*R*W^2);
taylor(sqrt(1+a),a,0,4);
G[LAM]/G=(1-2*cos(L[AM])^2/G*R*W^2/2);
expand(%*G);
EQXD2:subst(0,R,EQXD1);
EQYD2:subst(0,R,EQYD1);
EQZD2:subst(0,R,EQZD1);
```

上式から運動方程式は、

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2}{dt^2} zd(t) \right) M &= \cos(L_{AM})^2 M R W^2 + \underline{xd(t) \cos(L_{AM}) \sin(L_{AM}) M W^2} + \underline{zd(t) \cos(L_{AM})^2 M W^2} \\ &\quad + 2 \left(\frac{d}{dt} yd(t) \right) \cos(L_{AM}) M W + F_{zd} \\ \left(\frac{d^2}{dt^2} xd(t) \right) M &= \cos(L_{AM}) \sin(L_{AM}) M R W^2 + \underline{zd(t) \cos(L_{AM}) \sin(L_{AM}) M W^2} \\ &\quad - \underline{xd(t) \cos(L_{AM})^2 M W^2} + \underline{xd(t) M W^2} + 2 \left(\frac{d}{dt} yd(t) \right) \sin(L_{AM}) M W + F_{xd} \\ \left(\frac{d^2}{dt^2} yd(t) \right) M &= \underline{yd(t) M W^2} - 2 \left(\frac{d}{dt} xd(t) \right) \sin(L_{AM}) M W - 2 \left(\frac{d}{dt} zd(t) \right) \cos(L_{AM}) M W + F_{yd} \end{aligned}$$

地球の半径： R は約 6370km で、地球の自転角速度： W は 0.0000727 1/sec である。 R には W^2 が掛かっており、 W^2 を含む項では、 $R \gg xd(t), yd(t), zd(t)$ であるので、 R 以外の項 (下線項) は省略でき、下記となる。

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2}{dt^2} xd(t) \right) M &= \cos(L_{AM}) \sin(L_{AM}) M R W^2 + 2 \left(\frac{d}{dt} yd(t) \right) \sin(L_{AM}) M W + F_{xd} \\ \left(\frac{d^2}{dt^2} yd(t) \right) M &= -2 \left(\frac{d}{dt} xd(t) \right) \sin(L_{AM}) M W - 2 \left(\frac{d}{dt} zd(t) \right) \cos(L_{AM}) M W + F_{yd} \\ \left(\frac{d^2}{dt^2} zd(t) \right) M &= \cos(L_{AM})^2 M R W^2 + 2 \left(\frac{d}{dt} yd(t) \right) \cos(L_{AM}) M W + F_{zd} \end{aligned} \quad (2.5.10)$$

上記から緯度により下記のように重力加速度は変化する。 W^4 の項を小さいとして省略し、Taylor 展開で高次項を省略すると、

$$\begin{aligned} G_{LAM} &= \sqrt{\left(G - \cos(L_{AM})^2 R W^2 \right)^2 + \cos(L_{AM})^2 \sin(L_{AM})^2 R^2 W^4} \\ &\approx \sqrt{G^2 - 2 \cos(L_{AM})^2 G R W^2} \\ &\approx G - \cos(L_{AM})^2 R W^2 \end{aligned} \quad (2.5.11)$$

RW^2 は、 $0.0337m/sec^2$ で、重力加速度： $9.8m/sec^2$ に比べて十分小さいので、 R を含む項 (下線項) も省略でき下記となる。

$$\left(\frac{d^2}{dt^2}xd(t)\right)M=2\left(\frac{d}{dt}yd(t)\right)\sin(L_{AM})MW+F_{xd} \quad (2.5.12)$$

$$\left(\frac{d^2}{dt^2}yd(t)\right)M=-2\left(\frac{d}{dt}xd(t)\right)\sin(L_{AM})MW-2\left(\frac{d}{dt}zd(t)\right)\cos(L_{AM})MW+F_{yd} \quad (2.5.13)$$

$$\left(\frac{d^2}{dt^2}zd(t)\right)M=2\left(\frac{d}{dt}yd(t)\right)\cos(L_{AM})MW+F_{zd} \quad (2.5.14)$$

例題 2.5.5 エレベータ中の放物運動

一定の加速度： A で上昇しているエレベータの中で、水平方向に初速度： V_0 で放出したとき、エレベータの中で見る運動は次のようになる。

まず、「2.5.1 並進座標系の運動方程式」（ページ 82）に示す方程式から、 y 軸を鉛直方向にとれば、運動方程式は下記となる。

```
kill(all);
kill(all);
X:x(t)=xm(t)+xd(t);
Y:y(t)=ym(t)+yd(t);
XYZ:matrix([ rhs(X) ],[ rhs(Y) ]);
VXYZ:diff(XYZ,t);
AXYZ:diff(VXYZ,t);
EQX:M*AXYZ[1][1]=0;
solve(EQX,diff(diff(xd(t),t),t))[1]*M;
EQX1:subst([diff(xm(t),t,2)=0],%);
EQY:M*AXYZ[2][1]=-M*G;
solve(EQY,diff(diff(yd(t),t),t))[1]*M;
EQY1:subst([diff(ym(t),t,2)=A],%);
```

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} xd(t)\right) M = 0$$

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} yd(t)\right) M = \left(-G - \frac{d^2}{dt^2} ym(t)\right) M$$

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} yd(t)\right) M = (-G - A) M$$

```
atvalue(diff(xd(t),t,1),t=0, V[0]);
atvalue(xd(t),t=0, 0);
atvalue(diff(yd(t),t,1),t=0, 0);
atvalue(yd(t),t=0, H);
XX:desolve(EQX1,xd(t));
YY:desolve(EQY1,yd(t));
ANS1:solve(XX,t)[1];
ANS:subst([xd(t)=XXX],ANS1);
EQ:YYY=subst([t=rhs(ANS)],rhs(YY));
subst([XXX=x,YYY=y],EQ);
```

$$xd(t) = V_0 t$$

$$yd(t) = H - \frac{t^2 G}{2} - \frac{t^2 A}{2}$$

$$y = H - \frac{x^2 G}{2 V_0^2} - \frac{x^2 A}{2 V_0^2}$$

```
G:9.8;
A:-7;
H:3;
V[0]:1;
plot2d(rhs(EQ),[XXX,0,1]);
```

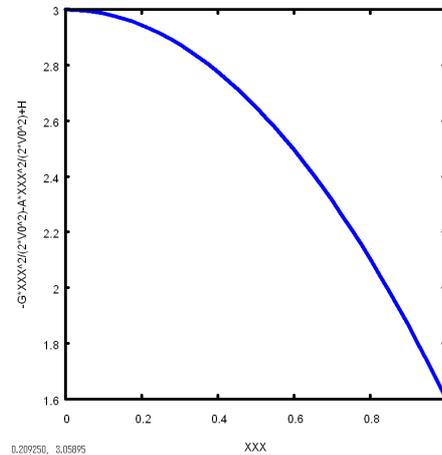


図 2.5.5: エレベータ中の放物運動

例題 2.5.6 列車中の単振り子

一定の加速度: A で水平方向に加速している列車の中に吊されている単振り子の運動は次のようになる。

まず、「2.5.1 並進座標系の運動方程式」(ページ 82) に示す方程式から、 x 軸を水平方向にとれば、運動方程式は下記となる。

```
kill(all);
X:x(t)=xm(t)+xd(t);
Y:y(t)=ym(t)+yd(t);
XYZ:matrix([ rhs(X) ],[ rhs(Y) ]);
VXYZ:diff(XYZ,t);
AXYZ:diff(VXYZ,t);
EQX:M*AXYZ[1][1]=0;
solve(EQX,diff(diff(xd(t),t),t))[1]*M;
EQX1:subst([diff(xm(t),t,2)=A],%);
EQY:M*AXYZ[2][1]=-M*G;
solve(EQY,diff(diff(yd(t),t),t))[1]*M;
EQY1:subst([diff(ym(t),t,2)=0],%);
```

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} xd(t)\right) M = -A M$$

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} yd(t)\right) M = -G M$$

これから、振り子には x 軸方向に $-A$ の加速度、 y 軸方向に $-G$ の加速度が働き、あたかも $\sqrt{A^2 + G^2}$ の加速度が働いたような挙動となる。

例題 2.5.7 一定回転する円管に通した質点の運動

半径: R の円周上に滑らかに束縛された質点 質量: M がある。円の直径を垂直に軸を中心に一定角速度: W で回転させる。「2.5.3 一定の角速度をもつ座標系の運動方程式」(ページ 84) に示す方程式から、 xd 軸と zd 軸面内の一定回転の運動となり、これにならって、座標の関係は下記となる。慣性系 $O-x, y, z$ と円に固定した座標

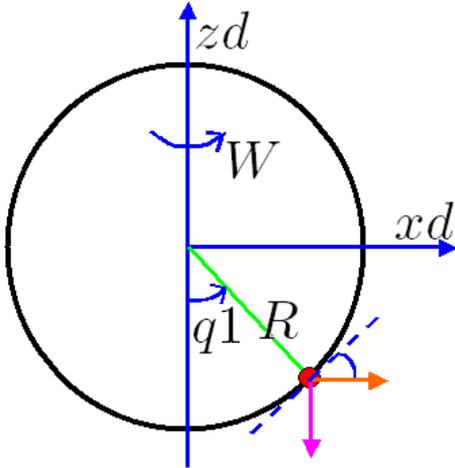


図 2.5.6: 一定回転する円と質点

系: $O'-xd, yd, zd$ の関係は下記となる。

$$x(t) = xd(t) \cos(p(t)) - yd(t) \sin(p(t))$$

$$y(t) = xd(t) \sin(p(t)) + yd(t) \cos(p(t))$$

$$z(t) = zd(t)$$

$$xd(t) = \sin(q(t)) R$$

$$yd(t) = 0$$

$$zd(t) = \cos(q(t)) R$$

$$p(t) = tW$$

$$q(t) = \pi - q1(t)$$

```
kill(all);
X:x(t)=xd(t)*cos(p(t))+yd(t)*cos(p(t)
+%pi/2);
Y:y(t)=xd(t)*sin(p(t))+yd(t)*sin(p(t)
+%pi/2);
Z:z(t)=zd(t);
XYZ:matrix([ rhs(X) ],[ rhs(Y) ],[
rhs(Z) ]);
```

```
XD:xd(t)=R*sin(q(t));
YD:yd(t)=0;
ZD:zd(t)=R*cos(q(t));
P:p(t)=W*t;
Q1:q(t)=%pi-q1(t);
subst([XD,YD,ZD],XYZ);
XYZD:subst([Q1,P],%);
VXYZD:diff(XYZD,t,1);
AXYZD:diff(XYZD,t,2);
T:T=trigsimp(M/2*transpose(VXYZD).VXYZD);
U:U=M*G*(1-cos(q1(t)))*R;
EQ:diff(diff(rhs(T),diff(q1(t),t,1),1),
t,1)
-diff(rhs(T),q1(t),1)=-diff(rhs(U),q1(t)
,1);
EQ1:solve(EQ,diff(q1(t),t,2))[1];
```

総運動エネルギー: T 、総ポテンシャル: U は、

$$T = \frac{\sin(q1(t))^2 M R^2 W^2 + \left(\frac{d}{dt} q1(t)\right)^2 M R^2}{2}$$

$$U = (1 - \cos(q1(t))) G M R$$

「2.1.7Lagrange の運動方程式」(ページ 12) に示す方程式から運動方程式は下記となる。

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d^2}{dt^2} q1(t)\right) M R^2 - \cos(q1(t)) \sin(q1(t)) M R^2 W^2 \\ & = -\sin(q1(t)) G M R \end{aligned}$$

上式を整理し、

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{dt^2} q1(t) \\ & = \frac{\cos(q1(t)) \sin(q1(t)) R W^2 - \sin(q1(t)) G}{R} \end{aligned} \quad (2.5.15)$$

時間微分項を削除すると定常状態が得られ、定常角度は下記となる。

```
EQC:last(lhs(EQ))=rhs(EQ);
solve(EQC,q1(t))[2];
ANSC:q1[0]=rhs(%);
```

$$q1(t) = \text{acos}\left(\frac{G}{R W^2}\right)$$

```

EQQ2:q1(t)=rhs(ANSC)+q2(t);
EQQ2D:diff(EQQ2,t,2);
subst([EQQ2D,EQQ2],EQ1);
trigexpand(%);
EQ2:expand(%);
subst([sin(q2(t))=q2(t),cos(q2(t))=1],%);
EQ3:subst([q2(t)^2=0],%);
assume(G>0,R>0,W>0);
atvalue(q2(t),t=0,Q[2]);
atvalue(diff(q2(t),t,1),t=0,0);
assume(G<R*W^2);
ANSQ2:desolve(EQ3,q2(t));
subst([ANSQ2],EQQ2);
forget(G<R*W^2);
assume(G>R*W^2);
ANSQ2:desolve(EQ3,q2(t));
subst([ANSQ2],EQQ2);

```

$q_1(t)$ を上記の定常項と変動項： $q_2(t)$ に分けて、

$$q_1(t) = a \cos\left(\frac{G}{RW^2}\right) + q_2(t) \quad (2.5.16)$$

上式を (2.5.15) 式に代入し、 $q_2(t)$ の式にすると、

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} q_2(t) = & -\cos(q_2(t)) \sin(q_2(t)) W^2 + \frac{2 \cos(q_2(t)) \sin(q_2(t)) G^2}{R^2 W^2} \\ & - \frac{\sin(q_2(t)) G^2}{R^2 W^2} - \frac{\sin(q_2(t))^2 G \sqrt{1 - \frac{G^2}{R^2 W^4}}}{R} + \frac{\cos(q_2(t))^2 G \sqrt{1 - \frac{G^2}{R^2 W^4}}}{R} \\ & - \frac{\cos(q_2(t)) G \sqrt{1 - \frac{G^2}{R^2 W^4}}}{R} \end{aligned}$$

上式で $q_2(t)$ の運動は小さいとして、高次の微小項を省略すると、

$$\frac{d^2}{dt^2} q_2(t) = \frac{q_2(t) G^2}{R^2 W^2} - q_2(t) W^2$$

$RW^2 > G$ とすると、質点の運動は下記となる。

$$q_2(t) = Q_2 \cos\left(\frac{t \sqrt{R^2 W^4 - G^2}}{RW}\right)$$

$$q_1(t) = Q_2 \cos\left(\frac{t \sqrt{R^2 W^4 - G^2}}{RW}\right) + a \cos\left(\frac{G}{RW^2}\right)$$

$RW^2 < G$ とすると、質点の運動は下記となる。

$$q_2(t) = Q_2 \cosh\left(\frac{t \sqrt{G^2 - R^2 W^4}}{RW}\right)$$

$$q_1(t) = Q_2 \cosh\left(\frac{t \sqrt{G^2 - R^2 W^4}}{RW}\right) + a \cos\left(\frac{G}{RW^2}\right)$$

例題 2.5.8 地球の自転を考慮した自由落下

自転角速度: W の地球上の緯度: L_{AM} で、高さ: H から質量: M を初速度零で自由に落下する質点の運動を求める。「2.5.4 自転する地球上に固定した座標系の運動方程式」(ページ 89) に示す運動方程式を使用する。

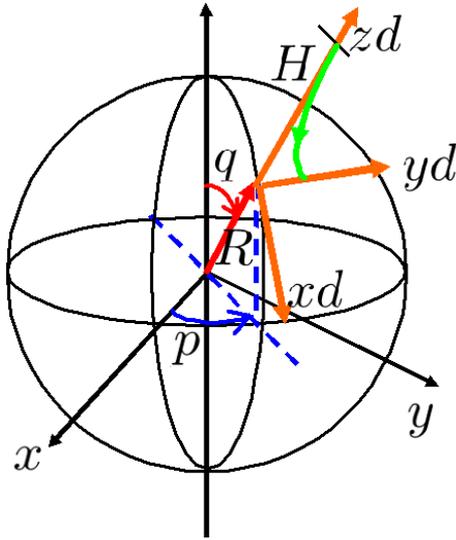


図 2.5.7: 地球の自転を考慮した自由落下

(2.5.12) 式、(2.5.13) 式、(2.5.14) 式をコピーし、下記の外力を与える。

$$F_{xd} = 0, \quad F_{yd} = 0, \quad F_{zd} = -GM$$

```
kill(all);
EQXA: ('diff(xd(t),t,2))*M=
  2*('diff(yd(t),t,1))*sin(L[AM])*M*W+
  F[xd];
EQYA: ('diff(yd(t),t,2))*M=
  -2*('diff(xd(t),t,1))*sin(L[AM])*M*W
  -2*('diff(zd(t),t,1))*cos(L[AM])*M*W
  +F[yd];
EQZA: ('diff(zd(t),t,2))*M=
  2*('diff(yd(t),t,1))*cos(L[AM])*M*W
  +F[zd];
FX:F[xd]=0;
FY:F[yd]=0;
FZ:F[zd]=-G*M;
EQX1:subst([FX],EQXA);
EQY1:subst([FY],EQYA);
EQZ1:subst([FZ],EQZA);
```

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2}{dt^2} x_d(t)\right) M &= 2 \left(\frac{d}{dt} y_d(t)\right) \sin(L_{AM}) M W \\ \left(\frac{d^2}{dt^2} y_d(t)\right) M &= -2 \left(\frac{d}{dt} x_d(t)\right) \sin(L_{AM}) M W \\ &\quad - 2 \left(\frac{d}{dt} z_d(t)\right) \cos(L_{AM}) M W \\ \left(\frac{d^2}{dt^2} z_d(t)\right) M &= 2 \left(\frac{d}{dt} y_d(t)\right) \cos(L_{AM}) M W \\ &\quad - G M \end{aligned} \quad (2.5.17)$$

```
atvalue(xd(t),t=0,0);
atvalue(diff(xd(t),t,1),t=0,0);
atvalue(yd(t),t=0,0);
atvalue(diff(yd(t),t,1),t=0,0);
atvalue(zd(t),t=0,H);
atvalue(diff(zd(t),t,1),t=0,0);
assume(W>0,sin(L[AM])^2>0,cos(L[AM])^2>0);
ANS2:desolve([EQX1,EQY1,EQZ1],[xd(t),
  yd(t),zd(t)]);
ANS21:trigsimp(%);
COXA:taylor(cos(a),a,0,3);
SINA:taylor(sin(a),a,0,3);
plot2d([cos(x),sin(x),1-x^2/2,x-x^3/6],
  [x,0,%pi],[y,-1,1]);
2*t*W=%pi/8;
solve(%,t)[1];
float(subst([W=0.0000727],%));
subst([cos(2*t*W)=1-(2*t*W)^2/2,
  sin(2*t*W)=2*t*W],ANS21);
trigsimp(%);
subst([cos(2*t*W)=1-(2*t*W)^2/2,
  sin(2*t*W)=2*t*W-(2*t*W)^3/6],ANS21);
ANS:trigsimp(%);
ANS1:solve(ANS[3],t)[2];
lhs(ANS[2])=subst([ANS1],rhs(ANS[2]));
subst([yd(t)=y,zd(t)=z],%);
```

(2.5.17) 式を高さ : H から自由落下する初期条件を考慮して解くと、

$$\begin{aligned} x_d(t) &= \frac{\cos(L_{AM}) \sin(L_{AM}) G \cos(2tW) + 2t^2 \cos(L_{AM}) \sin(L_{AM}) GW^2 - \cos(L_{AM}) \sin(L_{AM}) G}{4W^2} \\ y_d(t) &= -\frac{\cos(L_{AM}) G \sin(2tW) - 2t \cos(L_{AM}) GW}{4W^2} \\ z_d(t) &= -\frac{(\sin(L_{AM})^2 - 1) G \cos(2tW) + (2t^2 \sin(L_{AM})^2 G - 4H) W^2 + (1 - \sin(L_{AM})^2) G}{4W^2} \end{aligned} \quad (2.5.18)$$

W は十分小さいので、 $\cos(x)$, $\sin(x)$ を Taylor 展開の 3 次までの級数近似すると、

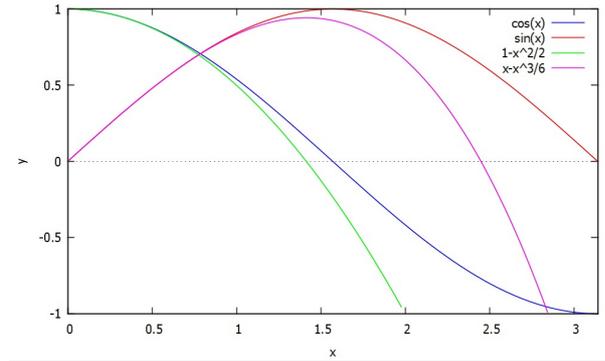


図 2.5.8: sin,cos 近似

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \dots, \quad \sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \dots$$

3 次までの級数で $\frac{\pi}{8}$ まで十分近似できるとすると、地球の自転角速度 : W は 0.0000727 1/sec であるから、

$$2tW = \frac{\pi}{8}$$

$$t = 2700.818993801404$$

時間 : t は、 $t < 2700 \text{ sec}$ まで十分近似できる。今、 $\cos(x)$, $\sin(x)$ を W が十分小さいので、2 次までの級数近似で (2.5.18) 式を近似すると、下記となり、自転の影響を受けない運動となり、意味がない。

$$[x_d(t) = 0, y_d(t) = 0, z_d(t) = \frac{2H - t^2 G}{2}]$$

$\cos(x)$, $\sin(x)$ を W が十分小さいので、3 次までの級数近似で (2.5.18) 式を近似すると、下記となる。

$$[x_d(t) = 0, y_d(t) = \frac{t^3 \cos(L_{AM}) GW}{3}, z_d(t) = \frac{2H - t^2 G}{2}]$$

上式から、時間 : t を消去すると運動の軌跡は、下記となり y 方向にずれる。

$$y = \frac{2^{\frac{3}{2}} \cos(L_{AM}) G \left(\frac{H-z}{G}\right)^{\frac{3}{2}} W}{3}$$

例題 2.5.9 地球の自転を考慮した投射運動とその着地点ずれ量

自転角速度: W の地球上の緯度: L_{AM} で、地上から初期速度: V_{X0}, V_{Y0}, V_{Z0} で投射した質量: M の運動と地球の自転がないときからのずれ量を求める。2.5.4 自転する地球上に固定した座標系の運動方程式 (ページ 89) に示す運動方程式を使用する。

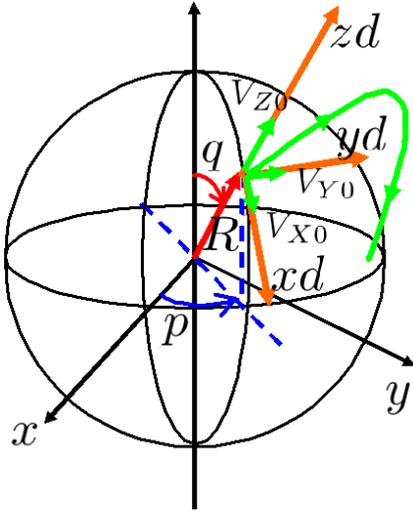


図 2.5.9: 地球の自転を考慮した投射着地点ずれ量

(2.5.12) 式、(2.5.13) 式、(2.5.14) 式をコピーし、下記の外力を与える。

$$F_{xd} = 0, \quad F_{yd} = 0, \quad F_{zd} = -GM$$

これを代入して、

```
kill(all);
EQXA:('diff(xd(t),t,2))*M
      =2*('diff(yd(t),t,1))*sin(L[AM])*M*W
      +F[xd];
EQYA:('diff(yd(t),t,2))*M
      =-2*('diff(xd(t),t,1))*sin(L[AM])*M*W
      -2*('diff(zd(t),t,1))*cos(L[AM])*M*W
      +F[yd];
EQZA:('diff(zd(t),t,2))*M
      =2*('diff(yd(t),t,1))*cos(L[AM])*M*W
      +F[zd];
FX:F[xd]=0;
FY:F[yd]=0;
FZ:F[zd]=-G*M;
EQX1:subst([FX],EQXA);
EQY1:subst([FY],EQYA);
EQZ1:subst([FZ],EQZA);
```

運動方程式は、

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2}{dt^2} xd(t)\right) M &= 2 \left(\frac{d}{dt} yd(t)\right) \sin(L_{AM}) M W \\ \left(\frac{d^2}{dt^2} yd(t)\right) M &= -2 \left(\frac{d}{dt} xd(t)\right) \sin(L_{AM}) M W \\ &\quad - 2 \left(\frac{d}{dt} zd(t)\right) \cos(L_{AM}) M W \\ \left(\frac{d^2}{dt^2} zd(t)\right) M &= 2 \left(\frac{d}{dt} yd(t)\right) \cos(L_{AM}) M W \\ &\quad - GM \end{aligned} \quad (2.5.19)$$

```
EQX0:subst([W=0],EQX1);
EQY0:subst([W=0],EQY1);
EQZ0:subst([W=0],EQZ1);
atvalue(xd(t),t=0,0);
atvalue(diff(xd(t),t,1),t=0,V[X0]);
atvalue(yd(t),t=0,0);
atvalue(diff(yd(t),t,1),t=0,V[Y0]);
atvalue(zd(t),t=0,0);
atvalue(diff(zd(t),t,1),t=0,V[Z0]);
ANS0:desolve([EQX0,EQY0,EQZ0],[xd(t),
yd(t),zd(t)]);
subst([xd(t)=XD0,yd(t)=YD0,zd(t)=0],ANS0);
XY0:solve(%,[t,XD0,YD0])[2];
```

$W = 0$ を代入すると、自転の影響がない場合の式が得られる。このときの運動方程式は下記となる。

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2}{dt^2} xd(t)\right) M &= 0 \\ \left(\frac{d^2}{dt^2} yd(t)\right) M &= 0 \\ \left(\frac{d^2}{dt^2} zd(t)\right) M &= -GM \end{aligned}$$

xd, yd, zd 成分の初期速度を V_{X0}, V_{Y0}, V_{Z0} とすると、運動は下記となる。

$$\begin{aligned} xd(t) &= t V_{X0}, \\ yd(t) &= t V_{Y0}, \\ zd(t) &= t V_{Z0} - \frac{t^2 G}{2} \end{aligned} \quad (2.5.20)$$

飛行時間と、着地点の座標: $XD0, YD0$ は下記となる。

$$\begin{aligned} t &= \frac{2 V_{Z0}}{G} \\ XD0 &= \frac{2 V_{X0} V_{Z0}}{G} \\ YD0 &= \frac{2 V_{Y0} V_{Z0}}{G} \end{aligned} \quad (2.5.21)$$

(2.5.19) 式の自転の影響を考慮した運動方程式を直接解くと、解は、

```
assume(W>0,sin(L[AM])^2>0,cos(L[AM])^2>0);
ANS1:dsolve([EQX1,EQY1,EQZ1],[xd(t),
yd(t),zd(t)]);
ANS11:trigsimp(%);
expand(%);
COXA:taylor(cos(a),a,0,3);
SINA:taylor(sin(a),a,0,3);
subst([cos(2*t*W)=1,sin(2*t*W)=2*t*W],
ANS11);
ANS10:trigsimp(%);
subst([W=0],%);
subst([cos(2*t*W)=1-(2*t*W)^2/2,
sin(2*t*W)=2*t*W],ANS11);
ANS10:trigsimp(%);
subst([W=0],%);
subst([xd(t)=XD1,yd(t)=YD1,zd(t)=0],
ANS10);
```

```
expand(%);
XY1:solve(%,[t,XD1,YD1])[2];
XY1-XY0;
ANS13:factor(%);
ANS131:ANS13[2];
ANS132:ANS13[3];
lhs(ANS131)=factor(subst([2=0],num(
rhs(ANS131)))/subst([V[Y0]=0],
denom(rhs(ANS131))));
lhs(ANS132)=factor(subst([V[Y0]^3=0],
num(rhs(ANS132)))/subst([V[Y0]=0],
denom(rhs(ANS132))));
subst([cos(2*t*W)=1-(2*t*W)^2/2,
sin(2*t*W)=2*t*W-(2*t*W)^3/6],
ANS11);
ANS10:trigsimp(%);
subst([W=0],%);
```

$W > 0, \sin(L_{AM})^2 > 0, \cos(L_{AM})^2 > 0$ として、解くと、

$$\begin{aligned}
 xd(t) &= \frac{\cos(L_{AM}) \sin(L_{AM}) \sin(2tW) V_{Z0}}{2W} - t \cos(L_{AM}) \sin(L_{AM}) V_{Z0} - \frac{\sin(L_{AM}) \cos(2tW) V_{Y0}}{2W} \\
 &\quad + \frac{\sin(L_{AM}) V_{Y0}}{2W} - \frac{\cos(L_{AM})^2 \sin(2tW) V_{X0}}{2W} + \frac{\sin(2tW) V_{X0}}{2W} + t \cos(L_{AM})^2 V_{X0} \\
 &\quad + \frac{\cos(L_{AM}) \sin(L_{AM}) G \cos(2tW)}{4W^2} - \frac{\cos(L_{AM}) \sin(L_{AM}) G}{4W^2} + \frac{t^2 \cos(L_{AM}) \sin(L_{AM}) G}{2} \\
 yd(t) &= \frac{\cos(L_{AM}) \cos(2tW) V_{Z0}}{2W} - \frac{\cos(L_{AM}) V_{Z0}}{2W} + \frac{\sin(2tW) V_{Y0}}{2W} + \frac{\sin(L_{AM}) \cos(2tW) V_{X0}}{2W} \\
 &\quad - \frac{\sin(L_{AM}) V_{X0}}{2W} - \frac{\cos(L_{AM}) G \sin(2tW)}{4W^2} + \frac{t \cos(L_{AM}) G}{2W} \\
 zd(t) &= -\frac{\sin(L_{AM})^2 \sin(2tW) V_{Z0}}{2W} + \frac{\sin(2tW) V_{Z0}}{2W} + t \sin(L_{AM})^2 V_{Z0} - \frac{\cos(L_{AM}) \cos(2tW) V_{Y0}}{2W} \\
 &\quad + \frac{\cos(L_{AM}) V_{Y0}}{2W} + \frac{\cos(L_{AM}) \sin(L_{AM}) \sin(2tW) V_{X0}}{2W} - t \cos(L_{AM}) \sin(L_{AM}) V_{X0} \\
 &\quad - \frac{\sin(L_{AM})^2 G \cos(2tW)}{4W^2} + \frac{G \cos(2tW)}{4W^2} + \frac{\sin(L_{AM})^2 G}{4W^2} - \frac{G}{4W^2} - \frac{t^2 \sin(L_{AM})^2 G}{2}
 \end{aligned} \tag{2.5.22}$$

W は十分小さいので、 $\cos(x)$, $\sin(x)$ を Taylor 展開の 3 次までの級数近似すると、

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \dots, \quad \sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \dots$$

今、 $\cos(x)$, $\sin(x)$ を 1 次までの級数近似で (2.5.22) 式を近似すると、下記となり、自転の影響を受けない運動となり、意味がなく、(2.5.20) 式の結果を含んでいない。

$$[xd(t) = \frac{2tV_{X0} + t^2 \cos(L_{AM}) \sin(L_{AM}) G}{2}, yd(t) = tV_{Y0}, zd(t) = \frac{2tV_{Z0} - t^2 \sin(L_{AM})^2 G}{2}]$$

$\cos(x)$, $\sin(x)$ を 2 次までの級数近似で (2.5.22) 式を近似すると、下記となる。

$$\begin{aligned}
x_d(t) &= t^2 \sin(L_{AM}) W V_{Y0} + t V_{X0}, \\
y_d(t) &= -t^2 \cos(L_{AM}) W V_{Z0} + t V_{Y0} - t^2 \sin(L_{AM}) W V_{X0}, \\
z_d(t) &= \frac{2t V_{Z0} + 2t^2 \cos(L_{AM}) W V_{Y0} - t^2 G}{2}
\end{aligned} \tag{2.5.23}$$

自転の影響を受けない運動として、上式で $W = 0$ とすると、次式となり、(2.5.20) 式の結果と一致する。

$$x_d(t) = t V_{X0}, y_d(t) = t V_{Y0}, z_d(t) = \frac{2t V_{Z0} - t^2 G}{2}$$

(2.5.23) 式で $z_d(t) = 0$ として、着地点の座標： $XD1, YD1$ と時間： t は下記となる。

$$\begin{aligned}
t &= -\frac{2V_{Z0}}{2\cos(L_{AM})WV_{Y0} - G}, \\
XD1 &= \frac{4\sin(L_{AM})WV_{Y0}V_{Z0}^2 + (2GV_{X0} - 4\cos(L_{AM})WV_{X0}V_{Y0})V_{Z0}}{4\cos(L_{AM})^2W^2V_{Y0}^2 - 4\cos(L_{AM})GWV_{Y0} + G^2}, \\
YD1 &= -\frac{4\cos(L_{AM})WV_{Z0}^3 + 4\sin(L_{AM})WV_{X0}V_{Z0}^2 + (4\cos(L_{AM})WV_{Y0}^2 - 2GV_{Y0})V_{Z0}}{4\cos(L_{AM})^2W^2V_{Y0}^2 - 4\cos(L_{AM})GWV_{Y0} + G^2}
\end{aligned} \tag{2.5.24}$$

(2.5.24) 式と (2.5.21) 式の差から着地点誤差が得られ、下記となる。

$$\begin{aligned}
XD1 - XD0 &= \frac{4WV_{Y0}V_{Z0} \left(\sin(L_{AM})GV_{Z0} - 2\cos(L_{AM})^2WV_{X0}V_{Y0} + \cos(L_{AM})GV_{X0} \right)}{G(2\cos(L_{AM})WV_{Y0} - G)^2} \\
YD1 - YD0 &= -\frac{4WV_{Z0} \left(\cos(L_{AM})GV_{Z0}^2 + \sin(L_{AM})GV_{X0}V_{Z0} + 2\cos(L_{AM})^2WV_{Y0}^3 - \cos(L_{AM})GV_{Y0}^2 \right)}{G(2\cos(L_{AM})WV_{Y0} - G)^2}
\end{aligned}$$

上式を $G \gg W$ から簡素化して着地点ずれは下記となる。

$$\begin{aligned}
XD1 - XD0 &= \frac{4WV_{Y0}V_{Z0}(\sin(L_{AM})V_{Z0} + \cos(L_{AM})V_{X0})}{G^2} \\
YD1 - YD0 &= -\frac{4WV_{Z0}(\cos(L_{AM})V_{Z0}^2 + \sin(L_{AM})V_{X0}V_{Z0} - \cos(L_{AM})V_{Y0}^2)}{G^2}
\end{aligned}$$

$\cos(x), \sin(x)$ を 3 次までの級数近似で (2.5.22) 式を近似すると、下記となる。

$$\begin{aligned}
x_d(t) &= -\frac{2t^3 \cos(L_{AM}) \sin(L_{AM}) W^2 V_{Z0} - 3t^2 \sin(L_{AM}) W V_{Y0} + (2t^3 \sin(L_{AM})^2 W^2 - 3t) V_{X0}}{3}, \\
y_d(t) &= -\frac{3t^2 \cos(L_{AM}) W V_{Z0} + (2t^3 W^2 - 3t) V_{Y0} + 3t^2 \sin(L_{AM}) W V_{X0} - t^3 \cos(L_{AM}) G W}{3}, \\
z_d(t) &= -\frac{(4t^3 \cos(L_{AM})^2 W^2 - 6t) V_{Z0} - 6t^2 \cos(L_{AM}) W V_{Y0} + 4t^3 \cos(L_{AM}) \sin(L_{AM}) W^2 V_{X0} + 3t^2 G}{6}
\end{aligned} \tag{2.5.25}$$

自転の影響を受けない運動として、上式で $W = 0$ とすると、次式となり、2 次までの級数近似と同様に、(2.5.20) 式の結果と一致する。

$$[x_d(t) = t V_{X0}, y_d(t) = t V_{Y0}, z_d(t) = -\frac{3t^2 G - 6t V_{Z0}}{6}]$$

(2.5.25) 式は 3 次の項が増えたが、結果として、着地点ずれを $G \gg W$ で簡素化するので、2 次までの級数近似の結果と同じになる。

例題 2.5.10 自転する地球上での単振り子の運動

自転角速度： W の地球上の緯度： L_{AM} で、振り子長さ： L 、質量： M の単振り子の運動を求める。2.5.4 自転する地球上に固定した座標系の運動方程式（ページ 86）に示す運動方程式を使用する。

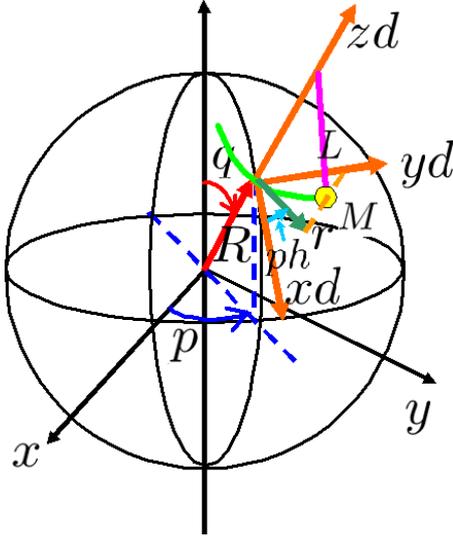


図 2.5.10: 自転する地球上での単振り子の運動

(2.5.12) 式、(2.5.13) 式、(2.5.14) 式をコピーし、下記の外力を与える。

$$F_{xd} = -\frac{xd(t) GM}{L}, \quad F_{yd} = -\frac{yd(t) GM}{L},$$

振り子の振幅が小さいとして、 $zd(t)$ 方向の式を省略し、 $yd(t)$ 方向の運動方程式で、 $\frac{d}{dt} zd(t) = 0$ とすると下記となる。

```
kill(all);
EQXA:('diff(xd(t),t,2))*M=
  2*('diff(yd(t),t,1))*sin(L[AM])*M*W
  +F[xd];
EQYA:('diff(yd(t),t,2))*M=
  -2*('diff(xd(t),t,1))*sin(L[AM])*M*W
  -2*('diff(zd(t),t,1))*cos(L[AM])*M*W
  +F[yd];
FX:F[xd]=-M*G*xd(t)/L;
FY:F[yd]=-M*G*yd(t)/L;
DZ:diff(zd(t),t,1)=0;
EQX1:subst([FX],EQXA);
EQY1:subst([FY,DZ],EQYA);
```

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} xd(t)\right) M = 2 \left(\frac{d}{dt} yd(t)\right) \sin(L_{AM}) M W - \frac{xd(t) GM}{L}$$

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} yd(t)\right) M = -2 \left(\frac{d}{dt} xd(t)\right) \sin(L_{AM}) M W - \frac{yd(t) GM}{L}$$

下記の $xd-yd$ 面内の極座標表示を上式に代入し、変換マトリックス： TR を掛けて円柱座標に変換すると下記となる。

$$xd(t) = r(t) \cos(ph(t)), \quad yd(t) = r(t) \sin(ph(t))$$

$$TR = \begin{pmatrix} \cos(ph(t)) & \sin(ph(t)) \\ -\sin(ph(t)) & \cos(ph(t)) \end{pmatrix}$$

```
XD:xd(t)=r(t)*cos(ph(t));
YD:yd(t)=r(t)*sin(ph(t));
DXD:diff(XD,t);
DYD:diff(YD,t);
DDXD:diff(DXD,t);
DDYD:diff(DYD,t);
subst(rhs(DDXD),lhs(DDXD),EQX1);
subst(rhs(DYD),lhs(DYD),%);
EQR1:expand(subst(rhs(XD),lhs(XD),%));
subst(rhs(DDYD),lhs(DDYD),EQY1);
subst(rhs(DXD),lhs(DXD),%);
EQR2:expand(subst(rhs(YD),lhs(YD),%));
EQXY:matrix([EQR1],[EQR2]);
TR:matrix([cos(ph(t)), sin(ph(t))],
  [-sin(ph(t)), cos(ph(t))]);
EQRP:trigsimp(TR.EQXY);
EQR1:EQRP[1][1];
EQR2:EQRP[2][1];
```

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} r(t) - r(t) \left(\frac{d}{dt} ph(t)\right)^2\right) M = \frac{2r(t) \left(\frac{d}{dt} ph(t)\right) \sin(L_{AM}) L M W - r(t) GM}{L} \quad (2.5.26)$$

$$\left(2 \left(\frac{d}{dt} ph(t)\right) \left(\frac{d}{dt} r(t)\right) + r(t) \left(\frac{d^2}{dt^2} ph(t)\right)\right) M = -2 \left(\frac{d}{dt} r(t)\right) \sin(L_{AM}) M W \quad (2.5.27)$$

(2.5.27) 式に $r(t)$ を掛けて積分し、運動方程式に代入して解くと下記となる。

```
integrate(expand(r(t)*EQR2),t);
-r(t)^2*(diff(ph(t),t,1))*M=r(t)^2
*sin(L[AM])*M*W;
ANSPH:solve(%,diff(ph(t),t))[1];
ANSR:subst(rhs(ANSPH),lhs(ANSPH),EQR1);
atvalue(r(t),t=0,R[0]);
atvalue(diff(r(t),t,1),t=0,0);
assume(G>0,L>0);
desolve(ANSR,r(t));
```

$$-r(t)^2 \left(\frac{d}{dt} ph(t) \right) M = r(t)^2 \sin(L_{AM}) M W$$

上式から、

$$\frac{d}{dt} ph(t) = -\sin(L_{AM}) W$$

振り子が下記の一定の旋回角速度で回ることがわかる。上式を (2.5.26) 式に代入し、

$$\begin{aligned} M \left(\frac{d^2}{dt^2} r(t) - r(t) \sin(L_{AM})^2 W^2 \right) \\ = \frac{-2r(t) \sin(L_{AM})^2 L M W^2 - r(t) G M}{L} \end{aligned}$$

上式を解いて、振り子の運動は、

$$r(t) = R_0 \cos \left(\frac{t \sqrt{\sin(L_{AM})^2 L W^2 + G}}{\sqrt{L}} \right)$$

以上から、振り子の運動は $\sin(L_{AM}) W$ の一定角速度で北半球では右回りに旋回し、周期は $G \gg L W^2$ であるので自転の影響が無い場合と変わらない。

例題 2.5.11 自転する地球上で滑らかな水平面上の運動

自転角速度： W の地球上の緯度： L_{AM} で、滑らかな水平面上にある質量： M の運動を求めろ。2.5.4 自転する地球上に固定した座標系の運動方程式（ページ 86）に示す運動方程式を使用する。

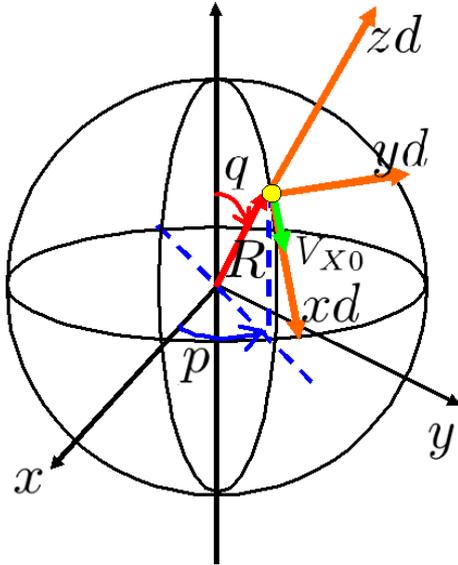


図 2.5.11: 自転する地球上で滑らかな水平面上の運動

(2.5.12) 式、(2.5.13) 式、(2.5.14) 式をコピーし、下記の外力を与える。

$$F_{xd} = 0, \quad F_{yd} = 0$$

$zd(t)$ 方向の運動がないため、 $zd(t)$ 方向の式を省略する。また、 $yd(t)$ 方向の運動方程式で $\frac{d}{dt} zd(t) = 0$ とすると下記となる。

```
kill(all);
EQXA:('diff(xd(t),t,2))*M=2*('diff(yd(t),t,1))*sin(L[AM])*M*W+F[xd];
EQYA:('diff(yd(t),t,2))*M=-2*('diff(xd(t),t,1))*sin(L[AM])*M*W-2*('diff(zd(t),t,1))*cos(L[AM])*M*W+F[yd];
FX:F[xd]=0;
FY:F[yd]=0;
DZ:diff(zd(t),t,1)=0;
EQX1:subst([FX],EQXA);
EQY1:subst([FY,DZ],EQYA);
```

$xd-yd$ 面内の運動であるので、 $zd(t)$ 方向の式を省略し、運動方程式は $xd(t)$ 方向と $yd(t)$ 方向の下記となる。

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} xd(t)\right) M = 2 \left(\frac{d}{dt} yd(t)\right) \sin(L_{AM}) M W$$

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} yd(t)\right) M = -2 \left(\frac{d}{dt} xd(t)\right) \sin(L_{AM}) M W$$

原点から $xd(t)$ 方向へ初期速度： V_{X0} で質点を放出する初期条件でと運動方程式を解くと下記となる。

```
assume(sin(L[AM])>0,W>0);
atvalue(xd(t),t=0, 0);
atvalue(diff(xd(t),t,1),t=0, V[X0]);
atvalue(yd(t),t=0, 0);
atvalue(diff(yd(t),t,1),t=0, 0);
ANS:desolve([EQX1,EQY1],[xd(t),yd(t)]);
XD:ANS[1];
YD:ANS[2];
YD0:lhs(YD)-last(rhs(YD))=first(rhs(YD));
(XD^2+YD0^2);
sqrt(lhs(%)=trigsimp(rhs(%)));
```

$$xd(t) = \frac{\sin(2t \sin(L_{AM}) W) V_{X0}}{2 \sin(L_{AM}) W} \quad (2.5.28)$$

$$yd(t) = \frac{\cos(2t \sin(L_{AM}) W) V_{X0}}{2 \sin(L_{AM}) W} - \frac{V_{X0}}{2 \sin(L_{AM}) W}$$

上式を下記の様に変換し、

$$\frac{V_{X0}}{2 \sin(L_{AM}) W} + yd(t) = \frac{\cos(2t \sin(L_{AM}) W) V_{X0}}{2 \sin(L_{AM}) W} \quad (2.5.29)$$

(2.5.28) 式、(2.5.29) 式の両辺を自乗し、これらの和を求めると、

$$\left(\frac{V_{X0}}{2 \sin(L_{AM}) W} + yd(t)\right)^2 + xd(t)^2 = \frac{V_{X0}^2}{4 \sin(L_{AM})^2 W^2}$$

上式は半径： $R = \left|\frac{V_{X0}}{2 \sin(L_{AM}) W}\right|$ の円を表しており、北半球では右回りに、南半球では左回りに回ることを示している。

2.6 運動量

例題 2.6.1 弾性球の止まるまでの運動距離と時間

反発係数： E の机で、高さ： h_0 から弾性球を落とす。運動が止まるまでの距離と時間を求める。

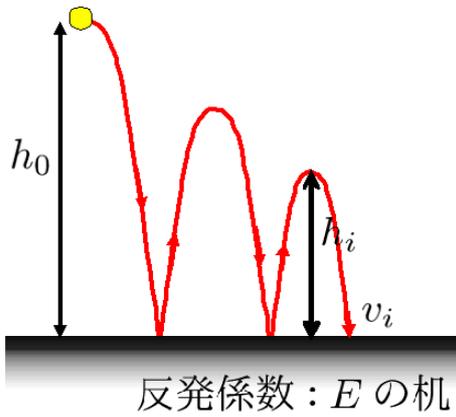


図 2.6.1: 弾性球の運動

```
kill(all);
EQ:M*diff(v(t),t,1)=M*G;
atvalue(v(t),t=0,0);
ANS1:desolve(EQ,v(t));
ANS2:h(t)=integrate(rhs(ANS1),t,0,t);
solve(ANS1,t)[1];
lhs(ANS2)=subst([%],rhs(ANS2));
HI:h[i]=v[i]^2/2/G;
VI:solve(HI,v[i]);
TI:t[i]=v[i]/G;
subst([VI[2]],TI);
TIO:subst([i=0],%);
assume(E<1 and E>0);
VI1:v[i+1]=E*v[i];
HI1:h[i+1]=v[i+1]^2/2/G;
subst([VI1],HI1);
HHI1:h[i+1]=h[i]*E^2;
```

弾性球の自由落下の運動方程式は、球の質量： M 、速度： $v(t)$ 、距離： $h(t)$ とすると、

$$\left(\frac{d}{dt} v(t)\right) M = G M$$

上式を初期条件： $t = 0$ で初速零で解いて速度と距離は、

$$v(t) = tG, \quad h(t) = \frac{t^2 G}{2}$$

両式から、時間と速度、距離と速度の関係式は、

$$t = \frac{v(t)}{G}, \quad h(t) = \frac{v(t)^2}{2G}$$

以上から、

弾性球の最高高さ： h_i と机上での速度： v_i の関係は

$$h_i = \frac{v_i^2}{2G}$$

落下時間は、

$$t_i = \frac{v_i}{G} \tag{2.6.1}$$

弾性球の反発係数： E の時、机に当たる速度： v_i と机から反発して出て行く速度： v_{i+1} の関係は次式となる。

$$v_{i+1} = v_i E \tag{2.6.2}$$

速度と高さの関係式と上式から次の高さは次式で得られる。

$$h_{i+1} = h_i E^2 \tag{2.6.3}$$

