Maximaを使った物理数学基礎演習ノート

溝口純敏
http://www.mzplactice.com/

平成20年9月　初版
平成21年4月　第一回改訂
平成27年7月　第二回改訂
平成28年9月　第三回改訂
平成29年11月　第四回改訂
平成30年7月　第五回改訂
令和元年7月　第六回改訂
令和2年4月　第七回改訂
令和4年3月　第八回改訂

目 次

第1章　はじめに

理工系で物理学を学ぶ初心者を対象に、物理学でよく出てくる式などについて、Maxima を使った物理数学演習ノートを作成しました。あくまで演習ノートであるので、式の詳細な導出や証明、解説は行っていません。これらについては、参考文献などのすばらしい書籍等があるので、それらを参考にしてください。物理学を学ぼうとしている人にとって、数学は道具であり、それをある程度、しっかり理解することを通して、物理の概念、本質の理解を深めていけると思います。数学の数式展開や証明に主眼をおく必要はありません。このような観点から、数式の展開に多くの時間をかけるのでなく、Maxima などの数式処理システムを使って物理数学を学ぶのが効率的な学び方ではないかと思い、本書をまとめました。

最近は、インターネットや電子辞書・電子書籍で多くの知識を容易に得ることができ、音声認識システムで、話したことを文章化できたり、翻訳できます。そして、これらが可能な携帯情報端末が一般に使用される時代となっています。また、人工知能の発展は目を見張るものがあり、将棋や囲碁の分野ではプロ棋士を負かすほどになっています。人工知能を使った数式処理システムで因数分解、微分、積分、微分方程式など、多くの数式処理がパーソナルコンピューターで容易に可能になっています。フリーの数式処理ソフト：Maxima も公開され、多くの人がこれを使用していると思われます。このようなすばらしいシステムが多く存在する時代では、これらを使いこなし、各人が求める深い知恵を得る活動に多くの時間を割くことがよいと思います。

また、近年、科学の進歩で、多くのことが明らかになり、分野も広がっており、変化が激しい世の中となっています。その中で、時間も限られる状況下でどのような深い知恵を習得すべきなのでしょうか。前述したように、現在、携帯情報端末で多くの情報、知識を容易に得ることができます。また、将来は、人工知能の発達で、更に我々に対し多くの事柄を補佐してくれるでしょう。このような時代に備え、我々は何を身につけておくべきなのでしょうか。私は高い問題解決能力を身につけることが大切ではないかと思います。

問題解決能力を高めるには、できる限り多くのよい問題を解くことを経験し、物事の本質を理解するとともに、問題解決のプロセスを習得することが重要と言われています [31)]。ここに Maxima を活用して、多くの例題を効率よく解き、物事の本質の理解を深め、経験を積むことができます。例えば、運動方程式の導出やその極座標系への変換では、手計算では気が遠くなるような作業であり、現実は本に書かれているようになるんですね、で終わってしまいます。しかし、Maxima などの数式処理システムを用いれば、基本的な考え方をプログラムするだけで、後の大変な式の展開は計算機が実行してくれます。ここでは問題解決のプロセスを明らかにすることが要求され、効率よく問題解決能力を高める訓練が行えると思います。

本ノートは wxMaxima 13.04.2(Maxima-5.31.2) を使用してまとめました。これは会話形式で処理を実行でき、数式出力結果を Tex 出力・コピーができるとともに、グラフも出力・コピーできるので、大変便利です。また、これらを有効活用できる文書作成ソフト：$\LaTeX\,2_\varepsilon$ を使用し、本ノートをまとめました。

以下では Maxima の入力部分を枠で囲って表し、出力結果をその後に数式で示しています。また、小文字は関数、変数を、大文字は定数を表すのに統一して使っています。Maxima の微分の出力で、例えば本来、$\frac{\partial}{\partial x}$ と記述されるべきが、$\frac{d}{d\,x}$ と出力されます。ここでは Maxima の出力通りに記述しているので誤解の無いように願います。また、Maxima のプログラムに統一性を欠いたり、例題の選定・記述などで不十分なところもありますが、まずは、まとめた結果を早期に公表し、皆様に供することとしたので、ご容赦願います。

本ノートをまとめるにあたり、参考文献に掲げた多くの著書を参考にしました。これらの著書をまとめられた著者に感謝します。また、これをまとめるのに活用した Maxima および $\LaTeX\,2_\varepsilon$ の開発や普及に携わられた方々に感謝します。

平成 27 年 7 月　第二回改訂　全面改訂 「Maxima を使った微分方程式演習ノート」に「ベクトルと行列」、「複素関数」、「フーリエ解析」、「円柱関数と球関数」、「変分法」、「偏微分方程式」等を付加し、全面改訂を行った。このため表題も「Maxima を使った物理数学基礎演習ノート」とした。

平成 28 年 9 月　第三回改訂 フーリエ級数の誤記を修正した。

平成 29 年 11 月　第四回改訂 「∇ を使ったベクトル演算」、「直交曲線座標系への座標変換」を付加した。

平成 30 年 7 月　第五回改訂 「ラプラス変換」「積分方程式」を付加した。

令和元年 7 月　第六回改訂 「時系列解析」「時系列解析の具体例」を付加した。

令和 2 年 4 月　第七回改訂 「多重積分、スカラー場、ベクトル場の線積分・面積分」「偏微分方程式」を充実させた。

令和 4 年 3 月　第八回改訂 「テンソル (斜交座標)」を充実させた。

第2章　微分・積分

2.1　微分

2.1.1　Maxima の微分

微分の実行は $diff$ 関数で行える。実行方法は下記の要領で行う。

$$diff(関数, 変数_1, 微分階数_1)$$

微分の例題を下記に示す。

```
/* 微分 */
kill(all);
EQ:x^k;
'diff(EQ,x,1)=diff(EQ,x,1);
'diff(EQ,x,2)=diff(EQ,x,2);
'diff(EQ,x,3)=diff(EQ,x,3);
```

$$\frac{d}{d\,x}\,x^k = k\,x^{k-1}$$

$$\frac{d^2}{d\,x^2}\,x^k = (k-1)\;k\,x^{k-2}$$

$$\frac{d^3}{d\,x^3}\,x^k = (k-2)\;(k-1)\;k\,x^{k-3}$$

例 1　$\frac{d}{d\,x}\,x^{\alpha}$

```
EQ:x^\alpha;
'diff(EQ,x,1)=diff(EQ,x,1);
```

$$\frac{d}{d\,x}\,x^{\alpha} = \alpha\,x^{\alpha-1}$$

例 2　$\frac{d}{d\,x}\,e^{x}$

```
EQ:%e^x;
'diff(EQ,x,1)=diff(EQ,x,1);
```

$$\frac{d}{d\,x}\,e^{x} = e^{x}$$

例 3　$\frac{d}{d\,x}\log(x)$

```
EQ:log(x);
'diff(EQ,x,1)=diff(EQ,x,1);
```

$$\frac{d}{d\,x}\log(x) = \frac{1}{x}$$

例 4　$\frac{d}{d\,x}\cos(x)$

```
EQ:cos(x);
'diff(EQ,x,1)=diff(EQ,x,1);
```

$$\frac{d}{d\,x}\cos(x) = -\sin(x)$$

例 5　$\frac{d}{d\,x}\sin(x)$

```
EQ:sin(x);
'diff(EQ,x,1)=diff(EQ,x,1);
```

$$\frac{d}{d\,x}\sin(x) = \cos(x)$$

例 6　$\frac{d}{d\,x}\tan\left(x\right)$

```
EQ:tan(x);
'diff(EQ,x,1)=diff(EQ,x,1);
```

$$\frac{d}{d\,x}\tan\left(x\right)=\sec\left(x\right)^2$$

例 7　$\frac{d}{d\,x}\operatorname{asin}\left(x\right)$

```
EQ:asin(x);
'diff(EQ,x,1)=diff(EQ,x,1);
```

$$\frac{d}{d\,x}\operatorname{asin}\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

例 8　$\frac{d}{d\,x}\operatorname{acos}\left(x\right)$

```
EQ:acos(x);
'diff(EQ,x,1)=diff(EQ,x,1);
```

$$\frac{d}{d\,x}\operatorname{acos}\left(x\right)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

例 9　$\frac{d}{d\,x}\operatorname{atan}\left(x\right)$

```
EQ:atan(x);
'diff(EQ,x,1)=diff(EQ,x,1);
```

$$\frac{d}{d\,x}\operatorname{atan}\left(x\right)=\frac{1}{x^2+1}$$

例 10　$\frac{d}{d\,x}\sinh\left(x\right)$

```
EQ:sinh(x);
'diff(EQ,x,1)=diff(EQ,x,1);
```

$$\frac{d}{d\,x}\sinh\left(x\right)=\cosh\left(x\right)$$

例 11　$\frac{d}{d\,x}\cosh\left(x\right)$

```
EQ:cosh(x);
'diff(EQ,x,1)=diff(EQ,x,1);
```

$$\frac{d}{d\,x}\cosh\left(x\right)=\sinh\left(x\right)$$

例 12　$\frac{d}{d\,x}\operatorname{asinh}\left(x\right)$

```
EQ:asinh(x);
'diff(EQ,x,1)=diff(EQ,x,1);
```

$$\frac{d}{d\,x}\operatorname{asinh}\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

例 13　$\frac{d}{d\,x}\operatorname{acosh}\left(x\right)$

```
EQ:acosh(x);
'diff(EQ,x,1)=diff(EQ,x,1);
```

$$\frac{d}{d\,x}\operatorname{acosh}\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

例 14　[$\frac{d}{d\,x}\sqrt{x}$

```
EQ:sqrt(x);
'diff(EQ,x,1)=diff(EQ,x,1);
```

$$\frac{d}{d\,x}\sqrt{x}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

例 15　$\frac{d}{d\,x}\frac{1}{x+a}$

```
EQ:1/(x+a);
'diff(EQ,x,1)=diff(EQ,x,1);
```

$$\frac{d}{d\,x}\frac{1}{x+a}=-\frac{1}{\left(x+a\right)^2}$$

例 16 $\frac{d}{d\,x}\,\frac{x}{x^2+a^2}$

```
EQ:x/(x^2+a^2);
'diff(EQ,x,1)=diff(EQ,x,1);
factor(%);
```

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\,x}\,\frac{x}{x^2+a^2} =& \frac{1}{x^2+a^2}-\frac{2\,x^2}{\left(x^2+a^2\right)^2}\\ &-\frac{(x-a)\,(x+a)}{\left(x^2+a^2\right)^2}\end{aligned}$$

例 17 $\frac{d}{d\,x}\,\frac{1}{a^k-x^k}$

```
EQ:1/(a^k-x^k);
'diff(EQ,x,1)=diff(EQ,x,1);
```

$$\frac{d}{d\,x}\,\frac{1}{a^k-x^k}=\frac{k\,x^{k-1}}{\left(a^k-x^k\right)^2}$$

例 18 $\frac{d}{d\,x}\,e^{a\,x}$

```
EQ:%e^(a*x);
'diff(EQ,x,1)=diff(EQ,x,1);
```

$$\frac{d}{d\,x}\,e^{a\,x}=a\,e^{a\,x}$$

例 19 $\frac{d}{d\,x}\,e^{\frac{a}{x}}$

```
EQ:%e^(a/x);
'diff(EQ,x,1)=diff(EQ,x,1);
```

$$\frac{d}{d\,x}\,e^{\frac{a}{x}}=-\frac{a\,e^{\frac{a}{x}}}{x^2}$$

例 20 $\frac{d}{d\,x}\,e^{a\,x^2}$

```
EQ:%e^(a*x^2);
'diff(EQ,x,1)=diff(EQ,x,1);
```

$$\frac{d}{d\,x}\,e^{a\,x^2}=2\,a\,x\,e^{a\,x^2}$$

例 21 $\frac{d}{d\,x}\,\sinh(x)$

```
EQ:sinh(x);
'diff(EQ,x,1)=diff(EQ,x,1);
```

$$\frac{d}{d\,x}\,\sinh(x)=\cosh(x)$$

例 22 $\frac{d}{d\,x}\,x^x$

```
EQ:x^x;
'diff(EQ,x,1)=diff(EQ,x,1);
```

$$\frac{d}{d\,x}\,x^x=x^x\,\left(\log(x)+1\right)$$

例 23 $\frac{d}{d\,x}\,\frac{\log(x)}{\log(a)}$

```
EQ:log(x)/log(a);
'diff(EQ,x,1)=diff(EQ,x,1);
```

$$\frac{d}{d\,x}\,\frac{\log(x)}{\log(a)}=\frac{1}{\log(a)\,x}$$

例 24 $\frac{d}{d\,x}\,\log\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$

```
EQ:log(x+sqrt(1+x^2));
'diff(EQ,x,1)=diff(EQ,x,1);
factor(%);
```

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\,x}\,\log\left(\sqrt{x^2+1}+x\right) =& \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+1}{\sqrt{x^2+1}+x}\\ =& \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\end{aligned}$$

例 25 $\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{acosh}(x)$

```
EQ:acosh(x);
'diff(EQ,x,1)=diff(EQ,x,1);
```

$$\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{acosh}(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

2.1.2 Maxima の全微分

偏微分の実行は $diff$ 関数で行える。実行方法は下記の要領で、変数と微分階数を入力しないで行う。

$$diff(\text{関数})$$

例 1　$d\,(e^{x\,y})$

```
diff (exp (x*y));
```

$$d\,e^{x\,y} = x\,e^{x\,y}\,\mathrm{del}\,(y) + y\,e^{x\,y}\,\mathrm{del}\,(x)$$

例 2　$d\,(x\,y\,z)$

```
diff (x*y*z);
```

$$d\,(x\,y\,z) = x\,y\,\mathrm{del}\,(z) + x\,z\,\mathrm{del}\,(y) + y\,z\,\mathrm{del}\,(x)$$

例 3　$d\,f$

```
depends(f,[x,y]);
diff (f);
```

$$df = \left(\frac{d}{d\,y}\,f\right)\,\mathrm{del}\,(y) + \left(\frac{d}{d\,x}\,f\right)\,\mathrm{del}\,(x)$$

2.1.3 Maxima の偏微分

偏微分の実行は $diff$ 関数で行える。実行方法は下記の要領で行う。

$$diff(\text{関数}, \text{変数}_1, \text{微分階数}_1, \text{変数}_2, \text{微分階数}_2)$$

微分の例題を下記に示す。

```
EQ:x^3*y^3;
'diff(EQ,x,2,y,1)=diff(x^3*y^3,x,2,y,1);
```

$$\frac{d^3}{d\,x^2\,d\,y}\,\left(x^3\,y^3\right) = 18\,x\,y^2$$

偏微分の関数の表現として、$depends$ 関数を用いると下記のように、容易に偏微分の実行ができる。

```
depends(x,[t]);
depends(y,[t]);
depends(f,[x,y]);
depends(g,[x]);
'diff(f,t,1)=diff(f,t,1);
'diff(f*g,t,1)=diff(f*g,t,1);
```

$$[\mathrm{x}\,(t)]$$

$$[\mathrm{y}\,(t)]$$

$$[\mathrm{f}\,(x, y)]$$

$$[\mathrm{g}\,(x)]$$

$$\frac{d}{d\,t}\,f = \left(\frac{d}{d\,y}\,f\right)\,\left(\frac{d}{d\,t}\,y\right) + \left(\frac{d}{d\,x}\,f\right)\,\left(\frac{d}{d\,t}\,x\right)$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\,t}\,(f\,g) =& g\left(\left(\frac{d}{d\,y}\,f\right)\,\left(\frac{d}{d\,t}\,y\right)\right. \\ &\left. + \left(\frac{d}{d\,x}\,f\right)\,\left(\frac{d}{d\,t}\,x\right)\right) \\ &+ f\,\left(\frac{d}{d\,x}\,g\right)\,\left(\frac{d}{d\,t}\,x\right)\end{aligned}$$

2.2 級数

2.2.1 Maxima の級数和

級数の実行は sum 関数で行える。実行方法は下記の要領で行う。

$$sum(関数, 添え字変数, 初期値, 終値)$$

また、下記により、級数の簡素化を行うことができる。

$$sum の式, simpsum$$

級数の例題を下記に示す。

例 1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,(n+1)}$

```
sum(1/(n)/(n+1),n,1,inf);
%,simpsum;
```

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,(n+1)}$$

簡素化の結果が得られない。

例 2 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

```
sum(1/(n)^2,n,1,inf);
%,simpsum;
```

簡素化の結果は、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

例 3 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$

```
sum(1/(n)^4,n,1,inf);
%,simpsum;
```

簡素化の結果は、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

例 4 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2\,n+1)^2}$

```
sum(1/(2*n+1)^2,n,0,inf);
%,simpsum;
```

簡素化の結果が得られない。

例 5 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$

```
sum(1/(n!),n,0,inf);
%,simpsum;
```

簡素化の結果が得られない。

例 6 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$

```
sum (1/2^n, n, 1, inf);
%,simpsum;
```

簡素化の結果は、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$$

例 7 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$

```
sum (1/3^n, n, 1, inf);
%,simpsum;
```

簡素化の結果は、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{2}$$

2.2.2 Maxima の乗積

乗積の実行は *product* 関数で行える。実行方法は下記の要領で行う。

$$product(関数, 添え字変数, 初期値, 終値)$$

また、下記により、級数の簡素化を行うことができる。

$$product の式, simpproduct$$

乗積の例題を下記に示す。

例 1　$\prod_{n=1}^{4} x + \frac{n\,(n+1)}{2}$

```
kill(all);
'product(x+n*(n+1)/2,n,1,4)=product(x
 +n*(n+1)/2,n,1,4);
```

簡素化の結果は、

$$\prod_{n=1}^{4} x + \frac{n\ (n+1)}{2} = (x+1)\ (x+3)\ (x+6)\ (x+10)$$

例 2　$\prod_{k=1}^{n} k$

```
product(k,k,1,n)=n!;
lhs(%),simpproduct;
```

簡素化の結果は、

$$\prod_{k=1}^{n} k = n!$$

例 3　$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + 1$

```
product((1+1/n^2),n,1,inf)=sinh(%pi)/%pi;
lhs(%),simpproduct;
```

簡素化の結果が得られない。

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + 1 = \frac{\sinh(\pi)}{\pi}$$

例 4　$\prod_{n=2}^{\infty} 1 - \frac{1}{n^2}$

```
product((1-1/n^2),n,2,inf)=1/2;
lhs(%),simpproduct;
```

簡素化の結果が得られない。

$$\prod_{n=2}^{\infty} 1 - \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2}$$

例 5　$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + 1$

```
product((1+1/n^2),n,1,inf)=(%e^(%pi)
 -%e^(-%pi))/(2*%pi);
lhs(%),simpproduct;
```

簡素化の結果が得られない。

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + 1 = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\,\pi}$$

例 6　$\prod_{n=1}^{\infty} 1 - \frac{x^2}{n^2}$

```
product((1-x^2/n^2),n,1,inf)=sin(%pi*x)
 /(%pi*x);
lhs(%),simpproduct;
```

簡素化の結果が得られない。

$$\prod_{n=1}^{\infty} 1 - \frac{x^2}{n^2} = \frac{\sin(\pi\,x)}{\pi\,x}$$

例 7　$\prod_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{x}{2^n}\right)$

```
product(cos(x/2^n),n,1,inf)=sin(x)/x;
lhs(%),simpproduct;
```

簡素化の結果が得られない。

$$\prod_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{x}{2^n}\right) = \frac{\sin(x)}{x}$$

2.2.3 Maxima の Taylor 展開

Taylor 展開は下記で表現できる。

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d^n}{d\,x^n}\,f(a)\,\frac{(x-a)^n}{n!}$$

Taylor 展開の実行は *taylor* 関数で行える。実行方法は下記の要領で行う。

$$taylor(\text{関数},\text{変数}_1,a,n)$$

ここで、a のまわりの Taylor 級数を $(x-a)^n$ まで展開する。

Taylor 展開の例題を下記に示す。当然ながら、関数の級数表示と Maxima による Taylor 展開の結果は一致している。

例 1 e^x

```
kill(all);
%e^x=sum(x^n/(n!),n,0,inf);
%e^x=sum(x^n/(n!),n,0,6);
%e^x=taylor(%e^x,x,0,6);
```

級数展開結果、

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$
$$=...+\frac{x^6}{720}+\frac{x^5}{120}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{2}+x+1$$

Taylor 展開結果、

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^5}{120}+\frac{x^6}{720}+...$$

例 2 $\cos(x)$

```
cos(x)=sum((-1)^(n)*x^(2*n)/((2*n)!),
 n,0,inf);
cos(x)=sum((-1)^(n)*x^(2*n)/((2*n)!),
 n,0,4);
cos(x)=taylor(cos(x),x,0,8);
```

級数展開結果、

$$\cos(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,x^{2\,n}}{(2\,n)!}$$
$$=...+\frac{x^8}{40320}-\frac{x^6}{720}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^2}{2}+1$$

Taylor 展開結果、

$$\cos(x)=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720}+\frac{x^8}{40320}+...$$

例 3 $\sin(x)$

```
sin(x)=sum((-1)^(n)*x^(2*n+1)/((2*n+1)!),
 n,0,inf);
sin(x)=sum((-1)^(n)*x^(2*n+1)/((2*n+1)!),
 n,0,4);
sin(x)=taylor(sin(x),x,0,9);
```

級数展開結果、

$$\sin(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,x^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!}$$
$$=...+\frac{x^9}{362880}-\frac{x^7}{5040}+\frac{x^5}{120}-\frac{x^3}{6}+x$$

Taylor 展開結果、

$$\sin(x)=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\frac{x^7}{5040}+\frac{x^9}{362880}+...$$

例 4 $\log(x+1)$

```
log(x+1)=sum((-1)^(n-1)*x^n/n,n,1,inf);
log(x+1)=sum((-1)^(n-1)*x^n/n,n,1,5);
log(x+1)=taylor(log(x+1),x,0,5);
```

級数展開結果、

$$\log(x+1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\,x^n}{n}$$
$$=...+\frac{x^5}{5}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x$$

Taylor 展開結果、

$$\log(x+1)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}+...$$

例 5 $-\log(1-x)$

```
'log(1/(1-x))=sum(x^n/(n),n,1,inf);
'log(1/(1-x))=sum(x^n/(n),n,1,5);
'log(1/(1-x))=taylor(log(1/(1-x)),x,0,5);
```

級数展開結果、

$$-\log(1-x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$$
$$=...+\frac{x^5}{5}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x$$

Taylor 展開結果、

$$-\log(1-x)=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}+...$$

2.3　積分

2.3.1　Maxima の積分

微分の実行は $integrate$ 関数で行える。実行方法は下記の要領で行う。
不定積分では、

$$integrate(\text{関数}, \text{変数})$$

定積分では、

$$integrate(\text{関数}, \text{変数}, \text{初期値}, \text{終値})$$

2.3.2　不定積分

不定積分の例題を下記に示す。

例 1　$\int x^\alpha dx$

```
EQ:x^\alpha;
assume(\alpha>-1);
'integrate(EQ,x)=integrate(EQ,x);
```

$$\alpha > -1$$
$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

例 2　$\int \frac{1}{x} dx$

```
EQ:1/x;
'integrate(EQ,x)=integrate(EQ,x);
```

$$\int \frac{1}{x} dx = \log(x)$$

例 3　$\int e^x dx$

```
EQ:%e^x;
'integrate(EQ,x)=integrate(EQ,x);
```

$$\int e^x dx = e^x$$

例 4　$\int \sin(x)\, dx$

```
EQ:sin(x);
'integrate(EQ,x)=integrate(EQ,x);
```

$$\int \sin(x)\, dx = -\cos(x)$$

例 5　$\int \cos(x)\, dx$

```
EQ:cos(x);
'integrate(EQ,x)=integrate(EQ,x);
```

$$\int \cos(x)\, dx = \sin(x)$$

例 6　$\int \tan(x)\, dx$

```
EQ:tan(x);
'integrate(EQ,x)=integrate(EQ,x);
```

$$\int \tan(x)\, dx = \log(\sec(x))$$

例 7　$\int \frac{1}{x^2+1} dx$

```
EQ:1/(1+x^2);
'integrate(EQ,x)=integrate(EQ,x);
```

$$\int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{atan}(x)$$

例 8　$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

```
EQ:1/sqrt(1-x^2);
'integrate(EQ,x)=integrate(EQ,x);
```

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{asin}(x)$$

例 9 $\int \frac{1}{x\,(x^2-1)}dx$

```
EQ:1/x/(x^2-1);
'integrate(EQ,x)=integrate(EQ,x);
```

$$\int \frac{1}{x\,(x^2-1)}dx = \frac{\log\left(x^2-1\right)}{2} - \log\left(x\right)$$

例 10 $\int \frac{1}{x^2-1}dx$

```
EQ:1/(x^2-1);
'integrate(EQ,x)=integrate(EQ,x);
```

$$\int \frac{1}{x^2-1}dx = \frac{\log\left(x-1\right)}{2} - \frac{\log\left(x+1\right)}{2}$$

例 11 $\int \frac{1}{x^2+1}dx$

```
EQ:1/(x^2+1);
'integrate(EQ,x)=integrate(EQ,x);
```

$$\int \frac{1}{x^2+1}dx = \mathrm{atan}\left(x\right)$$

例 12 $\int (a\,x+b)^n dx$

```
assume(n>1);
EQ:(a*x+b)^n;
'integrate(EQ,x)=integrate(EQ,x);
```

$$n > 1$$

$$\int (a\,x+b)^n dx = \frac{(a\,x+b)^{n+1}}{a\,(n+1)}$$

例 13 $\int \frac{1}{a\,x+b}dx$

```
EQ:1/(a*x+b);
'integrate(EQ,x)=integrate(EQ,x);
```

$$\int \frac{1}{a\,x+b}dx = \frac{\log\left(a\,x+b\right)}{a}$$

例 14 $\int \frac{p\,x+q}{(a\,x+b)^2}dx$

```
EQ:(p*x+q)/(a*x+b)^2;
'integrate(EQ,x)=integrate(EQ,x);
```

$$\int \frac{p\,x+q}{(a\,x+b)^2}dx = \frac{p\log\left(a\,x+b\right)}{a^2} - \frac{a\,q-b\,p}{a^3\,x+a^2\,b}$$

例 15 $\int \frac{1}{x^2+c}dx$

```
assume(c>0);
EQ:1/(x^2+c);
'integrate(EQ,x)=integrate(EQ,x);
```

$$c > 0$$

$$\int \frac{1}{x^2+c}dx = \frac{\mathrm{atan}\left(\frac{x}{\sqrt{c}}\right)}{\sqrt{c}}$$

例 16 $\int \frac{1}{x^2+c}dx$

```
forget(c>0);
assume(c<0);
'integrate(EQ,x)=integrate(EQ,x);
```

$$c < 0$$

$$\int \frac{1}{x^2+c}dx = \frac{\log\left(\frac{2\,x-2\,\sqrt{-c}}{2\,x+2\,\sqrt{-c}}\right)}{2\,\sqrt{-c}}$$

例 17 $\int \frac{1}{x^3+a^3}dx$

```
EQ:1/(x^3+a^3);
'integrate(EQ,x)=integrate(EQ,x);
```

$$\int \frac{1}{x^3+a^3}dx = -\frac{\log\left(x^2-a\,x+a^2\right)}{6\,a^2} + \frac{\mathrm{atan}\left(\frac{2\,x-a}{\sqrt{3}\,a}\right)}{\sqrt{3}\,a^2} + \frac{\log\left(x+a\right)}{3\,a^2}$$

例 18　$\int \sqrt{x^2+c}dx$

```
EQ:sqrt(x^2+c);
'integrate(EQ,x)=integrate(EQ,x);
```

$$\int \sqrt{x^2+c}dx = \frac{c\log\left(2\sqrt{x^2+c}+2\,x\right)}{2} + \frac{x\sqrt{x^2+c}}{2}$$

例 19　$\int \sqrt{a^2-x^2}dx$

```
EQ:sqrt(a^2-x^2);
'integrate(EQ,x)=integrate(EQ,x);
```

$$\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{a^2\operatorname{asin}\left(\frac{x}{|a|}\right)}{2} + \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2}$$

例 20　$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$

```
EQ:1/sqrt(a^2-x^2);
'integrate(EQ,x)=integrate(EQ,x);
```

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \operatorname{asin}\left(\frac{x}{|a|}\right)$$

例 21　$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx$

```
EQ:1/sqrt(x^2-a^2);
'integrate(EQ,x)=integrate(EQ,x);
```

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = \log\left(2\sqrt{x^2-a^2}+2\,x\right)$$

2.3.3 定積分

定積分の例題を下記に示す。

例 1　$\int_0^1 (1-x)^{p-1}\,xdx$

```
EQ:(1-x)^(p-1)*x;
assume(p>0);
'integrate(EQ,x,0,1)=integrate(EQ,x,0,1);
```

$$p > 0$$

$$\int_0^1 (1-x)^{p-1}\,xdx = \frac{1}{p^2+p}$$

例 2　$int_0^1 e^{-p\,x}dx$

```
EQ:%e^(-p*x);
assume(p>0);
'integrate(EQ,x,0,1)=integrate(EQ,x,0,1);
```

$$\int_0^1 e^{-p\,x}dx = \frac{1}{p} - \frac{e^{-p}}{p}$$

例 3　$\int_0^1 \log(1-x)\,\log(x)\,dx$

```
EQ:log(x)*log(1-x);
'integrate(EQ,x,0,1)=integrate(EQ,x,0,1);
```

$$\int_0^1 \log(1-x)\,\log(x)\,dx = -\frac{\pi^2-12}{6}$$

例 4　$\int_0^1 x\sin(\alpha\,x)\,dx$

```
EQ:x*sin(\alpha*x);
'integrate(EQ,x,0,1)=integrate(EQ,x,0,1);
```

$$\int_0^1 x\sin(\alpha\,x)\,dx = \frac{\sin(\alpha)-\alpha\cos(\alpha)}{\alpha^2}$$

例 **5**　$\int_0^1 \operatorname{asin}(\alpha\, x)\, dx$

```
EQ:asin(\alpha*x);
'integrate(EQ,x,0,1)=integrate(EQ,x,0,1);
```

$$\int_0^1 \operatorname{asin}(\alpha\, x)\, dx = \frac{\alpha \operatorname{asin}(\alpha) + \sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha} - \frac{1}{\alpha}$$

例 **6**　$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2\,x} \sin(x)^2 dx$

```
EQ:%e^(2*x)*(sin(x))^2;
'integrate(EQ,x,0,%pi/2)
 =integrate(EQ,x,0,%pi/2);
```

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2\,x} \sin(x)^2 dx = \frac{3\,e^{\pi}}{8} - \frac{1}{8}$$

例 **7**　$\int_0^{\infty} \frac{1}{e^{p\,x}+1} dx$

```
EQ:1/(1+%e^(p*x));
'integrate(EQ,x,0,inf)
 =integrate(EQ,x,0,inf);
```

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{e^{p\,x}+1} dx = \frac{\log(2)}{p}$$

例 **8**　$\int_0^{\infty} e^{-p^2\,x^2} dx$

```
EQ:%e^(-p^2*x^2);
'integrate(EQ,x,0,inf)
 =integrate(EQ,x,0,inf);
```

$$\int_0^{\infty} e^{-p^2\,x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\,p}$$

例 **9**　$\int_0^{\infty} \frac{\sin(p\,x)}{x} dx$

```
EQ:sin(p*x)/x;
'integrate(EQ,x,0,inf)
 =integrate(EQ,x,0,inf);
```

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(p\,x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

第3章　常微分方程式

3.1　Maximaの微分方程式

3.1.1　*desolve* 関数

微分方程式の解は *desolve* 関数で得られる。この関数は連立微分方程式を解く場合に有効である。実行方法は下記の要領で行う。まず、*atvalue* 関数で初期値を与え、*desolve* 関数で解く。ここで関数型として *depends* で定義した関数は使用できず、$y(x)$ の型が要求される。

atvalue(関数, 変数の初期値, 関数の初期値)

desolve([微分方程式$_1$, 微分方程式$_2$, $\cdots$],
　[変数$_1$, 変数$_2$, $\cdots$])

例題を下記に示す。

```
kill(all);
EQ1:diff(y(x),x,2)+2*y(x)+z(x)=0;
EQ2:y(x)+diff(z(x),x,2)+2*z(x)=0;
atvalue(y(x),x=0,1);
atvalue(diff(y(x),x,1),x=0,0);
atvalue(z(x),x=0,2);
atvalue(diff(z(x),x,1),x=0,0);
desolve([EQ1,EQ2],[y(x),z(x)]);
```

$$\frac{d^2}{d\,x^2}\,\mathrm{y}\left(x\right)+\mathrm{z}\left(x\right)+2\,\mathrm{y}\left(x\right)=0$$

$$\frac{d^2}{d\,x^2}\,\mathrm{z}\left(x\right)+2\,\mathrm{z}\left(x\right)+\mathrm{y}\left(x\right)=0$$

$$[\mathrm{y}\left(x\right)=\frac{3\cos\left(\sqrt{3}\,x\right)}{2}-\frac{\cos\left(x\right)}{2},$$

$$\mathrm{z}\left(x\right)=\frac{3\cos\left(\sqrt{3}\,x\right)}{2}+\frac{\cos\left(x\right)}{2}]$$

atvalue 関数で初期値を与えないと下記となる。

```
kill(all);
EQ1:diff(y(x),x,2)+2*y(x)+z(x)=0;
EQ2:y(x)+diff(z(x),x,2)+2*z(x)=0;
desolve([EQ1,EQ2],[y(x),z(x)]);
```

$$\frac{d^2}{d\,x^2}\,\mathrm{y}\left(x\right)+\mathrm{z}\left(x\right)+2\,\mathrm{y}\left(x\right)=0$$

$$\frac{d^2}{d\,x^2}\,\mathrm{z}\left(x\right)+2\,\mathrm{z}\left(x\right)+\mathrm{y}\left(x\right)=0$$

$$\begin{aligned}[\mathrm{y}\left(x\right)=&\frac{\sin\left(\sqrt{3}\,x\right)\,\left(\left.\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{z}\left(x\right)\right|_{x=0}+\left.\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{y}\left(x\right)\right|_{x=0}\right)}{2\,\sqrt{3}}\\&+\frac{\sin\left(x\right)\,\left(\left.\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{y}\left(x\right)\right|_{x=0}-\left.\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{z}\left(x\right)\right|_{x=0}\right)}{2}\\&+\frac{\left(\mathrm{z}\left(0\right)+\mathrm{y}\left(0\right)\right)\,\cos\left(\sqrt{3}\,x\right)}{2}\\&-\frac{\left(\mathrm{z}\left(0\right)-\mathrm{y}\left(0\right)\right)\,\cos\left(x\right)}{2},\\\mathrm{z}\left(x\right)=&\frac{\sin\left(\sqrt{3}\,x\right)\,\left(\left.\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{z}\left(x\right)\right|_{x=0}+\left.\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{y}\left(x\right)\right|_{x=0}\right)}{2\,\sqrt{3}}\\&+\frac{\sin\left(x\right)\,\left(\left.\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{z}\left(x\right)\right|_{x=0}-\left.\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{y}\left(x\right)\right|_{x=0}\right)}{2}\\&+\frac{\left(\mathrm{z}\left(0\right)+\mathrm{y}\left(0\right)\right)\,\cos\left(\sqrt{3}\,x\right)}{2}\\&+\frac{\left(\mathrm{z}\left(0\right)-\mathrm{y}\left(0\right)\right)\,\cos\left(x\right)}{2}]\end{aligned}$$

3.1.2 *ode*2 関数

微分方程式の解は *ode*2 関数で得られる。この関数は広範囲の一階・二階微分方程式を解く場合に有効である。実行方法は下記の要領で行う。*ode*2 関数で一般解を求めた後、*bc*2, *ic*1, *ic*2 関数で境界値問題を解く。関数の形として、*depends* 関数や $y(x)$ の形でも解ける。

$$ode2(\text{微分方程式}, \text{関数}, \text{変数})$$

一階微分方程式の境界値問題に対して、

$$ic1(\text{ode2 で得られた解}, \text{変数の境界値}, \text{関数の境界値})$$

二階微分方程式の境界値問題に対して、

$$ic2(\text{ode2 で得られた解}, \text{変数の境界値}, \text{関数の境界値}, \text{微分関数の境界値})$$

または、

$$bc2(\text{ode2 で得られた解}, \text{変数の境界値}_1, \text{関数の境界値}_1, \text{変数の境界値}_2, \text{関数の境界値}_2)$$

例題を下記に示す。

一階微分方程式の場合

```
kill(all);
EQ: diff(y(x),x,1)=-(x-C)/y(x);
ANS:ode2(EQ,y(x),x);
ANS1:ic1(ANS,x=0,y(x)=1);
```

下記に出力結果を示す。$y\left(x\right)$ の関数形で解は得られるが、境界条件を ic1 で求めた結果は満足ではない。

$$\frac{d}{d\,x}\,y\left(x\right)=\frac{C-x}{y\left(x\right)}$$

$$\frac{{y\left(x\right)}^{2}}{2}=\frac{2\,x\,C-x^{2}}{2}+\%c$$

$$\frac{{y\left(x\right)}^{2}}{2}=\frac{2\,x\,C-x^{2}+{y\left(0\right)}^{2}}{2}$$

```
kill(all);
depends(y,x);
EQ: diff(y,x,1)=-(x-C)/y;
ANS:ode2(EQ,y,x);
ANS1:ic1(ANS,x=0,y=1);
```

下記に depends を使った関数形の出力結果を示す。境界条件を ic1 で求めた結果は満足できる。

$$[\mathrm{y}\left(x\right)]$$

$$\frac{d}{d\,x}\,y=\frac{C-x}{y}$$

$$\frac{y^{2}}{2}=\frac{2\,x\,C-x^{2}}{2}+\%c$$

$$\frac{y^{2}}{2}=\frac{2\,x\,C-x^{2}+1}{2}$$

二階微分方程式の場合

```
kill(all);
EQ:x^2*diff(y(x),x,2)+x*diff(y(x),x,1)
  -4*y(x)=0;
ANS:ode2(EQ,y(x),x);
ANS1:ic2(ANS,x=1,y(x)=1,diff(y(x),x,1)=0);
ANS2:bc2(ANS,x=1,y(x)=0,x=2,y(x)=1);
```

下記に出力結果を示す。$y\left(x\right)$ の関数形で解は得られるが、境界条件を ic2,bc2 で求めた結果は満足ではない。

$$x^{2}\,\left(\frac{d^{2}}{d\,x^{2}}\,y\left(x\right)\right)+x\,\left(\frac{d}{d\,x}\,y\left(x\right)\right)-4\,y\left(x\right)=0$$

$$y\left(x\right)=\%k1\,x^{2}+\frac{\%k2}{x^{2}}$$

$$y\left(x\right)=\frac{y\left(1\right)\,x^{2}}{2}+\frac{y\left(1\right)}{2\,x^{2}}$$

$$y\left(x\right)=\frac{16\,y\left(1\right)-4\,y\left(2\right)}{15\,x^{2}}-\frac{\left(y\left(1\right)-4\,y\left(2\right)\right)\,x^{2}}{15}$$

```
kill(all);
depends(y,x);
EQ:x^2*diff(y,x,2)+x*diff(y,x,1)
  -4*y=0;
ANS:ode2(EQ,y,x);
ANS1:ic2(ANS,x=1,y=1,diff(y,x,1)=0);
ANS2:bc2(ANS,x=1,y=0,x=2,y=1);
```

下記に depends を使った関数形の出力結果を示す。境界条件を ic2,bc2 で求めた結果は満足できる。

$$[\mathrm{y}\left(x\right)]$$

$$x^{2}\,\left(\frac{d^{2}}{d\,x^{2}}\,y\right)+x\,\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)-4\,y=0$$

$$y=\%k1\,x^{2}+\frac{\%k2}{x^{2}}$$

$$y=\frac{x^{2}}{2}+\frac{1}{2\,x^{2}}$$

$$y=\frac{4\,x^{2}}{15}-\frac{4}{15\,x^{2}}$$

3.1.3　微分方程式の数値解：rk 関数

ルンゲ・クッタ法で微分方程式を rk 関数で数値解析する。ルンゲ・クッタ法であるから、微分方程式を左辺が一階微分の形、右辺が独立変数と従属変数にだけ依存する式で表す。ここで独立変数は $x(t)$ の形は扱えない。実行する前に、ルンゲ・クッタ法のプログラムをロードする必要があるので、$load("dynamics");$ を入力する。実行方法は下記の要領で行う。

rk([微分方程式の右辺$_1$, 微分方程式の右辺$_2, \cdots$],
[従属変数$_1$, 従属変数$_2, \cdots$],
[従属変数初期値$_1$, 従属変数初期値$_2, \cdots$],
[独立変数, 独立変数初期値, 独立変数終値,
独立変数数値解析間隔])