```
H4:subst([i=4],HHI1);
H3:subst([i=3],HHI1);
H2:subst([i=2],HHI1);
H1:subst([i=1],HHI1);
H0:subst([i=0],HHI1);
subst([H3],H4);
subst([H2],%);
subst([H1],%);
subst([H0],%);
h[n]=h[0]*E^(2*n);
HH:h=h[0]+2*sum(h[0]*E^(2*n),n,1,inf);
simpsum:true;
HH1:factor(HH);
simpsum:false;
```

(2.6.3) 式で $i = 0 \rightarrow 4$ までを記述すると、

$$h_1 = h_0 E^2, \quad h_2 = h_1 E^2, \quad h_3 = h_2 E^2$$

$$h_4 = h_3 E^2, \quad h_5 = h_4 E^2$$

$i = 4, 3$ 式から、順次代入し、 h_5 は下記のように記述できる。

$$h_5 = h_3 E^4, \quad h_5 = h_2 E^6$$

$$h_5 = h_1 E^8, \quad h_5 = h_0 E^{10}$$

上式より、一般式は、

$$h_n = h_0 E^{2n}$$

弾性球が進んだ距離は、 h_0 は一倍、以降は二倍して無限回の和をとり、

$$h = 2h_0 \left(\sum_{n=1}^{\infty} E^{2n} \right) + h_0$$

simpsum:true; とすると級数をまとめ

$$h = -\frac{h_0 (E^2 + 1)}{(E - 1) (E + 1)}$$

ここで、すぐに `simpsum:false;` としておかないと、`kill(all);` としても `simpsum:true;` が生きている。次に、時間の関係について、

```

TT1:t[i+1]=v[i+1]/G;
subst(rhs(VI1),lhs(VI1),TT1);
TTI1:t[i+1]=t[i]*E;
T4:subst([i=4],TTI1);
T3:subst([i=3],TTI1);
T2:subst([i=2],TTI1);
T1:subst([i=1],TTI1);
T0:subst([i=0],TTI1);
subst([T3],T4);
subst([T2],%);
subst([T1],%);
subst([T0],%);
t[n]=t[0]*E^(n);

```

(2.6.1) 式と (2.6.2) 式から、時間と反発係数の関係を求め、

$$t_{i+1} = \frac{v_{i+1}}{G}$$

$$t_{i+1} = t_i E$$

上式で、 $i = 0 \rightarrow 4$ までを記述すると、

$$t_5 = t_4 E, \quad t_4 = t_3 E, \quad t_3 = t_2 E$$

$$t_2 = t_1 E, \quad t_1 = t_0 E$$

$i = 4, 3$ 式から、順次代入し、 t_5 は下記のように記述できる。

$$t_5 = t_3 E^2, \quad t_5 = t_2 E^3$$

$$t_5 = t_1 E^4, \quad t_5 = t_0 E^5$$

上式より、一般式は、

$$t_n = t_0 E^n$$

```

TT:t=t[0]+2*sum(t[0]*E^(n),n,1,inf);
simpsum:true;
TT1:factor(TT);
simpsum:false;

```

弾性球のかかった時間は、 t_0 は一倍、以降は二倍して無限回の和をとり、

$$t = 2t_0 \left(\sum_{n=1}^{\infty} E^n \right) + t_0$$

`simpsum:true;` とすると級数をまとめ

$$t = -\frac{t_0 (E+1)}{E-1}$$

例題 2.6.2 二つの弾性体の正面衝突

質量： m 、速度： u の弾性体が質量： M 、速度： U の弾性体に正面衝突し、その後、それぞれ速度： v, V で離れていく。弾性体の反発係数： e とするとき、衝突後の両弾性体の速度を求める。

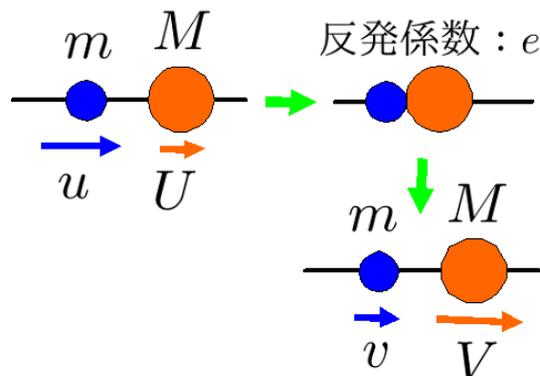


図 2.6.2: 二つの弾性体の正面衝突

```

kill(all);
EQ1:m*u+M*U=m*v+M*V;
EQ2:m*u^2/2+M*U^2/2=m*v^2/2+M*V^2/2+W;
EQ3:(V-v)/(u-U)=e;
ANS:solve([EQ1,EQ2,EQ3],[v,V,W]);
factor(ANS[1][3]);

```

衝突前の運動量は、

$$MU + mu$$

衝突後の運動量は、

$$MV + mv$$

衝突時の反発力は内力であるから、運動量保存は成り立ち、

$$MU + mu = MV + mv$$

衝突前の運動エネルギーは、衝突後の運動エネルギーと反発時のエネルギーロス： W の関係は、

$$\frac{MU^2}{2} + \frac{mu^2}{2} = W + \frac{MV^2}{2} + \frac{mv^2}{2}$$

衝突前後の相対速度比と反発係数： e の関係は、

$$\frac{V-v}{u-U} = e$$

以上の三式から、衝突後の両弾性体の速度は、

$$v = \frac{(e+1)MU - eUm + mu}{M+m},$$

$$V = \frac{(M-em)U + (e+1)mu}{M+m}$$

反発時のエネルギーロス： W は、

$$W = -\frac{(e-1)(e+1)mM(U-u)^2}{2(M+m)}$$

例題 2.6.3 二つの弾性体の斜め衝突

質量： m 、速度： u_X, u_Y の弾性体が質量： M 、速度： U_X, U_Y の弾性体に衝突し、その後、それぞれ速度： v_X, v_Y と V_X, V_Y で離れていく。弾性体の反発係数： e とするとき、衝突後の両弾性体の速度を求める。

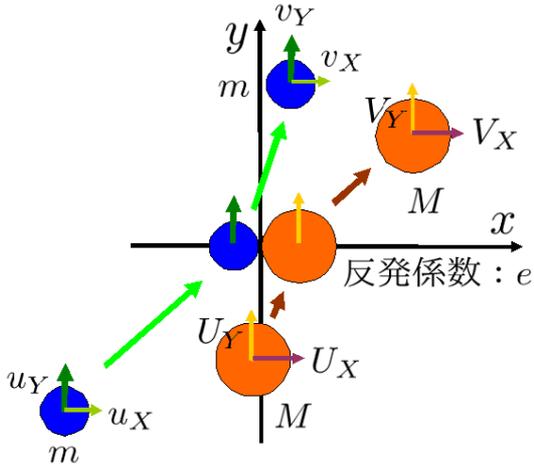


図 2.6.3: 二つの弾性体の斜め衝突

```
kill(all);
EQ1:m*u[X]+M*U[X]=m*v[X]+M*V[X];
EQ2:m*u[Y]+M*U[Y]=m*v[Y]+M*V[Y];
EQ3:u[Y]=v[Y];
EQ4:U[Y]=V[Y];
EQ5:(V[X]-v[X])/(u[X]-U[X])=e;
ANS:solve([EQ1,EQ3,EQ4,EQ5],[v[X],v[Y],V[X],V[Y]]);
```

x 軸方向の衝突前の運動量と衝突後の運動量は等しいから、

$$M U_X + m u_X = M V_X + m v_X$$

y 軸方向の衝突前の運動量と衝突後の運動量は等しいから、

$$M U_Y + m u_Y = M V_Y + m v_Y$$

衝突時の y 方向速度は変化ないので、

$$u_Y = v_Y, \quad U_Y = V_Y$$

衝突時の x 方向速度は、衝突前後の相対速度比と反発係数： e の関係は、

$$\frac{V_X - v_X}{u_X - U_X} = e$$

以上から、衝突後の両弾性体の速度は、

$$v_X = \frac{(e+1) M U_X + (m - e M) u_X}{M + m}, v_Y = u_Y$$

$$V_X = \frac{(M - e m) U_X + (e + 1) m u_X}{M + m}, V_Y = U_Y$$

例題 2.6.4 弾丸の撃ち込み

質量： m 、速度： v の弾丸を質量： M の壁に直角に打ち込み、深さ： h だけめり混み、速度： V で動いたとする。ここで、弾丸の壁による抵抗を R とする。

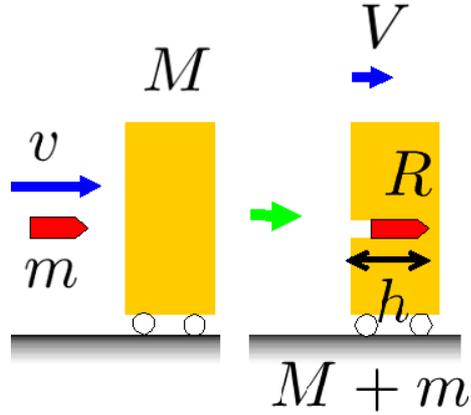


図 2.6.4: 弾丸の撃ち込み

```
kill(all);
EQ1:(m+M)*V-m*v=0;
EQ2:m*v^2/2=R*h+(m+M)*V^2/2;
solve([EQ1,EQ2],[h,V]);
```

弾丸が壁に当たる前の運動量は、

$$m v$$

弾丸が壁にめり込んだ後の運動量は、

$$(M + m) V$$

運動量差が力積となるので、

$$(M + m) V - m v = 0$$

弾丸が壁に当たる前の運動エネルギーは、弾丸が壁にめり込んだ後の運動エネルギーと弾丸の壁による抵抗による仕事に等しいから、

$$\frac{m v^2}{2} = \frac{(M + m) V^2}{2} + h R$$

上記の二式を解くと、

$$h = \frac{m v^2 M}{(2 M + 2 m) R}$$

$$V = \frac{m v}{M + m}$$

例題 2.6.5 砲身と砲弾の運動

長さ： L 、質量： M の砲身から質量： m の砲弾を全圧力： P で撃ち出す。砲身に作用する抵抗： R として、砲弾の初速度： v 、砲身の後退距離： S を求める。
 砲弾が撃ち出されるまでをフェーズ 1、この後砲身が止まるまでをフェーズ 2 とする。フェーズ 1 において、砲弾が撃ち出されるまでの時間： T_1 、砲弾が撃ち出されたときの砲身の後退距離： X 、後退速度： V とする。

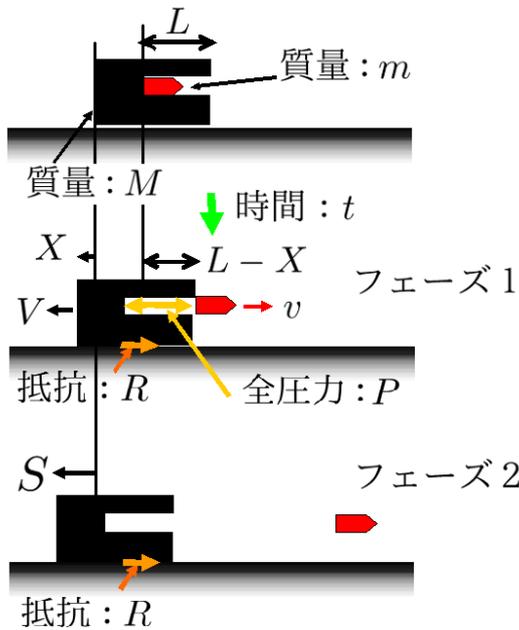


図 2.6.5: 砲身と砲弾の運動

```
kill(all);
assume(m>0,M>0,P>R);
EQ1:P*(L-X)=1/2*m*v^2;
EQ2:(P-R)*X=1/2*M*V^2;
EQ3:M*diff(x(t),t,2)=(P-R);
atvalue(x(t),t=0,0);
atvalue(diff(x(t),t,1),t=0,0);
desolve(EQ3,x(t));
EQ31:subst([x(t)=X,t=T[1]],%);
EQ4:(m*v-M*V)-(m*0+M*0)=R*T[1];
```

ここで与えられていないのは、 X, S, v, V, T_1 の五個であるので、

(1) フェーズ 1

砲弾が撃ち出されるまでで、

砲弾の仕事：

$$P(L - X) = \frac{m v^2}{2} \quad (2.6.4)$$

砲身の仕事：

$$(P - R) X = \frac{M V^2}{2} \quad (2.6.5)$$

砲身の移動量： X が不明なので、その運動方程式：

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} x(t) \right) M = P - R$$

これを解いて、

$$X = -\frac{T_1^2 (R - P)}{2M} \quad (2.6.6)$$

初期： $t = 0$ の砲弾と砲身の運動量は、

$$(m \times 0 + M \times 0)$$

砲弾が打ち出される瞬間の砲弾と砲身の運動量は、

$$m v - M V$$

上記運動量の差が力積であるから、作用力： R と作用時間： T_1 から、

$$(m v - M V) - (m \times 0 + M \times 0) = T_1 R \quad (2.6.7)$$

(2) フェーズ 2

砲弾が撃ち出された後、

$$\text{EQ5: } R \cdot (S - X) = \frac{1}{2} M \cdot V^2;$$

砲身の仕事：

$$R(S - X) = \frac{M V^2}{2} \quad (2.6.8)$$

(2.6.4) 式、(2.6.5) 式、(2.6.6) 式、(2.6.7) 式と (2.6.8) 式の連立方程式の解を求める。

```
ANS:factor(solve([EQ1,EQ2,EQ31,EQ4,EQ5],
[X,v,V,S,T[1]]));
ANS[1];
```

上式から、下記が得られる。

$$X = \frac{m L (R - P)}{m R - M P - m P}$$

$$v = \frac{\sqrt{2} \sqrt{M} P \sqrt{-\frac{L}{m R + (-M - m) P}}}{\sqrt{m}}$$

$$V = -\frac{\sqrt{2} \sqrt{m} (R - P) \sqrt{-\frac{L}{m R + (-M - m) P}}}{\sqrt{M}}$$

$$S = \frac{m L P (R - P)}{R (m R - M P - m P)}$$

$$T_1 = \frac{\sqrt{2} \sqrt{m} \sqrt{L} \sqrt{M}}{\sqrt{-m R - (-M - m) P}}$$

例題 2.6.6 大きくなっていく雨粒の落下

初期速度: v_0 、半径: r_0 の球形の雨粒が落下しており、静止している霧の中で、雨粒の表面積当たり、質量 A の割合で大きくなるとする。このときの雨粒の落下速度を求める。

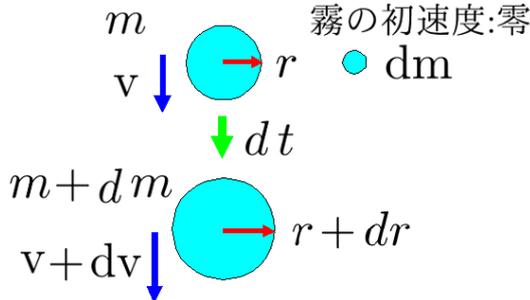


図 2.6.6: 大きくなっていく雨粒の落下

```
kill(all);
EQ1:m(r,t)=4/3*pi*r^3;
EQ2:diff(EQ1,r,1);
EQ3:diff(m(r,t),t,1)=A*4*pi*r^2;
EQ3/EQ2;
dr(t)=A*dt;
EQ4:diff(r(t),t,1)=A;
atvalue(r(t),t=0,r[0]);
EQ5:desolve(EQ4,r(t));
```

球形の雨粒の質量は、密度 = 1 であるから、

$$m(r,t) = \frac{4\pi r^3}{3}$$

上式の r 微分、 t 微分は仮定から、

$$\frac{d}{dr} m(r,t) = 4\pi r^2, \quad \frac{d}{dt} m(r,t) = 4\pi r^2 A$$

上式から、

$$\frac{\frac{d}{dt} m(r,t)}{\frac{d}{dr} m(r,t)} = \frac{d}{dt} r(t) = A, \quad r(t) = tA + r_0 \quad (2.6.9)$$

```
(m(r,t)+dm(r,t))*(v(t)+dv(t))-(m(r,t)*
v(t)+dm(r,t)*0)=m(r,t)*G*dt;
expand(%/dt);
EQ6:'diff((m(r,t)*v(t)),t,1)=m(r,t)*G;
EQ6A:'diff((m(r,t)*v(t)),r,1)
*'diff(r,t,1)=rhs(EQ6);
EQ7:'diff((m(r,t)*v(t)),r,1)=rhs(EQ6)/A;
EQ71:subst([EQ1],rhs(EQ7));
integrate(lhs(EQ7),r)+C=integrate(EQ71,r,
r[0],r);
EQ8:subst([EQ1],%);
subst([r[0]=r],%);
```

```
subst([r=r[0],v(t)=v[0]],%);
EQ9:solve(% ,C)[1];
subst([EQ9],EQ8);
expand(solve(% ,v(t))[1]);
partfrac(% ,r);
```

雨粒が霧の水滴と付く前の運動量は、霧の初速度: 零とすると、

$$m(r,t) v(t) + dm(r,t) \times 0$$

雨粒が霧の水滴と付いた後の運動量は、

$$(m(r,t) + dm(r,t)) (v(t) + dv(t))$$

上記の運動量差が力積であるから、

$$\begin{aligned} & (m(r,t) + dm(r,t)) (v(t) + dv(t)) - m(r,t) v(t) \\ & = dt m(r,t) G \end{aligned}$$

上式から、

$$\begin{aligned} & \frac{dm(r,t) v(t)}{dt} + \frac{m(r,t) dv(t)}{dt} + \frac{dm(r,t) dv(t)}{dt} \\ & = m(r,t) G \end{aligned}$$

左辺第三項は微少項であるから省略し整理すると、

$$\frac{d}{dt} (m(r,t) v(t)) = m(r,t) G$$

時間微分を上の関係から r の微分に置き換えて積分し、

$$\left(\frac{d}{dt} r \right) \left(\frac{d}{dr} (m(r,t) v(t)) \right) = m(r,t) G$$

$$\frac{d}{dr} (m(r,t) v(t)) = \frac{m(r,t) G}{A}$$

$$C + m(r,t) v(t) = \frac{4\pi \left(\frac{r^4}{4} - \frac{r_0^4}{4} \right) G}{3A}$$

初期条件から、

$$C = -\frac{4\pi r_0^3 v_0}{3}$$

$$v(t) = \frac{r G}{4A} - \frac{r_0^4 G - 4r_0^3 v_0 A}{4r^3 A}$$

(2.6.9) 式を代入し、

$$v(t) = \frac{(tA + r_0) G}{4A} - \frac{r_0^4 G - 4r_0^3 v_0 A}{4A(tA + r_0)^3}$$

例題 2.6.7 ロケットの運動

質量： m のロケットが下方に相対速度： u で、単位時間に質量： A の割合でガスを噴出しながら鉛直方向に進む。ロケットの初期質量： m_0 、初速度：零とする。このときの運動を求める。

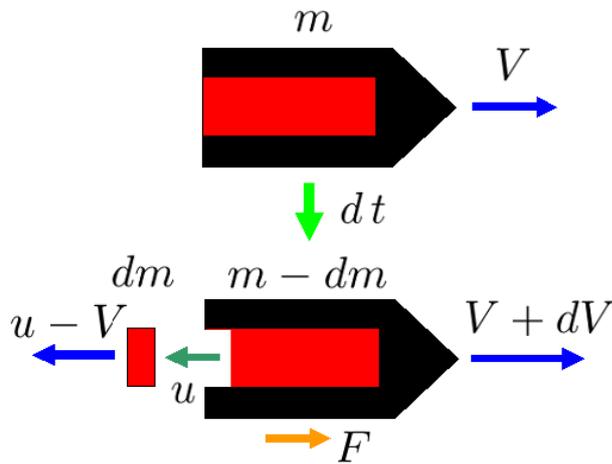


図 2.6.7: ロケットの運動

```
kill(all);
T1:m(t)*V(t);
T2:(m(t)-dm(t))*(V(t)+dV(t))-dm(t)*(u
-V(t));
EQ1:expand(T2-T1=F*dt);
expand(%/dt);
EQ2:diff(V(t),t,1)*m(t)-diff(m(t),t,1)*u
=-m(t)*G;
EQ3:diff(m(t),t,1)=A;
subst([EQ3],EQ2);
subst([m(t)=m[0]-A*t],%);
solve(%,diff(V(t),t,1))[1];
EQ4:partfrac(%,t);
rhs(EQ4)=0;
solve(%,u)[1];
subst([t=0],%);
ode2(EQ4,V(t),t);
ic1(%,t=0,V(t)=0);
ANS1:logcontract(%);
```

微小質量： dm を噴射前の運動量は

$$mV$$

微小質量： dm を噴射後の運動量は

$$(m - dm)(V + dV) - dm(u - V)$$

噴射前後の運動量差が、そのとき作用した力積であるから、

$$-dm(t)u + m(t)dV(t) - dm(t)dV(t) = dtF$$

dt で割り、

$$-\frac{dm(t)u}{dt} + \frac{m(t)dV(t)}{dt} - \frac{dm(t)dV(t)}{dt} = F$$

$dm(t)dV(t)$ は他に比べて微小項で省略する。

$$m(t)\left(\frac{d}{dt}V(t)\right) - \left(\frac{d}{dt}m(t)\right)u = -m(t)G$$

ところで、

$$m(t) = m_0 - tA, \quad \frac{d}{dt}m(t) = -A$$

これを上式に代入し、

$$m(t)\left(\frac{d}{dt}V(t)\right) - uA = -m(t)G$$

$$\frac{d}{dt}V(t) = -G - \frac{uA}{tA - m_0} \quad (2.6.10)$$

上に揚がるためには、上式の右辺が正でなければならない。

$$-G - \frac{uA}{tA - m_0} > 0$$

これから噴射速度は

$$u > \frac{m_0 G}{A}$$

(2.6.10) 式を解くと、

$$V(t) = -tG - u \log(tA - m_0) + \%c$$

初期条件から、

$$V(t) = -tG + u \log\left(-\frac{m_0}{tA - m_0}\right)$$

例題 2.6.8 鎖の落下

机の端にかたまっている線密度： ρ の鎖の一端が、落ちたとき、垂れ下がった長さ： x の運動を明らかにする。

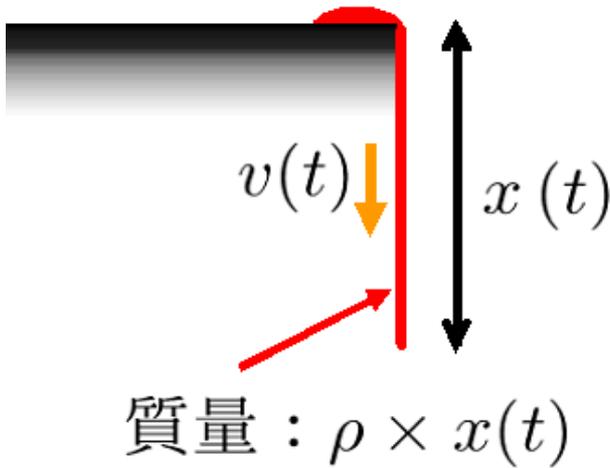


図 2.6.8: 鎖の落下

```
kill(all);
\rho*(x(t)+dx(t))*(v(t)+dv(t))
-\rho*x(t)*v(t)=\rho*x(t)*G*dt;
expand(~/dt);
EQ1:diff(\rho*x(t)*v(t),t,1)=\rho*x(t)*G;
subst([diff(v(t),t,1)=diff(x(t),t,2)],%);
EQ:subst([v(t)=diff(x(t),t,1)],%);
assume(x(t)>0);
ode2(EQ,x(t),t);
ANS:subst([%k1=0,%k2=0],%[2]);
diff(ANS,t,1);
solve(%,diff(x(t),t,1))[1];
ode2(%,x(t),t);
subst([%c=0],%);
solve(%,t)[1];
```

時間： t における運動量は、

$$\rho v(t) x(t)$$

時間： $t + dt$ における運動量は、

$$\rho (v(t) + dv(t)) (x(t) + dx(t))$$

上記の運動量差が力積であるから、

$$\rho (v(t) + dv(t)) (x(t) + dx(t)) - \rho v(t) x(t) = dt \rho x(t) G$$

整理して、

$$\frac{\rho dv(t) x(t)}{dt} + \frac{\rho dx(t) v(t)}{dt} + \frac{\rho dv(t) dx(t)}{dt} = \rho x(t) G$$

左辺第三項は小さいとして、

$$\rho v(t) \left(\frac{d}{dt} x(t) \right) + \rho x(t) \left(\frac{d}{dt} v(t) \right) = \rho x(t) G$$

下記の関係式から、

$$v(t) = \frac{d}{dt} x(t), \quad \frac{d}{dt} v(t) = \frac{d^2}{dt^2} x(t)$$

$$\rho x(t) \left(\frac{d^2}{dt^2} x(t) \right) + \rho \left(\frac{d}{dt} x(t) \right)^2 = \rho x(t) G$$

ode2 関数で解いて、

$$\frac{\sqrt{3} \int \frac{x(t)}{\sqrt{x(t)^3 G - 3k1}} dx(t)}{\sqrt{2}} = t + k2$$

初期条件から、 $k1 = 0, k2 = 0$ を代入し、

$$\frac{\sqrt{3} \int \frac{1}{\sqrt{x(t) \sqrt{G}}} dx(t)}{\sqrt{2}} = t$$

上式を微分して、

$$\frac{\sqrt{3} \left(\frac{d}{dt} x(t) \right)}{\sqrt{2} \sqrt{x(t) \sqrt{G}}} = 1$$

整理して、

$$\frac{d}{dt} x(t) = \frac{\sqrt{2} \sqrt{x(t) \sqrt{G}}}{\sqrt{3}}$$

ode2 関数で解いて、

$$t = \frac{\sqrt{2} \sqrt{3} \sqrt{x(t)}}{\sqrt{G}}$$

上式から、

$$x(t) = \frac{t^2 G}{6}$$

$$v(t) = \frac{t G}{3}$$

$$v(x) = \frac{2 \sqrt{3} \sqrt{x} \sqrt{G}}{3 \sqrt{2}}$$

第3章 剛体の運動

3.1 剛体のつりあい・安定性

3.1.1 剛体のつりあい運動方程式

剛体に、位置： \vec{r}_i の力： \vec{F}_i が作用するとき、剛体が動かないで釣合状態となる条件は下記となる。ベクトル表現で、力とモーメント： \vec{N} について、

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0$$

$$\vec{N} = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i = 0$$

x, y, z 軸の各成分で、

```
kill(all);
un:matrix([1],[1],[1]);
FI:matrix([F[i][x]],[F[i][y]],[F[i][z]]);
RI:matrix([r[i][x]],[r[i][y]],[r[i][z]]);
sum(F[i],i,1,n)=0;
N=sum(r[i]*F[i],i,1,n);
sum(r[i]*F[i],i,1,n)=0;
NI:col(adjoint(append(transpose(RI),
transpose(FI),transpose(un))),3);
sum(FI,i,1,n)=0;
sum(NI,i,1,n)=0;
```

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n (F_i)_x \\ \sum_{i=1}^n (F_i)_y \\ \sum_{i=1}^n (F_i)_z \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n (r_i)_y (F_i)_z - (F_i)_y (r_i)_z \\ \sum_{i=1}^n (F_i)_x (r_i)_z - (r_i)_x (F_i)_z \\ \sum_{i=1}^n (r_i)_x (F_i)_y - (F_i)_x (r_i)_y \end{bmatrix} = 0$$

拘束条件の下で可能な変位： $\delta \vec{r}$ に垂直な拘束力： \vec{R} とし、これ以外の力： \vec{F}' とすると、

$$\vec{F} = \vec{R} + \vec{F}' = 0$$

拘束条件の下で可能な変位： $\delta \vec{r}$ と垂直な拘束力： \vec{R} の関係から、

$$\delta \vec{r} \cdot \vec{R} = 0$$

上記の関係から、

$$\delta \vec{r} \cdot (\vec{R} + \vec{F}') = 0$$

$$\delta \vec{r} \cdot \vec{F}' = 0$$

平衡状態で、仮想的に変位を行ったときの仕事： δW は、

$$\delta W = \delta \vec{r} \cdot \vec{F}' = \delta z F'_z + \delta y F'_y + \delta x F'_x = 0$$

仕事をする力がポテンシャルを持つときには、

$$\delta W = - \left(\frac{\partial}{\partial z} U \right) \delta z - \left(\frac{\partial}{\partial y} U \right) \delta y - \left(\frac{\partial}{\partial x} U \right) \delta x$$

$$= \delta U = 0$$

すなわち、ポテンシャルを持つときには、平衡状態では $\delta U = 0$ であり、そこでポテンシャルが下に凸 $\rightarrow U$ の2階微分が正の時、安定となり、ポテンシャルが上に凸 $\rightarrow U$ の2階微分が負の時、不安定となる。

例題 3.1.2 立てかけたはしご

重さ: W 、長さ: L のはしごが、鉛直壁と水平床に立てかけてある。壁との摩擦係数を M としたとき、滑り出さない角度: p を求める。

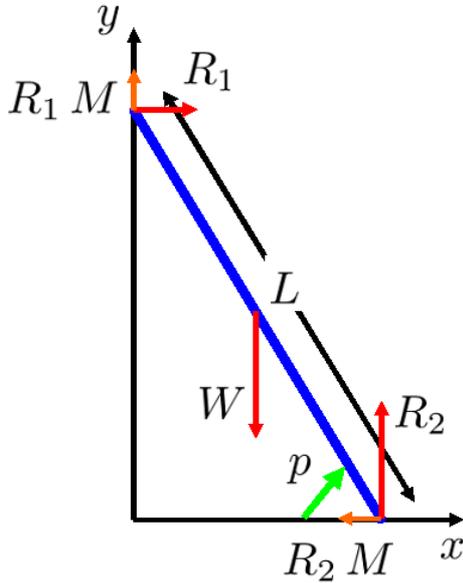


図 3.1.1: 立てかけたはしご

```
kill(all);
EQX:R[1]-M*R[2]=0;
EQY:R[2]+M*R[1]-W=0;
EQM:-W*L/2*cos(p)+R[1]*L*sin(p)+M*R[1]*L
*cos(p)=0;
EQM1:trigreduce(expand(EQM/L/cos(p)));
solve([EQX,EQY,EQM1],[R[1],R[2],tan(p)]);
solve(%[1][3],p)[1];
```

x 軸方向の力のバランス

$$R_1 - R_2 M = 0 \quad (3.1.1)$$

y 軸方向の力のバランス

$$-W + R_1 M + R_2 = 0 \quad (3.1.2)$$

下端まわりのモーメントのバランス

$$-\frac{\cos(p) L W}{2} + R_1 \cos(p) L M + R_1 \sin(p) L = 0$$

上式を $\cos(p)$ で割って整理すると、

$$-\frac{W}{2} + R_1 M + R_1 \tan(p) = 0 \quad (3.1.3)$$

(3.1.1) 式、(3.1.2) 式、(3.1.3) 式を解くと、

$$R_1 = \frac{M W}{M^2 + 1}, R_2 = \frac{W}{M^2 + 1}, \tan(p) = -\frac{M^2 - 1}{2 M}$$

上式から p は、

$$p = -\operatorname{atan}\left(\frac{M}{2} - \frac{1}{2M}\right)$$

例題 3.1.3 蝶番のある 2 本の棒

棒 AB 、長さ： L 、重さ： W_1 と棒 BC 、長さ： L 、重さ： W_2 は B で滑らかな蝶番で連結され、 A で滑らかに吊されている。 C を水平に F で引っ張るとき、棒： AB が鉛直となす角： p 、棒： BC が鉛直となす角： q を求める。

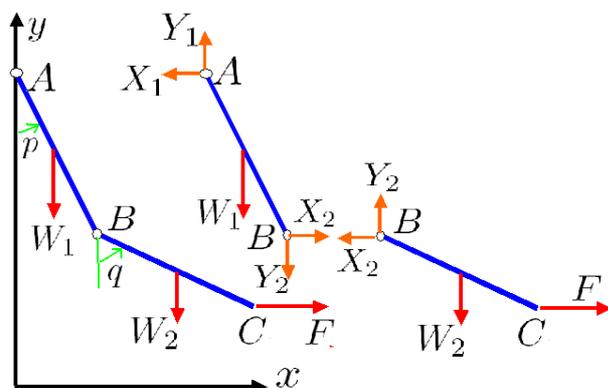


図 3.1.2: 蝶番のある 2 本の棒

```
kill(all);
EQA1:X[2]-X[1]=0;
EQA2:Y[1]-W[1]-Y[2]=0;
EQA3:-W[1]*L/2*sin(p)-Y[2]*L*sin(p)+X[2]*
L*cos(p)=0;
EQA31:trigreduce(expand(%/cos(p)));
EQB1:F-X[2]=0;
EQB2:Y[2]-W[2]=0;
EQB3:-W[2]*L/2*sin(q)+F*L*cos(q)=0;
EQB31:trigreduce(expand(%/cos(q)));
ANS:solve([EQA1,EQA2,EQA31,EQB1,EQB2,
EQB31],[X[1],X[2],Y[1],Y[2],tan(p),tan(q)]);
solve(ANS[1][5],p);
solve(ANS[1][6],q);
```

棒 AB において、 x 軸方向の力のバランス、 y 軸方向の力のバランス、 A 点まわりのモーメントのバランスは、

$$X_2 - X_1 = 0 \quad (3.1.4)$$

$$-Y_2 + Y_1 - W_1 = 0 \quad (3.1.5)$$

$$-Y_2 a \sin(p) - \frac{W_1 a \sin(p)}{2} + X_2 a \cos(p) = 0$$

上式を $\cos(p)$ で割って整理すると、

$$-Y_2 \tan(p) L - \frac{W_1 \tan(p) L}{2} + X_2 L = 0 \quad (3.1.6)$$

棒 BC において、 x 軸方向の力のバランス、 y 軸方向の力のバランス、 B 点まわりのモーメントのバランスは、

$$F - X_2 = 0 \quad (3.1.7)$$

$$Y_2 - W_2 = 0 \quad (3.1.8)$$

$$a \cos(q) F - \frac{W_2 a \sin(q)}{2} = 0$$

上式を $\cos(q)$ で割って整理すると、

$$F L - \frac{W_2 \tan(q) L}{2} = 0 \quad (3.1.9)$$

(3.1.4) 式、(3.1.5) 式、(3.1.6) 式、(3.1.7) 式、(3.1.8) 式、(3.1.9) 式を解くと、

$$X_1 = F, X_2 = F, Y_1 = W_2 + W_1, Y_2 = W_2,$$

$$\tan(p) = \frac{2F}{2W_2 + W_1}, \tan(q) = \frac{2F}{W_2}$$

上式から、

$$p = \text{atan}\left(\frac{2F}{2W_2 + W_1}\right)$$

$$q = \text{atan}\left(\frac{2F}{W_2}\right)$$

例題 3.1.4 吊した二つの球

球1は半径： A_1 、重さ： W_1 、球2は半径： A_2 、重さ： W_2 とする。二つの球を長さ： L の紐で結び、滑らかな水平釘に掛けて吊す。静止しているときの位置と張力を求める。紐の張力を T とする。球1の中心と釘までの長さを L_1 、球2の中心と釘までの長さを L_2 とし、球1の紐が鉛直となす角を p 、球2の紐が鉛直となす角を q とする。

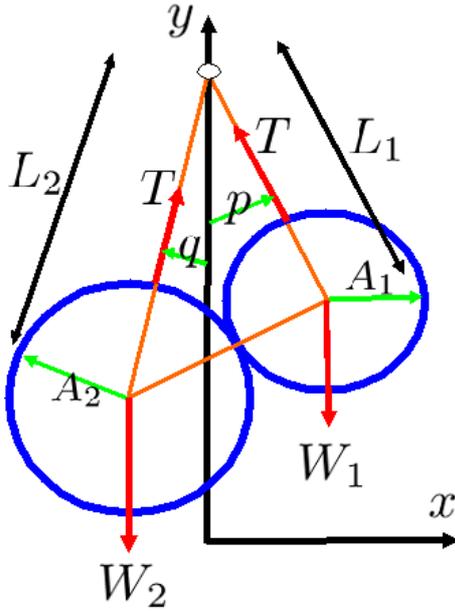


図 3.1.3: 吊した二つの球

```
kill(all);
EQX:-T*sin(p)+T*sin(q)=0;
EQY:T*cos(p)+T*cos(q)-W[1]-W[2]=0;
EQN:W[2]*L[2]*sin(q)-W[1]*L[1]*sin(p)=0;
EQL:L[1]+L[2]-A[1]-A[2]=L;
EQT:(A[1]+A[2])^2=L[1]^2+L[2]^2-2*L[1]*L[2]*cos(p+q);
EQX1:q=p;
subst([EQX1],EQY);
ANST:solve(%,T)[1];
EQN1:expand(subst([EQX1],EQN)/sin(p));
ANSL:solve([EQL,EQN1],[L[1],L[2]]);
ANSL1:ANSL[1][1];
ANSL2:ANSL[1][2];
subst([EQX1,ANSL1,ANSL2],EQT);
subst(2*cos(p)^2-1,cos(2*p),%);
factor(solve(%,cos(p)^2)[1]);
```

x 軸方向の力のバランス、 y 軸方向の力のバランス、釘まわりのモーメントのバランスは

$$\sin(q) T - \sin(p) T = 0 \quad (3.1.10)$$

$$\cos(q) T + \cos(p) T - W_2 - W_1 = 0 \quad (3.1.11)$$

$$L_2 W_2 \sin(q) - L_1 W_1 \sin(p) = 0 \quad (3.1.12)$$

紐の長さの関係、釘・球の中心による三角形の第二余弦法則から、

$$L_2 - A_2 + L_1 - A_1 = L \quad (3.1.13)$$

$$(A_2 + A_1)^2 = -2 L_1 L_2 \cos(q + p) + L_2^2 + L_1^2 \quad (3.1.14)$$

(3.1.10) 式から、

$$q = p$$

上式を (3.1.11) 式に代入し、張力： T は、

$$T = \frac{W_2 + W_1}{2 \cos(p)}$$

(3.1.12) 式と (3.1.13) 式から、

$$L_1 = \frac{W_2 L + A_2 W_2 + A_1 W_2}{W_2 + W_1}$$

$$L_2 = \frac{W_1 L + W_1 A_2 + A_1 W_1}{W_2 + W_1}$$

上式を (3.1.14) 式に代入し、

$$\begin{aligned} & (A_2 + A_1)^2 \\ &= \frac{(W_2 L + A_2 W_2 + A_1 W_2)^2}{(W_2 + W_1)^2} \\ & - \frac{2 \cos(2p) (W_1 L + W_1 A_2 + A_1 W_1) (W_2 L + A_2 W_2 + A_1 W_2)}{(W_2 + W_1)^2} \\ & + \frac{(W_1 L + W_1 A_2 + A_1 W_1)^2}{(W_2 + W_1)^2} \\ &= \frac{(W_2 L + A_2 W_2 + A_1 W_2)^2}{(W_2 + W_1)^2} + \frac{(W_1 L + W_1 A_2 + A_1 W_1)^2}{(W_2 + W_1)^2} \\ & - \frac{2 (2 \cos(p)^2 - 1) (W_1 L + W_1 A_2 + A_1 W_1) (W_2 L + A_2 W_2 + A_1 W_2)}{(W_2 + W_1)^2} \end{aligned}$$

p を求めると、

$$\cos(p)^2 = \frac{(W_2 + W_1)^2 L (L + 2 A_2 + 2 A_1)}{4 W_1 W_2 (L + A_2 + A_1)^2}$$

例題 3.1.5 鉛直な円輪内に置いた棒

両端に質量： M_1, M_2 を固定した棒を、鉛直な面内に置かれた半径： L の滑らかな円輪内に置く。このときの平衡位置と安定性について調べる。棒と半径との角度を q (棒の長さ： $2L \cos(q)$)、棒と水平面との平衡角度： p とし、その場所における安定性を求める。

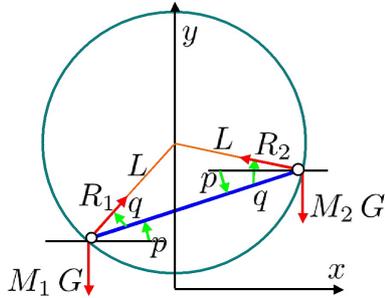


図 3.1.4: 鉛直な円輪内に置いた棒

(1) 力、モーメントのバランスから

```
kill(all);
EQX:R[1]*cos(p+q)-R[2]*cos(q-p)=0;
EQY:R[1]*sin(p+q)+R[2]*sin(q-p)-M[1]*G-M[2]*G=0;
EQN:M[1]*G*L*cos(p+q)-M[2]*G*L*cos(q-p)=0;
trigexpand(EQN);
expand(%/cos(p));
EQN1:subst(tan(p)*cos(p),sin(p),%);
ANSN:solve(EQN1,tan(p))[1];
```

x 軸方向の力のバランス、 y 軸方向の力のバランス、円輪の中心まわりのモーメントのバランスは、

$$R_1 \cos(q+p) - R_2 \cos(q-p) = 0$$

$$-M_2 G - M_1 G + R_1 \sin(q+p) + R_2 \sin(q-p) = 0$$

$$M_1 \cos(q+p) G L - M_2 \cos(q-p) G L = 0$$

モーメントの式から、

$$\tan(p) = -\frac{(M_2 - M_1) \cos(q)}{(M_2 + M_1) \sin(q)}$$

(2) ポテンシャルから

```
EQY1:y1(p)=-L*cos(q+p);
EQY2:y2(p)=-L*cos(q-p);
EQU:U(p)=M[1]*G*rhs(EQY1)+M[2]*G*rhs(EQY2);
EQUd:diff(EQU,p,1);
```

```
rhs(EQUd)=0;
trigexpand(%);
expand(%/cos(p));
subst(tan(p)*cos(p),sin(p),%);
ANSU:solve(%,tan(p))[1];
```

質点の位置は、

$$y_1(p) = -\cos(q+p) L$$

$$y_2(p) = -\cos(q-p) L$$

ポテンシャル： $U(p)$ とその 1 階微分は、

$$U(p) = -M_1 \cos(q+p) G L - M_2 \cos(q-p) G L$$

$$\frac{d}{dp} U(p) = M_1 \sin(q+p) G L - M_2 \sin(q-p) G L$$

平衡状態では $\frac{d}{dp} U(p) = 0$ であり

$$M_1 \sin(q+p) G L - M_2 \sin(q-p) G L = 0$$

解は下記となる。これは上記のモーメントのバランスから求めた結果と同じである。

$$\tan(p) = \frac{(M_2 - M_1) \sin(q)}{(M_2 + M_1) \cos(q)}$$

安定性は、

```
EQUDD:diff(EQU,p,2);
trigexpand(EQUDD);
%/cos(p);
expand(%);
subst(tan(p)*cos(p),sin(p),%);
subst([ANSU],%);
ratsimp(%);
subst((M[2]-M[1])^2,M[2]^2-2*M[1]*M[2]+M[1]^2,%);
subst((M[2]+M[1])^2,M[2]^2+2*M[1]*M[2]+M[1]^2,%)cos(p);
```

ポテンシャル： $U(p)$ を 2 階微分して、

$$\frac{d^2}{dp^2} U(p) = M_1 \cos(q+p) G L + M_2 \cos(q-p) G L$$

上記の解を上式に代入し、整理すると、

$$\frac{d^2}{dp^2} U(p) = \frac{\cos(p) \left((M_2 - M_1)^2 \sin^2(q) + (M_2 + M_1)^2 \cos^2(q) \right) G L}{(M_2 + M_1) \cos(q)}$$

上記から、 $0 < p < \pi/2, 0 < q < \pi/2$ で、 $\cos(p) > 0, \cos(q) > 0$ であるから、ポテンシャルの 2 階微分は正で、安定である。

例題 3.1.6 半球殻の上に置いた棒

半径: A の滑らかな半球殻を開口部を上向きに水平に置き、長さ: $2L$ 、質量: M の棒を、一端を内殻に、他端を外部に出し半球殻の縁にのせる。棒の水平面との平衡角度: p とその場所における安定性を求める。

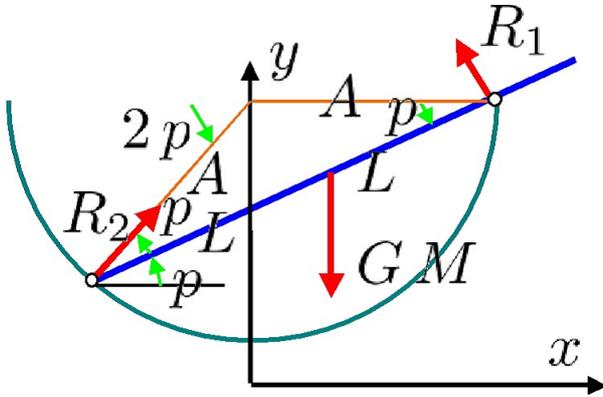


図 3.1.5: 半球殻の上に置いた棒

(1) 力、モーメントのバランスから

```
kill(all);
EQX: -R[1]*sin(p)+R[2]*cos(2*p)=0;
EQY: R[1]*cos(p)+R[2]*sin(2*p)-M*G=0;
EQN: -M*G*L*cos(p)+R[1]*2*A*cos(p)=0;
ANSR1: solve(EQN, R[1])[1];
subst([ANSR1], EQX);
EQX1: solve(%, R[2])[1];
subst([ANSR1], EQY);
EQY1: solve(%, R[2])[1];
rhs(EQX1)-rhs(EQY1)=0;
trigexpand(%);
expand(%);
factor(%);
trigsimp(%);
num(lhs(%))=0;
factor(solve(%, p)[2]);
```

上記の図から球殻中心から反力の作用点の線と棒の角度も: p となる。 x 軸方向の力のバランスは、

$$R_2 \cos(2p) - R_1 \sin(p) = 0$$

y 軸方向の力のバランスは、

$$-GM + R_2 \sin(2p) + R_1 \cos(p) = 0$$

棒の下点まわりのモーメントのバランスは、

$$2R_1 \cos(p) A - \cos(p) GLM = 0$$

上式から、

$$R_1 = \frac{GLM}{2A}$$

上式を x 軸方向の力のバランス式に代入し、

$$R_2 = -\frac{(\cos(p) GL - 2AG) M}{2 \sin(2p) A}$$

上記2式を y 軸方向の力のバランス式に代入し、整理すると、

$$\frac{(\cos(p) GL + (2 - 4 \cos^2(p)) AG) M}{(8 \cos^3(p) - 4 \cos(p)) \sin(p) A} = 0$$

上式から、

$$p = \arccos\left(\frac{\sqrt{L^2 + 32A^2} + L}{8A}\right)$$

(2) ポテンシャルから

```
EQU: U(p) = (-A*cos(%pi/2-2*p)+L*sin(p))*M*G;
diff(EQU, p, 1);
rhs(%)=0;
trigexpand(%);
trigsimp(%);
ANSCP: solve(%, cos(p))[2];
ANSP: factor(solve(%, p))[1];
diff(EQU, p, 2);
trigexpand(%);
factor(%);
subst([ANSCP], %);
```

ポテンシャル: $U(p)$ とその1階微分は、

$$U(p) = G(\sin(p)L - \sin(2p)A)M$$

$$\frac{d}{dp} U(p) = G(\cos(p)L - 2\cos(2p)A)M$$

平衡状態では $\frac{d}{dp} U(p) = 0$ であり

$$(\cos(p)GL + (2 - 4\cos^2(p))AG)M = 0$$

$$p = \arccos\left(\frac{\sqrt{L^2 + 32A^2} + L}{8A}\right)$$

これは上記のモーメントのバランスから求めた結果と同じである。次に、ポテンシャル: $U(p)$ を2階微分して、

$$\frac{d^2}{dp^2} U(p) = \sin(p)G\sqrt{L^2 + 32A^2}M$$

$0 < p < \pi/2$ で、 $\sin(p) > 0$ であるから、ポテンシャルの2階微分は正で、安定である。

例題 3.1.7 向かい合った斜面上に立てかけた棒

水平とそれぞれ A, B の角をなす二つの滑らかな斜面が向かい合っている。長さ: $2L$ 、質量: M の棒を両斜面上に置き、棒の水平面との平衡角度: p とその場所における安定性を求める。

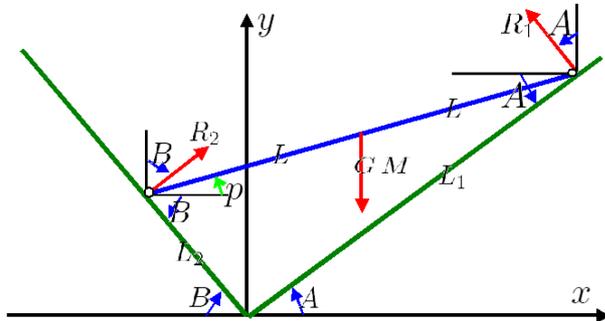


図 3.1.6: 向かい合った斜面上に立てかけた棒

(1) 力、モーメントのバランスから

```
kill(all);
EQX:-R[1]*sin(A)+R[2]*sin(B)=0;
EQY:R[1]*cos(A)+R[2]*cos(B)-M*G=0;
EQN:-M*G*L*cos(p)+R[1]*cos(A)*2*L*cos(p)
    +R[1]*sin(A)*2*L*sin(p)=0;
ANSR12:solve([EQX,EQY],[R[1],R[2]]);
ANSR1:ANSR12[1][1];
ANSR2:ANSR12[1][2];
subst([ANSR1,ANSR2],EQN)/cos(p);
subst(tan(p)*cos(p),sin(p),%);
factor(%);
solve(%,tan(p))[1];
trigreduce(%)
```

 x 軸方向の力のバランスは、

$$R_2 \sin(B) - R_1 \sin(A) = 0$$

 y 軸方向の力のバランスは、

$$-GM + R_2 \cos(B) + R_1 \cos(A) = 0$$

下端: B 点まわりのモーメントのバランスは、

$$-\cos(p)GLM + 2R_1 \sin(p) \sin(A)L + 2R_1 \cos(p) \cos(A)L = 0$$

 x 軸方向の力の式と y 軸方向の力の式を解くと、

$$R_1 = \frac{\sin(B)GM}{\cos(A)\sin(B) + \sin(A)\cos(B)}$$

$$R_2 = \frac{\sin(A)GM}{\cos(A)\sin(B) + \sin(A)\cos(B)}$$

上式をモーメントの式に代入し、解いて整理すると、

$$\tan(p) = -\frac{\csc(A)\csc(B)\sin(B-A)}{2}$$

(2) ポテンシャルから

```
EQU:U(p)=(L[2]*sin(B)+L*sin(p))*M*G;
EQLX:L[2]*cos(B)+L[1]*cos(A)=2*L*cos(p);
EQLY:L[1]*sin(A)=L[2]*sin(B)+2*L*sin(p);
ANS12:solve([EQLX,EQLY],[L[1],L[2]]);
ANS2:ANS12[1][2];
EQU1:subst([ANS2],EQU);
EQU2:diff(EQU1,p,1);
expand((rhs(%)=0)/cos(p));
subst(tan(p)*cos(p),sin(p),%);
factor(%);
ANS3:solve(%,tan(p))[1];
trigreduce(%)
```

ポテンシャル: $U(p)$ は、

$$U(p) = G(\sin(p)L + L_2 \sin(B))M$$

斜面と棒の長さの関係から、

$$L_2 \cos(B) + L_1 \cos(A) = 2 \cos(p)L$$

$$L_1 \sin(A) = 2 \sin(p)L + L_2 \sin(B)$$

上式からポテンシャルで使われている L_2 を求めると、

$$L_2 = -\frac{(2 \sin(p) \cos(A) - 2 \cos(p) \sin(A))L}{\cos(A) \sin(B) + \sin(A) \cos(B)}$$

上式をポテンシャル: $U(p)$ に代入し、(次頁に続く)

ポテンシャル： $U(p)$ とその1階微分は、

$$U(p) = G \left(\sin(p) L - \frac{(2 \sin(p) \cos(A) - 2 \cos(p) \sin(A)) \sin(B) L}{\cos(A) \sin(B) + \sin(A) \cos(B)} \right) M$$

$$\frac{d}{dp} U(p) = G \left(\cos(p) L - \frac{(2 \sin(p) \sin(A) + 2 \cos(p) \cos(A)) \sin(B) L}{\cos(A) \sin(B) + \sin(A) \cos(B)} \right) M = 0$$

上式から、

$$-\frac{(2 \tan(p) \sin(A) \sin(B) + \cos(A) \sin(B) - \sin(A) \cos(B)) G L M}{\cos(A) \sin(B) + \sin(A) \cos(B)} = 0$$

上式から p を求めて、

$$\tan(p) = -\frac{\csc(A) \csc(B) \sin(B-A)}{2}$$

これは上記の力、モーメントのバランスから求めた結果と同じである。

```

EQUDD:diff(EQU1,p,2);
expand(%/cos(p));
subst(tan(p)*cos(p),sin(p),%);
subst([ANSP],%);
EQUDD1:factor(%);
TR0:sin(B-A)^2;
TR1:trigexpand(TR0);
EQNUM:num(rhs(EQUDD1))/G/M/L;
EQDEN:denom(rhs(EQUDD1));
TR2:expand(TR1);
TR3:TR2=TR1;
EQNUM1:(first(EQNUM)-TR0)*G*M*L;
TR4:sin(A+B);
TR5:trigexpand(TR4)=TR4;
EQDEN1:subst([TR5],EQDEN);
expand(lhs(EQUDD1)*cos(p))=EQNUM1/EQDEN1
*cos(p);

```

ポテンシャル： $U(p)$ の2階微分は、

$$\frac{d^2}{dp^2} U(p) = G \left(-\frac{(2 \cos(p) \sin(A) - 2 \sin(p) \cos(A)) \sin(B) L}{\cos(A) \sin(B) + \sin(A) \cos(B)} - \sin(p) L \right) M$$

上式を整理し、

$$\frac{d^2}{dp^2} U(p) = \frac{\cos(p) \left(-\sin(B-A)^2 - 4 \sin(A)^2 \sin(B)^2 \right) G L M}{2 \sin(A) \sin(B) \sin(B+A)}$$

$0 < A < \pi/2$, $0 < B < \pi/2$ で $\sin(A) > 0$, $\sin(B) > 0$, $\sin(A+B) > 0$ である。 $-\pi/2 < p < \pi/2$ で $\cos(p) > 0$ から、ポテンシャルの2階微分は負で不安定である。

例題 3.1.8 丸い穴にさして立てた円錐

水平な板に半径： a の円形穴があいている。高さ： H 、半頂角： A の滑らかな円錐を頂点を下に穴に差し込む。円錐の重さ： W 、重心は底面から $H/4$ の高さにある。円錐の中心線と水平面との交点を P とし、円錐の中心線と水平面との平衡角度： p とその場所における安定性を求める。

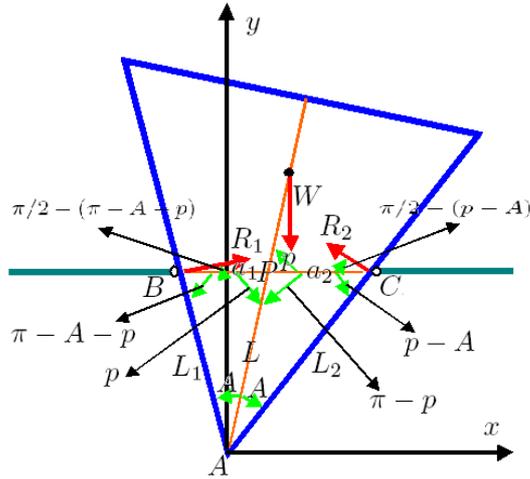


図 3.1.7: 丸い穴にさして立てた円錐

(1) 力、モーメントのバランスから

```
kill(all);
EQX:R[1]*cos(A+p-%pi/2)-R[2]*cos(%pi/2+A-p)=0;
EQY:R[1]*sin(A+p-%pi/2)+R[2]*sin(%pi/2+A-p)-W=0;
EQN:-R[1]*L[L1]+R[2]*L[L2]-W*3/4*H*cos(p)=0;
```

x 軸方向の力のバランスは、

$$R_1 \sin(A+p) + R_2 \sin(A-p) = 0$$

y 軸方向の力のバランスは、

$$-W - R_1 \cos(A+p) + R_2 \cos(A-p) = 0$$

下端まわりのモーメントのバランスは、

$$-\frac{3 \cos(p) H W}{4} + L_2 R_2 - L_1 R_1 = 0$$

```
EQ1:a[1]+a[2]=a*2;
EQ2:a[1]/sin(A)=L/sin(%pi-A-p);
EQ3:a[2]/sin(A)=L/sin(p-A);
EQ4:L/sin(%pi-A-p)=L[1]/sin(p);
EQ5:L/sin(p-A)=L[2]/sin(%pi-p);
ANS:solve([EQ1,EQ2,EQ3],[a[1],a[2],L]);
ANSL:ANS[1][3];
```

```
solve(EQ4,L[1])[1];
ANSL1:lhs(%)=subst([ANSL],rhs(%));
solve(EQ5,L[2])[1];
ANSL2:lhs(%)=subst([ANSL],rhs(%));
```

長さ、 $AP:L$ 、 $AB:L_1$ 、 $AC:L_2$ 、 $BP:a_1$ 、 $PC:a_2$ として、三角形の正弦法則から、関係式をまとめると、

$$\begin{aligned} a_2 + a_1 &= 2a \\ \frac{a_1}{\sin(A)} &= \frac{L}{\sin(A+p)} \\ \frac{a_2}{\sin(A)} &= -\frac{L}{\sin(A-p)} \\ \frac{L}{\sin(A+p)} &= \frac{L_1}{\sin(p)} \\ -\frac{L}{\sin(A-p)} &= \frac{L_2}{\sin(p)} \end{aligned}$$

上式を解いて、

$$L = -\frac{2a \sin(A-p) \sin(A+p)}{\sin(A) \sin(A+p) - \sin(A) \sin(A-p)}$$

$$L_1 = -\frac{2a \sin(p) \sin(A-p)}{\sin(A) \sin(A+p) - \sin(A) \sin(A-p)}$$

$$L_2 = \frac{2a \sin(p) \sin(A+p)}{\sin(A) \sin(A+p) - \sin(A) \sin(A-p)}$$

```
trigexpand(subst([ANSL1,ANSL2],EQN));
EQN1:expand(%);
trigexpand(EQN1);
ANSR:solve([EQX,EQY],[R[1],R[2]]);
ANSR1:ANSR[1][1];
ANSR2:ANSR[1][2];
subst([ANSR1,ANSR2],EQN1);
trigexpand(%);
factor(%);
trigsimp(%);
ANSP:factor(%);
ANSPO:solve(ANSP,sin(p))[1];
ANSP1:solve(%,p)[1];
solve(ANSPO,cos(p))[1];
ANSPO2:solve(%,p)[1];
```

モーメントの式に L_1 、 L_2 を代入すると、

$$\begin{aligned} &-\frac{3 \cos(p) H W}{4} + \frac{R_2 a \sin(p)}{\sin(A)} - \frac{R_1 a \sin(p)}{\sin(A)} \\ &+ \frac{R_2 a \cos(p)}{\cos(A)} + \frac{R_1 a \cos(p)}{\cos(A)} = 0 \end{aligned}$$

x 軸方向、 y 軸方向の式から、

$$R_1 = -\frac{\sin(A-p)W}{\cos(A-p)\sin(A+p) + \sin(A-p)\cos(A+p)}$$

$$R_2 = \frac{\sin(A+p)W}{\cos(A-p)\sin(A+p) + \sin(A-p)\cos(A+p)}$$

上式を上記のモーメントの式に代入すると、

$$-\frac{\cos(p)(3\cos(A)\sin(A)H - 8a\sin(p))W}{4\cos(A)\sin(A)} = 0$$

これから平衡状態は、

$$\sin(p) = \frac{3\cos(A)\sin(A)H}{8a}$$

$$p = a\sin\left(\frac{3\cos(A)\sin(A)H}{8a}\right)$$

また、

$$\cos(p) = 0$$

$$p = \frac{\pi}{2}$$

(2) ポテンシャルから

```
EQU:U(p)=W*(-L+3/4*H)*sin(p);
EQU1:subst([ANSL],EQU);
EQU2:diff(EQU1,p,1);
EQU3:rhs(EQU2)=0;
trigexpand(%);
```

```
factor(%);
trigsimp(%);
factor(%);
```

ポテンシャルとその1階微分は、

$$U(p) = \sin(p) \left(\frac{3H}{4} - L \right) W$$

$$\frac{d}{dp} U(p) = \frac{\cos(p)(3\cos(A)\sin(A)H - 8a\sin(p))W}{4\cos(A)\sin(A)} = 0$$

これから平衡状態は、

$$p = a\sin\left(\frac{3\cos(A)\sin(A)H}{8a}\right), \quad p = \frac{\pi}{2}$$

これは上記の力、モーメントのバランスから求めた結果と同じ結果となっている。

```
diff(EQU1,p,2);
trigexpand(%);
factor(%);
EQU4:trigsimp(%);
```

```
lhs(EQU4)=subst([ANSP2],rhs(EQU4));
subst(1-sin(p)^2,cos(p)^2,EQU4);
lhs(%)=subst([ANSPO],rhs(%));
factor(%);
```

$$\frac{d^2}{dp^2} U(p) = -\frac{(3\sin(p)\cos(A)\sin(A)H + 16a\cos(p)^2 - 8a)W}{4\cos(A)\sin(A)}$$

$p = a\sin\left(\frac{3\cos(A)\sin(A)H}{8a}\right)$ の平衡状態場合、上式に代入し、

$$\frac{d^2}{dp^2} U(p) = \frac{(3\cos(A)\sin(A)H - 8a)(3\cos(A)\sin(A)H + 8a)W}{32a\cos(A)\sin(A)}$$

$3\cos(A)\sin(A)H > 8a$ の時、安定である。

$p = \frac{\pi}{2}$ の平衡状態場合、上式に代入し、

$$\frac{d^2}{dp^2} U(p) = -\frac{(3\cos(A)\sin(A)H - 8a)W}{4\cos(A)\sin(A)}$$

$3\cos(A)\sin(A)H < 8a$ の時、安定である。

例題 3.1.9 円柱の上の立方体

半径 : A の円柱の上に一辺 : $2L$ の立方体を対称位置に乗せる。円柱と立方体の接触面は滑らないものとする。この平衡状態の安定性について調べる。

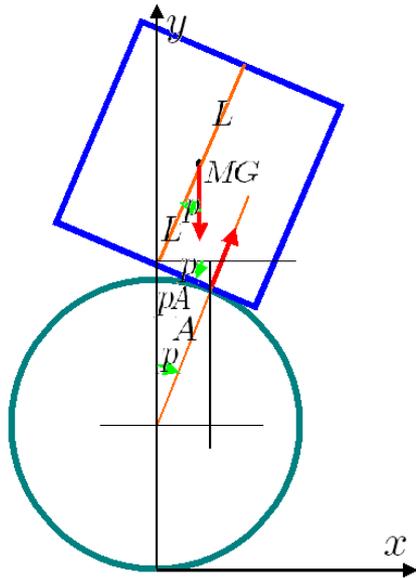


図 3.1.8: 円柱の上の立方体

平衡状態は明らかに対称位置であるから、力、モーメントのバランスを求めることはせず、ポテンシャルから求める方法で検討する。

```
kill(all);
EQU:U(p)=M*G*(A*cos(p)+L*cos(p)+A*p
*sin(p));
EQUd:diff(EQU,p,1);
EQUd1:rhs(%)=0;
EQUd1/cos(p);
expand(subst(tan(p)*cos(p),sin(p),%));
EQUdd:diff(EQU,p,2);
expand(subst(1,cos(p),EQUdd));
lhs(%)=first(rhs(%))+last(rhs(%));
EQUdd1:factor(%);
EQU1:subst([L=A],EQU);
EQUd3:factor(diff(EQU1,p,3));
EQUd4:factor(diff(EQU1,p,4));
```

立方体が p だけ傾斜したとき、接触面は滑らないため、 pA だけ接触位置がずれる。このとき、ポテンシャルとその 1 階微分は、

$$U(p) = G (\cos(p) L + p \sin(p) A + \cos(p) A) M$$

$$\frac{d}{dp} U(p) = G (p \cos(p) A - \sin(p) L) M = 0$$

$$G (p \cos(p) A - \sin(p) L) M = 0$$

$p = 0$ の時、平衡状態となる。安定性について、ポテンシャルの 2 階微分は、

$$\frac{d^2}{dp^2} U(p) = G (-\cos(p) L - p \sin(p) A + \cos(p) A) M$$

$$\frac{d^2}{dp^2} U(p) = -G (L - A) M$$

上記から、 $L < A$ の時安定である。

```
LI:[G=9.8,A=1,L=1,M=1];
EQU5:subst([LI],rhs(EQU));
EQUd5:subst([LI],rhs(EQUd));
EQUdd5:subst([LI],rhs(EQUdd));
plot2d([EQU5,EQUd5,EQUdd5],[p,-1.5,1.5],
[y,-15,30],[legend,"U","dU/dp",
"dU2/dy2"],[style,[lines,3,1],
[lines,3,2],[lines,3,3]]);
```

$L = A$ の時、2 階微分が零となるので、3 階、4 階微分についても調べる。また、 $U(p)$ などのグラフを下記に示す。この結果から $L = A$ の時、上に凸の形で不安定である。

$$\frac{d^3}{dp^3} U(p) = -(\sin(p) + p \cos(p)) A G M$$

$$\frac{d^4}{dp^4} U(p) = (p \sin(p) - 2 \cos(p)) A G M$$

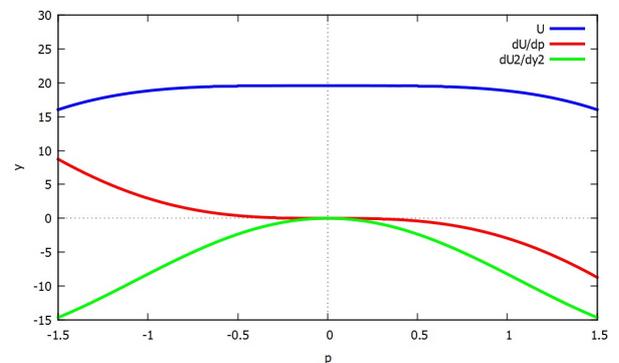


図 3.1.9: $U(p)$ などの特性

例題 3.1.10 懸垂曲線

線密度： m の鎖の両端を固定して垂らしたときの鎖の形状と張力について調べる。

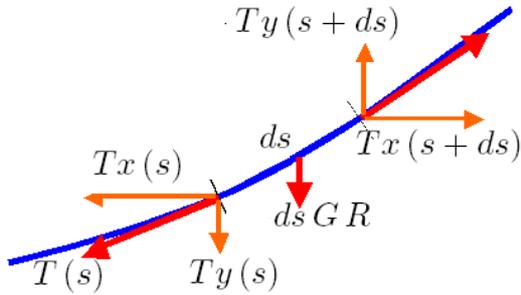


図 3.1.10: たらした鎖の張力

(1) 力のバランス

鎖の要素： ds における力の関係は、

```
kill(all);
EQX: -Tx(s)+Tx(s+ds)=0;
EQY: -Ty(s)+Ty(s+ds)-m*g*ds=0;
EQT: T(s)=sqrt(Tx(s)^2+Ty(s)^2);
EQX1: subst([Tx(s+ds)=Tx(s)
+d*diff(Tx(s),s,1)*ds],EQX);
EQY1: subst([Ty(s+ds)=Ty(s)
+d*diff(Ty(s),s,1)*ds],EQY);
```

重力加速度： g 、鎖の長さ： s として、鎖の張力： $T(s)$ とする。張力の x 軸成分： $Tx(s)$ とし、その関係は、

$$Tx(s+ds) - Tx(s) = 0$$

y 軸成分： $Ty(s)$ とし、その関係は、

$$-ds gm + Ty(s+ds) - Ty(s) = 0$$

$T(s)$ と $Tx(s)$ 、 $Ty(s)$ の関係は、

$$T(s) = \sqrt{Ty(s)^2 + Tx(s)^2}$$

$Tx(s)$ を微分方程式で表現すると、

$$ds \left(\frac{d}{ds} Tx(s) \right) = 0$$

$Ty(s)$ を微分方程式で表現すると、

$$ds \left(\frac{d}{ds} Ty(s) \right) - ds gm = 0$$

```
atvalue(Tx(s),s=0,T[0]);
assume(T[0]>0);
ANSTX:desolve(EQX1,Tx(s));
atvalue(Ty(s),s=0,0);
ANSTY:desolve(EQY1,Ty(s));
EQT1:subst([ANSTX,ANSTY],EQT);
ART:A=T[0]/m/g;
assume(A>0);
ART1:solve(ART,R)[1];
EQT2:factor(subst([ART1],EQT1));
EQX2:Tx(s)=T(s)*diff(x(s),s,1);
EQY2:Ty(s)=T(s)*diff(y(s),s,1);
EQX21:solve(EQX2,diff(x(s),s,1))[1];
EQX3:subst([ANSTX,EQT2],%);
solve(EQY2,diff(y(s),s,1))[1];
subst([ANSTY,EQT2],%);
EQY3:subst([ART1],%);
```

鎖の傾斜がない点： $dy/ds = 0$ を基準点とし、ここでは、 $T = T_0, x = 0, s = 0$ として上記微分方程式を解くと、

$$Tx(s) = T_0, \quad Ty(s) = s gm$$

T_x, T_y を消去し、整理すると、

$$T(s) = \sqrt{s^2 g^2 m^2 + T_0^2}$$

$$A = \frac{T_0}{gm}$$

上式の置き換えを行うと、

$$T(s) = \frac{T_0 \sqrt{A^2 + s^2}}{A} \quad (3.1.15)$$

糸の形状を $x(s), y(s)$ で表すと、

$$Tx(s) = T(s) \left(\frac{d}{ds} x(s) \right)$$

$$Ty(s) = T(s) \left(\frac{d}{ds} y(s) \right)$$

上式から下記となり、上記の T_x, T_y の関係式から、

$$\frac{d}{ds} x(s) = \frac{Tx(s)}{T(s)} = \frac{A}{\sqrt{A^2 + s^2}} \quad (3.1.16)$$

$$\frac{d}{ds} y(s) = \frac{Ty(s)}{T(s)} = \frac{s}{\sqrt{A^2 + s^2}} \quad (3.1.17)$$

```
atvalue(x(s),s=0,0);
desolve(EQX3,x(s));
ode2(EQX3,x(s),s);
ANSX:subst([%c=0],%);
solve(%,s/A)[1];
ANSS:%*A;
```

```
ode2(EQY3,y(s),s);
subst(['%c=0'],%);
ANSY:lhs(%)=trigsimp(subst([ANSS],
rhs(%)));
ANST:lhs(EQT2)=trigsimp(subst([ANSS],
rhs(EQT2)));
solve(ANSY,cosh(x(s)/A))[1];
ANST1:subst(['%'],ANST);
A:1;
plot2d(ANSY1,[XX,-1,1],[y,0,2]);
```

(3.1.16) 式の微分方程式を解き、

$$x(s) = A \sinh\left(\frac{s}{A}\right) \quad (3.1.18)$$

上式から s を求めると、

$$s = A \sinh\left(\frac{x(s)}{A}\right) \quad (3.1.19)$$

(3.1.17) 式の微分方程式を解き、

$$y(s) = \sqrt{A^2 + s^2}$$

(3.1.19) 式の s を代入すると、鎖の形状：懸垂曲線が得られた。

$$y(s) = A \cosh\left(\frac{x(s)}{A}\right) \quad (3.1.20)$$

張力： $T(s)$ について、(3.1.15) 式に (3.1.19) 式を代入すると、

$$T(s) = T_0 \cosh\left(\frac{x(s)}{A}\right) \quad (3.1.21)$$

(3.1.20) 式から、

$$T(s) = \frac{T_0 y(s)}{A} \quad (3.1.22)$$

下記にカタナリー曲線を示す。ここで、 A を求める必要がある。(3.1.19) 式を用いて、鎖の長さ： s と x 座標から A を求める。これは解析的に解けないので、数値解法などを用いて解く必要がある。

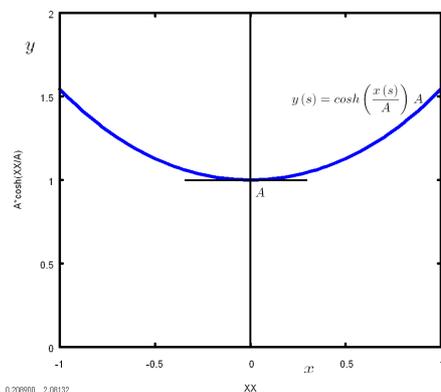


図 3.1.11: 懸垂曲線

(2) ポテンシャル

x, y 座標で、二点： $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ に長さ： L の鎖の両端を吊した時の鎖の形状を求める。鎖の単位長さあたりの質量： m 、重力加速度： g とする。

```
kill(all);
depends(H,x,y,p);
S1:ds=sqrt(dx^2+dy^2);
S2:ds=sqrt(1+diff(y(x),x,1)^2)*dx;
S3:L='integrate(rhs(S2)/dx,x,x[1],x[2]);
G1:G=rhs(S2)/dx;
U1:dU=m*g*y(x)*ds;
U2:subst([S2],%);
U3:U='integrate(rhs(U2)/dx,x,x[1],x[2]);
F1:F=rhs(U2)/dx;
H1:H=F+K*G;
H2:subst([F1,G1],%);
P1:p(x)=diff(y(x),x,1);
P2:diff(y(x),x,1)=p(x);
H3:subst([P2],H2);
E1:H-p(x)*'diff(H,p(x),1)=C;
H42:diff(rhs(H3),p(x),1);
rhs(H3)-p(x)*H42=C;
%*sqrt(p(x)^2+1);
expand(%);
subst([g=1/m],%);
%^2;
%/C^2-1;
H5:p(x)=sqrt(lhs(%));
H51:h(x)=(y(x)+K)/C;
H52:solve(H51,y(x))[1];
subst([P1,H52],H5);
H6:ev(%,diff);
ode2(%,h(x),x);
1/rhs(H6)*dh(x)=1/C*dx;
acosh(x);
'diff(%,x,1)=diff(%,x,1);
acosh(h(x))=(x-d)/C;
h(x)=cosh(rhs(%));
subst([H51],%);
```

鎖の微小長さ： ds は次式で表せる。

$$ds = \sqrt{dy^2 + dx^2} = dx \sqrt{\left(\frac{d}{dx} y\right)^2 + 1} \quad (3.1.23)$$

x_1 から x_2 までの鎖の長さ： L は、

$$L = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\left(\frac{d}{dx} y(x)\right)^2 + 1} dx \quad (3.1.24)$$

鎖の微小長さ: ds の位置ポテンシャル: dU とすると、

$$\begin{aligned} dU &= ds g m y(x) \\ &= dx g m y(x) \sqrt{\left(\frac{d}{dx} y(x)\right)^2 + 1} \end{aligned}$$

x_1 から x_2 までの鎖の位置ポテンシャル: U は、

$$U = g m \int_{x_1}^{x_2} y(x) \sqrt{\left(\frac{d}{dx} y(x)\right)^2 + 1} dx$$

鎖は位置ポテンシャル: U が最小になるような形状となる。鎖の長さ: L が一定で、 U を最小にする問題は、「Maximaを使った物理数学基礎演習ノート」: 溝口純敏、<http://www9.plala.or.jp/prac-maxima/>、平成27年7月の第8章 変分法 8.1.5 付帯条件のついた変分問題、P.226、(8.1.50) 式、(8.1.51) 式、(8.1.52) 式から

$$\begin{aligned} G &= \sqrt{\left(\frac{d}{dx} y(x)\right)^2 + 1} \\ F &= g m y(x) \sqrt{\left(\frac{d}{dx} y(x)\right)^2 + 1} \\ H &= G K + F \end{aligned}$$

以上からオイラーの微分方程式の H は、

$$\begin{aligned} H &= \sqrt{\left(\frac{d}{dx} y(x)\right)^2 + 1} K \\ &\quad + g m y(x) \sqrt{\left(\frac{d}{dx} y(x)\right)^2 + 1} \end{aligned}$$

ここで下記とすると、

$$\frac{d}{dx} y(x) = p(x)$$

H は、

$$H = \sqrt{p(x)^2 + 1} K + g m \sqrt{p(x)^2 + 1} y(x) \quad (3.1.25)$$

オイラーの微分方程式として、 y で積分した「Maximaを使った物理数学基礎演習ノート」: 溝口純敏、<http://www9.plala.or.jp/prac-maxima/>、平成27年7月の第8章 変分法、P.214、(8.1.7) 式を用い、

$$H - p(x) \left(\frac{d}{dp(x)} H\right) = C \quad (3.1.26)$$

上式の $\frac{d}{dp(x)} H$ は、

$$\frac{d}{dp(x)} H = \frac{p(x) K}{\sqrt{p(x)^2 + 1}} + \frac{g m p(x) y(x)}{\sqrt{p(x)^2 + 1}}$$

上記の結果を (3.1.26) 式に代入すると、

$$\begin{aligned} -p(x) \left(\frac{p(x) K}{\sqrt{p(x)^2 + 1}} + \frac{g m p(x) y(x)}{\sqrt{p(x)^2 + 1}} \right) \\ + \sqrt{p(x)^2 + 1} K + g m \sqrt{p(x)^2 + 1} y(x) = C \end{aligned}$$

上式を整理すると、

$$K + g m y(x) = \sqrt{p(x)^2 + 1} C$$

定数を変え、

$$K + y(x) = \sqrt{p(x)^2 + 1} C$$

両辺を自乗し、

$$(K + y(x))^2 = (p(x)^2 + 1) C^2$$

$p(x)$ を求めると、

$$p(x) = \sqrt{\frac{(K + y(x))^2}{C^2} - 1}$$

下記の置き換えを行い、

$$h(x) = \frac{K + y(x)}{C} \quad (3.1.27)$$

上式に代入すると、

$$\frac{d}{dx} (h(x) C - K) = \sqrt{h(x)^2 - 1}$$

微分を実行し、

$$\left(\frac{d}{dx} h(x)\right) C = \sqrt{h(x)^2 - 1} \quad (3.1.28)$$

ode2 関数で解くと、

$$\log\left(2\sqrt{h(x)^2 - 1} + 2h(x)\right) C = x + \%c$$

一方、(3.1.28) 式から、

$$\frac{dh(x)}{\sqrt{h(x)^2 - 1}} = \frac{dx}{C}$$

積分公式¹ から、

$$\frac{d}{dx} \operatorname{acosh}(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

以上から、(3.1.28) 式の解は、

$$\operatorname{acosh}(h(x)) = \frac{x - d}{C}$$

(3.1.27) 式を代入し、鎖の形状は、

$$\frac{K + y(x)}{C} = \cosh\left(\frac{x - d}{C}\right)$$

¹ 森口 繁一、宇田川 久、一松 信: 岩波数学公式1 微分積分・平面曲線、岩波書店 2003、P.110

例題 3.1.11 一端固定、他端滑車に垂らした糸の釣合位置

長さ： $2L$ の糸を一端固定、他端滑車に垂らし、糸の釣合位置を求める。滑車部における糸の張力を T とし、固定端と滑車間の長さを $2d$ 、懸垂している部分の糸の長さを $2S_0$ とすると、前例題の懸垂曲線の関係式から、下記が得られる。

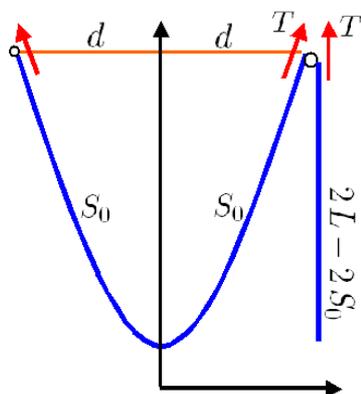


図 3.1.12: 一端固定、他端滑車に垂らした糸の釣合位置

懸垂部分の滑車部における張力と滑車から下に垂れた糸による張力が等しいとして、

```
kill(all);
EQ1:T=T[0]*cosh(d/A);
EQ2:A=T[0]/G/R;
EQ3:S[0]=A*sinh(d/A);
EQ4:T=(2*L-2*S[0])*R*G;
EQ21:solve(eq3,T[0])[1];
EQ11:rhs(EQ1)=rhs(EQ4);
subst([EQ21],%);
subst([EQ3],%);
expand(%/G/R/2/A);
```

$$T = T_0 \cosh\left(\frac{d}{A}\right)$$

$$A = \frac{T_0}{GR}$$

$$S_0 = \sinh\left(\frac{d}{A}\right) A$$

$$T = G(2L - 2S_0)R$$

上記の関係から、

$$\frac{\cosh\left(\frac{d}{A}\right)}{2} = \frac{L}{A} - \sinh\left(\frac{d}{A}\right)$$

これは解析的に解けないので、数値解法などを用いて A を求め、張力や下に垂れた糸の長さなどが得られる。

3.2 剛体の平面運動

3.2.1 質点系の運動方程式

剛体を多くの質点の集まりと考え、各質点の質量： m_i とする。各質点の位置ベクトル： \vec{r}_i を重心までの位置ベクトル： \vec{r}_G と重心から質点までの位置ベクトル： \vec{r}'_i に分けて考える。

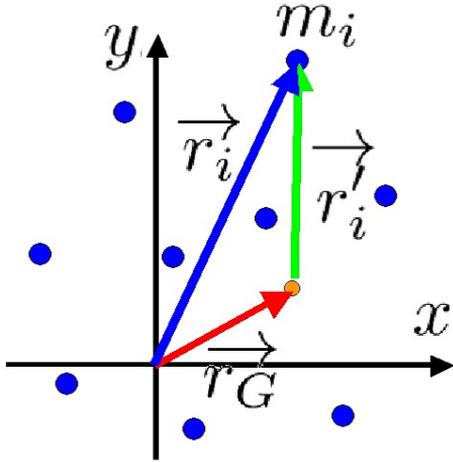


図 3.2.1: 質点系

位置ベクトルの関係式は、

$$\vec{r}_i = \vec{r}_G + \vec{r}'_i \quad (3.2.1)$$

上式に質量： m_i を掛け、質点系の総和は、

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i = \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_G + \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}'_i \quad (3.2.2)$$

重心の定義から、

$$M = \sum_{i=1}^n m_i, \quad \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}'_i = \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_G = M \vec{r}_G \quad (3.2.3)$$

重心の定義から次の関係が得られる。

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}'_i = 0 \quad (3.2.4)$$

上式をマトリックスで表現すると、

$$\vec{r}_G = \begin{bmatrix} x_G(t) \\ y_G(t) \\ z_G(t) \end{bmatrix}, \quad \vec{r}'_i = \begin{bmatrix} x_i(t) \\ y_i(t) \\ z_i(t) \end{bmatrix} \quad (3.2.5)$$

$$\vec{r}_i = \begin{bmatrix} x_G(t) + x_i(t) \\ y_G(t) + y_i(t) \\ z_G(t) + z_i(t) \end{bmatrix} \quad (3.2.6)$$

重心の関係から、下記を得る。

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n m_i x_i(t) \\ \sum_{i=1}^n m_i y_i(t) \\ \sum_{i=1}^n m_i z_i(t) \end{bmatrix} = 0 \quad (3.2.7)$$

```

Fi:matrix([F[x](i)], [F[y](i)], [F[z](i)]);
Fik:matrix([F[x](i,k)], [F[y](i,k)],
[F[z](i,k)]);
AG:diff(RG,t,2);
FISUM:matrix([sum(Fi[1][1],i,1,n),
[sum(Fi[2][1],i,1,n)],
[sum(Fi[3][1],i,1,m)]);
FIKSUM:matrix(
[sum(sum(Fik[1][1],i,1,n),k,1,m)],
[sum(sum(Fik[2][1],i,1,n),k,1,m)],
[sum(sum(Fik[3][1],i,1,n),k,1,m)]);
EQRR:sum(m[i]*rhs(diff(RR,t,2)),i,1,n)
-FISUM=0;
EQRG:sum(m[i]*(diff(RG,t,2)),i,1,n)
+sum(m[i]*(diff(Ri,t,2)),i,1,n)=FISUM;
subst([RiSUMDD1,RiSUMDD2,RiSUMDD3],EQRG);
EQXY:subst([rhs(MASS)=lhs(MASS)],%);
lhs(EQXY)[1][1]=rhs(EQXY)[1][1];
lhs(EQXY)[2][1]=rhs(EQXY)[2][1];
lhs(EQXY)[3][1]=rhs(EQXY)[3][1];
    
```

質点系の運動方程式で、内力は作用反作用でお互い打ち消しあうので、外力のみを考慮すればよい。以上から、質点系の運動方程式は、

$$\sum_{i=1}^n m_i \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}_i = \begin{bmatrix} \left(\sum_{i=1}^n m_i \left(\frac{d^2}{dt^2} x_i(t) \right) \right) + \left(\sum_{i=1}^n m_i \right) \left(\frac{d^2}{dt^2} x_G(t) \right) \\ \left(\sum_{i=1}^n m_i \left(\frac{d^2}{dt^2} y_i(t) \right) \right) + \left(\sum_{i=1}^n m_i \right) \left(\frac{d^2}{dt^2} y_G(t) \right) \\ \left(\sum_{i=1}^n m_i \left(\frac{d^2}{dt^2} z_i(t) \right) \right) + \left(\sum_{i=1}^n m_i \right) \left(\frac{d^2}{dt^2} z_G(t) \right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n F_x(i) \\ \sum_{i=1}^n F_y(i) \\ \sum_{i=1}^n F_z(i) \end{bmatrix}$$

```

kill(all);
un:matrix([1],[1],[1]);
MASS:M=sum(m[i],i,1,n);
RG:matrix([x[G](t)], [y[G](t)], [z[G](t)]);
Ri:matrix([x[i](t)], [y[i](t)], [z[i](t)]);
RR:R=RG+Ri;
expand(sum(m[i]*rhs(RR),i,1,n))-M*RG=0;
subst([MASS],%);
RiSUM:sum(m[i]*Ri,i,1,n)=0;
RiSUMDD:diff(RiSUM,t,2);
RiSUMDD1:lhs(RiSUMDD)[1][1]=0;
RiSUMDD2:lhs(RiSUMDD)[2][1]=0;
RiSUMDD3:lhs(RiSUMDD)[3][1]=0;
    
```

(3.2.7) 式を時間微分したのもも零であるから、

$$\begin{bmatrix} \left(\sum_{i=1}^n m_i\right) \left(\frac{d^2}{dt^2} x_G(t)\right) \\ \left(\sum_{i=1}^n m_i\right) \left(\frac{d^2}{dt^2} y_G(t)\right) \\ \left(\sum_{i=1}^n m_i\right) \left(\frac{d^2}{dt^2} z_G(t)\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n F_x(i) \\ \sum_{i=1}^n F_y(i) \\ \sum_{i=1}^m F_z(i) \end{bmatrix} \quad (3.2.8)$$

上式から、

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} x_G(t)\right) M = \sum_{i=1}^n F_x(i) \quad (3.2.9)$$

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} y_G(t)\right) M = \sum_{i=1}^n F_y(i) \quad (3.2.10)$$

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} z_G(t)\right) M = \sum_{i=1}^m F_z(i) \quad (3.2.11)$$

この結果から、力の合計を重心に作用するとして、運動方程式を立てれば良い。

次に、角運動量について検討する。各質点における角運動量： \vec{L}_i は下記となる。

$$\vec{L}_i = m_i \vec{r}_i \times \vec{V}_i = m_i \vec{r}_i \times \frac{d}{dt} \vec{r}_i$$

$\vec{r}_i = \vec{r}_G + \vec{r}'_i$ であるから、これを上式に代入し、

$$\vec{L}_i = m_i \left(\vec{r}_G + \vec{r}'_i \right) \times \left(\frac{d}{dt} \vec{r}_G + \frac{d}{dt} \vec{r}'_i \right)$$

これをマトリックス表示して、

```

Li:expand(m[i]*(col(adjoint(append(
  transpose(rhs(RR)),
  transpose(diff(rhs(RR),t,1)),
  transpose(un))),3)));
Li[1][1];
Li1:sum(first(rest(Li[1][1],2)),i,1,n)
  +sum(first(Li[1][1]),i,1,n);
Li2:sum(first(rest(Li[1][1],3)),i,1,n)
  +sum(first(rest(Li[1][1],1)),i,1,n);
Li3:sum(first(rest(Li[1][1],6)),i,1,n)
  +sum(first(rest(Li[1][1],4)),i,1,n);
Li4:sum(last(Li[1][1]),i,1,n)
  +sum(first(rest(Li[1][1],5)),i,1,n);
Li1:Li[1][1];
Li2:Li[2][1];
Li3:Li[3][1];
Li11:first(Li1)+rest(rest(Li1,-5),2);
Li12:rest(rest(Li1,-2),5)+last(Li1);
Li21:first(Li2)+rest(rest(Li2,-5),2);
Li22:+rest(rest(Li2,-2),5)+last(Li2);
Li31:first(Li3)+rest(rest(Li3,-5),2);
Li32:+rest(rest(Li3,-2),5)+last(Li3);
LOi:matrix([Li11],[Li21],[Li31]);
LGi:matrix([Li12],[Li22],[Li32]);
LOD:'diff(L[0],t,1)=diff(sum(LOi,i,1,n),
  t,1);
LOD1:lhs(LOD)=(M*(col(adjoint(append(
  transpose(RG),transpose(AG),
  transpose(un))),3)));
LG:L[G]=sum(LGi,i,1,n);
LGD:'diff(L[G],t,1)=diff(rhs(LG),t,1);
LTD:lhs(LOD)+lhs(LGD)=rhs(LOD)+rhs(LGD);

```

\vec{L}_i の結果の記述は長くなるので、その1行目を示すと、

$$\begin{aligned} \Delta L_{i1} = & m_i y_G(t) \left(\frac{d}{dt} z_G(t)\right) + m_i y_i(t) \left(\frac{d}{dt} z_G(t)\right) - m_i z_G(t) \left(\frac{d}{dt} y_G(t)\right) - m_i z_i(t) \left(\frac{d}{dt} y_G(t)\right) \\ & + m_i y_G(t) \left(\frac{d}{dt} z_i(t)\right) + m_i y_i(t) \left(\frac{d}{dt} z_i(t)\right) - m_i z_G(t) \left(\frac{d}{dt} y_i(t)\right) - m_i z_i(t) \left(\frac{d}{dt} y_i(t)\right) \end{aligned}$$

上記の各質点の和をとり、下記のようにまとめる。

$$L_{01} = \left(\sum_{i=1}^n m_i\right) y_G(t) \left(\frac{d}{dt} z_G(t)\right) - \left(\sum_{i=1}^n m_i\right) z_G(t) \left(\frac{d}{dt} y_G(t)\right)$$

$$L_{21} = \left(\sum_{i=1}^n m_i y_i(t)\right) \left(\frac{d}{dt} z_G(t)\right) - \left(\sum_{i=1}^n m_i z_i(t)\right) \left(\frac{d}{dt} y_G(t)\right)$$

$$L_{31} = y_G(t) \left(\sum_{i=1}^n m_i \left(\frac{d}{dt} z_i(t)\right)\right) - z_G(t) \sum_{i=1}^n m_i \left(\frac{d}{dt} y_i(t)\right)$$

$$L_{G1} = \left(\sum_{i=1}^n m_i y_i(t) \left(\frac{d}{dt} z_i(t) \right) \right) - \sum_{i=1}^n m_i z_i(t) \left(\frac{d}{dt} y_i(t) \right)$$

重心の関係式：(3.2.4)式から、上式の L_{21}, L_{31} の項は零である。そこで、角運動量： \vec{L} は下記となる。

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^n \vec{L}_{0i} + \sum_{i=1}^n \vec{L}_{Gi}$$

ここで、

$$\vec{L}_{0i} = \begin{bmatrix} m_i y_G(t) \left(\frac{d}{dt} z_G(t) \right) - m_i z_G(t) \left(\frac{d}{dt} y_G(t) \right) \\ m_i z_G(t) \left(\frac{d}{dt} x_G(t) \right) - m_i x_G(t) \left(\frac{d}{dt} z_G(t) \right) \\ m_i x_G(t) \left(\frac{d}{dt} y_G(t) \right) - m_i y_G(t) \left(\frac{d}{dt} x_G(t) \right) \end{bmatrix}$$

$$\vec{L}_{Gi} = \begin{bmatrix} m_i y_i(t) \left(\frac{d}{dt} z_i(t) \right) - m_i z_i(t) \left(\frac{d}{dt} y_i(t) \right) \\ m_i z_i(t) \left(\frac{d}{dt} x_i(t) \right) - m_i x_i(t) \left(\frac{d}{dt} z_i(t) \right) \\ m_i x_i(t) \left(\frac{d}{dt} y_i(t) \right) - m_i y_i(t) \left(\frac{d}{dt} x_i(t) \right) \end{bmatrix}$$

上式を時間： t で微分すると、

$$\frac{d}{dt} \vec{L} = \frac{d}{dt} \vec{L}_G + \frac{d}{dt} \vec{L}_0 \quad (3.2.12)$$

ここで、

$$\frac{d}{dt} \vec{L}_0 = \begin{bmatrix} \left(y_G(t) \left(\frac{d^2}{dt^2} z_G(t) \right) - z_G(t) \left(\frac{d^2}{dt^2} y_G(t) \right) \right) M \\ \left(z_G(t) \left(\frac{d^2}{dt^2} x_G(t) \right) - x_G(t) \left(\frac{d^2}{dt^2} z_G(t) \right) \right) M \\ \left(x_G(t) \left(\frac{d^2}{dt^2} y_G(t) \right) - y_G(t) \left(\frac{d^2}{dt^2} x_G(t) \right) \right) M \end{bmatrix} \quad (3.2.13)$$

$$\frac{d}{dt} \vec{L}_G = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n m_i y_i(t) \left(\frac{d^2}{dt^2} z_i(t) \right) - m_i z_i(t) \left(\frac{d^2}{dt^2} y_i(t) \right) \\ \sum_{i=1}^n m_i z_i(t) \left(\frac{d^2}{dt^2} x_i(t) \right) - m_i x_i(t) \left(\frac{d^2}{dt^2} z_i(t) \right) \\ \sum_{i=1}^n m_i x_i(t) \left(\frac{d^2}{dt^2} y_i(t) \right) - m_i y_i(t) \left(\frac{d^2}{dt^2} x_i(t) \right) \end{bmatrix} \quad (3.2.14)$$

外力のモーメント： N は、下記で表現できる。

$$\vec{N}_i = \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \left(\vec{r}_G + \vec{r}'_i \right) \times \vec{F}_i$$

```
Ni:expand(col(adjoint(append(
transpose(RG+Ri),transpose(Fi),
transpose(un))),3));
Ni1:Ni[1][1];
Ni2:Ni[2][1];
Ni3:Ni[3][1];
Ni11:rest(Ni1,-2);
Ni21:rest(Ni2,-2);
Ni31:rest(Ni3,-2);
Ni12:rest(Ni1,2);
Ni22:rest(Ni2,2);
Ni32:rest(Ni3,2);
NO:sum(matrix([Ni11],[Ni21],[Ni31]),i,1,
m);
NG:sum(matrix([Ni12],[Ni22],[Ni32]),i,1,
m);
NT:N=NO+NG;
expand(col(adjoint(append(transpose(RG),
transpose(lhs(EQXY)),transpose(un))),3))
=expand(col(adjoint(append(transpose(
RG),transpose(rhs(EQXY)),transpose(
un))),3));
LGD1:'diff(L[G],t,1)=NG;
LGD2:diff(rhs(LG),t,1)=NG;
```

モーメントは、下記の力の和を重心に作用させたモーメント： \vec{N}_0 と重心まわりのモーメント： \vec{N}_G に分けることができる。

$$\vec{N} = \vec{N}_0 + \vec{N}_G \quad (3.2.15)$$

ここで、

$$\vec{N}_0 = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m F_z(i) y_G(t) - F_y(i) z_G(t) \\ \sum_{i=1}^m F_x(i) z_G(t) - F_z(i) x_G(t) \\ \sum_{i=1}^m F_y(i) x_G(t) - F_x(i) y_G(t) \end{bmatrix} \quad (3.2.16)$$

$$\vec{N}_G = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m F_z(i) y_i(t) - F_y(i) z_i(t) \\ \sum_{i=1}^m F_x(i) z_i(t) - F_z(i) x_i(t) \\ \sum_{i=1}^m F_y(i) x_i(t) - F_x(i) y_i(t) \end{bmatrix} \quad (3.2.17)$$

(3.2.8) 式に \vec{r}_G を掛けると、

$$\begin{bmatrix} \left(\sum_{i=1}^n m_i\right) \left(\frac{d^2}{dt^2} x_G(t)\right) \\ \left(\sum_{i=1}^n m_i\right) \left(\frac{d^2}{dt^2} y_G(t)\right) \\ \left(\sum_{i=1}^n m_i\right) \left(\frac{d^2}{dt^2} z_G(t)\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_G(t) \\ y_G(t) \\ z_G(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n F_x(i) \\ \sum_{i=1}^n F_y(i) \\ \sum_{i=1}^m F_z(i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_G(t) \\ y_G(t) \\ z_G(t) \end{bmatrix}$$

次式となる。

$$\begin{bmatrix} y_G(t) \left(\frac{d^2}{dt^2} z_G(t)\right) M - z_G(t) \left(\frac{d^2}{dt^2} y_G(t)\right) M \\ z_G(t) \left(\frac{d^2}{dt^2} x_G(t)\right) M - x_G(t) \left(\frac{d^2}{dt^2} z_G(t)\right) M \\ x_G(t) \left(\frac{d^2}{dt^2} y_G(t)\right) M - y_G(t) \left(\frac{d^2}{dt^2} x_G(t)\right) M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\sum_{i=1}^m F_z(i)\right) y_G(t) - \left(\sum_{i=1}^n F_y(i)\right) z_G(t) \\ \left(\sum_{i=1}^n F_x(i)\right) z_G(t) - \left(\sum_{i=1}^m F_z(i)\right) x_G(t) \\ \left(\sum_{i=1}^n F_y(i)\right) x_G(t) - \left(\sum_{i=1}^n F_x(i)\right) y_G(t) \end{bmatrix}$$

すなわち、上式左辺は (3.2.13) 式の右辺に、上式右辺は (3.2.16) 式の右辺に対応しており、

$$\frac{d}{dt} \vec{L}_0 = \vec{N}_0 \quad (3.2.18)$$

この関係から、次式は、

$$\frac{d}{dt} \vec{L} = \vec{N}$$

(3.2.12) 式、(3.2.15) 式から、

$$\frac{d}{dt} \vec{L}_0 + \frac{d}{dt} \vec{L}_G = \vec{N}_0 + \vec{N}_G$$

上式に (3.2.18) 式を代入すると、

$$\frac{d}{dt} \vec{L}_G = \vec{N}_G \quad (3.2.19)$$

上式は (3.2.14) 式、(3.2.17) 式から、

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n m_i y_i(t) \left(\frac{d^2}{dt^2} z_i(t)\right) - m_i z_i(t) \left(\frac{d^2}{dt^2} y_i(t)\right) \\ \sum_{i=1}^n m_i z_i(t) \left(\frac{d^2}{dt^2} x_i(t)\right) - m_i x_i(t) \left(\frac{d^2}{dt^2} z_i(t)\right) \\ \sum_{i=1}^n m_i x_i(t) \left(\frac{d^2}{dt^2} y_i(t)\right) - m_i y_i(t) \left(\frac{d^2}{dt^2} x_i(t)\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m F_z(i) y_i(t) - F_y(i) z_i(t) \\ \sum_{i=1}^m F_x(i) z_i(t) - F_z(i) x_i(t) \\ \sum_{i=1}^m F_y(i) x_i(t) - F_x(i) y_i(t) \end{bmatrix} \quad (3.2.20)$$

以上の結果から、質点系の運動方程式は、外力の合計が重心に作用するとして平行運動の運動方程式 (3.2.8) 式を求め、外力の重心まわりのモーメントによる回転運動方程式 (3.2.20) 式を求めることにより得られる。

3.2.2 剛体の平面運動方程式

2次元の剛体平面運動の運動方程式を求める。下記のプログラムは前節のプログラムに続いて実行する。