例題を下記に示す。

$$\frac{d}{d\,t}\,x = -4\,y^2 - x^2 + 4$$
$$\frac{d}{d\,t}\,y = y^2 - x^2 + 1$$

の場合、

```
kill(all);
EQ1:'diff(x,t)=4-x^2-4*y^2;
EQ2:'diff(y,t)=y^2-x^2+1;
load("dynamics");
sol:rk([rhs(EQ1),rhs(EQ2)],[x,y],
  [-1.25,0.75],[t,0,4,0.02]);
```

$$\frac{d}{d\,t}\,x = -4\,y^2 - x^2 + 4$$
$$\frac{d}{d\,t}\,y = y^2 - x^2 + 1$$

結果は sol にリストの形式で出力される。

```
kill(all);
depends(x,[t]);
EQ1:'diff(x,t,2)=-sin(t);
ode2(EQ1,x,t);
EQ11:ic2(%,t=0,x=0,diff(x,t,1)=0);
Tmax:3;
dT:0.03;
Nplot:fix(Tmax/dT);
load("dynamics");
P[0]:0;
sol:rk([y,rhs(EQ1)],[x,y],[P[0],0],
  [t,0,Tmax,dT]);
list12:[[sol[1][1],sol[1][2]]];
for J:2 thru Nplot do(list12:append(list12,
  [[sol[J][1],sol[J][2]]]));
plot2d([rhs(EQ11),[discrete,list12]],
 [t,0,4],[legend, "sin(t)-t", "rk"],
 [style,[lines,4,1],[lines,4,2]]);
```

$$\frac{d^2}{d\,t^2}\,x = -sin\,(t)$$

の場合、下記の 1 階連立微分方程式に置き換えて解く。

$$\frac{d}{d\,t}\,x = y$$

$$\frac{d}{d\,t}\,y = -sin\,(t)$$

数値解：rk 関数で解いた結果と解析解の比較を下記に示す。当然ながらよく一致している。

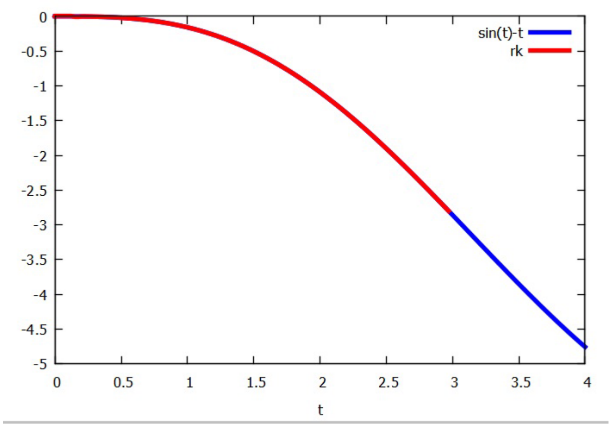


図 3.1.1: 数値解と解析解

3.2　一階微分方程式

3.2.1　変数分離形

$$\frac{d}{d\,x}\,y = f(x)g(y)$$

の形の微分方程式を変数分離型という。以下に Maxima で解いた結果を示す。下記の結果から、desolve 関数では一部の簡単な問題は解けるが、他はうまく解けなかった。一方、ode2 関数では、全てよい結果が得られた。例題を下記に示す。

```
kill(all);
depends(y,[x]);
EQ: diff(y,x,1)=y;
ode2(EQ,y,x);
```

$$[\mathrm{y}\,(x)]$$

$$\frac{d}{d\,x}\,y = y$$

$$y = \%c\,e^{x}$$

```
EQ: diff(y,x,1)=x-y;
ode2(EQ,y,x);
```

$$\frac{d}{d\,x}\,y = x - y$$

$$y = e^{-x}\,\left((x-1)\,e^{x} + \%c\right)$$

```
EQ:diff(y,x,1)=cot(y)/tan(x);
ode2(EQ,y,x);
```

$$\frac{d}{d\,x}\,y = \frac{\cot(y)}{\tan(x)}$$

$$-\frac{\log\left(1-\sin(y)^{2}\right)}{2} = \log(\sin(x)) + \%c$$

```
EQ: diff(y,x,1)=1/(x*(x+1));
ode2(EQ,y,x);
```

$$\frac{d}{d\,x}\,y = \frac{1}{x\,(x+1)}$$

$$y = -\log(x+1) + \log(x) + \%c$$

```
EQ:%e^(2*x-y)+%e^(x+y) *diff(y,x,1)=0;
ode2(EQ,y,x);
```

$$e^{y+x}\,\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right) + e^{2\,x-y} = 0$$

$$\frac{e^{2\,y} + 2\,e^{x}}{2} = \%c$$

```
EQ: cos(x)*sin(y)*diff(y,x,1)
 =sin(x)*cos(y);
ode2(EQ,y,x);
```

$$\cos(x)\,\sin(y)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right) = \sin(x)\,\cos(y)$$

$$-\log(\cos(y)) = \%c - \log(\cos(x))$$

```
EQ:diff(y,x,1)=(-(x-C))/y;
ode2(EQ,y,x);
```

$$\frac{d}{d\,x}\,y = \frac{C-x}{y}$$

$$\frac{y^{2}}{2} = \frac{2\,x\,C - x^{2}}{2} + \%c$$

```
assume(G>0);
assume(K>0);
EQ:M*diff(v(t),t,1)=-K*v(t)^2-G;
ode2(EQ,v(t),t);
```

$$[G > 0]$$

$$[K > 0]$$

$$\left(\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{v}\,(t)\right)\,M = -\mathrm{v}\,(t)^{2}\,K - G$$

$$-\frac{\mathrm{atan}\left(\frac{\mathrm{v}(t)\,\sqrt{K}}{\sqrt{G}}\right)\,M}{\sqrt{G}\,\sqrt{K}} = t + \%c$$

3.2.2 同次形

$$\frac{d}{d\,x}\,y=f(\frac{y}{x})$$

の形の微分方程式を同次形という。以下に Maxima で解いた結果を示す。下記の結果から、desolve 関数では全く解けなかった。一方、ode2 関数では、一部タイプの式で解けなかった。しかし、例題に示すように変数変換を行えば解くことができる。例題を下記に示す。

```
kill(all);
depends(y,[x]);
depends(u,[x]);
EQ:(x^3+y^3)-3*x*y^2*diff(y,x,1)=0;
ode2(EQ,y,x);
```

$$-3\,x\,y^2\,\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)+y^3+x^3=0$$

$$-\frac{2\,y^3-x^3}{2\,x}=\%c$$

```
EQ:2*x*y*diff(y,x,1)=-(x^2-y^2);
ode2(EQ,y,x);
```

$$2\,x\,y\,\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)=y^2-x^2$$

$$-\frac{x}{y^2+x^2}=\%c$$

```
EQ:(3*x+4*y+1)*diff(y,x,1)=-(2*x+3*y+1);
ode2(EQ,y,x);
```

$$(4\,y+3\,x+1)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)=-3\,y-2\,x-1$$

$$2\,y^2+(3\,x+1)\,y+x^2+x=\%c$$

```
EQ:y*(1-x*y+x^2*y^2)+x*(x^2*y^2+x*y)
 *diff(y,x,1)=0;
ode2(EQ,y,x);
ANS1:%^4;
```

$$x\,\left(x^2\,y^2+x\,y\right)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)+y\,\left(x^2\,y^2-x\,y+1\right)=0$$

$$x=\%c\,e^{\frac{3\log(2\,x\,y-1)+2\,x\,y}{4}}$$

$$x^4=\%c^4\,(2\,x\,y-1)^3\,e^{2\,x\,y}$$

```
EQ:x*y^2*diff(y,x,1)=x^3+y^3;
ode2(EQ,y,x);
```

$$x\,y^2\,\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)=y^3+x^3$$

$$\frac{y^3-3\,x^3\log(x)}{3\,x^3}=\%c$$

```
EQ:diff(y,x,1)=((x-y-1)/(2*x-2*y+1))^2;
FYU:y=u+x;
FUY:solve(FYU,u)[1];
subst([FYU],EQ);
ev(%,diff);
ode2(%,u,x);
subst([FUY],%);
```

$$\frac{d}{d\,x}\,y=\frac{(-y+x-1)^2}{(-2\,y+2\,x+1)^2}$$

このままでは解けないので、下記の変換を行って解く。

$$y=x+u$$

$$u=y-x$$

$$\frac{d}{d\,x}\,(x+u)=\frac{(-u-1)^2}{(-2\,(x+u)+2\,x+1)^2}$$

$$\frac{d}{d\,x}\,u+1=\frac{(-u-1)^2}{(-2\,(x+u)+2\,x+1)^2}$$

$$\frac{\log(u)-9\log(u-2)-8\,u}{6}=x+\%c$$

$$\frac{\log(y-x)-9\log(y-x-2)-8\,(y-x)}{6}=x+\%c$$

```
EQ:(x+y)+(3*x+3*y-4)*diff(y,x,1)=0;
FYU:y=u-x;
FUY:solve(FYU,u)[1];
subst([FYU],EQ);
ev(%,diff);
ode2(%,u,x);
subst([FUY],%);
```

$$(3\,y+3\,x-4)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)+y+x=0$$

このままでは解けないので、下記の変換を行って解く。

$$y=u-x$$

$$u=y+x$$

$$\left(\frac{d}{d\,x}\,(u-x)\right)\,(3\,x+3\,(u-x)-4)+u=0$$

$$\left(\frac{d}{d\,x}\,u-1\right)\,(3\,x+3\,(u-x)-4)+u=0$$

$$\frac{2\log(u-2)+3\,u}{2}=x+\%c$$

$$\frac{2\log(y+x-2)+3\,(y+x)}{2}=x+\%c$$

3.2.3 線形

$$\frac{d}{d\,x}\,y+P(x)y=Q(x)$$

の形の微分方程式を一階線形微分方程式という。以下に Maxima で解いた結果を示す。下記の結果から、desolve 関数では全く解けなかった。一方、ode2 関数ではよい結果が得られた。例題を下記に示す。

```
kill(all);
depends(y,[x]);
diff(y,x,1)+P(x)*y=Q(x);
EQ:diff(y,x,1)-y/x=x*%e^x;
ode2(EQ,y,x);
```

$$\frac{d}{d\,x}\,y-\frac{y}{x}=x\,e^{x}$$
$$y=x\,\left(e^{x}+\%c\right)$$

```
EQ:2*x*diff(y,x,1)+y=2*x^2;
ode2(EQ,y,x);
```

$$2\,x\,\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)+y=2\,x^{2}$$
$$y=e^{-\frac{\log(x)}{2}}\,\left(\frac{2\,e^{\frac{5\log(x)}{2}}}{5}+\%c\right)$$

```
EQ:diff(y,x,1)+y=%e^x;
ode2(EQ,y,x);
```

$$\frac{d}{d\,x}\,y+y=e^{x}$$
$$y=e^{-x}\,\left(\frac{e^{2\,x}}{2}+\%c\right)$$

3.2.4 Bernoulli の方程式

$$\frac{d}{d\,x}\,y+\mathrm{P}\left(x\right)\,y=\mathrm{Q}\left(x\right)\,y^{n}$$

の形の微分方程式を一階線形微分方程式 Bernoulli の方程式という。以下に Maxima で解いた結果を示す。下記の結果から、desolve 関数では全く解けなかった。一方、ode2 関数では、よい結果が得られた。例題を下記に示す。

```
diff(y,x,1)+P(x)*y=Q(x)*y^n;
EQ: x*diff(y,x,1)+y=y^2*log(x);
ode2(EQ,y,x);
```

$$x\,\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)+y=\log\left(x\right)\,y^{2}$$
$$y=\frac{1}{x\,\left(\frac{\log(x)}{x}+\frac{1}{x}+\%c\right)}$$

```
EQ:diff(y,x,1)-y/x=A*(A-x)/y/x;
ode2(EQ,y,x);
```

$$\frac{d}{d\,x}\,y-\frac{y}{x}=\frac{A\,\left(A-x\right)}{x\,y}$$
$$-\frac{A^{2}-2\,x\,A+y^{2}}{2\,x^{2}}=\%c$$

3.2.5　Riccati の方程式

$$\frac{d}{d\,x}\,y+P(x)+Q(x)y+R(x)y^2=0$$

の形の微分方程式を一階線形微分方程式　Riccati の方程式という。以下に Maxima で解いた結果を示す。下記の結果から、desolve 関数では全く解けなかった。一方、ode2 関数では、よい結果が得られた。例題を下記に示す。

```
diff(y,x,1)+P(x)+Q(x)*y+R(x)*y^2=0;
EQ:diff(y,x,1)+4*x/(2*x^2-x)
   -(1+4*x)/(2*x^2-x)*y
   +1/(2*x^2-x)*y^2=0;
ode2(EQ,y,x);
```

$$\frac{d}{d\,x}\,y+\frac{y^2}{2\,x^2-x}+\frac{\left(-4\,x-1\right)\,y}{2\,x^2-x}+\frac{4\,x}{2\,x^2-x}=0$$

$$\frac{x\,y-2\,x^2}{y-1}=\%c$$

```
EQ:diff(y,x,1)+(x-2)/(x-x^2)*y
   +1/(x^2-x^3)*y^2=0;
ode2(EQ,y,x);
ratsimp(%);
```

$$\frac{d}{d\,x}\,y+\frac{y^2}{x^2-x^3}+\frac{\left(x-2\right)\,y}{x-x^2}=0$$

$$y=\frac{\left(x-1\right)\,e^{-2\,\left(\log(x-1)-\log(x)\right)}}{\frac{2\,x-1}{2\,x^2-4\,x+2}-\frac{1}{2\,x^2-4\,x+2}+\%c}$$

$$y=\frac{x^2}{\%c\,x-\%c+1}$$

```
EQ: diff(y,x,1)=(y-1)*(x/(x-1)-y);
ode2(EQ,y,x);
ANS:solve(%,y)[1];
```

$$\frac{d}{d\,x}\,y=\left(\frac{x}{x-1}-y\right)\,\left(y-1\right)$$

$$\frac{\left(x^2-2\,x\right)\,y-x^2+2}{2\,y-2}=\%c$$

$$y=\frac{x^2-2\,\%c-2}{x^2-2\,x-2\,\%c}$$

3.2.6　完全微分方程式

$$\mathrm{Q}\left(x,y\right)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)+\mathrm{P}\left(x,y\right)=0$$

が、ある関数 $u\left(x,y\right)$ に対して

$$\mathrm{P}\left(x,y\right)=\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{u}\left(x,y\right)$$

$$\mathrm{Q}\left(x,y\right)=\frac{d}{d\,y}\,\mathrm{u}\left(x,y\right)$$

以上から、下記の関係が得られ、

$$\frac{d}{d\,y}\,\mathrm{P}\left(x,y\right)=\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{Q}\left(x,y\right)$$

上式が成立するとき、完全微分方程式という。ode2 関数では、よい結果が得られた。例題を下記に示す。

```
kill(all);
depends(y,[x]);
Q(x,y)*diff(y,x,1)+P(x,y)=0;
P(x,y)=diff(u(x,y),x,1);
Q(x,y)=diff(u(x,y),y,1);
EQ: (7*x-3*y+2)+(4*y-3*x-5)*diff(y,x,1)=0;
ode2(EQ,y,x);
```

$$\left(4\,y-3\,x-5\right)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)-3\,y+7\,x+2=0$$

$$\frac{4\,y^2+\left(-6\,x-10\right)\,y+7\,x^2+4\,x}{2}=\%c$$

```
EQ: (x^3+5*x*y^2)+(5*x^2*y+2*y^3)
 *diff(y,x,1)=0;
ode2(EQ,y,x);
solve(%,y);
%[1];
subst([%],EQ);
ev(%,diff);
factor(%);
```

$$\left(2\,y^3+5\,x^2\,y\right)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)+5\,x\,y^2+x^3=0$$

$$\frac{2\,y^4+10\,x^2\,y^2+x^4}{4}=\%c$$

3.2.7 高次微分方程式

微分方程式を $p=\frac{d}{d\,x}\,y\left(x\right)$ で置き換え、p の 2 次以上の高次方程式となる場合、因数分解できると下記のように一般解が得られる。置き換えを行わず、Maxima で直接解くと、desolve 関数では不明な解が、ode2 関数では「first order equation not linear in y'」の表示が出て解けない。上記に示した方法をプログラムすると解くことができる。例題を下記に示す。

```
kill(all);
depends(y,[x]);
EQ: diff(y,x,1)^2-(2*x+3*y)*diff(y,x,1)
 +6*x*y=0;
ode2(EQ,y,x);
subst(p,diff(y,x,1),EQ);
PP:solve(%,p);
EQ1:subst(diff(y,x,1),p,PP[1]);
EQ2:subst(diff(y,x,1),p,PP[2]);
ANS1:ode2(EQ1,y,x);
ANS2:ode2(EQ2,y,x);
ANS:(lhs(ANS1)-rhs(ANS1))*(lhs(ANS2)
 -rhs(ANS2))=0;
```

$$\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)^2-\left(3\,y+2\,x\right)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)+6\,x\,y=0$$

$$\frac{d}{d\,x}\,y=p$$

上記の置き換えを行うと、微分方程式は、

$$-p\,\left(3\,y+2\,x\right)+6\,x\,y+p^2=0$$

p を求め、

$$[p=3\,y,p=2\,x]$$

微分方程式とすると、

$$\frac{d}{d\,x}\,y=3\,y$$

$$\frac{d}{d\,x}\,y=2\,x$$

これを ode2 関数で解いて、

$$y=\%c\,e^{3\,x}$$

$$y=x^2+\%c1$$

まとめると、

$$\left(y-x^2-\%c1\right)\,\left(y-\%c\,e^{3\,x}\right)=0$$

```
EQ: x^2*diff(y,x,1)^2+3*x*y*diff(y,x,1)
 +2*y^2=0;
ode2(EQ,y,x);
subst(p,diff(y,x,1),EQ);
PP:solve(%,p);
EQ1:subst(diff(y,x,1),p,PP[1]);
EQ2:subst(diff(y,x,1),p,PP[2]);
ANS1:ode2(EQ1,y,x);
ANS2:ode2(EQ2,y,x);
ANS:(lhs(ANS1)-rhs(ANS1))*(lhs(ANS2)
 -rhs(ANS2))=0;
```

$$x^2\,\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)^2+3\,x\,y\,\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)+2\,y^2=0$$

$$\frac{d}{d\,x}\,y=p$$

上記の置き換えを行うと、微分方程式は、

$$2\,y^2+3\,p\,x\,y+p^2\,x^2=0$$

p を求め、

$$[p=-\frac{2\,y}{x},p=-\frac{y}{x}]$$

微分方程式とすると、

$$\frac{d}{d\,x}\,y=-\frac{2\,y}{x}$$

$$\frac{d}{d\,x}\,y=-\frac{y}{x}$$

これを ode2 関数で解いて、

$$y=\frac{\%c}{x^2}$$

$$y=\frac{\%c1}{x}$$

まとめると、

$$\left(y-\frac{\%c}{x^2}\right)\,\left(y-\frac{\%c1}{x}\right)=0$$

3.2.8 Clairaut の微分方程式

微分方程式を $p=\frac{d}{dx}y(x)$ で置き換え、p の 2 次以上の高次方程式となり、

$$y=p\,x+f(p) \tag{3.2.1}$$

の形で表現できるとき Clairaut の微分方程式という。これを Maxima で直接解こうとすると、下記のようにプログラミングすると解くことができる。例題を下記に示す。

```
kill(all);
depends(y,[x]);
depends(p,[x]);
depends(f,[p]);
EQ:y=x*diff(y,x,1)+2*diff(y,x,1)^2
 -diff(y,x,1);
ode2(EQ,y,x);
P1:diff(y,x,1)=p;
EQ1:subst([P1],EQ);
EQ2:diff(EQ1,x,1);
subst([P1],EQ2);
P2:ode2(%,p,x);
EQ3:subst([P2],EQ1);
diff(%,%c,1);
C1:solve(%,%c)[1];
subst([C1],EQ3);
factor(%);
```

$$y=2\left(\frac{d}{dx}y\right)^2+x\left(\frac{d}{dx}y\right)-\frac{d}{dx}y \tag{3.2.2}$$

$ode2$ 関数で解けない。そこで、

$$\frac{d}{dx}y=p$$

上式を (3.2.2) 式に代入し、

$$y=p\,x+2\,p^2-p \tag{3.2.3}$$

これを x で微分し、

$$p=\left(\frac{d}{dx}p\right)x+4\,p\left(\frac{d}{dx}p\right)-\frac{d}{dx}p+p$$

$ode2$ 関数で解くと、

$$p=\%c$$

上式を (3.2.3) 式に代入し、一般解は、

$$y=\%c\,x+2\,\%c^2-\%c \tag{3.2.4}$$

$\%c$ で微分し、

$$0=x+4\,\%c-1$$

$\%c$ を求め、

$$\%c=-\frac{x-1}{4}$$

上式を (3.2.4) 式に代入し、整理すると、特異解は、

$$y=-\frac{(x-1)^2}{8}$$

```
EQ:y=x*diff(y,x,1)-diff(y,x,1)^2;
ode2(EQ,y,x);
P1:diff(y,x,1)=p;
EQ1:subst([P1],EQ);
EQ2:diff(EQ1,x,1);
subst([P1],EQ2);
P2:ode2(%,p,x);
EQ3:subst([P2],EQ1);
diff(%,%c,1);
C1:solve(%,%c)[1];
subst([C1],EQ3);
factor(%);
```

$$y=x\left(\frac{d}{dx}y\right)-\left(\frac{d}{dx}y\right)^2 \tag{3.2.5}$$

$ode2$ 関数で解けない。そこで、

$$\frac{d}{dx}y=p$$

上式を (3.2.5) 式に代入し、

$$y=p\,x-p^2 \tag{3.2.6}$$

これを x で微分し、

$$p=\left(\frac{d}{dx}p\right)x-2\,p\left(\frac{d}{dx}p\right)+p$$

$ode2$ 関数で解くと、

$$p=\%c$$

上式を (3.2.6) 式に代入し、一般解は、

$$y=\%c\,x-\%c^2 \tag{3.2.7}$$

$\%c$ で微分し、

$$0=x-2\,\%c$$

$\%c$ を求め、

$$\%c=\frac{x}{2}$$

上式を (3.2.7) 式に代入し、整理すると、特異解は、

$$y=\frac{x^2}{4}$$

```
EQ:y=x*diff(y,x,1)+diff(y,x,1)
 -diff(y,x,1)^2;
ode2(EQ,y,x);
P1:diff(y,x,1)=p;
EQ1:subst([P1],EQ);
EQ2:diff(EQ1,x,1);
subst([P1],EQ2);
P2:ode2(%,p,x);
EQ3:subst([P2],EQ1);
diff(%,%c,1);
C1:solve(%,%c)[1];
subst([C1],EQ3);
factor(%);
```

$$y=-\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)^2+x\,\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)+\frac{d}{d\,x}\,y \tag{3.2.8}$$

$ode2$ 関数で解けない。そこで、

$$\frac{d}{d\,x}\,y=p$$

上式を (3.2.8) 式に代入し、

$$y=p\,x-p^2+p \tag{3.2.9}$$

これを x で微分し、

$$p=\left(\frac{d}{d\,x}\,p\right)\,x-2\,p\,\left(\frac{d}{d\,x}\,p\right)+\frac{d}{d\,x}\,p+p$$

$ode2$ 関数で解くと、

$$p=\%c$$

上式を (3.2.9) 式に代入し、一般解は、

$$y=\%c\,x-\%c^2+\%c \tag{3.2.10}$$

$\%c$ で微分し、

$$0=x-2\,\%c+1$$

$\%c$ を求め、

$$\%c=\frac{x+1}{2}$$

上式を (3.2.10) 式に代入し、整理すると、特異解は、

$$y=\frac{(x+1)^2}{4}$$

3.2.9 広義の Clairaut(Lagrange) の微分方程式

微分方程式を $p=\frac{d}{d\,x}\,y\left(x\right)$ で置き換え、p の 2 次以上の高次方程式となり、

$$y=f\left(p\right)\,x+g\left(p\right)$$

の形で表現できるとき, 広義の Clairaut(Lagrange) の微分方程式という。このとき、Maxima で直接解こうとすると、解けない。下記のようにプログラミングすると解くことができる。例題を下記に示す。

```
kill(all);
depends(y,[x]);
depends(p,[x]);
EQ:y=2*x*diff(y,x,1)+diff(y,x,1)^2;
ode2(EQ,y,x);
P1:diff(y,x,1)=p;
EQ1:subst([P1],EQ);
EQ2:diff(EQ1,x,1);
subst([P1],EQ2);
P2:ode2(%,p,x);
solve(EQ1,p)[2];
subst([%],P2);
expand(%);
```

$$y={\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)}^{2}+2\,x\,\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right) \tag{3.2.11}$$

$ode2$ 関数で解けない。そこで、

$$\frac{d}{d\,x}\,y=p$$

上式を (3.2.11) 式に代入し、

$$y=2\,p\,x+p^{2} \tag{3.2.12}$$

これを x で微分し、

$$p=2\,\left(\frac{d}{d\,x}\,p\right)\,x+2\,p\,\left(\frac{d}{d\,x}\,p\right)+2\,p$$

$ode2$ 関数で解くと、

$$-\frac{3\,p^{2}\,x+2\,p^{3}}{3}=\%c \tag{3.2.13}$$

(3.2.12) 式を解いて、

$$p=\sqrt{y+x^{2}}-x$$

上式を (3.2.13) 式に代入し、整理すると一般解は、

$$-\frac{2\,{\left(y+x^{2}\right)}^{\frac{3}{2}}}{3}+x\,y+\frac{2\,x^{3}}{3}=\%c$$

```
EQ:y=x*diff(y,x,1)^2+diff(y,x,1)^2;
ode2(EQ,y,x);
P1:diff(y,x,1)=p;
EQ1:subst([P1],EQ);
EQ2:diff(EQ1,x,1);
subst([P1],EQ2);
P2:ode2(%,p,x);
solve(EQ1,p)[2];
subst([%],P2);
expand(%);
radcan(%);
%^2;
%*(x+1);
```

$$y=x\,{\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)}^{2}+{\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)}^{2} \tag{3.2.14}$$

$ode2$ 関数で解けない。そこで、

$$\frac{d}{d\,x}\,y=p$$

上式を (3.2.14) 式に代入し、

$$y=p^{2}\,x+p^{2} \tag{3.2.15}$$

これを x で微分し、

$$p=2\,p\,\left(\frac{d}{d\,x}\,p\right)\,x+2\,p\,\left(\frac{d}{d\,x}\,p\right)+p^{2}$$

$ode2$ 関数で解くと、

$$p=e^{-\frac{\log\left(2\,x+2\right)}{2}}\,\left(e^{\frac{\log\left(2\,x+2\right)}{2}}+\%c\right) \tag{3.2.16}$$

(3.2.15) 式を解いて、

$$p=\sqrt{\frac{y}{x+1}}$$

上式を (3.2.16) 式に代入し、整理すると一般解は、

$$\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x+1}}=\frac{\sqrt{2}\,\sqrt{x+1}+\%c}{\sqrt{2}\,\sqrt{x+1}}$$

両辺を二乗して、

$$\frac{y}{x+1}=\frac{{\left(\sqrt{2}\,\sqrt{x+1}+\%c\right)}^{2}}{2\,\left(x+1\right)}$$

整理すると、

$$y=\frac{{\left(\sqrt{2}\,\sqrt{x+1}+\%c\right)}^{2}}{2}$$

3.3　二階微分方程式

3.3.1　定数係数線形微分方程式

$$\frac{d^2}{d\,x^2}\,y+a_1\,\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)+a_2\,y=F\left(x\right)$$

の形の微分方程式を二階定数係数線形微分方程式という。ここで a_1, a_2 は定数とする。ode2 関数では、よい結果が得らる。例題を下記に示す。

```
kill(all);
depends(y,[x]);
EQ:diff(y,x,2)+2*diff(y,x,1)-8*y=0;
ode2(EQ,y,x);
```

$$\frac{d^2}{d\,x^2}\,y+2\,\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)-8\,y=0$$

$$y=\%k1\,e^{2\,x}+\%k2\,e^{-4\,x}$$

```
EQ:diff(y,x,2)+6*diff(y,x,1)+25*y=0;
ode2(EQ,y,x);
```

$$\frac{d^2}{d\,x^2}\,y+6\,\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)+25\,y=0$$

$$y=e^{-3\,x}\,\left(\%k1\sin\left(4\,x\right)+\%k2\cos\left(4\,x\right)\right)$$

```
EQ:diff(y,x,2)-diff(y,x,1)-6*y=3*x^2-5*x+6;
ode2(EQ,y,x);
```

$$\frac{d^2}{d\,x^2}\,y-\frac{d}{d\,x}\,y-6\,y=3\,x^2-5\,x+6$$

$$y=\%k1\,e^{3\,x}+\%k2\,e^{-2\,x}-\frac{3\,x^2-6\,x+8}{6}$$

```
EQ:diff(y,x,2)-2*diff(y,x,1)-8*y=%e^(2*x);
ode2(EQ,y,x);
```

$$\frac{d^2}{d\,x^2}\,y-2\,\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)-8\,y=e^{2\,x}$$

$$y=\%k1\,e^{4\,x}-\frac{e^{2\,x}}{8}+\%k2\,e^{-2\,x}$$

```
EQ:diff(y,x,2)+y=cos(x);
ode2(EQ,y,x);
```

$$\frac{d^2}{d\,x^2}\,y+y=\cos\left(x\right)$$

$$y=\frac{x\sin\left(x\right)+\cos\left(x\right)}{2}+\%k1\sin\left(x\right)+\%k2\cos\left(x\right)$$

```
EQ:diff(y,x,2)-2*diff(y,x,1)+y=(x^2+1)
 *%e^(3*x);
ode2(EQ,y,x);
```

$$\frac{d^2}{d\,x^2}\,y-2\,\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)+y=\left(x^2+1\right)\,e^{3\,x}$$

$$y=\frac{\left(2\,x^2-4\,x+5\right)\,e^{3\,x}}{8}+\left(\%k2\,x+\%k1\right)\,e^{x}$$

```
EQ:diff(y,x,2)-4*diff(y,x,1)+3*y=cos(2*x)
 *%e^(x);
ode2(EQ,y,x);
```

$$\frac{d^2}{d\,x^2}\,y-4\,\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)+3\,y=e^{x}\cos\left(2\,x\right)$$

$$y=-\frac{e^{x}\sin\left(2\,x\right)+e^{x}\cos\left(2\,x\right)}{8}+\%k1\,e^{3\,x}+\%k2\,e^{x}$$

```
EQ:diff(y,x,2)+4*y=x*sin(x);
ode2(EQ,y,x);
```

$$\frac{d^2}{d\,x^2}\,y+4\,y=x\sin\left(x\right)$$

$$y=\%k1\sin\left(2\,x\right)+\%k2\cos\left(2\,x\right)+\frac{3\,x\sin\left(x\right)-2\cos\left(x\right)}{9}$$

3.3.2 同次線形微分方程式

$$x^2 \frac{d^2}{d\,x^2}\,y + a_1 x\,\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right) + a_2\,y = F\,(x)$$

の形の微分方程式を二階同次線形微分方程式という。ode2 関数では、よい結果が得らる。例題を下記に示す。

```
kill(all);
depends(y,[x]);
EQ:x^2*diff(y,x,2)+x*diff(y,x,1)-4*y=0;
ode2(EQ,y,x);
```

$$x^2\,\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,y\right) + x\,\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right) - 4\,y = 0$$

$$y = \%k1\,x^2 + \frac{\%k2}{x^2}$$

```
EQ:x^2*diff(y,x,2)+5*x*diff(y,x,1)+4*y=x^2;
ode2(EQ,y,x);
```

$$x^2\,\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,y\right) + 5\,x\,\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right) + 4\,y = x^2$$

$$y = \frac{\%k2\log(x) + \%k1}{x^2} + \frac{x^2}{16}$$

```
EQ:x^2*diff(y,x,2)-x*diff(y,x,1)+y=log(x);
ode2(EQ,y,x);
```

$$x^2\,\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,y\right) - x\,\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right) + y = \log(x)$$

$$y = x\,(\%k2\log(x) + \%k1) + \log(x) + 2$$

```
EQ:(2*x+3)^2*diff(y,x,2)-2*(2*x+3)
 *diff(y,x,1)-12*y=4*x+10;
ode2(EQ,y,x);
```

$$(2\,x+3)^2\,\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,y\right) - 2\,(2\,x+3)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right) - 12\,y$$
$$= 4\,x + 10$$

$$y = -\frac{\%k1\,(2\,x+3)^3}{128\,x^4 + 768\,x^3 + 1728\,x^2 + 1728\,x + 648}$$
$$+ \%k2\,(2\,x+3)^3 - \frac{24\,x^2 + 104\,x + 39}{96\,x + 144}$$

3.3.3 $F\left(x,\ \frac{d}{d\,x}\,y,\ \frac{d^2}{d\,x^2}\,y\right)$ の微分方程式

$F\left(x,\ \frac{d}{d\,x}\,y,\ \frac{d^2}{d\,x^2}\,y\right)$ の二階微分方程式について、ode2 関数では、よい結果が得られた。例題を下記に示す。

```
kill(all);
depends(y,[x]);
EQ:x*diff(y,x,2)+diff(y,x,1)=4*x;
ode2(EQ,y,x);
```

$$x\,\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,y\right) + \frac{d}{d\,x}\,y = 4\,x$$

$$y = \%k1\log(x) + x^2 + \%k2$$

```
EQ:(x+1)*diff(y,x,2)-2*diff(y,x,1)=(x+1)^4;
ode2(EQ,y,x);
```

$$(x+1)\,\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,y\right) - 2\,\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right) = (x+1)^4$$

$$y = \%k2\,(x+1)^3 + \frac{3\,x^5 + 15\,x^4 + 25\,x^3 + 15\,x^2}{30} - \frac{\%k1}{3}$$

```
EQ:x^2/A-(A^2*diff(y,x,1))/x+(A^2-x^2)
 *diff(y,x,2)=0;
ode2(EQ,y,x);
```

$$\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,y\right)\,(A^2 - x^2) - \frac{\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)\,A^2}{x} + \frac{x^2}{A} = 0$$

$$y = \frac{\%k1\,A\,\sqrt{x^2 - A^2} + \frac{x^2}{2}}{A} + \%k2$$

3.3.4 $F\left(y,\,\frac{d}{d\,x}\,y,\,\frac{d^2}{d\,x^2}\,y\right)$ の微分方程式

$F\left(y,\,\frac{d}{d\,x}\,y,\,\frac{d^2}{d\,x^2}\,y\right)$ の二階微分方程式について、ode2 関数では、よい結果が得られた。例題を下記に示す。

```
kill(all);
depends(y,[x]);
EQ:sqrt(y)*diff(y,x,2)=1;
assume(%k1>0);
ANS:ode2(EQ,y,x);
ANS1:ANS[1];
ANS2:ANS[2];
ANS3:lhs(ANS1)*lhs(ANS2)=rhs(ANS1)
 *rhs(ANS2);
```

$$\sqrt{y}\,\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,y\right)=1$$

$ode2$ 関数で解くと、

$$-\frac{\left(2\,\sqrt{y}-2\,\%k1\right)\,\sqrt{2\,\sqrt{y}+\%k1}}{3\,\sqrt{2}}=x+\%k2$$

$$\frac{\left(2\,\sqrt{y}-2\,\%k1\right)\,\sqrt{2\,\sqrt{y}+\%k1}}{3\,\sqrt{2}}=x+\%k2$$

上式から、解は、

$$-\frac{\left(2\,\sqrt{y}-2\,\%k1\right)^2\,\left(2\,\sqrt{y}+\%k1\right)}{18}=\left(x+\%k2\right)^2$$

```
EQ:A^2*diff(y,x,2)=%e^y;
ode2(EQ,y,x);
```

$$\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,y\right)\,A^2=e^y$$

$ode2$ 関数で解くと、

$$[-\frac{\log\left(\frac{\sqrt{e^y+\%k1}-\sqrt{\%k1}}{\sqrt{e^y+\%k1}+\sqrt{\%k1}}\right)\,A}{\sqrt{2}\,\sqrt{\%k1}}=x+\%k2,$$

$$\frac{\log\left(\frac{\sqrt{e^y+\%k1}-\sqrt{\%k1}}{\sqrt{e^y+\%k1}+\sqrt{\%k1}}\right)\,A}{\sqrt{2}\,\sqrt{\%k1}}=x+\%k2]$$

```
EQ:y*diff(y,x,2)+diff(y,x,1)^2
 -diff(y,x,1)=0;
ode2(EQ,y,x);
```

$$y\,\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,y\right)+\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)^2-\frac{d}{d\,x}\,y=0$$

$$y-\%k1\,\log\left(y+\%k1\right)=x+\%k2$$

```
EQ:diff(y,x,2)+diff(y,x,1)^2+1=0;
ode2(EQ,y,x);
```

$$\frac{d^2}{d\,x^2}\,y+\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)^2+1=0$$

$$y=\%k2-\log\left(\sec\left(x+\%k1\right)\right)$$

```
EQ:2*y*diff(y,x,2)-3*diff(y,x,1)^2=4*y^2;
ode2(EQ,y,x);
```

$$2\,y\,\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,y\right)-3\,\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)^2=4\,y^2$$

$ode2$ 関数で解くと、

$$[-\mathrm{atan}\left(\frac{\sqrt{\%k1\,y-4}}{2}\right)=x+\%k2,$$

$$\mathrm{atan}\left(\frac{\sqrt{\%k1\,y-4}}{2}\right)=x+\%k2]$$

```
EQ:y*diff(y,x,2)-diff(y,x,1)^2-2*y^2=0;
ode2(EQ,y,x);
%[2]^2;
solve(%,y);
```

$$y\,\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,y\right)-\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)^2-2\,y^2=0$$

$ode2$ 関数で解くと、

$$[-\frac{\sqrt{2\log\left(y\right)+\%k1}}{\sqrt{2}}=x+\%k2,$$

$$\frac{\sqrt{2\log\left(y\right)+\%k1}}{\sqrt{2}}=x+\%k2]$$

両辺を 2 乗し、

$$\frac{2\log\left(y\right)+\%k1}{2}=\left(x+\%k2\right)^2$$

上式を整理し、

$$y=e^{x^2+2\,\%k2\,x+\%k2^2-\frac{\%k1}{2}}$$

```
kill(all);
depends(y,[x]);
depends(p,[y]);
EQ:y*diff(y,x,2)+diff(y,x,1)^2=1;
ode2(EQ,y,x);
DYX1:diff(y,x,1)=p;
diff(%,x,1);
DYX2:subst([DYX1],%);
EQ1:subst([DYX2,DYX1],EQ);
ode2(EQ1,p,y);
logcontract(%);
solve(%,p);
%[2];
subst([rhs(DYX1)=lhs(DYX1)],%);
ode2(%,y,x);
```

$$y\,\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,y\right)+\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)^2=1 \tag{3.3.1}$$

$ode2$ 関数で解くと、

$$\log\left(\frac{d}{d\,x}\,y+1\right)=-\log\left(\frac{d}{d\,x}\,y-1\right)-2\log(y)-2\,\%k1$$

"first order equation not linear in y'" の表示が出て、うまく解けない。そこで、下記の置き換えを行って、

$$\frac{d}{d\,x}\,y=p$$

$$\frac{d^2}{d\,x^2}\,y=\left(\frac{d}{d\,y}\,p\right)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)=p\,\left(\frac{d}{d\,y}\,p\right)$$

上式を (3.3.1) 式に代入し、

$$p\,\left(\frac{d}{d\,y}\,p\right)\,y+p^2=1$$

$ode2$ 関数で解くと、

$$-\frac{\log(p+1)+\log(p-1)}{2}=\log(y)+\%c$$

p を求めると、

$$p=\frac{e^{-\%c}\,\sqrt{e^{2\,\%c}\,y^2+1}}{y}$$

置換関数から、

$$\frac{d}{d\,x}\,y=\frac{e^{-\%c}\,\sqrt{e^{2\,\%c}\,y^2+1}}{y}$$

$ode2$ 関数で解くと、

$$e^{-\%c}\,\sqrt{e^{2\,\%c}\,y^2+1}=x+\%c$$

3.3.5 線形完全微分方程式

微分方程式：$F(x,\,y,\,\frac{d}{d\,x}\,y\,\frac{d^2}{d\,x^2}\,y\,\cdots)$ が下記の関係のとき、完全微分という。

$$F(x,\,y,\,\frac{d}{d\,x}\,y\,\frac{d^2}{d\,x^2}\,y\,\cdots)=\frac{d}{d\,x}\,G(y,\,\frac{d}{d\,x}\,y\,\frac{d^2}{d\,x^2}\,y\,\cdots)$$

下記の二階線形完全微分方程式で、

$$p_2\,(x)\,\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,y\right)+p_1\,(x)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)+p_0\,(x)\,y=\mathrm{H}\,(x)$$

完全微分方程式であるための条件は、

$$\frac{d^2}{d\,x^2}\,p_2\,(x)-\frac{d}{d\,x}\,p_1\,(x)+p_0(x)=0$$

二階線形完全微分方程式について、ode2 関数では、よい結果が得られた。例題を下記に示す。

```
kill(all);
depends(y,[x]);
EQ:(x^2+1)*diff(y,x,2)+4*x*diff(y,x,1)+2*y
 =-sin(x);
C0:coeff(lhs(EQ),y,1);
C1:coeff(lhs(EQ),diff(y,x,1),1);
C2:coeff(lhs(EQ),diff(y,x,2),1);
diff(C2,x,2)-diff(C1,x,1)+C0;
ode2(EQ,y,x);
```

$$(x^2+1)\,\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,y\right)+4\,x\,\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)+2\,y=-\sin(x)$$

$$y=\frac{\sin(x)}{x^2+1}+\frac{\%k1\,x}{x^2+1}+\frac{\%k2}{x^2+1}$$

```
EQ:x*(x-1)*diff(y,x,2)+(3*x-2)*diff(y,x,1)
 +y=0;
C0:coeff(lhs(EQ),y,1);
C1:coeff(lhs(EQ),diff(y,x,1),1);
C2:coeff(lhs(EQ),diff(y,x,2),1);
diff(C2,x,2)-diff(C1,x,1)+C0;
ode2(EQ,y,x);
```

$$(x-1)\,x\,\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,y\right)+(3\,x-2)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)+y=0$$

$$y=\frac{\%k1\log(x-1)}{x}+\frac{\%k2}{x}$$

3.3.6 変数変換

変数変換を行って、微分方程式を解く。例題を以下に示す。

```
kill(all);
depends(y,[x]);
depends(t,[x]);
EQ:x*y*diff(y,x,2)-x*diff(y,x,1)^2
 +y*diff(y,x,1)=0;
forget(y,[x]);
depends(y,[t]);
DYX1:'diff(y,x,1)=diff(y,x,1);
DYX2:'diff(y,x,2)=diff(y,x,2);
EQ1:subst([DYX1,DYX2],EQ);
TX:t=log(x);
XT:solve(%,x)[1];
D1TX:diff(TX,x,1);
D2TX:diff(TX,x,2);
subst([D1TX,D2TX,XT],EQ1);
factor(%);
ode2(%,y,t);
subst([TX],%);
radcan(%);
```

$$x\,y\,\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,y\right)-x\,\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)^2+y\,\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)=0 \quad (3.3.2)$$