```
X:x[i](t)=r[i]*cos(p[i](t));
Y:y[i](t)=r[i]*sin(p[i](t));
Z:z[i](t)=0;
P:diff(p[i](t),t,1)=w(t);
PD:diff(P,t,1);
subst([X,Y,Z],lhs(LGD2));
ev(%diff);
trigsimp(%);
subst([PD],%);
%=rhs(LGD2);
LGD3:lhs(%)[3][1]=rhs(%)[3][1];
```

```
IG:sum(m[i]*r[i]^2,i,1,n)=I[G];
subst([IG],LGD3);
```

x_i, y_i, z_i を極座標: $r_i, p_i(t)$ で表す。剛体であるので、 r_i は変化しない。

$$x_i(t) = r_i \cos(p_i(t)), \quad y_i(t) = r_i \sin(p_i(t))$$

$$z_i(t) = 0$$

また、角速度: $w(t)$ は全ての質点で同じであるから、

$$\frac{d}{dt} p_i(t) = w(t)$$

これらの関係を前節の (3.2.20) 式の左辺に代入すると、

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sum_{i=1}^n m_i r_i \cos(p_i(t)) \left(\frac{d^2}{dt^2} (r_i \sin(p_i(t))) \right) - m_i r_i \sin(p_i(t)) \left(\frac{d^2}{dt^2} (r_i \cos(p_i(t))) \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \left(\frac{d^2}{dt^2} p_i(t) \right) \end{pmatrix}$$

上式から (3.2.20) 式は、

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \left(\sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \right) \left(\frac{d}{dt} w(t) \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m F_z(i) y_i(t) - F_y(i) z_i(t) \\ \sum_{i=1}^m F_x(i) z_i(t) - F_z(i) x_i(t) \\ \sum_{i=1}^m F_y(i) x_i(t) - F_x(i) y_i(t) \end{pmatrix}$$

上式から、回転方向の運動方程式は、重心まわりの慣性モーメント: I_G を用いて、

$$\left(\sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \right) \left(\frac{d}{dt} w(t) \right) = \left(\frac{d}{dt} w(t) \right) I_G = \sum_{i=1}^m F_y(i) x_i(t) - F_x(i) y_i(t) \quad \text{ここで、} \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 = I_G$$

以上のことから、運動方程式は下記となる。

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} x_G(t) \right) M = \sum_{i=1}^n F_x(i) \quad (3.2.21)$$

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} y_G(t) \right) M = \sum_{i=1}^n F_y(i) \quad (3.2.22)$$

$$\left(\frac{d}{dt} w(t) \right) I_G = \sum_{i=1}^m F_y(i) x_i(t) - F_x(i) y_i(t) \quad (3.2.23)$$

重心まわりの回転による運動エネルギーを求める。

```
XD:diff(X,t,1);
YD:diff(Y,t,1);
ZD:diff(Z,t,1);
XYD:matrix([rhs(XD)], [rhs(YD)]);
DTE:1/2*trigsimp(m[i]*XYD.XYD);
subst([diff(p[i](t),t,1)=w(t)],%);
```

```
TE:T=sum(% , i, 1, n);
TE1:subst([IG],%);
```

各質点の速度: \vec{V}_i は、

$$\vec{V}_i = \begin{pmatrix} -r_i \sin(p_i(t)) \left(\frac{d}{dt} p_i(t) \right) \\ r_i \cos(p_i(t)) \left(\frac{d}{dt} p_i(t) \right) \end{pmatrix}$$

各質点の運動エネルギーは、

$$T_i = \frac{m_i}{2} \vec{V}_i \cdot \vec{V}_i = \frac{m_i r_i^2 \left(\frac{d}{dt} p_i(t) \right)^2}{2}$$

重心まわりの回転による運動エネルギーは、

$$T = \frac{\left(\sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \right) w(t)^2}{2} = \frac{w(t)^2 I_G}{2} \quad (3.2.24)$$

例題 3.2.3 物理振り子

剛体が O 点で固定され、回転が自由にできる。剛体の O 点周りの慣性モーメント： I 、剛体の質量： M 、重力加速度： G とし、重心： G と O の距離を H としたときの運動を求めよ。

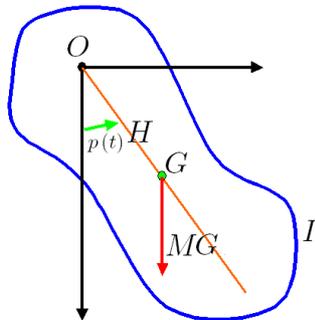


図 3.2.2: 物理振り子

(1) 剛体に作用する力・モーメントの分析

```
kill(all);
EQ:I*dif(p(t),t,2)=-M*G*H*sin(p(t));
EQ1:subst([sin(p(t))=p(t)],EQ);
assume(M>0);
assume(G>0);
assume(H>0);
assume(I>0);
assume(L>0);
atvalue(p(t),t=0,P0);
atvalue(dif(p(t),t),t=0,0);
ANS1:desolve(EQ1,p(t));
ANST:T[W]=2*pi*(I/sqrt(G*H*I*M));
I1:I=M*(K[0]^2+H^2);
subst([I1],ANST);
subst([T[W]=2*pi*sqrt(L/G)],%);
EQL:solve(%^2,L)[1];
K[0]:1;
plot2d(rhs(EQL),[H,0.1,10],[x,0,10],
[y,0,10]);
```

運動方程式は下記となる。

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} p(t)\right) I = -\sin(p(t)) G H M$$

運動振幅が小さいとすると、上の運動方程式は下記となり、解が得れる。

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} p(t)\right) I = -p(t) G H M$$

$$p(t) = \cos\left(\frac{t\sqrt{G}\sqrt{H}\sqrt{M}}{\sqrt{I}}\right) P_0$$

このとき、周期： T_W は、慣性モーメント： I を重心まわりの慣性半径： K_0 を用いて表現すると、

$$I = (H^2 + K_0^2) M$$

$$T_W = \frac{2\pi\sqrt{H^2 + K_0^2}}{\sqrt{G}\sqrt{H}}$$

質点の単振り子の相当長さ： L で置き換えて、

$$T_W = \frac{2\pi\sqrt{L}}{\sqrt{G}} = \frac{2\pi\sqrt{H^2 + K_0^2}}{\sqrt{G}\sqrt{H}}$$

$$L = \frac{H^2 + K_0^2}{H}$$

L と H の関係は、下図となる。この結果から、重心： G と O の距離： H として、同じ周期となる二種類の H があることがわかる。

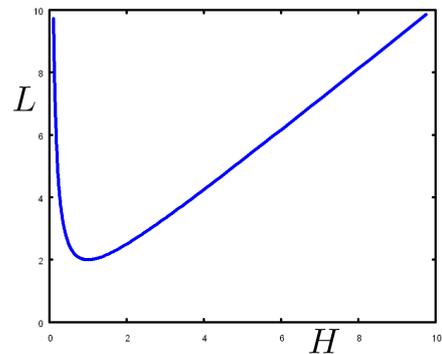


図 3.2.3: 回転中心と周期

(2) Lagrange の運動方程式

総運動エネルギー： T 、総ポテンシャル： U を求め、下記のようにして運動方程式を導く。

```
T:1/2*I*(dif(p(t),t,1))^2;
U:G*M*H*(1-cos(p(t)));
EQ2:dif(dif(T,dif(p(t),t,1)),t,1)
-dif(T,p(t),1)
+dif(U,p(t),1)=0;
```

$$T = \frac{\left(\frac{d}{dt} p(t)\right)^2 I}{2}$$

$$U = (1 - \cos(p(t))) G H M$$

Lagrange の運動方程式に上記を代入し、

$$\sin(p(t)) G H M + \left(\frac{d^2}{dt^2} p(t)\right) I = 0$$

剛体に作用する力・モーメントの分析から求めた式と同じ運動方程式が得られた。

例題 3.2.4 滑車につるされた質量

慣性モーメント： I の滑車に半径： R_1 に質量： M_1 を、半径： R_2 に質量： M_2 を図のように質量が無視できる糸で吊す。このときの滑車の運動を、糸に作用する張力： T_1, T_2 、重力加速度： G として求める。

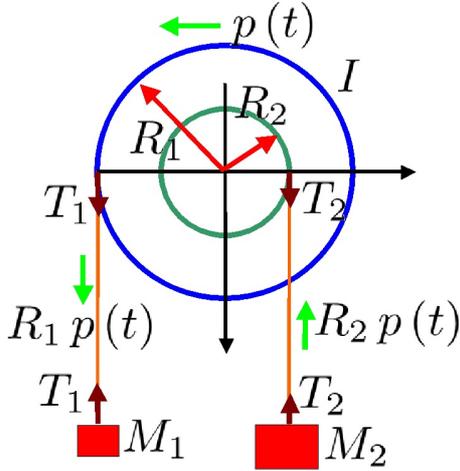


図 3.2.4: 滑車につるされた質量

(1) 剛体に作用する力・モーメントの分析

```
kill(all);
EQ1:I*diff(p(t),t,2)=T[1]*R[1]-T[2]*R[2];
EQ2:M[1]*diff((R[1]*p(t)),t,2)=M[1]*G-T[1];
EQ3:M[2]*diff((-R[2]*p(t)),t,2)=M[2]*G-T[2];
atvalue(diff(p(t),t,1),t=0,0);
atvalue(p(t),t=0,0);
ANSO:solve([EQ1,EQ2,EQ3],[diff(p(t),t,2),T[1],T[2]]);
ANS1:ANSO[1][1];
ANS2:ANSO[1][2];
ANS3:ANSO[1][3];
desolve(ANS1,p(t));
```

滑車、各質点の運動方程式は下記となる。

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} p(t)\right) I = R_1 T_1 - R_2 T_2$$

$$M_1 R_1 \left(\frac{d^2}{dt^2} p(t)\right) = M_1 G - T_1$$

$$-M_2 R_2 \left(\frac{d^2}{dt^2} p(t)\right) = M_2 G - T_2$$

上記を整理すると、

$$\frac{d^2}{dt^2} p(t) = -\frac{M_2 R_2 G - M_1 R_1 G}{I + M_2 R_2^2 + M_1 R_1^2}$$

$$T_1 = \frac{M_1 G I + M_1 M_2 R_2^2 G + M_1 R_1 M_2 R_2 G}{I + M_2 R_2^2 + M_1 R_1^2}$$

$$T_2 = \frac{M_2 G I + M_1 R_1 M_2 R_2 G + M_1 R_1^2 M_2 G}{I + M_2 R_2^2 + M_1 R_1^2}$$

滑車の運動は、

$$p(t) = -\frac{(M_2 R_2 - M_1 R_1) t^2 G}{2(I + M_2 R_2^2 + M_1 R_1^2)}$$

(2) Lagrange の運動方程式

総運動エネルギー： T 、総ポテンシャル： U を求め、下記のようにして運動方程式を導く。

```
T:1/2*I*diff(p(t),t,1)^2
+1/2*M[1]*(R[1]*diff(p(t),t,1))^2
+1/2*M[2]*(R[2]*diff(p(t),t,1))^2;
U:-M[1]*G*R[1]*p(t)+M[2]*G*R[2]*p(t);
EQ4:diff(diff(T,diff(p(t),t,1)),t,1)
-diff(T,p(t),1)+diff(U,p(t),1)=0;
solve(EQ4,diff(p(t),t,2))[1];
desolve(EQ4,p(t));
```

運動エネルギーは、

$$T = \frac{\left(\frac{d}{dt} p(t)\right)^2 I}{2} + \frac{M_2 R_2^2 \left(\frac{d}{dt} p(t)\right)^2}{2} + \frac{M_1 R_1^2 \left(\frac{d}{dt} p(t)\right)^2}{2}$$

ポテンシャルは、

$$U = M_2 R_2 p(t) G - M_1 R_1 p(t) G$$

上記を Lagrange の式に代入し、運動方程式を求めると、上記と同じ結果が得られた。

$$\frac{d^2}{dt^2} p(t) = -\frac{(M_2 R_2 - M_1 R_1) G}{I + M_2 R_2^2 + M_1 R_1^2}$$

例題 3.2.5 斜面頂上の滑車につるされた質量

斜面（傾斜角： Q_1, Q_2 ）の頂点に、慣性モーメント： I の滑車があり、その半径： R_1 に質量： M_1 を、半径： R_2 に質量： M_2 を図のように質量が無視できる糸で吊す。このときの滑車の運動を糸に作用する張力： T_1, T_2 、摩擦係数： N_1, N_2 、重力加速度： G として求める。

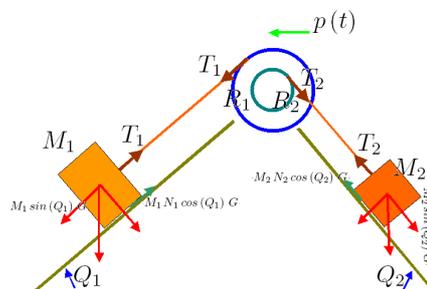


図 3.2.5: 斜面頂上の滑車につるされた質量

(1) 剛体に作用する力・モーメントの分析

```
kill(all);
EQ1:I*diff(p(t),t,2)=T[1]*R[1]-T[2]*R[2];
EQ2:M[1]*diff((R[1]*p(t)),t,2)
  =M[1]*G*sin(Q[1])-M[1]*G*cos(Q[1])*N[1]
  -T[1];
EQ3:M[2]*diff((-R[2]*p(t)),t,2)
  =M[2]*G*sin(Q[2])+M[2]*G*cos(Q[2])*N[2]
  -T[2];
```

```
atvalue(diff(p(t),t,1),t=0,0);
atvalue(p(t),t=0,0);
ANS0:solve([EQ1,EQ2,EQ3],[diff(p(t),t,2),
  T[1],T[2]]);
ANS1:ANS0[1][1];
ANS2:ANS0[1][2];
ANS3:ANS0[1][3];
desolve(ANS1,p(t));
```

滑車、各質点の運動方程式は下記となる。

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} p(t)\right) I = R_1 T_1 - R_2 T_2$$

$$M_1 R_1 \left(\frac{d^2}{dt^2} p(t)\right) = M_1 \sin(Q_1) G - M_1 N_1 \cos(Q_1) G - T_1$$

$$-M_2 R_2 \left(\frac{d^2}{dt^2} p(t)\right) = M_2 \sin(Q_2) G + M_2 N_2 \cos(Q_2) G - T_2$$

上記を整理すると、

$$\frac{d^2}{dt^2} p(t) = -\frac{R_2 (M_2 \sin(Q_2) + M_2 N_2 \cos(Q_2)) G + R_1 (M_1 N_1 \cos(Q_1) - M_1 \sin(Q_1)) G}{I + M_2 R_2^2 + M_1 R_1^2}$$

滑車の運動は、

$$p(t) = -\frac{(M_2 R_2 \sin(Q_2) + M_2 N_2 R_2 \cos(Q_2) - M_1 R_1 \sin(Q_1) + M_1 N_1 R_1 \cos(Q_1)) t^2 G}{2 (I + M_2 R_2^2 + M_1 R_1^2)}$$

(2)Lagrange の運動方程式

総運動エネルギー： T 、総ポテンシャル： U を求め、下記のようにして運動方程式を導く。

```
T:1/2*I*dif(p(t),t,1)^2
+1/2*M[1]*(R[1]*dif(p(t),t,1))^2
+1/2*M[2]*(R[2]*dif(p(t),t,1))^2;
U:-M[1]*G*R[1]*p(t)*sin(Q[1])
+M[2]*G*R[2]*p(t)*sin(Q[2])
+M[1]*G*cos(Q[1])*N[1]*R[1]*p(t)
+M[2]*G*cos(Q[2])*N[2]*R[2]*p(t);
EQ4:dif(dif(T,dif(p(t),t,1)),t,1)
-dif(T,p(t),1)+dif(U,p(t),1)=0;
solve(EQ4,dif(p(t),t,2))[1];
desolve(EQ4,p(t));
```

運動エネルギーは、

$$T = \frac{\left(\frac{d}{dt} p(t)\right)^2 I}{2} + \frac{M_2 R_2^2 \left(\frac{d}{dt} p(t)\right)^2}{2} + \frac{M_1 R_1^2 \left(\frac{d}{dt} p(t)\right)^2}{2}$$

ポテンシャルは、

$$U = M_2 R_2 \sin(Q_2) p(t) G + M_2 N_2 R_2 \cos(Q_2) p(t) G \\ - M_1 R_1 \sin(Q_1) p(t) G + M_1 N_1 R_1 \cos(Q_1) p(t) G$$

上記を Lagrange の式に代入し、運動方程式を求めると、

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} p(t)\right) I + M_2 R_2 \sin(Q_2) G + M_2 N_2 R_2 \cos(Q_2) G \\ - M_1 R_1 \sin(Q_1) G + M_1 N_1 R_1 \cos(Q_1) G \\ + M_2 R_2^2 \left(\frac{d^2}{dt^2} p(t)\right) + M_1 R_1^2 \left(\frac{d^2}{dt^2} p(t)\right) = 0$$

整理して、上記と同じ結果が得られた。

$$\frac{d^2}{dt^2} p(t) = - \left(M_2 R_2 \sin(Q_2) + M_2 N_2 R_2 \cos(Q_2) \right. \\ \left. - M_1 R_1 \sin(Q_1) + M_1 N_1 R_1 \cos(Q_1) \right) G \\ / (I + M_2 R_2^2 + M_1 R_1^2)$$

例題 3.2.6 斜面を転がる円柱

斜面（傾斜角： Q ）上に質量： M 、半径： R の円柱を置き、転がる運動を求める。ここで円柱の回転角： $p(t)$ 、円柱の斜面に沿った落下移動量： $x(t)$ 、摩擦係数： N 、重力加速度： G 、斜面と円柱間の摩擦力： F とする。

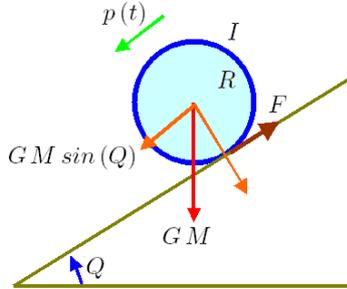


図 3.2.6: 斜面を転がる円柱

(1) 滑り無し：剛体に作用する力・モーメントの分析

```
kill(all);
EQ1:I*diff(p(t),t,2)=F*R;
EQ2:M*diff((R*p(t)),t,2)=M*G*sin(Q)-F;
EQ3:I=M*R^2/2;
EQ11:subst([EQ3],EQ1);
atvalue(diff(p(t),t,1),t=0,0);
atvalue(p(t),t=0,0);
ANS0:solve([EQ11,EQ2],[diff(p(t),t,2),F]);
ANS1:ANS0[1][1];
ANS2:ANS0[1][2];
desolve(ANS1,p(t));
```

円柱の慣性モーメント、落下移動量と運動方程式は、

$$I = \frac{M R^2}{2}, \quad x(t) = R p(t)$$

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} p(t)\right) I = F R$$

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} p(t)\right) M R = G M \sin(Q) - F$$

式をまとめる。下記の時には、回転力より摩擦力の方が大きいので、滑りは生じない。

$$F = \frac{G M \sin(Q)}{3} \leq G M N \cos(Q)$$

即ち、 $\tan(Q)/3 \leq N$ の時、滑りは生じず、運動は下記となる。

$$\frac{d^2}{dt^2} p(t) = \frac{2 G \sin(Q)}{3 R}$$

$$p(t) = \frac{t^2 G \sin(Q)}{3 R}$$

(2) 滑り無し：Lagrange の運動方程式

総運動エネルギー： T 、総ポテンシャル： U を求め、下記のようにして運動方程式を導く。

```
T:1/2*I*diff(p(t),t,1)^2+1/2*M
*(R*diff(p(t),t,1))^2;
U:-M*G*R*p(t)*sin(Q);
EQ4:diff(diff(T,diff(p(t),t,1)),t,1)
-diff(T,p(t),1)+diff(U,p(t),1)=0;
EQ41:subst([EQ3],EQ4);
solve(EQ41,diff(p(t),t,2))[1];
desolve(EQ41,p(t));
```

運動エネルギーとポテンシャルは、

$$T = \frac{\left(\frac{d}{dt} p(t)\right)^2 M R^2}{2} + \frac{\left(\frac{d}{dt} p(t)\right)^2 I}{2}$$

$$U = -p(t) G M \sin(Q) R$$

上記を Lagrange の式に代入し、運動方程式を求めると、上記と同じ結果が得られた。

$$\frac{d^2}{dt^2} p(t) = \frac{2 G \sin(Q)}{3 R}$$

(1) 滑り有り：剛体に作用する力・モーメントの分析

$\frac{G M \sin(Q)}{3} > G M N \cos(Q)$ の時には、接触面で、滑りが生じ、円柱の回転角： $p(t)$ と円柱の斜面に沿った落下移動量： $x(t)$ を独立変数として解く。

```
kill(all);
EQ1:I*diff(p(t),t,2)=N*M*G*cos(Q)*R;
EQ2:M*diff(x(t),t,2)=M*G*sin(Q)-N*M*G*cos(Q);
EQ3:I=M*R^2/2;
EQ11:subst([EQ3],EQ1);
atvalue(diff(p(t),t,1),t=0,0);
atvalue(p(t),t=0,0);
atvalue(diff(x(t),t,1),t=0,0);
atvalue(x(t),t=0,0);
ANS:desolve([EQ11,EQ2],[p(t),x(t)]);
ANS1:ANS[1];
ANS2:ANS[2];
```

運動方程式は、

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} p(t)\right) I = G M N \cos(Q) R$$

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} x(t)\right) M = G M \sin(Q) - G M N \cos(Q)$$

これを解いて、

$$p(t) = \frac{t^2 G N \cos(Q)}{R}$$

$$x(t) = \frac{t^2 (G \sin(Q) - G N \cos(Q))}{2}$$

例題 3.2.7 床に立てた棒

長さ: $2L$ の一様な棒を床に立て、棒が倒れる運動を求める。棒の傾斜角を $p(t)$ 、初期傾斜角を P_0 とする。棒の質量: M 、重力加速度: G 、床の反力: R 、床の摩擦力: F とする。

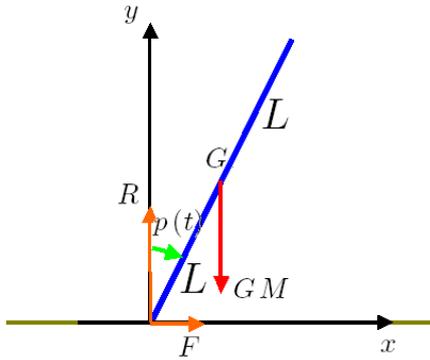


図 3.2.7: 床に立てた棒

(1) 滑らない床の場合 (剛体に作用する力の分析)

```
kill(all);
EQ1:I*diff(p(t),t,2)=M*G*L*sin(p(t));
EQ2:M*diff(x(t),t,2)=F;
EQ3:M*diff(y(t),t,2)=R-M*G;
EQA1:I=(M*L^2)/3+M*L^2;
EQA2:x(t)=L*sin(p(t));
EQA3:y(t)=L*cos(p(t));
EQA2DD:diff(EQA2,t,2);
EQA3DD:diff(EQA3,t,2);
EQ11:subst([EQA1],EQ1);
EQ21:subst([EQA2DD],EQ2);
EQ31:subst([EQA3DD],EQ3);
```

下端を回転中心にして、回転方向、 x, y 方向の運動方程式は、

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} p(t)\right) I = \sin(p(t)) G L M$$

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} x(t)\right) M = F$$

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} y(t)\right) M = R - G M$$

ここで下端まわりの慣性モーメント、 $p(t)$ と $x(t), y(t)$ の関係式は、

$$I = \frac{4 L^2 M}{3}$$

$$x(t) = \sin(p(t)) L$$

$$y(t) = \cos(p(t)) L$$

上式の関係式を運動方程式に代入し、

$$\frac{4 \left(\frac{d^2}{dt^2} p(t)\right) L^2 M}{3} = \sin(p(t)) G L M$$

$$\left(\cos(p(t)) \left(\frac{d^2}{dt^2} p(t)\right) L - \sin(p(t)) \left(\frac{d}{dt} p(t)\right)^2 L\right) M = F$$

$$\left(-\sin(p(t)) \left(\frac{d^2}{dt^2} p(t)\right) L - \cos(p(t)) \left(\frac{d}{dt} p(t)\right)^2 L\right) M = R - G M$$

```
EQ11*2*diff(p(t),t,1);
EQ12:integrate(%,t);
solve(%,integrationconstant1)[1];
subst([diff(p(t),t,1)^2=0],%);
CON1:subst([p(t)=P[0]],%);
subst([CON1],EQ12);
EQ13:solve(%,diff(p(t),t,1)^2)[1];
EQ22:subst([EQ13],EQ21);
EQ32:subst([EQ13],EQ31);
ANS:solve([EQ11,EQ22,EQ32],[diff(p(t),t,2),F,R]);
ANS1:ANS[1][1];
ANS2:ANS[1][2];
ANS3:trigsimp(ANS[1][3]);
ANS21:solve(rhs(ANS2)=0,cos(p(t)))[1];
diff(rhs(ANS3),cos(p(t)),1)=0;
ANS31:solve(%,cos(p(t)))[1];
ANS32:trigsimp(subst([ANS31],ANS3));
```

$\left(\frac{d}{dt} p(t)\right)^2$ の項があり、解けない。そこで、回転方向の運動方程式に、 $2\frac{d}{dt} p(t)$ を掛け、積分し、初期条件を考慮すると、

$$\left(\frac{d}{dt} p(t)\right)^2 = -\frac{(3 \cos(p(t)) - 3 \cos(P_0)) G}{2 L}$$

この関係式を x, y 方向の運動方程式に代入し、これらを整理すると、運動方程式と床の摩擦力: F 、床の反力: R は、

$$\frac{d^2}{dt^2} p(t) = \frac{3 \sin(p(t)) G}{4 L}$$

$$F = \frac{(9 \cos(p(t)) - 6 \cos(P_0)) \sin(p(t)) G M}{4}$$

$$R = \frac{(9 \cos(p(t))^2 - 6 \cos(P_0) \cos(p(t)) + 1) G M}{4}$$

床の摩擦力: F は下記で、正負が逆転する。

$$\cos(p(t)) = \frac{2 \cos(P_0)}{3}$$

床の反力： R は、下記で極値を持ち、そこで下記の値となるため、床の反力は正で、棒の下端が浮くことはない。

$$\cos(p(t)) = \frac{\cos(P_0)}{3}$$

$$R = \frac{\sin(P_0)^2 G M}{4}$$

(2) 滑らない床の場合 (Lagrange の運動方程式)

総運動エネルギー： T 、総ポテンシャル： U を求め、運動方程式を下記のようにして導く。

```
T:1/2*I[1]*diff(p(t),t,1)^2
+1/2*M*diff(x(t),t,1)^2
+1/2*M*diff(y(t),t,1)^2;
EQA2D:diff(EQA2,t,1);
EQA3D:diff(EQA3,t,1);
EQA11:I[1]=(M*L^2)/3;
T1:subst([EQA11,EQA2D,EQA3D],T);
U:M*G*y(t);
U1:subst([EQA3],U);
diff(diff(T1,diff(p(t),t,1)),t,1)
-diff(T1,p(t),1)+diff(U1,p(t),1)=0;
EQ4:trigsimp(solve(%,diff(p(t),t,2))[1]);
```

$$T = \frac{\left(\frac{d}{dt}y(t)\right)^2 M}{2} + \frac{\left(\frac{d}{dt}x(t)\right)^2 M}{2} + \frac{I_1 \left(\frac{d}{dt}p(t)\right)^2}{2}$$

$$U = y(t) G M$$

重心まわりの棒の慣性モーメント、 $p(t)$ と $x(t), y(t)$ の関係式を代入し、Lagrange の運動方程式から、

$$\begin{aligned} & \sin(p(t))^2 \left(\frac{d^2}{dt^2}p(t)\right) L^2 M \\ & + \cos(p(t))^2 \left(\frac{d^2}{dt^2}p(t)\right) L^2 M \\ & + \frac{\left(\frac{d^2}{dt^2}p(t)\right) L^2 M}{3} - \sin(p(t)) G L M = 0 \end{aligned}$$

これを整理して、

$$\frac{d^2}{dt^2}p(t) = \frac{3 \sin(p(t)) G}{4 L}$$

剛体に作用する力・モーメントの分析から求めた式と同じ式が得られた。

(3) 滑らかな床の場合 (剛体に作用する力の分析)

床の摩擦力： F を摩擦係数： N 、床の反力： R を用い、 $F = NR$ と表す。

```
kill(all);
EQ1:I*diff(p(t),t,2)=R*L*sin(p(t))
-N*R*L*cos(p(t));
EQ2:M*diff(x(t),t,2)=N*R;
EQ3:M*diff(y(t),t,2)=R-M*G;
EQA1:I=(M*L^2)/3;
EQA3:y(t)=L*cos(p(t));
EQA3D:diff(EQA3,t,1);
EQA3DD:diff(EQA3,t,2);
EQ31:subst([EQA3DD],EQ3);
```

重心を回転中心にして、回転方向、 x, y 方向の運動方程式は、

$$\left(\frac{d^2}{dt^2}p(t)\right) I = \sin(p(t)) L R - \cos(p(t)) L N R$$

$$\left(\frac{d^2}{dt^2}x(t)\right) M = N R$$

$$\left(\frac{d^2}{dt^2}y(t)\right) M = R - G M$$

ここで重心まわりの慣性モーメント、 $y(t)$ の関係式は、

$$I = \frac{L^2 M}{3}$$

$$y(t) = \cos(p(t)) L$$

y 方向の運動方程式に代入し、

$$\begin{aligned} & \left(-\sin(p(t)) \left(\frac{d^2}{dt^2}p(t)\right) L \right. \\ & \left. - \cos(p(t)) \left(\frac{d}{dt}p(t)\right)^2 L\right) M = R - G M \end{aligned}$$

$\left(\frac{d}{dt}p(t)\right)^2$ の項があり、解けない。

次に、摩擦力がない場合について考える。上式に $N = 0$ 、重心まわりの慣性モーメント、 $y(t)$ の関係式を代入し、

```
EQ11:subst([EQA1,N=0],EQ1);
EQ21:subst([N=0],EQ2);
EQ4:(I*diff(p(t),t,1)^2)/2
+(M*diff(y(t),t,1)^2)/2
+(M*diff(x(t),t,1)^2)/2
=M*G*(L*cos(P[0])-L*cos(p(t)));
subst([EQA1],EQ4);
subst([EQA3D,diff(x(t),t,1)^2=0],%);
EQ41:solve(%,diff(p(t),t,1)^2)[1];
EQ32:subst([EQ41],EQ31);
ANS:solve([EQ11,EQ32],[diff(p(t),t,2),R]);
ANS1:factor(trigsimp(ANS[1][1]));
ANS2:factor(trigsimp(ANS[1][2]));
```

回転方向、 x 方向の運動方程式は下記となり、 y 方向の運動方程式は上記と同じである。

$$\frac{\left(\frac{d^2}{dt^2} p(t)\right) L^2 M}{3} = \sin(p(t)) L R$$

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} x(t)\right) M = 0$$

$\left(\frac{d}{dt} p(t)\right)^2$ の項があり、運動エネルギー、ポテンシャルエネルギーの和を使って解く。この式は初期条件から下記となる。

$$\frac{\left(\frac{d}{dt} y(t)\right)^2 M}{2} + \frac{\left(\frac{d}{dt} x(t)\right)^2 M}{2} + \frac{\left(\frac{d}{dt} p(t)\right)^2 I}{2}$$

$$= G (\cos(P_0) L - \cos(p(t)) L) M$$

これらの関係式から解は容易に解けないので、摩擦係数が零、即ち、滑らかな床の場合を考える。運動エネルギー、ポテンシャルエネルギーの和から $\left(\frac{d}{dt} p(t)\right)^2$ は、

$$\left(\frac{d}{dt} p(t)\right)^2 = -\frac{(6 \cos(p(t)) - 6 \cos(P_0)) G}{(3 \sin(p(t))^2 + 1) L}$$

x 方向には力が作用しないので、 x 方向の運動方程式を省略し、運動方程式は下記の二式となる。

$$\frac{\left(\frac{d^2}{dt^2} p(t)\right) L^2 M}{3} = \sin(p(t)) L R$$

$$\left(\frac{\cos(p(t)) (6 \cos(p(t)) - 6 \cos(P_0)) G}{3 \sin(p(t))^2 + 1} - \sin(p(t)) \left(\frac{d^2}{dt^2} p(t)\right) L\right) M = R - G M$$

上記の関係を整理して、角加速度と床の反力は、

$$\frac{d^2}{dt^2} p(t) = \frac{3 (3 \cos(p(t))^2 - 6 \cos(P_0) \cos(p(t)) + 4) \sin(p(t)) G}{(3 \cos(p(t))^2 - 4)^2 L}$$

$$R = \frac{(3 \cos(p(t))^2 - 6 \cos(P_0) \cos(p(t)) + 4) G M}{(3 \cos(p(t))^2 - 4)^2}$$

(4) 滑らかな床の場合 (Lagrange の運動方程式)

総運動エネルギー： T 、総ポテンシャル： U を求め、運動方程式を下記のように導く。

```
T:1/2*I*diff(p(t),t,1)^2
+1/2*M*diff(y(t),t,1)^2
+1/2*M*diff(x(t),t,1)^2;
T1:subst([EQA1,EQA3D],T);
U:M*G*y(t);
U1:subst([EQA3],U);
```

```
diff(diff(T1,diff(p(t),t,1)),t,1)
-diff(T1,p(t),1)+diff(U1,p(t),1)=0;
EQ5:trigsimp(solve(%,diff(p(t),t,2))[1]);
diff(diff(T1,diff(x(t),t,1)),t,1)
-diff(T1,x(t),1)+diff(U1,x(t),1)=0;
factor(trigsimp(subst([EQ41],EQ4)));
```

$$T = \frac{\left(\frac{d}{dt} y(t)\right)^2 M}{2} + \frac{\left(\frac{d}{dt} x(t)\right)^2 M}{2} + \frac{\left(\frac{d}{dt} p(t)\right)^2 I}{2}$$

$$U = y(t) G M$$

重心まわりの棒の慣性モーメント、 $p(t)$ と $y(t)$ の関係式を代入し、Lagrange の運動方程式から、

$$\sin(p(t))^2 \left(\frac{d^2}{dt^2} p(t) \right) L^2 M + \frac{\left(\frac{d}{dt} p(t) \right)^2 L^2 M}{3} + \cos(p(t)) \sin(p(t)) \left(\frac{d}{dt} p(t) \right)^2 L^2 M - \sin(p(t)) G L M = 0$$

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} x(t) \right) M = 0$$

これから、 x 方向には、動かない。また、 $\left(\frac{d}{dt} p(t) \right)^2$ の項があり、前項の関係式を代入し、

$$\frac{d^2}{dt^2} p(t) = \frac{3 \left(3 \cos(p(t))^2 - 6 \cos(P_0) \cos(p(t)) + 4 \right) \sin(p(t)) G}{\left(3 \cos(p(t))^2 - 4 \right)^2 L}$$

剛体に作用する力・モーメントの分析から求めた式と同じ式が得られた。傾斜角と床の反力、床の摩擦力の関係を下図に示す。

```
G:9.8;
M:1;
P[0]:0.5;
PL3:(G*M*(9*cos(PP)-6*cos(P[0]))*
sin(PP))/4;
```

```
PL4:(G*M*(9*cos(PP)^2
-6*cos(P[0])*cos(PP)+1))/4;
PL5:subst([p(t)=PP],rhs(ANS2));
plot2d([PL3,PL4,PL5],[PP,P[0],%pi/2],
[x,0.4,1.6]);
```

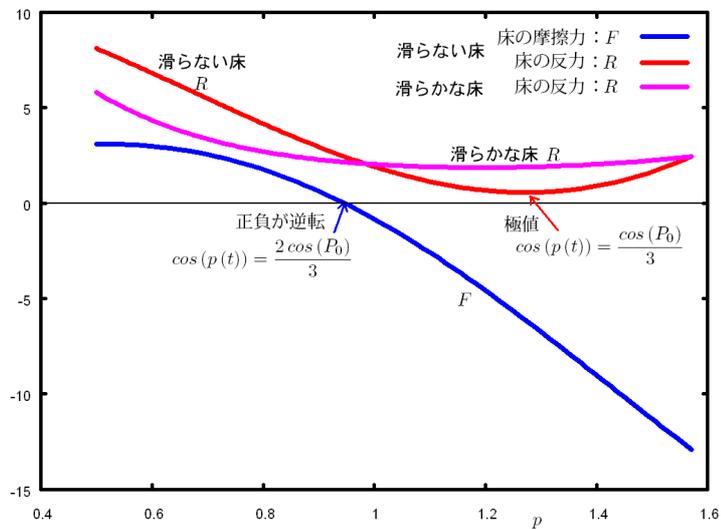


図 3.2.8: 床の反力と摩擦力

例題 3.2.8 壁に立てかけた棒

長さ: $2L$ の一様な棒を壁に立てかけ、棒が倒れる運動を求める。棒の傾斜角を $p(t)$ 、初期傾斜角を P_0 とする。棒の質量: M 、重力加速度: G 、上下反力: R 、左右反力: F とする。

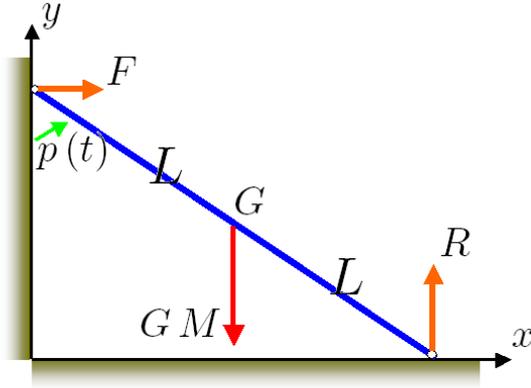


図 3.2.9: 壁に立てかけた棒

(1) 剛体に作用する力・モーメントの分析

```
kill(all);
EQ1:I*diff(p(t),t,2)=R*L*sin(p(t))-F*L*cos(p(t));
EQ2:M*diff(x(t),t,2)=F;
EQ3:M*diff(y(t),t,2)=R-M*G;
EQA1:I=(M*L^2)/3;
EQA2:x(t)=L*sin(p(t));
EQA3:y(t)=L*cos(p(t));
EQA2D:diff(EQA2,t,1);
EQA2DD:diff(EQA2,t,2);
EQA3D:diff(EQA3,t,1);
EQA3DD:diff(EQA3,t,2);
```

重心を回転中心にして、回転方向、 x, y 方向の運動方程式は、

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} p(t)\right) I = \sin(p(t)) LR - \cos(p(t)) FL$$

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} x(t)\right) M = F$$

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} y(t)\right) M = R - GM$$

ここで重心まわりの慣性モーメント、 $p(t)$ と $x(t), y(t)$ の関係式は、

$$I = \frac{L^2 M}{3}$$

$$x(t) = \sin(p(t)) L$$

$$y(t) = \cos(p(t)) L$$

```
EQ11:subst([EQA1],EQ1);
EQ21:subst([EQA2DD],EQ2);
EQ31:subst([EQA3DD],EQ3);
EQ4:(I*diff(p(t),t,1)^2)/2
+(M*diff(y(t),t,1)^2)/2
+(M*diff(x(t),t,1)^2)/2
=M*G*(L*cos(P[0])-L*cos(p(t)));
subst([EQA1,EQA2D,EQA3D],EQ4);
EQ41:trigsimp(solve(%,diff(p(t),t,1)^2
[1]));
EQ22:subst([EQ41],EQ21);
EQ32:subst([EQ41],EQ31);
ANS:solve([EQ11,EQ22,EQ32],[diff(p(t),
t,2),
F,R]);
ANS1:trigsimp(ANS[1][1]);
ANS2:trigsimp(ANS[1][2]);
ANS3:trigsimp(ANS[1][3]);
```

上式の関係式を運動方程式に代入し、

$$\frac{\left(\frac{d^2}{dt^2} p(t)\right) L^2 M}{3} = \sin(p(t)) LR - \cos(p(t)) FL$$

$$\left(\cos(p(t)) \left(\frac{d^2}{dt^2} p(t)\right) L - \sin(p(t)) \left(\frac{d}{dt} p(t)\right)^2 L\right) M = F$$

$$\left(-\sin(p(t)) \left(\frac{d^2}{dt^2} p(t)\right) L - \cos(p(t)) \left(\frac{d}{dt} p(t)\right)^2 L\right) M = R - GM$$

$\left(\frac{d}{dt} p(t)\right)^2$ の項があり、解けない。そこで、運動エネルギー、ポテンシャルエネルギーの和は初期条件から下記となる。

$$\frac{\left(\frac{d}{dt} y(t)\right)^2 M}{2} + \frac{\left(\frac{d}{dt} x(t)\right)^2 M}{2} + \frac{\left(\frac{d}{dt} p(t)\right)^2 I}{2} = G(\cos(P_0) L - \cos(p(t)) L) M$$

$p(t)$ と $x(t), y(t)$ の関係式を代入し、

$$\left(\frac{d}{dt} p(t)\right)^2 = -\frac{(3 \cos(p(t)) - 3 \cos(P_0)) G}{2L}$$

この関係式を x, y 方向の運動方程式に代入し、これらを整理すると、運動方程式と左右反力 F 、上下反力 R は、

$$\frac{d^2}{dt^2} p(t) = \frac{3 \sin(p(t)) G}{4 L}$$

$$F = \frac{(9 \cos(p(t)) - 6 \cos(P_0)) \sin(p(t)) G M}{4}$$

$$R = \frac{(9 \cos(p(t))^2 - 6 \cos(P_0) \cos(p(t)) + 1) G M}{4}$$

```
ANS21:solve(rhs(ANS2)=0,p(t))[2];
EQ42:diff(p(t),t,1)=sqrt(rhs(EQ41));
EQ421:lhs(EQ42)=subst([ANS21],rhs(EQ42));
lhs(EQA2D)=subst([EQ421],rhs(EQA2D));
```

```
EQA2D1:subst([ANS21],%);
subst([EQA1,EQA2D1,EQA3D],EQ4);
EQ43:trigsimp(solve(% ,diff(p(t),t,1)^2)
[1]);
lhs(EQ43)=subst([p(t)=%pi/2],rhs(EQ43));
```

下記の時に、左右反力 $F = 0$ となり、棒は横の壁から離れる。

$$p(t) = \arccos\left(\frac{2 \cos(P_0)}{3}\right)$$

$$\frac{d}{dt} p(t) = \frac{\sqrt{\frac{\cos(P_0) G}{L}}}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{d}{dt} x(t) = \frac{2 \cos(P_0) \sqrt{\frac{\cos(P_0) G}{L}} L}{3 \sqrt{2}}$$

棒が横の壁から離れた後、 x 方向に一定の速度で運動するので、上記の $\frac{d}{dt} x(t)$ の関係式を運動エネルギー、ポテンシャルエネルギーの和に代入し、

$$\frac{\sin(p(t))^2 \left(\frac{d}{dt} p(t)\right)^2 L^2 M}{2} + \frac{\left(\frac{d}{dt} p(t)\right)^2 L^2 M}{6} + \frac{\cos(P_0)^3 G L M}{9} = G (\cos(P_0) L - \cos(p(t)) L) M$$

上式を整理して、

$$\left(\frac{d}{dt} p(t)\right)^2 = \frac{(18 \cos(p(t)) + 2 \cos(P_0)^3 - 18 \cos(P_0)) G}{(9 \cos(p(t))^2 - 12) L}$$

棒が床に倒れたときの角速度は $p(t) = \pi/2$ を代入し、

$$\left(\frac{d}{dt} p(t)\right)^2 = -\frac{(2 \cos(P_0)^3 - 18 \cos(P_0)) G}{12 L}$$

(2) Lagrange の運動方程式

$$U = y(t) G M$$

総運動エネルギー T 、総ポテンシャル U を求め、棒が壁から離れるまでの運動を、下記のようにして導く。

重心まわりの棒の慣性モーメント、 $p(t)$ と $x(t), y(t)$ の関係式を代入し、Lagrange の運動方程式から、

```
T:1/2*I*diff(p(t),t,1)^2
+1/2*M*diff(x(t),t,1)^2
+1/2*M*diff(y(t),t,1)^2;
T1:subst([EQA1,EQA2D,EQA3D],T);
U:M*G*y(t);
U1:subst([EQA3],U);
diff(diff(T1,diff(p(t),t,1)),t,1)
-diff(T1,p(t),1)+diff(U1,p(t),1)=0;
EQ4:trigsimp(solve(% ,diff(p(t),t,2))[1]);
```

$$\sin(p(t))^2 \left(\frac{d^2}{dt^2} p(t)\right) L^2 M$$

$$+ \cos(p(t))^2 \left(\frac{d^2}{dt^2} p(t)\right) L^2 M$$

$$+ \frac{\left(\frac{d^2}{dt^2} p(t)\right) L^2 M}{3} - \sin(p(t)) G L M = 0$$

これを整理して、

$$\frac{d^2}{dt^2} p(t) = \frac{3 \sin(p(t)) G}{4 L}$$

剛体に作用する力・モーメントの分析から求めた式と同じ式が得られた。

$$T = \frac{\left(\frac{d}{dt} y(t)\right)^2 M}{2} + \frac{\left(\frac{d}{dt} x(t)\right)^2 M}{2} + \frac{\left(\frac{d}{dt} p(t)\right)^2 I}{2}$$

例題 3.2.9 固定中空円筒の中を転がる円柱

半径： R_1 の固定された中空円筒の中を転がる円柱（半径： R_2 、質量： M 、中心まわりの慣性モーメント： I ）の運動を求め。円柱が中空円筒の $p(t)$ に位置し、円柱の回転角を $q(t)$ 、円筒と円柱は滑らないで転がるとして、その間の摩擦力を F とする。

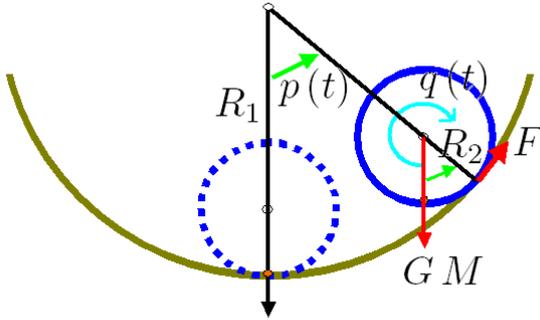


図 3.2.10: 固定中空円筒の中を転がる円柱

(1) 剛体に作用する力・モーメントの分析

```
kill(all);
EQ1:I*difff(q(t),t,2)=-F*R[2];
EQ2:M*difff(p(t),t,2)*(R[1]-R[2])
=-M*G*sin(p(t))+F;
EQA1:I=1/2*M*R[2]^2;
EQA2:R[1]*p(t)=R[2]*q(t)+R[2]*p(t);
```

円柱の運動方程式は下記となる。

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} q(t)\right) I = -R_2 F$$

$$(R_1 - R_2) \left(\frac{d^2}{dt^2} p(t)\right) M = F - \sin(p(t)) G M$$

円柱の慣性モーメントは、

$$I = \frac{R_2^2 M}{2}$$

円筒と円柱は滑らないで転がる時の $p(t)$ と $q(t)$ の関係式は接線長さから、

$$R_1 p(t) = R_2 q(t) + R_2 p(t)$$

```
EQA21:solve(EQA2,q(t))[1];
EQA21DD:diff(EQA21,t,2);
EQ11:subst([EQA21DD,EQA1],EQ1);
ANS:solve([EQ11,EQ2],[diff(p(t),t,2),F]);
ANS1:ANS[1][1];
ANS2:ANS[1][2];
ANS11:ANS1*difff(p(t),t,1);
ANS12:integrate(ANS11,t);
solve(%,integrationconstant1)[1];
subst([diff(p(t),t,1)=0],%);
CON1:subst([p(t)=P[0]],%);
ANS13:factor(subst([CON1],ANS12)*2);
```

上記の関係式を運動方程式に代入し、整理すると、

$$\frac{d^2}{dt^2} p(t) = \frac{2 \sin(p(t)) G}{3 R_2 - 3 R_1}$$

$$F = \frac{\sin(p(t)) G M}{3}$$

$\frac{d^2}{dt^2} p(t)$ の式に $\frac{d}{dt} p(t)$ を掛けて、積分し、初期条件：(初期角： P_0 で放す) を与えると下記の式が得られる。

$$\left(\frac{d}{dt} p(t)\right)^2 = -\frac{4 (\cos(p(t)) - \cos(P_0)) G}{3 (R_2 - R_1)}$$

(2) Lagrange の運動方程式

総運動エネルギー： T 、総ポテンシャル： U を求め、下記のようにして運動方程式を導く。