次式の変数変換を行う。

$$t=\log(x)\,,\;x=e^t \quad (3.3.3)$$

下記の関係が得られる。

$$\frac{d}{d\,x}\,y=\left(\frac{d}{d\,x}\,t\right)\,\left(\frac{d}{d\,t}\,y\right)$$

$$\frac{d^2}{d\,x^2}\,y=\left(\frac{d}{d\,x}\,t\right)^2\,\left(\frac{d^2}{d\,t^2}\,y\right)+\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,t\right)\,\left(\frac{d}{d\,t}\,y\right)$$

$$\frac{d}{d\,x}\,t=\frac{1}{x},\;\frac{d^2}{d\,x^2}\,t=-\frac{1}{x^2}$$

上式を (3.3.2) 式に代入し、

$$e^{-t}\,\left(y\,\left(\frac{d^2}{d\,t^2}\,y\right)-\left(\frac{d}{d\,t}\,y\right)^2\right)=0$$

*ode*2 関数で解くと、

$$y=\%k2\,e^{\%k1\,t}$$

(3.3.3) 式を代入し、整理すると、

$$y=\%k2\,x^{\%k1}$$

```
kill(all);
depends(y,[x]);
depends(z,[t]);
depends(t,[x]);
depends(p,[z]);
EQ:x*diff(y,x,2)-2*x*y*diff(y,x,1)-2*y^2
 +2*diff(y,x,1)=0;
XT1:x=%e^t;
TX1:solve(XT1,t)[1];
forget(y,[x]);
depends(y,[z]);
YZ1:y=z*%e^(-t);
ZY1:solve(YZ1,z)[1];
subst([YZ1],EQ);
EQ1:ev(%,diff);
DZT1:diff(TX1,x,1);
DZT2:diff(TX1,x,2);
EQ2:subst([DZT2,DZT1,XT1],EQ1);
factor(%);
EQ2:%/(2*%e^(-2*t));
P1:diff(z,t,1)=p;
P2:rhs(%)=lhs(%);
P3:diff(P1,t,1);
EQ3:subst([P3,P1],EQ2);
ode2(%,p,z);
subst([P2],%);
subst([%c=1/4+%d^2],%);
ode2(%,z,t);
solve(%,z)[1];
subst([ZY1],%);
subst([TX1],%);
%/x;
```

$$x\,\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,y\right)-2\,x\,y\,\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)+2\,\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)-2\,y^2=0 \quad (3.3.4)$$

次式の変数変換を行う。

$$x=e^t,\;t=\log(x) \quad (3.3.5)$$

$$y=e^{-t}\,z,\;z=e^t\,y \quad (3.3.6)$$

下記の関係が得られる。

$$\frac{d}{d\,x}\,y=\left(\frac{d}{d\,x}\,t\right)\,\left(\frac{d}{d\,t}\,y\right)$$

$$\frac{d^2}{d\,x^2}\,y=\left(\frac{d}{d\,x}\,t\right)^2\,\left(\frac{d^2}{d\,t^2}\,y\right)+\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,t\right)\,\left(\frac{d}{d\,t}\,y\right)$$

$$\frac{d}{d\,x}\,t=\frac{1}{x},\;\frac{d^2}{d\,x^2}\,t=-\frac{1}{x^2}$$

上式を (3.3.4) 式に代入し、

$$\frac{\frac{d^2}{d\,t^2}\,z-2\,z\,\left(\frac{d}{d\,t}\,z\right)-\frac{d}{d\,t}\,z}{2}=0 \tag{3.3.7}$$

次式の変数変換を行う。

$$p=\frac{d}{d\,t}\,z,\ \frac{d^2}{d\,t^2}\,z=\left(\frac{d}{d\,z}\,p\right)\left(\frac{d}{d\,t}\,z\right) \tag{3.3.8}$$

上式を (3.3.7) 式に代入し、

$$\frac{-2\,p\,z+p\,\left(\frac{d}{d\,z}\,p\right)-p}{2}=0$$

$ode2$ 関数で解くと、

$$p=z^2+z+\%c$$

(3.3.8) 式から、$\%c\to\%d^2+\frac{1}{4}$ と置き換え、

$$\frac{d}{d\,t}\,z=z^2+z+\%c=z^2+z+\%d^2+\frac{1}{4}$$

$ode2$ 関数で解くと、

$$\frac{\operatorname{atan}\left(\frac{2\,z+1}{2\,\%d}\right)}{\%d}=t+\%c$$

z を求めると、

$$z=\frac{2\,\%d\tan\left(\%d\,t+\%c\,\%d\right)-1}{2}$$

(3.3.6) 式から、

$$e^t\,y=\frac{2\,\%d\tan\left(\%d\,t+\%c\,\%d\right)-1}{2}$$

(3.3.5) 式から、

$$x\,y=\frac{2\,\%d\tan\left(\%d\log\left(x\right)+\%c\,\%d\right)-1}{2}$$

上式を整理し、

$$y=\frac{2\,\%d\tan\left(\%d\log\left(x\right)+\%c\,\%d\right)-1}{2\,x}$$

3.3.7 定数係数連立線形微分方程式

定数係数連立線形微分方程式は desolve 関数で解く。微分方程式を微分演算子 D で表し、D の高次連立方程式の解を求めて解く。desolve 関数では、D の解が得られる場合には解ける。しかし、微分方程式を微分演算子 D で表し、行列式に D が含まれない場合には、D の解が得られないので desolve 関数では解けない。この場合には、各式に D の式を作用させて、辺々引いて解ける。この方法は例題の後方で示している。例題を以下に示す。

```
kill(all);
EQ1:diff(y(t),t,1)-3*y(t)+z(t)=0;
EQ2:y(t)-diff(z(t),t,1)+z(t)=0;
desolve([EQ1,EQ2],[y(t),z(t)]);
```

$$\frac{d}{dt}\,\mathrm{y}(t)+\mathrm{z}(t)-3\,\mathrm{y}(t)=0$$
$$-\frac{d}{dt}\,\mathrm{z}(t)+\mathrm{z}(t)+\mathrm{y}(t)=0$$

atvalue 関数で初期値を与えていないので、初期値：$\mathrm{y}(0)$, $\mathrm{z}(0)$ を残し、解が得られる。

$$\mathrm{y}(t)=-\,\mathrm{z}(0)\;t\,e^{2\,t}+\mathrm{y}(0)\;t\,e^{2\,t}+\mathrm{y}(0)\;e^{2\,t},$$
$$\mathrm{z}(t)=-\,\mathrm{z}(0)\;t\,e^{2\,t}+\mathrm{y}(0)\;t\,e^{2\,t}+\mathrm{z}(0)\;e^{2\,t}$$

```
EQ1:diff(y(t),t,2)+2*y(t)+z(t)=0;
EQ2:y(t)+diff(z(t),t,2)+2*z(t)=0;
desolve([EQ1,EQ2],[y(t),z(t)]);
```

$$\frac{d^2}{dt^2}\,\mathrm{y}(t)+\mathrm{z}(t)+2\,\mathrm{y}(t)=0$$
$$\frac{d^2}{dt^2}\,\mathrm{z}(t)+2\,\mathrm{z}(t)+\mathrm{y}(t)=0$$

$$\begin{aligned}\mathrm{y}(t)=&\frac{\sin\left(\sqrt{3}\,t\right)\,\left(\left.\frac{d}{dt}\,\mathrm{z}(t)\right|_{t=0}+\left.\frac{d}{dt}\,\mathrm{y}(t)\right|_{t=0}\right)}{2\,\sqrt{3}}\\&+\frac{\sin(t)\,\left(\left.\frac{d}{dt}\,\mathrm{y}(t)\right|_{t=0}-\left.\frac{d}{dt}\,\mathrm{z}(t)\right|_{t=0}\right)}{2}\\&+\frac{(\mathrm{z}(0)+\mathrm{y}(0))\,\cos\left(\sqrt{3}\,t\right)}{2}\\&-\frac{(\mathrm{z}(0)-\mathrm{y}(0))\,\cos(t)}{2},\\\mathrm{z}(t)=&\frac{\sin\left(\sqrt{3}\,t\right)\,\left(\left.\frac{d}{dt}\,\mathrm{z}(t)\right|_{t=0}+\left.\frac{d}{dt}\,\mathrm{y}(t)\right|_{t=0}\right)}{2\,\sqrt{3}}\\&+\frac{\sin(t)\,\left(\left.\frac{d}{dt}\,\mathrm{z}(t)\right|_{t=0}-\left.\frac{d}{dt}\,\mathrm{y}(t)\right|_{t=0}\right)}{2}\\&+\frac{(\mathrm{z}(0)+\mathrm{y}(0))\,\cos\left(\sqrt{3}\,t\right)}{2}\\&+\frac{(\mathrm{z}(0)-\mathrm{y}(0))\,\cos(t)}{2}\end{aligned}$$

```
EQ1:diff(y(t),t,2)+4*y(t)-3*diff(z(t),t,1)
 =1;
EQ2:3*diff(y(t),t,1)+diff(z(t),t,2)+4*z(t)
 =t;
desolve([EQ1,EQ2],[y(t),z(t)]);
```

$$-3\,\left(\frac{d}{dt}\,\mathrm{z}(t)\right)+\frac{d^2}{dt^2}\,\mathrm{y}(t)+4\,\mathrm{y}(t)=1$$
$$\frac{d^2}{dt^2}\,\mathrm{z}(t)+3\,\left(\frac{d}{dt}\,\mathrm{y}(t)\right)+4\,\mathrm{z}(t)=t$$

$$\begin{aligned}\mathrm{y}(t)=&-\frac{\cos(4\,t)\,\left(16\,\left(\left.\frac{d}{dt}\,\mathrm{z}(t)\right|_{t=0}\right)-16\,\mathrm{y}(0)+3\right)}{80}\\&+\frac{\cos(t)\,\left(\left.\frac{d}{dt}\,\mathrm{z}(t)\right|_{t=0}+4\,\mathrm{y}(0)-2\right)}{5}\\&+\frac{\sin(4\,t)\,\left(4\,\left(\left.\frac{d}{dt}\,\mathrm{y}(t)\right|_{t=0}\right)+4\,\mathrm{z}(0)\right)}{20}\\&+\frac{\sin(t)\,\left(\left.\frac{d}{dt}\,\mathrm{y}(t)\right|_{t=0}-4\,\mathrm{z}(0)\right)}{5}+\frac{7}{16},\\\mathrm{z}(t)=&\frac{\sin(4\,t)\,\left(16\,\left(\left.\frac{d}{dt}\,\mathrm{z}(t)\right|_{t=0}\right)-16\,\mathrm{y}(0)+3\right)}{80}\\&+\frac{\sin(t)\,\left(\left.\frac{d}{dt}\,\mathrm{z}(t)\right|_{t=0}+4\,\mathrm{y}(0)-2\right)}{5}\\&+\frac{\cos(4\,t)\,\left(\left.\frac{d}{dt}\,\mathrm{y}(t)\right|_{t=0}+\mathrm{z}(0)\right)}{5}\\&-\frac{\cos(t)\,\left(\left.\frac{d}{dt}\,\mathrm{y}(t)\right|_{t=0}-4\,\mathrm{z}(0)\right)}{5}+\frac{t}{4}\end{aligned}$$

```
EQ1:diff(y(t),t,1)+5*y(t)+z(t)=%e^t;
EQ2:-y(t)+diff(z(t),t,1)+3*z(t)=%e^(2*t);
desolve([EQ1,EQ2],[y(t),z(t)]);
```

$$\frac{d}{dt}\,\mathrm{y}(t)+\mathrm{z}(t)+5\,\mathrm{y}(t)=e^t$$
$$\frac{d}{dt}\,\mathrm{z}(t)+3\,\mathrm{z}(t)-\mathrm{y}(t)=e^{2\,t}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{y}(t)=&-\frac{e^{2\,t}}{36}+\frac{4\,e^t}{25}-\mathrm{z}(0)\;t\,e^{-4\,t}-\mathrm{y}(0)\;t\,e^{-4\,t}\\&+\frac{11\,t\,e^{-4\,t}}{30}+\frac{(900\,\mathrm{y}(0)-119)\;e^{-4\,t}}{900},\\\mathrm{z}(t)=&\frac{7\,e^{2\,t}}{36}+\frac{e^t}{25}+\mathrm{z}(0)\;t\,e^{-4\,t}+\mathrm{y}(0)\;t\,e^{-4\,t}\\&-\frac{11\,t\,e^{-4\,t}}{30}+\frac{(900\,\mathrm{z}(0)-211)\;e^{-4\,t}}{900}\end{aligned}$$

```
EQ1:diff(x(t),t,1)-6*y(t)+9*z(t)=0;
EQ2:2*x(t)+diff(y(t),t,1)-3*z(t)=0;
EQ3:x(t)-y(t)+diff(z(t),t,1)=0;
desolve([EQ1,EQ2,EQ3],[x(t),y(t),z(t)]);
```

$$\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{x}\left(t\right)+9\,\mathrm{z}\left(t\right)-6\,\mathrm{y}\left(t\right)=0$$
$$\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{y}\left(t\right)-3\,\mathrm{z}\left(t\right)+2\,\mathrm{x}\left(t\right)=0$$
$$\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{z}\left(t\right)-\mathrm{y}\left(t\right)+\mathrm{x}\left(t\right)=0$$

$$\begin{aligned}\mathrm{x}\left(t\right)=&9\,\mathrm{z}\left(0\right)\,t^2-\frac{9\,\mathrm{y}\left(0\right)\,t^2}{2}-\frac{3\,\mathrm{x}\left(0\right)\,t^2}{2}-9\,\mathrm{z}\left(0\right)\,t\\&+6\,\mathrm{y}\left(0\right)\,t+\mathrm{x}\left(0\right),\\ \mathrm{y}\left(t\right)=&9\,\mathrm{z}\left(0\right)\,t^2-\frac{9\,\mathrm{y}\left(0\right)\,t^2}{2}-\frac{3\,\mathrm{x}\left(0\right)\,t^2}{2}\\&+3\,\mathrm{z}\left(0\right)\,t-2\,\mathrm{x}\left(0\right)\,t+\mathrm{y}\left(0\right),\\ \mathrm{z}\left(t\right)=&6\,\mathrm{z}\left(0\right)\,t^2-3\,\mathrm{y}\left(0\right)\,t^2-\mathrm{x}\left(0\right)\,t^2+\mathrm{y}\left(0\right)\,t\\&-\mathrm{x}\left(0\right)\,t+\mathrm{z}\left(0\right)\end{aligned}$$

```
kill(all);
atvalue(y(t),t=0,0);
atvalue(z(t),t=0,0);
atvalue(diff(y(t),t,1),t=0,0);
atvalue(diff(z(t),t,1),t=0,0);
EQ1:diff(y(t),t,2)+2*diff(y(t),t,1)+3*y(t)
 +3*diff(z(t),t,2)+3*diff(z(t),t,1)
 +2*z(t)=0;
EQ2:diff(y(t),t,2)+diff(y(t),t,1)+y(t)
 +2*diff(z(t),t,2)-diff(z(t),t,1)-2*z(t)=8;
desolve([EQ1,EQ2],[y(t),z(t)]);
```

$$\begin{aligned}3\,\left(\frac{d^2}{d\,t^2}\,\mathrm{z}\left(t\right)\right)+3\,\left(\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{z}\left(t\right)\right)+\frac{d^2}{d\,t^2}\,\mathrm{y}\left(t\right)\\+2\,\left(\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{y}\left(t\right)\right)+2\,\mathrm{z}\left(t\right)+3\,\mathrm{y}\left(t\right)=0\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}2\,\left(\frac{d^2}{d\,t^2}\,\mathrm{z}\left(t\right)\right)-\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{z}\left(t\right)+\frac{d^2}{d\,t^2}\,\mathrm{y}\left(t\right)+\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{y}\left(t\right)\\-2\,\mathrm{z}\left(t\right)+\mathrm{y}\left(t\right)=8\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{y}\left(t\right)=&\frac{12\sin\left(2\,t\right)}{5}-\frac{14\cos\left(2\,t\right)}{5}-\frac{16\,e^{-t}}{5}\\&+4\,e^{-2\,t}+2,\\ \mathrm{z}\left(t\right)=&\frac{\sin\left(2\,t\right)}{10}+\frac{13\cos\left(2\,t\right)}{10}+\frac{16\,e^{-t}}{5}-\frac{3\,e^{-2\,t}}{2}-3\end{aligned}$$

```
kill(all);
EQ1:diff(y(t),t,2)+y(t)+diff(z(t),t,2)
 +diff(z(t),t,1)+z(t)=t;
EQ2:diff(y(t),t,1)+diff(z(t),t,1)+z(t)
 =%e^t;
desolve([EQ1,EQ2],[y(t),z(t)]);
Y1:y(t);
Z1:z(t);
V1:t;
C1Z2:coeff(lhs(EQ1),diff(Z1,V1,2),1);
C1Z1:coeff(lhs(EQ1),diff(Z1,V1,1),1);
C1Z0:coeff(lhs(EQ1),Z1,1);
C1Y2:coeff(lhs(EQ1),diff(Y1,V1,2),1);
C1Y1:coeff(lhs(EQ1),diff(Y1,V1,1),1);
C1Y0:coeff(lhs(EQ1),Y1,1);
C2Z2:coeff(lhs(EQ2),diff(Z1,V1,2),1);
C2Z1:coeff(lhs(EQ2),diff(Z1,V1,1),1);
C2Z0:coeff(lhs(EQ2),Z1,1);
C2Y2:coeff(lhs(EQ2),diff(Y1,V1,2),1);
C2Y1:coeff(lhs(EQ2),diff(Y1,V1,1),1);
C2Y0:coeff(lhs(EQ2),Y1,1);
DEQ1:(C1Y2*D^2+C1Y1*D+C1Y0)*Y1+(C1Z2*D^2
 +C1Z1*D+C1Z0)*Z1=rhs(EQ1);
DEQ2:(C2Y2*D^2+C2Y1*D+C2Y0)*Y1+(C2Z2*D^2
 +C2Z1*D+C2Z0)*Z1=rhs(EQ2);
ANSY:expand(DEQ1*lhs(coeff(DEQ2,Z1,1))
 -DEQ2*lhs(coeff(DEQ1,Z1,1)));
ANSZ:expand(DEQ1*lhs(coeff(DEQ2,Y1,1))
 -DEQ2*lhs(coeff(DEQ1,Y1,1)));
ANSY1:solve(ANSY,Y1)[1];
ANSZ1:solve(ANSZ,Z1)[1];
ANSY2:lhs(ANSY1)=diff(coeff(rhs(ANSY1),D,2)
 ,V1,2)+diff(coeff(rhs(ANSY1),D,1),V1,1)
 +coeff(rhs(ANSY1),D,0);
ANSZ2:lhs(ANSZ1)=diff(coeff(rhs(ANSZ1),D,2)
 ,V1,2)+diff(coeff(rhs(ANSZ1),D,1),V1,1)
 +coeff(rhs(ANSZ1),D,0);
```

$$\frac{d^2}{d\,t^2}\,\mathrm{z}\left(t\right)+\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{z}\left(t\right)+\frac{d^2}{d\,t^2}\,\mathrm{y}\left(t\right)+\mathrm{z}\left(t\right)+\mathrm{y}\left(t\right)=t$$
$$\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{z}\left(t\right)+\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{y}\left(t\right)+\mathrm{z}\left(t\right)=e^t$$

desolve 関数で解けない。
微分方程式を微分演算子 D で表し、

$$\mathrm{z}\left(t\right)\,\left(D^2+D+1\right)+\mathrm{y}\left(t\right)\,\left(D^2+1\right)=t$$
$$\mathrm{z}\left(t\right)\,\left(D+1\right)+\mathrm{y}\left(t\right)\,D=e^t$$

$\mathrm{y}\left(t\right),\mathrm{z}\left(t\right)$ を求め、

$$\mathrm{y}\left(t\right)=-e^t\,D^2+\left(t-e^t\right)\,D-e^t+t$$

$$z\left(t\right)={e}^{t}\,{D}^{2}-t\,D+{e}^{t}$$

以上から、解は、

$$y\left(t\right)=-3\,{e}^{t}+t+1$$

$$z\left(t\right)=2\,{e}^{t}-1$$

```
kill(all);
EQ1:diff(y(t),t,2)+diff(y(t),t,1)+y(t)
 +diff(z(t),t,2)=t;
EQ2:diff(y(t),t,1)+diff(z(t),t,1)-z(t)=t^2;
desolve([EQ1,EQ2],[y(t),z(t)]);
Y1:y(t);
Z1:z(t);
V1:t;
C1Z2:coeff(lhs(EQ1),diff(Z1,V1,2),1);
C1Z1:coeff(lhs(EQ1),diff(Z1,V1,1),1);
C1Z0:coeff(lhs(EQ1),Z1,1);
C1Y2:coeff(lhs(EQ1),diff(Y1,V1,2),1);
C1Y1:coeff(lhs(EQ1),diff(Y1,V1,1),1);
C1Y0:coeff(lhs(EQ1),Y1,1);
C2Z2:coeff(lhs(EQ2),diff(Z1,V1,2),1);
C2Z1:coeff(lhs(EQ2),diff(Z1,V1,1),1);
C2Z0:coeff(lhs(EQ2),Z1,1);
C2Y2:coeff(lhs(EQ2),diff(Y1,V1,2),1);
C2Y1:coeff(lhs(EQ2),diff(Y1,V1,1),1);
C2Y0:coeff(lhs(EQ2),Y1,1);
DEQ1:(C1Y2*D^2+C1Y1*D+C1Y0)*Y1+(C1Z2*D^2
 +C1Z1*D+C1Z0)*Z1=rhs(EQ1);
DEQ2:(C2Y2*D^2+C2Y1*D+C2Y0)*Y1+(C2Z2*D^2
 +C2Z1*D+C2Z0)*Z1=rhs(EQ2);
ANSY:expand(DEQ1*lhs(coeff(DEQ2,Z1,1))
 -DEQ2*lhs(coeff(DEQ1,Z1,1)));
ANSZ:expand(DEQ1*lhs(coeff(DEQ2,Y1,1))
 -DEQ2*lhs(coeff(DEQ1,Y1,1)));
ANSY1:solve(ANSY,Y1)[1];
ANSZ1:solve(ANSZ,Z1)[1];
ANSY2:lhs(ANSY1)=diff(coeff(rhs(ANSY1),D,2)
 ,V1,2)+diff(coeff(rhs(ANSY1),D,1),V1,1)
 +coeff(rhs(ANSY1),D,0);
ANSZ2:lhs(ANSZ1)=diff(coeff(rhs(ANSZ1),D,2)
 ,V1,2)+diff(coeff(rhs(ANSZ1),D,1),V1,1)
 +coeff(rhs(ANSZ1),D,0);
```

$$\frac{{d}^{2}}{d\,{t}^{2}}\,z\left(t\right)+\frac{{d}^{2}}{d\,{t}^{2}}\,y\left(t\right)+\frac{d}{d\,t}\,y\left(t\right)+y\left(t\right)=t$$

$$\frac{d}{d\,t}\,z\left(t\right)+\frac{d}{d\,t}\,y\left(t\right)-z\left(t\right)={t}^{2}$$

desolve 関数で解けない。

微分方程式を微分演算子 D で表し、

$$y\left(t\right)\,\left({D}^{2}+D+1\right)+z\left(t\right)\,{D}^{2}=t$$

$$y\left(t\right)\,D+z\left(t\right)\,\left(D-1\right)={t}^{2}$$

$y\left(t\right),z\left(t\right)$ を求め、

$$y\left(t\right)={t}^{2}\,{D}^{2}-t\,D+t$$

$$z\left(t\right)=-{t}^{2}\,{D}^{2}+\left(t-{t}^{2}\right)\,D-{t}^{2}$$

以上から、解は、

$$y\left(t\right)=t+1$$

$$z\left(t\right)=-{t}^{2}-2\,t-1$$

3.3.8 Bessel の微分方程式

$$u\,\left(z^2-n^2\right)+\left(\frac{d^2}{d\,z^2}\,u\right)\,z^2+\left(\frac{d}{d\,z}\,u\right)\,z=0$$

の形の微分方程式を Bessel の微分方程式という。ode2 関数では上記の式以外は解けない。そこで下記に示す変数変換で各種 Bessel の微分方程式を解くことが出来る。

```
kill(all);
depends(u,[z]);
declare(n, noninteger);
declare(m, integer);
BEEQ1:z^2*diff(u,z,2)+z*diff(u,z,1)
 +(z^2-n^2)*u=0;
ode2(BEEQ1,u,z);
plot2d([bessel_j(0.5,x),bessel_j(1.5,x),
 bessel_j(2.5,x),bessel_j(3.5,x),
 bessel_j(4.5,x)],[x,0,15],[y,-1,1]);
plot2d([bessel_j(-0.5,x),bessel_j(-1.5,x),
 bessel_j(-2.5,x),bessel_j(-3.5,x),
 bessel_j(-4.5,x)],[x,0,15],[y,-1,1]);
BEEQ11:z^2*diff(u,z,2)+z*diff(u,z,1)
 +(z^2-m^2)*u=0;
ode2(BEEQ11,u,z);
plot2d([bessel_j(0,x),bessel_j(1,x),
 bessel_j(2,x),bessel_j(3,x),
 bessel_j(4,x)],[x,0,15],[y,-1,1]);
plot2d([bessel_y(0,x),bessel_y(1,x),
 bessel_y(2,x),bessel_y(3,x),
 bessel_y(4,x)],[x,0,15],[y,-1,1]);
```

Bessel の微分方程式は、n が整数でない場合、

$$u\,\left(z^2-n^2\right)+\left(\frac{d^2}{d\,z^2}\,u\right)\,z^2+\left(\frac{d}{d\,z}\,u\right)\,z=0 \quad (3.3.9)$$

上式の解は $ode2$ 関数で解いて、

$$u=\%k1\,\mathrm{bessel\_j}\,(n,z)+\%k2\,\mathrm{bessel\_j}\,(-n,z) \quad (3.3.10)$$

Bessel の微分方程式は、m が整数の場合、

$$u\,\left(z^2-m^2\right)+\left(\frac{d^2}{d\,z^2}\,u\right)\,z^2+\left(\frac{d}{d\,z}\,u\right)\,z=0 \quad (3.3.11)$$

上式の解は $ode2$ 関数で解いて、

$$u=\%k2\,\mathrm{bessel\_y}\,(m,z)+\%k1\,\mathrm{bessel\_j}\,(m,z) \quad (3.3.12)$$

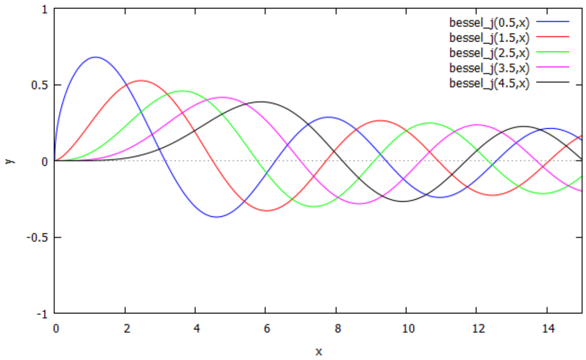


図 3.3.1: n が整数でない場合　bessel_j (n,x)

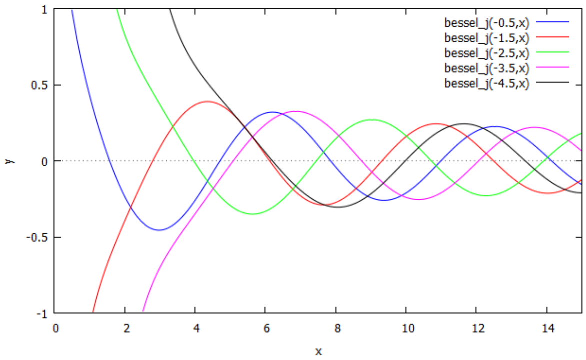


図 3.3.2: n が整数でない場合　bessel_j $(-n,x)$

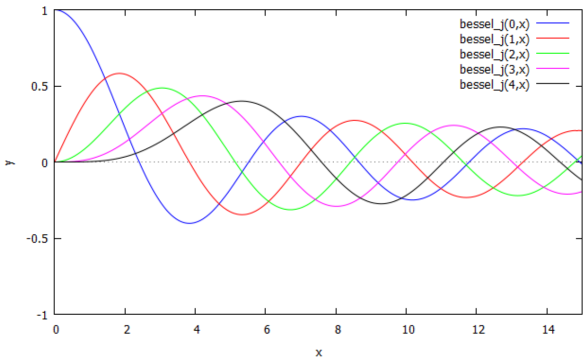


図 3.3.3: m が整数の場合　bessel_j (m,x)

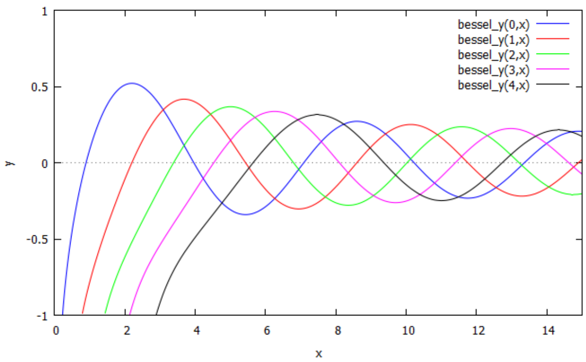


図 3.3.4: m が整数の場合　bessel_y (m,x)

```
depends(u,[x]);
ZX:z=B*x^C;
XZ:x=(z/B)^(1/C);
depends(x,[z]);
DUZ1:'diff(u,z,1)=diff(u,z,1);
DUZ2:'diff(u,z,2)=diff(u,z,2);
DXZ1:diff(XZ,z,1);
DXZ2:diff(XZ,z,2);
subst([DUZ2,DUZ1,DXZ2,DXZ1,ZX],BEEQ1);
expand(%);
radcan(%);
BEEQ2:expand(%*C^2/x^2);
depends(v,[x]);
UV:u=x^(-A)*v;
DUV1:diff(UV,x,1);
DUV2:diff(UV,x,2);
subst([DUV2,DUV1,UV],BEEQ2);
BEEQ3:expand(%*x^A);
BEEQ31:rest(lhs(BEEQ3),5);
BEEQ32:factor(rest(lhs(BEEQ3)-BEEQ31,3));
BEEQ33:factor(rest(lhs(BEEQ3)-BEEQ31
 -BEEQ32,1));
BEEQ34:rest(lhs(BEEQ3),-5);
BEEQ31+BEEQ32+BEEQ33+BEEQ34=0;
BEEQ4:v*(x^(2*C-2)*B^2*C^2+(A^2-n^2*C^2)
 /x^2)+'diff(v,x,1)*(1-2*A)/x
 +'diff(v,x,2)=0;
AN1:u=%k1*bessel_j(n,z)+%k2*bessel_j(-n,z);
subst([ZX,UV],%);
expand(%*x^A);
AN4:v=%k1*bessel_j(n,x^C*B)*x^A+%k2*
bessel_j(-n,x^C*B)*x^A;
AN5:v=%k1*bessel_j(n,x^C*B)*x^A+%k2*
bessel_y(n,x^C*B)*x^A;
BEA1:1-2*A=A1;
BEA2:A^2-n^2*C^2=A2;
BEA3:B^2*C^2=A3;
BEA4:2*C-2=A4;
solve([BEA1,BEA2,BEA3,BEA4],[A,B,C,n]);
```

下記の変数を $z \to x$ の変換を行う。

$$z = x^C\, B,\; x = \left(\frac{z}{B}\right)^{\frac{1}{C}} \tag{3.3.13}$$

上式から、下記の関係式を得る。

$$\frac{d}{d\,z}\,u = \left(\frac{d}{d\,x}\,u\right)\,\left(\frac{d}{d\,z}\,x\right)$$

$$\frac{d^2}{d\,z^2}\,u = \left(\frac{d}{d\,x}\,u\right)\,\left(\frac{d^2}{d\,z^2}\,x\right) + \left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,u\right)\,\left(\frac{d}{d\,z}\,x\right)^2$$

$$\frac{d}{d\,z}\,x = \frac{\left(\frac{z}{B}\right)^{\frac{1}{C}}}{z\,C},\; \frac{d^2}{d\,z^2}\,x = \frac{\left(\frac{z}{B}\right)^{\frac{1}{C}}}{z^2\,C^2} - \frac{\left(\frac{z}{B}\right)^{\frac{1}{C}}}{z^2\,C}$$

上式を (3.3.9) 式に代入し、Bessel の微分方程式は、

$$u\,x^{2\,C-2}\,B^2\,C^2 - \frac{n^2\,u\,C^2}{x^2} + \frac{\frac{d}{d\,x}\,u}{x} + \frac{d^2}{d\,x^2}\,u = 0 \tag{3.3.14}$$

下記の関数 $u \to v$ の変換を行う。

$$u = \frac{v}{x^A},\quad v = u\,x^A \tag{3.3.15}$$

上式から、下記の関係式を得る。

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\,x}\,u =& \frac{\frac{d}{d\,x}\,v}{x^A} - v\,x^{-A-1}\,A\\ \frac{d^2}{d\,x^2}\,u =& -v\,x^{-A-2}\,(-A-1)\,A\\ &-2\left(\frac{d}{d\,x}\,v\right)\,x^{-A-1}\,A + \frac{\frac{d^2}{d\,x^2}\,v}{x^A}\end{aligned}$$

上式を (3.3.14) 式に代入し、

$$\begin{aligned}v\,x^{2\,C-2}\,B^2\,C^2 - \frac{v\,(n\,C-A)\,(n\,C+A)}{x^2}&\\ -\frac{\left(\frac{d}{d\,x}\,v\right)\,(2\,A-1)}{x} + \frac{d^2}{d\,x^2}\,v = 0&\end{aligned}$$

上式を整理すると、Bessel の微分方程式は、

$$\begin{aligned}v\,\left(\frac{(A^2-n^2\,C^2)}{x^2} + x^{2\,C-2}\,B^2\,C^2\right)&\\ + \frac{\left(\frac{d}{d\,x}\,v\right)\,(1-2\,A)}{x} + \frac{d^2}{d\,x^2}\,v = 0&\end{aligned} \tag{3.3.16}$$

n が整数でない場合

Bessel の微分方程式の解：(3.3.10) 式に変数変換の関係式：(3.3.13) 式、(3.3.15) 式を代入すると、次式となり、上記、Bessel の微分方程式の解となる。

$$\begin{aligned}v =& \%k1\,\mathrm{bessel\_j}\left(n, x^C\,B\right)\,x^A\\ &+ \%k2\,\mathrm{bessel\_j}\left(-n, x^C\,B\right)\,x^A\end{aligned} \tag{3.3.17}$$

n が整数の場合

Bessel の微分方程式の解：(3.3.12) 式に変数変換の関係式：(3.3.13) 式、(3.3.15) 式を代入すると、次式となり、上記、Bessel の微分方程式の解となる。

$$\begin{aligned}v =& \%k1\,\mathrm{bessel\_j}\left(n, x^C\,B\right)\,x^A\\ &+ \%k2\,\mathrm{bessel\_y}\left(n, x^C\,B\right)\,x^A\end{aligned} \tag{3.3.18}$$

変換係数の関係式は、

$$\begin{aligned}1-2\,A =& A1,\; A^2-n^2\,C^2 = A2\\ B^2\,C^2 =& A3,\; 2\,C-2 = A4\end{aligned} \tag{3.3.19}$$

以下に例題を示す。

例 1 ………………………………………

```
EQ:diff(v,x,2)+x*v=0;
BEEQ4;
BEA1:1-2*A=0;
BEA2:A^2-n^2*C^2=0;
BEA3:B^2*C^2=1;
BEA4:2*C-2=1;
solve([BEA1,BEA2,BEA3,BEA4],[A,B,C,n]);
AA1:%[4];
subst(AA1,BEEQ4);
subst(AA1,AN4);
```

$$v\,x+\frac{d^2}{d\,x^2}\,v=0$$

上式を (3.3.16) 式と比較し、変換係数の関係は、

$$\begin{aligned}1-2\,A=&0,\ A^2-n^2\,C^2=0\\ B^2\,C^2=&1,\ 2\,C-2=1\end{aligned}$$

上式を解いて、

$$[A=\frac{1}{2},B=\frac{2}{3},C=\frac{3}{2},n=\frac{1}{3}]$$

上式を (3.3.17) 式に代入し、解は N が整数でないとすると、

$$\begin{aligned}v=&\mathrm{bessel\_j}\left(-\frac{1}{3},\frac{2\,x^{\frac{3}{2}}}{3}\right)\,\%k2\,\sqrt{x}\\ &+\mathrm{bessel\_j}\left(\frac{1}{3},\frac{2\,x^{\frac{3}{2}}}{3}\right)\,\%k1\,\sqrt{x}\end{aligned}$$

例 2 ………………………………………

```
EQ:diff(v,x,1)*(2*N+1)/x+diff(v,x,2)+v=0;
BEEQ4;
BEA1:1-2*A=2*N+1;
BEA2:A^2-n^2*C^2=0;
BEA3:B^2*C^2=1;
BEA4:2*C-2=0;
solve([BEA1,BEA2,BEA3,BEA4],[A,B,C,n]);
AA1:%[3];
subst(AA1,BEEQ4);
subst(AA1,AN4);
```

$$\frac{\left(\frac{d}{d\,x}\,v\right)\,(2\,N+1)}{x}+\frac{d^2}{d\,x^2}\,v+v=0$$

上式を (3.3.16) 式と比較し、変換係数の関係は、

$$\begin{aligned}1-2\,A=&2\,N+1,\ A^2-n^2\,C^2=0\\ B^2\,C^2=&1,\ 2\,C-2=0\end{aligned}$$

上式を解いて、

$$[A=-N,B=1,C=1,n=N]$$

上式を (3.3.17) 式に代入し、解は、

$$v=\frac{\%k1\,\mathrm{bessel\_j}\,(N,x)}{x^N}+\frac{\%k2\,\mathrm{bessel\_j}\,(-N,x)}{x^N}$$

例 3 ··

```
EQ:diff(v,x,1)*(1-N)/x+diff(v,x,2)+v/x=0;
BEEQ4;
BEA1:1-2*A=1-N;
BEA2:A^2-n^2*C^2=0;
BEA3:B^2*C^2=1;
BEA4:2*C-2=-1;
solve([BEA1,BEA2,BEA3,BEA4],[A,B,C,n]);
AA1:%[4];
subst(AA1,BEEQ4);
subst(AA1,AN4);
```

$$\frac{\left(\frac{d}{d\,x}\,v\right)\,(1-N)}{x}+\frac{v}{x}+\frac{d^2}{d\,x^2}\,v=0$$

上式を (3.3.16) 式と比較し、変換係数の関係は、

$$\begin{aligned}1-2\,A=&1-N,\ A^2-n^2\,C^2=0\\ B^2\,C^2=&1,\ 2\,C-2=-1\end{aligned}$$

上式を解いて、

$$[A=\frac{N}{2},B=2,C=\frac{1}{2},n=N]$$

上式を (3.3.17) 式に代入し、解は、N が整数でないとすると、

$$\begin{aligned}v=&\%k1\,x^{\frac{N}{2}}\,\mathrm{bessel\_j}\left(N,2\,\sqrt{x}\right)\\&+\%k2\,x^{\frac{N}{2}}\,\mathrm{bessel\_j}\left(-N,2\,\sqrt{x}\right)\end{aligned}$$

3.4 級数解

級数解の一般的な形として、

$$y(x) = a(0)\,(x-A)^r + a(1)\,(x-A)^{r+1} + a(2)\,(x-A)^{r+2} + a(3)\,(x-A)^{r+3} + \cdots$$

級数解を微分方程式に代入し、$(x-A)$ の最低べきの係数を零として最低指数：r を求める。そして、$(x-A)$ の全てのべきの係数を零に等値して、係数：$a(n)$ を求める。級数解による微分方程式の解法は、上記で示したように、手順が同じであるため、下記に示す例題のプログラムはほとんど同じで、一部変更して使用している。

3.4.1 線形微分方程式

$$\frac{d^2}{d\,x^2}\,y(x) + P(x)\,\frac{d}{d\,x}\,y(x) + Q(x)\,y(x) = 0$$

の二階線形微分方程式の解を級数で求める。

例 1 ....

```
kill(all);
depends(y,[x]);
EQ:diff(y,x,1)-y=x^2;
EQ1:lhs(%)-rhs(%)=0;
AN1:ode2(EQ1,y,x);
DAN0:(x)^r*a(n)*(x)^n;
AN2:y=sum(DAN0,n,0,inf);
AN21:y=sum(DAN0,n,0,10);
DAN21:diff(AN21,x,1);
DDAN21:diff(AN21,x,2);
subst([DDAN21,DAN21,AN21],EQ1);
expand(%);
coeff(lhs(%),x^(r-1))=0;
solve(%,r);
```

$$\frac{d}{d\,x}\,y - y = x^2$$

右辺を左辺に移項し、

$$\frac{d}{d\,x}\,y - y - x^2 = 0 \tag{3.4.1}$$

$ode2$ 関数で解くと、

$$y = \left(\left(-x^2 - 2\,x - 2\right)\,e^{-x} + \%c\right)\,e^{x} \tag{3.4.2}$$

級数の形として、$x=0$ を中心に展開する次式とする。

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{a}(n)\,x^{r+n} \tag{3.4.3}$$

上式を (3.4.1) 式に代入し、

$$\cdots - \mathrm{a}(1)\,x^{r+1} + \mathrm{a}(1)\,r\,x^r + \mathrm{a}(1)\,x^r - \mathrm{a}(0)\,x^r + \mathrm{a}(0)\,r\,x^{r-1} - x^2 = 0$$

x^{r-1} の項から、

$$\mathrm{a}(0)\,r = 0$$

下記を得る。

$$[r = 0]$$

```
R1:r=0;
AN22:subst([R1],AN21);
subst([AN22],EQ1);
ev(%,diff);
EA2:expand(%);
a(1)-a(0)=0;
CA1:solve(%,a(1))[1];
coeff(lhs(EA2),x^(1))=0;
CA2:solve(%,a(2))[1];
coeff(lhs(EA2),x^(2))=0;
CA3:solve(%,a(3))[1];
coeff(lhs(EA2),x^(3))=0;
CA4:solve(%,a(4))[1];
coeff(lhs(EA2),x^(4))=0;
CA5:solve(%,a(5))[1];
coeff(lhs(EA2),x^(5))=0;
CA6:solve(%,a(6))[1];
C1:CA1;
C2:factor(subst([C1],CA2));
C3:factor(subst([C2,C1],CA3));
C4:factor(subst([C3,C2,C1],CA4));
C5:factor(subst([C4,C3,C2,C1],CA5));
C6:factor(subst([C5,C4,C3,C2,C1],CA6));
y=sum(DAN0,n,0,6);
subst([R1,C1,C2,C3,C4,C5,C6],%);
```

(3.4.3) 式に $r=0$ とし、$n=0$ から $n=10$ までは、

$$y = \mathrm{a}(10)\,x^{10} + \mathrm{a}(9)\,x^9 + \mathrm{a}(8)\,x^8 + \mathrm{a}(7)\,x^7 + \mathrm{a}(6)\,x^6 + \mathrm{a}(5)\,x^5 + \mathrm{a}(4)\,x^4 + \mathrm{a}(3)\,x^3 + \mathrm{a}(2)\,x^2 + \mathrm{a}(1)\,x + \mathrm{a}(0) \tag{3.4.4}$$

上式を (3.4.1) 式に代入し、

$$\cdots x^6 - \mathrm{a}(6)\,x^6 + 6\,\mathrm{a}(6)\,x^5 - \mathrm{a}(5)\,x^5 + 5\,\mathrm{a}(5)\,x^4 - \mathrm{a}(4)\,x^4 + 4\,\mathrm{a}(4)\,x^3 - \mathrm{a}(3)\,x^3 + 3\,\mathrm{a}(3)\,x^2 - \mathrm{a}(2)\,x^2 - x^2 + 2\,\mathrm{a}(2)\,x - \mathrm{a}(1)\,x + \mathrm{a}(1) - \mathrm{a}(0) = 0$$

上式の x の全てのべきの係数を零に等値して、

$$\mathrm{a}(1)-\mathrm{a}(0)=0,\quad 2\,\mathrm{a}(2)-\mathrm{a}(1)=0$$
$$3\,\mathrm{a}(3)-\mathrm{a}(2)-1=0,\quad 4\,\mathrm{a}(4)-\mathrm{a}(3)=0$$
$$5\,\mathrm{a}(5)-\mathrm{a}(4)=0,\quad 6\,\mathrm{a}(6)-\mathrm{a}(5)=0$$

上式から、係数：$a(n)$ を求める。

$$\mathrm{a}(1)=\mathrm{a}(0),\quad \mathrm{a}(2)=\frac{\mathrm{a}(0)}{2}$$
$$\mathrm{a}(3)=\frac{\mathrm{a}(0)+2}{6},\quad \mathrm{a}(4)=\frac{\mathrm{a}(0)+2}{24}$$
$$\mathrm{a}(5)=\frac{\mathrm{a}(0)+2}{120},\quad \mathrm{a}(6)=\frac{\mathrm{a}(0)+2}{720}$$

上記の結果を (3.4.4) 式に代入すると、

$$\begin{aligned}y=\cdots&\frac{(\mathrm{a}(0)+2)\ x^6}{720}+\frac{(\mathrm{a}(0)+2)\ x^5}{120}\\&+\frac{(\mathrm{a}(0)+2)\ x^4}{24}+\frac{(\mathrm{a}(0)+2)\ x^3}{6}\\&+\frac{\mathrm{a}(0)\ x^2}{2}+\mathrm{a}(0)\ x+\mathrm{a}(0)\end{aligned}\tag{3.4.5}$$

```
AN31:y=sum(DAN0,n,n-8,n+5);
AN32:subst([R1],AN31);
subst([AN32],EQ1);
ev(%,diff);
EA2:expand(%);
coeff(lhs(EA2),x^(n-2))=0;
CA4:factor(solve(%,a(n-1))[1]);
coeff(lhs(EA2),x^(n-1))=0;
CA5:factor(solve(%,a(n))[1]);
coeff(lhs(EA2),x^(n))=0;
CA6:factor(solve(%,a(n+1))[1]);
```

(3.4.3) 式に $r=0$ とし、$n=n-8$ から $n=n+5$ までは、

$$\begin{aligned}y=&\mathrm{a}(n+5)\ x^{n+5}+\mathrm{a}(n+4)\ x^{n+4}+\mathrm{a}(n+3)\ x^{n+3}\\&+\mathrm{a}(n+2)\ x^{n+2}+\mathrm{a}(n+1)\ x^{n+1}+\mathrm{a}(n)\ x^{n}\\&+\mathrm{a}(n-1)\ x^{n-1}+\mathrm{a}(n-2)\ x^{n-2}+\mathrm{a}(n-3)\ x^{n-3}\\&+\mathrm{a}(n-4)\ x^{n-4}+\mathrm{a}(n-5)\ x^{n-5}+\mathrm{a}(n-6)\ x^{n-6}\\&+\mathrm{a}(n-7)\ x^{n-7}+\mathrm{a}(n-8)\ x^{n-8}\end{aligned}$$

上式を (3.4.1) 式に代入し、

$$\begin{aligned}&\cdots+2\,\mathrm{a}(n+2)\ x^{n+1}-\mathrm{a}(n+1)\ x^{n+1}\\&+n\,\mathrm{a}(n+1)\ x^{n}+\mathrm{a}(n+1)\ x^{n}\\&-\mathrm{a}(n)\ x^{n}+n\,\mathrm{a}(n)\ x^{n-1}\\&-\mathrm{a}(n-1)\ x^{n-1}+n\,\mathrm{a}(n-1)\ x^{n-2}\\&-\mathrm{a}(n-1)\ x^{n-2}-\mathrm{a}(n-2)\ x^{n-2}\\&+n\,\mathrm{a}(n-2)\ x^{n-3}-2\,\mathrm{a}(n-2)\ x^{n-3}\\&-\mathrm{a}(n-3)\ x^{n-3}+\cdots=0\end{aligned}$$

上式の x の全てのべきの係数を零に等値して、

$$n\,\mathrm{a}(n-1)-\mathrm{a}(n-1)-\mathrm{a}(n-2)=0$$
$$n\,\mathrm{a}(n)-\mathrm{a}(n-1)=0$$
$$n\,\mathrm{a}(n+1)+\mathrm{a}(n+1)-\mathrm{a}(n)=0$$

上式から、係数：$a(n)$ を求める。

$$\mathrm{a}(n-1)=\frac{\mathrm{a}(n-2)}{n-1},\quad \mathrm{a}(n)=\frac{\mathrm{a}(n-1)}{n}$$

```
AN2:y=a(0)+a(0)*x+a(0)/2*x^2+(a(0)+2)/6*x^3
 +(a(0)+2)/24*x^4+sum((a(0)+2)*x^n/n!,n,
 5,inf);
AN3:y=a(0)+a(0)*x+a(0)/2*x^2+sum((a(0)+2)
 *x^n/n!,n,3,inf);
EX1:1+sum(x^n/n!,n,1,inf)=%e^x;
EX2:1+x+x^2/2+sum(x^n/n!,n,3,inf)=%e^x;
EX3:solve(%,sum(x^n/n!,n,3,inf))[1];
subst([%],AN3);
AN4:expand(%);
```

(3.4.5) 式と上式から、

$$\begin{aligned}y=&(\mathrm{a}(0)+2)\left(\sum_{n=5}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right)+\frac{(\mathrm{a}(0)+2)\ x^4}{24}\\&+\frac{(\mathrm{a}(0)+2)\ x^3}{6}+\frac{\mathrm{a}(0)\ x^2}{2}+\mathrm{a}(0)\ x+\mathrm{a}(0)\end{aligned}$$

上式を変形し、

$$\begin{aligned}y=&(\mathrm{a}(0)+2)\left(\sum_{n=3}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right)+\frac{\mathrm{a}(0)\ x^2}{2}\\&+\mathrm{a}(0)\ x+\mathrm{a}(0)\end{aligned}\tag{3.4.6}$$

級数展開の公式 [1] から、

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right)+1=e^x$$

上式を変形し、

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=\frac{2\,e^x-x^2-2\,x-2}{2}$$

(3.4.5) 式に上式を代入し整理すると、

$$\begin{aligned}y=&\frac{(\mathrm{a}(0)+2)\ \left(2\,e^x-x^2-2\,x-2\right)}{2}+\frac{\mathrm{a}(0)\ x^2}{2}\\&+\mathrm{a}(0)\ x+\mathrm{a}(0)\\=&\mathrm{a}(0)\ e^x+2\,e^x-x^2-2\,x-2\end{aligned}$$

上式は、$ode2$ 関数で求めた (3.4.2) 式と一致している。

[1] 森口　繁一他：岩波数学公式 2　級数・フーリエ解析、岩波書店 1998 [29], P.56

例 2 ··

```
kill(all);
depends(y,[x]);
EQ:diff(y,x,1)*(x+1)-y=x*(x+1);
EQ1:lhs(%)-rhs(%)=0;
AN1:ode2(EQ1,y,x);
DAN0:(x)^r*a(n)*(x)^n;
AN2:y=sum(DAN0,n,0,inf);
AN21:y=sum(DAN0,n,0,10);
DAN21:diff(AN21,x,1);
DDAN21:diff(AN21,x,2);
subst([DDAN21,DAN21,AN21],EQ1);
expand(%);
coeff(lhs(%),x^(r-1))=0;
solve(%,r);
```

$$(x+1)\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)-y=x\,(x+1)$$

右辺を左辺に移項し、

$$(x+1)\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)-y-x\,(x+1)=0 \tag{3.4.7}$$

$ode2$ 関数で解くと、

$$y=(x+1)\,(-\log(x+1)+x+\%c) \tag{3.4.8}$$

級数の形として、$x=0$ を中心に展開する次式とする。

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{a}\,(n)\,x^{r+n} \tag{3.4.9}$$

上式を (3.4.7) 式に代入し、

$$\cdots+2\,\mathrm{a}\,(2)\,x^{r+1}+\mathrm{a}\,(1)\,r\,x^{r}+\mathrm{a}\,(0)\,r\,x^{r}$$
$$+\mathrm{a}\,(1)\,x^{r}-\mathrm{a}\,(0)\,x^{r}+\mathrm{a}\,(0)\,r\,x^{r-1}-x^{2}-x=0$$

x^{r-1} の項から、

$$\mathrm{a}\,(0)\,r=0$$

下記を得る。

$$[r=0]$$

```
R1:r=0;
AN22:subst([R1],AN21);
subst([AN22],EQ1);
ev(%,diff);
EA2:expand(%);
a(1)-a(0)=0;
CA1:solve(%,a(1))[1];
coeff(lhs(EA2),x^(1))=0;
CA2:solve(%,a(2))[1];
```

```
coeff(lhs(EA2),x^(2))=0;
CA3:solve(%,a(3))[1];
coeff(lhs(EA2),x^(3))=0;
CA4:solve(%,a(4))[1];
coeff(lhs(EA2),x^(4))=0;
CA5:solve(%,a(5))[1];
coeff(lhs(EA2),x^(5))=0;
CA6:solve(%,a(6))[1];
C1:CA1;
C2:subst([C1],CA2);
C3:subst([C2,C1],CA3);
C4:subst([C3,C2,C1],CA4);
C5:subst([C4,C3,C2,C1],CA5);
C6:subst([C5,C4,C3,C2,C1],CA6);
y=sum(DAN0,n,0,6);
subst([R1,C1,C2,C3,C4,C5,C6],%);
```

(3.4.9) 式に $r=0$ とし、$n=0$ から $n=10$ までは、

$$\begin{aligned}y=&\mathrm{a}\,(10)\,x^{10}+\mathrm{a}\,(9)\,x^{9}+\mathrm{a}\,(8)\,x^{8}+\mathrm{a}\,(7)\,x^{7}\\&+\mathrm{a}\,(6)\,x^{6}+\mathrm{a}\,(5)\,x^{5}+\mathrm{a}\,(4)\,x^{4}+\mathrm{a}\,(3)\,x^{3}\\&+\mathrm{a}\,(2)\,x^{2}+\mathrm{a}\,(1)\,x+\mathrm{a}\,(0)\end{aligned} \tag{3.4.10}$$

上式を (3.4.7) 式に代入し、

$$\begin{aligned}&\cdots x^{6}+5\,\mathrm{a}\,(6)\,x^{6}+6\,\mathrm{a}\,(6)\,x^{5}+4\,\mathrm{a}\,(5)\,x^{5}\\&+5\,\mathrm{a}\,(5)\,x^{4}+3\,\mathrm{a}\,(4)\,x^{4}+4\,\mathrm{a}\,(4)\,x^{3}\\&+2\,\mathrm{a}\,(3)\,x^{3}+3\,\mathrm{a}\,(3)\,x^{2}+\mathrm{a}\,(2)\,x^{2}\\&-x^{2}+2\,\mathrm{a}\,(2)\,x-x+\mathrm{a}\,(1)-\mathrm{a}\,(0)=0\end{aligned}$$

上式の x の全てのべきの係数を零に等値して、

$$\begin{gathered}\mathrm{a}\,(1)-\mathrm{a}\,(0)=0,\quad 2\,\mathrm{a}\,(2)-1=0\\3\,\mathrm{a}\,(3)+\mathrm{a}\,(2)-1=0,\quad 4\,\mathrm{a}\,(4)+2\,\mathrm{a}\,(3)=0\\5\,\mathrm{a}\,(5)+3\,\mathrm{a}\,(4)=0,\quad 6\,\mathrm{a}\,(6)+4\,\mathrm{a}\,(5)=0\end{gathered}$$

上式から、係数：$a(n)$ を求める。

$$\begin{gathered}\mathrm{a}\,(1)=\mathrm{a}\,(0)\,,\quad \mathrm{a}\,(2)=\frac{1}{2}\\\mathrm{a}\,(3)=\frac{1}{6},\quad \mathrm{a}\,(4)=-\frac{1}{12}\\\mathrm{a}\,(5)=\frac{1}{20},\quad \mathrm{a}\,(6)=-\frac{1}{30}\end{gathered}$$

上記の結果を (3.4.10) 式に代入すると、

$$\begin{aligned}y=&-\frac{x^{6}}{30}+\frac{x^{5}}{20}-\frac{x^{4}}{12}+\frac{x^{3}}{6}+\frac{x^{2}}{2}\\&+\mathrm{a}\,(0)\,x+\mathrm{a}\,(0)\end{aligned} \tag{3.4.11}$$

```
AN31:y=sum(DAN0,n,n-8,n+5);
AN32:subst([R1],AN31);
subst([AN32],EQ1);
ev(%,diff);
EA2:expand(%);
coeff(lhs(EA2),x^(n-2))=0;
CA4:factor(solve(%,a(n-1))[1]);
coeff(lhs(EA2),x^(n-1))=0;
CA5:factor(solve(%,a(n))[1]);
coeff(lhs(EA2),x^(n))=0;
CA6:factor(solve(%,a(n+1))[1]);
```

(3.4.9) 式に $r=0$ とし、$n=n-8$ から $n=n+5$ までは、

$$\begin{aligned}y=&\mathrm{a}(n+5)\,x^{n+5}+\mathrm{a}(n+4)\,x^{n+4}+\mathrm{a}(n+3)\,x^{n+3}\\&+\mathrm{a}(n+2)\,x^{n+2}+\mathrm{a}(n+1)\,x^{n+1}+\mathrm{a}(n)\,x^{n}\\&+\mathrm{a}(n-1)\,x^{n-1}+\mathrm{a}(n-2)\,x^{n-2}+\mathrm{a}(n-3)\,x^{n-3}\\&+\mathrm{a}(n-4)\,x^{n-4}+\mathrm{a}(n-5)\,x^{n-5}+\mathrm{a}(n-6)\,x^{n-6}\\&+\mathrm{a}(n-7)\,x^{n-7}+\mathrm{a}(n-8)\,x^{n-8}\end{aligned}$$

上式を (3.4.7) 式に代入し、

$$\begin{aligned}&\cdots+n\,\mathrm{a}(n+1)\,x^{n+1}+n\,\mathrm{a}(n+1)\,x^{n}\\&+\mathrm{a}(n+1)\,x^{n}+n\,\mathrm{a}(n)\,x^{n}-\mathrm{a}(n)\,x^{n}\\&+n\,\mathrm{a}(n)\,x^{n-1}+n\,\mathrm{a}(n-1)\,x^{n-1}\\&-2\,\mathrm{a}(n-1)\,x^{n-1}+n\,\mathrm{a}(n-1)\,x^{n-2}\\&-\mathrm{a}(n-1)\,x^{n-2}+n\,\mathrm{a}(n-2)\,x^{n-2}\\&-3\,\mathrm{a}(n-2)\,x^{n-2}+n\,\mathrm{a}(n-2)\,x^{n-3}\\&-2\,\mathrm{a}(n-2)\,x^{n-3}+\cdots=0\end{aligned}$$

上式の x の全てのべきの係数を零に等値して、

$$n\,\mathrm{a}(n-1)-\mathrm{a}(n-1)+n\,\mathrm{a}(n-2)-3\,\mathrm{a}(n-2)=0$$

$$n\,\mathrm{a}(n)+n\,\mathrm{a}(n-1)-2\,\mathrm{a}(n-1)=0$$

$$n\,\mathrm{a}(n+1)+\mathrm{a}(n+1)+n\,\mathrm{a}(n)-\mathrm{a}(n)=0$$

上式から、係数：$a(n)$ を求める。

$$\mathrm{a}(n-1)=-\frac{(n-3)\;\mathrm{a}(n-2)}{n-1}$$

$$\mathrm{a}(n)=-\frac{(n-2)\;\mathrm{a}(n-1)}{n}$$

$$\mathrm{a}(n+1)=-\frac{(n-1)\;\mathrm{a}(n)}{n+1}$$

```
AN2:y=a(0)+a(0)*x+1/2*x^2-sum((-1)^n*x^n
 *(n-2)!/n!,n,3,inf);
y=a(0)+a(0)*x+1/2*x^2-sum((-1)^n*x^n
 *(n-2)!/n!,n,3,7);
y=a(0)+a(0)*x+1/2*x^2-sum((-1)^n*x^n/n
 /(n-1),n,3,inf);
y=a(0)+a(0)*x+1/2*x^2-sum((-1)^n*x^n
 *(1/(n-1)-1/n),n,3,inf);
y=a(0)+a(0)*x+1/2*x^2-x*sum((-1)^(n-1)*(-1)
 *x^(n-1)*(1/(n-1)),n,3,inf)-sum((-1)^n*x^n
 *(-1/n),n,3,inf);
y=a(0)+a(0)*x-x*sum((-1)^(n-1)*(-1)*x^(n-1)
 *(1/(n-1)),n,3,inf)-sum((-1)^n*x^n*(-1/n),
 n,2,inf);
y=a(0)+a(0)*x-x*sum((-1)^(n)*(-1)*x^(n)*(1
 /(n)),n,2,inf)-sum((-1)^n*x^n*(-1/n),n,2,
 inf);
AN3:y=a(0)+a(0)*x-x*(sum((-1)^(n)*(-1)*
 x^(n)*(1/(n)),n,1,inf)+x)-(sum((-1)^n*x^n*
 (-1/n),n,1,inf)+x);
LOG1:sum((-1)^(n-1)*x^n*(1/n),n,1,inf)
 =log(1+x);
LOG2:sum((-1)^(n)*x^n*(1/n),n,1,inf)
 =-log(1+x);
subst([LOG2],AN3);
factor(%);
AN1;
```

(3.4.11) 式と上式から、

$$\begin{aligned}y=&-\left(\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^{n}\;(n-2)!\,x^{n}}{n!}\right)\\&+\frac{x^2}{2}+\mathrm{a}(0)\;x+\mathrm{a}(0)\end{aligned}$$

上式を変形し、

$$\begin{aligned}y&=-\left(\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^{n}\,x^{n}}{(n-1)\;n}\right)+\frac{x^2}{2}+\mathrm{a}(0)\;x+\mathrm{a}(0)\\&=-\left(\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)\;(-1)^{n}\,x^{n}\right)\\&\quad+\frac{x^2}{2}+\mathrm{a}(0)\;x+\mathrm{a}(0)\\&=\left(\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^{n}\,x^{n}}{n}\right)+x\,\left(\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\,x^{n-1}}{n-1}\right)\\&\quad+\frac{x^2}{2}+\mathrm{a}(0)\;x+\mathrm{a}(0)\end{aligned}$$

更に、

$$\begin{aligned} y =& x \left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n} \right) + \left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n} \right) \\ & + \mathrm{a}(0)\ x + \mathrm{a}(0) \\ =& \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n} \right) - x \left(x - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n} \right) \\ & + \mathrm{a}(0)\ x - x + \mathrm{a}(0) \end{aligned} \tag{3.4.12}$$

級数展開の公式 [1] から、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\log(1-x)$$

上式を変形し、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n} = -\log(x+1)$$

(3.4.11) 式に上式を代入し整理すると、

$$\begin{aligned} y =& -x\ (\log(x+1) + x) - \log(x+1) \\ & + \mathrm{a}(0)\ x - x + \mathrm{a}(0) \\ =& -(x+1)\ (\log(x+1) + x - \mathrm{a}(0)) \\ =& (x+1)\ (-\log(x+1) + x + \%c) \end{aligned}$$

上式は、$ode2$ 関数で求めた (3.4.8) 式と一致している。

例 3 ··

```
kill(all);
depends(y,[x]);
EQ:2*x^2*diff(y,x,2)-x*diff(y,x,1)
 +(1-x^2)*y=0;
EQ1:lhs(%)-rhs(%)=0;
AN1:ode2(EQ1,y,x);
DAN0:(x)^r*a(n)*(x)^n;
AN2:y=sum(DAN0,n,0,inf);
AN21:y=sum(DAN0,n,0,10);
DAN21:diff(AN21,x,1);
DDAN21:diff(AN21,x,2);
subst([DDAN21,DAN21,AN21],EQ1);
expand(%);
coeff(lhs(%),x^r)=0;
solve(%,r);
```

$$2\,x^2 \left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,y \right) - x \left(\frac{d}{d\,x}\,y \right) + \left(1 - x^2\right)\ y = 0 \tag{3.4.13}$$

$ode2$ 関数では解けない。

級数の形として、$x=0$ を中心に展開する次式とする。

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{a}(n)\ x^{r+n} \tag{3.4.14}$$

上式を (3.4.13) 式に代入し、

$$\begin{aligned} & \cdots - \mathrm{a}(1)\ x^{r+3} + 2\,\mathrm{a}(2)\ r^2\,x^{r+2} + 5\,\mathrm{a}(2)\ r\,x^{r+2} \\ & + 3\,\mathrm{a}(2)\ x^{r+2} - \mathrm{a}(0)\ x^{r+2} + 2\,\mathrm{a}(1)\ r^2\,x^{r+1} \\ & + \mathrm{a}(1)\ r\,x^{r+1} + 2\,\mathrm{a}(0)\ r^2\,x^r - 3\,\mathrm{a}(0)\ r\,x^r \\ & + \mathrm{a}(0)\ x^r = 0 \end{aligned}$$

x^{r-1} の項から、

$$2\,\mathrm{a}(0)\ r^2 - 3\,\mathrm{a}(0)\ r + \mathrm{a}(0) = 0$$

下記を得る。

$$[r=1, r=\frac{1}{2}]$$

級数は $r=1$ で、これに 1 づつ増加した x のべき級数となる。$r=\frac{1}{2}$ の級数は $r=1$ の級数と重ならないため、独立の解が得られる。

[1]森口　繁一他：岩波数学公式 2　級数・フーリエ解析、岩波書店 1998 [29)], P.54

$r=1$ の場合

```
R1:r=1;
AN22:subst([R1],AN21);
DAN22:subst([R1],DAN21);
DDAN22:subst([R1],DDAN21);
subst([DDAN22,DAN22,AN22],EQ1);
EA2:expand(%);
coeff(lhs(EA2),x^2)=0;
CA1:solve(%,a(1))[1];
coeff(lhs(EA2),x^3)=0;
CA2:solve(%,a(2))[1];
coeff(lhs(EA2),x^4)=0;
CA3:solve(%,a(3))[1];
coeff(lhs(EA2),x^5)=0;
CA4:solve(%,a(4))[1];
coeff(lhs(EA2),x^6)=0;
CA5:solve(%,a(5))[1];
coeff(lhs(EA2),x^7)=0;
CA6:solve(%,a(6))[1];
C1:CA1;
C2:subst([C1],CA2);
C3:subst([C2,C1],CA3);
C4:subst([C3,C2,C1],CA4);
C5:subst([C4,C3,C2,C1],CA5);
C6:subst([C5,C4,C3,C2,C1],CA6);
```

(3.4.14) 式に $r=1$ とし、$n=0$ から $n=10$ までは、

$$\begin{aligned}y =&\mathrm{a}(10)\,x^{11}+\mathrm{a}(9)\,x^{10}+\mathrm{a}(8)\,x^{9}+\mathrm{a}(7)\,x^{8}\\&+\mathrm{a}(6)\,x^{7}+\mathrm{a}(5)\,x^{6}+\mathrm{a}(4)\,x^{5}+\mathrm{a}(3)\,x^{4}\\&+\mathrm{a}(2)\,x^{3}+\mathrm{a}(1)\,x^{2}+\mathrm{a}(0)\,x\end{aligned}$$

上式を (3.4.13) 式に代入し、

$$\begin{aligned}&\cdots-\mathrm{a}(6)\,x^{9}+105\,\mathrm{a}(7)\,x^{8}-\mathrm{a}(5)\,x^{8}\\&+78\,\mathrm{a}(6)\,x^{7}-\mathrm{a}(4)\,x^{7}+55\,\mathrm{a}(5)\,x^{6}\\&-\mathrm{a}(3)\,x^{6}+36\,\mathrm{a}(4)\,x^{5}-\mathrm{a}(2)\,x^{5}\\&+21\,\mathrm{a}(3)\,x^{4}-\mathrm{a}(1)\,x^{4}+10\,\mathrm{a}(2)\,x^{3}\\&-\mathrm{a}(0)\,x^{3}+3\,\mathrm{a}(1)\,x^{2}=0\end{aligned}$$

上式の x の全てのべきの係数を零に等値して、

$$\begin{aligned}3\,\mathrm{a}(1)=0,\quad 10\,\mathrm{a}(2)-\mathrm{a}(0)=0\\21\,\mathrm{a}(3)-\mathrm{a}(1)=0,\quad 36\,\mathrm{a}(4)-\mathrm{a}(2)=0\\55\,\mathrm{a}(5)-\mathrm{a}(3)=0,\quad 78\,\mathrm{a}(6)-\mathrm{a}(4)=0\end{aligned}$$

上式から、係数：$a(n)$ を求める。

$$\begin{gathered}\mathrm{a}(1)=0,\quad \mathrm{a}(2)=\frac{\mathrm{a}(0)}{10},\quad \mathrm{a}(3)=0\\\mathrm{a}(4)=\frac{\mathrm{a}(0)}{360},\quad \mathrm{a}(5)=0,\quad \mathrm{a}(6)=\frac{\mathrm{a}(0)}{28080}\end{gathered}\tag{3.4.15}$$

```
ANN1:y=sum(DAN0,n,n-5,n+5);
DANN1:diff(ANN1,x,1);
DDANN1:diff(ANN1,x,2);
ANN2:subst([R1],ANN1);
DANN2:subst([R1],DANN1);
DDANN2:subst([R1],DDANN1);
subst([DDANN2,DANN2,ANN2],EQ1);
EA2:expand(%);
coeff(lhs(EA2),x^(n))=0;
CA1:factor(solve(%,a(n-1))[1]);
coeff(lhs(EA2),x^(n+1))=0;
CA2:factor(solve(%,a(n))[1]);
coeff(lhs(EA2),x^(n+2))=0;
CA3:factor(solve(%,a(n+1))[1]);
```

(3.4.14) 式に $r=1$ とし、$n=n-5$ から $n=n+5$ までは、

$$\begin{aligned}y=&\mathrm{a}(n+5)\,x^{n+6}+\mathrm{a}(n+4)\,x^{n+5}+\mathrm{a}(n+3)\,x^{n+4}\\&+\mathrm{a}(n+2)\,x^{n+3}+\mathrm{a}(n+1)\,x^{n+2}+\mathrm{a}(n)\,x^{n+1}\\&+\mathrm{a}(n-1)\,x^{n}+\mathrm{a}(n-2)\,x^{n-1}+\mathrm{a}(n-3)\,x^{n-2}\\&+\mathrm{a}(n-4)\,x^{n-3}+\mathrm{a}(n-5)\,x^{n-4}\end{aligned}$$

上式を (3.4.13) 式に代入し、

$$\begin{aligned}&\cdots-\mathrm{a}(n+1)\,x^{n+4}+2\,n^2\,\mathrm{a}(n+2)\,x^{n+3}\\&+9\,n\,\mathrm{a}(n+2)\,x^{n+3}+10\,\mathrm{a}(n+2)\,x^{n+3}\\&-\mathrm{a}(n)\,x^{n+3}+2\,n^2\,\mathrm{a}(n+1)\,x^{n+2}\\&+5\,n\,\mathrm{a}(n+1)\,x^{n+2}+3\,\mathrm{a}(n+1)\,x^{n+2}\\&-\mathrm{a}(n-1)\,x^{n+2}+2\,n^2\,\mathrm{a}(n)\,x^{n+1}\\&+n\,\mathrm{a}(n)\,x^{n+1}-\mathrm{a}(n-2)\,x^{n+1}\\&+2\,n^2\,\mathrm{a}(n-1)\,x^{n}-3\,n\,\mathrm{a}(n-1)\,x^{n}\\&+\mathrm{a}(n-1)\,x^{n}-\mathrm{a}(n-3)\,x^{n}\\&+2\,n^2\,\mathrm{a}(n-2)\,x^{n-1}-7\,n\,\mathrm{a}(n-2)\,x^{n-1}\\&+6\,\mathrm{a}(n-2)\,x^{n-1}+\cdots=0\end{aligned}$$

上式の x の全てのべきの係数を零に等値して、

$$\begin{gathered}2\,n^2\,\mathrm{a}(n-1)-3\,n\,\mathrm{a}(n-1)+\mathrm{a}(n-1)\\-\mathrm{a}(n-3)=0\\2\,n^2\,\mathrm{a}(n)+n\,\mathrm{a}(n)-\mathrm{a}(n-2)=0\\2\,n^2\,\mathrm{a}(n+1)+5\,n\,\mathrm{a}(n+1)+3\,\mathrm{a}(n+1)\\-\mathrm{a}(n-1)=0\end{gathered}$$

上式から、係数：$a(n)$ を求める。

$$\mathrm{a}(n-1)=\frac{\mathrm{a}(n-3)}{(n-1)\,(2\,n-1)}$$

$$\mathrm{a}(n)=\frac{\mathrm{a}(n-2)}{n\,(2\,n+1)}$$

$$\mathrm{a}\left(n+1\right)=\frac{\mathrm{a}\left(n-1\right)}{\left(n+1\right)\,\left(2\,n+3\right)}$$

```
y=a(0)*x*(1+1/10*x^2+1/360*x^4
     +1/28080*x^6
     +sum(product(1/(2*m)*1/(4*m+1),
     m,1,n)
     *x^(2*n),n,4,inf));
Y1:y[1]=a(0)*x*(1+sum(product(1/(2*m)
     *1/(4*m+1),
     m,1,n)*x^(2*n),n,1,inf));
```

(3.4.15) 式と上式から、

$$y=\mathrm{a}\left(0\right)\,x\,\left(\left(\sum_{n=4}^{\infty}\left(\prod_{m=1}^{n}\frac{1}{2\,m\,\left(4\,m+1\right)}\right)\,x^{2\,n}\right)+\frac{x^6}{28080}+\frac{x^4}{360}+\frac{x^2}{10}+1\right)$$

上式を変形し、

$$y_1=\mathrm{a}\left(0\right)\,x\,\left(\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\prod_{m=1}^{n}\frac{1}{2\,m\,\left(4\,m+1\right)}\right)\,x^{2\,n}\right)+1\right) \tag{3.4.16}$$

$r=\frac{1}{2}$　の場合

```
R1:r=1/2;
AN22:subst([R1],AN21);
DAN22:subst([R1],DAN21);
DDAN22:subst([R1],DDAN21);
subst([DDAN22,DAN22,AN22],EQ1);
EA2:expand(%);
coeff(lhs(EA2),x^(3/2))=0;
CA1:solve(%,a(1))[1];
coeff(lhs(EA2),x^(5/2))=0;
CA2:solve(%,a(2))[1];
coeff(lhs(EA2),x^(7/2))=0;
CA3:solve(%,a(3))[1];
coeff(lhs(EA2),x^(9/2))=0;
CA4:solve(%,a(4))[1];
coeff(lhs(EA2),x^(11/2))=0;
CA5:solve(%,a(5))[1];
coeff(lhs(EA2),x^(13/2))=0;
CA6:solve(%,a(6))[1];
C1:CA1;
C2:subst([C1],CA2);
C3:subst([C2,C1],CA3);
C4:subst([C3,C2,C1],CA4);
C5:subst([C4,C3,C2,C1],CA5);
C6:subst([C5,C4,C3,C2,C1],CA6);
```

(3.4.14) 式に $r=\frac{1}{2}$ とし、$n=0$ から $n=10$ までは、

$$\begin{aligned}y=&\mathrm{a}\left(10\right)\,x^{\frac{21}{2}}+\mathrm{a}\left(9\right)\,x^{\frac{19}{2}}+\mathrm{a}\left(8\right)\,x^{\frac{17}{2}}\\&+\mathrm{a}\left(7\right)\,x^{\frac{15}{2}}+\mathrm{a}\left(6\right)\,x^{\frac{13}{2}}+\mathrm{a}\left(5\right)\,x^{\frac{11}{2}}\\&+\mathrm{a}\left(4\right)\,x^{\frac{9}{2}}+\mathrm{a}\left(3\right)\,x^{\frac{7}{2}}+\mathrm{a}\left(2\right)\,x^{\frac{5}{2}}\\&+\mathrm{a}\left(1\right)\,x^{\frac{3}{2}}+\mathrm{a}\left(0\right)\,\sqrt{x}\end{aligned}$$

上式を (3.4.13) 式に代入し、

$$\begin{aligned}&\cdots-\mathrm{a}\left(6\right)\,x^{\frac{17}{2}}+91\,\mathrm{a}\left(7\right)\,x^{\frac{15}{2}}-\mathrm{a}\left(5\right)\,x^{\frac{15}{2}}\\&+66\,\mathrm{a}\left(6\right)\,x^{\frac{13}{2}}-\mathrm{a}\left(4\right)\,x^{\frac{13}{2}}+45\,\mathrm{a}\left(5\right)\,x^{\frac{11}{2}}\\&-\mathrm{a}\left(3\right)\,x^{\frac{11}{2}}+28\,\mathrm{a}\left(4\right)\,x^{\frac{9}{2}}-\mathrm{a}\left(2\right)\,x^{\frac{9}{2}}\\&+15\,\mathrm{a}\left(3\right)\,x^{\frac{7}{2}}-\mathrm{a}\left(1\right)\,x^{\frac{7}{2}}+6\,\mathrm{a}\left(2\right)\,x^{\frac{5}{2}}\\&-\mathrm{a}\left(0\right)\,x^{\frac{5}{2}}+\mathrm{a}\left(1\right)\,x^{\frac{3}{2}}=0\end{aligned}$$

上式の x の全てのべきの係数を零に等値して、

$$\begin{aligned}\mathrm{a}\left(1\right)=0,&\quad 6\,\mathrm{a}\left(2\right)-\mathrm{a}\left(0\right)=0\\15\,\mathrm{a}\left(3\right)-\mathrm{a}\left(1\right)=0,&\quad 28\,\mathrm{a}\left(4\right)-\mathrm{a}\left(2\right)=0\\45\,\mathrm{a}\left(5\right)-\mathrm{a}\left(3\right)=0,&\quad 66\,\mathrm{a}\left(6\right)-\mathrm{a}\left(4\right)=0\end{aligned}$$

上式から、係数：$a(n)$ を求める。

$$\begin{gathered}\mathrm{a}\left(1\right)=0,\quad\mathrm{a}\left(2\right)=\frac{\mathrm{a}\left(0\right)}{6},\quad\mathrm{a}\left(3\right)=0\\\mathrm{a}\left(4\right)=\frac{\mathrm{a}\left(0\right)}{168},\quad\mathrm{a}\left(5\right)=0,\quad\mathrm{a}\left(6\right)=\frac{\mathrm{a}\left(0\right)}{11088}\end{gathered} \tag{3.4.17}$$

```
AN21:y=sum(DAN0,n,n-5,n+5);
DAN21:diff(AN21,x,1);
DDAN21:diff(AN21,x,2);
AN22:subst([R1],AN21);
DAN22:subst([R1],DAN21);
DDAN22:subst([R1],DDAN21);
subst([DDAN22,DAN22,AN22],EQ1);
EA2:expand(%);
coeff(lhs(EA2),x^(n-1/2))=0;
CA1:factor(solve(%,a(n-1))[1]);
coeff(lhs(EA2),x^(n+1/2))=0;
CA2:factor(solve(%,a(n))[1]);
coeff(lhs(EA2),x^(n+3/2))=0;
CA3:factor(solve(%,a(n+1))[1]);
```

(3.4.14) 式に $r=\frac{1}{2}$ とし、$n=n-5$ から $n=n+5$ までは、

$$\begin{aligned}y=&\,\mathrm{a}(n+5)\,x^{n+\frac{11}{2}}+\mathrm{a}(n+4)\,x^{n+\frac{9}{2}}\\&+\mathrm{a}(n+3)\,x^{n+\frac{7}{2}}+\mathrm{a}(n+2)\,x^{n+\frac{5}{2}}\\&+\mathrm{a}(n+1)\,x^{n+\frac{3}{2}}+\mathrm{a}(n)\,x^{n+\frac{1}{2}}\\&+\mathrm{a}(n-1)\,x^{n-\frac{1}{2}}+\mathrm{a}(n-2)\,x^{n-\frac{3}{2}}\\&+\mathrm{a}(n-3)\,x^{n-\frac{5}{2}}+\mathrm{a}(n-4)\,x^{n-\frac{7}{2}}\\&+\mathrm{a}(n-5)\,x^{n-\frac{9}{2}}\end{aligned}$$

上式を (3.4.13) 式に代入し、

$$\begin{aligned}&\cdots+2\,n^2\,\mathrm{a}(n+1)\,x^{n+\frac{3}{2}}+3\,n\,\mathrm{a}(n+1)\,x^{n+\frac{3}{2}}\\&+\mathrm{a}(n+1)\,x^{n+\frac{3}{2}}-\mathrm{a}(n-1)\,x^{n+\frac{3}{2}}\\&+2\,n^2\,\mathrm{a}(n)\,x^{n+\frac{1}{2}}-n\,\mathrm{a}(n)\,x^{n+\frac{1}{2}}\\&-\mathrm{a}(n-2)\,x^{n+\frac{1}{2}}+2\,n^2\,\mathrm{a}(n-1)\,x^{n-\frac{1}{2}}\\&-5\,n\,\mathrm{a}(n-1)\,x^{n-\frac{1}{2}}+3\,\mathrm{a}(n-1)\,x^{n-\frac{1}{2}}\\&-\mathrm{a}(n-3)\,x^{n-\frac{1}{2}}+2\,n^2\,\mathrm{a}(n-2)\,x^{n-\frac{3}{2}}\\&-9\,n\,\mathrm{a}(n-2)\,x^{n-\frac{3}{2}}+10\,\mathrm{a}(n-2)\,x^{n-\frac{3}{2}}\\&+\cdots=0\end{aligned}$$

上式の x の全てのべきの係数を零に等値して、

$$\begin{gathered}2\,n^2\,\mathrm{a}(n-1)-5\,n\,\mathrm{a}(n-1)+3\,\mathrm{a}(n-1)\\-\mathrm{a}(n-3)=0\\2\,n^2\,\mathrm{a}(n)-n\,\mathrm{a}(n)-\mathrm{a}(n-2)=0\\2\,n^2\,\mathrm{a}(n+1)+3\,n\,\mathrm{a}(n+1)+\mathrm{a}(n+1)\\-\mathrm{a}(n-1)=0\end{gathered}$$

上式から、係数：$a(n)$ を求める。

$$\mathrm{a}(n-1)=\frac{\mathrm{a}(n-3)}{(n-1)\,(2\,n-3)}$$

$$\mathrm{a}(n)=\frac{\mathrm{a}(n-2)}{n\,(2\,n-1)}$$

$$\mathrm{a}(n+1)=\frac{\mathrm{a}(n-1)}{(n+1)\,(2\,n+1)}$$

```
y=a(0)*x^(1/2)*(1+1/6*x^2+1/168*x^4
     +1/11088*x^6+sum(product(1/(2*m)
     *1/(4*m-1),m,1,n)*x^(2*n),n,4,inf));
y[2]=a(0)*x^(1/2)*(1+sum(product(1/(2*m)
     *1/(4*m-1),m,1,n)*x^(2*n),n,1,inf));
y=y[1]+y[2]*%c1;
```