```
T:1/2*I*difff(q(t),t,1)^2+1/2*M*((R[1]-R[2])*difff(p(t),t,1))^2;
EQA21D:diff(EQA21,t,1);
T1:subst([EQA1,EQA21D],T);
U:M*G*(R[1]-R[2])*(1-cos(p(t)));
diff(difff(T1,difff(p(t),t,1)),t,1)
-difff(T1,p(t),1)+difff(U,p(t),1)=0;
EQ3:solve(%,diff(p(t),t,2))[1];
```

$$T = \frac{(R_1 - R_2)^2 \left(\frac{d}{dt} p(t)\right)^2 M}{2} + \frac{\left(\frac{d}{dt} q(t)\right)^2 I}{2}$$

$$U = (R_1 - R_2) (1 - \cos(p(t))) G M$$

円柱の慣性モーメント、 $p(t)$ と $q(t)$ の関係式を代入し、Lagrange の運動方程式から、

$$\frac{d^2}{dt^2} p(t) = \frac{2 \sin(p(t)) G}{3 R_2 - 3 R_1}$$

剛体に作用する力・モーメントの分析から求めた式と同じ式が得られた。

例題 3.2.10 自由回転する中空円筒の中を転がる円柱

半径： R_1 、質量： M_1 、中心まわりの慣性モーメント： I_1 の自由回転する中空円筒の中を転がる半径： R_2 、質量： M_2 、中心まわりの慣性モーメント： I_2 の円柱の運動を求め。中空円筒が $p(t)$ 回転し、回転角： $q(t)$ に円柱が位置し、円柱の回転角を $w(t)$ とする。円筒と円柱は滑らないで転がるとして、その間の摩擦力を F とする。

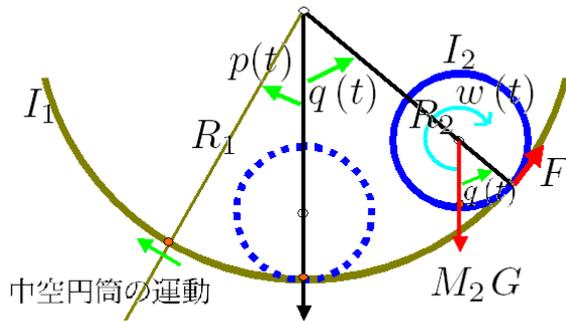


図 3.2.11: 自由回転する中空円筒の中を転がる円柱

(1) 剛体に作用する力・モーメントの分析

```
kill(all);
EQ1:I[1]*diff(p(t),t,2)=F*R[1];
EQ2:I[2]*diff(w(t),t,2)=-F*R[2];
EQ3:M[2]*diff(q(t),t,2)*(R[1]-R[2])
    =-M[2]*G*sin(q(t))+F;
EQA1:I[1]=M[1]*R[1]^2;
EQA2:I[2]=M[2]*R[2]^2/2;
EQA3:R[1]*(p(t)+q(t))=R[2]*(w(t)+q(t));
EQA31:solve(EQA3,w(t))[1];
EQA31DD:diff(EQA31,t,2);
EQ11:subst([EQA1],EQ1);
EQ21:subst([EQA31DD,EQA2],EQ2);
ANS:solve([EQ11,EQ21,EQ3],[diff(p(t),t,2),
    diff(q(t),t,2),F]);
ANS1:ANS[1][1];
ANS2:factor(ANS[1][2]);
ANS3:ANS[1][3];
ANS11:ANS1*diff(p(t),t,1);
```

円筒、円柱の回転方向、円柱の接線運動方向の各運動方程式は下記となる。

$$I_1 \left(\frac{d^2}{dt^2} p(t) \right) = R_1 F$$

$$I_2 \left(\frac{d^2}{dt^2} w(t) \right) = -R_2 F$$

$$M_2 (R_1 - R_2) \left(\frac{d^2}{dt^2} q(t) \right) = F - M_2 \sin(q(t)) G$$

円筒、円柱の慣性モーメントと円筒と円柱が滑らないで転がる条件式は下記となる。

$$I_1 = M_1 R_1^2$$

$$I_2 = \frac{M_2 R_2^2}{2}$$

$$R_1 (q(t) + p(t)) = R_2 (w(t) + q(t))$$

上式を運動方程式に代入し、整理すると、

$$\frac{d^2}{dt^2} p(t) = \frac{M_2 \sin(q(t)) G}{R_1 (M_2 + 3 M_1)}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} q(t) = \frac{(M_2 + 2 M_1) \sin(q(t)) G}{(M_2 + 3 M_1) (R_2 - R_1)}$$

$$F = \frac{M_1 M_2 \sin(q(t)) G}{M_2 + 3 M_1}$$

(2) Lagrange の運動方程式

総運動エネルギー： T 、総ポテンシャル： U を求め、下記のようにして運動方程式を導く。

```
T:1/2*I[1]*diff(p(t),t,1)^2
+1/2*I[2]*diff(w(t),t,1)^2+1/2
*M[2]*((R[1]-R[2])*diff(q(t),t,1))^2;
EQA31D:diff(EQA31,t,1);
T1:expand(subst([EQA1,EQA2,EQA31D],T));
U:M[2]*G*(R[1]-R[2])*(1-cos(q(t)));
EQL1:diff(diff(T1,diff(p(t),t,1)),t,1)
-diff(T1,p(t),1)+diff(U,p(t),1)=0;
EQL2:diff(diff(T1,diff(q(t),t,1)),t,1)
-diff(T1,q(t),1)+diff(U,q(t),1)=0;
ANSL:solve([EQL1,EQL2],[diff(p(t),t,2),
diff(q(t),t,2)]);
ANSL1:factor(ANSL[1][1]);
ANSL2:factor(ANSL[1][2]);
ANS11:ANS1*diff(p(t),t,1);
```

$$T = \frac{I_2 \left(\frac{d}{dt} w(t) \right)^2}{2} + \frac{M_2 (R_1 - R_2)^2 \left(\frac{d}{dt} q(t) \right)^2}{2} + \frac{I_1 \left(\frac{d}{dt} p(t) \right)^2}{2}$$

$$U = M_2 (R_1 - R_2) (1 - \cos(q(t))) G$$

Lagrange の運動方程式に代入し、

$$\begin{aligned}
 & -\frac{R_1 M_2 R_2}{2} \left(\frac{d^2}{dt^2} q(t) \right) + \frac{R_1^2 M_2}{2} \left(\frac{d^2}{dt^2} q(t) \right) + \frac{R_1^2 M_2}{2} \left(\frac{d^2}{dt^2} p(t) \right) + M_1 R_1^2 \left(\frac{d^2}{dt^2} p(t) \right) = 0 \\
 & M_2 (R_1 - R_2) \sin(q(t)) G + \frac{3 M_2 R_2^2}{2} \left(\frac{d^2}{dt^2} q(t) \right) - 3 R_1 M_2 R_2 \left(\frac{d^2}{dt^2} q(t) \right) \\
 & + \frac{3 R_1^2 M_2}{2} \left(\frac{d^2}{dt^2} q(t) \right) - \frac{R_1 M_2 R_2}{2} \left(\frac{d^2}{dt^2} p(t) \right) + \frac{R_1^2 M_2}{2} \left(\frac{d^2}{dt^2} p(t) \right) = 0
 \end{aligned}$$

整理すると、

$$\frac{d^2}{dt^2} p(t) = \frac{M_2 \sin(q(t)) G}{R_1 (M_2 + 3 M_1)}, \quad \frac{d^2}{dt^2} q(t) = \frac{(M_2 + 2 M_1) \sin(q(t)) G}{(M_2 + 3 M_1) (R_2 - R_1)}$$

力・モーメントの分析で得られた式と同じ式が得られた。

(3) 線形化

<pre> assume(R[1]>R[2]); assume(M[1]>0,M[2]>0,G>0); atvalue(p(t),t=0,0); atvalue(q(t),t=0,Q[0]); atvalue(diff(p(t),t,1),t=0,0); atvalue(diff(q(t),t,1),t=0,0); EQL3:sin(q(t))=q(t); ANSL11:subst([EQL3],ANSL1); ANSL21:subst([EQL3],ANSL2); ANSS:desolve([ANSL11,ANSL21],[p(t),q(t)]); ANSS1:factor(ANSS[1]); </pre>	<pre> ANSS2:factor(ANSS[2]); G:9.8; M[1]:2; M[2]:1; R[1]:4; R[2]:1; Q[0]:0.5; plot2d([rhs(ANSS1),rhs(ANSS2)],[t,0,10]); </pre>
--	--

運動が小さいとすると下記のように置き換えることができる、

$$\sin(q(t)) = q(t)$$

これを代入し、運動方程式は

$$\frac{d^2}{dt^2} p(t) = \frac{M_2 q(t) G}{R_1 (M_2 + 3 M_1)}, \quad \frac{d^2}{dt^2} q(t) = \frac{(M_2 + 2 M_1) q(t) G}{(M_2 + 3 M_1) (R_2 - R_1)}$$

運動は、

$$\begin{aligned}
 p(t) &= \frac{Q_0 M_2 (R_2 - R_1) \left(\cos \left(\frac{t \sqrt{-(M_2^2 + 5 M_1 M_2 + 6 M_1^2) (R_2 - R_1) G}}{(M_2 + 3 M_1) (R_2 - R_1)} \right) - 1 \right)}{R_1 (M_2 + 2 M_1)} \\
 q(t) &= Q_0 \cos \left(\frac{t \sqrt{-(M_2^2 + 5 M_1 M_2 + 6 M_1^2) (R_2 - R_1) G}}{(M_2 + 3 M_1) (R_2 - R_1)} \right)
 \end{aligned}$$

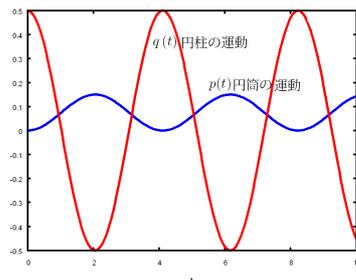


図 3.2.12: 中空円筒と円柱の運動

例題 3.2.11 撃力

滑らかな水平面上におかれた静止物体（質量： M 、重心まわりの慣性モーメント： I ）に重心から x_A 離れた位置に力積： $F_y dt$ の撃力が作用する。撃力が作用した直後の運動を求める。

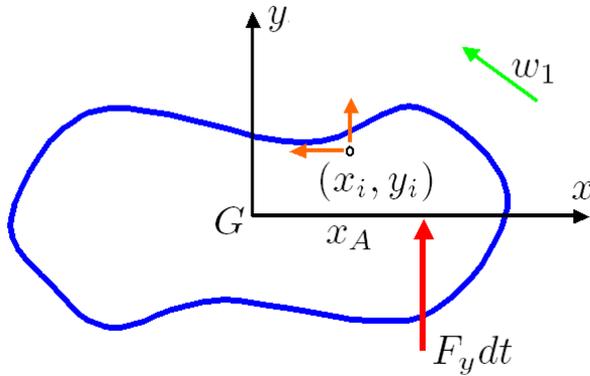


図 3.2.13: 撃力

作用後の任意点： (x_i, y_i) における速度の二乗は、

$$v_i^2 = \left(\frac{dt F_y}{M} + \frac{dt x_i F_y x_A}{I} \right)^2 + \frac{dt^2 y_i^2 F_y^2 x_A^2}{I^2}$$

動かない場所は各二乗項を零として、

$$x_i = -\frac{I}{x_A M}$$

$$y_i = 0$$

```
kill(all);
EQ1:M*v[x1]-M*v[x0]=0;
EQ2:M*v[y1]-M*v[y0]=F[y]*dt;
EQ3:I*w[1]-I*w[0]=F[y]*dt*x[A];
EQ11:subst([v[x0]=0],EQ1);
EQ21:subst([v[y0]=0],EQ2);
EQ31:subst([w[0]=0],EQ3);
ANS1:solve(EQ11,v[x1])[1];
ANS2:solve(EQ21,v[y1])[1];
ANS3:solve(EQ31,w[1])[1];
R:matrix([-y[i]], [x[i]]);
V:matrix([rhs(ANS1)], [rhs(ANS2)])
+rhs(ANS3)*R;
V1:V.V;
solve(first(V1)=0,x[i])[1];
solve(last(V1)=0,y[i])[1];
```

撃力の作用前後の運動量差が力積であるから、

$$v_{x1} M - v_{x0} M = 0$$

$$v_{y1} M - v_{y0} M = dt F_y$$

$$w_1 I - w_0 I = dt F_y x_A$$

撃力の作用する前は静止の条件を考慮し、作用後の運動は、

$$v_{x1} = 0$$

$$v_{y1} = \frac{dt F_y}{M}$$

$$w_1 = \frac{dt F_y x_A}{I}$$

3.3 剛体の固定点まわりの運動

3.3.1 静止座標系の運動方程式

剛体の回転角速度をベクトルで $\vec{\omega}$ とする。各質点の重心からの位置ベクトル: \vec{r}_i^j 、速度ベクトル: \vec{V}_i は、

$$\vec{\omega} = \begin{bmatrix} wx(t) \\ wy(t) \\ wz(t) \end{bmatrix}$$

$$\vec{r}_i^j = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix}$$

$$\vec{V}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i^j = \begin{bmatrix} z_i wy(t) - y_i wz(t) \\ x_i wz(t) - z_i wx(t) \\ y_i wx(t) - x_i wy(t) \end{bmatrix} \quad (3.3.1)$$

```
kill(all);
un:matrix([1],[1],[1]);
WG:matrix([wx(t)],[wy(t)],[wz(t)]);
RiG:matrix([x[i]],[y[i]],[z[i]]);
VWG:expand(col(adjoint(append(transpose(
WG),transpose(RiG),transpose(un))),3));
```

```
LGWi:expand(m[i]*col(adjoint(append(
transpose(RiG),transpose(VWG),
transpose(un))),3));
MMG:matrix([m[i]*z[i]^2+m[i]*y[i]^2,
-m[i]*x[i]*y[i], -m[i]*x[i]*z[i] ],
[-m[i]*x[i]*y[i],
m[i]*z[i]^2+m[i]*x[i]^2, -m[i]*y[i]*
z[i] ],
[-m[i]*x[i]*z[i],
-m[i]*y[i]*z[i],
m[i]*y[i]^2+m[i]*x[i]^2 ] );
MMG.WG;
factor(LGWi-%);
IIG:factor(sum(MMG,i,1,n));
LGWi2:MMG.WG;
LGD1:lhs(LGD)=IIG.diff(WG,t,1);
LGD2:IIG.diff(WG,t,1)=NG;
LGDx:lhs(LGD2)[1][1]=rhs(LGD2)[1][1];
LGDy:lhs(LGD2)[2][1]=rhs(LGD2)[2][1];
LGDz:lhs(LGD2)[3][1]=rhs(LGD2)[3][1];
```

質点: m_i の重心まわりの角運動量は、

$$\vec{L}_{Gi} = m_i \vec{r}_i^j \times \vec{V}_i = m_i \vec{r}_i^j \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i^j) = \begin{bmatrix} -m_i x_i z_i wz(t) - m_i x_i y_i wy(t) + m_i z_i^2 wx(t) + m_i y_i^2 wx(t) \\ -m_i y_i z_i wz(t) + m_i z_i^2 wy(t) + m_i x_i^2 wy(t) - m_i x_i y_i wx(t) \\ m_i y_i^2 wz(t) + m_i x_i^2 wz(t) - m_i y_i z_i wy(t) - m_i x_i z_i wx(t) \end{bmatrix}$$

上式から、

$$\vec{L}_{Gi} = I_{Gi} \begin{bmatrix} wx(t) \\ wy(t) \\ wz(t) \end{bmatrix} \quad \text{ここで、} \quad I_{Gi} = \begin{bmatrix} m_i z_i^2 + m_i y_i^2 & -m_i x_i y_i & -m_i x_i z_i \\ -m_i x_i y_i & m_i z_i^2 + m_i x_i^2 & -m_i y_i z_i \\ -m_i x_i z_i & -m_i y_i z_i & m_i y_i^2 + m_i x_i^2 \end{bmatrix}$$

剛体の角運動量は、上式の質点の和から下記となる。ここで慣性マトリックス: I_G とする。

$$\vec{L}_G = I_G \begin{bmatrix} wx(t) \\ wy(t) \\ wz(t) \end{bmatrix} \quad \text{ここで、} \quad I_G = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n m_i (z_i^2 + y_i^2) & -\sum_{i=1}^n m_i x_i y_i & -\sum_{i=1}^n m_i x_i z_i \\ -\sum_{i=1}^n m_i x_i y_i & \sum_{i=1}^n m_i (z_i^2 + x_i^2) & -\sum_{i=1}^n m_i y_i z_i \\ -\sum_{i=1}^n m_i x_i z_i & -\sum_{i=1}^n m_i y_i z_i & \sum_{i=1}^n m_i (y_i^2 + x_i^2) \end{bmatrix}$$

上式と (3.2.19) 式から重心まわりの外力のモーメントを使って、運動方程式は下記となる。

$$\frac{d}{dt} \vec{L}_G = \begin{bmatrix} -(\sum_{i=1}^n m_i x_i z_i) \left(\frac{d}{dt} wz(t)\right) - (\sum_{i=1}^n m_i x_i y_i) \left(\frac{d}{dt} wy(t)\right) + (\sum_{i=1}^n m_i (z_i^2 + y_i^2)) \left(\frac{d}{dt} wx(t)\right) \\ -(\sum_{i=1}^n m_i y_i z_i) \left(\frac{d}{dt} wz(t)\right) + (\sum_{i=1}^n m_i (z_i^2 + x_i^2)) \left(\frac{d}{dt} wy(t)\right) - (\sum_{i=1}^n m_i x_i y_i) \left(\frac{d}{dt} wx(t)\right) \\ (\sum_{i=1}^n m_i (y_i^2 + x_i^2)) \left(\frac{d}{dt} wz(t)\right) - (\sum_{i=1}^n m_i y_i z_i) \left(\frac{d}{dt} wy(t)\right) - (\sum_{i=1}^n m_i x_i z_i) \left(\frac{d}{dt} wx(t)\right) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m F_z(i) y_i(t) - F_y(i) z_i(t) \\ \sum_{i=1}^m F_x(i) z_i(t) - F_z(i) x_i(t) \\ \sum_{i=1}^m F_y(i) x_i(t) - F_x(i) y_i(t) \end{bmatrix}$$

(3.3.2)

3.3.2 慣性楕円体

剛体内の重心を原点に x-y-z 座標をとる。ある方向の単位ベクトル: \vec{k} を考え、

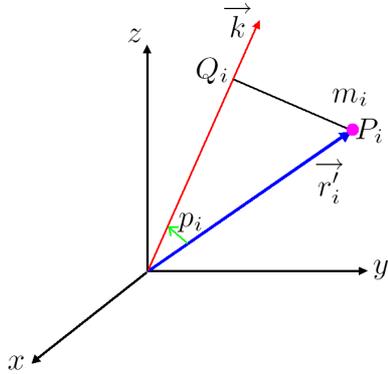


図 3.3.1: 慣性楕円体

$$\vec{k} = \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{bmatrix}$$

質点: m_i からこれに垂線を下し、これを $\overline{P_i Q_i}$ とする。
質点: m_i の単位ベクトル: \vec{k} まわりの慣性モーメントの要素: I_i は下記となる。

$$\begin{aligned} I_i &= m_i \overline{P_i Q_i}^2 = m_i |\vec{r}_i|^2 \sin^2(p_i) \\ &= m_i |\vec{r}_i|^2 (1 - \cos^2(p_i)) \end{aligned}$$

本プログラムは前節のプログラムに続いて実行する。

```
Ii11:MMG[1][1]=Ii[11];
Ii12:-MMG[1][2]=Ii[12];
Ii13:-MMG[1][3]=Ii[13];
Ii22:MMG[2][2]=Ii[22];
Ii23:-MMG[2][3]=Ii[23];
Ii33:MMG[3][3]=Ii[33];
Kun:matrix([k[x]], [k[y]], [k[z]]);
RRiG:sqrt(RiG.RiG);
RiGun:RiG/RRiG;
COSi:Kun.RiGun;
Ii:expand(m[i]*factor(RRiG^2*(Kun.Kun
-COSi^2)));
partfrac(%,k[x]);
```

ここで、下記の関係を使って、

$$\begin{aligned} \vec{k} \cdot \vec{r}_i &= \sqrt{z_i^2 + y_i^2 + x_i^2} \cos(p_i) \\ \vec{k} \cdot \vec{k} &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(p_i) &= \frac{z_i k_z}{\sqrt{z_i^2 + y_i^2 + x_i^2}} + \frac{y_i k_y}{\sqrt{z_i^2 + y_i^2 + x_i^2}} \\ &\quad + \frac{x_i k_x}{\sqrt{z_i^2 + y_i^2 + x_i^2}} \end{aligned}$$

I_i は下記となる。

$$\begin{aligned} I_i &= m_i y_i^2 k_z^2 + m_i x_i^2 k_z^2 \\ &\quad - 2 m_i y_i z_i k_y k_z - 2 m_i x_i z_i k_x k_z + m_i z_i^2 k_y^2 \\ &\quad + m_i x_i^2 k_y^2 - 2 m_i x_i y_i k_x k_y + m_i z_i^2 k_x^2 \\ &\quad + m_i y_i^2 k_x^2 \\ &= (m_i y_i^2 + m_i x_i^2) k_z^2 \\ &\quad + k_x (-2 m_i x_i z_i k_z - 2 m_i x_i y_i k_y) \\ &\quad - 2 m_i y_i z_i k_y k_z + (m_i z_i^2 + m_i x_i^2) k_y^2 \\ &\quad + (m_i z_i^2 + m_i y_i^2) k_x^2 \end{aligned}$$

```
subst([Ii11,2*k[y]*Ii12,2*k[z]*Ii13],%);
partfrac(%,k[y]);
subst([Ii22,2*k[z]*Ii23],%);
partfrac(%,k[z]);
Ii1:I[i]=expand(subst([Ii33],%));
```

下記の関係式を使って、上式を置き換えると、

$$\begin{aligned} m_i z_i^2 + m_i y_i^2 &= I_{i11}, & m_i x_i y_i &= I_{i12} \\ m_i x_i z_i &= I_{i13}, & m_i z_i^2 + m_i x_i^2 &= I_{i22} \\ m_i y_i z_i &= I_{i23}, & m_i y_i^2 + m_i x_i^2 &= I_{i33} \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

$$\begin{aligned} I_i &= I_{i33} k_z^2 - 2 I_{i23} k_y k_z - 2 I_{i13} k_x k_z + I_{i22} k_y^2 \\ &\quad - 2 I_{i12} k_x k_y + I_{i11} k_x^2 \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

```
I11:factor(sum(lhs(Ii11),i,1,n)=I[11]);
I12:sum(lhs(Ii12),i,1,n)=I[12];
I13:sum(lhs(Ii13),i,1,n)=I[13];
I22:factor(sum(lhs(Ii22),i,1,n)=I[22]);
I23:sum(lhs(Ii23),i,1,n)=I[23];
I33:factor(sum(lhs(Ii33),i,1,n)=I[33]);
I=I[33]*k[z]^2-2*I[23]*k[y]*k[z]-2*I[13]
*k[x]*k[z]+I[22]*k[y]^2
-2*I[12]*k[x]*k[y]+I[11]*k[x]^2;
EL:expand(subst([k[x]=x*sqrt(I),k[y]=
y*sqrt(I),k[z]=z*sqrt(I)],%)/I);
```

(3.3.4) 式の質点: m_i の総和を求めると、

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n m_i (z_i^2 + y_i^2) &= I_{11}, & \sum_{i=1}^n m_i x_i y_i &= I_{12} \\ \sum_{i=1}^n m_i x_i z_i &= I_{13}, & \sum_{i=1}^n m_i (z_i^2 + x_i^2) &= I_{22} \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^n m_i y_i z_i = I_{23}, \quad \sum_{i=1}^n m_i (y_i^2 + x_i^2) = I_{33}$$

上記の関係式を使って、剛体の慣性モーメント： I は下記となる。

$$I = I_{33} k_z^2 - 2 I_{23} k_y k_z - 2 I_{13} k_x k_z + I_{22} k_y^2 - 2 I_{12} k_x k_y + I_{11} k_x^2 \quad (3.3.5)$$

$$k_x = x/\text{sqrt}(I), \quad k[y] = y/\text{sqrt}(I), \quad k[z] = z/\text{sqrt}(I)$$

と置き換えて、座標表示すると下記となり、楕円体面となる。

$$1 = I_{33} z^2 - 2 I_{23} y z - 2 I_{13} x z + I_{22} y^2 - 2 I_{12} x y + I_{11} x^2$$

この楕円体の主軸を x-y-z 座標（運動座標系）にとると、

$$I_{12} = I_{13} = I_{23} = 0$$

となり、大幅に簡略化される。

```
DTE1:expand(m[i]*VWG.VWG);
partfrac(%,wx(t));
subst([Ii11,2*wy(t)*Ii12,2*wz(t)*Ii13],%);
partfrac(%,wy(t));
subst([Ii22,2*wz(t)*Ii23],%);
partfrac(%,wz(t));
TE1:T[i]=expand(subst([Ii33],%));
TE2:T=I[33]*wz(t)^2-2*I[23]*wy(t)*wz(t)
-2*I[13]*wx(t)*wz(t)+I[22]*wy(t)^2
-2*I[12]*wx(t)*wy(t)+I[11]*wx(t)^2;
subst([I[23]=0,I[13]=0,I[12]=0],%);
```

運動エネルギーは (3.3.1) 式から質点の速度が得られるので、質点： m_i の運動エネルギーは下記となる。

$$\begin{aligned} T_i &= m_i y_i^2 w_z(t)^2 + m_i x_i^2 w_z(t)^2 \\ &\quad - 2 m_i y_i z_i w_y(t) w_z(t) - 2 m_i x_i z_i w_x(t) w_z(t) \\ &\quad + m_i z_i^2 w_y(t)^2 + m_i x_i^2 w_y(t)^2 \\ &\quad - 2 m_i x_i y_i w_x(t) w_y(t) + m_i z_i^2 w_x(t)^2 \\ &\quad + m_i y_i^2 w_x(t)^2 \end{aligned}$$

(3.3.3) 式から

$$\begin{aligned} T_i &= I_{33} w_z(t)^2 - 2 I_{23} w_y(t) w_z(t) \\ &\quad - 2 I_{13} w_x(t) w_z(t) + I_{22} w_y(t)^2 \\ &\quad - 2 I_{12} w_x(t) w_y(t) + I_{11} w_x(t)^2 \end{aligned}$$

質点： m_i の総和を求めると、剛体の運動エネルギー： T は下記となる。

$$\begin{aligned} T &= I_{33} w_z(t)^2 - 2 I_{23} w_y(t) w_z(t) - 2 I_{13} w_x(t) w_z(t) \\ &\quad + I_{22} w_y(t)^2 - 2 I_{12} w_x(t) w_y(t) + I_{11} w_x(t)^2 \end{aligned}$$

楕円体の主軸を x-y-z 座標にとると、剛体の運動エネルギー： T は下記となる。

$$T = I_{33} w_z(t)^2 + I_{22} w_y(t)^2 + I_{11} w_x(t)^2$$

以上のことから剛体の慣性主軸を用いた剛体固定の運動座標系で解く方がよい。

3.3.3 オイラー角の変換による静止座標系と運動座標系の関係

静止座標系からオイラー角の変換により、運動座標系に変換する。本プログラムは前節のプログラムに続いて実行する。

```
IJK:matrix([vi],[vj],[vk]);
E123D:matrix([e1D],[e2D],[e3D]);
E123DD:matrix([e1DD],[e2DD],[e3DD]);
E123:matrix([e1],[e2],[e3]);
TR1:matrix([cos(a(t)), -sin(a(t)), 0 ],
            [sin(a(t)), +cos(a(t)), 0 ],
            [ 0 , 0 , 1 ] );
TR2:matrix([ cos(b(t)),0,sin(b(t)) ],
            [ 0,1, 0 ],
            [-sin(b(t)),0,cos(b(t)) ] );
TR3:matrix([cos(c(t)), -sin(c(t)), 0 ],
            [sin(c(t)), +cos(c(t)), 0 ],
            [ 0 , 0 , 1 ] );
```

第一ステップとして、静止座標系のz軸:vkまわりにa(t)回転させる。この関係は、

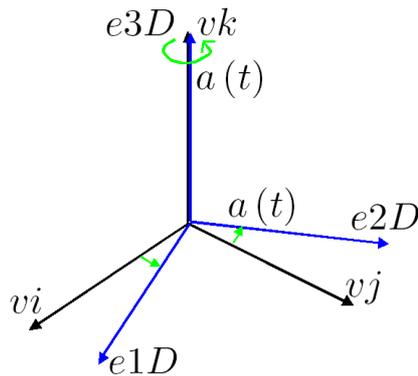


図 3.3.2: 座標変換：第一ステップ

$$TR1 = \begin{bmatrix} \cos(a(t)) & -\sin(a(t)) & 0 \\ \sin(a(t)) & \cos(a(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} vi \\ vj \\ vk \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(a(t)) & -\sin(a(t)) & 0 \\ \sin(a(t)) & \cos(a(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} e1D \\ e2D \\ e3D \end{bmatrix}$$

第二ステップとして、e2Dまわりにb(t)回転させる。この関係は、

$$TR2 = \begin{bmatrix} \cos(b(t)) & 0 & \sin(b(t)) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(b(t)) & 0 & \cos(b(t)) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} e1D \\ e2D \\ e3D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(b(t)) & 0 & \sin(b(t)) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(b(t)) & 0 & \cos(b(t)) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} e1DD \\ e2DD \\ e3DD \end{bmatrix}$$

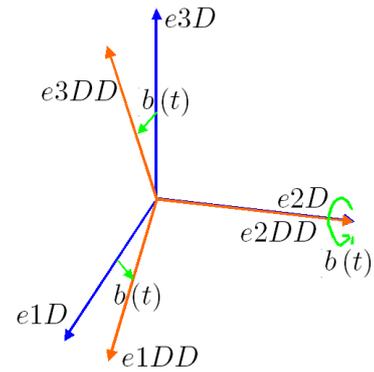


図 3.3.3: 座標変換：第二ステップ

第三ステップとして、e1DDまわりにc(t)回転させる。この関係は、

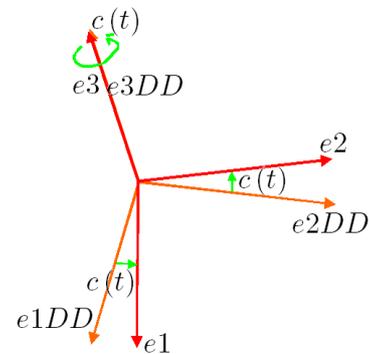


図 3.3.4: 座標変換：第三ステップ

$$TR3 = \begin{bmatrix} \cos(c(t)) & -\sin(c(t)) & 0 \\ \sin(c(t)) & \cos(c(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} e1DD \\ e2DD \\ e3DD \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(c(t)) & -\sin(c(t)) & 0 \\ \sin(c(t)) & \cos(c(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} e1 \\ e2 \\ e3 \end{bmatrix}$$

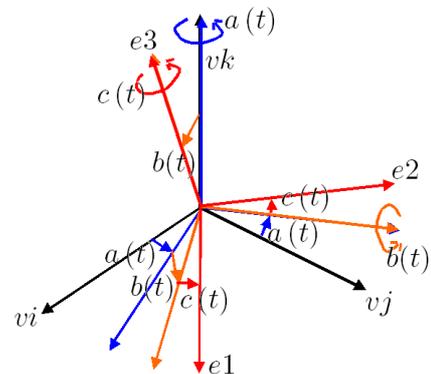


図 3.3.5: オイラー角の座標変換

```

W20:diff(a(t),t,1)*vk+diff(b(t),t,1)*e2D
      +diff(c(t),t,1)*e3DD;
TR1.TR2;
%.TR3;
IJK1:IJK=%.E123;
VK1:lhs(%) [3] [1]=rhs(%) [3] [1];
TR2.TR3;

```

```

E123D=%.E123;
E2D1:lhs(%) [2] [1]=rhs(%) [2] [1];
E123DD=TR3.E123;
E3DD1:lhs(%) [3] [1]=rhs(%) [3] [1];

```

上記の座標変換のプロセスから、オイラー角の変換の関係式は下記となる。

$$\begin{bmatrix} v_i \\ v_j \\ v_k \end{bmatrix} = TR1 \cdot TR2 \cdot TR3 \cdot \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(a(t)) \cos(b(t)) \cos(c(t)) - \sin(a(t)) \sin(c(t)) & -\cos(a(t)) \cos(b(t)) \sin(c(t)) - \sin(a(t)) \cos(c(t)) & \cos(a(t)) \sin(b(t)) \\ \cos(a(t)) \sin(c(t)) + \sin(a(t)) \cos(b(t)) \cos(c(t)) & \cos(a(t)) \cos(c(t)) - \sin(a(t)) \cos(b(t)) \sin(c(t)) & \sin(a(t)) \sin(b(t)) \\ -\sin(b(t)) \cos(c(t)) & \sin(b(t)) \sin(c(t)) & \cos(b(t)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} \quad (3.3.6)$$

$$\begin{bmatrix} e1D \\ e2D \\ e3D \end{bmatrix} = TR2 \cdot TR3 \cdot \begin{bmatrix} e1 \\ e2 \\ e3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e2 \cos(b(t)) \sin(c(t)) + e1 \cos(b(t)) \cos(c(t)) + e3 \sin(b(t)) \\ e1 \sin(c(t)) + e2 \cos(c(t)) \\ e2 \sin(b(t)) \sin(c(t)) - e1 \sin(b(t)) \cos(c(t)) + e3 \cos(b(t)) \end{bmatrix} \quad (3.3.7)$$

$$\begin{bmatrix} e1DD \\ e2DD \\ e3DD \end{bmatrix} = TR3 \cdot \begin{bmatrix} e1 \\ e2 \\ e3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e1 \cos(c(t)) - e2 \sin(c(t)) \\ e1 \sin(c(t)) + e2 \cos(c(t)) \\ e3 \end{bmatrix} \quad (3.3.8)$$

```

W21:expand(subst([VK1,E2D1,E3DD1],W20));
W22:matrix([coeff(W21,e1,1)],
           [coeff(W21,e2,1)], [coeff(W21,e3,1)]);
w1(t)=W22[1][1];
w2(t)=W22[2][1];
w3(t)=W22[3][1];

```

$vk, e2D, e1DD$ の関係式は、

$$vk = e2 \sin(b(t)) \sin(c(t)) - e1 \sin(b(t)) \cos(c(t)) + e3 \cos(b(t)) \quad (3.3.10)$$

$$e2D = e1 \sin(c(t)) + e2 \cos(c(t))$$

オイラー角: $a(t), b(t), c(t)$ における角速度の関係式は下記となる。

$$\vec{w} = \left(\frac{d}{dt} c(t) \right) \overrightarrow{e3DD} + \left(\frac{d}{dt} b(t) \right) \overrightarrow{e2D} + \left(\frac{d}{dt} a(t) \right) \overrightarrow{vk} \quad (3.3.9)$$

$$e3DD = e3$$

角速度: \vec{w} に上式を代入し、 $e1, e2, e3$ で整理すると、オイラー角変換による $a(t), b(t), c(t)$ と運動座標系の $w1(t), w2(t), w3(t)$ の関係式が得られる。

$$\vec{w} = \begin{bmatrix} w1(t) \\ w2(t) \\ w3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{d}{dt} b(t) \right) \sin(c(t)) - \left(\frac{d}{dt} a(t) \right) \sin(b(t)) \cos(c(t)) \\ \left(\frac{d}{dt} a(t) \right) \sin(b(t)) \sin(c(t)) + \left(\frac{d}{dt} b(t) \right) \cos(c(t)) \\ \frac{d}{dt} c(t) + \left(\frac{d}{dt} a(t) \right) \cos(b(t)) \end{bmatrix}$$

別の形で表すと

$$w1(t) = \left(\frac{d}{dt} b(t) \right) \sin(c(t)) - \left(\frac{d}{dt} a(t) \right) \sin(b(t)) \cos(c(t)) \quad (3.3.11)$$

$$w2(t) = \left(\frac{d}{dt} a(t) \right) \sin(b(t)) \sin(c(t)) + \left(\frac{d}{dt} b(t) \right) \cos(c(t)) \quad (3.3.12)$$

$$w3(t) = \frac{d}{dt} c(t) + \left(\frac{d}{dt} a(t) \right) \cos(b(t)) \quad (3.3.13)$$

3.3.4 剛体の固定点まわりの運動方程式

剛体の固定点まわりの運動方程式は、静止座標系の場合次式で得られる。

$$\frac{d}{dt} \vec{L} = \vec{N}$$

慣性楕円体の結果から、慣性主軸を剛体固定の運動座標系として選ぶ。上記の静止座標系の運動方程式を、運動座標系の運動方程式の変換する。

(1) 固定点まわりの運動方程式

運動座標系： S_2 は静止座標系： S_1 の原点まわりを角速度： \vec{w} で回転しているとする。

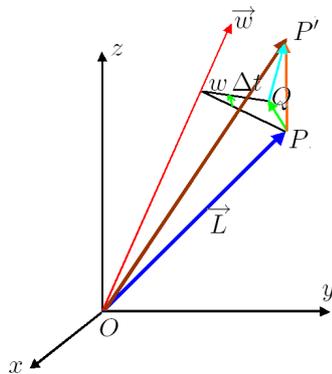


図 3.3.6: 回転座標系

静止座標系での角運動量： \vec{L} は、微小時間： Δt の間に P 点から P' 点に移れば、下記の関係が成り立つ。

$$\overrightarrow{PP'} = (\Delta \vec{L})_1 \quad \text{静止座標系における角運動量変化}$$

$$\overrightarrow{QP'} = (\Delta \vec{L})_2 \quad \text{運動座標系における角運動量変化}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} &= \vec{w} \Delta t \times \vec{L} \\ \overrightarrow{PP'} &= \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP'} \end{aligned}$$

以上のことから、角運動量変化は、

$$(\Delta \vec{L})_1 = (\Delta \vec{L})_2 + \vec{w} \Delta t \times \vec{L}$$

$$\left(\frac{\Delta \vec{L}}{\Delta t} \right)_1 = \left(\frac{\Delta \vec{L}}{\Delta t} \right)_2 + \vec{w} \times \vec{L}$$

$$\left(\frac{d}{dt} \vec{L} \right)_1 = \left(\frac{d}{dt} \vec{L} \right)_2 + \vec{w} \times \vec{L} = \vec{N} \quad (3.3.14)$$

この関係は角運動量： \vec{L} 以外でも、適用でき、変位： \vec{r} について、

$$\left(\frac{d}{dt} \vec{r} \right)_1 = \left(\frac{d}{dt} \vec{r} \right)_2 + \vec{w} \times \vec{r} \quad (3.3.15)$$

上式は、

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_2 + \vec{w} \times \vec{r} \quad (3.3.16)$$

本プログラムは前節のプログラムに続いて実行する。

```
L2:matrix([I[11]*w1(t)], [I[22]*w2(t)],
          [I[33]*w3(t)]);
W2:matrix([w1(t)], [w2(t)], [w3(t)]);
N2:matrix([N[1]], [N[2]], [N[3]]);
EQL2:diff(L2,t,1)+(col(adjoint(append(
      transpose(W2), transpose(L2),
      transpose(un))), 3))=N2;
lhs(EQL2)[1][1]=rhs(EQL2)[1][1];
lhs(EQL2)[2][1]=rhs(EQL2)[2][1];
lhs(EQL2)[3][1]=rhs(EQL2)[3][1];
```

ここで、剛体の慣性主軸を運動座標系とすると、角運動量： \vec{L} は、

$$\vec{L} = \begin{bmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \\ w_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{11} w_1(t) \\ I_{22} w_2(t) \\ I_{33} w_3(t) \end{bmatrix}$$

角速度： \vec{w} 、外力モーメント： \vec{N} を下記とすると、

$$\vec{w} = \begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \\ w_3(t) \end{bmatrix} \quad \vec{N} = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix}$$

上式を (3.3.14) 式に代入すると

$$\begin{bmatrix} I_{11} \left(\frac{d}{dt} w_1(t) \right) + I_{33} w_2(t) w_3(t) - I_{22} w_2(t) w_3(t) \\ I_{22} \left(\frac{d}{dt} w_2(t) \right) - I_{33} w_1(t) w_3(t) + I_{11} w_1(t) w_3(t) \\ I_{33} \left(\frac{d}{dt} w_3(t) \right) + I_{22} w_1(t) w_2(t) - I_{11} w_1(t) w_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix}$$

上記の結果から下記の剛体固定の運動座標系の運動方程式が得られる。

$$I_{11} \left(\frac{d}{dt} w_1(t) \right) + (I_{33} - I_{22}) w_2(t) w_3(t) = N_1 \quad (3.3.17)$$

$$I_{22} \left(\frac{d}{dt} w_2(t) \right) + (-I_{33} + I_{11}) w_1(t) w_3(t) = N_2 \quad (3.3.18)$$

$$I_{33} \left(\frac{d}{dt} w_3(t) \right) + (I_{22} - I_{11}) w_1(t) w_2(t) = N_3 \quad (3.3.19)$$

例題 3.3.5 外力を受けない固定点のある軸対称剛体の運動 (地球自転軸の振れ)

外力を受けないので、剛体にモーメントが作用せず、角運動量の変化はない。そこで、角運動量のベクトルを静止座標系の z 軸に合わせる。剛体固定の運動座標系の運動方程式：(3.3.17) 式～(3.3.19) 式およびオイラー角における角速度の関係式：(3.3.11) 式～(3.3.13) 式は下記となる。

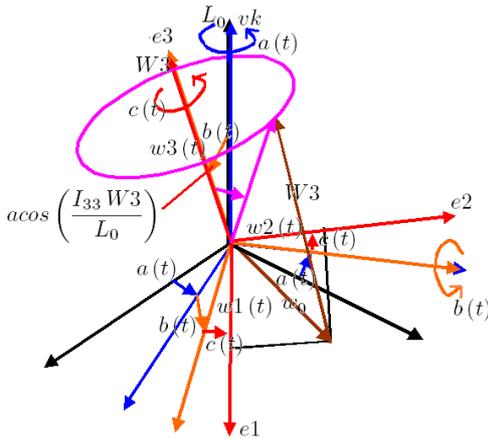


図 3.3.7: 外力を受けない固定点のある軸対称剛体の運動

```
kill(all);
un:matrix([1],[1],[1]);
EQ1:I[11]*('diff(w1(t),t,1))+I[33]*w2(t)
*w3(t)-I[22]*w2(t)*w3(t)=N[1];
EQ2:I[22]*('diff(w2(t),t,1))-I[33]*w1(t)
*w3(t)+I[11]*w1(t)*w3(t)=N[2];
EQ3:I[33]*('diff(w3(t),t,1))+I[22]*w1(t)
*w2(t)-I[11]*w1(t)*w2(t)=N[3];
EQ4:w1(t)=('diff(b(t),t,1))*sin(c(t))
-('diff(a(t),t,1))*sin(b(t))*cos(c(t));
EQ5:w2(t)=('diff(a(t),t,1))*sin(b(t))
*sin(c(t))+('diff(b(t),t,1))*cos(c(t));
EQ6:w3(t)='diff(c(t),t,1)
+('diff(a(t),t,1))*cos(b(t));
```

剛体固定の運動座標系の運動方程式は、(3.3.17) 式～(3.3.19) 式から、

$$I_{11} \left(\frac{d}{dt} w_1(t) \right) + (I_{33} - I_{22}) w_2(t) w_3(t) = N_1 \quad (3.3.20)$$

$$I_{22} \left(\frac{d}{dt} w_2(t) \right) + (-I_{33} + I_{11}) w_1(t) w_3(t) = N_2 \quad (3.3.21)$$

$$I_{33} \left(\frac{d}{dt} w_3(t) \right) + (I_{22} - I_{11}) w_1(t) w_2(t) = N_3 \quad (3.3.22)$$

オイラー角における角速度の関係式は、(3.3.11) 式～(3.3.13) 式から、

$$w_1(t) = \left(\frac{d}{dt} b(t) \right) \sin(c(t)) - \left(\frac{d}{dt} a(t) \right) \sin(b(t)) \cos(c(t)) \quad (3.3.23)$$

$$w_2(t) = \left(\frac{d}{dt} a(t) \right) \sin(b(t)) \sin(c(t)) + \left(\frac{d}{dt} b(t) \right) \cos(c(t)) \quad (3.3.24)$$

$$w_3(t) = \frac{d}{dt} c(t) + \left(\frac{d}{dt} a(t) \right) \cos(b(t)) \quad (3.3.25)$$

```
EQ123:expand(EQ1*w1(t)+EQ2*w2(t)+EQ3
*w3(t));
subst([N[1]=0,N[2]=0,N[3]=0],EQ123);
integrate(%,t);
EQ1231:lhs(%)=T;
EQ1232:expand(EQ1*I[11]*w1(t)
+eq3*I[22]*w2(t)+EQ3*I[33]*w3(t));
subst([N[1]=0,N[2]=0,N[3]=0],EQ1232);
integrate(%,t);
EQ1233:expand(lhs(%)^2)=L[0]^2;
```

(3.3.20) 式～(3.3.22) 式の各運動方程式に $w_1(t), w_2(t), w_3(t)$ を掛け、モーメントを零として、これらの和をとると、

$$I_{33} w_3(t) \left(\frac{d}{dt} w_3(t) \right) + I_{22} w_2(t) \left(\frac{d}{dt} w_2(t) \right) + I_{11} w_1(t) \left(\frac{d}{dt} w_1(t) \right) = 0$$

上式を時間積分すると運動エネルギー一定の式が得られる。

$$\frac{I_{33} w_3(t)^2}{2} + \frac{I_{22} w_2(t)^2}{2} + \frac{I_{11} w_1(t)^2}{2} = T$$

また、(3.3.20) 式～(3.3.22) 式の各運動方程式に $I_{11} w_1(t), I_{22} w_2(t), I_{33} w_3(t)$ を掛け、モーメントを零として、これらの和をとると、

$$I_{33}^2 w_3(t) \left(\frac{d}{dt} w_3(t) \right) + I_{22}^2 w_2(t) \left(\frac{d}{dt} w_2(t) \right) + I_{11}^2 w_1(t) \left(\frac{d}{dt} w_1(t) \right) = 0$$

時間積分すると角運動量一定の式が得られる。

$$I_{33}^2 w_3(t)^2 + I_{22}^2 w_2(t)^2 + I_{11}^2 w_1(t)^2 = L_0^2 \quad (3.3.26)$$

角運動量保存から、外力を受けないとき、角運動量： \vec{L} は不変であり、上式からその大きさも一定であるから、角運動量： \vec{L} は定まった方向であることがわかる。

```

EQ31:subst([I[22]=I[11],N[1]=0,N[2]=0,
  N[3]=0],EQ3);
EQ11:partfrac(subst([I[22]=I[11],N[1]=0,
  N[2]=0,N[3]=0,w3(t)=W3],EQ1),W3);
EQ21:partfrac(subst([I[22]=I[11],N[1]=0,
  N[2]=0,N[3]=0,w3(t)=W3],eq3),W3);
assume(I[33]>I[11]);
assume(I[33]>0,I[11]>0,W3>0);
ANS12:factor(desolve([EQ11,eq31],[w1(t),
  w2(t)]));
ANS11:ANS12[1];
ANS21:ANS12[2];
2*pi=((I[33]-I[11])*T[ROT]*W3)/I[11];
ANST1:solve(%,T[ROT])[1];
ANST11:subst([W3=2*pi/T[0]],%);

```

(3.3.20) 式～(3.3.22) 式の運動方程式に軸対称であることから、 $I_{11} = I_{22}$ とモーメントを零として、

$$(I_{33} - I_{11}) w_2(t) W_3 + I_{11} \left(\frac{d}{dt} w_1(t) \right) = 0$$

$$(I_{11} - I_{33}) w_1(t) W_3 + I_{11} \left(\frac{d}{dt} w_2(t) \right) = 0$$

$$I_{33} \left(\frac{d}{dt} w_3(t) \right) = 0$$

上式を解くと、

$$w_1(t) = - \left(w_2(0) \sin \left(\frac{(I_{33} - I_{11}) t W_3}{I_{11}} \right) - w_1(0) \cos \left(\frac{(I_{33} - I_{11}) t W_3}{I_{11}} \right) \right) \quad (3.3.27)$$

$$w_2(t) = w_1(0) \sin \left(\frac{(I_{33} - I_{11}) t W_3}{I_{11}} \right) + w_2(0) \cos \left(\frac{(I_{33} - I_{11}) t W_3}{I_{11}} \right) \quad (3.3.28)$$

$$w_3(t) = W_3 \quad (3.3.29)$$

$w_3(t)$ は一定回転: W_3 となり、 \vec{w} はそのまわりを下記の周期で回る。ここで角速度: W_3 の回転周期を T_0 とすると、

$$T_{ROT} = \frac{2\pi I_{11}}{(I_{33} - I_{11}) W_3}$$

$$T_{ROT} = \frac{T_0 I_{11}}{I_{33} - I_{11}}$$

```

trigsimp(ANS11^2+ANS21^2);
ANS121:lhs(%)=w[0]^2;
ANS122:solve(%,w1(t))[2];
WW:w1(t)^2+w2(t)^2+w3(t)^2;
WW1:w^2=subst([ANS122,w3(t)=W3],%);
expand(subst([I[22]=I[11],ANS122,w3(t)=
  W3],EQ1233));
EQ1234:solve(%,L[0])[2];

```

(3.3.27) 式と (3.3.28) 式の二乗和は下記となり、一定となる。

$$w_2(t)^2 + w_1(t)^2 = w_2(0)^2 + w_1(0)^2 = w_0^2$$

角運動量一定の (3.3.26) 式に上式を代入すると、

$$I_{33}^2 W_3^2 + w_0^2 I_{11}^2 = L_0^2$$

以上から、

$$L_0 = \sqrt{I_{33}^2 W_3^2 + w_0^2 I_{11}^2}$$