(3.4.17) 式と上式から、

$$y=\mathrm{a}(0)\,\sqrt{x}\left(\left(\sum_{n=4}^{\infty}\left(\prod_{m=1}^{n}\frac{1}{2\,m\,(4\,m-1)}\right)x^{2\,n}\right)+\frac{x^6}{11088}+\frac{x^4}{168}+\frac{x^2}{6}+1\right)$$

上式を変形し、

$$y_2=\mathrm{a}(0)\,\sqrt{x}\left(\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\prod_{m=1}^{n}\frac{1}{2\,m\,(4\,m-1)}\right)x^{2\,n}\right)+1\right)$$

(3.4.16) 式と上式から、一般解は、

$$y=y_2\,\%c1+y_1$$

例 4 ....

```
kill(all);
depends(y,[x,r]);
EQ:diff(y,x,2)+1/x*diff(y,x,1)-1/x*y=0;
EQ1:expand(EQ*x);
ode2(EQ1,y,x);
DAN0:(x)^r*a(n)*(x)^n;
AN2:y=sum(DAN0,n,0,inf);
AN21:y=sum(DAN0,n,0,10);
DAN21:diff(AN21,x,1);
DDAN21:diff(AN21,x,2);
subst([DDAN21,DAN21,AN21],EQ1);
expand(%);
coeff(lhs(%),x^(r-1))=0;
solve(%,r);
```

$$x\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,y\right)+\frac{d}{d\,x}\,y-y=0 \tag{3.4.18}$$

$ode2$ 関数では解けない。

級数の形として、$x=0$ を中心に展開する次式とする。

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{a}\,(n)\;x^{r+n} \tag{3.4.19}$$

上式を (3.4.18) 式に代入し、

$$\begin{aligned}&\cdots-\mathrm{a}\,(1)\;x^{r+1}+\mathrm{a}\,(1)\;r^2\,x^r+2\,\mathrm{a}\,(1)\;r\,x^r\\&+\mathrm{a}\,(1)\;x^r-\mathrm{a}\,(0)\;x^r+\mathrm{a}\,(0)\;r^2\,x^{r-1}=0\end{aligned}$$

x^{r-1} の項から、

$$\mathrm{a}\,(0)\;r^2=0$$

下記の重根を得る。

$$[r=0]$$

```
R1:r=r;
AN22:subst([R1],AN21);
subst([AN22],EQ1);
ev(%,diff);
EA2:expand(%);
coeff(lhs(EA2),x^(r))=0;
CA1:factor(solve(%,a(1))[1]);
coeff(lhs(EA2),x^(r+1))=0;
CA2:factor(solve(%,a(2))[1]);
coeff(lhs(EA2),x^(r+2))=0;
CA3:factor(solve(%,a(3))[1]);
coeff(lhs(EA2),x^(r+3))=0;
CA4:factor(solve(%,a(4))[1]);
```

```
coeff(lhs(EA2),x^(r+4))=0;
CA5:factor(solve(%,a(5))[1]);
coeff(lhs(EA2),x^(r+5))=0;
CA6:factor(solve(%,a(6))[1]);
C1:CA1;
C2:factor(subst([C1],CA2));
C3:factor(subst([C2,C1],CA3));
C4:factor(subst([C3,C2,C1],CA4));
C5:factor(subst([C4,C3,C2,C1],CA5));
C6:factor(subst([C5,C4,C3,C2,C1],CA6));
```

(3.4.19) 式に $r=r$ で残しておき、$n=0$ から $n=10$ までは、

$$\begin{aligned}y=&\mathrm{a}\,(10)\;x^{r+10}+\mathrm{a}\,(9)\;x^{r+9}+\mathrm{a}\,(8)\;x^{r+8}\\&+\mathrm{a}\,(7)\;x^{r+7}+\mathrm{a}\,(6)\;x^{r+6}+\mathrm{a}\,(5)\;x^{r+5}\\&+\mathrm{a}\,(4)\;x^{r+4}+\mathrm{a}\,(3)\;x^{r+3}+\mathrm{a}\,(2)\;x^{r+2}\\&+\mathrm{a}\,(1)\;x^{r+1}+\mathrm{a}\,(0)\;x^r\end{aligned}$$

上式を (3.4.18) 式に代入し、

$$\begin{aligned}&\cdots-\mathrm{a}\,(6)\;x^{r+6}+\mathrm{a}\,(6)\;r^2\,x^{r+5}\\&+12\,\mathrm{a}\,(6)\;r\,x^{r+5}+36\,\mathrm{a}\,(6)\;x^{r+5}\\&-\mathrm{a}\,(5)\;x^{r+5}+\mathrm{a}\,(5)\;r^2\,x^{r+4}\\&+10\,\mathrm{a}\,(5)\;r\,x^{r+4}+25\,\mathrm{a}\,(5)\;x^{r+4}\\&-\mathrm{a}\,(4)\;x^{r+4}+\mathrm{a}\,(4)\;r^2\,x^{r+3}\\&+8\,\mathrm{a}\,(4)\;r\,x^{r+3}+16\,\mathrm{a}\,(4)\;x^{r+3}\\&-\mathrm{a}\,(3)\;x^{r+3}+\mathrm{a}\,(3)\;r^2\,x^{r+2}\\&+6\,\mathrm{a}\,(3)\;r\,x^{r+2}+9\,\mathrm{a}\,(3)\;x^{r+2}\\&-\mathrm{a}\,(2)\;x^{r+2}+\mathrm{a}\,(2)\;r^2\,x^{r+1}\\&+4\,\mathrm{a}\,(2)\;r\,x^{r+1}+4\,\mathrm{a}\,(2)\;x^{r+1}\\&-\mathrm{a}\,(1)\;x^{r+1}+\mathrm{a}\,(1)\;r^2\,x^r\\&+2\,\mathrm{a}\,(1)\;r\,x^r+\mathrm{a}\,(1)\;x^r\\&-\mathrm{a}\,(0)\;x^r+\mathrm{a}\,(0)\;r^2\,x^{r-1}=0\end{aligned}$$

上式の x の全てのべきの係数を零に等値して、

$$\mathrm{a}\,(1)\;r^2+2\,\mathrm{a}\,(1)\;r+\mathrm{a}\,(1)-\mathrm{a}\,(0)=0$$

$$\mathrm{a}\,(2)\;r^2+4\,\mathrm{a}\,(2)\;r+4\,\mathrm{a}\,(2)-\mathrm{a}\,(1)=0$$

$$\mathrm{a}\,(3)\;r^2+6\,\mathrm{a}\,(3)\;r+9\,\mathrm{a}\,(3)-\mathrm{a}\,(2)=0$$

$$\mathrm{a}\,(4)\;r^2+8\,\mathrm{a}\,(4)\;r+16\,\mathrm{a}\,(4)-\mathrm{a}\,(3)=0$$

$$\mathrm{a}\,(5)\;r^2+10\,\mathrm{a}\,(5)\;r+25\,\mathrm{a}\,(5)-\mathrm{a}\,(4)=0$$

$$\mathrm{a}\,(6)\;r^2+12\,\mathrm{a}\,(6)\;r+36\,\mathrm{a}\,(6)-\mathrm{a}\,(5)=0$$

上式から、係数：$a(n)$ を求める。

$$\mathrm{a}\,(1)=\frac{\mathrm{a}\,(0)}{(r+1)^2}$$

$$\mathrm{a}\,(2)=\frac{\mathrm{a}\,(0)}{(r+1)^2\,(r+2)^2}$$

$$\mathrm{a}(3)=\frac{\mathrm{a}(0)}{(r+1)^2(r+2)^2(r+3)^2}$$
$$\mathrm{a}(4)=\frac{\mathrm{a}(0)}{(r+1)^2(r+2)^2(r+3)^2(r+4)^2}$$
$$\mathrm{a}(5)=\frac{\mathrm{a}(0)}{(r+1)^2(r+2)^2(r+3)^2(r+4)^2(r+5)^2}$$
$$\mathrm{a}(6)=\frac{\mathrm{a}(0)}{(r+1)^2(r+2)^2(r+3)^2(r+4)^2(r+5)^2(r+6)^2} \tag{3.4.20}$$

```
AN21:y=sum(DAN0,n,n-5,n+5);
DAN21:diff(AN21,x,1);
DDAN21:diff(AN21,x,2);
AN22:subst([R1],AN21);
DAN22:subst([R1],DAN21);
DDAN22:subst([R1],DDAN21);
subst([DDAN22,DAN22,AN22],EQ1);
EA2:expand(%);
coeff(lhs(EA2),x^(r+n-2))=0;
CA1:factor(solve(%,a(n-1))[1]);
coeff(lhs(EA2),x^(r+n-1))=0;
CA2:factor(solve(%,a(n))[1]);
coeff(lhs(EA2),x^(r+n))=0;
CA3:factor(solve(%,a(n+1))[1]);
```

(3.4.19) 式に $r=r$ とし、$n=n-5$ から $n=n+5$ までは、

$$\begin{aligned}y=&\mathrm{a}(n+5)\,x^{r+n+5}+\mathrm{a}(n+4)\,x^{r+n+4}\\&+\mathrm{a}(n+3)\,x^{r+n+3}+\mathrm{a}(n+2)\,x^{r+n+2}\\&+\mathrm{a}(n+1)\,x^{r+n+1}+\mathrm{a}(n)\,x^{r+n}\\&+\mathrm{a}(n-1)\,x^{r+n-1}+\mathrm{a}(n-2)\,x^{r+n-2}\\&+\mathrm{a}(n-3)\,x^{r+n-3}+\mathrm{a}(n-4)\,x^{r+n-4}\\&+\mathrm{a}(n-5)\,x^{r+n-5}\end{aligned}$$

上式を (3.4.18) 式に代入し、

$$\begin{aligned}&\cdots-\mathrm{a}(n+1)\,x^{r+n+1}+\mathrm{a}(n+1)\,r^2\,x^{r+n}\\&+2\,n\,\mathrm{a}(n+1)\,r\,x^{r+n}+2\,\mathrm{a}(n+1)\,r\,x^{r+n}\\&+n^2\,\mathrm{a}(n+1)\,x^{r+n}+2\,n\,\mathrm{a}(n+1)\,x^{r+n}\\&+\mathrm{a}(n+1)\,x^{r+n}-\mathrm{a}(n)\,x^{r+n}\\&+\mathrm{a}(n)\,r^2\,x^{r+n-1}+2\,n\,\mathrm{a}(n)\,r\,x^{r+n-1}\\&+n^2\,\mathrm{a}(n)\,x^{r+n-1}-\mathrm{a}(n-1)\,x^{r+n-1}\\&+\mathrm{a}(n-1)\,r^2\,x^{r+n-2}+2\,n\,\mathrm{a}(n-1)\,r\,x^{r+n-2}\\&-2\,\mathrm{a}(n-1)\,r\,x^{r+n-2}+n^2\,\mathrm{a}(n-1)\,x^{r+n-2}\\&-2\,n\,\mathrm{a}(n-1)\,x^{r+n-2}+\mathrm{a}(n-1)\,x^{r+n-2}\\&-\mathrm{a}(n-2)\,x^{r+n-2}+\mathrm{a}(n-2)\,r^2\,x^{r+n-3}\\&+2\,n\,\mathrm{a}(n-2)\,r\,x^{r+n-3}-4\,\mathrm{a}(n-2)\,r\,x^{r+n-3}\\&+n^2\,\mathrm{a}(n-2)\,x^{r+n-3}-4\,n\,\mathrm{a}(n-2)\,x^{r+n-3}\\&+4\,\mathrm{a}(n-2)\,x^{r+n-3}+\cdots\end{aligned}$$

上式の x の全てのべきの係数を零に等値して、

$$\begin{aligned}&\mathrm{a}(n-1)\,r^2+2\,n\,\mathrm{a}(n-1)\,r-2\,\mathrm{a}(n-1)\,r\\&\quad+n^2\,\mathrm{a}(n-1)-2\,n\,\mathrm{a}(n-1)\\&\quad+\mathrm{a}(n-1)-\mathrm{a}(n-2)=0\\&\mathrm{a}(n)\,r^2+2\,n\,\mathrm{a}(n)\,r+n^2\,\mathrm{a}(n)-\mathrm{a}(n-1)=0\\&\mathrm{a}(n+1)\,r^2+2\,n\,\mathrm{a}(n+1)\,r+2\,\mathrm{a}(n+1)\,r\\&\quad+n^2\,\mathrm{a}(n+1)+2\,n\,\mathrm{a}(n+1)\\&\quad+\mathrm{a}(n+1)-\mathrm{a}(n)=0\end{aligned}$$

上式から、係数：$a(n)$ を求める。

$$\mathrm{a}(n-1)=\frac{\mathrm{a}(n-2)}{(r+n-1)^2}$$
$$\mathrm{a}(n)=\frac{\mathrm{a}(n-1)}{(r+n)^2}$$
$$\mathrm{a}(n+1)=\frac{\mathrm{a}(n)}{(r+n+1)^2}$$

```
Y1:y=a(0)*x^r*(1+sum(product(
         1/((r+m))^2,m,1,n)*x^n,n,1,inf));
Y2:diff(Y1,r,1);
y[1]=subst([r=0],rhs(Y1));
y[2]=subst([r=0,a(0)=b(0)],rhs(Y2));
y=y[1]+y[2];
```

(3.4.20) 式と上式の係数：$a(n)$ の関係式から、解は、

$$y=\mathrm{a}(0)\,x^r\left(\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\prod_{m=1}^{n}\frac{1}{(r+m)^2}\right)x^n\right)+1\right)$$

もう一つの解は、r が重根であるので、上式を r で微分して、

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\,r}\,y=&\mathrm{a}(0)\,x^r\log(x)\\&\times\left(\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\prod_{m=1}^{n}\frac{1}{(r+m)^2}\right)x^n\right)+1\right)\\&-2\,\mathrm{a}(0)\,x^r\\&\times\sum_{n=1}^{\infty}\left(\prod_{m=1}^{n}\frac{1}{(r+m)^2}\right)\left(\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{r+m}\right)x^n\end{aligned}$$

上式で $r=0$ として、二つの解は、

$$y_1=\mathrm{a}(0)\left(\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\prod_{m=1}^{n}\frac{1}{m^2}\right)x^n\right)+1\right)$$
$$\begin{aligned}y_2=&\mathrm{b}(0)\log(x)\left(\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\prod_{m=1}^{n}\frac{1}{m^2}\right)x^n\right)+1\right)\\&-2\,\mathrm{b}(0)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\prod_{m=1}^{n}\frac{1}{m^2}\right)\left(\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}\right)x^n\end{aligned} \tag{3.4.21}$$

一般解は、

$$y=y_2+y_1$$

3.4.2 Bessel の微分方程式

$$x^2\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,y\right)+x\,\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)+\left(x^2-\alpha^2\right)\,y=0 \quad (3.4.22)$$

の形の微分方程式を Bessel の微分方程式という。

```
kill(all);
depends(y,[x,r]);
EQ1:x^2*diff(y,x,2)+x*diff(y,x,1)+(x^2
 -\alpha^2)*y=0;
DAN0:(x)^r*a(n)*(x)^n;
AN2:y=sum(DAN0,n,0,inf);
AN21:y=sum(DAN0,n,0,10);
subst([AN21],EQ1);
ev(%,diff);
expand(%);
coeff(lhs(%),x^(r))=0;
solve(%,r);
```

級数の形として、$x=0$ を中心に展開する次式とする。

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{a}\,(n)\;x^{r+n} \quad (3.4.23)$$

上式を (3.4.22) 式に代入し、

$$\cdots+\mathrm{a}\,(0)\;x^{r+2}+\mathrm{a}\,(1)\;r^2\,x^{r+1}+2\,\mathrm{a}\,(1)\;r\,x^{r+1} -\mathrm{a}\,(1)\;\alpha^2\,x^{r+1}+\mathrm{a}\,(1)\;x^{r+1}+\mathrm{a}\,(0)\;r^2\,x^r -\mathrm{a}\,(0)\;\alpha^2\,x^r=0$$

x^r の項から、

$$\mathrm{a}\,(0)\;r^2-\mathrm{a}\,(0)\;\alpha^2=0$$

下記を得る。

$$[r=-\alpha,r=\alpha]$$

```
R1:r=\alpha;
AN22:subst([R1],AN21);
subst([AN22],EQ1);
ev(%,diff);
EA2:expand(%);
coeff(lhs(EA2),x^(\alpha+1))=0;
CA1:solve(%,a(1))[1];
coeff(lhs(EA2),x^(\alpha+2))=0;
CA2:solve(%,a(2))[1];
coeff(lhs(EA2),x^(\alpha+3))=0;
CA3:solve(%,a(3))[1];
coeff(lhs(EA2),x^(\alpha+4))=0;
CA4:solve(%,a(4))[1];
coeff(lhs(EA2),x^(\alpha+5))=0;
CA5:solve(%,a(5))[1];
coeff(lhs(EA2),x^(\alpha+6))=0;
CA6:solve(%,a(6))[1];
C1:CA1;
C2:factor(subst([C1],CA2));
C3:factor(subst([C2,C1],CA3));
C4:factor(subst([C3,C2,C1],CA4));
C5:factor(subst([C4,C3,C2,C1],CA5));
C6:factor(subst([C5,C4,C3,C2,C1],CA6));
y=sum(DAN0,n,0,6);
subst([R1,C1,C2,C3,C4,C5,C6],%);
```

(3.4.23) 式に $r=\alpha$ とし、$n=0$ から $n=10$ までは、

$$\begin{aligned} y=&\mathrm{a}\,(10)\;x^{\alpha+10}+\mathrm{a}\,(9)\;x^{\alpha+9}+\mathrm{a}\,(8)\;x^{\alpha+8}\\ &+\mathrm{a}\,(7)\;x^{\alpha+7}+\mathrm{a}\,(6)\;x^{\alpha+6}+\mathrm{a}\,(5)\;x^{\alpha+5}\\ &+\mathrm{a}\,(4)\;x^{\alpha+4}+\mathrm{a}\,(3)\;x^{\alpha+3}+\mathrm{a}\,(2)\;x^{\alpha+2}\\ &+\mathrm{a}\,(1)\;x^{\alpha+1}+\mathrm{a}\,(0)\;x^{\alpha}\end{aligned}$$

上式を (3.4.22) 式に代入し、

$$\begin{aligned}&\cdots+\mathrm{a}\,(6)\;x^{\alpha+8}+14\,\mathrm{a}\,(7)\;\alpha\,x^{\alpha+7}\\ &+49\,\mathrm{a}\,(7)\;x^{\alpha+7}+\mathrm{a}\,(5)\;x^{\alpha+7}+12\,\mathrm{a}\,(6)\;\alpha\,x^{\alpha+6}\\ &+36\,\mathrm{a}\,(6)\;x^{\alpha+6}+\mathrm{a}\,(4)\;x^{\alpha+6}+10\,\mathrm{a}\,(5)\;\alpha\,x^{\alpha+5}\\ &+25\,\mathrm{a}\,(5)\;x^{\alpha+5}+\mathrm{a}\,(3)\;x^{\alpha+5}+8\,\mathrm{a}\,(4)\;\alpha\,x^{\alpha+4}\\ &+16\,\mathrm{a}\,(4)\;x^{\alpha+4}+\mathrm{a}\,(2)\;x^{\alpha+4}+6\,\mathrm{a}\,(3)\;\alpha\,x^{\alpha+3}\\ &+9\,\mathrm{a}\,(3)\;x^{\alpha+3}+\mathrm{a}\,(1)\;x^{\alpha+3}+4\,\mathrm{a}\,(2)\;\alpha\,x^{\alpha+2}\\ &+4\,\mathrm{a}\,(2)\;x^{\alpha+2}+\mathrm{a}\,(0)\;x^{\alpha+2}+2\,\mathrm{a}\,(1)\;\alpha\,x^{\alpha+1}\\ &+\mathrm{a}\,(1)\;x^{\alpha+1}=0\end{aligned}$$

上式の x の全てのべきの係数を零に等値して、

$$4\,\mathrm{a}\,(2)\;\alpha+4\,\mathrm{a}\,(2)+\mathrm{a}\,(0)=0$$

$$2\,\mathrm{a}\,(1)\;\alpha+\mathrm{a}\,(1)=0$$

$$6\,\mathrm{a}\,(3)\;\alpha+9\,\mathrm{a}\,(3)+\mathrm{a}\,(1)=0$$

$$8\,\mathrm{a}\,(4)\;\alpha+16\,\mathrm{a}\,(4)+\mathrm{a}\,(2)=0$$

$$10\,\mathrm{a}\,(5)\;\alpha+25\,\mathrm{a}\,(5)+\mathrm{a}\,(3)=0$$

$$12\,\mathrm{a}\,(6)\;\alpha+36\,\mathrm{a}\,(6)+\mathrm{a}\,(4)=0$$

上式から、係数：$a(n)$ を求める。

$$\mathrm{a}\,(1)=0,\quad \mathrm{a}\,(2)=-\frac{\mathrm{a}\,(0)}{4\;(\alpha+1)},\quad \mathrm{a}\,(3)=0,$$

$$\mathrm{a}\,(4)=\frac{\mathrm{a}\,(0)}{32\;(\alpha+1)\;(\alpha+2)},\quad \mathrm{a}\,(5)=0,$$

$$\mathrm{a}\,(6)=-\frac{\mathrm{a}\,(0)}{384\;(\alpha+1)\;(\alpha+2)\;(\alpha+3)}$$

上式を (3.4.23) 式に代入すると、級数は、

$$y = \cdots - \frac{a(0)\ x^{\alpha+6}}{384\ (\alpha+1)\ (\alpha+2)\ (\alpha+3)} + \frac{a(0)\ x^{\alpha+4}}{32\ (\alpha+1)\ (\alpha+2)} - \frac{a(0)\ x^{\alpha+2}}{4\ (\alpha+1)} + a(0)\ x^{\alpha} \tag{3.4.24}$$

```
AN31:y=sum(DAN0,n,n-5,n+5);
AN32:subst([R1],AN31);
subst([AN32],EQ1);
ev(%,diff);
EA2:expand(%);
coeff(lhs(EA2),x^(\alpha+n-4))=0;
CA1:factor(solve(%,a(n-4))[1]);
coeff(lhs(EA2),x^(\alpha+n-3))=0;
CA2:factor(solve(%,a(n-3))[1]);
coeff(lhs(EA2),x^(\alpha+n-2))=0;
CA3:factor(solve(%,a(n-2))[1]);
coeff(lhs(EA2),x^(\alpha+n-1))=0;
CA4:factor(solve(%,a(n-1))[1]);
coeff(lhs(EA2),x^(\alpha+n))=0;
CA5:factor(solve(%,a(n))[1]);
coeff(lhs(EA2),x^(\alpha+n+1))=0;
CA6:factor(solve(%,a(n+1))[1]);
subst([CA3,CA1],CA5);
subst([n=2*k],%);
factor(%);
```

(3.4.23) 式に $r = \alpha$ とし、$n = n - 5$ から $n = n + 5$ までは、

$$\begin{aligned} y =& a(n+5)\ x^{n+\alpha+5} + a(n+4)\ x^{n+\alpha+4} \\ &+ a(n+3)\ x^{n+\alpha+3} + a(n+2)\ x^{n+\alpha+2} \\ &+ a(n+1)\ x^{n+\alpha+1} + a(n)\ x^{n+\alpha} \\ &+ a(n-1)\ x^{n+\alpha-1} + a(n-2)\ x^{n+\alpha-2} \\ &+ a(n-3)\ x^{n+\alpha-3} + a(n-4)\ x^{n+\alpha-4} \\ &+ a(n-5)\ x^{n+\alpha-5} \end{aligned} \tag{3.4.25}$$

上式を (3.4.22) 式に代入し、

$$\begin{aligned} &\cdots + n^2\, a(n+1)\ x^{n+\alpha+1} + 2\,\alpha\, n\, a(n+1)\ x^{n+\alpha+1} \\ &+ 2\, n\, a(n+1)\ x^{n+\alpha+1} + 2\,\alpha\, a(n+1)\ x^{n+\alpha+1} \\ &+ a(n+1)\ x^{n+\alpha+1} + a(n-1)\ x^{n+\alpha+1} \\ &+ n^2\, a(n)\ x^{n+\alpha} + 2\,\alpha\, n\, a(n)\ x^{n+\alpha} \\ &+ a(n-2)\ x^{n+\alpha} + n^2\, a(n-1)\ x^{n+\alpha-1} \\ &+ 2\,\alpha\, n\, a(n-1)\ x^{n+\alpha-1} - 2\, n\, a(n-1)\ x^{n+\alpha-1} \\ &- 2\,\alpha\, a(n-1)\ x^{n+\alpha-1} + a(n-1)\ x^{n+\alpha-1} \\ &+ a(n-3)\ x^{n+\alpha-1} + \cdots = 0 \end{aligned}$$

上式の x の全てのべきの係数を零に等値して、

$$\begin{aligned} &n^2\, a(n-1) + 2\,\alpha\, n\, a(n-1) - 2\, n\, a(n-1) \\ &\quad - 2\,\alpha\, a(n-1) + a(n-1) + a(n-3) = 0 \\ &n^2\, a(n) + 2\,\alpha\, n\, a(n) + a(n-2) = 0 \\ &n^2\, a(n+1) + 2\,\alpha\, n\, a(n+1) + 2\, n\, a(n+1) \\ &\quad + 2\,\alpha\, a(n+1) + a(n+1) + a(n-1) = 0 \end{aligned}$$

上式から、係数：$a(n)$ を求める。

$$a(n) = -\frac{a(n-6)}{(n-4)\ (n-2)\ n\ (n+2\,\alpha-4)\ (n+2\,\alpha-2)\ (n+2\,\alpha)}$$

n が奇数の時、係数は $a(n) = 0$ であり、n が偶数の時に係数が存在し、$n = 2\,k$ とすると、

$$a(2\,k) = -\frac{a(2\ (k-3))}{64\ (k-2)\ (k-1)\ k\ (k+\alpha-2)\ (k+\alpha-1)\ (k+\alpha)}$$

上式から、

$$a(2\,k) = \frac{a(0)\ (-1)^k}{2^{2\,k}\ k!\ \prod_{k=1}^{k} k+\alpha}$$

```
ANK1:a(2*k)=(-1)^k*a(0)/(2^(2*k))/(k!)
 /\product((\alpha+k),k,1,k);
AN4:y=a(0)*x^(\alpha)+sum(a(2*k)*x^(
 \alpha+2*k),k,1,inf);
ANK0:a(0)=1/(2^\alpha)/(\alpha!);
AN41:y=sum((-1)^k/(k!)/((n+k)!)*(x/2)^(
 \alpha+2*k),k,0,inf);
AN42:y=sum((-1)^k/(k!)/(\Gamma(n+k+1))
 *(x/2)^(\alpha+2*k),k,0,inf);
```

(3.4.24) 式と上式の係数：$a(n)$ の関係式から、解は、

$$y = \left(\sum_{k=1}^{\infty} a(2\,k)\ x^{2\,k+\alpha}\right) + a(0)\ x^{\alpha}$$

$a(0)$ を下記とすると、

$$a(0) = \frac{1}{2^{\alpha}\ \alpha!}$$

解は、

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{-2\,k-\alpha}\ (-1)^k\ x^{2\,k+\alpha}}{k!\ (n+k)!}$$

Γ 関数で表現すると下記となる。当然ながら、Bessel 関数の級数表示 [1] と一致している。

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{-2\,k-\alpha}\ (-1)^k\ x^{2\,k+\alpha}}{k!\,\Gamma(n+k+1)} = \mathrm{bessel\_j}(\alpha,\ x) \tag{3.4.26}$$

α が整数でなければ、$r = -\alpha$ で解は独立となり、解は、

$$y = \%k1\,\mathrm{bessel\_j}(\alpha, x) + \%k2\,\mathrm{bessel\_j}(-\alpha, x)$$

[1] 森口　繁一他：岩波数学公式３　特殊函数、岩波書店　2002 [30], P.145

3.4.3 Gauss の微分方程式

$$(x-1)\,x\,\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,y\right)+\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)\,(x\,(B+A+1)-G)$$
$$+y\,A\,B=0 \tag{3.4.27}$$

の形の微分方程式を Gauss の微分方程式という。ここで A, B, G は定数で、G は整数でないとする。

```
kill(all);
depends(y,[x,r]);
EQ1:x*(x-1)*diff(y,x,2)+((A+B+1)*x-G)
 *diff(y,x,1)+A*B*y=0;
DAN0:(x)^r*a(n)*(x)^n;
AN2:y=sum(DAN0,n,0,inf);
AN21:y=sum(DAN0,n,0,10);
subst([AN21],EQ1);
ev(%,diff);
expand(%);
coeff(lhs(%),x^(r-1))=0;
solve(%,r);
```

級数の形として、$x=0$ を中心に展開する次式とする。

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{a}\,(n)\;x^{r+n} \tag{3.4.28}$$

上式を (3.4.27) 式に代入し、

$$\cdots-\mathrm{a}\,(2)\;r^2\,x^{r+1}+\mathrm{a}\,(1)\;r^2\,x^{r+1}-3\,\mathrm{a}\,(2)\;r\,x^{r+1}$$
$$+2\,\mathrm{a}\,(1)\;r\,x^{r+1}-2\,\mathrm{a}\,(2)\;x^{r+1}+\mathrm{a}\,(1)\;x^{r+1}$$
$$-\mathrm{a}\,(1)\;r^2\,x^r+\mathrm{a}\,(0)\;r^2\,x^r-\mathrm{a}\,(1)\;r\,x^r$$
$$-\mathrm{a}\,(0)\;r^2\,x^{r-1}+\mathrm{a}\,(0)\;r\,x^{r-1}=0$$

x^{r-1} の項から、

$$-\mathrm{a}\,(0)\;r\,G-\mathrm{a}\,(0)\;r^2+\mathrm{a}\,(0)\;r=0$$

下記を得る。

$$[r=1-G,r=0]$$

$r=0$ の場合

```
R1:r=0;
AN22:subst([R1],AN21);
subst([AN22],EQ1);
ev(%,diff);
EA2:expand(%);
-a(1)*G+a(0)*A*B=0;
CA1:factor(solve(%,a(1))[1]);
coeff(lhs(EA2),x^(1))=0;
CA2:factor(solve(%,a(2))[1]);
```

```
coeff(lhs(EA2),x^(2))=0;
CA3:factor(solve(%,a(3))[1]);
coeff(lhs(EA2),x^(3))=0;
CA4:factor(solve(%,a(4))[1]);
coeff(lhs(EA2),x^(4))=0;
CA5:factor(solve(%,a(5))[1]);
coeff(lhs(EA2),x^(5))=0;
CA6:factor(solve(%,a(6))[1]);
C1:CA1;
C2:factor(subst([C1],CA2));
C3:factor(subst([C2,C1],CA3));
C4:factor(subst([C3,C2,C1],CA4));
C5:factor(subst([C4,C3,C2,C1],CA5));
C6:factor(subst([C5,C4,C3,C2,C1],CA6));
y=sum(DAN0,n,0,6);
subst([R1,C1,C2,C3,C4,C5,C6],%);
```

(3.4.28) 式に $r=0$ とし、$n=0$ から $n=10$ までは、

$$y=\mathrm{a}\,(10)\;x^{10}+\mathrm{a}\,(9)\;x^9+\mathrm{a}\,(8)\;x^8+\mathrm{a}\,(7)\;x^7$$
$$+\mathrm{a}\,(6)\;x^6+\mathrm{a}\,(5)\;x^5+\mathrm{a}\,(4)\;x^4+\mathrm{a}\,(3)\;x^3$$
$$+\mathrm{a}\,(2)\;x^2+\mathrm{a}\,(1)\;x+\mathrm{a}\,(0)$$

上式を (3.4.27) 式に代入し、上式の x の全てのべきの係数を零に等値して、

$$\mathrm{a}\,(0)\;A\,B-\mathrm{a}\,(1)\;G=0$$
$$-2\,\mathrm{a}\,(2)\;G+\mathrm{a}\,(1)\;A\,B+\mathrm{a}\,(1)\;B+\mathrm{a}\,(1)\;A$$
$$-2\,\mathrm{a}\,(2)+\mathrm{a}\,(1)=0$$
$$-3\,\mathrm{a}\,(3)\;G+\mathrm{a}\,(2)\;A\,B+2\,\mathrm{a}\,(2)\;B+2\,\mathrm{a}\,(2)\;A$$
$$-6\,\mathrm{a}\,(3)+4\,\mathrm{a}\,(2)=0$$
$$-4\,\mathrm{a}\,(4)\;G+\mathrm{a}\,(3)\;A\,B+3\,\mathrm{a}\,(3)\;B+3\,\mathrm{a}\,(3)\;A$$
$$-12\,\mathrm{a}\,(4)+9\,\mathrm{a}\,(3)=0$$
$$-5\,\mathrm{a}\,(5)\;G+\mathrm{a}\,(4)\;A\,B+4\,\mathrm{a}\,(4)\;B+4\,\mathrm{a}\,(4)\;A$$
$$-20\,\mathrm{a}\,(5)+16\,\mathrm{a}\,(4)=0$$
$$-6\,\mathrm{a}\,(6)\;G+\mathrm{a}\,(5)\;A\,B+5\,\mathrm{a}\,(5)\;B+5\,\mathrm{a}\,(5)\;A$$
$$-30\,\mathrm{a}\,(6)+25\,\mathrm{a}\,(5)=0$$

上式から、係数：$a(n)$ を求める。

$$\mathrm{a}(1)=\frac{\mathrm{a}(0)\,A\,B}{G}$$
$$\mathrm{a}(2)=\frac{\mathrm{a}(0)\,A\,(A+1)\,B\,(B+1)}{2\,G\,(G+1)}$$
$$\mathrm{a}(3)=\frac{\mathrm{a}(0)\,A\,(A+1)\,(A+2)\,B\,(B+1)\,(B+2)}{6\,G\,(G+1)\,(G+2)}$$
$$\mathrm{a}(4)=\frac{\mathrm{a}(0)\,A\,(A+1)\,(A+2)\,(A+3)\,B\,(B+1)\,(B+2)\,(B+3)}{24\,G\,(G+1)\,(G+2)\,(G+3)}$$
$$\mathrm{a}(5)=\frac{\mathrm{a}(0)\,A\,(A+1)\,(A+2)\,(A+3)\,(A+4)\,B\,(B+1)\,(B+2)\,(B+3)\,(B+4)}{120\,G\,(G+1)\,(G+2)\,(G+3)\,(G+4)}$$
$$\mathrm{a}(6)=\frac{\mathrm{a}(0)\,A\,(A+1)\,(A+2)\,(A+3)\,(A+4)\,(A+5)\,B\,(B+1)\,(B+2)\,(B+3)\,(B+4)\,(B+5)}{720\,G\,(G+1)\,(G+2)\,(G+3)\,(G+4)\,(G+5)}$$

上式を (3.4.28) 式に代入すると、級数は、

$$\begin{aligned}y=\cdots&+\frac{\mathrm{a}(0)\,x^6\,A\,(A+1)\,(A+2)\,(A+3)\,(A+4)\,(A+5)\,B\,(B+1)\,(B+2)\,(B+3)\,(B+4)\,(B+5)}{720\,G\,(G+1)\,(G+2)\,(G+3)\,(G+4)\,(G+5)}\\&+\frac{\mathrm{a}(0)\,x^5\,A\,(A+1)\,(A+2)\,(A+3)\,(A+4)\,B\,(B+1)\,(B+2)\,(B+3)\,(B+4)}{120\,G\,(G+1)\,(G+2)\,(G+3)\,(G+4)}\\&+\frac{\mathrm{a}(0)\,x^4\,A\,(A+1)\,(A+2)\,(A+3)\,B\,(B+1)\,(B+2)\,(B+3)}{24\,G\,(G+1)\,(G+2)\,(G+3)}\\&+\frac{\mathrm{a}(0)\,x^3\,A\,(A+1)\,(A+2)\,B\,(B+1)\,(B+2)}{6\,G\,(G+1)\,(G+2)}+\frac{\mathrm{a}(0)\,x^2\,A\,(A+1)\,B\,(B+1)}{2\,G\,(G+1)}+\frac{\mathrm{a}(0)\,x\,A\,B}{G}+\mathrm{a}(0)\end{aligned}\tag{3.4.29}$$

```
AN31:y=sum(DAN0,n,n-5,n+5);
AN32:subst([R1],AN31);
subst([AN32],EQ1);
ev(%,diff);
EA2:expand(%);
coeff(lhs(EA2),x^(n-2))=0;
CA3:factor(solve(%,a(n-1))[1]);
coeff(lhs(EA2),x^(n-1))=0;
CA4:factor(solve(%,a(n))[1]);
coeff(lhs(EA2),x^(n))=0;
CA5:factor(solve(%,a(n+1))[1]);
AN41:y=a(0)*(1+sum(x^n*product((A+m-1)
 *(B+m-1)/m/(G+m-1),m,1,n),n,1,inf));
```

(3.4.28) 式に $r=0$ とし、$n=n-5$ から $n=n+5$ までは、

$$\begin{aligned}y=&\,\mathrm{a}(n+5)\,x^{n+5}+\mathrm{a}(n+4)\,x^{n+4}+\mathrm{a}(n+3)\,x^{n+3}\\&+\mathrm{a}(n+2)\,x^{n+2}+\mathrm{a}(n+1)\,x^{n+1}+\mathrm{a}(n)\,x^n\\&+\mathrm{a}(n-1)\,x^{n-1}+\mathrm{a}(n-2)\,x^{n-2}+\mathrm{a}(n-3)\,x^{n-3}\\&+\mathrm{a}(n-4)\,x^{n-4}+\mathrm{a}(n-5)\,x^{n-5}\end{aligned}$$

上式を (3.4.27) 式に代入し、

上式の x の全てのべきの係数を零に等値して、

$$\begin{aligned}&-n\,\mathrm{a}(n-1)\,G+\mathrm{a}(n-1)\,G+\mathrm{a}(n-2)\,A\,B\\&\quad+n\,\mathrm{a}(n-2)\,B-2\,\mathrm{a}(n-2)\,B+n\,\mathrm{a}(n-2)\,A\\&\quad-2\,\mathrm{a}(n-2)\,A-n^2\,\mathrm{a}(n-1)+3\,n\,\mathrm{a}(n-1)\\&\quad-2\,\mathrm{a}(n-1)+n^2\,\mathrm{a}(n-2)-4\,n\,\mathrm{a}(n-2)\\&\quad+4\,\mathrm{a}(n-2)=0\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}&-n\,\mathrm{a}(n)\,G+\mathrm{a}(n-1)\,A\,B+n\,\mathrm{a}(n-1)\,B\\&\quad-\mathrm{a}(n-1)\,B+n\,\mathrm{a}(n-1)\,A-\mathrm{a}(n-1)\,A\\&\quad-n^2\,\mathrm{a}(n)+n\,\mathrm{a}(n)+n^2\,\mathrm{a}(n-1)\\&\quad-2\,n\,\mathrm{a}(n-1)+\mathrm{a}(n-1)=0\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}&-n\,\mathrm{a}(n+1)\,G-\mathrm{a}(n+1)\,G+\mathrm{a}(n)\,A\,B\\&\quad+n\,\mathrm{a}(n)\,B+n\,\mathrm{a}(n)\,A-n^2\,\mathrm{a}(n+1)\\&\quad-n\,\mathrm{a}(n+1)+n^2\,\mathrm{a}(n)=0\end{aligned}$$

上式から、係数：$a(n)$ を求める。

$$\mathrm{a}(n-1)=\frac{\mathrm{a}(n-2)\,(A+n-2)\,(B+n-2)}{(n-1)\,(G+n-2)}$$
$$\mathrm{a}(n)=\frac{\mathrm{a}(n-1)\,(A+n-1)\,(B+n-1)}{n\,(G+n-1)}$$
$$\mathrm{a}(n+1)=\frac{\mathrm{a}(n)\,(A+n)\,(B+n)}{(n+1)\,(G+n)}$$

(3.4.29) 式と上式から、

$$\begin{aligned}y=&\,\mathrm{a}(0)\\&\times\left(\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\prod_{m=1}^{n}\frac{(A+m-1)\,(B+m-1)}{m\,(G+m-1)}\right)+1\right)\end{aligned}\tag{3.4.30}$$

$r=1-G$ の場合

```
R1:r=1-G;
AN22:subst([R1],AN21);
subst([AN22],EQ1);
ev(%,diff);
EA2:expand(%);
coeff(lhs(EA2),x^(1-G))=0;
CA1:factor(solve(%,a(1))[1]);
coeff(lhs(EA2),x^(2-G))=0;
CA2:factor(solve(%,a(2))[1]);
coeff(lhs(EA2),x^(3-G))=0;
CA3:factor(solve(%,a(3))[1]);
coeff(lhs(EA2),x^(4-G))=0;
CA4:factor(solve(%,a(4))[1]);
coeff(lhs(EA2),x^(5-G))=0;
CA5:factor(solve(%,a(5))[1]);
coeff(lhs(EA2),x^(6-G))=0;
CA6:factor(solve(%,a(6))[1]);
C1:CA1;
C2:factor(subst([C1],CA2));
C3:factor(subst([C2,C1],CA3));
C4:factor(subst([C3,C2,C1],CA4));
C5:factor(subst([C4,C3,C2,C1],CA5));
C6:factor(subst([C5,C4,C3,C2,C1],CA6));
y=sum(DAN0,n,0,6);
subst([R1,C1,C2,C3,C4,C5,C6],%);
```

$$r=1-G$$

(3.4.28) 式に $r=1-G$ とし、$n=0$ から $n=10$ までは、

$$\begin{aligned}y =&\mathrm{a}\,(10)\;x^{11-G}+\mathrm{a}\,(9)\;x^{10-G}+\mathrm{a}\,(8)\;x^{9-G}\\&+\mathrm{a}\,(7)\;x^{8-G}+\mathrm{a}\,(6)\;x^{7-G}+\mathrm{a}\,(5)\;x^{6-G}\\&+\mathrm{a}\,(4)\;x^{5-G}+\mathrm{a}\,(3)\;x^{4-G}+\mathrm{a}\,(2)\;x^{3-G}\\&+\mathrm{a}\,(1)\;x^{2-G}+\mathrm{a}\,(0)\;x^{1-G}\end{aligned}$$

上式を (3.4.27) 式に代入し、上式の x の全てのべきの係数を零に等値して、

$$\begin{aligned}&\mathrm{a}\,(0)\;G^2-\mathrm{a}\,(0)\;B\,G-\mathrm{a}\,(0)\;A\,G+\mathrm{a}\,(1)\;G\\&-2\,\mathrm{a}\,(0)\;G+\mathrm{a}\,(0)\;A\,B+\mathrm{a}\,(0)\;B+\mathrm{a}\,(0)\;A\\&-2\,\mathrm{a}\,(1)+\mathrm{a}\,(0)=0\\&\mathrm{a}\,(1)\;G^2-\mathrm{a}\,(1)\;B\,G-\mathrm{a}\,(1)\;A\,G+2\,\mathrm{a}\,(2)\;G\\&-4\,\mathrm{a}\,(1)\;G+\mathrm{a}\,(1)\;A\,B+2\,\mathrm{a}\,(1)\;B+2\,\mathrm{a}\,(1)\;A\\&-6\,\mathrm{a}\,(2)+4\,\mathrm{a}\,(1)=0\\&\mathrm{a}\,(2)\;G^2-\mathrm{a}\,(2)\;B\,G-\mathrm{a}\,(2)\;A\,G+3\,\mathrm{a}\,(3)\;G\\&-6\,\mathrm{a}\,(2)\;G+\mathrm{a}\,(2)\;A\,B+3\,\mathrm{a}\,(2)\;B+3\,\mathrm{a}\,(2)\;A\\&-12\,\mathrm{a}\,(3)+9\,\mathrm{a}\,(2)=0\\&\mathrm{a}\,(3)\;G^2-\mathrm{a}\,(3)\;B\,G-\mathrm{a}\,(3)\;A\,G+4\,\mathrm{a}\,(4)\;G\\&-8\,\mathrm{a}\,(3)\;G+\mathrm{a}\,(3)\;A\,B+4\,\mathrm{a}\,(3)\;B+4\,\mathrm{a}\,(3)\;A\\&-20\,\mathrm{a}\,(4)+16\,\mathrm{a}\,(3)=0\\&\mathrm{a}\,(4)\;G^2-\mathrm{a}\,(4)\;B\,G-\mathrm{a}\,(4)\;A\,G+5\,\mathrm{a}\,(5)\;G\\&-10\,\mathrm{a}\,(4)\;G+\mathrm{a}\,(4)\;A\,B+5\,\mathrm{a}\,(4)\;B+5\,\mathrm{a}\,(4)\;A\\&-30\,\mathrm{a}\,(5)+25\,\mathrm{a}\,(4)=0\\&\mathrm{a}\,(5)\;G^2-\mathrm{a}\,(5)\;B\,G-\mathrm{a}\,(5)\;A\,G+6\,\mathrm{a}\,(6)\;G\\&-12\,\mathrm{a}\,(5)\;G+\mathrm{a}\,(5)\;A\,B+6\,\mathrm{a}\,(5)\;B+6\,\mathrm{a}\,(5)\;A\\&-42\,\mathrm{a}\,(6)+36\,\mathrm{a}\,(5)=0\end{aligned}$$

上式から、係数：$a(n)$ を求める。

$$\mathrm{a}\,(1)=-\frac{\mathrm{a}\,(0)\;(G-A-1)\;(G-B-1)}{G-2}$$

$$\mathrm{a}\,(2)=\frac{\mathrm{a}\,(0)\;(G-A-2)\;(G-A-1)\;(G-B-2)\;(G-B-1)}{2\;(G-3)\;(G-2)}$$

$$\mathrm{a}\,(3)=-\frac{\mathrm{a}\,(0)\;(G-A-3)\;(G-A-2)\;(G-A-1)\;(G-B-3)\;(G-B-2)\;(G-B-1)}{6\;(G-4)\;(G-3)\;(G-2)}$$

$$\mathrm{a}\,(4)=\frac{\mathrm{a}\,(0)\;(G-A-4)\;(G-A-3)\;(G-A-2)\;(G-A-1)\;(G-B-4)\;(G-B-3)\;(G-B-2)\;(G-B-1)}{24\;(G-5)\;(G-4)\;(G-3)\;(G-2)}$$

$$\mathrm{a}\,(5)=-\frac{\mathrm{a}\,(0)\;(G-A-5)\;(G-A-4)\;(G-A-3)\;(G-A-2)\;(G-A-1)\;(G-B-5)\;(G-B-4)\;(G-B-3)\;(G-B-2)\;(G-B-1)}{120\;(G-6)\;(G-5)\;(G-4)\;(G-3)\;(G-2)}$$

上式を (3.4.28) 式に代入すると、級数は、

$$\begin{aligned}y=\cdots&-\frac{\mathrm{a}\,(0)\;x^{6-G}\;(G-A-5)\;(G-A-4)\;(G-A-3)\;(G-A-2)\;(G-A-1)\;(G-B-5)\;(G-B-4)\;(G-B-3)\;(G-B-2)\;(G-B-1)}{120\;(G-6)\;(G-5)\;(G-4)\;(G-3)\;(G-2)}\\&+\frac{\mathrm{a}\,(0)\;x^{5-G}\;(G-A-4)\;(G-A-3)\;(G-A-2)\;(G-A-1)\;(G-B-4)\;(G-B-3)\;(G-B-2)\;(G-B-1)}{24\;(G-5)\;(G-4)\;(G-3)\;(G-2)}\\&-\frac{\mathrm{a}\,(0)\;x^{4-G}\;(G-A-3)\;(G-A-2)\;(G-A-1)\;(G-B-3)\;(G-B-2)\;(G-B-1)}{6\;(G-4)\;(G-3)\;(G-2)}\\&+\frac{\mathrm{a}\,(0)\;x^{3-G}\;(G-A-2)\;(G-A-1)\;(G-B-2)\;(G-B-1)}{2\;(G-3)\;(G-2)}-\frac{\mathrm{a}\,(0)\;x^{2-G}\;(G-A-1)\;(G-B-1)}{G-2}+\mathrm{a}\,(0)\;x^{1-G}\end{aligned} \tag{3.4.31}$$

```
AN31:y=sum(DAN0,n,n-5,n+5);
AN32:subst([R1],AN31);
subst([AN32],EQ1);
ev(%,diff);
EA2:expand(%);
coeff(lhs(EA2),x^(n-1-G))=0;
CA3:factor(solve(%,a(n-1))[1]);
coeff(lhs(EA2),x^(n-G))=0;
CA4:factor(solve(%,a(n))[1]);
coeff(lhs(EA2),x^(n+1-G))=0;
CA5:factor(solve(%,a(n+1))[1]);
CA41:a(n)=(a(n-1)*(-G+A+n)*(-G+B+n))
 /(n*(-G+n+1));
AN51:y=b(0)*x^(1-G)*(1+sum(x^n*product((
 -G+A+m)*(-G+B+m)/m/(-G+m+1),m,1,n)
 ,n,1,inf));
```

(3.4.28) 式に $r=0$ とし、$n=n-5$ から $n=n+5$ までは、

$$\begin{aligned}y=&\mathrm{a}\left(n+5\right)\,x^{-G+n+6}+\mathrm{a}\left(n+4\right)\,x^{-G+n+5}\\&+\mathrm{a}\left(n+3\right)\,x^{-G+n+4}+\mathrm{a}\left(n+2\right)\,x^{-G+n+3}\\&+\mathrm{a}\left(n+1\right)\,x^{-G+n+2}+\mathrm{a}\left(n\right)\,x^{-G+n+1}\\&+\mathrm{a}\left(n-1\right)\,x^{n-G}+\mathrm{a}\left(n-2\right)\,x^{-G+n-1}\\&+\mathrm{a}\left(n-3\right)\,x^{-G+n-2}+\mathrm{a}\left(n-4\right)\,x^{-G+n-3}\\&+\mathrm{a}\left(n-5\right)\,x^{-G+n-4}\end{aligned}$$

上式を (3.4.27) 式に代入し、
上式の x の全てのべきの係数を零に等値して、

$$\begin{aligned}&\mathrm{a}\left(n-1\right)\,G^2-\mathrm{a}\left(n-1\right)\,B\,G-\mathrm{a}\left(n-1\right)\,A\,G\\&+n\,\mathrm{a}\left(n\right)\,G-2\,n\,\mathrm{a}\left(n-1\right)\,G+\mathrm{a}\left(n-1\right)\,A\,B\\&+n\,\mathrm{a}\left(n-1\right)\,B+n\,\mathrm{a}\left(n-1\right)\,A-n^2\,\mathrm{a}\left(n\right)\\&-n\,\mathrm{a}\left(n\right)+n^2\,\mathrm{a}\left(n-1\right)=0\\&\mathrm{a}\left(n\right)\,G^2-\mathrm{a}\left(n\right)\,B\,G-\mathrm{a}\left(n\right)\,A\,G\\&+n\,\mathrm{a}\left(n+1\right)\,G+\mathrm{a}\left(n+1\right)\,G-2\,n\,\mathrm{a}\left(n\right)\,G\\&-2\,\mathrm{a}\left(n\right)\,G+\mathrm{a}\left(n\right)\,A\,B+n\,\mathrm{a}\left(n\right)\,B\\&+\mathrm{a}\left(n\right)\,B+n\,\mathrm{a}\left(n\right)\,A+\mathrm{a}\left(n\right)\,A\\&-n^2\,\mathrm{a}\left(n+1\right)-3\,n\,\mathrm{a}\left(n+1\right)-2\,\mathrm{a}\left(n+1\right)\\&+n^2\,\mathrm{a}\left(n\right)+2\,n\,\mathrm{a}\left(n\right)+\mathrm{a}\left(n\right)=0\end{aligned}$$

上式から、係数：$a(n)$ を求める。

$$\mathrm{a}\left(n\right)=-\frac{\mathrm{a}\left(n-1\right)\,\left(G-A-n\right)\,\left(G-B-n\right)}{n\,\left(G-n-1\right)}$$

$$\mathrm{a}\left(n+1\right)=-\frac{\mathrm{a}\left(n\right)\,\left(G-A-n-1\right)\,\left(G-B-n-1\right)}{\left(n+1\right)\,\left(G-n-2\right)}$$

(3.4.31) 式と上式から、

$$\begin{aligned}y=&\mathrm{b}\left(0\right)\,x^{1-G}\\&\times\left(\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\,\prod_{m=1}^{n}\frac{\left(-G+A+m\right)\,\left(-G+B+m\right)}{m\,\left(-G+m+1\right)}\right)\right.\\&\left.+1\right)\end{aligned}\tag{3.4.32}$$

```
F1:F(A,B,G,x)=1+sum(x^n*product((A+m-1)
 *(B+m-1)/m/(G+m-1),m,1,n),n,1,inf);
AN42:y[1]=a(0)*F(A,B,G,x);
A1:A[1]+m-1=-G+A+m;
B1:B[1]+m-1=-G+B+m;
G1:G[1]+m-1=-G+m+1;
ABG1:solve([A1,B1,G1],[A[1],B[1],G[1]])[1];
AN52:y[2]=b(0)*x^(1-G)*F(A[1],B[1],G[1],x);
subst([ABG1],AN52);
y=y[1]+y[2];
```

下記の超幾何関数：F を下記のように定義する。

$$\begin{aligned}&\mathrm{F}\left(A,B,G,x\right)\\&=\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\,\prod_{m=1}^{n}\frac{\left(A+m-1\right)\,\left(B+m-1\right)}{m\,\left(G+m-1\right)}\right)+1\end{aligned}\tag{3.4.33}$$

このとき、(3.4.30) 式は下記となる。

$$y_1=\mathrm{a}\left(0\right)\,\mathrm{F}\left(A,B,G,x\right)\tag{3.4.34}$$

(3.4.32) 式と (3.4.33) 式を比べ、下記の関係を得る。

$$m+A_1-1=-G+A+m$$

$$m+B_1-1=-G+B+m$$

$$m+G_1-1=-G+m+1$$

上式を解いて、

$$[A_1=-G+A+1,B_1=-G+B+1,G_1=2-G]$$

以上の関係から、(3.4.32) 式と (3.4.33) 式から、

$$\begin{aligned}y_2=&\mathrm{b}\left(0\right)\,\mathrm{F}\left(A_1,B_1,G_1,x\right)\,x^{1-G}\\=&\mathrm{b}\left(0\right)\,x^{1-G}\\&\times\,\mathrm{F}\left(-G+A+1,-G+B+1,2-G,x\right)\end{aligned}\tag{3.4.35}$$

一般解は、

$$y=y_2+y_1$$

変数変換

```
kill(all);
depends(y,[x,r]);
EQ1:x*(x-1)*diff(y,x,2)+((A+B+1)*x-G)
 *diff(y,x,1)+A*B*y=0;
EQ2:(x-A[2])*(x-B[2])*diff(y,x,2)+(C[2]*x
 -D[2])*diff(y,x,1)+E[2]*y=0;
TR2:x=(B[2]-A[2])*t+A[2];
TR21:solve(TR2,t)[1];
forget(y,[x,r]);
depends(y,[t]);
depends(t,[x]);
DTX1:diff(TR21,x,1);
DTX2:diff(TR21,x,2);
ev(EQ2,diff);
subst([DTX2,DTX1,TR2],%);
EQ21:expand(%);
DC0:factor(coeff(lhs(EQ21),y,1));
factor(coeff(lhs(EQ21),'diff(y,t,1),1));
DC1:partfrac(%,t);
DC2:factor(coeff(lhs(EQ21),'diff(y,t,2)
 ,1));
EQ22:DC2*'diff(y,t,2)+DC1*'diff(y,t,1)
 +DC0=0;
G1:B+A+1=C[2];
G2:-G=(-D[2]+A[2]*C[2])/(B[2]-A[2]);
G3:A*B=E[2];
G4:solve([G1,G3],[A,B]);
G5:-G2;
```

下記の微分方程式について、

$$\begin{aligned}(x-A_2)\,(x-B_2)\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,y\right)&\\ +\,(C_2\,x-D_2)\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)+E_2\,y=0&\end{aligned} \tag{3.4.36}$$

下記の変数変換で、

$$x=(B_2-A_2)\,t+A_2,\quad t=\frac{x-A_2}{B_2-A_2} \tag{3.4.37}$$

下記の関係があり、

$$\frac{d}{d\,x}\,t=\frac{1}{B_2-A_2},\quad \frac{d^2}{d\,x^2}\,t=0$$

変数変換を行い、上記の関係を (3.4.36) 式に代入し、

$$\begin{aligned}(x-A_2)\,(x-B_2)&\left(\left(\frac{d}{d\,x}\,t\right)^2\left(\frac{d^2}{d\,t^2}\,y\right)\right.\\ &\left.+\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,t\right)\left(\frac{d}{d\,t}\,y\right)\right)\\ &+\left(\frac{d}{d\,x}\,t\right)(C_2\,x-D_2)\left(\frac{d}{d\,t}\,y\right)+E_2\,y=0\end{aligned}$$

上式を整理すると、

$$\begin{aligned}(t-1)\,t&\left(\frac{d^2}{d\,t^2}\,y\right)\\ &+\frac{((B_2-A_2)\,C_2\,t-D_2+A_2\,C_2)\left(\frac{d}{d\,t}\,y\right)}{B_2-A_2}\\ &+E_2=0\end{aligned}$$

上式は (3.4.27) 式の Gauss の微分方程式になっており、係数の関係は、

$$B+A+1=C_2,\quad A\,B=E_2$$

$$-G=\frac{A_2\,C_2-D_2}{B_2-A_2}$$

上式から、A,B,G を求めると、

$$\begin{aligned}A&=\frac{\sqrt{-4\,E_2+C_2^2-2\,C_2+1}+C_2-1}{2},\\ B&=\frac{2\,E_2}{\sqrt{-4\,E_2+C_2^2-2\,C_2+1}+C_2-1}\\ G&=-\frac{A_2\,C_2-D_2}{B_2-A_2}\end{aligned} \tag{3.4.38}$$

上式を (3.4.34) 式と (3.4.35) 式に代入することにより解が得られる。

3.4.4 Legendre の微分方程式

下記の形の微分方程式を Legendre の微分方程式という。

$$(x-1)\,(x+1)\,\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,y\,(x)\right)+2\,x\,\left(\frac{d}{d\,x}\,y\,(x)\right)-N\,(N+1)\,y\,(x)=0 \tag{3.4.39}$$

Gauss の方程式に変形

```
kill(all);
depends(y,[x]);
EQ1:x*(x-1)*diff(y,x,2)+((A+B+1)*x-G)
 *diff(y,x,1)+A*B*y=0;
AN1:y=b(0)*x^(1-G)*F(-G+A+1,-G+B+1,2-G,x)
 +a(0)*F(A,B,G,x);
EQ2:(x-A[2])*(x-B[2])*diff(y,x,2)+(C[2]*x
 -D[2])*diff(y,x,1)+E[2]*y=0;
TR2:x=(B[2]-A[2])*t+A[2];
TR21:solve(TR2,t)[1];
G4:[[A=-(sqrt(-4*E[2]+C[2]^2-2*C[2]+1)
 -C[2]+1)/2,B=-(2*E[2])/(sqrt(-4*E[2]
 +C[2]^2-2*C[2]+1)-C[2]+1)],[A=(sqrt(-4*
 E[2]+C[2]^2-2*C[2]+1)+C[2]-1)/2,
 B=(2*E[2])/(sqrt(-4*E[2]+C[2]^2-2*C[2]+1)
 +C[2]-1)]];
G5:G=-(A[2]*C[2]-D[2])/(B[2]-A[2]);
EQ3:(x^2-1)*diff(y,x,2)+2*x*diff(y,x,1)
 -N*(N+1)*y=0;
LI1:[A[2]=1,B[2]=-1,C[2]=2,D[2]=0,E[2]=
 -N*(N+1)];
assume(N>0);
LI2:subst(LI1,G4);
4*N*(N+1)+1;
%=factor(%);
subst([%],LI2);
factor(%);
LI3:%[2];
G51:subst(LI1,G5);
X5:subst(LI1,TR21);
subst(LI3,AN1);
subst([G51,x=t,X5],%);
AN2:y=rest(rhs(%),1);
F1:F(A,B,G,x)=1+sum(x^n*product((A+m-1)
 *(B+m-1)/m/(G+m-1),m,1,n),n,1,inf);
subst(LI3,F1);
subst([G51,x=(1-x)/2],%);
AN3:y[1]=a(0)*rhs(%);
AN4:y[2]=y[1]*(log(1-x)+C[1]*(1-x));
PN1:P[n](x)=1/n!/2^n*diff((x^2-1)^n,x,n);
PN2:y=rhs(PN1);
```

(3.4.36) 式から、Gauss の方程式を変数変換した式は下記である。

$$(x-A_2)\,(x-B_2)\,\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,y\right)+(C_2\,x-D_2)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)+E_2\,y=0 \tag{3.4.40}$$

このときの変数変換は、

$$x=(B_2-A_2)\,t+A_2,\quad t=\frac{x-A_2}{B_2-A_2} \tag{3.4.41}$$

Gauss の方程式との係数の関係は次式となる。

$$\begin{aligned}A&=\frac{\sqrt{-4\,E_2+C_2^2-2\,C_2+1}+C_2-1}{2},\\ B&=\frac{2\,E_2}{\sqrt{-4\,E_2+C_2^2-2\,C_2+1}+C_2-1}\\ G&=-\frac{A_2\,C_2-D_2}{B_2-A_2}\end{aligned} \tag{3.4.42}$$

また、Gauss の方程式の解は (3.4.34) 式、(3.4.35) 式から次式の超幾何関数：F で得られる。

$$y=\mathrm{b}\,(0)\;x^{1-G}\,\mathrm{F}\,(-G+A+1,-G+B+1,2-G,x)+\mathrm{a}\,(0)\;\mathrm{F}\,(A,B,G,x) \tag{3.4.43}$$

(3.4.36) 式と (3.4.39) 式の Legendre の微分方程式を比較し、係数の関係は、

$$[A_2=1,B_2=-1,C_2=2,D_2=0,E_2=-N\,(N+1)]$$

上式を (3.4.42) 式に代入すると、

$$A=N+1,\quad B=-N,\quad G=1,\quad t=-\frac{x-1}{2} \tag{3.4.44}$$

以上から、Legendre の微分方程式の解は次式となる。

$$y=\mathrm{b}\,(0)\;\mathrm{F}\left(N+1,-N,1,-\frac{x-1}{2}\right)+\mathrm{a}\,(0)\;\mathrm{F}\left(N+1,-N,1,-\frac{x-1}{2}\right)$$

上式の右辺第一項、第二項は同じであるから、解は、

$$y=\mathrm{a}\,(0)\;\mathrm{F}\left(N+1,-N,1,-\frac{x-1}{2}\right)$$

超幾何関数：F は次式で得られ、

$$\mathrm{F}\,(A,B,G,x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\,\prod_{m=1}^{n}\frac{(A+m-1)\,(B+m-1)}{m\,(G+m-1)}\right)+1$$

(3.4.44) 式の係数の関係式を上式に代入し、

$$\begin{aligned} &\mathrm{F}\left(N+1,-N,1,\frac{1-x}{2}\right) \\ &\quad=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-x)^n\prod_{m=1}^{n}\frac{(-N+m-1)\,(N+m)}{m^2}}{2^n}\right)+1 \end{aligned}$$

以上から、Legendre の微分方程式の解は

$$\begin{aligned} y_1=\mathrm{a}\,(0)\Biggl(&\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-x)^n\prod_{m=1}^{n}\frac{(-N+m-1)\,(N+m)}{m^2}}{2^n}\right) \\ &+1\Biggr) \end{aligned} \tag{3.4.45}$$

もう一つの解は次式で得られるが、$x=1$ で解が発散するので、解から省く。

$$y_2=y_1\,\left(C_1\,(1-x)+\log\,(1-x)\right)$$

級数解

```
kill(all);
depends(y,[x,r]);
EQ1:(x^2-1)*diff(y,x,2)+2*x*diff(y,x,1)
 -N*(N+1)*y=0;
DAN0:(x)^r*a(n)*(x)^n;
AN2:y=sum(DAN0,n,0,inf);
AN21:y=sum(DAN0,n,0,10);
subst([AN21],EQ1);
ev(%,diff);
expand(%);
coeff(lhs(%),x^(r-2))=0;
solve(%,r);
```

級数の形として、$x=0$ を中心に展開する次式とする。

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{a}\,(n)\;x^{r+n} \tag{3.4.46}$$

上式を (3.4.39) 式に代入し、

$$\begin{aligned} &\cdots-\mathrm{a}\,(2)\;r^2\,x^r+\mathrm{a}\,(0)\;r^2\,x^r-3\,\mathrm{a}\,(2)\;r\,x^r \\ &+\mathrm{a}\,(0)\;r\,x^r-2\,\mathrm{a}\,(2)\;x^r-\mathrm{a}\,(1)\;r^2\,x^{r-1} \\ &-\mathrm{a}\,(1)\;r\,x^{r-1}-\mathrm{a}\,(0)\;r^2\,x^{r-2}+\mathrm{a}\,(0)\;r\,x^{r-2}=0 \end{aligned}$$

x^{r-2} の項から、

$$\mathrm{a}\,(0)\;r-\mathrm{a}\,(0)\;r^2=0$$

下記を得る。

$$[r=0,r=1]$$

$r=0$ の場合

```
R1:r=0;
AN22:subst([R1],AN21);
subst([AN22],EQ1);
ev(%,diff);
EA2:expand(%);
-a(0)*N^2-a(0)*N-2*a(2)=0;
CA1:factor(solve(%,a(2))[1]);
coeff(lhs(EA2),x^(1))=0;
CA2:factor(solve(%,a(3))[1]);
coeff(lhs(EA2),x^(2))=0;
CA3:factor(solve(%,a(4))[1]);
coeff(lhs(EA2),x^(3))=0;
CA4:factor(solve(%,a(5))[1]);
coeff(lhs(EA2),x^(4))=0;
CA5:factor(solve(%,a(6))[1]);
coeff(lhs(EA2),x^(5))=0;
CA6:factor(solve(%,a(7))[1]);
coeff(lhs(EA2),x^(6))=0;
CA7:factor(solve(%,a(8))[1]);
coeff(lhs(EA2),x^(7))=0;
CA8:factor(solve(%,a(9))[1]);
C1:CA1;
C2:factor(subst([C1],CA2));
C3:factor(subst([C2,C1],CA3));
C4:factor(subst([C3,C2,C1],CA4));
C5:factor(subst([C4,C3,C2,C1],CA5));
C6:factor(subst([C5,C4,C3,C2,C1],CA6));
C7:factor(subst([C6,C5,C4,C3,C2,C1],CA7));
C8:factor(subst([C7,C6,C5,C4,C3,C2,C1],
 CA8));
y=sum(DAN0,n,0,8);
AN22:subst([R1,C1,C2,C3,C4,C5,C6,C7,C7],%);
AN23:subst([a(1)=0],AN22);
AN24:subst([a(0)=0],AN22);
```

(3.4.46) 式に $r=0$ とし、$n=0$ から $n=10$ までは、

$$\begin{aligned} y=&\mathrm{a}\,(10)\;x^{10}+\mathrm{a}\,(9)\;x^9+\mathrm{a}\,(8)\;x^8+\mathrm{a}\,(7)\;x^7 \\ &+\mathrm{a}\,(6)\;x^6+\mathrm{a}\,(5)\;x^5+\mathrm{a}\,(4)\;x^4+\mathrm{a}\,(3)\;x^3 \\ &+\mathrm{a}\,(2)\;x^2+\mathrm{a}\,(1)\;x+\mathrm{a}\,(0) \end{aligned}$$

上式を (3.4.39) 式に代入し、上式の x の全てのべきの係数を零に等値して、

$$-\mathrm{a}\,(0)\;N^2-\mathrm{a}\,(0)\;N-2\,\mathrm{a}\,(2)=0$$

$$-\mathrm{a}\,(1)\;N^2-\mathrm{a}\,(1)\;N-6\,\mathrm{a}\,(3)+2\,\mathrm{a}\,(1)=0$$

$$-\mathrm{a}\,(2)\;N^2-\mathrm{a}\,(2)\;N-12\,\mathrm{a}\,(4)+6\,\mathrm{a}\,(2)=0$$

$$-\mathrm{a}\,(3)\;N^2-\mathrm{a}\,(3)\;N-20\,\mathrm{a}\,(5)+12\,\mathrm{a}\,(3)=0$$

$$-\mathrm{a}\,(4)\;N^2-\mathrm{a}\,(4)\;N-30\,\mathrm{a}\,(6)+20\,\mathrm{a}\,(4)=0$$

上式から、係数：$a(n)$ を求める。

$$\mathrm{a}(2)=-\frac{\mathrm{a}(0)\ N\ (N+1)}{2}$$

$$\mathrm{a}(3)=-\frac{\mathrm{a}(1)\ (N-1)\ (N+2)}{6}$$

$$\mathrm{a}(4)=\frac{\mathrm{a}(0)\ (N-2)\ N\ (N+1)\ (N+3)}{24}$$

$$\mathrm{a}(5)=\frac{\mathrm{a}(1)\ (N-3)\ (N-1)\ (N+2)\ (N+4)}{120}$$

$$\mathrm{a}(6)=-\frac{\mathrm{a}(0)\ (N-4)\ (N-2)\ N\ (N+1)\ (N+3)\ (N+5)}{720}$$

上式を (3.4.46) 式に代入すると、級数は、

$$\begin{aligned} y=&\frac{\mathrm{a}(0)\ x^8\ (N-6)\ (N-4)\ (N-2)\ N\ (N+1)\ (N+3)\ (N+5)\ (N+7)}{40320}\\ &-\frac{\mathrm{a}(1)\ x^7\ (N-5)\ (N-3)\ (N-1)\ (N+2)\ (N+4)\ (N+6)}{5040}\\ &-\frac{\mathrm{a}(0)\ x^6\ (N-4)\ (N-2)\ N\ (N+1)\ (N+3)\ (N+5)}{720}\\ &+\frac{\mathrm{a}(1)\ x^5\ (N-3)\ (N-1)\ (N+2)\ (N+4)}{120}\\ &+\frac{\mathrm{a}(0)\ x^4\ (N-2)\ N\ (N+1)\ (N+3)}{24}\\ &-\frac{\mathrm{a}(1)\ x^3\ (N-1)\ (N+2)}{6}-\frac{\mathrm{a}(0)\ x^2\ N\ (N+1)}{2}+\mathrm{a}(1)\ x+\mathrm{a}(0) \end{aligned} \tag{3.4.47}$$

N が奇数の時には、

$$\begin{aligned} y=&\frac{\mathrm{a}(0)\ x^8\ (N-6)\ (N-4)\ (N-2)\ N\ (N+1)\ (N+3)\ (N+5)\ (N+7)}{40320}\\ &-\frac{\mathrm{a}(0)\ x^6\ (N-4)\ (N-2)\ N\ (N+1)\ (N+3)\ (N+5)}{720}\\ &+\frac{\mathrm{a}(0)\ x^4\ (N-2)\ N\ (N+1)\ (N+3)}{24}\\ &-\frac{\mathrm{a}(0)\ x^2\ N\ (N+1)}{2}+\mathrm{a}(0) \end{aligned} \tag{3.4.48}$$

N が偶数の時には、

$$\begin{aligned} y=&-\frac{\mathrm{a}(1)\ x^7\ (N-5)\ (N-3)\ (N-1)\ (N+2)\ (N+4)\ (N+6)}{5040}\\ &+\frac{\mathrm{a}(1)\ x^5\ (N-3)\ (N-1)\ (N+2)\ (N+4)}{120}\\ &-\frac{\mathrm{a}(1)\ x^3\ (N-1)\ (N+2)}{6}+\mathrm{a}(1)\ x \end{aligned} \tag{3.4.49}$$

```
AN31:y=sum(DAN0,n,n-5,n+5);
AN32:subst([R1],AN31);
subst([AN32],EQ1);
ev(%,diff);
EA3:expand(%);
coeff(lhs(EA3),x^(n-3))=0;
CA3:factor(solve(%,a(n-1))[1]);
coeff(lhs(EA3),x^(n-2))=0;
CA4:factor(solve(%,a(n))[1]);
coeff(lhs(EA3),x^(n-1))=0;
CA5:factor(solve(%,a(n+1))[1]);
coeff(lhs(EA3),x^(n))=0;
CA6:factor(solve(%,a(n+2))[1]);
CA41:subst([n=2*m],CA4);
CA42:subst([n=2*m+1],CA4);
```

(3.4.46) 式に $r=0$ とし、$n=n-5$ から $n=n+5$ までは、

$$\begin{aligned} y=&\mathrm{a}(n+5)\ x^{r+n+5}+\mathrm{a}(n+4)\ x^{r+n+4}\\ &+\mathrm{a}(n+3)\ x^{r+n+3}+\mathrm{a}(n+2)\ x^{r+n+2}\\ &+\mathrm{a}(n+1)\ x^{r+n+1}+\mathrm{a}(n)\ x^{r+n}\\ &+\mathrm{a}(n-1)\ x^{r+n-1}+\mathrm{a}(n-2)\ x^{r+n-2}\\ &+\mathrm{a}(n-3)\ x^{r+n-3}+\mathrm{a}(n-4)\ x^{r+n-4}\\ &+\mathrm{a}(n-5)\ x^{r+n-5} \end{aligned}$$

上式を (3.4.39) 式に代入し、
上式の x の全てのべきの係数を零に等値して、

$$\begin{aligned} &-\mathrm{a}(n-3)\ N^2-\mathrm{a}(n-3)\ N-n^2\,\mathrm{a}(n-1)\\ &\quad+3\,n\,\mathrm{a}(n-1)-2\,\mathrm{a}(n-1)+n^2\,\mathrm{a}(n-3)\\ &\quad-5\,n\,\mathrm{a}(n-3)+6\,\mathrm{a}(n-3)=0\\ &-\mathrm{a}(n-2)\ N^2-\mathrm{a}(n-2)\ N-n^2\,\mathrm{a}(n)\\ &\quad+n\,\mathrm{a}(n)+n^2\,\mathrm{a}(n-2)-3\,n\,\mathrm{a}(n-2)\\ &\quad+2\,\mathrm{a}(n-2)=0\\ &-\mathrm{a}(n-1)\ N^2-\mathrm{a}(n-1)\ N-n^2\,\mathrm{a}(n+1)\\ &\quad-n\,\mathrm{a}(n+1)+n^2\,\mathrm{a}(n-1)-n\,\mathrm{a}(n-1)=0\\ &-\mathrm{a}(n)\ N^2-\mathrm{a}(n)\ N-n^2\,\mathrm{a}(n+2)\\ &\quad-3\,n\,\mathrm{a}(n+2)-2\,\mathrm{a}(n+2)+n^2\,\mathrm{a}(n)\\ &\quad+n\,\mathrm{a}(n)=0 \end{aligned}$$

上式から、係数：$a(n)$ を求める。

$$\mathrm{a}(n)=-\frac{\mathrm{a}(n-2)\ (N-n+2)\ (N+n-1)}{(n-1)\ n}$$

上式で、偶数の乗数と奇数の乗数とで分かれるので、n が偶数の時には、$n=2m$ と置き、

$$\mathrm{a}(2\,m)=-\frac{\mathrm{a}(2\,m-2)\ (N-2\,m+2)\ (N+2\,m-1)}{2\,m\ (2\,m-1)}$$

上式で、n が奇数の時には、$n=2m+1$ と置き、

$$\mathrm{a}(2\,m+1)=-\frac{\mathrm{a}(2\,m-1)\ (N-2\,m+1)\ (N+2\,m)}{2\,m\ (2\,m+1)}$$

```
AN23;
PD1:(-1)^m*product((N-2*k+2)*(N+2*k-1),
 k,1,m)/((2*m)!);
subst([m=1],PD1);
ev(%,product);
subst([m=2],PD1);
ev(%,product);
subst([m=3],PD1);
ev(%,product);
subst([m=4],PD1);
ev(%,product);
AN41:y[1]=a(0)*(1+sum(x^(2*m)*PD1,
 m,1,inf));
```

(3.4.47) 式と上式から、係数：$a(n)$ で偶数の n の時、即ち、偶数の乗数の項は下記となる。次式は N が偶数の時、無限級数は有限の多項式となる。

$$y_1 = \mathrm{a}(0) \left(\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m} \prod_{k=1}^{m} (N-2k+2)(N+2k-1)}{(2m)!} \right) + 1 \right) \tag{3.4.50}$$

```
AN24;
PD2:(-1)^m*product((N-(2*k+1)+2)*(N
 +(2*k+1)-1),k,1,m)/((2*m+1)!);
subst([m=1],PD2);
ev(%,product);
subst([m=2],PD2);
ev(%,product);
subst([m=3],PD2);
```

```
ev(%,product);
AN42:y[2]=a(1)*(x+sum(x^(2*m+1)*PD2,m,
 1,inf));
y=y[1]+y[2];
```

(3.4.47) 式と上式から、係数：$a(n)$ で奇数の n の時、即ち、奇数の乗数の項は下記となる。次式は N が奇数の時、無限級数は有限の多項式となる。

$$y_2 = \mathrm{a}(1) \left(\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1} \prod_{k=1}^{m} (N-2k+1)(N+2k)}{(2m+1)!} \right) + x \right) \tag{3.4.51}$$

以上から、一般解は下記となる。

$$y = y_2 + y_1$$

Legendre の多項式

N が偶数の時、(3.4.50) 式の無限級数は有限の多項式となり、N が奇数の時、(3.4.51) 式の無限級数は有限の多項式となる。この多項式を $p_N(x)$ とし、$x=1$ で 1 となる $P_N(x)$ を求めると、

$$P_N(x) = \frac{p_N(x)}{p_N(1)}$$

```
P10:p[2*K](x)=subst([inf=K,N=2*K],
 rhs(AN41));
P11:subst([x=1],P10);
P12:P[2*K](x)=rhs(P10)/rhs(P11);
subst([K=1],P12);
ev(%,sum);
expand(ev(%,product));
subst([K=2],P12);
ev(%,sum);
expand(ev(%,product));
subst([K=3],P12);
ev(%,sum);
expand(ev(%,product));
```

$N = 2, 4, 6$ では、

$$P_2(x) = \frac{3x^2}{2} - \frac{1}{2}$$

$$P_4(x) = \frac{35x^4}{8} - \frac{15x^2}{4} + \frac{3}{8}$$

$$P_6(x) = \frac{231x^6}{16} - \frac{315x^4}{16} + \frac{105x^2}{16} - \frac{5}{16}$$

```
P20:p[2*K+1](x)=subst([inf=K,N=2*K+1],
 rhs(AN42));
P21:subst([x=1],P20);
P22:P[2*K+1](x)=rhs(P20)/rhs(P21);
subst([K=0],P22);
ev(%,sum);
expand(ev(%,product));
subst([K=1],P22);
ev(%,sum);
expand(ev(%,product));
subst([K=2],P22);
ev(%,sum);
expand(ev(%,product));
subst([K=3],P22);
ev(%,sum);
expand(ev(%,product));
```

$N = 1, 3, 5, 7$ では、

$$P_1(x) = x$$

$$P_3(x) = \frac{5x^3}{2} - \frac{3x}{2}$$

$$P_5(x) = \frac{63x^5}{8} - \frac{35x^3}{4} + \frac{15x}{8}$$

$$P_7(x) = \frac{429x^7}{16} - \frac{693x^5}{16} + \frac{315x^3}{16} - \frac{35x}{16}$$

```
EQ3:(x^2-1)*diff(y,x,2)+2*x*diff(y,x,1)
  -N*(N+1)*y=0;
PN1:P[n](x)=1/n!/2^n*diff((x^2-1)^n,x,n);
PN2:y=rhs(PN1);
subst([N=n],EQ3);
EQ31:subst([PN2],lhs(%));
subst([n=1],EQ31);
ev(%,diff);
factor(%);
subst([n=2],EQ31);
ev(%,diff);
factor(%);
subst([n=3],EQ31);
ev(%,diff);
factor(%);
subst([n=4],EQ31);
ev(%,diff);
factor(%);
```

n が整数である前述の Legendre の多項式として、次式の Rodrigue の公式でも表現できる。

$$P_n(x)=\frac{\frac{d^n}{d\,x^n}\left(x^2-1\right)^n}{2^n\,n!} \tag{3.4.52}$$

上式で $n=3$ の場合を (3.4.39) 式の Legendre の微分方程式に代入すると、

$$\begin{aligned}&\left(x^2-1\right)\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,\frac{\frac{d^3}{d\,x^3}\left(x^2-1\right)^3}{48}\right)\\&+2\,x\left(\frac{d}{d\,x}\,\frac{\frac{d^3}{d\,x^3}\left(x^2-1\right)^3}{48}\right)\\&-\frac{\frac{d^3}{d\,x^3}\left(x^2-1\right)^3}{4}=0\end{aligned}$$

上式の微分を実行し、

$$\begin{aligned}&-\frac{48\,x^3+72\,x\,\left(x^2-1\right)}{4}+\frac{x\,\left(288\,x^2+72\,\left(x^2-1\right)\right)}{24}\\&+15\,x\,\left(x^2-1\right)=0\end{aligned}$$

上式を整理すると、確かに成り立っている。

```
subst([n=0],PN1);
PL0:expand(ev(%,diff));
subst([n=1],PN1);
PL1:expand(ev(%,diff));
subst([n=2],PN1);
PL2:expand(ev(%,diff));
subst([n=3],PN1);
PL3:expand(ev(%,diff));
subst([n=4],PN1);
PL4:expand(ev(%,diff));
subst([n=5],PN1);
PL5:expand(ev(%,diff));
subst([n=6],PN1);
PL6:expand(ev(%,diff));
subst([n=7],PN1);
PL7:expand(ev(%,diff));
plot2d([rhs(PL0),rhs(PL1),rhs(PL2),rhs(PL3)
  ,rhs(PL4),rhs(PL5),rhs(PL6),rhs(PL7)],
   [x,-1,1.5],[y,-1.5,1],[legend,"N=0",
  "N=1","N=2","N=3","N=4","N=5",
  "N=6","N=7"]);
```