```

EQvk:vk=e2*sin(b(t))*sin(c(t))-e1*
  sin(b(t))*cos(c(t))+e3*cos(b(t));
L1:I[11]*w1(t)=L[0]*coeff(rhs(EQvk),e1,1);
L2:I[11]*w2(t)=L[0]*coeff(rhs(EQvk),e2,1);
L3:I[33]*w3(t)=L[0]*coeff(rhs(EQvk),e3,1);
L11:subst([EQ4],L1)/I[11];
L21:subst([EQ5],L2)/I[11];
L31:subst([EQ6],L3)/I[33];
ANSL12:solve([L11,L21],[diff(a(t),t,1),
  diff(b(t),t,1)]);
ANSL1:ANSL12[1][1];
ANSL2:ANSL12[1][2];
EQL3:L[3]=I[33]*W3;
L03:cos(b(t))=L[3]/L[0];
L031:solve(L03,L[0])[1];
solve(%,b(t))[1];
ANSL21:subst([EQL3],%);
ANSL11:subst([L031,EQL3],ANSL1);
ANSL3:factor(subst([ANSL1,ANSL21],
  solve(L31,diff(c(t),t,1))[1]));
T[ROT]=2*pi/rhs(-ANSL3);
T[PREC]=2*pi/rhs(ANSL11);

```

角運動量: \vec{L} は定まった方向であり、 \vec{v}_k の方向を向いている。この関係式: (3.3.10) 式から、

$$v_k = e_2 \sin(b(t)) \sin(c(t)) - e_1 \sin(b(t)) \cos(c(t)) + e_3 \cos(b(t))$$

角運動量の e_1, e_2, e_3 と v_k の関係から、

$$I_{11} w_1(t) = -L_0 \sin(b(t)) \cos(c(t))$$

$$I_{11} w_2(t) = L_0 \sin(b(t)) \sin(c(t))$$

$$I_{33} w_3(t) = L_0 \cos(b(t)) \quad (3.3.30)$$

上式とオイラー角における角速度の関係式: (3.3.23) 式～(3.3.25) 式から、

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} b(t) \right) \sin(c(t)) - \left(\frac{d}{dt} a(t) \right) \sin(b(t)) \cos(c(t)) \\ = - \frac{L_0 \sin(b(t)) \cos(c(t))}{I_{11}} \end{aligned} \quad (3.3.31)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d}{dt} a(t) \right) \sin(b(t)) \sin(c(t)) \\ & + \left(\frac{d}{dt} b(t) \right) \cos(c(t)) \quad (3.3.32) \\ & = \frac{L_0 \sin(b(t)) \sin(c(t))}{I_{11}} \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} c(t) + \left(\frac{d}{dt} a(t) \right) \cos(b(t)) = \frac{L_0 \cos(b(t))}{I_{33}} \quad (3.3.33)$$

(3.3.31) 式と (3.3.32) 式を解くと、

$$\frac{d}{dt} a(t) = \frac{L_0}{I_{11}} \quad (3.3.34)$$

$$\frac{d}{dt} b(t) = 0$$

(3.3.29) 式と (3.3.30) 式から、

$$I_{33} W_3 = L_0 \cos(b(t))$$

上式から下記の関係式が得られる。

$$b(t) = a \cos\left(\frac{I_{33} W_3}{L_0}\right) \quad (3.3.35)$$

$$\frac{d}{dt} a(t) = \frac{I_{33} W_3}{I_{11} \cos(b(t))} \quad (3.3.36)$$

(3.3.33) 式に (3.3.34) 式と (3.3.35) 式を代入し整理すると、

$$\frac{d}{dt} c(t) = -\frac{(I_{33} - I_{11}) W_3}{I_{11}} \quad (3.3.37)$$

自転の周期は対称軸のまわりに T_{ROT} でまわり、同時に正規歳差運動の周期: T_{PREC} でまわる。

$$T_{ROT} = \frac{2\pi I_{11}}{(I_{33} - I_{11}) W_3} \quad (3.3.38)$$

$$T_{PREC} = \frac{2\pi I_{11} \cos(b(t))}{I_{33} W_3} \quad (3.3.39)$$

```
R1:R[1]=R*(1+1/297);
I11:I[11]=M*(R^2+R[1]^2)/5;
I33:I[33]=M*(R[1]^2+R[1]^2)/5;
W33:W3=2*pi/(24*60*60);
subst([I11,I33,R1,W33],ANST1);
lhs(%)=float(rhs(%) / (60*60*24));
```

地球の質量: M 、赤道における半径: R_1 が極の半径: R より 1/297 大きいとすると、地球の慣性モーメント: I_{11} 、 I_{33} は、

$$I_{11} = \frac{M(R^2 + R_1^2)}{5}, \quad I_{33} = \frac{2R_1^2 M}{5}, \quad R_1 = \frac{298R}{297}$$

(3.3.38) 式から自転の周期: T_{ROT} は、

$$T_{ROT} = 297.5008403361344 \text{ 日}$$

追記: 楕円体の慣性モーメント

```
kill(all);
XYZ1:x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1;
DIX1:(y^2+z^2)*rho*dx*dy*dz;
XD1:x=a*f;
YD1:y=b*g;
ZD1:z=c*h;
XYZD1:subst([XD1,YD1,ZD1],XYZ1);
XD2:dx=a*df;
YD2:dy=b*dg;
ZD2:dz=c*dh;
subst([XD2,YD2,ZD2],DIX1);
DIX2:subst([XD1,YD1,ZD1],%);
R1:f=r*sin(q)*cos(p);
R2:g=r*sin(q)*sin(p);
R3:h=r*cos(q);
df*dg*dh=r^2*sin(q)*dr*dp*dq;
solve(%,df)[1];
subst(%,DIX2);
DIX3:subst([R1,R2,R3],%);
I[X]='integrate('integrate('integrate(
DIX3/dr/dp/dq,r,0,1),q,0,%pi),p,0,2*pi);
IX3:factor(ev(%,integrate));
DM3:a*b*c*dp*dq*dr*sin(q)*r^2*rho;
M='integrate('integrate('integrate(%/dr/
dp/dq,r,0,1),q,0,%pi),p,0,2*pi);
M3:ev(%,integrate);
M31:solve(M3,\rho)[1];
subst([M31],IX3);
```

楕円体の式は、 x 軸の半径: a 、 y 軸の半径: b 、 z 軸の半径: c とすると、

$$\frac{z^2}{c^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1$$

要素体の x 軸まわりの慣性モーメントは、要素体の密度を ρ とすると、

$$dI = dx dy dz \rho (z^2 + y^2)$$

下記と置くと、

$$x = a f, \quad y = b g, \quad z = c h$$

楕円体の式は、下記の球の式になる。

$$h^2 + g^2 + f^2 = 1$$

要素体の x 軸まわりの慣性モーメントを f, g, h で表すと、

$$dI = a b c d f d g d h (c^2 h^2 + b^2 g^2) \rho$$

f, g, h を極座標で表すと、

$$f = \cos(p) \sin(q) r, \quad g = \sin(p) \sin(q) r, \quad h = \cos(q) r$$

要素体の x 軸まわりの慣性モーメントを極座標で表すと、

$$dI = a b c dp dq dr \sin(q) r^2 \left(b^2 \sin(p)^2 \sin(q)^2 r^2 + c^2 \cos(q)^2 r^2 \right) \rho$$

上式を積分して、 x 軸まわりの慣性モーメントは、

$$\begin{aligned} I_X &= a b c \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin(q) \int_0^1 r^2 \left(b^2 \sin(p)^2 \sin(q)^2 r^2 + c^2 \cos(q)^2 r^2 \right) dr dq dp \rho \\ &= \frac{4\pi a b c (c^2 + b^2) \rho}{15} \end{aligned}$$

楕円体の要素体の質量は、

$$dM = a b c dp dq dr \sin(q) r^2 \rho$$

上式を積分して、楕円体の質量は、

$$M = 2\pi a b c \int_0^\pi \sin(q) dq \int_0^1 r^2 dr \rho = \frac{4\pi a b c \rho}{3}$$

x 軸まわりの慣性モーメントを M で表すと、

$$I_X = \frac{(c^2 + b^2) M}{5}$$

例題 3.3.6 対称こまの運動

こまの心棒の下端が原点: O の上でまわっている。こまの質量: M 、原点から重心までの距離: H 、重力加速度: G とする。鉛直方向を慣性座標系の z 軸に、こまの回転軸をオイラー座標の e_3 に合わせる。

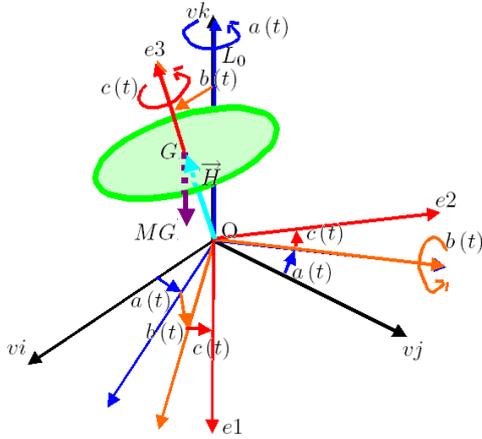


図 3.3.8: こまの運動

```
kill(all);
un:matrix([1],[1],[1]);
assume(I[33]>0);
assume(I[11]>0);
assume(G>0);
assume(M>0);
assume(H>0);
assume(W3>0);
EQ1:I[11]*(diff(w1(t),t,1))+I[33]*w2(t)*w3(t)-I[22]*w2(t)*w3(t)=N[1];
EQ2:I[22]*(diff(w2(t),t,1))-I[33]*w1(t)*w3(t)+I[11]*w1(t)*w3(t)=N[2];
EQ3:I[33]*(diff(w3(t),t,1))+I[22]*w1(t)*w2(t)-I[11]*w1(t)*w2(t)=N[3];
EQ4:w1(t)=(diff(b(t),t,1))*sin(c(t))-diff(a(t),t,1)*sin(b(t))*cos(c(t));
EQ5:w2(t)=(diff(a(t),t,1))*sin(b(t))*sin(c(t))+diff(b(t),t,1)*cos(c(t));
EQ6:w3(t)=diff(c(t),t,1)+diff(a(t),t,1)*cos(b(t));
```

剛体固定の運動座標系の運動方程式: (3.3.17) 式~(3.3.19) 式は下記である。

$$I_{11} \left(\frac{d}{dt} w_1(t) \right) + I_{33} w_2(t) w_3(t) - I_{22} w_2(t) w_3(t) = N_1 \quad (3.3.17)$$

$$I_{22} \left(\frac{d}{dt} w_2(t) \right) - I_{33} w_1(t) w_3(t) + I_{11} w_1(t) w_3(t) = N_2 \quad (3.3.18)$$

$$I_{33} \left(\frac{d}{dt} w_3(t) \right) + I_{22} w_1(t) w_2(t) - I_{11} w_1(t) w_2(t) = N_3 \quad (3.3.19)$$

オイラー角における角速度の関係式:(3.3.11) 式~(3.3.13) 式は下記である。

$$w_1(t) = \left(\frac{d}{dt} b(t) \right) \sin(c(t)) - \left(\frac{d}{dt} a(t) \right) \sin(b(t)) \cos(c(t)) \quad (3.3.11)$$

$$w_2(t) = \left(\frac{d}{dt} a(t) \right) \sin(b(t)) \sin(c(t)) + \left(\frac{d}{dt} b(t) \right) \cos(c(t)) \quad (3.3.12)$$

$$w_3(t) = \frac{d}{dt} c(t) + \left(\frac{d}{dt} a(t) \right) \cos(b(t)) \quad (3.3.13)$$

```
EQ4D:diff(EQ4,t,1);
EQ5D:diff(EQ5,t,1);
vh:matrix([0],[0],[H]);
vk:matrix([-sin(b(t))*cos(c(t))],[sin(b(t))*sin(c(t))],[cos(b(t))]);
vN:-M*G*col(adjoint(append(transpose(vh),transpose(vk),transpose(un))),3);
N1:N[1]=vN[1][1];
N2:N[2]=vN[2][1];
N3:N[3]=vN[3][1];
EQ11:partfrac(subst([N1,N2,N3,I[22]=I[11]],EQ1),w2(t));
EQ21:partfrac(subst([N1,N2,N3,I[22]=I[11]],EQ2),w2(t));
EQ31:partfrac(subst([N1,N2,N3,I[22]=I[11]],EQ3),w2(t));
EQ32:w3(t)=W3;
EQ61:subst([w3(t)=W3],EQ6);
EQ33:solve(EQ61,diff(c(t),t,1))[1];
```

H をオイラー座標系でベクトル表示すると、

$$\vec{H} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ H \end{bmatrix}$$

慣性座標系の z 軸をオイラー座標系でベクトル表示すると、

$$\vec{vk} = \begin{bmatrix} -\sin(b(t)) \cos(c(t)) \\ \sin(b(t)) \sin(c(t)) \\ \cos(b(t)) \end{bmatrix}$$

こまに作用する重力モーメントをオイラー座標系でベクトル表示すると、

$$\vec{N} = -MG\vec{H} \times \vec{v}k = \begin{bmatrix} \sin(b(t)) \sin(c(t)) GHM \\ \sin(b(t)) \cos(c(t)) GHM \\ 0 \end{bmatrix}$$

剛体固定の運動座標系の運動方程式:(3.3.17)式~(3.3.19)式に、こまが軸対称である条件: $I_{11} = I_{22}$ 、上記の重力モーメントを代入すると、

$$I_{11} \left(\frac{d}{dt} w_1(t) \right) + (I_{33} - I_{11}) w_2(t) w_3(t) = \sin(b(t)) \sin(c(t)) GHM \quad (3.3.40)$$

$$I_{11} \left(\frac{d}{dt} w_2(t) \right) + (I_{11} - I_{33}) w_1(t) w_3(t) = \sin(b(t)) \cos(c(t)) GHM \quad (3.3.41)$$

$$I_{33} \left(\frac{d}{dt} w_3(t) \right) = 0 \quad (3.3.42)$$

上式から、下記のように $w_3(t)$ は定常回転となる。

$$w_3(t) = W_3 \quad (3.3.43)$$

上式をオイラー角における角速度の関係式:(3.3.13)式に代入すると、

$$\frac{d}{dt} c(t) = W_3 - \left(\frac{d}{dt} a(t) \right) \cos(b(t)) \quad (3.3.44)$$

(1) 首振り振幅

```
expand(EQ11*w1(t)+EQ21*w2(t));
EQ120:trigsimp(lhs(%)=subst([EQ4,EQ5],
rhs(%)));
integrate(%,t);
EQ1201:(I[11]*w2(t)^2)/2+(I[11]*w1(t)^2)
/2=E[0]-cos(b(t))*G*H*M;
vL:matrix([L[1]],[L[2]],[L[3]]);
LZ:L[0]=vk.vL;
LZ1:subst([L[1]=I[11]*w1(t),L[2]=I[11]*
w2(t),L[3]=I[33]*w3(t)],LZ);
EQA1:subst([EQ6],EQ32);
EQA11:solve(EQA1,diff(c(t),t,1))[1];
expand(subst([EQ4,EQ5,EQ6],EQ1201));
EQA2:trigsimp(%);
expand(subst([EQ4,EQ5,EQ6],LZ1));
expand(subst([EQA11],%));
EQA3:trigsimp(%);
```

(3.3.40)式 $\times w_1(t)$ + (3.3.41)式 $\times w_2(t)$ を求め、整理すると、

$$I_{11} w_2(t) \left(\frac{d}{dt} w_2(t) \right) + I_{11} w_1(t) \left(\frac{d}{dt} w_1(t) \right) = \sin(b(t)) \left(\frac{d}{dt} b(t) \right) GHM$$

上式を時間積分して運動エネルギーとなり、

$$\frac{I_{11} w_2(t)^2}{2} + \frac{I_{11} w_1(t)^2}{2} = E_0 - \cos(b(t)) GHM \quad (3.3.45)$$

z 軸まわりのモーメントは作用しないため、 z 軸方向の角運動量は一定となり、 $L_z = L_0$ とする。これをオイラー座標系で表現すると下記となる。

$$L_0 = L_2 \sin(b(t)) \sin(c(t)) - L_1 \sin(b(t)) \cos(c(t)) + L_3 \cos(b(t))$$

角運動量を慣性モーメントと角速度で表現し、

$$L_0 = I_{11} w_2(t) \sin(b(t)) \sin(c(t)) - I_{11} w_1(t) \sin(b(t)) \cos(c(t)) + I_{33} w_3(t) \cos(b(t)) \quad (3.3.46)$$

(3.3.45)式、(3.3.46)式に、オイラー角における角速度の関係式:(3.3.11)式、(3.3.12)式、(3.3.44)式を代入し、

$$\frac{I_{11} \left(\frac{d}{dt} b(t) \right)^2 + I_{11} \left(\frac{d}{dt} a(t) \right)^2 \sin(b(t))^2}{2} \quad (3.3.47)$$

$$= E_0 - \cos(b(t)) GHM$$

$$L_0 = I_{33} \cos(b(t)) W_3 + I_{11} \left(\frac{d}{dt} a(t) \right) \sin(b(t))^2 \quad (3.3.48)$$

```

EQA31:solve(EQA3,diff(a(t),t,1))[1];
subst([EQA31],EQA2)*sin(b(t))^2/I[11]*2;
EQA21:expand(%);
EQU1:cos(b(t))=u(t);
EQU1D:diff(EQU1,t,1);
EQU1D1:(solve(EQU1D,diff(b(t),t,1))[1]);
subst([EQU1,EQU1D1],EQA21);
subst([sin(b(t))^2=1-u(t)^2],%);
EQU2:expand(solve(%),diff(u(t),t,1)^2)[1]
*I[11]^2);
EQU21:factor(rest(rhs(EQU2),2)+L[0]^2);
EQU22:factor(rhs(EQU2)-expand(EQU21));
EQU3:lhs(EQU2)=EQU21+EQU22;
EQU31:EQU3/I[11]^2;

```

(3.3.48) 式を変形し、

$$\frac{d}{dt} a(t) = -\frac{I_{33} \cos(b(t)) W3 - L_0}{I_{11} \sin(b(t))^2}$$

(3.3.47) 式に代入し、

$$\begin{aligned} & \frac{I_{33}^2 \cos(b(t))^2 W3^2}{I_{11}^2} - \frac{2 L_0 I_{33} \cos(b(t)) W3}{I_{11}^2} \\ & + \sin(b(t))^2 \left(\frac{d}{dt} b(t) \right)^2 + \frac{L_0^2}{I_{11}^2} \\ & = \frac{2 E_0 \sin(b(t))^2}{I_{11}} - \frac{2 \cos(b(t)) \sin(b(t))^2 G H M}{I_{11}} \end{aligned}$$

下記のように置き換えて、

$$\cos(b(t)) = u(t), \quad \frac{d}{dt} b(t) = -\frac{\frac{d}{dt} u(t)}{\sin(b(t))}$$

上式に代入すると、

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d}{dt} u(t) \right)^2 \\ & = \frac{2}{I_{11}} (u(t) - 1) (u(t) + 1) (u(t) G H M - E_0) \\ & - \frac{1}{I_{11}^2} (I_{33} u(t) W3 - L_0)^2 \end{aligned} \tag{3.3.49}$$

上式の $u(t)$ は -1 から 1 の範囲で、右辺が正の範囲で、 $b(t)$ が運動する。上式の右辺は $u(t) = -1, 1$ で負である。また、右辺 = 0 の根で小さい順に U_1, U_2, U_3 とすると、 $U_1 \sim U_2$ の範囲で $b(t)$ が運動する。この関係を下図に示す。

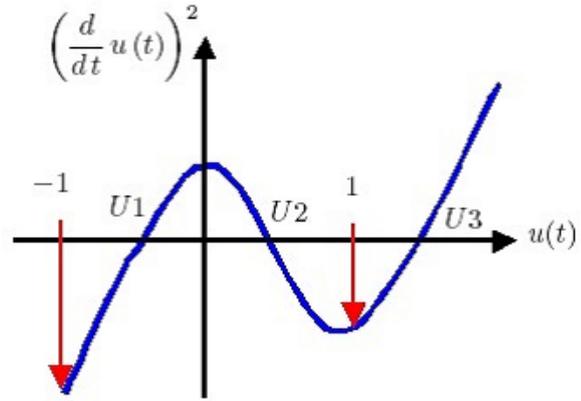


図 3.3.9: こまの運動範囲

(2) こまの首ふり周期

```

EQU32:expand(EQU31);
BT1:B[1]=coeff(rhs(EQU32),u(t),3);
factor(subst([u(t)=-1],rhs(EQU32)));
factor(subst([u(t)=1],rhs(EQU32)));
EQU4:lhs(EQU31)=B[1]*(u(t)-U[1])*(u(t)
-U[2])*(u(t)-U[3]);
assume('diff(u(t),t,1)>0);
DUT1:sqrt(EQU4);
UT1:t='integrate(1/rhs(%),u(t))+%c1;
UT2:u(t)=U[1]+(U[2]-U[1])*sin(phi(t))^2;
DUT2:diff(UT2,t,1);
DUT21:rhs(DUT2)+'/diff(phi(t),t,1);
assume(sin(phi(t))>0);
assume(cos(phi(t))>0);
assume(U[3]>U[1]);
assume(m>0);
M1:m^2=(U[2]-U[1])/(U[3]-U[1]);
M2:solve(%,U[2])[1];
M3:sqrt(M1);
subst([UT2,M2],DUT21/rhs(DUT1));
factor(%);
subst([sin(phi(t))^2-1=-cos(phi(t))^2],
%);
2/(sqrt(U[3]-U[1])*sqrt(B[1])*sqrt(1
-sin(phi(t))^2*m^2));
subst([phi(t)=phi],%);
T1:T='integrate(%*2,phi,0,%pi/2);
T2:lhs(%)=subst([BT1],rhs(%));
T3:lhs(%)=(2^(3/2)*sqrt(I[11]))/(sqrt(
U[3]-U[1])*sqrt(G)*sqrt(H)
*sqrt(M))*elliptic_kc(m);
T4:subst([M3],%);

```

(3.3.49) 式をその根 U_1, U_2, U_3 で表すと、

$$\left(\frac{d}{dt}u(t)\right)^2 = B_1 (u(t) - U_1)(u(t) - U_2)(u(t) - U_3)$$

ここで、

$$B_1 = \frac{2GHM}{I_{11}}$$

上式から、

$$\frac{d}{dt}u(t) = \sqrt{B_1 (u(t) - U_1)(u(t) - U_2)(u(t) - U_3)}$$

上式を積分し、

$$t = \int \frac{1}{\sqrt{B_1 (u(t) - U_1)(u(t) - U_2)(u(t) - U_3)}} du(t) + \%c1$$

下記の置き換えを行って、

$$u(t) = (U_2 - U_1) \sin(\phi(t))^2 + U_1$$

$$\frac{d}{dt}u(t) = 2(U_2 - U_1) \cos(\phi(t)) \sin(\phi(t)) \left(\frac{d}{dt}\phi(t)\right)$$

$$m^2 = \frac{U_2 - U_1}{U_3 - U_1}$$

周期は半周期を積分し、その2倍として得られ、次式となる。

$$T = \frac{4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-m^2 \sin(\phi)^2}} d\phi}{\sqrt{B_1} \sqrt{U_3 - U_1}} \quad (3.3.50)$$

$$= \frac{2^{\frac{3}{2}} \sqrt{I_{11}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-m^2 \sin(\phi)^2}} d\phi}{\sqrt{U_3 - U_1} \sqrt{G} \sqrt{H} \sqrt{M}}$$

Maxima では elliptic_kc 関数が使用でき、

$$T = \frac{2^{\frac{3}{2}} \sqrt{I_{11}} \text{elliptic_kc}(m^2)}{\sqrt{U_3 - U_1} \sqrt{G} \sqrt{H} \sqrt{M}}$$

(3) 定常旋回角速度と安定性

```

EQA81:subst([sin(b(t))^2=1-cos(b(t))^2,
cos(b(t))=u(t)],EQA1);
EQA82:subst(['diff(b(t),t,1)=0,
sin(b(t))^2=1-cos(b(t))^2,
cos(b(t))=u(t)],EQA2);
EQA83:subst([sin(b(t))^2=1-cos(b(t))^2,
cos(b(t))=u(t)],EQA3);
EQU83:subst([sin(b(t))^2=1-cos(b(t))^2,
cos(b(t))=u(t)],rhs(EQU31)=0);
EQU8D3:subst([sin(b(t))^2=1-cos(b(t))^2,
cos(b(t))=u(t)],diff(rhs(EQU31),u(t),1)
=0);
ANS84:solve([EQA81,EQA82,EQA83,
EQU83,EQU8D3],['diff(c(t),t,1),
'diff(a(t),t,1),E[0],L[0]]);
ANS841:ANS84[1][2];
ANS842:ANS84[2][2];
SQ1:dS=(4*I[11]*u(t)*G*H*M)/(I[33]^2*W3^2);
SQ2:solve(%,G)[1];
SQ3:factor(subst([SQ2],ANS841));
sqrt(1-dS)=taylor(sqrt(1-dS),dS,0,1);
lhs(SQ3)=subst(%,rhs(SQ3));
subst([SQ1],%);

```

```

ANS8411:lhs(%)=first(rhs(%));
SQ3:factor(subst([SQ2],ANS842));
sqrt(1-dS)=taylor(sqrt(1-dS),dS,0,1);
lhs(SQ3)=first(subst(%,rhs(SQ3)));
ANS8421:subst([SQ1],%);
subst([u(t)=cos(B[0])],ANS841);
I[33]^2*W3^2-4*I[11]*cos(B[0])*G*H*M>0;
W31:solve(lhs(%)=0,W3^2)[1];
lhs(%)>rhs(%)

```

定常状態におけるこまの旋回角速度: $A_0 = \frac{d}{dt} a(t)$ と安定性について調べる。定常状態であるので、 $\frac{d}{dt} b(t) = 0$ および $\cos(b(t)) = u(t)$ を (3.3.44) 式、3.3.47) 式、(3.3.48) 式に代入すると、

$$\frac{d}{dt} c(t) + u(t) \left(\frac{d}{dt} a(t) \right) = W3 \quad (3.3.51)$$

$$\frac{I_{11} (1 - u(t)^2) \left(\frac{d}{dt} a(t) \right)^2}{2} = E_0 - u(t) G H M \quad (3.3.52)$$

$$L_0 = I_{33} u(t) W3 + I_{11} (1 - u(t)^2) \left(\frac{d}{dt} a(t) \right) \quad (3.3.53)$$

こまが安定して定常に旋回する条件は、(3.3.49) 式の根である $U_1 = U_2$ で、極値になることであるから、(3.3.49) 式を $u(t)$ で微分し、零とすると、

$$\left(\frac{d}{dt} u(t) \right)^2 = \frac{2 I_{11} (u(t) - 1) (u(t) + 1) (u(t) G H M - E_0) - (I_{33} u(t) W3 - L_0)^2}{I_{11}^2} = 0 \quad (3.3.54)$$

$$\frac{d}{du(t)} \left(\frac{d}{dt} u(t) \right)^2 = - \frac{2 \left(I_{33}^2 u(t) W3^2 - L_0 I_{33} W3 - 3 I_{11} u(t)^2 G H M + I_{11} G H M + 2 E_0 I_{11} u(t) \right)}{I_{11}^2} = 0 \quad (3.3.55)$$

(3.3.51) 式～(3.3.55) 式の連立方程式を解くと、こまが定常旋回する角速度: $\frac{d}{dt} a(t)$ は次式となる。

$$A_0 = \frac{d}{dt} a(t) = - \frac{\sqrt{I_{33}^2 W3^2 - 4 I_{11} u(t) G H M - I_{33} W3}}{2 I_{11} u(t)} \quad (3.3.56)$$

$$A_0 = \frac{d}{dt} a(t) = \frac{\sqrt{I_{33}^2 W3^2 - 4 I_{11} u(t) G H M + I_{33} W3}}{2 I_{11} u(t)}$$

$W3 I_{33}$ が十分大きいとし、 $dS = \frac{4 I_{11} u(t) G H M}{I_{33}^2 W3^2}$ が十分小さいとして、上式を Taylor 展開を用いて簡略化すると、

$$A_0 = \frac{d}{dt} a(t) = \frac{W3 I_{33}}{I_{11} u(t)} - \frac{W3 I_{33} dS}{4 I_{11} u(t)} + \dots \approx \frac{I_{33} W3}{I_{11} u(t)} \quad (3.3.57)$$

$$A_0 = \frac{d}{dt} a(t) = \frac{I_{33} dS W3}{4 I_{11} u(t)} \approx \frac{G H M}{I_{33} W3}$$

安定して旋回する条件として、(3.3.56) 式の平方根内が正となり、安定の条件は下記となる。

$$W3^2 > \frac{4 I_{11} G H M}{I_{33}^2} \quad (3.3.58)$$

(4) 章動 (変動幅)

```

EQU31;
EQA61:subst(['diff(a(t),t,1)=0,u(t)=U[1]
],EQA58);
EQA62:subst(['diff(a(t),t,1)=0,u(t)=U[1]
],EQA59);
subst([EQA61,EQA62],EQU31);
factor(%);
rhs(%)*I[11]^2/(u(t)-U[1])=0;
EQA63:solve(%,u(t));
(I[33]^4*W3^4-8*U[1]*I[11]*I[33]^2*G*H*M
*W3^2+16*I[11]^2*G^2*H^2*M^2);
SR1:%/(I[33]^4*W3^4);
SR2:dI=(I[11]*G*H*M)/(I[33]^2*W3^2);
SR3:solve(%,I[11])[1];
subst([SR3],SR1);
sqrt(factor(%));

```

```

SR4:taylor(%,dI,0,2);
u(t)=-((SR4*I[33]^2*W3^2-I[33]^2*W3^2)/
(4*I[11]*G*H*M);
subst([SR2,u(t)=U[2]],%);
subst([U[2]=cos(B[0]+dB),U[1]=
cos(B[0])],%);
trigexpand(%);
subst([sin(dB)=dB,cos(dB)=1,cos(B[0])^2=
1-sin(B[0])^2],%);
DB1:solve(%,dB)[1];

```

角速度: $W3$ で回転しているこまを初期角: $b(t) = B_0$ で、静かに放す。即ち、初期値として、 $\frac{d}{dt} a(t) = 0$ とする。(3.3.52) 式、(3.3.53) 式に $\frac{d}{dt} a(t) = 0$, $u(t) = \cos(B_0) = U_1$ を代入し、

$$E_0 = U_1 G H M, \quad L_0 = U_1 I_{33} W3$$

(3.3.49) 式に上式を代入し、整理して、右辺を零とし、

$$\left(\frac{d}{dt} u(t)\right)^2 = -\frac{(u(t) - U_1) \left(I_{33}^2 u(t) W3^2 - U_1 I_{33}^2 W3^2 - 2 I_{11} u(t)^2 G H M + 2 I_{11} G H M\right)}{I_{11}^2} = 0$$

上式の根で一つは U_1 、他の小さい方を U_2 、大きい方を U_3 とすると、 $U_1 \sim U_2$ が運動範囲となる。

$$u(t) = U_2 = -\frac{\sqrt{I_{33}^4 W3^4 - 8 U_1 I_{11} I_{33}^2 G H M W3^2 + 16 I_{11}^2 G^2 H^2 M^2 - I_{33}^2 W3^2}}{4 I_{11} G H M}$$

$$u(t) = U_3 = \frac{\sqrt{I_{33}^4 W3^4 - 8 U_1 I_{11} I_{33}^2 G H M W3^2 + 16 I_{11}^2 G^2 H^2 M^2 + I_{33}^2 W3^2}}{4 I_{11} G H M}$$

上式の平方根の部分に次式で置き換え、

$$dI = \frac{I_{11} G H M}{I_{33}^2 W3^2}$$

平方根部分を Taylor 展開し、2 次の微小項までを残し、整理すると、

$$U_2 = \frac{W3^2 I_{33}^2 U_1 dI}{M H G I_{11}} + \frac{(2 W3^2 I_{33}^2 U_1^2 - 2 W3^2 I_{33}^2) dI^2}{M H G I_{11}} + \dots = \frac{I_{11} G H M (2 U_1^2 I_{33}^2 W3^2 - 2 I_{33}^2 W3^2)}{I_{33}^4 W3^4} + U_1$$

変動幅: dB とすると、 $U_2 = \cos(dB + B_0)$ となり、

$$\cos(dB + B_0) = \frac{I_{11} G H M \left(2 I_{33}^2 \cos(B_0)^2 W3^2 - 2 I_{33}^2 W3^2\right)}{I_{33}^4 W3^4} + \cos(B_0)$$

上式を整理し、 dB が小さいとすると、

$$\cos(B_0) - \sin(B_0) dB = \frac{I_{11} G H M \left(2 I_{33}^2 (1 - \sin(B_0)^2) W3^2 - 2 I_{33}^2 W3^2\right)}{I_{33}^4 W3^4} + \cos(B_0)$$

上式から、章動の幅は、

$$dB = \frac{2 I_{11} \sin(B_0) G H M}{I_{33}^2 W3^2} \quad (3.3.59)$$

(5) 数値計算結果

ルンゲ・クッタ法による数値計算を用いてこまの運動を求め、運動の概要の把握と運動周期の比較などを行う。

```
subst([EQ4D,EQ5D,w3(t)=W3],EQ11);
EQ12:subst([EQ4,EQ5,EQ33],%);
subst([EQ4D,EQ5D,w3(t)=W3],EQ21);
EQ22:subst([EQ4,EQ5,EQ33],%);
EQDIF:solve([EQ12,EQ22],[diff(a(t),t,2),
diff(b(t),t,2)]);
EQDIF1:expand(EQDIF[1][1]);
EQDIF2:expand(EQDIF[1][2]);
EQDIF11:subst([diff(b(t),t,1)=0],EQDIF1);
EQDIF12:diff(a(t),t,1)=A[0];
EQDIF21:subst([EQDIF12,b(t)=B[0]],
expand(rhs(EQDIF2)/sin(b(t)))=0);
ANSA0:solve(EQDIF21,A[0]);
```

(3.3.40) 式、(3.3.41) 式に (3.3.11) 式、(3.3.12) 式、(3.3.44) 式を代入し、整理すると下記となる。

$$\frac{d^2}{dt^2} a(t) = \frac{I_{33} \left(\frac{d}{dt} b(t) \right) W3}{I_{11} \sin(b(t))} - \frac{2 \left(\frac{d}{dt} a(t) \right) \cos(b(t)) \left(\frac{d}{dt} b(t) \right)}{\sin(b(t))} \quad (3.3.60)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} b(t) = - \frac{I_{33} \left(\frac{d}{dt} a(t) \right) \sin(b(t)) W3}{I_{11}} + \frac{\sin(b(t)) G H M}{I_{11}} + \left(\frac{d}{dt} a(t) \right)^2 \cos(b(t)) \sin(b(t)) \quad (3.3.61)$$

上式を用いて定常旋回角速度： A_0 を求める。(3.3.60) 式、(3.3.61) 式に定常の条件： $\frac{d^2}{dt^2} a(t) = 0$, $\frac{d}{dt} a(t) = A_0$, $\frac{d^2}{dt^2} b(t) = 0$, $\frac{d}{dt} b(t) = 0$, $b(t) = B_0$ を代入すると、(3.3.61) 式のみが残り、下記となる。

$$- \frac{A_0 I_{33} W3}{I_{11}} + \frac{G H M}{I_{11}} + A_0^2 \cos(B_0) = 0$$

上式を解いて、定常旋回角速度： A_0 を求めると下記となる。これは (3.3.56) 式と一致している。

$$A_0 = - \frac{\sqrt{I_{33}^2 W3^2 - 4 I_{11} \cos(B_0) G H M - I_{33} W3}}{2 I_{11} \cos(B_0)}$$

$$A_0 = \frac{\sqrt{I_{33}^2 W3^2 - 4 I_{11} \cos(B_0) G H M + I_{33} W3}}{2 I_{11} \cos(B_0)}$$

```
/* 数値解析 */
I33:I[33]=M*R^2/2;
I11:I[11]=M*(R^2/4+H^2);
ANSA01:subst([I33,I11],ANSA0);
EQUA0:rhs(EQU3)=0;
EQUA1:rhs(EQ1201)=0;
EQUA11:solve(subst([b(t)=B[0]],EQUA1),
E[0])[1];
EQUA2:lhs(EQA3)=first(rhs(EQA3));
EQUA21:subst([b(t)=B[0]],EQUA2);
EQUA01:subst([EQUA11,EQUA21,I33,I11],
EQUA0);
ANSU123:solve(EQUA01,u(t));
U1:(rhs(ANSU123[1]));
U2:(rhs(ANSU123[2]));
U3:(rhs(ANSU123[3]));
EQDIF1N:subst([I33,I11],EQDIF1);
EQDIF2N:subst([I33,I11],EQDIF2);
NCTR:[diff(a(t),t,2)=DDA,diff(a(t),t,1)=
DA,diff(b(t),t,2)=DDB,diff(b(t),t,1)=DB];
subst([NCTR],EQDIF1N);
EQRK11:subst([b(t)=BB],%);
subst([NCTR],EQDIF2N);
EQRK21:subst([b(t)=BB],%);
LI:[G=9.8,R=1,H=0.25,B[0]=0.3,W3=12];
subst([I33,I11],W31);
sqrt(%);
subst([LI],rhs(%));
A01:subst(LI,factor(rhs(ANSA01[1])));
A02:subst(LI,factor(rhs(ANSA01[2])));
load("dynamics");
EQRK111:subst(LI,rhs(EQRK11));
EQRK211:subst(LI,rhs(EQRK21));
B01:subst(LI,B[0]);
U21:float(subst(LI,U1));
U31:subst(LI,U2);
U11:subst(LI,U3);
B02:acos(U21);
B03:acos(U31);
H1:subst(LI,H);
B11:subst(LI,B[0]);
subst([U[1]=U11,U[2]=U21,U[3]=U31,I11],
rhs(T4));
T11:float(subst(LI,%));
subst([I33,I11],rhs(DB1));
DB11:subst([LI],%)+B11;
sol:rk([EQRK111,EQRK211,DA,DB],[DA,DB,
AA,BB],[0,0,0,B01],[t,0,5,0.005]);
```

```

list11:=[[sol[1][1],sol[1][2]]];
for J:2 thru 1000 do(list11:append
(list11,[[sol[J][1],sol[J][2]]]));
plot2d([A01, [discrete,list11]], [t,0,5],
[nticks,1000],[x,0,5],[y,0,3],[legend,
"A0","Exact da/dt"],[ylabel,"da/dt"],
[style,[lines,3,1],[lines,3,2]]);
list12:=[[sol[1][1],sol[1][5]]];
for J:2 thru 1000 do(list12:append(
list12,[[sol[J][1],sol[J][5]]]));
plot2d([[discrete, [[0,B01],[5,B01]]],
[discrete, [[0,B02],[5,B02]]],[discrete,
[[0,DB11],[5,DB11]]],[discrete,
[[T11,B11-0.05],[T11,B11+0.05]]],
[discrete,list12]], [t,0,5],[nticks,
1000],[x,0,5],[y,0.28,0.67],[xlabel,
"t"],[ylabel,"b"],[legend,"Lower b",
"Upper b","B0+dB","Tw","Exact b"],
[style,[lines,3,1],[lines,3,2],
[lines,3,3],[lines,3,4],[lines,3,5]]);
list13:=[[H1*sin(B01)*cos(0),H1*sin(B01)
*sin(0)]];
for J:2 thru 1000 do(list13:append(list13,
[[H1*sin(sol[J][5])*cos(sol[J][4),
H1*sin(sol[J][5])*sin(sol[J][4])]]));
plot2d([discrete,list13],[x,-0.15,0.15],
[y,-0.15,0.15],[legend,"Locus"],
[style,[lines,3,1]]);

```

こまとして質量： M 、半径： R の円板とし、円板の軸の長さ： H とすると、 I_{33} 、 I_{11} は下記となる。

$$I_{33} = \frac{MR^2}{2}, \quad I_{11} = M \left(\frac{R^2}{4} + H^2 \right)$$

(3.3.60) 式、(3.3.61) 式を用いてルンゲ・クッタ法による数値計算を行う。計算の条件として、 $G = 9.8$ 、 $R = 1$ 、 $H = 0.25$ 、 $B_0 = 0.3$ とし、 $W3$ を種々変えて数値計算した結果を以下に示す。ここで旋回角速度： $\frac{d}{dt} a(t)$ では A_0 との比較を、 b では(3.3.49)式の根から得られる運動範囲との比較、(3.3.59)式の章動： dB との比較、および(3.3.50)式による首ふり周期： T との比較を示す。また、こま位置の軌跡を以下に示す。(3.3.58)式の安定条件は計算条件から $W3 > 3.42$ となり、数値計算として $W3 = 4, 6, 12 \text{ 1/sec}$ とした。結果として、(3.3.49)式の根から得られる運動範囲と首ふり周期： T の結果は数値計算結果とよく一致している。章動： dB との比較では $W3$ が大きい場合(章動が小さい場合)によく一致している。

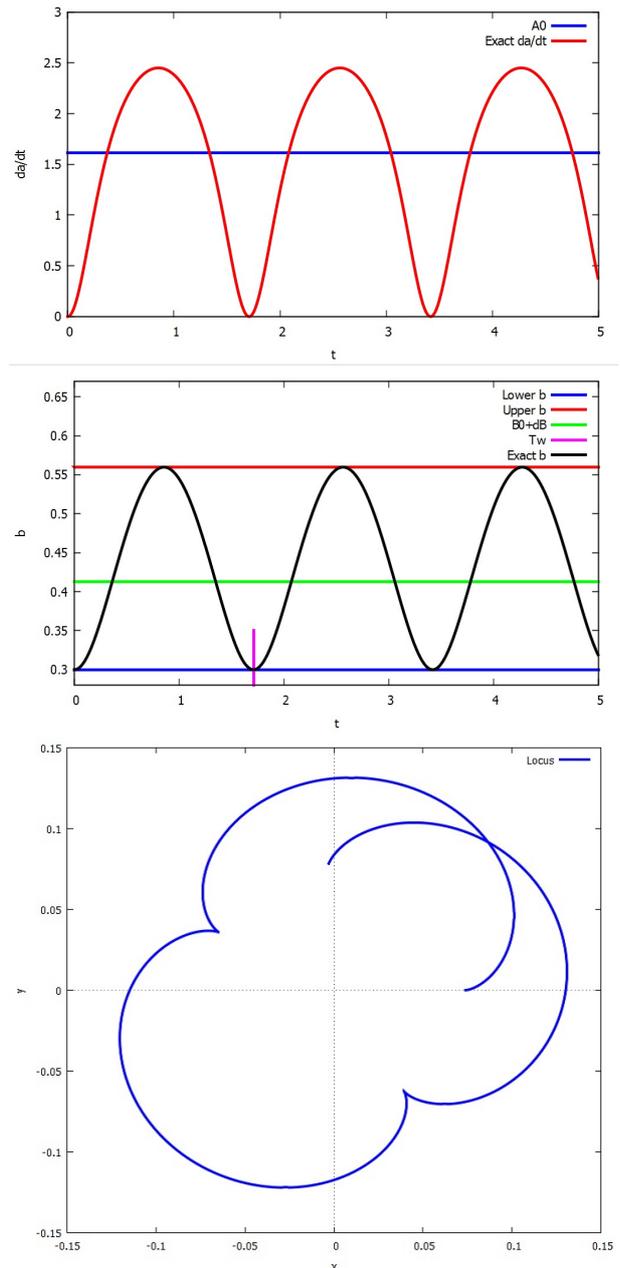


図 3.3.10: $W3=4 \text{ 1/sec}$

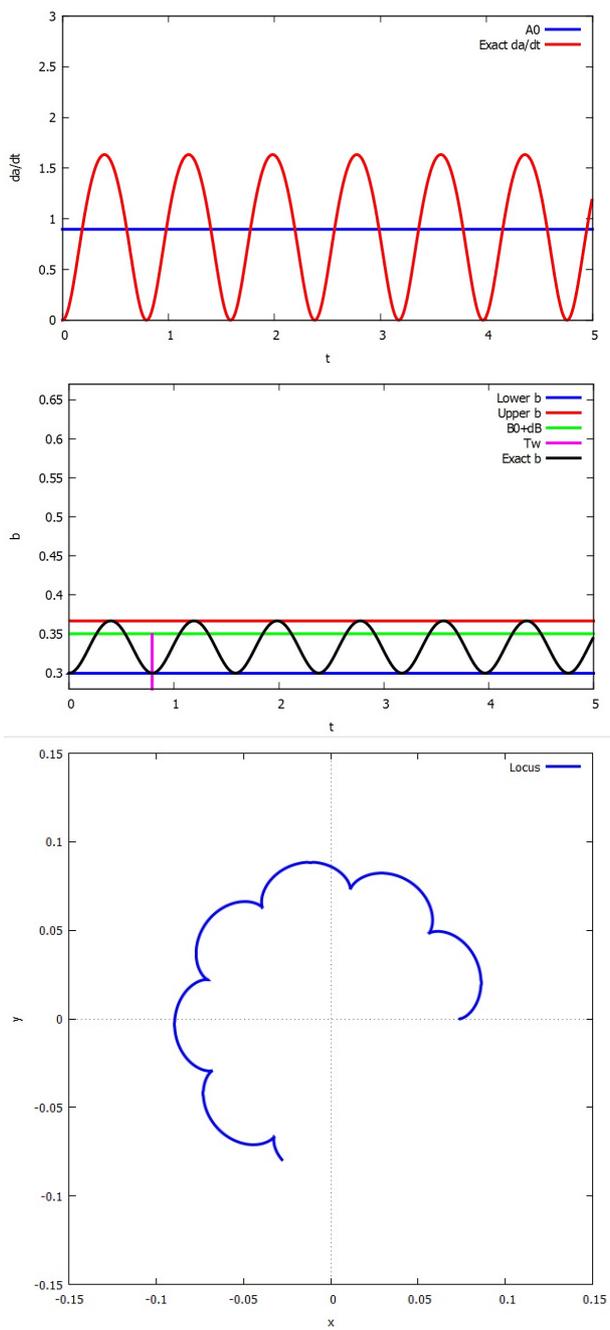


図 3.3.11: $W3=6$ 1/sec

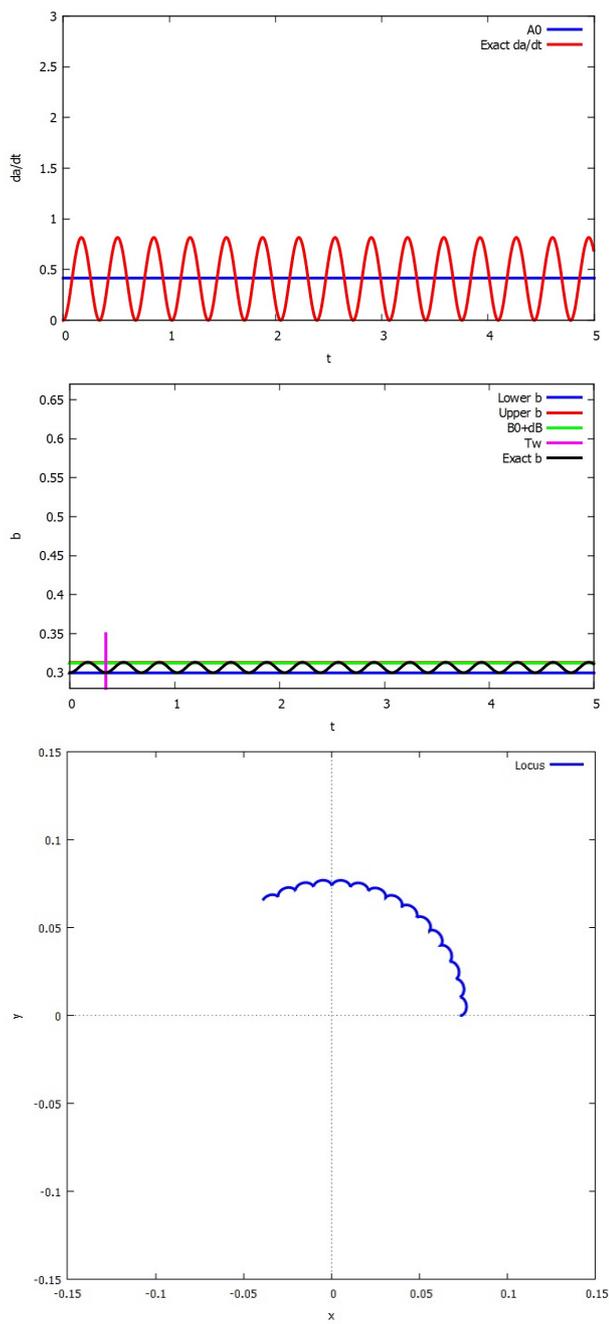


図 3.3.12: $W3=12$ 1/sec

追記：円板の慣性モーメント

```
kill(all);
DI1:dI=\rho*r^2*dr*(r*dp);
I='integrate('integrate(\rho*r^3,r,0,R),
  p,0,2*pi);
I1:ev(%,integrate);
M1:M=\rho*pi*R^2;
M11:solve(M1,\rho)[1];
subst([M11],I1);
DI2:dI=\rho*(r*sin(p))^2*dr*(r*dp);
I='integrate('integrate(\rho*r^3*
  sin(p)^2,r,0,R),p,0,2*pi);
I2:ev(%,integrate);
subst([M11],I2);
```

円板の慣性モーメントを求める。円板の質量： M は、要素体の密度を ρ とすると、

$$M = \pi \rho R^2$$

円板の面に垂直な軸に対する慣性モーメントの要素は、

$$dI = dp dr r^3 \rho$$

これを積分し、円板の面に垂直な軸に対する慣性モーメントは、

$$I = 2\pi \int_0^R r^3 dr \rho = \frac{\pi \rho R^4}{2}$$

質量： M で表現すると、

$$I = \frac{M R^2}{2}$$

円板の面に軸を含んだ慣性モーメントの要素は、

$$dI = dp dr \sin(p)^2 r^3 \rho$$

これを積分し、円板の面に軸を含んだ慣性モーメントは、

$$I = \int_0^{2\pi} \sin(p)^2 dp \int_0^R r^3 dr \rho = \frac{\pi \rho R^4}{4}$$

質量： M で表現すると、

$$I = \frac{M R^2}{4}$$

例題 3.3.7 ジャイロコンパスの指北原理

ジャイロコンパスの指北原理とその地球の自転の影響について検討する。地球の自転角速度： W_E とし、緯度： LA におけるジャイロコンパスの動きを調べる。

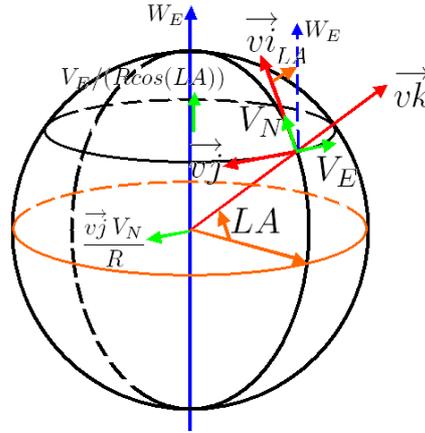


図 3.3.13: ジャイロコンパスの座標系