(3.4.52) 式で $P_n(x)$ を図示すると、

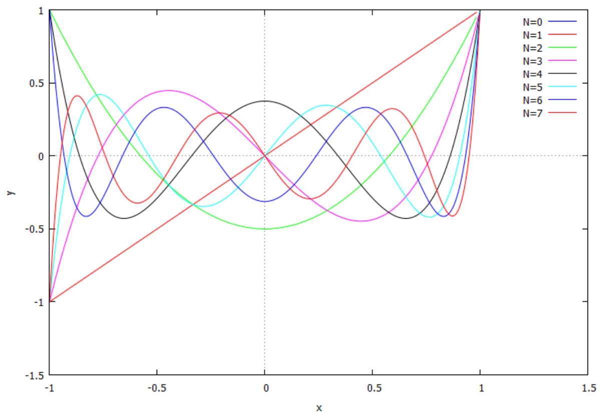


図 3.4.1: $P_n(x)$ n：整数

3.4.5 Legendre の陪微分方程式

下記の形の微分方程式を Legendre の陪微分方程式という。

$$z\left(N\,(N+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right)+\left(1-x^2\right)\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,z\right)-2\,x\left(\frac{d}{d\,x}\,z\right)=0 \tag{3.4.53}$$

```
kill(all);
depends(y,[x]);
depends(z,[x]);
declare(N,integer);
EZ1:diff((1-x^2)*diff(z,x,1),x,1)+(N*(N+1)
 -m^2/(1-x^2))*z=0;
Z1:z=(1-x^2)^(m/2)*y;
subst([Z1],EZ1);
ev(%,diff);
factor(%);
EZ2:%/((1-x^2)^(m/2));
CZ2:coeff(lhs(EZ2),'diff(y,x,2));
CZ1:factor(coeff(lhs(EZ2),'diff(y,x,1)));
CZ0:factor(coeff(lhs(EZ2),y));
EZ21:CZ2*'diff(y,x,2)+CZ1*'diff(y,x,1)
 +CZ0*y=0;
subst([m=0],EZ21);
```

次式を上式に代入し、

$$z=\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}}\,y \tag{3.4.54}$$

微分を実行すると、

$$\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}}\left(y\,N^2+y\,N-x^2\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,y\right)+\frac{d^2}{d\,x^2}\,y-2\,m\,x\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)-2\,x\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)-m^2\,y-m\,y\right)=0$$

上式を整理し、

$$y\,(N-m)\,(N+m+1)+\left(1-x^2\right)\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,y\right)-2\,(m+1)\,x\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)=0 \tag{3.4.55}$$

```
EQ1:(x^2-1)*diff(y,x,2)+2*x*diff(y,x,1)
 -N*(N+1)*y=0;
EQ11:first(lhs(EQ1));
EQ13:last(lhs(EQ1));
EQ12:lhs(EQ1)-EQ11-EQ13;
diff(EQ11,x,1);
diff(EQ11,x,2);
diff(EQ11,x,3);
EQ11M:-('diff(y,x,m))*N*(N+1);
diff(EQ12,x,1);
diff(EQ12,x,2);
diff(EQ12,x,3);
diff(EQ12,x,4);
diff(EQ12,x,5);
(x^2-1)*('diff(y,x,m+2))+2*m*x*('diff(y,x,
 m+1))+sum(2*(n-1),n,1,m)*('diff(y,x,m));
EQ12M:%,simpsum;
diff(EQ13,x,1);
diff(EQ13,x,2);
diff(EQ13,x,3);
EQ13M:2*x*('diff(y,x,m+1))
 +2*m*('diff(y,x,m));
EQ2:EQ11M+EQ12M+EQ13M=0;
C2:coeff(lhs(EQ2),'diff(y,x,m+2));
C1:factor(coeff(lhs(EQ2),'diff(y,x,m+1)));
C0:factor(coeff(lhs(EQ2),'diff(y,x,m)));
EQ21:-C2*'diff(y,x,m+2)-C1*'diff(y,x,m+1)
 -C0*'diff(y,x,m)=0;
Z2:z=P[m,n](x);
PM1:P[m,n](x)=(1-x^2)^(m/2)
 *diff(P[n](x),x,m);
PN1:PN1:P[n](x)=1/n!/2^n
 *diff((x^2-1)^n,x,n);
```

(3.4.39) 式の Legendre の微分方程式は下記である。

$$-y\,N\,(N+1)+\left(x^2-1\right)\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,y\right)+2\,x\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)=0 \tag{3.4.56}$$

上式を m 階微分する。上式の左辺第一項は下記で、

$$-y\,N\,(N+1)$$

$$1\text{ 階微分：}\quad -\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)N\,(N+1)$$

$$2\text{ 階微分：}\quad -\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,y\right)N\,(N+1)$$

$$3\text{ 階微分：}\quad -\left(\frac{d^3}{d\,x^3}\,y\right)N\,(N+1)$$

上記から左辺第一項の m 階微分は、

$$-\left(\frac{d^m}{d\,x^m}\,y\right)N\,(N+1) \tag{3.4.57}$$

(3.4.56) 式の左辺第二項は下記で、

$$\left(x^2-1\right)\,\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,y\right)$$

$$1\text{ 階微分：}\quad \left(x^2-1\right)\,\left(\frac{d^3}{d\,x^3}\,y\right)+2\,x\,\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,y\right)$$

$$2\text{ 階微分：}\quad \left(x^2-1\right)\,\left(\frac{d^4}{d\,x^4}\,y\right)+4\,x\,\left(\frac{d^3}{d\,x^3}\,y\right)+2\,\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,y\right)$$

$$3\text{ 階微分：}\quad \left(x^2-1\right)\,\left(\frac{d^5}{d\,x^5}\,y\right)+6\,x\,\left(\frac{d^4}{d\,x^4}\,y\right)+6\,\left(\frac{d^3}{d\,x^3}\,y\right)$$

$$4\text{ 階微分：}\quad \left(x^2-1\right)\,\left(\frac{d^6}{d\,x^6}\,y\right)+8\,x\,\left(\frac{d^5}{d\,x^5}\,y\right)+12\,\left(\frac{d^4}{d\,x^4}\,y\right)$$

$$5\text{ 階微分：}\quad \left(x^2-1\right)\,\left(\frac{d^7}{d\,x^7}\,y\right)+10\,x\,\left(\frac{d^6}{d\,x^6}\,y\right)+20\,\left(\frac{d^5}{d\,x^5}\,y\right)$$

上記から左辺第二項の m 階微分は、

$$\begin{aligned}&\left(x^2-1\right)\,\left(\frac{d^{m+2}}{d\,x^{m+2}}\,y\right)+2\,m\,x\,\left(\frac{d^{m+1}}{d\,x^{m+1}}\,y\right)+2\,\left(\sum_{n=1}^{m}n-1\right)\,\left(\frac{d^m}{d\,x^m}\,y\right)\\&=\left(x^2-1\right)\,\left(\frac{d^{m+2}}{d\,x^{m+2}}\,y\right)+2\,m\,x\,\left(\frac{d^{m+1}}{d\,x^{m+1}}\,y\right)+2\,\left(\frac{m^2+m}{2}-m\right)\,\left(\frac{d^m}{d\,x^m}\,y\right)\end{aligned}\tag{3.4.58}$$

(3.4.56) 式の左辺第三項は下記で、

$$2\,x\,\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)\qquad 1\text{ 階微分：}\quad 2\,x\,\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,y\right)+2\,\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)$$

$$2\text{ 階微分：}\quad 2\,x\,\left(\frac{d^3}{d\,x^3}\,y\right)+4\,\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,y\right)\qquad 3\text{ 階微分：}\quad 2\,x\,\left(\frac{d^4}{d\,x^4}\,y\right)+6\,\left(\frac{d^3}{d\,x^3}\,y\right)$$

上記から左辺第三項の m 階微分は、

$$2\,x\,\left(\frac{d^{m+1}}{d\,x^{m+1}}\,y\right)+2\,m\,\left(\frac{d^m}{d\,x^m}\,y\right)\tag{3.4.59}$$

(3.4.57) 式、(3.4.58) 式と (3.4.59) 式をまとめ、(3.4.56) 式の m 階微分は、

$$\left(\frac{d^m}{d\,x^m}\,y\right)\,(N-m)\,(N+m+1)+\left(1-x^2\right)\,\left(\frac{d^{m+2}}{d\,x^{m+2}}\,y\right)-2\,(m+1)\,x\,\left(\frac{d^{m+1}}{d\,x^{m+1}}\,y\right)=0\tag{3.4.60}$$

(3.4.55) 式は (3.4.56) 式の m 階微分したものと類似しており、(3.4.60) 式の解は (3.4.56) 式の Legendre の微分方程式の解を m 階微分したものであり、(3.4.54) 式から (3.4.53) 式：Legendre の陪微分方程式の解は

$$z=P_{m,n}\,(x)$$

$$\text{ここで、}\quad P_{m,n}\,(x)=\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}}\,\left(\frac{d^m}{d\,x^m}\,P_n\,(x)\right)$$

$$P_n\,(x)=\frac{\frac{d^n}{d\,x^n}\,\left(x^2-1\right)^n}{2^n\,n!}\tag{3.4.61}$$

```
subst([N=n],EZ1);
subst([Z2],%);
subst([PM1],%);
EZ3:subst([PN1],%);
subst([n=3,m=2],EZ3);
ev(%,diff);
factor(%);
subst([n=3,m=3],EZ3);
ev(%,diff);
factor(%);
```

確認のため、上式を (3.4.53) 式に代入すると、

$$\left(1-x^2\right)\,\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,P_{m,n}\,(x)\right)-2\,x\,\left(\frac{d}{d\,x}\,P_{m,n}\,(x)\right)+\left(n\,(n+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right)\,P_{m,n}\,(x)=0$$

$n=3,m=3$ の場合で微分を実行すると、

$$15\,x\,\left(1-x^2\right)\,\left(12-\frac{4}{1-x^2}\right)-90\,x\,\left(1-x^2\right)-2\,x\,\left(15\,\left(1-x^2\right)-30\,x^2\right)=0$$

整理すると左辺は零となり、解となっていることが分かる。

$P_{m,n}(x)$ を求めると下記となる。

```
PM2:subst([PN1],PM1);
subst([n=1,m=0],PM2);
PL1:factor(ev(%,diff));
subst([n=1,m=1],PM2);
PL2:factor(ev(%,diff));
subst([n=2,m=0],PM2);
PL3:factor(ev(%,diff));
subst([n=2,m=1],PM2);
PL4:factor(ev(%,diff));
subst([n=2,m=2],PM2);
PL5:factor(ev(%,diff));
subst([n=3,m=0],PM2);
PL6:factor(ev(%,diff));
subst([n=3,m=1],PM2);
PL7:factor(ev(%,diff));
plot2d([rhs(PL1),rhs(PL2),rhs(PL3),rhs(PL4)
 ,rhs(PL5),rhs(PL6),rhs(PL7)],[x,-1,1],
 [legend,"P0,1","P1,1","P0,2","P1,2",
 "P2,2","P0,3","P1,3"]);
```

$$P_{m,n}(x) = \left(1 - x^2\right)^{\frac{m}{2}} \left(\frac{d^m}{d\,x^m} \frac{\frac{d^n}{d\,x^n}\left(x^2-1\right)^n}{2^n\,n!}\right)$$

$$P_{0,1}(x) = x, \quad P_{1,1}(x) = \sqrt{1-x^2}$$

$$P_{0,2}(x) = \frac{3\,x^2-1}{2}, \quad P_{1,2}(x) = 3\,x\,\sqrt{1-x^2}$$

$$P_{2,2}(x) = -3\,(x-1)\,(x+1)$$

$$P_{0,3}(x) = \frac{x\,\left(5\,x^2-3\right)}{2}$$

$$P_{1,3}(x) = \frac{3\,\sqrt{1-x^2}\,\left(5\,x^2-1\right)}{2}$$

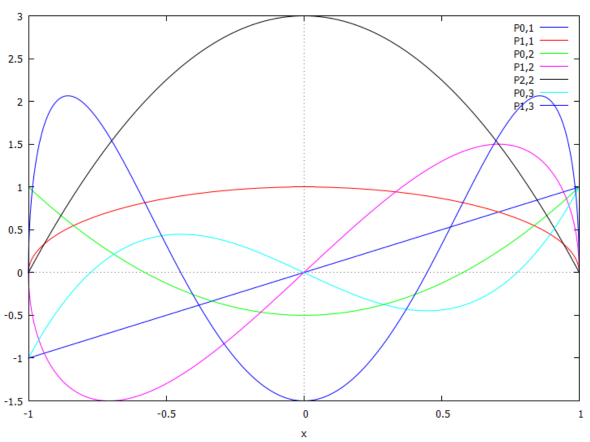


図 3.4.2: $P_{m,n}(x)$

$P_{m,n}(cos(\theta))$ を求めると下記となる。

```
PL11:subst([x=cos(\theta)],PL1);
PL21:subst([x=cos(\theta)],PL2);
PL31:subst([x=cos(\theta)],PL3);
PL41:subst([x=cos(\theta)],PL4);
PL51:subst([x=cos(\theta)],PL5);
PL61:subst([x=cos(\theta)],PL6);
PL71:subst([x=cos(\theta)],PL7);
plot2d([rhs(PL11),rhs(PL21),rhs(PL31),
 rhs(PL41),rhs(PL51),rhs(PL61),
 rhs(PL71)],[\theta,0,%pi],[legend,
 "P0,1","P1,1","P0,2","P1,2",
 "P2,2","P0,3","P1,3"]);
```

$$P_{0,1}(\cos(\theta)) = \cos(\theta)$$

$$P_{1,1}(\cos(\theta)) = \sqrt{1-\cos(\theta)^2}$$

$$P_{0,2}(\cos(\theta)) = \frac{3\cos(\theta)^2-1}{2}$$

$$P_{1,2}(\cos(\theta)) = 3\cos(\theta)\,\sqrt{1-\cos(\theta)^2}$$

$$P_{2,2}(\cos(\theta)) = -3\,(\cos(\theta)-1)\,(\cos(\theta)+1)$$

$$P_{0,3}(\cos(\theta)) = \frac{\cos(\theta)\,\left(5\cos(\theta)^2-3\right)}{2}$$

$$P_{1,3}(\cos(\theta)) = \frac{3\,\sqrt{1-\cos(\theta)^2}\,\left(5\cos(\theta)^2-1\right)}{2}$$

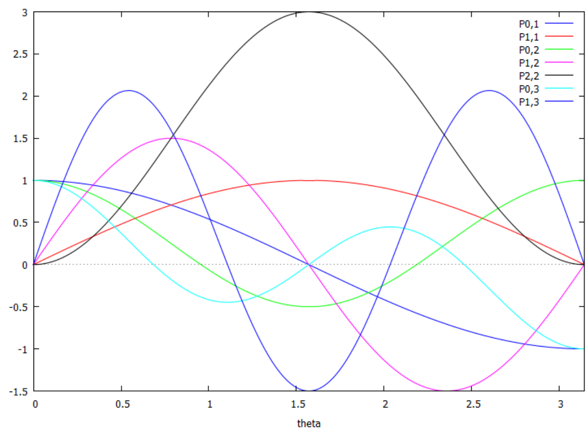


図 3.4.3: $P_{m,n}(cos(\theta))$

3.4.6 Hermite の微分方程式

下記の形の微分方程式を Hermite の微分方程式という。

$$\frac{d^2}{d\,x^2}\,y - 2\,x\,\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right) + 2\,y\,N = 0 \tag{3.4.62}$$

```
kill(all);
depends(y,[x,r]);
EQ1:diff(y,x,2)-2*x*diff(y,x,1)+2*N*y=0;
DAN0:(x)^r*a(n)*(x)^n;
AN2:y=sum(DAN0,n,0,inf);
AN21:y=sum(DAN0,n,0,10);
subst([AN21],EQ1);
ev(%,diff);
expand(%);
coeff(lhs(%),x^(r-2))=0;
solve(%,r);
```

級数の形として、$x = 0$ を中心に展開する次式とする。

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{a}\,(n)\;x^{r+n} \tag{3.4.63}$$

上式を (3.4.62) 式に代入し、

$$\begin{aligned}
&\cdots + \mathrm{a}\,(2)\;r^2\,x^r + 3\,\mathrm{a}\,(2)\;r\,x^r - 2\,\mathrm{a}\,(0)\;r\,x^r\\
&+ 2\,\mathrm{a}\,(2)\;x^r + \mathrm{a}\,(1)\;r^2\,x^{r-1} + \mathrm{a}\,(1)\;r\,x^{r-1}\\
&+ \mathrm{a}\,(0)\;r^2\,x^{r-2} - \mathrm{a}\,(0)\;r\,x^{r-2} = 0
\end{aligned}$$

x^{r-2} の項から、

$$\mathrm{a}\,(0)\;r^2 - \mathrm{a}\,(0)\;r = 0$$

下記を得る。

$$[r = 0, r = 1]$$

$r = 0$ の場合

```
R1:r=0;
AN22:subst([R1],AN21);
subst([AN22],EQ1);
ev(%,diff);
EA2:expand(%);
+2*a(0)*N+2*a(2)=0;
CA1:factor(solve(%,a(2))[1]);
coeff(lhs(EA2),x^(1))=0;
CA2:factor(solve(%,a(3))[1]);
coeff(lhs(EA2),x^(2))=0;
CA3:factor(solve(%,a(4))[1]);
coeff(lhs(EA2),x^(3))=0;
CA4:factor(solve(%,a(5))[1]);
coeff(lhs(EA2),x^(4))=0;
CA5:factor(solve(%,a(6))[1]);
coeff(lhs(EA2),x^(5))=0;
CA6:factor(solve(%,a(7))[1]);
coeff(lhs(EA2),x^(6))=0;
CA7:factor(solve(%,a(8))[1]);
coeff(lhs(EA2),x^(7))=0;
CA8:factor(solve(%,a(9))[1]);
C1:CA1;
C2:factor(subst([C1],CA2));
C3:factor(subst([C2,C1],CA3));
C4:factor(subst([C3,C2,C1],CA4));
C5:factor(subst([C4,C3,C2,C1],CA5));
C6:factor(subst([C5,C4,C3,C2,C1],CA6));
C7:factor(subst([C6,C5,C4,C3,C2,C1],CA7));
C8:factor(subst([C7,C6,C5,C4,C3,C2,C1],
 CA8));
y=sum(DAN0,n,0,8);
AN22:subst([R1,C1,C2,C3,C4,C5,C6,C7,C7],%);
AN23:subst([a(1)=0],AN22);
AN24:subst([a(0)=0],AN22);
```

(3.4.63) 式に $r = 0$ とし、$n = 0$ から $n = 10$ までは、

$$\begin{aligned}
y =&\mathrm{a}\,(10)\;x^{10} + \mathrm{a}\,(9)\;x^9 + \mathrm{a}\,(8)\;x^8 + \mathrm{a}\,(7)\;x^7\\
&+ \mathrm{a}\,(6)\;x^6 + \mathrm{a}\,(5)\;x^5 + \mathrm{a}\,(4)\;x^4 + \mathrm{a}\,(3)\;x^3\\
&+ \mathrm{a}\,(2)\;x^2 + \mathrm{a}\,(1)\;x + \mathrm{a}\,(0)
\end{aligned}$$

上式を (3.4.62) 式に代入し、上式の x の全てのべきの係数を零に等値して、

$$2\,\mathrm{a}\,(0)\;N + 2\,\mathrm{a}\,(2) = 0$$

$$2\,\mathrm{a}\,(1)\;N + 6\,\mathrm{a}\,(3) - 2\,\mathrm{a}\,(1) = 0$$

$$2\,\mathrm{a}\,(2)\;N + 12\,\mathrm{a}\,(4) - 4\,\mathrm{a}\,(2) = 0$$

$$2\,\mathrm{a}\,(3)\;N + 20\,\mathrm{a}\,(5) - 6\,\mathrm{a}\,(3) = 0$$

$$2\,\mathrm{a}\,(4)\;N + 30\,\mathrm{a}\,(6) - 8\,\mathrm{a}\,(4) = 0$$

$$2\,\mathrm{a}\,(5)\;N + 42\,\mathrm{a}\,(7) - 10\,\mathrm{a}\,(5) = 0$$

$$2\,\mathrm{a}\,(6)\;N + 56\,\mathrm{a}\,(8) - 12\,\mathrm{a}\,(6) = 0$$

$$2\,\mathrm{a}\,(7)\;N + 72\,\mathrm{a}\,(9) - 14\,\mathrm{a}\,(7) = 0$$

上式から、係数：$a(n)$ を求める。

$$\mathrm{a}\,(2) = -\mathrm{a}\,(0)\;N$$

$$\mathrm{a}\,(3) = -\frac{\mathrm{a}\,(1)\;(N-1)}{3}$$

$$\mathrm{a}\,(4) = \frac{\mathrm{a}\,(0)\;(N-2)\;N}{6}$$

$$\mathrm{a}\,(5) = \frac{\mathrm{a}\,(1)\;(N-3)\;(N-1)}{30}$$

$$\mathrm{a}(6) = -\frac{\mathrm{a}(0)\ (N-4)\ (N-2)\ N}{90}$$
$$\mathrm{a}(7) = -\frac{\mathrm{a}(1)\ (N-5)\ (N-3)\ (N-1)}{630}$$
$$\mathrm{a}(8) = \frac{\mathrm{a}(0)\ (N-6)\ (N-4)\ (N-2)\ N}{2520}$$
$$\mathrm{a}(9) = \frac{\mathrm{a}(1)\ (N-7)\ (N-5)\ (N-3)\ (N-1)}{22680}$$

上式を (3.4.63) 式に代入すると、級数は、

$$\begin{aligned} y =& \frac{\mathrm{a}(0)\ x^8\ (N-6)\ (N-4)\ (N-2)\ N}{2520} \\ &- \frac{\mathrm{a}(0)\ x^6\ (N-4)\ (N-2)\ N}{90} \\ &+ \frac{\mathrm{a}(0)\ x^4\ (N-2)\ N}{6} - \mathrm{a}(0)\ x^2\ N \\ &- \frac{\mathrm{a}(1)\ x^7\ (N-5)\ (N-3)\ (N-1)}{630} \\ &+ \frac{\mathrm{a}(1)\ x^5\ (N-3)\ (N-1)}{30} \\ &- \frac{\mathrm{a}(1)\ x^3\ (N-1)}{3} + \mathrm{a}(1)\ x + \mathrm{a}(0) \end{aligned} \tag{3.4.64}$$

N が奇数の時には、

$$\begin{aligned} y =& \frac{\mathrm{a}(0)\ x^8\ (N-6)\ (N-4)\ (N-2)\ N}{2520} \\ &- \frac{\mathrm{a}(0)\ x^6\ (N-4)\ (N-2)\ N}{90} \\ &+ \frac{\mathrm{a}(0)\ x^4\ (N-2)\ N}{6} - \mathrm{a}(0)\ x^2\ N + \mathrm{a}(0) \end{aligned} \tag{3.4.65}$$

N が偶数の時には、

$$\begin{aligned} y =& -\frac{\mathrm{a}(1)\ x^7\ (N-5)\ (N-3)\ (N-1)}{630} \\ &+ \frac{\mathrm{a}(1)\ x^5\ (N-3)\ (N-1)}{30} \\ &- \frac{\mathrm{a}(1)\ x^3\ (N-1)}{3} + \mathrm{a}(1)\ x \end{aligned} \tag{3.4.66}$$

```
AN31:y=sum(DAN0,n,n-5,n+5);
AN32:subst([R1],AN31);
subst([AN32],EQ1);
ev(%,diff);
EA3:expand(%);
coeff(lhs(EA3),x^(n-3))=0;
CA3:factor(solve(%,a(n-1))[1]);
coeff(lhs(EA3),x^(n-2))=0;
CA4:factor(solve(%,a(n))[1]);
coeff(lhs(EA3),x^(n-1))=0;
CA5:factor(solve(%,a(n+1))[1]);
coeff(lhs(EA3),x^(n))=0;
CA6:factor(solve(%,a(n+2))[1]);
CA41:subst([n=2*m],CA4);
CA42:subst([n=2*m+1],CA4);
```

(3.4.63) 式に $r=0$ とし、$n=n-5$ から $n=n+5$ までは、

$$\begin{aligned} y =& \mathrm{a}(n+5)\ x^{r+n+5} + \mathrm{a}(n+4)\ x^{r+n+4} \\ &+ \mathrm{a}(n+3)\ x^{r+n+3} + \mathrm{a}(n+2)\ x^{r+n+2} \\ &+ \mathrm{a}(n+1)\ x^{r+n+1} + \mathrm{a}(n)\ x^{r+n} \\ &+ \mathrm{a}(n-1)\ x^{r+n-1} + \mathrm{a}(n-2)\ x^{r+n-2} \\ &+ \mathrm{a}(n-3)\ x^{r+n-3} + \mathrm{a}(n-4)\ x^{r+n-4} \\ &+ \mathrm{a}(n-5)\ x^{r+n-5} \end{aligned}$$

上式を (3.4.62) 式に代入し、
上式の x の全てのべきの係数を零に等値して、

$$\begin{aligned} &2\,\mathrm{a}(n-3)\ N + n^2\,\mathrm{a}(n-1) - 3\,n\,\mathrm{a}(n-1) \\ &\quad + 2\,\mathrm{a}(n-1) - 2\,n\,\mathrm{a}(n-3) + 6\,\mathrm{a}(n-3) = 0 \\ &2\,\mathrm{a}(n-2)\ N + n^2\,\mathrm{a}(n) - n\,\mathrm{a}(n) - 2\,n\,\mathrm{a}(n-2) \\ &\quad + 4\,\mathrm{a}(n-2) = 0 \\ &2\,\mathrm{a}(n-1)\ N + n^2\,\mathrm{a}(n+1) + n\,\mathrm{a}(n+1) \\ &\quad - 2\,n\,\mathrm{a}(n-1) + 2\,\mathrm{a}(n-1) = 0 \\ &2\,\mathrm{a}(n)\ N + n^2\,\mathrm{a}(n+2) + 3\,n\,\mathrm{a}(n+2) \\ &\quad + 2\,\mathrm{a}(n+2) - 2\,n\,\mathrm{a}(n) = 0 \end{aligned}$$

上式から、係数：$a(n)$ を求める。

$$\mathrm{a}(n) = -\frac{2\,\mathrm{a}(n-2)\ (N-n+2)}{(n-1)\ n}$$

上式で、偶数の乗数と奇数の乗数とで分かれるので、n が偶数の時には、$n=2m$ と置き、

$$\mathrm{a}(2\,m) = -\frac{\mathrm{a}(2\,m-2)\ (N-2\,m+2)}{m\ (2\,m-1)}$$

上式で、n が奇数の時には、$n=2m+1$ と置き、

$$\mathrm{a}(2\,m+1) = -\frac{\mathrm{a}(2\,m-1)\ (N-2\,m+1)}{m\ (2\,m+1)}$$

```
AN23;
PD1:(-2)^m*product((N-(2*k)+2),k,1,m)
 /((2*m)!);
subst([m=1],PD1);
ev(%,product);
subst([m=2],PD1);
ev(%,product);
subst([m=3],PD1);
ev(%,product);
subst([m=4],PD1);
ev(%,product);
AN41:y[1]=a(0)*(1+sum(x^(2*m)*PD1,
 m,1,inf));
```

(3.4.64) 式と上式から、係数：$a(n)$ で偶数の n の時、即ち、偶数の乗数の項は下記となる。次式は N が偶数の時、無限級数は有限の多項式となる。

$$y_1 = \mathrm{a}(0)\left(\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-2)^m\, x^{2\,m}\,\prod_{k=1}^{m} N-2\,k+2}{(2\,m)!}\right)+1\right) \tag{3.4.67}$$

```
AN24;
PD2:(-2)^m*product((N-(2*k+1)+2),k,1,m)
 /((2*m+1)!);
subst([m=1],PD2);
ev(%,product);
subst([m=2],PD2);
ev(%,product);
subst([m=3],PD2);
ev(%,product);
AN42:y[2]=a(1)*(x+sum(x^(2*m+1)*PD2,m,
 1,inf));
y=y[1]+y[2];
```

(3.4.64) 式と上式から、係数：$a(n)$ で奇数の n の時、即ち、奇数の乗数の項は下記となる。次式は N が奇数の時、無限級数は有限の多項式となる。

$$y_2 = \mathrm{a}(1)\left(\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-2)^m\, x^{2\,m+1}\,\prod_{k=1}^{m} N-2\,k+1}{(2\,m+1)!}\right)+x\right) \tag{3.4.68}$$

以上から、一般解は下記となる。

$$y = y_2 + y_1$$

Hermite の多項式

N が偶数の時、(3.4.67) 式の無限級数は有限の多項式となり、N が奇数の時、(3.4.68) 式の無限級数は有限の多項式となる。ここで、

$$\mathrm{a}(0) = \frac{(-1)^K\,(2\,K)!}{K!}$$

$$\mathrm{a}(1) = \frac{2\,(-1)^K\,(2\,K+1)!}{K!}$$

とし、この多項式を $H_N(x)$ とし、

```
P10:h[2*K](x)=subst([inf=K,N=2*K],
 rhs(AN41));
P11:[a(0)=(-1)^K*((2*K)!)/(K!)];
P12:H[2*K](x)=subst(P11,rhs(P10));
subst([K=0],P12);
ev(%,sum);
expand(ev(%,product));
subst([K=1],P12);
ev(%,sum);
expand(ev(%,product));
subst([K=2],P12);
ev(%,sum);
expand(ev(%,product));
subst([K=3],P12);
ev(%,sum);
expand(ev(%,product));
```

$N=0,2,4,6$ では、

$$H_0(x) = 1$$

$$H_2(x) = 4\,x^2-2$$

$$H_4(x) = 16\,x^4-48\,x^2+12$$

$$H_6(x) = 64\,x^6-480\,x^4+720\,x^2-120$$

```
P20:h[2*K+1](x)=subst([inf=K,N=2*K+1],
 rhs(AN42));
P21:[a(1)=(-1)^K*2*((2*K+1)!)/(K!)];
P22:H[2*K+1](x)=subst(P21,rhs(P20));
subst([K=0],P22);
ev(%,sum);
expand(ev(%,product));
subst([K=1],P22);
ev(%,sum);
expand(ev(%,product));
subst([K=2],P22);
ev(%,sum);
expand(ev(%,product));
subst([K=3],P22);
ev(%,sum);
expand(ev(%,product));
```

$N=1,3,5,7$ では、

$$H_1(x) = 2\,x$$

$$H_3(x) = 8\,x^3-12\,x$$

$$H_5(x) = 32\,x^5-160\,x^3+120\,x$$

$$H_7(x) = 128\,x^7-1344\,x^5+3360\,x^3-1680\,x$$

第4章　ベクトルとテンソル

4.1　ベクトル

4.1.1　ベクトルの演算

大きさと方向性を持つ量をベクトルという。以下にその表現、演算法について述べる。

Maxima のベクトルの表現

```
kill(all);
VCAR:matrix([A[1],A[2],A[3]]);
VCA:matrix([A[1]],[A[2]],[A[3]]);
VCB:matrix([B[1]],[B[2]],[B[3]]);
VCC:matrix([C[1]],[C[2]],[C[3]]);
```

Maxima のベクトルの記述方法は matrix 関数を使う。Matrix の各種ベクトル演算では、下記の行の行列を用いている。

$$matrix([\text{成分}_1, \text{成分}_2, \text{成分}_3])$$

$$\overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \end{pmatrix}$$

しかし、力学などで使用されるベクトル表現では、方程式との対応から列の行列が用いられている。本書でもこの列の行列を用いる。そこで Maxima のベクトル関数を使用するときは、列行列を行行列に転置してから使用する。ベクトルを列行列で表すと、

$$matrix([\text{成分}_1], [\text{成分}_2], [\text{成分}_3]);$$

$$\overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{B} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{C} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} \tag{4.1.1}$$

行列の転置

```
transpose(VCA);
transpose(VCAR);
```

A の転置行列 : A^T は、行と列を入れ替えて得られる。Maxima では転置行列は下記の transpose 関数で得られる。

$$transpose(\text{行列})$$

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}$$

ベクトルの大きさ

```
sqrt(VCA.VCA);
```

$$|\overrightarrow{A}| = \sqrt{A_3^2 + A_2^2 + A_1^2}$$

ベクトルの和差

```
VCSUM:VCA+VCB;
VCDIF:VCA-VCB;
```

$$\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} = \begin{pmatrix} B_1 + A_1 \\ B_2 + A_2 \\ B_3 + A_3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{A} - \overrightarrow{B} = \begin{pmatrix} A_1 - B_1 \\ A_2 - B_2 \\ A_3 - B_3 \end{pmatrix}$$

スカラーとベクトルの積

```
a*VCA;
```

スカラー : a とベクトル : $\overrightarrow{A}$ の積は、

$$a\,\overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} A_1\,a \\ A_2\,a \\ A_3\,a \end{pmatrix}$$

```
K*(VCA+VCB);
%=expand(%);
VCBN1:(K+J)*VCA;
expand(%);
VCBN2:K*VCA+J*VCA;
```

スカラー：K とベクトルの分配則は、

$$K\left(\overrightarrow{A}\, +\, \overrightarrow{B}\right) = \begin{pmatrix} B_1\,K + A_1\,K \\ B_2\,K + A_2\,K \\ B_3\,K + A_3\,K \end{pmatrix}$$

スカラー：K, J とベクトルの分配則は、

$$\left(K\, +\, J\right)\,\overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} A_1\,K + A_1\,J \\ A_2\,K + A_2\,J \\ A_3\,K + A_3\,J \end{pmatrix}$$

ベクトル各要素の積

```
VCA*VCB;
```

$$\overrightarrow{A}\, *\, \overrightarrow{B} = \begin{pmatrix} A_1\,B_1 \\ A_2\,B_2 \\ A_3\,B_3 \end{pmatrix}$$

4.1.2　ベクトルの内積 (スカラー積)

```
SPRAB:VCA.VCB;
SPRBA:VCB.VCA;
expand(SPRAB-SPRBA);
```

ベクトル：$\overrightarrow{A}$ とベクトル：$\overrightarrow{B}$ の内積は、．で実行できる。

$$\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} = A_3\,B_3 + A_2\,B_2 + A_1\,B_1 \tag{4.1.2}$$

また、交換則が成り立つ。

$$\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} = \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{A}$$

ベクトルの内積 (スカラー積) の意味

```
VCA1:matrix([D],[0],[0]);
VCB1:matrix([E*cos(\theta)],
 [E*sin(\theta)],[0]);
VCA1.VCB1;
```

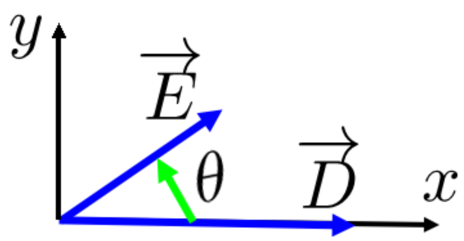


図 4.1.1: 内積の意味

$$\overrightarrow{D} = \begin{pmatrix} D \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{E} = \begin{pmatrix} \cos(\theta)\ E \\ \sin(\theta)\ E \\ 0 \end{pmatrix}$$

ベクトルを上記のように定義し、内積を求めると、

$$\overrightarrow{D} \cdot \overrightarrow{E} = \cos(\theta)\ D\,E$$

上記から、ベクトルの内積は、ベクトル間の角度：θ とすると、それぞれのベクトルの大きさの積に $\cos(\theta)$ を掛けたものである。

ベクトルの内積の分配則

```
VCBC:VCB+VCC;
VCABC:VCA.VCBC;
expand(%);
VCAB:VCA.VCB;
VCAC:VCA.VCC;
VCABC1:VCAB+VCAC;
expand(VCABC-VCABC1);
```

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A} \cdot \left(\overrightarrow{B} + \overrightarrow{C}\right) =& A_3\,C_3 + A_3\,B_3 + A_2\,C_2 \\ &+ A_2\,B_2 + A_1\,C_1 + A_1\,B_1 \\ \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} + \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{C} =& A_3\,C_3 + A_3\,B_3 + A_2\,C_2 \\ &+ A_2\,B_2 + A_1\,C_1 + A_1\,B_1 \end{aligned}$$

以上から、下記のベクトルの内積の分配則が得られる。

$$\overrightarrow{A} \cdot \left(\overrightarrow{B} + \overrightarrow{C}\right) = \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} + \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{C} \tag{4.1.3}$$

4.1.3 ベクトルの外積（ベクトル積）

```
VPRAB:col(adjoint(transpose(addcol(VCA,
 VCB,matrix([1],[1],[1])))),3);
```

ベクトルの外積は上記の手順[1]で得られ、下記の結果となる。

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{pmatrix}A_1\\A_2\\A_3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}B_1\\B_2\\B_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_2\,B_3-B_2\,A_3\\B_1\,A_3-A_1\,B_3\\A_1\,B_2-B_1\,A_2\end{pmatrix}\tag{4.1.4}$$

```
vcprod(a,b):=matrix(
[a[2][1]*b[3][1]-a[3][1]*b[2][1]],
[a[3][1]*b[1][1]-a[1][1]*b[3][1]],
[a[1][1]*b[2][1]-a[2][1]*b[1][1]])$

vcprod(VCA,VCB);
```

また、上記の vcprod 関数を定義しておくと、vcprod(VCA,VCB); でベクトルの外積が得られる。

ベクトルの外積（ベクトル積）の意味

```
col(adjoint(transpose(addcol(VCD,VCE,
 matrix([1],[1],[1])))),3);
```

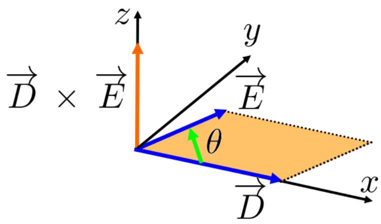


図 4.1.2: 外積の意味

$$\vec{D}=\begin{pmatrix}D\\0\\0\end{pmatrix},\quad\vec{E}=\begin{pmatrix}\cos(\theta)\;E\\\sin(\theta)\;E\\0\end{pmatrix}$$

$x-y$ 軸平面上のベクトルを上記のように定義し、外積を求めると、

$$\vec{D}\times\vec{E}=\begin{pmatrix}0\\0\\\sin(\theta)\;D\,E\end{pmatrix}$$

上記から、$x-y$ 軸平面上のベクトルの外積は、ベクトル間の角度：θ とすると、それぞれのベクトルの大きさの積に $\sin(\theta)$ を掛けたもので、これはベクトルでつくられる平行四辺形の面積に当たる。ベクトルの向きは、z 軸方向となっている。一般的に、ベクトルの外積の大きさは、それぞれのベクトルの大きさの積に $\sin(\theta)$ を掛けたものである。また、向きは被積ベクトルで構成される面に垂直で、右手ねじの方向である。

ベクトルの外積の交換則

```
VPRBA:col(adjoint(transpose(addcol(VCB,
 VCA,matrix([1],[1],[1])))),3);
expand(VPRAB-(-VPRBA));
```

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{pmatrix}A_2\,B_3-B_2\,A_3\\B_1\,A_3-A_1\,B_3\\A_1\,B_2-B_1\,A_2\end{pmatrix}$$

$$\vec{B}\times\vec{A}=\begin{pmatrix}B_2\,A_3-A_2\,B_3\\A_1\,B_3-B_1\,A_3\\B_1\,A_2-A_1\,B_2\end{pmatrix}$$

以上から、

$$\vec{A}\times\vec{B}=-\vec{B}\times\vec{A}$$

ベクトルの外積 の分配則

```
VCB+VCC;
col(adjoint(transpose(addcol(VCA,%,
 matrix([1],[1],[1])))),3);
VPRABC:expand(%);
VPRAB:col(adjoint(transpose(addcol(VCA,
 VCB,matrix([1],[1],[1])))),3);
VPRAC:col(adjoint(transpose(addcol(VCA,
 VCC,matrix([1],[1],[1])))),3);
VPRAB+VPRAC;
VPRABC-%;
```

$$\vec{A}\times\left(\vec{B}+\vec{C}\right)$$
$$=\begin{pmatrix}A_2\,C_3+A_2\,B_3-C_2\,A_3-B_2\,A_3\\-A_1\,C_3-A_1\,B_3+C_1\,A_3+B_1\,A_3\\A_1\,C_2+A_1\,B_2-C_1\,A_2-B_1\,A_2\end{pmatrix}$$
$$\vec{A}\times\vec{B}+\vec{A}\times\vec{C}$$
$$=\begin{pmatrix}A_2\,C_3+A_2\,B_3-C_2\,A_3-B_2\,A_3\\-A_1\,C_3-A_1\,B_3+C_1\,A_3+B_1\,A_3\\A_1\,C_2+A_1\,B_2-C_1\,A_2-B_1\,A_2\end{pmatrix}$$

以上から、

$$\vec{A}\times\left(\vec{B}+\vec{C}\right)=\vec{A}\times\vec{B}+\vec{A}\times\vec{C}\tag{4.1.5}$$

[1]中川義行：Maxima 入門ノート 1.2.1 、http://www.eonet.ne.jp/ kyo-ju/maxima.pdf [4)], P.59 ベクトルの演算

4.1.4　3 重積

(1) スカラー 3 重積

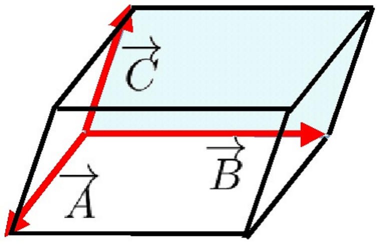


図 4.1.3: スカラー 3 重積

$\vec{B} \times \vec{C}$ は前節の外積の意味から、ベクトル : $\vec{B}, \vec{C}$ で構成される平行四辺形の面積を表し、その向きは平行四辺形の面に垂直である。このベクトルに $\vec{A}$ のスカラー積をとると、$\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ で構成される平行六面体の体積を表している。このことから下記の関係式を得る。

$$\vec{A} \cdot \left(\vec{B} \times \vec{C}\right) = \vec{B} \cdot \left(\vec{C} \times \vec{A}\right) = \vec{C} \cdot \left(\vec{A} \times \vec{B}\right) \tag{4.1.6}$$

```
VCA;
VPRBC:col(adjoint(transpose(addcol(VCB,
 VCC,matrix([1],[1],[1])))),3);
SPRABC:VCA.(VPRBC);
VCB;
VPRAC;
SPRBCA:VCB.(-VPRAC);
VCC;
VPRAB;
SPRCAB:VCC.VPRAB;
expand(SPRABC-SPRBCA);
expand(SPRBCA-SPRCAB);
```