```
kill(all);
un:matrix([1],[1],[1]);
L2:matrix([I[11]*wd1(t)],[I[11]*wd2(t)],
[I[33]*(W3(t)+wd3(t))]);
W2:matrix([wd1(t)],[wd2(t)],[wd3(t)]);
```

```
N2:matrix([N[1]],[N[2]],[N[3]]);
EQL2:diff(L2,t,1)+(col(adjoint(append(
transpose(W2),transpose(L2),
transpose(un))),3))=N2;
```

ジャイロの角速度： \vec{w} のうちジャイロのスピンの角速度： $W3$ とし、スピンの運動が入らず、 $W3$ と比べ十分小さいジャイロの角速度： \vec{wd} とする。運動座標系として $W3$ が入らない運動座標系とする。このとき運動方程式は、(3.3.14) 式から、

$$\left(\frac{d}{dt} \vec{L}\right)_1 = \left(\frac{d}{dt} \vec{L}\right)_2 + \vec{wd} \times \vec{L} = \vec{N} \tag{3.3.62}$$

ここで、

$$\vec{L} = \begin{pmatrix} I_{11} wd1(t) \\ I_{11} wd2(t) \\ I_{33} (W3(t) + wd3(t)) \end{pmatrix}, \quad \vec{wd} = \begin{pmatrix} wd1(t) \\ wd2(t) \\ wd3(t) \end{pmatrix}$$

上式から、運動方程式は、

$$\begin{pmatrix} I_{11} \left(\frac{d}{dt} wd1(t)\right) + I_{33} wd2(t) (W3(t) + wd3(t)) - I_{11} wd2(t) wd3(t) \\ I_{11} \left(\frac{d}{dt} wd2(t)\right) - I_{33} wd1(t) (W3(t) + wd3(t)) + I_{11} wd1(t) wd3(t) \\ I_{33} \left(\frac{d}{dt} W3(t) + \frac{d}{dt} wd3(t)\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{pmatrix} \tag{3.3.63}$$

```

IJK:matrix([vi],[vj],[vk]);
E123D:matrix([e1D],[e2D],[e3D]);
E123DD:matrix([e1DD],[e2DD],[e3DD]);
E123:matrix([e1],[e2],[e3]);
TR1:matrix([cos(a(t)),-sin(a(t)),0],
            [sin(a(t)),+cos(a(t)),0],
            [0,0,1] );
TR2:matrix([cos(b(t)),0,sin(b(t))],
            [0,1,0],
            [-sin(b(t)),0,cos(b(t))] );
TR3:matrix([1,0,0],
            [0,1,0],
            [0,0,1]);
TR1.TR2;
%.TR3;
IJK1:IJK=%.E123;
VI1:lhs(IJK1)[1][1]=rhs(IJK1)[1][1];
VJ1:lhs(IJK1)[2][1]=rhs(IJK1)[2][1];
VK1:lhs(IJK1)[3][1]=rhs(IJK1)[3][1];
TR2.TR3;
E123D=%.E123;
E2D1:lhs(%) [2][1]=rhs(%) [2][1];
E123DD=TR3.E123;
E3DD1:lhs(%) [3][1]=rhs(%) [3][1];

```

```

W20:diff(a(t),t,1)*vk+diff(b(t),t,1)*e2D
+W[E]*(cos(LA)*vi+sin(LA)*vk);
W21:expand(subst([VK1,VI1,E2D1,E3DD1],
W20));
W22:matrix([coeff(W21,e1,1)],[coeff(W21,
e2,1)],[coeff(W21,e3,1)]);
W221:wd1(t)=W22[1][1];
W222:wd2(t)=W22[2][1];
W223:wd3(t)=W22[3][1];
W31:subst([b(t)=%pi/2+bd(t),cos(bd(t))=1,
sin(bd(t))=bd(t)],W22);
W311:wd1(t)=W31[1][1];
W312:wd2(t)=ev(W31[2][1],diff);
W313:wd3(t)=W31[3][1];

```

地球の自転角速度を上図に示す地球表面の座標系の \vec{vk}, \vec{vi} で表現し、角速度: \vec{wd} を前述のオイラー角の変換による静止座標系と運動座標系の関係式から求める。(3.3.9) 式で $c(t) = 0$ とし、地球の自転角速度: W_E を足すと、

$$\vec{wd} = W_E \left(\vec{vk} \sin(LA) + \vec{vi} \cos(LA) \right) + \left(\frac{d}{dt} b(t) \right) \vec{e2D} + \left(\frac{d}{dt} a(t) \right) \vec{vk} \quad (3.3.64)$$

ここで、(3.3.6) 式、(3.3.7) 式、(3.3.8) 式で $c(t) = 0$ として、

$$\begin{pmatrix} vi \\ vj \\ vk \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e3 \cos(a(t)) \sin(b(t)) + e1 \cos(a(t)) \cos(b(t)) - e2 \sin(a(t)) \\ e3 \sin(a(t)) \sin(b(t)) + e1 \sin(a(t)) \cos(b(t)) + e2 \cos(a(t)) \\ e3 \cos(b(t)) - e1 \sin(b(t)) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} e1D \\ e2D \\ e3D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e3 \sin(b(t)) + e1 \cos(b(t)) \\ e2 \\ e3 \cos(b(t)) - e1 \sin(b(t)) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} e1DD \\ e2DD \\ e3DD \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e1 \\ e2 \\ e3 \end{pmatrix}$$

上記の関係から、 $e1, e2, e3$ で整理し、角速度: \vec{wd} は、

$$\vec{wd} = \begin{pmatrix} -\sin(b(t)) W_E \sin(LA) + \cos(a(t)) \cos(b(t)) W_E \cos(LA) - \left(\frac{d}{dt} a(t) \right) \sin(b(t)) \\ \frac{d}{dt} b(t) - \sin(a(t)) W_E \cos(LA) \\ \cos(b(t)) W_E \sin(LA) + \cos(a(t)) \sin(b(t)) W_E \cos(LA) + \left(\frac{d}{dt} a(t) \right) \cos(b(t)) \end{pmatrix}$$

ジャイロはスピン軸を水平に保つように制御され、水平からのずれ: $bd(t)$ は小さいとすると、 $b(t) = \frac{\pi}{2} + bd(t)$, $\sin(bd(t)) = bd(t)$, $\cos(bd(t)) = 1$ とすると、上式は、

$$\vec{wd} = \begin{pmatrix} wd1(t) \\ wd2(t) \\ wd3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -W_E \sin(LA) - bd(t) \cos(a(t)) W_E \cos(LA) - \frac{d}{dt} a(t) \\ \frac{d}{dt} (bd(t) + \frac{\pi}{2}) - \sin(a(t)) W_E \cos(LA) \\ -bd(t) W_E \sin(LA) + \cos(a(t)) W_E \cos(LA) - bd(t) \left(\frac{d}{dt} a(t) \right) \end{pmatrix}$$

上式から、

$$\begin{aligned} wd1(t) &= -W_E \sin(LA) - bd(t) \cos(a(t)) W_E \cos(LA) - \frac{d}{dt} a(t) \\ wd2(t) &= \frac{d}{dt} bd(t) - \sin(a(t)) W_E \cos(LA) \\ wd3(t) &= -bd(t) W_E \sin(LA) + \cos(a(t)) W_E \cos(LA) - bd(t) \left(\frac{d}{dt} a(t) \right) \end{aligned} \quad (3.3.65)$$

(1) 指北原理

```
EQL3:subst([W311,W312,W313,N[1]=0,
N[3]=0],EQL2);
ev(lhs(EQL3)[1][1]=rhs(EQL3)[1][1],diff);
EQL31:subst([W[E]^2=0],%);
```

```
subst(['diff(bd(t),t,1)=0','diff(a(t),t,2)
=0','diff(a(t),t,1)=0'],%);
factor(%);
sin(a(t))*W[E]*cos(LA)=0;
A01:solve(%,a(t))[1];
```

(3.3.65) 式を (3.3.63) 式の 1 行目に代入し、整理すると、

$$\begin{aligned} I_{33} \left(\frac{d}{dt} bd(t) - \sin(a(t)) W_E \cos(LA) \right) &\left(-bd(t) W_E \sin(LA) + \cos(a(t)) W_E \cos(LA) - bd(t) \left(\frac{d}{dt} a(t) \right) + W3(t) \right) \\ - I_{11} \left(\frac{d}{dt} bd(t) - \sin(a(t)) W_E \cos(LA) \right) &\left(-bd(t) W_E \sin(LA) + \cos(a(t)) W_E \cos(LA) - bd(t) \left(\frac{d}{dt} a(t) \right) \right) \\ + I_{11} \left(-\cos(a(t)) \left(\frac{d}{dt} bd(t) \right) W_E \cos(LA) + bd(t) \sin(a(t)) \left(\frac{d}{dt} a(t) \right) W_E \cos(LA) - \frac{d^2}{dt^2} a(t) \right) &= 0 \end{aligned} \quad (3.3.66)$$

定常状態で、 $\frac{d}{dt} bd(t) = 0$, $\frac{d}{dt} a(t) = 0$, $\frac{d^2}{dt^2} a(t) = 0$ とし、地球の自転角速度: W_E は小さいので、 $W_E^2 = 0$ とすると、

$$\begin{aligned} \sin(a(t)) W_E \cos(LA) &\left(I_{33} bd(t) W_E \sin(LA) - I_{11} bd(t) W_E \sin(LA) - I_{33} \cos(a(t)) W_E \cos(LA) \right. \\ &\left. + I_{11} \cos(a(t)) W_E \cos(LA) - I_{33} W3(t) \right) = 0 \end{aligned}$$

上式から、

$$\sin(a(t)) W_E \cos(LA) = 0$$

上式から、 $a(t) = 0$ となり、定常状態で、ジャイロのスピンの北を向く。

(2) 軸の微小運動

```
EQL33:lhs(EQL3)[3][1]=rhs(EQL3)[3][1];
-bd(t)*W[E]*sin(LA)+cos(a(t))*W[E]*
cos(LA)-bd(t)*('diff(a(t),t,1))
+W3(t)=D[3];
W3D3:solve(%,W3(t))[1];
subst([W3D3,sin(a(t))=a(t),cos(a(t))=1],
EQL31);
subst([W[E]^2=0],expand(%));
```

```
I[11]*bd(t)*('diff(bd(t),t,1))*W[E]*
sin(LA)-2*I[11]*('diff(bd(t),t,1))*W[E]
*cos(LA)-D[3]*I[33]*a(t)*W[E]*
cos(LA)+I[11]*bd(t)*('diff(a(t),t,1))
*('diff(bd(t),t,1))+D[3]*I[33]
*('diff(bd(t),t,1))-I[11]*('diff(a(t),
t,2))=0;
EQL41:-D[3]*I[33]*a(t)*W[E]*
cos(LA)+D[3]*I[33]*('diff(bd(t),t,1))
-I[11]*('diff(a(t),t,2))=0;
ev(lhs(EQL3)[2][1]=rhs(EQL3)[2][1],diff);
subst([W3D3,sin(a(t))=a(t),cos(a(t))=1],
%);
```

```

subst([W[E]^2=0],expand(%));
2*I[11]*bd(t)*(diff(a(t),t,1))*W[E]*
sin(LA)+D[3]*I[33]*W[E]*sin(LA)+I[11]*
bd(t)^2*(diff(a(t),t,1))*W[E]*cos(LA)
-2*I[11]*(diff(a(t),t,1))*W[E]*cos(LA)
+D[3]*I[33]*bd(t)*W[E]*cos(LA)+I[11]
*(diff(bd(t),t,2))+I[11]*bd(t)
*(diff(a(t),t,1))^2+D[3]*I[33]
*(diff(a(t),t,1))=N[2];

```

```

+D[3]*I[33]*W[E]*sin(LA)+D[3]*I[33]*bd(t)
*W[E]*cos(LA)+I[11]*(diff(bd(t),t,2))
+D[3]*I[33]*(diff(a(t),t,1))=N[2];
%-D[3]*I[33]*W[E]*sin(LA);
lhs(%)=-bd(t)*M*G*L;
EQL42:=-rhs(%);

```

(3.3.65) 式を (3.3.63) 式の 3 行目に代入し、

$$I_{33} \left(\frac{d}{dt} \left(-bd(t) W_E \sin(LA) + \cos(a(t)) W_E \cos(LA) - bd(t) \left(\frac{d}{dt} a(t) \right) \right) + \frac{d}{dt} W_3(t) \right) = 0$$

上式を積分し、左辺は一定値： D_3 となる。

$$-bd(t) W_E \sin(LA) + \cos(a(t)) W_E \cos(LA) - bd(t) \left(\frac{d}{dt} a(t) \right) + W_3(t) = D_3$$

$W_3(t)$ を求めると、

$$W_3(t) = bd(t) W_E \sin(LA) - \cos(a(t)) W_E \cos(LA) + bd(t) \left(\frac{d}{dt} a(t) \right) + D_3 \quad (3.3.67)$$

(3.3.63) 式の 1 行目である (3.3.66) 式に上式を代入し、定常状態からの微小運動を考えるので、 $\cos(a(t)) = 1$, $\sin(a(t)) = a(t)$ とし、地球の自転角速度： W_E は小さいので、 $W_E^2 = 0$ とすると

$$I_{11} bd(t) \left(\frac{d}{dt} bd(t) \right) W_E \sin(LA) - 2 I_{11} \left(\frac{d}{dt} bd(t) \right) W_E \cos(LA) - D_3 I_{33} a(t) W_E \cos(LA) \\ + I_{11} bd(t) \left(\frac{d}{dt} a(t) \right) \left(\frac{d}{dt} bd(t) \right) + D_3 I_{33} \left(\frac{d}{dt} bd(t) \right) - I_{11} \left(\frac{d^2}{dt^2} a(t) \right) = 0$$

高次の微小項を省略し、 $I_{33} \gg I_{11}$ であること、 W_E は十分小さいことから、

$$-D_3 I_{33} a(t) W_E \cos(LA) + D_3 I_{33} \left(\frac{d}{dt} bd(t) \right) - I_{11} \left(\frac{d^2}{dt^2} a(t) \right) = 0 \quad (3.3.68)$$

(3.3.65) 式を (3.3.63) 式の 2 行目に代入し、更に (3.3.67) 式を代入し、定常状態からの微小運動を考えるので、 $\cos(a(t)) = 1$, $\sin(a(t)) = a(t)$ とし、地球の自転角速度： W_E は小さいので、 $W_E^2 = 0$ とすると

$$2 I_{11} bd(t) \left(\frac{d}{dt} a(t) \right) W_E \sin(LA) + D_3 I_{33} W_E \sin(LA) + I_{11} bd(t)^2 \left(\frac{d}{dt} a(t) \right) W_E \cos(LA) \\ - 2 I_{11} \left(\frac{d}{dt} a(t) \right) W_E \cos(LA) + D_3 I_{33} bd(t) W_E \cos(LA) + I_{11} \left(\frac{d^2}{dt^2} bd(t) \right) \\ + I_{11} bd(t) \left(\frac{d}{dt} a(t) \right)^2 + D_3 I_{33} \left(\frac{d}{dt} a(t) \right) = N_2$$

高次の微小項を省略し、 $I_{33} \gg I_{11}$ であること、 W_E は十分小さいことから、

$$D_3 I_{33} W_E \sin(LA) + D_3 I_{33} bd(t) W_E \cos(LA) + I_{11} \left(\frac{d^2}{dt^2} bd(t) \right) + D_3 I_{33} \left(\frac{d}{dt} a(t) \right) = N_2$$

定数項を右辺に移動し、

$$D_3 I_{33} bd(t) W_E \cos(LA) + I_{11} \left(\frac{d^2}{dt^2} bd(t) \right) + D_3 I_{33} \left(\frac{d}{dt} a(t) \right) = N_2 - D_3 I_{33} W_E \sin(LA)$$

ジャイロを水平に保つモーメントとして、振り子のモーメント： $N_2 - D_3 I_{33} W_E \sin(LA) = -bd(t) G L M$ とすると、

$$bd(t) G L M + D_3 I_{33} bd(t) W_E \cos(LA) + I_{11} \left(\frac{d^2}{dt^2} bd(t) \right) + D_3 I_{33} \left(\frac{d}{dt} a(t) \right) = 0 \quad (3.3.69)$$

```

EQL41;
EQL42;
AT1:a(t)=A[0]*%e^(%i*\omega*t);
BT1:bd(t)=BD[0]*%e^(%i*\omega*t);
subst([AT1,BT1],EQL41);
ev(%,diff);
EQL51:expand(%%e^(%i*\omega*t));
subst([AT1,BT1],EQL42);
ev(%,diff);
EQL52:expand(%%e^(%i*\omega*t));
EQL51;
EQL52;
partfrac(EQL51,A[0]);
EQL53:%-%i*BD[0]*D[3]*I[33]*omega;

```

```

partfrac(EQL52,BD[0]);
EQL54:%-+%i*A[0]*D[3]*I[33]*omega;
EQL53*EQL54/A[0]/BD[0];
lhs(%) - rhs(%) = 0;
expand(-%/I[11]^2);
(D[3]*I[33]*W[E]*G*L*cos(LA)*M)/I[11]^2
-(omega^2*G*L*M)/I[11]+(D[3]^2*I[33]^2
*W[E]^2*cos(LA)^2)/I[11]^2-(2*D[3]*I[33]
*omega^2*W[E]*cos(LA))/I[11]+omega^4
-(D[3]^2*I[33]^2*omega^2)/I[11]^2=0;
(D[3]*I[33]*W[E]*G*L*cos(LA)*M)/I[11]^2
+(D[3]^2*I[33]^2*W[E]^2*cos(LA)^2)/
I[11]^2+omega^4-(D[3]^2*I[33]^2*
omega^2)/I[11]^2=0;

```

振動運動であるから、下記のように置く。

$$a(t) = A_0 e^{i\omega t}, \quad bd(t) = BD_0 e^{i\omega t}$$

上式を (3.3.68) 式、(3.3.69) 式に代入し、

$$A_0 (I_{11} \omega^2 - D_3 I_{33} W_E \cos(LA)) = -i BD_0 D_3 I_{33} \omega$$

$$BD_0 (GLM + D_3 I_{33} W_E \cos(LA) - I_{11} \omega^2) = -i A_0 D_3 I_{33} \omega$$

上式から、 A_0, BD_0 を消去し、

$$(I_{11} \omega^2 - D_3 I_{33} W_E \cos(LA)) (GLM + D_3 I_{33} W_E \cos(LA) - I_{11} \omega^2) = -D_3^2 I_{33}^2 \omega^2$$

整理すると、

$$\frac{D_3 I_{33} W_E G L \cos(LA) M}{I_{11}^2} - \frac{\omega^2 G L M}{I_{11}} + \frac{D_3^2 I_{33}^2 W_E^2 \cos(LA)^2}{I_{11}^2} - \frac{2 D_3 I_{33} \omega^2 W_E \cos(LA)}{I_{11}} + \omega^4 - \frac{D_3^2 I_{33}^2 \omega^2}{I_{11}^2} = 0$$

上式で、 $D_3 I_{33}$ が大きいので、微小項を省略し、

$$\frac{D_3 I_{33} W_E G L \cos(LA) M}{I_{11}^2} + \frac{D_3^2 I_{33}^2 W_E^2 \cos(LA)^2}{I_{11}^2} + \omega^4 - \frac{D_3^2 I_{33}^2 \omega^2}{I_{11}^2} = 0 \quad (3.3.70)$$

```

subst([\omega^4=OM2^2,\omega^2=OM2],%);
AOM1:solve(%,OM2);
AOM2:-4*D[3]*I[11]^2*I[33]*W[E]*G*L*
cos(LA)*M-4*D[3]^2*I[11]^2*I[33]^2
*W[E]^2*cos(LA)^2+D[3]^4*I[33]^4;
AOM2:expand(AOM2/(D[3]^4*I[33]^4));
CC1:c=-(4*I[11]^2*W[E]*G*L*cos(LA)*M)/
(D[3]^3*I[33]^3)-(4*I[11]^2*W[E]^2
*cos(LA)^2)/(D[3]^2*I[33]^2);
CCTY:taylor(sqrt(1+c),c,0,1);
assume(I[11]>0,I[33]>0,D[3]>0,W[E]>0,
cos(LA)>0);

```

```

OM2=-(D[3]^2*I[33]^2*CCTY-D[3]^2*I[33]^2)
/(2*I[11]^2);
subst([CC1],%);
factor(%) ;
T=2*%pi/sqrt(rhs(%) );
W[E]*cos(LA)*(G*L*M+D[3]*I[33]*W[E]
*cos(LA));
expand(%%/(D[3]*I[33]*W[E]^2*cos(LA)^2));
T=2*%pi*sqrt(D[3])*sqrt(I[33])/
sqrt(D[3]*I[33]*W[E]^2*cos(LA)^2);
OM2=(D[3]^2*I[33]^2*CCTY+D[3]^2*I[33]^2)
/(2*I[11]^2);

```

```

subst([CC1],%);
subst([cos(LA)=0],%);
factor(%);
T=2*pi/sqrt(rhs(%));

```

上式から ω^2 を求めると、

$$\omega^2 = -\frac{\sqrt{-4 D_3 I_{11}^2 I_{33} W_E G L \cos(LA) M - 4 D_3^2 I_{11}^2 I_{33}^2 W_E^2 \cos(LA)^2 + D_3^4 I_{33}^4 - D_3^2 I_{33}^2}}{2 I_{11}^2} \quad (3.3.71)$$

$$\omega^2 = \frac{\sqrt{-4 D_3 I_{11}^2 I_{33} W_E G L \cos(LA) M - 4 D_3^2 I_{11}^2 I_{33}^2 W_E^2 \cos(LA)^2 + D_3^4 I_{33}^4 + D_3^2 I_{33}^2}}{2 I_{11}^2} \quad (3.3.72)$$

(3.3.71) 式で平方根の中を Taylor 展開を活用し、微小項を 2 次の項まで残し、整理すると、

$$\omega^2 = -\frac{D_3^2 I_{33}^2 \left(-\frac{4 I_{11}^2 W_E G L \cos(LA) M}{D_3^3 I_{33}^3} - \frac{4 I_{11}^2 W_E^2 \cos(LA)^2}{D_3^2 I_{33}^2} \right)}{4 I_{11}^2} = \frac{W_E \cos(LA) (G L M + D_3 I_{33} W_E \cos(LA))}{D_3 I_{33}}$$

上式から周期は、

$$T_1 = \frac{2 \pi \sqrt{D_3} \sqrt{I_{33}}}{\sqrt{W_E} \sqrt{\cos(LA)} \sqrt{G L M + D_3 I_{33} W_E \cos(LA)}} = \frac{2 \pi}{W_E \cos(LA) \left(\frac{G L M}{D_3 I_{33} W_E \cos(LA)} + 1 \right)}$$

(3.3.72) 式で平方根の中を Taylor 展開を活用し、微小項を 2 次の項まで残し、整理すると、

$$\omega^2 = \frac{D_3^2 I_{33}^2 \left(-\frac{4 I_{11}^2 W_E G L \cos(LA) M}{D_3^3 I_{33}^3} - \frac{4 I_{11}^2 W_E^2 \cos(LA)^2}{D_3^2 I_{33}^2} \right)}{4 I_{11}^2} + \frac{D_3^2 I_{33}^2}{I_{11}^2} = \frac{D_3^2 I_{33}^2}{I_{11}^2}$$

上式から周期は、

$$T_2 = \frac{2 \pi I_{11}}{D_3 I_{33}}$$

ここで、 T_1 は長い周期で、 T_2 は短い周期である。

(3) 航路誤差

飛行機のように速度が速い時、速度に基づく角速度を考慮する必要がでる。地球の半径: R とし、北行速度: V_N 、東行速度: V_E とする。北行速度: V_N により、西方向: \vec{v}_i に V_N/R の角速度が発生する。また、東行速度: V_E により、地軸回転方向: \vec{v}_k に $V_E/(R\cos(LA))$ の角速度が発生する。

```
W40:diff(a(t),t,1)*vk+diff(b(t),t,1)*e2D
+W[E]*(cos(LA)*vi+sin(LA)*vk)
+V[E]/R/cos(LA)*(cos(LA)*vi
+sin(LA)*vk)+V[N]/R*vj;
W41:expand(subst([VK1,VI1,VJ1,E2D1,
E3DD1],W40));
matrix([coeff(W41,e1,1)],[coeff(W41,e2,
1)],[coeff(W41,e3,1)]);
W42:subst([b(t)=%pi/2+bd(t),cos(bd(t))=1
,sin(bd(t))=bd(t)],%);
W421:wd1(t)=W42[1][1];
W422:wd2(t)=W42[2][1];
```

```
W423:wd3(t)=W42[3][1];
EQL4:subst([W421,W422,W423,N[1]=0,
N[3]=0],EQL2);
ev(lhs(EQL4)[1][1]=rhs(EQL4)[1][1],diff);
subst(['diff(bd(t),t,1)=0','diff(a(t),t,
2)=0','diff(a(t),t,1)=0'],%);
factor(%);
sin(a(t))*W[E]*cos(LA)*R-cos(a(t))*V[N]
+sin(a(t))*V[E]=0;
solve(%,sin(a(t)))[1];
%/cos(a(t));
tan(a(t))=rhs(%)
```

以上から、上記の速度による角速度を (3.3.64) 式の角速度に付加して、

$$\vec{wd} = \frac{\vec{v}_j V_N}{R} + \frac{V_E \left(\vec{v}_k \sin(LA) + \vec{v}_i \cos(LA) \right)}{\cos(LA) R} + W_E \left(\vec{v}_k \sin(LA) + \vec{v}_i \cos(LA) \right) + \left(\frac{d}{dt} b(t) \right) \vec{e2D} + \left(\frac{d}{dt} a(t) \right) \vec{v}_k$$

上記の関係から、 $e1, e2, e3$ で整理し、ジャイロはスピン軸を水平に保つように制御され、水平からのずれ: $bd(t)$ は小さいとすると、 $b(t) = \frac{\pi}{2} + bd(t)$, $\sin(bd(t)) = bd(t)$, $\cos(bd(t)) = 1$ とすると、上式は、角速度: \vec{wd} は、

$$\vec{wd} = \begin{pmatrix} wd1(t) \\ wd2(t) \\ wd3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{bd(t) \sin(a(t)) V_N}{R} - \frac{V_E \sin(LA)}{\cos(LA) R} - \frac{bd(t) \cos(a(t)) V_E}{R} - W_E \sin(LA) - bd(t) \cos(a(t)) W_E \cos(LA) - \frac{d}{dt} a(t) \\ \frac{\cos(a(t)) V_N}{R} - \frac{\sin(a(t)) V_E}{\cos(LA) R} - \sin(a(t)) W_E \cos(LA) + \frac{d}{dt} (bd(t) + \frac{\pi}{2}) \\ \frac{\sin(a(t)) V_N}{R} - \frac{bd(t) V_E \sin(LA)}{\cos(LA) R} + \frac{\cos(a(t)) V_E}{R} - bd(t) W_E \sin(LA) + \cos(a(t)) W_E \cos(LA) - bd(t) \left(\frac{d}{dt} a(t) \right) \end{pmatrix}$$

上式を (3.3.63) 式の 1 行目に代入し、定常状態で、 $\frac{d}{dt} bd(t) = 0$, $\frac{d}{dt} a(t) = 0$, $\frac{d^2}{dt^2} a(t) = 0$ とし、整理すると、

$$\frac{(\sin(a(t)) W_E \cos(LA) R - \cos(a(t)) V_N + \sin(a(t)) V_E)}{(\cos(LA) R^2)} \times \left(I_{33} bd(t) W_E \cos(LA) \sin(LA) R - I_{11} bd(t) W_E \cos(LA) \sin(LA) R - I_{33} \cos(a(t)) W_E \cos(LA)^2 R + I_{11} \cos(a(t)) W_E \cos(LA)^2 R - I_{33} W_3(t) \cos(LA) R - I_{33} \sin(a(t)) \cos(LA) V_N + I_{11} \sin(a(t)) \cos(LA) V_N + I_{33} bd(t) V_E \sin(LA) - I_{11} bd(t) V_E \sin(LA) - I_{33} \cos(a(t)) V_E \cos(LA) + I_{11} \cos(a(t)) V_E \cos(LA) \right) = 0$$

上式から、

$$\sin(a(t)) W_E \cos(LA) R - \cos(a(t)) V_N + \sin(a(t)) V_E = 0$$

航路誤差は下記となる。

$$\tan(a(t)) = \frac{V_N}{W_E \cos(LA) R + V_E}$$

例題 3.3.8 円板（または円輪）のころがり

粗い水平面上で円板は滑らずに転がるとき、円板の運動、安定性について検討する。円板の半径： A 、質量： M 、慣性モーメント： I_{11}, I_{33} 、重力加速度： G とする。

(1) 運動方程式

下図左図はオイラー座標系の静止座標系（黒色）と運動座標系（赤色）を示す。下図右図に示すように、 $a(t)$ が正の方向に回転したとき、円板は左側に進行する。 $b(t)$ は円板が鉛直に立っている時の角度を零とし、上記の方向に進行するには、円板の回転軸： \vec{e}_3 は $b(t) = \pi/2 - bd(t)$ なる $bd(t)$ を定義する。

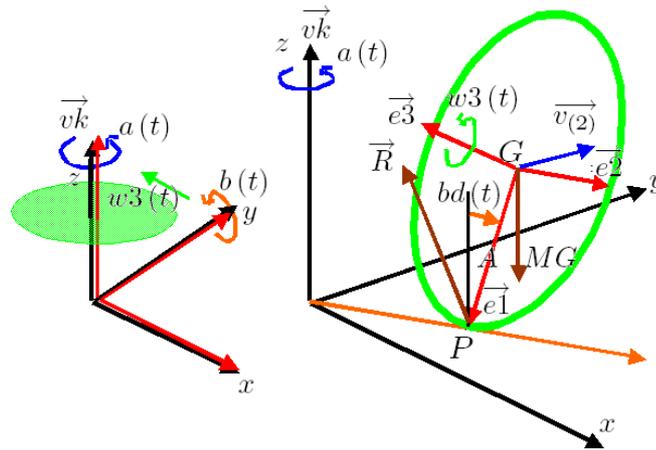


図 3.3.14: 円板の座標系

運動方程式は、静止座標系では、重心まわりの運動について、

$$M \frac{d}{dt} \vec{v}_{(1)} = \vec{F}, \quad \frac{d}{dt} \vec{L}_{(1)} = \vec{N}$$

運動座標系の運動方程式は、円板の $W_3 \vec{e}_3$ の回転を入れない角速度： $\vec{w}d$ を用いて (3.3.14) 式から、

$$M \left(\frac{d}{dt} \vec{v}_{(2)} + \vec{w}d \times \vec{v}_{(2)} \right) = \vec{F}, \quad \frac{d}{dt} \vec{L}_{(2)} + \vec{w}d \times \vec{L}_{(2)} = \vec{N} \tag{3.3.73}$$

```
kill(all);
un:matrix([1],[1],[1]);
IJK:matrix([vi],[vj],[vk]);
E123D:matrix([e1D],[e2D],[e3D]);
E123DD:matrix([e1DD],[e2DD],[e3DD]);
E123:matrix([e1],[e2],[e3]);
TR1:matrix([cos(a(t)), -sin(a(t)), 0 ],
            [sin(a(t)), +cos(a(t)), 0 ],
            [ 0, 0, 1 ] );
TR2:matrix([ cos(b(t)), 0, sin(b(t)) ],
            [ 0, 1, 0 ],
            [-sin(b(t)), 0, cos(b(t)) ] );
```

```
TR3:matrix([ 1, 0, 0 ],
           [ 0, 1, 0 ],
           [ 0, 0, 1 ] );
TR1.TR2;
%.TR3;
IJK1:IJK=%.E123;
VI1:lhs(IJK1)[1][1]=rhs(IJK1)[1][1];
VJ1:lhs(IJK1)[2][1]=rhs(IJK1)[2][1];
VK1:lhs(IJK1)[3][1]=rhs(IJK1)[3][1];
TR2.TR3;
E123D=%.E123;
E2D1:lhs(%) [2][1]=rhs(%) [2][1];
E123DD=TR3.E123;
E3DD1:lhs(%) [3][1]=rhs(%) [3][1];
```

座標系の関係式は、

$$\begin{pmatrix} v_i \\ v_j \\ v_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_3 \cos(a(t)) \sin(b(t)) + e_1 \cos(a(t)) \cos(b(t)) - e_2 \sin(a(t)) \\ e_3 \sin(a(t)) \sin(b(t)) + e_1 \sin(a(t)) \cos(b(t)) + e_2 \cos(a(t)) \\ e_3 \cos(b(t)) - e_1 \sin(b(t)) \end{pmatrix} \quad (3.3.74)$$

$$\begin{pmatrix} e_{1D} \\ e_{2D} \\ e_{3D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_3 \sin(b(t)) + e_1 \cos(b(t)) \\ e_2 \\ e_3 \cos(b(t)) - e_1 \sin(b(t)) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} e_{1DD} \\ e_{2DD} \\ e_{3DD} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \quad (3.3.75)$$

```
VV0:matrix([v1(t)], [v2(t)], [v3(t)]);
WW0:matrix([w1(t)], [w2(t)], [w3(t)]);
WDO:matrix([wd1(t)], [wd2(t)], [wd3(t)]);
WOO:matrix([0], [0], [W3(t)]);
AA0:matrix([A], [0], [0]);
WW0=WDO+WOO;
PP:VV0+(col(adjoint(append(transpose(WW0),
transpose(AA0), transpose(un))), 3))=0;
```

```
PP1:lhs(PP)[1][1]=0;
PP2:solve(lhs(PP)[2][1]=0, v2(t))[1];
PP3:solve(lhs(PP)[3][1]=0, v3(t))[1];
PP1D:diff(PP1, t, 1);
PP2D:diff(PP2, t, 1);
PP3D:diff(PP3, t, 1);
```

下記とすると、

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \\ w_3(t) \end{pmatrix}, \quad \vec{wd} = \begin{pmatrix} wd_1(t) \\ wd_2(t) \\ wd_3(t) \end{pmatrix}, \quad W_3 \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ W_3(t) \end{pmatrix}$$

上式から、 \vec{w} は、

$$\vec{w} = \vec{wd} + W_3(t) \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} wd_1(t) \\ wd_2(t) \\ W_3(t) + wd_3(t) \end{pmatrix}$$

円板と水平面が滑らない条件として、円板の水平面との接触点：Pにおける速度を求め、零と置くことで次式で得られる。

$$\vec{v}_{(2)} + \vec{w} \times A \vec{e}_1 = 0, \quad \text{ここで、} \quad \vec{v}_{(2)} = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ v_3(t) \end{pmatrix}, \quad \vec{A} = \begin{pmatrix} A \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.3.76)$$

上記の滑らない条件は、

$$\begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ v_3(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \\ w_3(t) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ w_3(t) A + v_2(t) \\ v_3(t) - w_2(t) A \end{pmatrix} = 0$$

上記から、

$$v_1(t) = 0, \quad v_2(t) = -w_3(t) A, \quad v_3(t) = w_2(t) A \quad (3.3.77)$$

```
W10:diff(a(t), t, 1)*vk+diff(b(t), t, 1)*e2D;
W11:expand(subst([VK1, E2D1], W10));
W12:matrix([coeff(W11, e1, 1),
[coeff(W11, e2, 1)], [coeff(W11, e3, 1)]];
subst([diff(b(t), t, 1)=-diff(bd(t), t, 1)],
W12);
```

```
W13:subst([b(t)=-bd(t)+%pi/2], %);
W131:wd1(t)=W13[1][1];
W132:wd2(t)=W13[2][1];
W133:wd3(t)=W13[3][1];
W131D:diff(W131, t, 1);
W132D:diff(W132, t, 1);
W133D:diff(W133, t, 1);
```

オイラー座標系の静止座標系と運動座標系の関係式は、

$$\vec{w}d = \left(\frac{d}{dt} b(t) \right) e2D + \left(\frac{d}{dt} a(t) \right) \vec{v}k$$

(3.3.74) 式と (3.3.75) 式から、

$$vk = e3 \cos(b(t)) - e1 \sin(b(t))$$

$$e2D = e2$$

上式の関係式から、

$$\begin{aligned} \vec{w}d = e2 \left(\frac{d}{dt} b(t) \right) - e1 \left(\frac{d}{dt} a(t) \right) \sin(b(t)) \\ + e3 \left(\frac{d}{dt} a(t) \right) \cos(b(t)) \end{aligned}$$

上記の関係から、 $e1, e2, e3$ で整理し、角速度: $\vec{w}d$ は、

$$\vec{w}d = \begin{pmatrix} -\left(\frac{d}{dt} a(t)\right) \sin(b(t)) \\ \frac{d}{dt} b(t) \\ \left(\frac{d}{dt} a(t)\right) \cos(b(t)) \end{pmatrix}$$

上式に $b(t) = \pi/2 - bd(t)$ を代入し、

$$\vec{w}d = \begin{pmatrix} -\left(\frac{d}{dt} a(t)\right) \cos(bd(t)) \\ -\frac{d}{dt} bd(t) \\ \left(\frac{d}{dt} a(t)\right) \sin(bd(t)) \end{pmatrix} \quad (3.3.78)$$

上式から、

$$\begin{aligned} wd1(t) &= -\left(\frac{d}{dt} a(t)\right) \cos(bd(t)) \\ wd2(t) &= -\frac{d}{dt} bd(t) \\ wd3(t) &= \left(\frac{d}{dt} a(t)\right) \sin(bd(t)) \end{aligned} \quad (3.3.79)$$

```
RR:matrix([R[1]], [R[2]], [R[3]]);
MG:-M*G*matrix([coeff(rhs(VK1),e1,1)],
  [coeff(rhs(VK1),e2,1)],
  [coeff(rhs(VK1),e3,1)]);
FF:subst([b(t)=-bd(t)+%pi/2],RR+MG);
NN:(col(adjoint(append(transpose(AA0),
  transpose(RR),transpose(un))),3));
LL:matrix([I[11]*w1(t)], [I[11]*w2(t)],
  [I[33]*w3(t)]);
EQF:M*(diff(VV0,t,1)+(col(adjoint(
  append(transpose(W13),transpose(VV0),
  transpose(un))),3)))=FF;
subst([PP1D,PP2D,PP3D,PP1,PP2,PP3],%);
subst([w1(t)=wd1(t),w2(t)=wd2(t)],%);
```

```
subst([W131D,W132D],%);
EQF0:expand(subst([W131,W132],%));
EQF1:lhs(EQF0)[1][1]=rhs(EQF0)[1][1];
EQF2:lhs(EQF0)[2][1]=rhs(EQF0)[2][1];
EQF3:lhs(EQF0)[3][1]=rhs(EQF0)[3][1];
EQF21:solve(EQF2,R[2])[1];
EQF31:solve(EQF3,R[3])[1];
EQN:diff(LL,t,1)+(col(adjoint(append(
  transpose(W13),transpose(LL),
  transpose(un))),3))=NN;
subst([PP1D,PP2D,PP3D,PP1,PP2,PP3],%);
subst([w1(t)=wd1(t),w2(t)=wd2(t)],%);
subst([W131D,W132D],%);
EQN0:expand(subst([W131,W132],%));
EQN1:lhs(EQN0)[1][1]=rhs(EQN0)[1][1];
EQN2:lhs(EQN0)[2][1]=rhs(EQN0)[2][1];
EQN3:lhs(EQN0)[3][1]=rhs(EQN0)[3][1];
EQN21:expand(subst([EQF31],lhs(EQN2)
  -rhs(EQN2)=0));
EQN31:expand(subst([EQF21],lhs(EQN3)
  -rhs(EQN3)=0));
```

反力: \vec{R} 、重力: $-MGv\vec{k}$ とすると、重心に作用する外力、モーメントは下記のように表現できる。

$$\vec{F} = \vec{R} - MGv\vec{k}, \quad \vec{N} = Ae\vec{1} \times \vec{R}$$

ここで、下記とすると、

$$\vec{R} = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix}, \quad -MGv\vec{k} = \begin{pmatrix} \sin(b(t)) GM \\ 0 \\ -\cos(b(t)) GM \end{pmatrix}$$

重心に作用する外力は、 $b(t) = \pi/2 - bd(t)$ を代入し、

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} \cos(bd(t)) GM + R_1 \\ R_2 \\ R_3 - \sin(bd(t)) GM \end{pmatrix} \quad (3.3.80)$$

重心に作用するモーメントは、

$$\vec{N} = \begin{pmatrix} A \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -R_3 A \\ R_2 A \end{pmatrix} \quad (3.3.81)$$

角運動量: $\vec{L}_{(2)}$ は、

$$\vec{L}_{(2)} = \begin{pmatrix} I_{11} w_1(t) \\ I_{11} w_2(t) \\ I_{33} w_3(t) \end{pmatrix} \quad (3.3.82)$$

以上から (3.3.73) 式の運動方程式は、

$$M \left(\frac{d}{dt} \vec{v}_{(2)} + \vec{w}_P \times \vec{v}_{(2)} \right) = \vec{F}$$

上式に (3.3.76) 式、(3.3.78) 式、(3.3.80) 式を代入し、

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{d}{dt} v_1(t) - v_3(t) \left(\frac{d}{dt} bd(t) \right) - v_2(t) \left(\frac{d}{dt} a(t) \right) \sin(bd(t)) \right) M \\ \left(\frac{d}{dt} v_2(t) + v_1(t) \left(\frac{d}{dt} a(t) \right) \sin(bd(t)) + v_3(t) \left(\frac{d}{dt} a(t) \right) \cos(bd(t)) \right) M \\ \left(\frac{d}{dt} v_3(t) + v_1(t) \left(\frac{d}{dt} bd(t) \right) - v_2(t) \left(\frac{d}{dt} a(t) \right) \cos(bd(t)) \right) M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(bd(t)) GM + R_1 \\ R_2 \\ R_3 - \sin(bd(t)) GM \end{pmatrix}$$

(3.3.77) 式を代入し、 $w_3(t)$ はそのまま残し、 $w_1(t) \rightarrow wd_1(t)$, $w_2(t) \rightarrow wd_2(t)$ に置き換えると、

$$\begin{pmatrix} \left(w_3(t) \left(\frac{d}{dt} a(t) \right) \sin(bd(t)) A - wd_2(t) \left(\frac{d}{dt} bd(t) \right) A \right) M \\ \left(wd_2(t) \left(\frac{d}{dt} a(t) \right) \cos(bd(t)) A - \left(\frac{d}{dt} w_3(t) \right) A \right) M \\ \left(\left(\frac{d}{dt} wd_2(t) \right) A + w_3(t) \left(\frac{d}{dt} a(t) \right) \cos(bd(t)) A \right) M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(bd(t)) GM + R_1 \\ R_2 \\ R_3 - \sin(bd(t)) GM \end{pmatrix}$$

(3.3.79) 式を代入し、

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{d}{dt} bd(t) \right)^2 AM + w_3(t) \left(\frac{d}{dt} a(t) \right) \sin(bd(t)) AM \\ - \left(\frac{d}{dt} w_3(t) \right) AM - \left(\frac{d}{dt} a(t) \right) \cos(bd(t)) \left(\frac{d}{dt} bd(t) \right) AM \\ w_3(t) \left(\frac{d}{dt} a(t) \right) \cos(bd(t)) AM - \left(\frac{d^2}{dt^2} bd(t) \right) AM \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(bd(t)) GM + R_1 \\ R_2 \\ R_3 - \sin(bd(t)) GM \end{pmatrix}$$

上式より、

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} bd(t) \right)^2 AM + w_3(t) \left(\frac{d}{dt} a(t) \right) \sin(bd(t)) AM &= \cos(bd(t)) GM + R_1 \\ - \left(\frac{d}{dt} w_3(t) \right) AM - \left(\frac{d}{dt} a(t) \right) \cos(bd(t)) \left(\frac{d}{dt} bd(t) \right) AM &= R_2 \\ w_3(t) \left(\frac{d}{dt} a(t) \right) \cos(bd(t)) AM - \left(\frac{d^2}{dt^2} bd(t) \right) AM &= R_3 - \sin(bd(t)) GM \end{aligned}$$

上式から、 R_2, R_3 を求め、

$$\begin{aligned} R_2 &= \left(-\frac{d}{dt} w_3(t) - \left(\frac{d}{dt} a(t) \right) \cos(bd(t)) \left(\frac{d}{dt} bd(t) \right) \right) AM \\ R_3 &= \left(\sin(bd(t)) G + \left(w_3(t) \left(\frac{d}{dt} a(t) \right) \cos(bd(t)) - \frac{d^2}{dt^2} bd(t) \right) A \right) M \end{aligned} \quad (3.3.83)$$

また、(3.3.73) 式の運動方程式は、

$$\frac{d}{dt} \vec{L}_{(2)} + \vec{w}_P \times \vec{L}_{(2)} = \vec{N}$$

上式に (3.3.78) 式、(3.3.81) 式、(3.3.82) 式を代入し、

$$\begin{pmatrix} I_{11} \left(\frac{d}{dt} w_1(t) \right) - I_{33} w_3(t) \left(\frac{d}{dt} bd(t) \right) - I_{11} w_2(t) \left(\frac{d}{dt} a(t) \right) \sin(bd(t)) \\ I_{11} \left(\frac{d}{dt} w_2(t) \right) + I_{11} w_1(t) \left(\frac{d}{dt} a(t) \right) \sin(bd(t)) + I_{33} w_3(t) \left(\frac{d}{dt} a(t) \right) \cos(bd(t)) \\ I_{33} \left(\frac{d}{dt} w_3(t) \right) + I_{11} w_1(t) \left(\frac{d}{dt} bd(t) \right) - I_{11} w_2(t) \left(\frac{d}{dt} a(t) \right) \cos(bd(t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -R_3 A \\ R_2 A \end{pmatrix}$$

(3.3.77) 式を代入し、 $w_3(t)$ はそのまま残し、 $w_1(t) \rightarrow wd_1(t)$, $w_2(t) \rightarrow wd_2(t)$ に置き換えると、

$$\begin{pmatrix} I_{11} \left(\frac{d}{dt} wd_1(t) \right) - I_{33} w_3(t) \left(\frac{d}{dt} bd(t) \right) - I_{11} wd_2(t) \left(\frac{d}{dt} a(t) \right) \sin(bd(t)) \\ I_{11} \left(\frac{d}{dt} wd_2(t) \right) + I_{11} wd_1(t) \left(\frac{d}{dt} a(t) \right) \sin(bd(t)) + I_{33} w_3(t) \left(\frac{d}{dt} a(t) \right) \cos(bd(t)) \\ I_{33} \left(\frac{d}{dt} w_3(t) \right) + I_{11} wd_1(t) \left(\frac{d}{dt} bd(t) \right) - I_{11} wd_2(t) \left(\frac{d}{dt} a(t) \right) \cos(bd(t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -R_3 A \\ R_2 A \end{pmatrix}$$

(3.3.79) 式を代入し、

$$\begin{pmatrix} 2 I_{11} \left(\frac{d}{dt} a(t) \right) \sin(bd(t)) \left(\frac{d}{dt} bd(t) \right) - I_{33} w_3(t) \left(\frac{d}{dt} bd(t) \right) - I_{11} \left(\frac{d^2}{dt^2} a(t) \right) \cos(bd(t)) \\ - I_{11} \left(\frac{d^2}{dt^2} bd(t) \right) - I_{11} \left(\frac{d}{dt} a(t) \right)^2 \cos(bd(t)) \sin(bd(t)) + I_{33} w_3(t) \left(\frac{d}{dt} a(t) \right) \cos(bd(t)) \\ I_{33} \left(\frac{d}{dt} w_3(t) \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -R_3 A \\ R_2 A \end{pmatrix}$$

上式より、

$$2 I_{11} \left(\frac{d}{dt} a(t) \right) \sin (bd(t)) \left(\frac{d}{dt} bd(t) \right) - I_{33} w_3(t) \left(\frac{d}{dt} bd(t) \right) - I_{11} \left(\frac{d^2}{dt^2} a(t) \right) \cos (bd(t)) = 0$$

$$- I_{11} \left(\frac{d^2}{dt^2} bd(t) \right) - I_{11} \left(\frac{d}{dt} a(t) \right)^2 \cos (bd(t)) \sin (bd(t)) + I_{33} w_3(t) \left(\frac{d}{dt} a(t) \right) \cos (bd(t)) = -R_3 A$$

$$I_{33} \left(\frac{d}{dt} w_3(t) \right) = R_2 A$$

上式に R_2, R_3 の関係式 : (3.3.83) 式を代入し、運動方程式は、

$$2 I_{11} \left(\frac{d}{dt} a(t) \right) \sin (bd(t)) \left(\frac{d}{dt} bd(t) \right) - I_{33} w_3(t) \left(\frac{d}{dt} bd(t) \right) - I_{11} \left(\frac{d^2}{dt^2} a(t) \right) \cos (bd(t)) = 0 \quad (3.3.84)$$

$$\sin (bd(t)) A G M - \left(\frac{d^2}{dt^2} bd(t) \right) A^2 M + w_3(t) \left(\frac{d}{dt} a(t) \right) \cos (bd(t)) A^2 M - I_{11} \left(\frac{d^2}{dt^2} bd(t) \right) - I_{11} \left(\frac{d}{dt} a(t) \right)^2 \cos (bd(t)) \sin (bd(t)) + I_{33} w_3(t) \left(\frac{d}{dt} a(t) \right) \cos (bd(t)) = 0 \quad (3.3.85)$$

$$\left(\frac{d}{dt} w_3(t) \right) A^2 M + \left(\frac{d}{dt} a(t) \right) \cos (bd(t)) \left(\frac{d}{dt} bd(t) \right) A^2 M + I_{33} \left(\frac{d}{dt} w_3(t) \right) = 0 \quad (3.3.86)$$

(2) 定常旋回

(3.3.84) 式、(3.3.85) 式、(3.3.86) 式に定常状態の条件 : $\frac{d}{dt^2} a(t) = 0, \frac{d}{dt} bd(t) = 0, \frac{d}{dt} w_3(t) = 0$ を代入すると、

```
EQN10:subst([diff(a(t),t,2)=0,diff(bd(t),t,1)=0],EQN1);
EQN210:subst([diff(a(t),t,2)=0,diff(bd(t),t,1)=0,diff(bd(t),t,2)=0],EQN21);
EQN310:subst([diff(w3(t),t,1)=0,diff(bd(t),t,1)=0],EQN31);
AL1:A*w3(t)=-L*diff(a(t),t,1);
AL2:solve(AL1,w3(t))[1];
V01:V[0]=L*diff(a(t),t,1);
V02:solve(V01,diff(a(t),t,1))[1];
I11:I[11]=M*A^2/4;
```

```
I33:I[33]=M*A^2/2;
assume(V[0]>0);
subst([AL2],EQN210);
subst([V02],%);
subst([I11,I33],%);
solve(%L);
%[2];
subst([cos(bd(t))=1,sin(bd(t))=B[0]],%);
subst([A=0],%);
```

(3.3.84) 式 = 0、(3.3.86) 式 = 0 となる。(3.3.85) 式から、下記の円板傾斜角 : $bd(t)$ 、旋回角速度 : $\frac{d}{dt} a(t)$ 、円板回転角速度 : $w_3(t)$ の関係式が得られる。

$$\sin (bd(t)) A G M + w_3(t) \left(\frac{d}{dt} a(t) \right) \cos (bd(t)) A^2 M - I_{11} \left(\frac{d}{dt} a(t) \right)^2 \cos (bd(t)) \sin (bd(t)) + I_{33} w_3(t) \left(\frac{d}{dt} a(t) \right) \cos (bd(t)) = 0 \quad (3.3.87)$$

円板が半径 : L で定常旋回するとし、旋回角速度 : $\frac{d}{dt} a(t)$ からと (3.3.77) 式から重心の移動速度 : V_0 を求める。

$$V_0 = \frac{2\pi L}{\frac{2\pi}{\frac{d}{dt} a(t)}} = L \frac{d}{dt} a(t), \quad V_0 = v_2(t) = -w_3(t) A$$

上式から下記の関係式が得られる。

$$w_3(t) A = - \left(\frac{d}{dt} a(t) \right) L$$

円板の慣性質量は、

$$I_{11} = \frac{A^2 M}{4}, \quad I_{33} = \frac{A^2 M}{2}$$

上記の関係式を (3.3.87) 式に代入すると、

$$-\frac{3V_0^2 \cos(\text{bd}(t)) AM}{2L} - \frac{V_0^2 \cos(\text{bd}(t)) \sin(\text{bd}(t)) A^2 M}{4L^2} + \sin(\text{bd}(t)) AGM = 0$$

上式から、定常旋回半径: L を求めると、

$$L = -\frac{V_0 \sqrt{4 \cos(\text{bd}(t)) \sin(\text{bd}(t))^2 AG + 9V_0^2 \cos(\text{bd}(t))^2} - 3V_0^2 \cos(\text{bd}(t))}{4 \sin(\text{bd}(t)) G} \quad (3.3.88)$$

$$L = \frac{V_0 \sqrt{4 \cos(\text{bd}(t)) \sin(\text{bd}(t))^2 AG + 9V_0^2 \cos(\text{bd}(t))^2} + 3V_0^2 \cos(\text{bd}(t))}{4 \sin(\text{bd}(t)) G} \quad (3.3.89)$$

(3.3.88) 式では $L < 0$ となるので省き、(3.3.89) 式で円板傾斜角: $\text{bd}(t)$ が小さいとすると、 $\sin(\text{bd}(t)) = B_0$, $\cos(\text{bd}(t)) = 1$ とすると、

$$L \approx \frac{V_0 \sqrt{4B_0^2 AG + 9V_0^2} + 3V_0^2}{4B_0 G} \approx \frac{3V_0^2}{2B_0 G}$$

(3) 直進時の安定性

```
subst([cos(bd(t))=1],EQN31);
EQN311:factor(first(lhs(%))+last(lhs(%))
=rhs(%);
subst([w3(t)=W3,sin(bd(t))=bd(t),
cos(bd(t))=1],EQN1);
first(lhs(%))+last(lhs(%)=rhs(%);
solve(%,diff(a(t),t,2))[1];
diff(a(t),t,1)=-(I[33]*bd(t)*W3)/I[11]
+C[ON];
EQN101:subst([C[ON]=0],%);
EQN211:subst([w3(t)=W3,EQN101,
sin(bd(t))=bd(t),cos(bd(t))=1],EQN21);
```

```
subst([bd(t)^2=0,bd(t)^3=0],expand(%));
partfrac(solve(%,diff(bd(t),t,2))[1],
bd(t));
lhs(%)-rhs(%)=0;
num(coeff(lhs(%,bd(t),1))>0;
W3^2>-last(lhs(%) /coeff(lhs(%),W3^2);
```

(3.3.86) 式で運動が小さいとし、高次項を省略すると、

$$\left(\frac{d}{dt} w_3(t)\right) (A^2 M + I_{33}) = 0$$

これから、 $w_3(t) = W_3$ と一定値となる。この結果を (3.3.84) 式に代入し、運動が小さいとして $\sin(\text{bd}(t)) = \text{bd}(t)$, $\cos(\text{bd}(t)) = 1$ とし、整理すると、

$$-I_{33} \left(\frac{d}{dt} \text{bd}(t)\right) W_3 + 2I_{11} \text{bd}(t) \left(\frac{d}{dt} a(t)\right) \left(\frac{d}{dt} \text{bd}(t)\right) - I_{11} \left(\frac{d^2}{dt^2} a(t)\right) = 0$$

高次項の微小項を省略し、

$$\frac{d^2}{dt^2} a(t) = -\frac{I_{33} \left(\frac{d}{dt} \text{bd}(t)\right) W_3}{I_{11}}$$

上式を積分し、初期条件として、 $\text{bd}(t) = 0$, $\frac{d}{dt} a(t) = 0$ であるから、積分定数 = 0 となり、

$$\frac{d}{dt} a(t) = -\frac{I_{33} \text{bd}(t) W_3}{I_{11}}$$

上記の結果を (3.3.85) 式に代入し、整理すると、

$$\frac{d^2}{dt^2} \text{bd}(t) = -\frac{\text{bd}(t) \left((I_{33} A^2 M + I_{33}^2) W_3^2 - I_{11} AGM \right)}{I_{11} A^2 M + I_{11}^2}$$

上記は振動運動方程式で、安定の条件は、

$$(I_{33} A^2 M + I_{33}^2) W_3^2 - I_{11} AGM > 0$$

$$W_3^2 > \frac{I_{11} AGM}{I_{33} A^2 M + I_{33}^2}$$

付録A よく使うMaximaの関数

演習問題を解くに当たり、Maximaを使った進め方とここでよく使うMaximaの関数の使用例の簡単な説明を以下に示す。詳細な説明はMaximaの解説書を参考願う。

A.1 wxMaximaを使用した演習の進め方

wxMaximaを使用して、入力、出力を会話形式で実行できる。しかし、トライアンドエラー的に一步一步進めていくので、入力結果を残しておいた方が便利である。まず、wxMaximaの設定を確認する。wxMaximaの編集→設定で、「Enterでセルを評価する」にチェックを入れる。ワードパッドやメモ帳などのテキストエディターでMaximaの実行テキストを作成しておき、この評価させたい部分をコピーし、wxMaximaに貼り付け、Enterで評価、実行できる。これを繰り返し、意図した結果となっているか確認しながら、作業を進めていくのがよいと思います。

また、最初の行には必ず、`kill(all);`を入力し、これまでの設定を解除しておく。ファイル内のリストの区切りはセミコロン ; であるので、必ず記述の最後に ; をつける。記述が長く、2行にまたがってもよいが、必ず記述の最後につける。

リスト、TEX出力

wxMaximaの数式出力結果を左クリックで網掛けし、右クリックで「コピー」を選択すると、wxMaximaの実行テキストが得られ、テキストエディターに貼り付けすることができる。

また、wxMaximaの数式出力結果を左クリックで網掛けし、右クリックで「Latexとしてコピー」を選択すると、Latexの実行テキストが得られる。TexworksなどのLatexエディターに貼り付けすることができ、数式を綺麗に出力できる文書作成フリーソフト： $\text{\LaTeX} 2_{\epsilon}$ の数式記述として使える。

A.2 宣言文

関数定義：`depends([f,g],[x,y])`

f, g が変数 x, y の関数であることを宣言する。現状の関数定義の確認：`dependencies;`、定義の削除：`remove(f, y);` が他にある

```
kill(all);
depends ([f, g], x);
depends ([r, s], [u, v]);
depends (u, t);
dependencies;
diff (r*s, u);
diff (r*s, t);
remove (r, dependency);
diff (r.s, t);
```

出力結果：

```
done
[f(x), g(x)]
[r(u, v), s(u, v)]
[u(t)]
[f(x), g(x), r(u, v), s(u, v), u(t)]
r (d/d u s) + (d/d u r) s
r (d/d u s) (d/d t u) + (d/d u r) s (d/d t u)
done
r. (d/d u s) (d/d t u)
```

変数宣言：`declare(x,A)`

変数 x に整数や実数などの属性 A を宣言する。

```
declare(i, integer);
declare(x, real);
declare(z, complex);
```

仮定 : assume(A)

変数の正負などの仮定を宣言する。現状の仮定の確認 : `facts()`、仮定の削除 : `forget(A)` が他にある。

```
assume(A>0);
assume(B>=2);
assume(C<1 and C>0);
facts();
forget(A>0);
```

出力結果 :

A.3 数式操作**数式の定義 : X:A=B**

数式 : $A = B$ を X として、入力、定義する。以降、 X で $A = B$ を呼び出せる。

```
X:x(t)=r(t)*cos(p(t));
Y:y(t)=r(t)*sin(p(t));
```

出力結果 :

$$x(t) = r(t) \cos(p(t))$$

$$y(t) = r(t) \sin(p(t))$$

右辺抽出 : rhs(X)

式の右辺を抽出する。そして、 XR として入力、定義する。

```
X:x(t)=r(t)*cos(p(t));
XR:rhs(X);
```

出力結果 :

$$x(t) = r(t) \cos(p(t)) \rightarrow r(t) \cos(p(t))$$

左辺抽出 : lhs(X)

式の左辺を抽出する。

```
X:x(t)=r(t)*cos(p(t));
lhs(X);
```

出力結果 :

$$x(t) = r(t) \cos(p(t)) \rightarrow x(t)$$

置換 : subst(B,A,EQ)

数式 : EQ の中に含まれる A を $\rightarrow B$ に置き換える。

```
X:x(t)=r(t)*cos(p(t));
subst(L,r(t),X);
```

出力結果 :

$$x(t) = r(t) \cos(p(t)) \rightarrow x(t) = \cos(p(t)) L$$

置換 : subst([A=B],EQ)

数式 : EQ の中に含まれる A を $\rightarrow B$ に置き換える。

```
X:x(t)=r(t)*cos(p(t));
subst([r(t)=L],X);
```

出力結果 :

$$x(t) = r(t) \cos(p(t)) \rightarrow x(t) = \cos(p(t)) L$$

因数分解 : `factor(EQ)`式 EQ を因数分解する。

```
EQ:2*x^2+x-6;
factor(EQ);
```

出力結果 :

$$2x^2 + x - 6 \rightarrow (x + 2)(2x - 3)$$

展開 : `expand(EQ)`式 EQ の和の積を展開し、積の和にする。

```
EQ1:(x+2)*(2*x-3);
expand(EQ1);
```

出力結果 :

$$(x + 2)(2x - 3) \rightarrow 2x^2 + x - 6$$

有理式の簡素化 : `ratsimp(EQ)`

展開、通分、約分で簡易化する

```
EQ2:x/(x^2+x);
ratsimp(EQ2);
```

出力結果 :

$$\frac{x}{x^2 + x} \rightarrow \frac{1}{x + 1}$$

有理式の簡素化 : `partfrac(EQ,x)` x で簡易化する

```
EQ:(2*x+3)*(A*x-2)*(x+B);
EQ1:expand(%);
partfrac(EQ1,x);
factor(EQ1);
```

出力結果 :

$$(2x + 3)(xA - 2)(B + x) \rightarrow$$

$$2x^2 AB + 3x AB - 4xB - 6B + 2x^3 A + 3x^2 A - 4x^2 - 6x$$

`partfrac(EQ1,x)` の結果

$$x((3A - 4)B - 6) + x^2(2AB + 3A - 4) - 6B + 2x^3 A$$

`factor(EQ1)` の結果

$$(2x + 3)(xA - 2)(B + x)$$

三角関数の簡素化 : `trigsimp(EQ)`三角関数が含まれる式を $\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$ と $\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 = 1$ を使って簡素化する。行列の積を参照。三角関数の簡素化 : `trigreduce(EQ)`

三角関数の積を倍角公式などを使って簡素化する。

```
EQ1:sin(A)*cos(B);
trigreduce(EQ1);
```

出力結果 :

$$\sin(A) \cos(B) \rightarrow \frac{\sin(B + A)}{2} - \frac{\sin(B - A)}{2}$$

三角関数の簡素化 :

`trigexpand(EQ)`

三角関数が含まれる式を倍角公式などを使って展開する。

```
EQ2:sin(A*x+y);
trigexpand(EQ2);
```

出力結果 :

$$\sin(xA + y) \rightarrow \cos(y) \sin(xA) + \sin(y) \cos(xA)$$

三角関数の簡略化準線形形式 : `trigrat(EQ)`

三角関数の式の標準的な簡略化準線形形式を与える。

```
E0:sin(3*a)/sin(a+%pi/3);
E0=trigrat(E0);
E1:(1-%e^(%i*\theta))/(1+%e^(%i*\theta));
E2:E1=trigrat(E1);
```

出力結果 :

$$\frac{\sin(3a)}{\sin(a + \frac{\pi}{3})} = \sqrt{3} \sin(2a) + \cos(2a) - 1$$

$$\frac{1 - e^{i\theta}}{e^{i\theta} + 1} = -\frac{i \sin(\frac{\theta}{2})}{\cos(\frac{\theta}{2})}$$

対数関数の簡素化 : `logcontract(EQ)`

対数関数を含む式の簡易化をする。

```
EQ:2*log(x)+2*log(y);
logcontract(EQ);
```

出力結果 :

$$2 \log(y) + 2 \log(x) \rightarrow \log(x^2 y^2)$$

指数、対数の簡素化 : `radcan(EQ)`

指数、対数のを含む式の簡易化をする。

```
(log(x+x^2)-log(x))^a/log(1+x)^(a/2);
radcan(%);
((%e^x-1)/(1+%e^(x/2)));
radcan(%);
```

出力結果：

$$\frac{(\log(x^2 + x) - \log(x))^a}{\log(x+1)^{\frac{a}{2}}} \rightarrow \log(x+1)^{\frac{a}{2}}$$

$$\frac{e^x - 1}{e^{\frac{x}{2}} + 1} \rightarrow e^{\frac{x}{2}} - 1$$

係数：coeff(EQ,X,N)

式 EQ の X の N 乗の係数を抽出する。

```
EQ:2*x^2+x-6;
coeff(EQ,x,2);
```

出力結果：

$$2x^2 + x - 6 \rightarrow 2$$

最初の項：first(EQ)

式 EQ の最初の項を抽出する。

```
EQ:2*x^2+x-6;
first(EQ);
```

出力結果：

$$2x^2 + x - 6 \rightarrow 2x^2$$

最後の項：last(EQ)

式 EQ の最後の項を抽出する。

```
EQ:2*x^2+x-6;
last(EQ);
```

出力結果：

$$2x^2 + x - 6 \rightarrow -6$$

項の削除：rest(EQ,N)

式 EQ の最初から N 個成分を除いた項を出力する。
ここで、N を負とすると、最後から N 個成分を除いた項を出力する。

```
EQ:2*x^2+x-6;
rest(EQ,2);
```

出力結果：

$$2x^2 + x - 6 \rightarrow -6$$

分子：num(EQ)

式 EQ の分子を出力する。

```
EQ:x/(x^2+x);
num(EQ);
```

出力結果：

$$\frac{x}{x^2 + x} \rightarrow x$$

分母：denom(EQ)

式 EQ の分母を出力する。

```
EQ:x/(x^2+x);
denom(EQ);
```

出力結果：

$$\frac{x}{x^2 + x} \rightarrow x^2 + x$$

方程式を解く：

solve([EQ1,EQ2],[x,y])

式 EQ1, EQ2 を x, y について解く。結果は行列表示で出力される。

```
EQ:2*x^2+x-6=0;
solve(EQ,x);
```

出力結果：

$$2x^2 + x - 6 = 0$$

$$\left[x = \frac{3}{2}, x = -2 \right]$$

```
EQ1:2*x+y=4;
EQ2:x+3*y=7;
ANS:solve([EQ1,EQ2],[x,y]);
ANS[1][1];
ANS[1][2];
```

出力結果：

$$y + 2x = 4$$

$$3y + x = 7$$

$$[[x = 1, y = 2]]$$

$$x = 1$$

$$y = 2$$

A.4 行列

行列の定義：`matrix([A,B],[C,D])`

行列を入力、定義する。

```
XY:matrix([A,B],[C,D]);
```

出力結果：

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

運動を行列で表現するときには、下記のように列行列で表現した方が、変数変換行列の表現、演算表現で教科書に近い表現となり、理解しやすい。

```
kill(all);
X:x(t)=r(t)*cos(p(t));
Y:y(t)=r(t)*sin(p(t));
XY:matrix([ rhs(X)],[ rhs(Y) ]);
VXY:diff(XY,t);
AXY:diff(VXY,t);
TR:matrix([cos(p(t)), sin(p(t))],
           [-sin(p(t)),cos(p(t))]);
VRP:trigsimp(TR.VXY);
v[r](t)=VRP[1,1];
v[p](t)=VRP[2,1];
ARP:trigsimp(TR.AXY);
a[r](t)=ARP[1,1];
a[p](t)=ARP[2,1];
EQR:M*ARP[1,1]=F[r];
EQP:M*ARP[2,1]=F[p];
```

要素の抽出：`M[N][M]`

N 行、 M 列目の要素を抽出する。

```
XY:matrix([A,B],[C,D]);
```

```
XY[2][1];
```

出力結果：

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \rightarrow C$$

行列の積：`A.B`

行列： A と行列： B の積を求める。

```
M1:matrix([A,B],[C,D]);
```

```
M2:matrix([E,F],[G,H]);
```

```
M1.M2;
```

出力結果：

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} BG+AE & BH+AF \\ DG+CE & DH+CF \end{bmatrix}$$

転置行列：`transpose(M)`

行列： M の転置行列を求める。

```
M1:matrix([A,B],[C,D]);
```

```
M2:matrix([A],[B]);
```

```
transpose(M1);
```

```
transpose(M2);
```

出力結果：

$$\begin{bmatrix} A & C \\ B & D \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}$$

運動エネルギーを求めるとき、各速度成分の二乗和が必要となる。速度の行列表現の転置行列と元行列の積から容易に求まる。

```
T:1/2*M*trigsimp(transpose(VXY).VXY);
```

行列式：`determinant(M)`

行列： M の行列式を求める。

```
M:matrix([2*D^2+2, D^2],[D^2,D^2+1]);
```

```
determinant(M);
```

出力結果：

$$\begin{bmatrix} 2D^2+2 & D^2 \\ D^2 & D^2+1 \end{bmatrix} \rightarrow (D^2+1)(2D^2+2) - D^4$$

行列の作成：`genmatrix(a,M,N)`

定義された h の行列を作成する。

```
h[i,j]:=1/(i+j);
```

```
genmatrix(h,4,4);
```

出力結果：

$$h_{i,j} := \frac{1}{i+j}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

条件文が入った定義された a の行列を作成する。

```
AJK:1/(j+k);
a[m,n]:=block([b],
if m=4 then if n=4 then b:1 else b:0
else b:subst([k=n,j=m],AJK), return(b));
genmatrix(a,4,4);
```

出力結果 :

$$\frac{1}{k+j} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

逆行列の計算 : invert(a)

定義された a の逆行列を計算する。

```
h[i,j]:=1/(i+j);
genmatrix(h,4,4);
invert(%);
```

出力結果 :

$$h_{i,j} := \frac{1}{i+j} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 200 & -1200 & 2100 & -1120 \\ -1200 & 8100 & -15120 & 8400 \\ 2100 & -15120 & 29400 & -16800 \\ -1120 & 8400 & -16800 & 9800 \end{pmatrix}$$

A.5 微分・積分

微分 : diff(EX,x,N)

EX を微分変数 : x で N 階微分を行う。 N を省略すれば、1 階微分をする。

```
EX:x^3;
diff(EX,x,1);
diff(EX,x,2);
```

出力結果 :

$$x^3 \rightarrow$$

$$3x^2$$

$$6x$$

```
X:x(t)=r(t)*cos(p(t));
diff(X,t,1);
```

$$x(t) = r(t) \cos(p(t)) \rightarrow$$

$$\frac{d}{dt} x(t) = \cos(p(t)) \left(\frac{d}{dt} r(t) \right)$$

$$- r(t) \sin(p(t)) \left(\frac{d}{dt} p(t) \right)$$

積分 : integrate(EX,x,A,B)

EX を積分変数 : x で、 A から B の積分を行う。、 A 、 B を省略すれば、不定積分となる。

```
EX:x^2;
integrate(EX,x,0,2);
integrate(EX,x);
```

$$x^2 \rightarrow$$

$$\frac{8}{3}$$

$$\frac{x^3}{3}$$

```
EX:y(x)^2;
integrate(EX,x);
integrate(EX,y(x));
```

$$y(x)^2 \rightarrow$$

$$\int y(x)^2 dx$$

$$\frac{y(x)^3}{3}$$

積分における変数変換：

`changevar(EQ,EQ,B,A)`

積分記述： EX を式： $EQ = 0$ の関係を使って、変数： A から変数： B に変換する。

```
EX: 'integrate(%e^(sqrt(a*y)),y,0,4);
EQ:y-z^2/a=0;
changevar(EX,lhs(EQ),z,y);
```

$$\int_0^4 e^{\sqrt{a}y} dy$$

$$y - \frac{z^2}{a} = 0$$

$$\frac{2 \int_{-2\sqrt{a}}^0 z e^{|z|} dz}{a}$$

微分方程式を解く：

`desolve([EQ1,EQ2],[f1(x),f2(x)])`

連立微分方程式： $EQ1$ 、 $EQ2$ 、で従属変数： $f1(x)$ 、 $f2(x)$ を解く。初期条件は下記のようにして、従属変数の初期条件における値を定義する。連立微分方程式の場合、解は行列表示となる。詳細の解説は「?? *desolve* 関数」、??頁に示す。

```
EQ1:diff(y(x),x,2)+2*y(x)+z(x)=0;
EQ2:y(x)+diff(z(x),x,2)+2*z(x)=0;
atvalue(y(x),x=0,1);
atvalue(diff(y(x),x,1),x=0,0);
atvalue(z(x),x=0,2);
atvalue(diff(z(x),x,1),x=0,0);
desolve([EQ1,EQ2],[y(x),z(x)]);
```

$$\frac{d^2}{dx^2} y(x) + z(x) + 2y(x) = 0$$

$$\frac{d^2}{dx^2} z(x) + 2z(x) + y(x) = 0$$

$$[y(x) = \frac{3 \cos(\sqrt{3}x)}{2} - \frac{\cos(x)}{2}$$

$$, z(x) = \frac{3 \cos(\sqrt{3}x)}{2} + \frac{\cos(x)}{2}]$$

微分方程式を解く：`ode2(EQ,f(x),x)`

2階以下の微分方程式： EQ で従属変数： $f(x)$ 、独立変数： x を解く。境界条件は下記のように、関数：`ode2` を実行後に、関数：`ic1,ic2,bc2` を使用して定義する。詳細の解説は「?? *ode2* 関数」、??頁に示す。

一階微分方程式の場合

```
kill(all);
EQ: diff(y(x),x,1)=-(x-C)/y(x);
ANS:ode2(EQ,y(x),x);
ANS1:ic1(ANS,x=0,y(x)=1);
```

下記に出力結果を示す。 $y(x)$ の関数形で解は得られるが、境界条件を `ic1` で求めた結果は満足ではない。

$$\frac{d}{dx} y(x) = \frac{C-x}{y(x)}$$

$$\frac{y(x)^2}{2} = \frac{2xC - x^2}{2} + \%c$$

$$\frac{y(x)^2}{2} = \frac{2xC - x^2 + y(0)^2}{2}$$

```
kill(all);
depends(y,x);
EQ: diff(y,x,1)=-(x-C)/y;
ANS:ode2(EQ,y,x);
ANS1:ic1(ANS,x=0,y=1);
```

下記に `depends` を使った関数形の出力結果を示す。境界条件を `ic1` で求めた結果は満足できる。

$$[y(x)]$$

$$\frac{d}{dx} y = \frac{C-x}{y}$$

$$\frac{y^2}{2} = \frac{2xC - x^2}{2} + \%c$$

$$\frac{y^2}{2} = \frac{2xC - x^2 + 1}{2}$$

二階微分方程式の場合

```
kill(all);
EQ:x^2*diff(y(x),x,2)+x*diff(y(x),x,1)
-4*y(x)=0;
ANS:ode2(EQ,y(x),x);
ANS1:ic2(ANS,x=1,y(x)=1,diff(y(x),x,1)=0);
ANS2:bc2(ANS,x=1,y(x)=0,x=2,y(x)=1);
```

下記に出力結果を示す。 $y(x)$ の関数形で解は得られるが、境界条件を `ic2,bc2` で求めた結果は満足ではない。

$$x^2 \left(\frac{d^2}{dx^2} y(x) \right) + x \left(\frac{d}{dx} y(x) \right) - 4y(x) = 0$$

$$y(x) = \%k1 x^2 + \frac{\%k2}{x^2}$$

$$y(x) = \frac{y(1)x^2}{2} + \frac{y(1)}{2x^2}$$

$$y(x) = \frac{16y(1) - 4y(2)}{15x^2} - \frac{(y(1) - 4y(2))x^2}{15}$$

```
kill(all);
depends(y,x);
EQ:x^2*dif(y,x,2)+x*dif(y,x,1)
-4*y=0;
ANS:ode2(EQ,y,x);
ANS1:ic2(ANS,x=1,y=1,dif(y,x,1)=0);
ANS2:bc2(ANS,x=1,y=0,x=2,y=1);
```

下記に depends を使った関数形の出力結果を示す。境界条件を ic2,bc2 で求めた結果は満足できる。

$$[y(x)]$$

$$x^2 \left(\frac{d^2}{dx^2} y \right) + x \left(\frac{d}{dx} y \right) - 4y = 0$$

$$y = \%k1 x^2 + \frac{\%k2}{x^2}$$

$$y = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2x^2}$$

$$y = \frac{4x^2}{15} - \frac{4}{15x^2}$$

微分方程式の数値解: $rk([EQ1, EQ2], [x, y], [X0, Y0], [t, T0, T1, DT])$

ルンゲ・クッタ法で微分方程式を数値解析する。左辺が1階微分の形で微分方程式を表現する。右辺を EQ1、EQ2 で表し、左辺の従属変数を x, y とする。それぞれの、初期値を $X0, Y0$ とし、独立変数を t とする。独立変数の $T0$ から $T1$ まで、 DT 間隔で数値解析する。ここで独立変数は $x(t)$ の形は扱えない。実行する前に、ルンゲ・クッタ法のプログラムをロードする必要があるので、 $load("dynamics");$ を入力する。

$$\frac{d}{dt} x = -4y^2 - x^2 + 4$$

$$\frac{d}{dt} y = y^2 - x^2 + 1$$

の場合、

```
EQ1:'diff(x,t)=4-x^2-4*y^2;
EQ2:'diff(y,t)=y^2-x^2+1;
load("dynamics");
sol:rk([rhs(EQ1),rhs(EQ2)], [x,y],
[-1.25,0.75], [t,0,4,0.02]);
```

入っている出力は、リストの形式で出力されるので、下記の例に示すように sol に結果を入れ、必要な項目を $list12$ に入れなおす。そして、下記の図形関数: $plot2d$ などで見ることができる。

$$\frac{d^2}{dt^2} x = -\sin(x)$$

の場合、下記の1階連立微分方程式に置き換えて解く。

$$\frac{d}{dt} x = y$$

$$\frac{d}{dt} y = -\sin(x)$$

```
kill(all);
EQ1:'diff(x,t,2)=-sin(x);
Tmax:3;
dT:0.03;
Nplot:fix(Tmax/dT);
load("dynamics");
P[0]:%pi/9;
sol:rk([y,rhs(EQ1)], [x,y], [P[0],0],
[t,0,Tmax,dT]);
list12:[[sol[1][1],sol[1][2]]];
for J:2 thru Nplot do(list12:append(list12,
[sol[J][1],sol[J][2]]));
plot2d([discrete,list12]);
```

A.6 複素数

複素変数宣言 : `declare(z,complex)`

z が複素変数であることを宣言する。

```
declare(z,complex);
```

実部 : `realpart(z)`

複素数: z の実部を出力する。

```
kill(all);
declare(z,complex);
Z1:z=x[1]+%i*y[1];
realpart(rhs(Z1));
```

$$z = i y_1 + x_1 \rightarrow x_1$$

虚部 : `imagpart(z)`

複素数: z の虚部を出力する。

```
kill(all);
declare(z,complex);
Z1:z=x[1]+%i*y[1];
imagpart(rhs(Z1));
```

$$z = i y_1 + x_1 \rightarrow y_1$$

複素共役 : `conjugate(z)`

複素数: z の複素共役を出力する。

```
kill(all);
declare(z,complex);
Z1:z=x[1]+%i*y[1];
conjugate(rhs(Z1))
```

$$z = i y_1 + x_1 \rightarrow x_1 - i y_1$$

極座標表示 : `polarform(z)`

複素数: z を極座標表示で出力する。

```
kill(all);
declare(z,complex);
Z1:z=x[1]+%i*y[1];
polarform(rhs(Z1));
```

$$z = i y_1 + x_1 \rightarrow \sqrt{y_1^2 + x_1^2} e^{i \operatorname{atan2}(y_1, x_1)}$$

xy 座標表示 : `rectform(z)`

複素数: z を極座標表示で出力する。

```
kill(all);
declare(z,complex);
Z1:z=r*%e^(%i*\theta);
rectform(rhs(Z1));
```

$$z = r e^{i\theta} \rightarrow i r \sin(\theta) + r \cos(\theta)$$

留数 : `residue(EQ,z,z[0])`

式 : EQ 、変数 : z で、 z_0 における留数を求める。

```
kill(all);
declare(z,complex);
residue (z/(z^2+a^2), z, a%i);
residue (sin(a*z)/z^4, z, 0);
```

$$\frac{1}{2}$$

$$-\frac{a^3}{6}$$

A.7 極限・級数

極限 : `limit(EQ,x,A,dir)`

変数 x を方向: dir から A に接近する場合、式: EQ の極限を計算する。 dir としては、 $plus$ か $minus$ を入力する。 A に接近した場合、値が分らない場合は、 dir は入力しなくてよい。ここでプラス無限大は inf 、マイナス無限大は $minf$ である。

$$x(t) = \frac{U_0}{C} - \frac{e^{-tC} U_0}{C}$$

$$X_{max} = \frac{U_0}{C}$$

```
kill(all);
XX:x(t)=U0/C-(%e^(-t*C)*U0)/C;
Xmax=limit(rhs(XX),t,inf);
```

$$x(t) = \frac{U_0}{C} - \frac{e^{-tC} U_0}{C}$$

$$X_{max} = \frac{U_0}{C}$$

級数展開 : `taylor(EX,x,A,N)`

式 EX を A のまわりで、変数: x の Taylor 級数を N 乗まで求める。

```
taylor(sin(x),x,0,7);
```

$$\sin(x) \rightarrow x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \dots$$

級数和 : `sum(EX,n,n1,n2)`

式 EX を変数: n の n_1 から n_2 までの級数和を求める。

```
HH:h=h[0]+2*sum(h[0]*E^(2*n),n,1,inf);
h=h[0]+2*sum(h[0]*E^(2*n),n,1,4);
```

$$h = 2h_0 \left(\sum_{n=1}^{\infty} E^{2n} \right) + h_0$$

$$h = 2(h_0 E^8 + h_0 E^6 + h_0 E^4 + h_0 E^2) + h_0$$

級数和の簡素化 : `simpsum`

上部で定義されている級数和を、true にすることで簡素化する。結果が得られたら、false にする。

```
assume(E>0, E<1);
HH:h[0]+2*sum(h[0]*E^(2*n),n,1,inf);
HH, simpsum;
sum(1/n^2,n,1,inf);
sum(1/n^2,n,1,inf), simpsum;
sum(1/3^i,i,1,inf);
%,simpsum;
```

$$2h_0 \left(\sum_{n=1}^{\infty} E^{2n} \right) + h_0 \rightarrow \frac{2h_0 E^2}{1-E^2} + h_0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \rightarrow \frac{\pi^2}{6}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{3^i} \rightarrow \frac{1}{2}$$

級数積 : `product(EX,n,n1,n2)`

式 EX を変数: n の n_1 から n_2 までの級数積を求める。

```
kill(all);
product(k,k,1,n);
```

$$\prod_{k=1}^n k$$

級数積の簡素化 : `simpproduct`

定義されている級数積を、簡素化する。

```
kill(all);
product(k,k,1,n), simpproduct;
```

$$n!$$

A.8 プログラム

反復 : **for N:k step 1 thru m do(A);**

A を N が k から m まで i ステップ毎に反復実行する。
A で複数の処理をする場合は, で区切る。

条件分岐 : **if B then C else D;**

条件式 : B が真なら C を実行し、虚なら D を実行する。
条件式として、 $N = 1, N > 0$ などである。

```
kill(all);
for J:1 thru 10 do(
if J=1 then listUU20:[[1,2]]
else listUU20:append(listUU20,
[[2*J-1,2*J]]);
listUU20;
```

リストのファイル出力、読み込み :

write_data, read_list

計算結果などのリストデータを外部メディアにファイル出力し、外部メディアにファイル出力したリストを読み込む。

```
kill(all);
listUU:[[1,11],[2,22],[3,33]];
write_data(listUU,"M:\listUU20.csv");
list:read_list("M:\listUU20.csv");
for J:1 thru 100 do(
if J=1 then listUU20:[[list[1],list[2]]]
else listUU20:append(listUU20,
[[list[2*J-1],list[2*J]]]);
listUU20;
```

リストデータ: listUU を作成する。

```
[[1, 11], [2, 22], [3, 33]]
```

外部メディアにファイル: M:listUU20.csv の名前で、出力する。

外部メディアにファイル: M:listUU20.csv をリストとして読み込む。読み込んだ結果は下記、

```
[1, 11, 2, 22, 3, 33]
```

連続したデータリストとなっているので、振り分け作業を行い、元の形にする。

```
[[1, 11], [2, 22], [3, 33]]
```

A.9 その他

第一種完全楕円積分関数 : **elliptic_kc(m)**

下記の第一種完全楕円積分関数を求める。

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-m \sin(x)^2}} dx$$

第一種ベッセル関数 : **bessel_j(n,x)**

次数 : n で変数 : x の第一種ベッセル関数を求める。

第二種ベッセル関数 : **bessel_y(n,x)**

次数 : n で変数 : x の第二種ベッセル関数を求める。

第一種変形ベッセル関数 : **bessel_i(n,x)**

次数 : n で変数 : x の第一種変形ベッセル関数を求める。

第二種変形ベッセル関数 : **bessel_k(n,x)**

次数 : n で変数 : x の第二種変形ベッセル関数を求める。

根を得る : **find_root(Fn,x,a,b)**

根を数値解析で得る。関数 : F_n を与え、変数 : x が $a \sim b$ の範囲で $F_n = 0$ の根を求める。

```
kill(all);
find_root(bessel_j(1,x),x,2,4);
```

$bessel_j(1,x)$ の根を x が 2 から 4 の範囲で求める。

定数 : π : %pi

定数 : 自然対数の底 : %e

定数 : 虚数 : %i

定数 : 正の無限大 : inf

定数 : 負の無限大 : minf

浮動小数点で近似値 : **float(EQ)**

A.10 グラフ作成

二次元グラフ：

`plot2d([EX1,EX2],[range],[op])`

二次元のグラフを作成する。*EX1*、*EX2* に数式や点列の指定、*range* に横軸の計算レンジ、*op* に縦軸に指定などのオプションを指定する。

(1) 数式を与えて

数式と x の計算レンジを与えたグラフの作成をする。

```
plot2d (x^3+2, [x, -3, 3]);
```

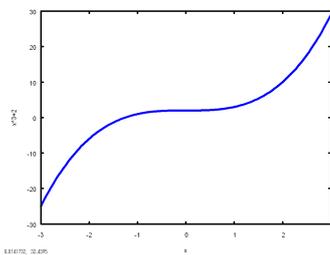


図 A.10.1: 数式を与えて

(2) 数式を与えて軌跡

x 、 y の変数： t の数式を与え、 $x-y$ 面上のグラフの作成をする。*nticks* で分割点数を与える。

```
plot2d ([parametric,2*cos(t),10*sin(t),
[t,-5,5],[nticks,80]]);
```

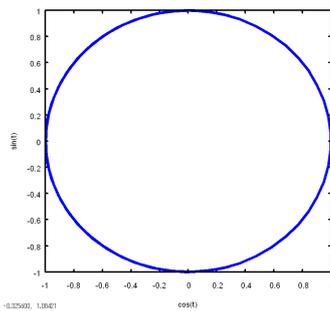


図 A.10.2: 数式を与えて軌跡

(3) 点列を与えて

x 、 y の点列の行列を与え、グラフの作成をする。

```
xy: [[-2,30],[1,-20]],
[2,-20]];
plot2d([discrete,xy]);
```

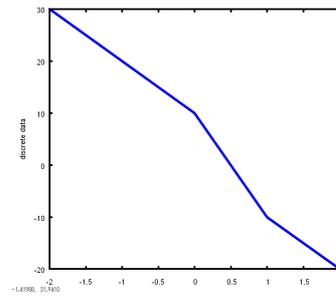


図 A.10.3: 点列を与えて

(4) 複数の数式を与えて

数式と x の計算レンジを与えたグラフの作成をする。

```
plot2d ([-10*x,2*x^2-2,x^3+2],[x,-3,3]);
```

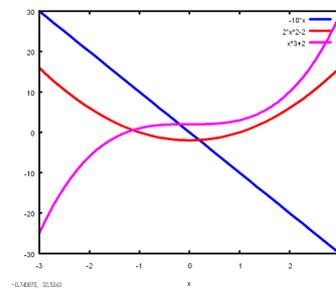


図 A.10.4: 複数の数式を与えて

(5) 複数のグラフの合成

数式と x の計算レンジを与えたグラフの作成をする。

```
plot2d ([x^3+2,[parametric,2*cos(t),
10*sin(t),[t,-5,5],[nticks,80]],
[discrete,xy]],
[x,-3,3]);
```

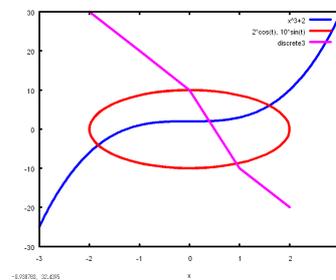


図 A.10.5: 複数のグラフの合成

(6) オプション

線の種類を指定

```
[style, [lines, l1, l2]]
```

l1 : 線の太さ, l2 : 線の色を指定する。lines : 線で描くが、これを points、linespoints、dots と指定することもできる。

```
plot2d([x, 2*x, -x, -2*x], [x, -10, 10],
        [y, -10, 10], [nticks, 5], [style, [lines, 8, 1],
        [points, 4, 2], [linespoints, 2, 3],
        [dots, 8, 4]]);
```

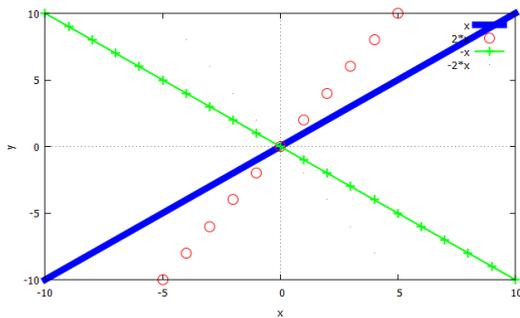


図 A.10.6: 線の種類

線のコメント

```
plot2d([x, 2*x, -x, -2*x], [x, -10, 10],
        [y, -10, 10], [legend, "A", "B", "C", "D"]);
```

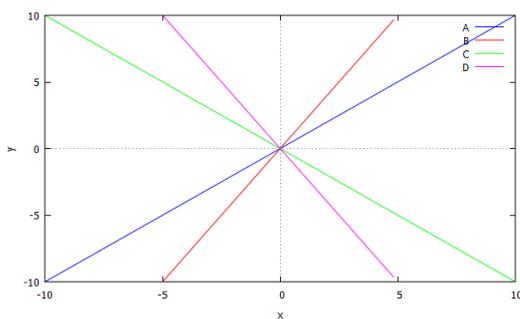


図 A.10.7: 線にコメント

縦軸、横軸のコメント

```
plot2d(x^3+2, [x, -3, 3], [y, -40, 50],
        [xlabel, "X axis"], [ylabel, "Y axis"]);
```

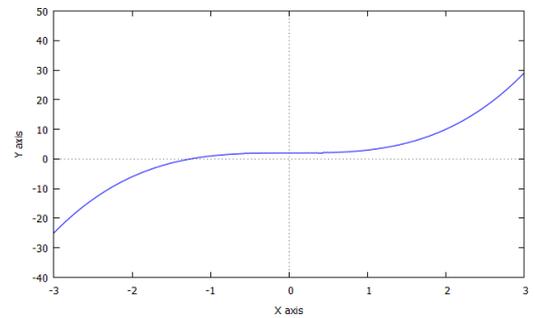


図 A.10.8: 縦軸、横軸コメント

対数軸

```
plot2d(%e^x, [x, -100, 100], [logy]);
plot2d(log(x), [x, 0.1, 100], [logx]);
```

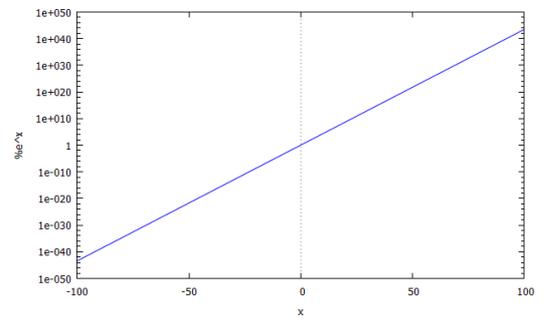


図 A.10.9: y 軸対数軸

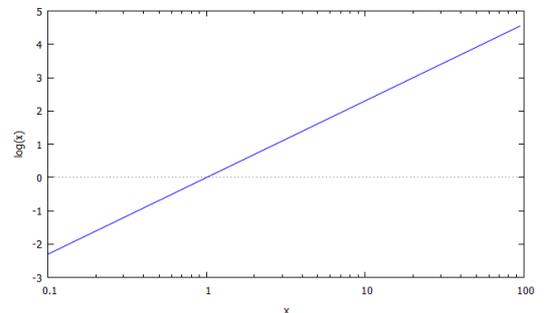


図 A.10.10: x 軸対数軸

三次元グラフ :

`plot3d(EX1,[x range],[y range])`

三次元のグラフを作成する。EX1に数式の指定、*xrange*に横軸の計算レンジ、*yrange*に縦軸の計算レンジの指定などのオプションを指定する。

数式と *x, y* の計算レンジを与えたグラフの作成をする。

```
plot3d (2^(-u^2+v^2), [u, -3, 3], [v, -2, 2]);
```

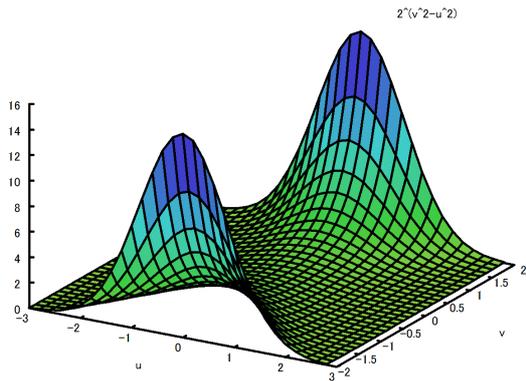


図 A.10.11: 三次元グラフ

円柱座標三次元グラフ :

円柱座標三次元グラフを作成する。

```
plot3d(r^2, [r, 0, 1], [\theta, 0, 2*pi],
[grid, 20, 50], [transform_xy, polar_to_xy]);
```

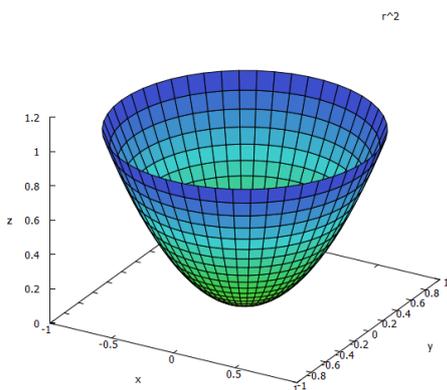


図 A.10.12: 円柱座標三次元グラフ

等高線グラフ (gnuplot による)

等高線グラフを gnuplot で作成する。

```
set xrange [X1:X2] x range
set yrange [Y1:Y2] y range
set isosamples NX,NY x,y 軸の分割点数
set cntrparam levels incremental Z1,dz,Z2 z 軸の初期値、増分、終値
splot EX 数式
```

```
#!/gnuplot
set xrange [-3:3]
set yrange [-3:3]
set isosamples 150,150
set contour base
set cntrparam levels incremental -3,0.2,4
unset key
unset surface
set view map
splot (7*log(y**2+x**2))/(2*pi)
-y/(y**2+x**2)+y
# EOF
```

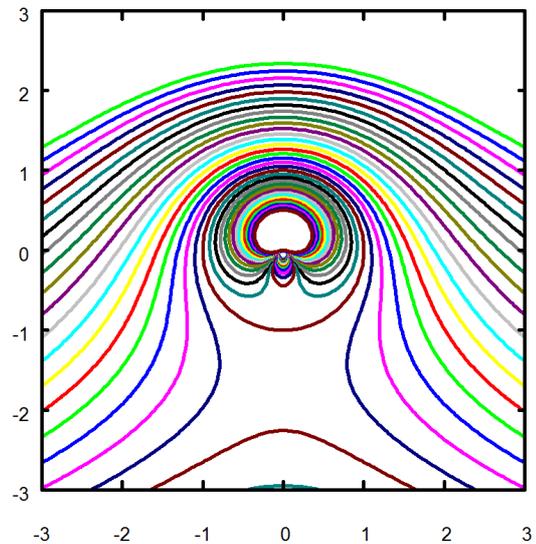


図 A.10.13: 等高線グラフ

参考文献

- 1) Maxima の公式ホームページ、<http://maxima.sourceforge.net/>
- 2) 横田博史：はじめての Maxima、工学社 2005
- 3) 竹内 薫：はじめての数式処理ソフト CD-ROM 付、(ブルーボックス) (新書) 2007
- 4) 中川義行：Maxima 入門ノート 1.2.1、<http://www.eonet.ne.jp/~kyo-ju/maxima.pdf>
- 5) 横田博史：Maxima 簡易マニュアル、<http://www.bekkoame.ne.jp/~ponpoko/Math/books/ManualBook.pdf>
- 6) Maxima 普及委員会、<http://www.cymric.jp/maxima/top.html>
- 7) Profesional Maxima、<http://www.muskmelon.jp/maxima/pro-maxima-20080303.pdf>
- 8) 奥村晴彦：[改訂第 3 版]L^AT_EX 2_ε 美文書作成入門、技術評論社 2004
- 9) Robert L. Zimmerman, Fredrick I. Olness : Mathematica for Physics, 訳：武藤 覚、小泉 悟、ピアソン・エデュケーション 1999
- 10) 国井修二郎、千田香苗：力学 1、丸善 1952
- 11) 国井修二郎、千田香苗：力学 2、丸善 1958
- 12) 原島 鮮：力学、裳華房 1956
- 13) 正田 大、浅野芳広、西山敏之：物理学、学術図書出版社 1960
- 14) 山内恭彦、末岡清市、佐藤正千代、田辺行人：大学演習 力学、裳華房 1964
- 15) 後藤憲一、山本邦夫、神吉 健：詳解 力学演習、共立出版 1971
- 16) 戸田盛和、山口昭男：力学 (物理入門コース 1)、岩波書店 1982
- 17) 戸田盛和：力学 (物理入門コース 1) / 演習、岩波書店 1982
- 18) 副島雄児、杉山忠男：力学 (講談社基礎物理学シリーズ 1)、講談社 2009
- 19) G. ポリア、柿内賢信訳：いかにして問題を解くか、丸善出版 1954
- 20) 溝口純敏：Maxima を使った物理数学基礎演習ノート、<http://www9.plala.or.jp/prac-maxima/>