ベクトルを列行列として求めると、

$$\vec{A} \cdot \left(\vec{B} \times \vec{C}\right)$$
$$= A_1\ (B_2\,C_3 - C_2\,B_3) + A_2\ (C_1\,B_3 - B_1\,C_3) + (B_1\,C_2 - C_1\,B_2)\ A_3$$
$$\vec{B} \cdot \left(\vec{C} \times \vec{A}\right)$$
$$= B_1\ (C_2\,A_3 - A_2\,C_3) + B_2\ (A_1\,C_3 - C_1\,A_3) + (C_1\,A_2 - A_1\,C_2)\ B_3$$
$$\vec{C} \cdot \left(\vec{A} \times \vec{B}\right)$$
$$= (A_1\,B_2 - B_1\,A_2)\ C_3 + C_1\ (A_2\,B_3 - B_2\,A_3) + C_2\ (B_1\,A_3 - A_1\,B_3)$$

以上から、上式が確認できた。いま、二つのベクトルが同一であるとすると、(4.1.6) 式からスカラー 3 重積は零となる。

(2) ベクトル 3 重積

下記のベクトル 3 重積について調べる。

$$\vec{A} \times \left(\vec{B} \times \vec{C}\right)$$

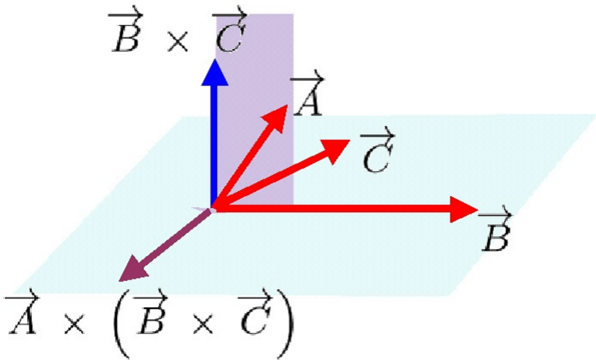


図 4.1.4: ベクトル 3 重積

ベクトル : $\vec{B} \times \vec{C}$ はベクトル : $\vec{B}, \vec{C}$ を含む面 : 面 BC に垂直である。次に、$\left(\vec{B} \times \vec{C}\right)$ と $\vec{A}$ のベクトル積は、面 BC と垂直な $\left(\vec{B} \times \vec{C}\right)$ と $\vec{A}$ を含む面 A に垂直になり、$\vec{A} \times \left(\vec{B} \times \vec{C}\right)$ は $\vec{B}, \vec{C}$ を含む面 : 面 BC 内にある。以上のことから、ベクトル 3 重積は下記のようにも表現できる。ここで p, q は定数とする。

$$\vec{A} \times \left(\vec{B} \times \vec{C}\right) = p\,\vec{B} - q\,\vec{C} \tag{4.1.7}$$

上式に $\vec{A}$ のスカラー積をとると、$\vec{A} \times \left(\vec{B} \times \vec{C}\right)$ と $\vec{A}$ は垂直であるから、左辺は零となり、

$$0 = p\,\vec{A} \cdot \vec{B} - q\,\vec{A} \cdot \vec{C}$$

上式から、p, q は

$$p = \alpha\,\vec{C}, \quad q = \alpha\,\vec{B}$$

上式を (4.1.7) 式に代入すると右辺が零となり不適である。そこで p, q として、下記とする。

$$p = \alpha\,\vec{A} \cdot \vec{C}, \quad q = \alpha\,\vec{A} \cdot \vec{B}$$

上式を (4.1.7) 式に代入すると

$$\vec{A} \times \left(\vec{B} \times \vec{C}\right) = \alpha\left(\vec{A} \cdot \vec{C}\right)\vec{B} - \alpha\left(\vec{A} \cdot \vec{B}\right)\vec{C} \tag{4.1.8}$$

```
col(adjoint(transpose(addcol(VCB,VCC,
 matrix([1],[1],[1])))),3);
VC3ML:col(adjoint(transpose(addcol(VCA,%,
 matrix([1],[1],[1])))),3);
AL1:\alpha*(VCA.VCC)*VCB;
AL2:\alpha*(VCA.VCB)*VCC;
VC3ML-AL1+AL2;
factor(%);
```

ベクトルとして、(4.1.1) 式を (4.1.8) 式に代入し、α を求める。

$$\vec{A}\times\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)$$
$$=\begin{pmatrix}A_2\,(B_1\,C_2-C_1\,B_2)-A_3\,(C_1\,B_3-B_1\,C_3)\\ A_3\,(B_2\,C_3-C_2\,B_3)-A_1\,(B_1\,C_2-C_1\,B_2)\\ A_1\,(C_1\,B_3-B_1\,C_3)-A_2\,(B_2\,C_3-C_2\,B_3)\end{pmatrix}$$

$$\alpha\left(\vec{A}\cdot\vec{C}\right)\vec{B}=\begin{pmatrix}B_1\,(A_3\,C_3+A_2\,C_2+A_1\,C_1)\,\alpha\\ B_2\,(A_3\,C_3+A_2\,C_2+A_1\,C_1)\,\alpha\\ B_3\,(A_3\,C_3+A_2\,C_2+A_1\,C_1)\,\alpha\end{pmatrix}$$

$$\alpha\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)\vec{C}=\begin{pmatrix}C_1\,(A_3\,B_3+A_2\,B_2+A_1\,B_1)\,\alpha\\ C_2\,(A_3\,B_3+A_2\,B_2+A_1\,B_1)\,\alpha\\ (A_3\,B_3+A_2\,B_2+A_1\,B_1)\,C_3\,\alpha\end{pmatrix}$$

上式を (4.1.8) 式に代入し、整理すると、

$$\begin{pmatrix}-(B_1\,A_3\,C_3-C_1\,A_3\,B_3+B_1\,A_2\,C_2-C_1\,A_2\,B_2)\,(\alpha-1)\\ -(B_2\,A_3\,C_3-C_2\,A_3\,B_3-A_1\,B_1\,C_2+A_1\,C_1\,B_2)\,(\alpha-1)\\ (A_2\,B_2\,C_3+A_1\,B_1\,C_3-A_2\,C_2\,B_3-A_1\,C_1\,B_3)\,(\alpha-1)\end{pmatrix}=0$$

上式から、$\alpha=1$ となる。以上から、ベクトル 3 重積は下記のように表現できる。

$$\vec{A}\times\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)=\left(\vec{A}\cdot\vec{C}\right)\vec{B}-\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)\vec{C}\tag{4.1.9}$$

```
col(adjoint(transpose(addcol(VCB,VCC,
 matrix([1],[1],[1])))),3);
col(adjoint(transpose(addcol(VCA,%,
 matrix([1],[1],[1])))),3);
VPRABC:expand(%);
VCA.VCC;
VPACB:%*VCB;
VCA.VCB;
VPABC:%*VCC;
VPRABC1:expand(VPACB-VPABC);
VPRABC-VPRABC1;
```

上式を具体的に確かめる。

$$\vec{A}\times\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)$$
$$=\begin{pmatrix}B_1\,A_3\,C_3-C_1\,A_3\,B_3+B_1\,A_2\,C_2-C_1\,A_2\,B_2\\ B_2\,A_3\,C_3-C_2\,A_3\,B_3-A_1\,B_1\,C_2+A_1\,C_1\,B_2\\ -A_2\,B_2\,C_3-A_1\,B_1\,C_3+A_2\,C_2\,B_3+A_1\,C_1\,B_3\end{pmatrix}$$

$$\left(\vec{A}\cdot\vec{C}\right)\vec{B}=\begin{pmatrix}B_1\,(A_3\,C_3+A_2\,C_2+A_1\,C_1)\\ B_2\,(A_3\,C_3+A_2\,C_2+A_1\,C_1)\\ B_3\,(A_3\,C_3+A_2\,C_2+A_1\,C_1)\end{pmatrix}$$

$$\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)\vec{C}=\begin{pmatrix}C_1\,(A_3\,B_3+A_2\,B_2+A_1\,B_1)\\ C_2\,(A_3\,B_3+A_2\,B_2+A_1\,B_1)\\ (A_3\,B_3+A_2\,B_2+A_1\,B_1)\,C_3\end{pmatrix}$$

$$\left(\vec{A}\cdot\vec{C}\right)\vec{B}-\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)\vec{C}$$
$$=\begin{pmatrix}B_1\,A_3\,C_3-C_1\,A_3\,B_3+B_1\,A_2\,C_2-C_1\,A_2\,B_2\\ B_2\,A_3\,C_3-C_2\,A_3\,B_3-A_1\,B_1\,C_2+A_1\,C_1\,B_2\\ -A_2\,B_2\,C_3-A_1\,B_1\,C_3+A_2\,C_2\,B_3+A_1\,C_1\,B_3\end{pmatrix}$$

以上から、(4.1.9) 式が確認できた。

(3) スカラーのみの 3 重積

下記のスカラーのみの 3 重積について調べる。

$$\vec{A}\cdot\left(\vec{B}\cdot\vec{C}\right)$$

ベクトル 3 重積の (4.1.9) 式で、$\vec{A}\ \rightarrow\ \vec{B},\ \vec{B}\ \rightarrow\ \vec{A}$ に置き換えると、

$$\vec{B}\times\left(\vec{A}\times\vec{C}\right)=\left(\vec{B}\cdot\vec{C}\right)\vec{A}-\left(\vec{B}\cdot\vec{A}\right)\vec{C}$$

以上から、

$$\vec{A}\cdot\left(\vec{B}\cdot\vec{C}\right)=\vec{B}\times\left(\vec{A}\times\vec{C}\right)+\left(\vec{B}\cdot\vec{A}\right)\cdot\vec{C} \tag{4.1.10}$$

```
col(adjoint(transpose(addcol(VCA,VCC,
 matrix([1],[1],[1])))),3);
col(adjoint(transpose(addcol(VCB,%,
 matrix([1],[1],[1])))),3);
VPRBAC:expand(%);
VCB.VCC;
SPRABC:expand(VCA*%);
VCB.VCA;
SPRCBA:expand(VCC*%);
VPRBAC+SPRCBA;
SPRABC-%;
```

$$\vec{B}\times\left(\vec{A}\times\vec{C}\right)=\left(\vec{B}\cdot\vec{C}\right)\vec{A}-\left(\vec{B}\cdot\vec{A}\right)\vec{C}$$

$$\vec{B}\times\left(\vec{A}\times\vec{C}\right)=\begin{pmatrix}A_1\,B_3\,C_3-C_1\,A_3\,B_3+A_1\,B_2\,C_2-C_1\,A_2\,B_2\\A_2\,B_3\,C_3-C_2\,A_3\,B_3-A_1\,B_1\,C_2+B_1\,C_1\,A_2\\-A_2\,B_2\,C_3-A_1\,B_1\,C_3+B_2\,C_2\,A_3+B_1\,C_1\,A_3\end{pmatrix}$$

$$\left(\vec{B}\cdot\vec{C}\right)\vec{A}=\begin{pmatrix}A_1\,B_3\,C_3+A_1\,B_2\,C_2+A_1\,B_1\,C_1\\A_2\,B_3\,C_3+A_2\,B_2\,C_2+B_1\,C_1\,A_2\\A_3\,B_3\,C_3+B_2\,C_2\,A_3+B_1\,C_1\,A_3\end{pmatrix}$$

$$\left(\vec{B}\cdot\vec{A}\right)\vec{C}=\begin{pmatrix}C_1\,A_3\,B_3+C_1\,A_2\,B_2+A_1\,B_1\,C_1\\C_2\,A_3\,B_3+A_2\,B_2\,C_2+A_1\,B_1\,C_2\\A_3\,B_3\,C_3+A_2\,B_2\,C_3+A_1\,B_1\,C_3\end{pmatrix}$$

上式を (4.1.10) 式に代入すると、(4.1.10) 式が成り立っているのがわかる。

(4) ベクトル積・内積

スカラー 3 重積：(4.1.6) 式から、

$$\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\cdot\left(\vec{C}\times\vec{D}\right)=\vec{C}\cdot\left(\vec{D}\times\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\right)$$

更に、ベクトル 3 重積：(4.1.9) 式を用いて、

$$\begin{aligned}&\vec{C}\cdot\left(\vec{D}\times\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\right)\\&\quad=\vec{C}\cdot\left(\vec{A}\cdot\left(\vec{B}\cdot\vec{D}\right)-\vec{B}\cdot\left(\vec{A}\cdot\vec{D}\right)\right)\\&\quad=\left(\vec{A}\cdot\vec{C}\right)\cdot\left(\vec{B}\cdot\vec{D}\right)-\left(\vec{B}\cdot\vec{C}\right)\cdot\left(\vec{A}\cdot\vec{D}\right)\end{aligned}$$

以上から、

$$\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\cdot\left(\vec{C}\times\vec{D}\right)=\left(\vec{A}\cdot\vec{C}\right)\cdot\left(\vec{B}\cdot\vec{D}\right)-\left(\vec{B}\cdot\vec{C}\right)\cdot\left(\vec{A}\cdot\vec{D}\right)\tag{4.1.11}$$

上式を

```
VCD:matrix([D[1]],[D[2]],[D[3]]);
VCAB:col(adjoint(transpose(addcol(VCA,
 VCB,matrix([1],[1],[1])))),3);
VCCD:col(adjoint(transpose(addcol(VCC,
 VCD,matrix([1],[1],[1])))),3);
VCAB.VCCD;
SABCD:expand(%);
SACBD:(VCA.VCC)*(VCB.VCD);
SBCAD:(VCB.VCC)*(VCA.VCD);
SACBD-SBCAD;
%-SABCD;
expand(%);
```

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{pmatrix}A_2\,B_3-B_2\,A_3\\B_1\,A_3-A_1\,B_3\\A_1\,B_2-B_1\,A_2\end{pmatrix}$$

$$\vec{C}\times\vec{D}=\begin{pmatrix}C_2\,D_3-D_2\,C_3\\D_1\,C_3-C_1\,D_3\\C_1\,D_2-D_1\,C_2\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}&\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\cdot\left(\vec{C}\times\vec{D}\right)\\&=A_2\,C_2\,B_3\,D_3+A_1\,C_1\,B_3\,D_3-B_2\,C_2\,A_3\,D_3\\&\quad-B_1\,C_1\,A_3\,D_3-A_2\,D_2\,B_3\,C_3-A_1\,D_1\,B_3\,C_3\\&\quad+B_2\,D_2\,A_3\,C_3+B_1\,D_1\,A_3\,C_3+A_1\,C_1\,B_2\,D_2\\&\quad-B_1\,C_1\,A_2\,D_2-A_1\,D_1\,B_2\,C_2+B_1\,D_1\,A_2\,C_2\end{aligned}\tag{4.1.12}$$

$$\begin{aligned}\left(\vec{A}\cdot\vec{C}\right)\cdot\left(\vec{B}\cdot\vec{D}\right)&=\left(A_3\,C_3+A_2\,C_2+A_1\,C_1\right)\\&\quad\times\left(B_3\,D_3+B_2\,D_2+B_1\,D_1\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\vec{B}\cdot\vec{C}\right)\cdot\left(\vec{A}\cdot\vec{D}\right)&=\left(B_3\,C_3+B_2\,C_2+B_1\,C_1\right)\\&\quad\times\left(A_3\,D_3+A_2\,D_2+A_1\,D_1\right)\end{aligned}$$

上式から、

$$\begin{aligned}&\left(\vec{A}\cdot\vec{C}\right)\cdot\left(\vec{B}\cdot\vec{D}\right)-\left(\vec{B}\cdot\vec{C}\right)\cdot\left(\vec{A}\cdot\vec{D}\right)\\&=A_2\,C_2\,B_3\,D_3+A_1\,C_1\,B_3\,D_3-B_2\,C_2\,A_3\,D_3\\&\quad-B_1\,C_1\,A_3\,D_3-A_2\,D_2\,B_3\,C_3-A_1\,D_1\,B_3\,C_3\\&\quad+B_2\,D_2\,A_3\,C_3+B_1\,D_1\,A_3\,C_3+A_1\,C_1\,B_2\,D_2\\&\quad-B_1\,C_1\,A_2\,D_2-A_1\,D_1\,B_2\,C_2+B_1\,D_1\,A_2\,C_2\end{aligned}\tag{4.1.13}$$

(4.1.12) 式、(4.1.13) 式から (4.1.11) 式が成り立つているのがわかる。

(4.1.11) 式の図形的解釈として、$|\vec{A}\times\vec{B}|$ は $\vec{A}$ と $\vec{B}$ がつくる平行四辺形の面積、$|\vec{C}\times\vec{D}|$ は $\vec{C}$ と $\vec{D}$ がつくる平行四辺形の面積であり、ベクトル：$\vec{A}\times\vec{B}$ とベクトル：$\vec{C}\times\vec{D}$ のなす角：θ とすると、(4.1.11) 式は $|\vec{A}\times\vec{B}|\,|\vec{C}\times\vec{D}|\cos(\theta)$ となる。

ベクトル積・内積

下記の関係式の $\overrightarrow{V}$ を求める。

$$\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{V} = \alpha, \quad \overrightarrow{B} \times \overrightarrow{V} = \overrightarrow{C} \tag{4.1.14}$$

(4.1.14) 式の第二式に $\overrightarrow{A}$ のベクトル積をとり、

$$\overrightarrow{A} \times \left(\overrightarrow{B} \times \overrightarrow{V} \right) = \overrightarrow{A} \times \overrightarrow{C}$$

上式を展開し、

$$\overrightarrow{B} \left(\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{V} \right) - \overrightarrow{V} \left(\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} \right) = \overrightarrow{A} \times \overrightarrow{C}$$

(4.1.14) 式の第一式を代入し、

$$\alpha \overrightarrow{B} - \overrightarrow{V} \left(\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} \right) = \overrightarrow{A} \times \overrightarrow{C}$$

上式から $\overrightarrow{V}$ を求めると、

$$\overrightarrow{V} = \frac{\alpha \overrightarrow{B} - \overrightarrow{A} \times \overrightarrow{C}}{\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B}}$$

4.2 行列とテンソル

4.2.1 行列の生成

(1)Maxima の行列の表現

```
kill(all);
MTA:matrix([A[11],A[12],A[13]],
 [A[21],A[22],A[23]],[A[31],A[32],A[33]]);
MTB:matrix([B[11],B[12],B[13]],
 [B[21],B[22],B[23]],[B[31],B[32],B[33]]);
MTC:matrix([C[11],C[12],C[13]],
 [C[21],C[22],C[23]],[C[31],C[32],C[33]]);
```

Maxima の行列の記述方法は matrix 関数を使う。

$$matrix([\text{成分}_{11},\text{成分}_{12},\cdots],[\text{成分}_{21},\text{成分}_{22},\cdots],\cdots)$$

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix}$$

(2) 単位行列

```
ident(3);
```

下記の ident 関数で得られる。

$$ident(\text{次数})$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(3) 行列生成

```
genmatrix(A,3,3);
genmatrix(A,5,4,2,2);
h[i,j]:=1/(i+j-1);
genmatrix(h,3,3);
```

genmatrix 関数で配列関数に添え字を付けた行列で、添え字を行 1 から行 2、列 1 から列 2 の行列を生成する。

$$genmatrix(\text{配列関数},\text{行}\ 2,\text{列}\ 2,\text{行}\ 1,\text{列}\ 1)$$

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A_{2,2} & A_{2,3} & A_{2,4} \\ A_{3,2} & A_{3,3} & A_{3,4} \\ A_{4,2} & A_{4,3} & A_{4,4} \\ A_{5,2} & A_{5,3} & A_{5,4} \end{pmatrix}$$

下記の関数を定義しても生成できる。

$$h_{i,j} := \frac{1}{i+j-1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

(4) 行の抽出

```
row(MTA,2);
```

行列の n 行目の行を抽出する。

$$row(\text{行列},\mathrm{n})$$

$$\begin{pmatrix} A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{pmatrix}$$

(5) 列の抽出

```
col(MTA,2);
```

行列の n 列目の列を抽出する。

$$col(\text{行列},\mathrm{n})$$

$$\begin{pmatrix} A_{12} \\ A_{22} \\ A_{32} \end{pmatrix}$$

(6) 行方向に行列を追加

```
A1:genmatrix(A,2,2);
B1:genmatrix(B,2,2);
addrow(A1,B1);
```

$$A1 = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{pmatrix}$$

$$B1 = \begin{pmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} \\ B_{2,1} & B_{2,2} \end{pmatrix}$$

$A1$ の行方向に $B1$ を追加する。

$$addrow(A1, B1)$$

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \\ B_{1,1} & B_{1,2} \\ B_{2,1} & B_{2,2} \end{pmatrix}$$

(7) 列方向に行列を追加

```
addcol(A1,B1);
```

$A1$ の列方向に $B1$ を追加する。

$$addcol(A1, B1)$$

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & B_{1,1} & B_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & B_{2,1} & B_{2,2} \end{pmatrix}$$

(8) 行列の指定行、列を削除

```
A1:genmatrix(A,5,5);
submatrix(2,3,A1,4);
```

$A1$ の指定の行、指定の列を削除する。

$submatrix$(行 1, 行 2,$\cdots$, 行 n, 行列, 列 1, 列 2,$\cdots$, 列 m)

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & A_{1,4} & A_{1,5} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & A_{2,4} & A_{2,5} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} & A_{3,4} & A_{3,5} \\ A_{4,1} & A_{4,2} & A_{4,3} & A_{4,4} & A_{4,5} \\ A_{5,1} & A_{5,2} & A_{5,3} & A_{5,4} & A_{5,5} \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \quad \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & A_{1,5} \\ A_{4,1} & A_{4,2} & A_{4,3} & A_{4,5} \\ A_{5,1} & A_{5,2} & A_{5,3} & A_{5,5} \end{pmatrix}$$

(9) 連立方程式の係数

```
XY1:x+2*y=3;
XY2:4*x+5*y=6;
coefmatrix([XY1,XY2], [x,y]);
```

$$2\,y + x = 3$$

$$5\,y + 4\,x = 6$$

上記の連立方程式の係数の行列を求める。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

4.2.2 行列の演算

$m \times n$ の行列は、m 個の行と n 個の列の数字や式を並べたものである。その各種演算について、以下に示す。

(1) 行列の和差

```
MTA+MTB;
```

$$A+B=\begin{pmatrix} B_{11}+A_{11} & B_{12}+A_{12} & B_{13}+A_{13} \\ B_{21}+A_{21} & B_{22}+A_{22} & B_{23}+A_{23} \\ B_{31}+A_{31} & B_{32}+A_{32} & B_{33}+A_{33} \end{pmatrix}$$

(2) 行列の積

```
A1:genmatrix(A,2,2);
B1:genmatrix(B,2,2);
A1.B1;
```

行列 : A と行列 : B の積は、 . で実行でき、行列 : A の行の成分と行列 : B の列の成分を掛け、その総和が積の成分となる。

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} \\ B_{2,1} & B_{2,2} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} A_{1,2}\,B_{2,1}+A_{1,1}\,B_{1,1} & A_{1,2}\,B_{2,2}+A_{1,1}\,B_{1,2} \\ B_{2,1}\,A_{2,2}+B_{1,1}\,A_{2,1} & A_{2,2}\,B_{2,2}+B_{1,2}\,A_{2,1} \end{pmatrix}$$

(3) 行列の積 のトレース (対角成分の和)

```
MT1:MTA.MTB;
TR1:MT1[1][1]+MT1[2][2]+MT1[3][3];
MT2:MTB.MTA;
TR2:MT2[1][1]+MT2[2][2]+MT2[3][3];
expand(TR1-TR2);
```

$$\begin{aligned} &A\,B\,\text{のトレース} = B\,A\,\text{のトレース} \\ &= A_{33}\,B_{33}+A_{23}\,B_{32}+B_{23}\,A_{32}+A_{13}\,B_{31}+B_{13}\,A_{31} \\ &+ A_{22}\,B_{22}+A_{12}\,B_{21}+B_{12}\,A_{21}+A_{11}\,B_{11} \end{aligned} \tag{4.2.1}$$

(4) 行列の結合則

```
MT1:MTA.(MTB.MTC);
MT2:(MTA.MTB).MTC;
expand(MT1-MT2);
```

出力結果が膨大なので、省く。結果は、

$$A\,(B\,C)=(A\,B)\,C$$

(5) 行列の分配則

```
MT1:(MTA+MTB).MTC;
MT2:MTA.MTC+MTB.MTC;
expand(MT1-MT2);
MT1:MTC.(MTA+MTB);
MT2:MTC.MTA+MTC.MTB;
expand(MT1-MT2);
```

出力結果が膨大なので、省く。結果は、

$$(A\,+\,B)\;C = A\,C+B\,C$$

$$C\;(A\,+\,B) = C\,A+C\,B$$

(6) 行列の転置行列

```
MT1:transpose(MTA);
```

A の転置行列 : A^T は、行と列を入れ替えて得られる。Maxima では転置行列は下記の transpose 関数で得られる。

$$transpose(\text{行列})$$

$$A^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

(7) 行列の和の転置行列

```
MT1:transpose(MTA+MTB);
MT2:transpose(MTA)+transpose(MTB);
expand(MT1-MT2);
```

$$\begin{aligned} (A+B)^T &= \begin{pmatrix} B_{11}+A_{11} & B_{21}+A_{21} & B_{31}+A_{31} \\ B_{12}+A_{12} & B_{22}+A_{22} & B_{32}+A_{32} \\ B_{13}+A_{13} & B_{23}+A_{23} & B_{33}+A_{33} \end{pmatrix} \\ &= A^T+B^T \end{aligned} \tag{4.2.2}$$

(8) 行列の積の転置行列

```
MT1:transpose(MTA.MTB);
MT2:transpose(MTB).transpose(MTA);
expand(MT1-MT2);
```

$$(A\,B)^T = B^T\,A^T \tag{4.2.3}$$

4.2.3　行列式

```
DT1:determinant(MTA);
DT2:determinant(transpose(MTA));
expand(DT1-DT2);
```

Maxima では行列：A の行列式：$det\left|A\right|$ は、下記の determinant 関数で得られる。

$$determinant(\text{行列})$$

$$\begin{aligned} det\left|A\right| =&A_{11}\,\left(A_{22}\,A_{33}-A_{23}\,A_{32}\right)\\ &-A_{12}\,\left(A_{21}\,A_{33}-A_{23}\,A_{31}\right)\\ &+A_{13}\,\left(A_{21}\,A_{32}-A_{22}\,A_{31}\right)\end{aligned}$$

また、次の関係がある。

$$det\left|A\right| = \; det\left|A^T\right| \tag{4.2.4}$$

```
DT1:determinant(MTA.MTB);
DT2:determinant(MTA)*determinant(MTB);
expand(DT1-DT2);
```

$$det\left|A\cdot B\right| = det\left|A\right|\; det\left|B\right| \tag{4.2.5}$$

4.2.4　逆行列関連

```
MTI:matrix([I[11],I[12]],[I[21],I[22]]);
invert(MTI)
```

Maxima では行列 : A の逆行列 : A^{-1} は、下記の invert 関数で得られる。

$$invert(\text{行列})$$

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

上記行列の逆行列は、次式となる。

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{22}}{A_{11}\,A_{22}-A_{12}\,A_{21}} & -\frac{A_{12}}{A_{11}\,A_{22}-A_{12}\,A_{21}} \\ -\frac{A_{21}}{A_{11}\,A_{22}-A_{12}\,A_{21}} & \frac{A_{11}}{A_{11}\,A_{22}-A_{12}\,A_{21}} \end{pmatrix}$$

```
invert(MTI).MTI;
factor(%);
MTI.invert(MTI);
factor(%);
```

逆行列と元の行列の積は単位行列となる。

$$A^{-1}\cdot A = A\cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.2.6}$$

```
invert(MTI);
invert(%);
factor(%);
MTI-%;
factor(%);
```

逆行列の逆行列は元の行列となる。

$$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A \tag{4.2.7}$$

```
invert(MTI);
transpose(%);
X1:invert(%);
X2:transpose(MTI);
X1-X2;
factor(%);
```

逆行列の転置行列、その逆行列は元の転置行列となる。

$$\left(\left(A^{-1}\right)^{T}\right)^{-1} = A^{T} \tag{4.2.8}$$

```
transpose(MTI);
invert(%);
transpose(%);
invert(MTI)-%;
factor(%);
```

転置行列の逆行列、その転置行列は元の逆行列となる。

$$\left(\left(A^{T}\right)^{-1}\right)^{T} = A^{-1} \tag{4.2.9}$$

```
transpose(MTI);
X1:invert(%);
invert(MTI);
X2:transpose(%);
X1-X2;
factor(%);
```

転置行列の逆行列は、逆行列の転置行列に等しい。

$$\left(A^{T}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{T} \tag{4.2.10}$$

4.2.5 連立一次方程式 (逆行列)

下記の連立一次方程式を逆行列を使って解く。

$$
\begin{aligned}
2\,y + x =& 3 \\
5\,y + 4\,x =& 6
\end{aligned}
\tag{4.2.11}
$$

```
kill(all);
XY1:x+2*y=3;
XY2:4*x+5*y=6;
MXY1:matrix([1,2],[4,5]);
MXY2:matrix([x],[y]);
B1:matrix([3],[6]);
MXY1.MXY2=B1;
MXY3:invert(MXY1);
MXY3.MXY1;
%.MXY2=MXY3.B1;
solve([XY1,XY2],[x,y]);
```

方程式の要素を行列で表すと、

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

方程式を行列で表すと、

$$A\,X = B, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \tag{4.2.12}$$

行列：A の逆行列：A^{-1} を求め、

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

上記逆行列を (4.2.12) 式に掛け、

$$A^{-1}\,A\,X = A^{-1}\,B,$$

$A^{-1}\,A$ は単位行列となり、解が得られ、

$$X = A^{-1}\,B,$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(4.2.11) 式を solve 関数で連立方程式を解くと、当然ながら上記の結果と一致している。

$$[[x = -1, y = 2]]$$

4.2.6 連立一次方程式 (行列式)

(4.2.11) 式の連立一次方程式を行列式を使って解く。

```
MXY1:matrix([1,2],[4,5]);
B1:matrix([3],[6]);
submatrix(MXY1,1);
MXY4:addcol(B1,%);
submatrix(MXY1,2);
MXY5:addcol(%,B1);
D0:determinant(MXY1);
D4:determinant(MXY4);
D5:determinant(MXY5);
x=D4/D0;
y=D5/D0;
```

係数のマトリックス：$D0$ は、

$$M0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

(4.2.11) 式の右辺のマトリックスは、

$$B1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$M0$ の一列目を $B1$ と置き換えて、

$$M1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$M0$ の二列目を $B1$ と置き換えて、

$$M2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$D0 = det\,|M0| = det \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -3$$

$$D1 = det\,|M1| = det \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = 3$$

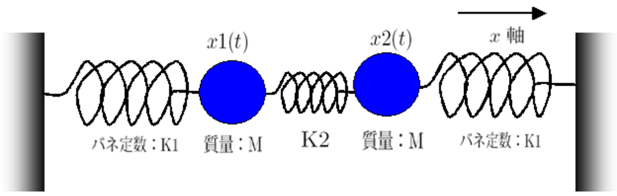
$$D2 = det\,|M2| = det \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = -6$$

上式から、x, y は、

$$x = \frac{D1}{D0} = -1, \quad y = \frac{D2}{D0} = 2$$

4.2.7 固有値問題

水平線：x 軸上を運動する２質点（質量：M）に、左右両壁から距離に比例する力（バネ定数：K_1）が作用する。そして、２つの質点間に距離に比例する力（バネ定数：K_2）が作用する。




```
kill(all);
EQ1:M*diff(x[1](t),t,2)=-K[1]*x[1](t)
 +K[2]*(x[2](t)-x[1](t));
EQ2:M*diff(x[2](t),t,2)=-K[1]*x[2](t)
 -K[2]*(x[2](t)-x[1](t));
X1:x[1](t)=C[1]*%e^(%i*\omega*t);
X2:x[2](t)=C[2]*%e^(%i*\omega*t);
EQ11:subst([X1,X2],EQ1);
ev(%,diff);
EQ12:expand(%/M/%e^(%i*\omega*t));
EQ21:subst([X1,X2],EQ2);
ev(%,diff);
EQ22:expand(%/M/%e^(%i*\omega*t));
EQ12;
EQ22;
MC12:matrix([C[1]],[C[2]]);
MK12:matrix([-(K[1]+K[2])/M,K[2]/M],
 [K[2]/M,-(K[1]+K[2])/M]);
EQM1:-\omega^2*MC12=MK12.MC12;
EQM2:subst([\omega^2=\Lambda],%);
MI1:ident(2);
MI2:MI1*(-\Lambda);
MI2.MC12;
%=MK12.MC12;
MK12-MI2;
determinant(%)=0;
expand(%);
OM1:solve(%,\Lambda);
subst([\Lambda=\omega^2],%);
EQM3:EQM2-lhs(EQM2);
subst([OM1[1]],EQM3);
factor(%);
C[2]=-C[1];
subst([OM1[2]],EQM3);
factor(%);
C[2]=C[1];
```

質点に作用する力の分析から、質点の変位:$x1(t), x2(t)$ に関する運動方程式は下記となる。

$$\begin{aligned}\left(\frac{d^2}{d\,t^2}\,x_1\left(t\right)\right)\,M &= K_2\,\left(x_2\left(t\right)-x_1\left(t\right)\right)-K_1\,x_1\left(t\right)\\ \left(\frac{d^2}{d\,t^2}\,x_2\left(t\right)\right)\,M &= -K_2\,\left(x_2\left(t\right)-x_1\left(t\right)\right)-K_1\,x_2\left(t\right)\end{aligned} \tag{4.2.13}$$

上式に次式を代入し、

$$x_1\left(t\right)=C_1\,e^{i\,\omega\,t},\quad x_2\left(t\right)=C_2\,e^{i\,\omega\,t}$$

整理すると、

$$\begin{aligned}&-C_1\,\omega^2\,e^{i\,\omega\,t}\,M\\ &\quad=K_2\,\left(C_2\,e^{i\,\omega\,t}-C_1\,e^{i\,\omega\,t}\right)-C_1\,K_1\,e^{i\,\omega\,t}\\ &-C_2\,\omega^2\,e^{i\,\omega\,t}\,M\\ &\quad=-K_2\,\left(C_2\,e^{i\,\omega\,t}-C_1\,e^{i\,\omega\,t}\right)-K_1\,C_2\,e^{i\,\omega\,t}\end{aligned}$$

上式を $e^{i\,\omega\,t}$ で割ると、

$$\begin{aligned}-C_1\,\omega^2&=\frac{C_2\,K_2}{M}-\frac{C_1\,K_2}{M}-\frac{C_1\,K_1}{M}\\ -C_2\,\omega^2&=-\frac{C_2\,K_2}{M}+\frac{C_1\,K_2}{M}-\frac{K_1\,C_2}{M}\end{aligned}$$

上式を行列で表現すると、

$$C=\begin{pmatrix}C_1\\C_2\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}\frac{-K_2-K_1}{M} & \frac{K_2}{M}\\ \frac{K_2}{M} & \frac{-K_2-K_1}{M}\end{pmatrix}$$

$$-\omega^2\,C=A\,C$$

上式から、

$$\begin{pmatrix}-C_1\,\omega^2\\-C_2\,\omega^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{C_2\,K_2}{M}+\frac{C_1\,\left(-K_2-K_1\right)}{M}\\ \frac{C_1\,K_2}{M}+\frac{C_2\,\left(-K_2-K_1\right)}{M}\end{pmatrix}$$

$\omega^2=\Lambda$ と置いて、

$$\begin{pmatrix}-C_1\,\Lambda\\-C_2\,\Lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{C_2\,K_2}{M}+\frac{C_1\,\left(-K_2-K_1\right)}{M}\\ \frac{C_1\,K_2}{M}+\frac{C_2\,\left(-K_2-K_1\right)}{M}\end{pmatrix}$$

ところで、下記の関係から、

$$\begin{pmatrix}-\Lambda & 0\\ 0 & -\Lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1\\C_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-C_1\,\Lambda\\-C_2\,\Lambda\end{pmatrix}$$

次式が得られる。

$$\begin{pmatrix}-\Lambda & 0\\ 0 & -\Lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1\\C_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{-K_2-K_1}{M} & \frac{K_2}{M}\\ \frac{K_2}{M} & \frac{-K_2-K_1}{M}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1\\C_2\end{pmatrix}$$

上式の左辺を右辺に移動し、

$$\begin{pmatrix}\frac{-K_2-K_1}{M}+\Lambda & \frac{K_2}{M}\\ \frac{K_2}{M} & \frac{-K_2-K_1}{M}+\Lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1\\C_2\end{pmatrix}=0 \tag{4.2.14}$$

上式で、C_1, C_2 の解が存在するためには、

$$det\begin{vmatrix} \frac{-K_2-K_1}{M}+\Lambda & \frac{K_2}{M} \\ \frac{K_2}{M} & \frac{-K_2-K_1}{M}+\Lambda \end{vmatrix}=0$$

上式から、

$$\left(\frac{-K_2-K_1}{M}+\Lambda\right)^2-\frac{K_2^2}{M^2}=0$$

上式の解を求めると、

$$[\Lambda=\frac{2\,K_2+K_1}{M},\Lambda=\frac{K_1}{M}]$$

$\omega^2=\Lambda$ の関係から、

$$[\omega^2=\frac{2\,K_2+K_1}{M},\omega^2=\frac{K_1}{M}]$$

(4.2.14) 式に $\omega^2=\frac{2\,K_2+K_1}{M}$ を代入し整理すると、

$$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{(C_2+C_1)\,K_2}{M}\\ \frac{(C_2+C_1)\,K_2}{M}\end{pmatrix}$$

上式から、$\omega^2=\frac{2\,K_2+K_1}{M}$ の時、$C_2=-C_1$ で、二つの質点は反対方向に動く。

(4.2.14) 式に $\omega^2=\frac{K_1}{M}$ を代入し整理すると、

$$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{(C_2-C_1)\,K_2}{M}\\ -\frac{(C_2-C_1)\,K_2}{M}\end{pmatrix}$$

上式から、$\omega^2=\frac{K_1}{M}$ の時、$C_2=C_1$ で、二つの質点は同じ方向に動く。

4.2.8 テンソル演算

Maxima のテンソル表現

```
kill(all);
MTA:matrix([A[1]],[A[2]],[A[3]]);
MTB:matrix([B[1]],[B[2]],[B[3]]);
TNL:matrix([l[11],l[12],l[13]],[l[21],
 l[22],l[23]],[l[31],l[32],l[33]]);
TNM:matrix([m[11],m[12],m[13]],[m[21],
 m[22],m[23]],[m[31],m[32],m[33]]);
TNN:matrix([n[11],n[12],n[13]],[n[21],
 n[22],n[23]],[n[31],n[32],n[33]]);
```

テンソルは行列と同じ記述方法である。

$$\overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{B} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix}$$

$$N = \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} \\ n_{21} & n_{22} & n_{23} \\ n_{31} & n_{32} & n_{33} \end{pmatrix}$$

(1) テンソルの内積

```
kill(all);
TNM.MTA;
```

テンソルの内積は、ベクトルや行列の内積と同じ方法で得られる。

$$M\,\overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} A_3\,m_{13} + A_2\,m_{12} + A_1\,m_{11} \\ A_3\,m_{23} + A_2\,m_{22} + A_1\,m_{21} \\ A_3\,m_{33} + A_2\,m_{32} + A_1\,m_{31} \end{pmatrix}$$

(2) テンソルの分配則

```
TN11:TNM.(MTA+MTB);
TN12:TNM.MTA+TNM.MTB;
expand(TN11-TN12);
```

$$M\,\left(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}\right) = M\,\overrightarrow{A} + M\,\overrightarrow{B}$$

(3) テンソルとスカラーとの内積

```
TN21:TNM.(k*MTA);
TN22:k*(TNM.MTA);
expand(TN21-TN22);
```

$$M\,\left(k\,\overrightarrow{A}\right) = k\,\left(M\,\overrightarrow{A}\right)$$

(4) テンソルとベクトルとの内積

```
TN31:TNL.TNM;
TN32:expand(TNM.(TNL.MTA));
TN33:expand((TNM.TNL).MTA);
expand(TN32-TN33);
```

$$M\,\left(L\,\overrightarrow{A}\right) = (M\,L)\,\overrightarrow{A}$$

4.2.9　直交座標系のベクトル・テンソルの座標変換

座標変換行列

xyz 座標の各座標の単位ベクトルを $\vec{i}$、$\vec{j}$、$\vec{k}$ とし、$x'y'z'$ 座標の各座標の単位ベクトルを $\vec{e_1}$、$\vec{e_2}$、$\vec{e_3}$ とする。この関係を下図に示す。

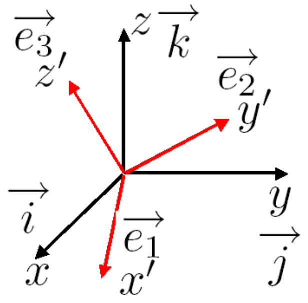


図 4.2.1: 座標変換

関係式は、

$$
\begin{aligned}
\vec{e_1} &= \left(\vec{e_1}\cdot\vec{i}\right)\vec{i} + \left(\vec{e_1}\cdot\vec{j}\right)\vec{j} + \left(\vec{e_1}\cdot\vec{k}\right)\vec{k} \\
&= l_{11}\,\vec{i} + l_{12}\,\vec{j} + l_{13}\,\vec{k} \\
\vec{e_2} &= \left(\vec{e_2}\cdot\vec{i}\right)\vec{i} + \left(\vec{e_2}\cdot\vec{j}\right)\vec{j} + \left(\vec{e_2}\cdot\vec{k}\right)\vec{k} \\
&= l_{21}\,\vec{i} + l_{22}\,\vec{j} + l_{23}\,\vec{k} \\
\vec{e_3} &= \left(\vec{e_3}\cdot\vec{i}\right)\vec{i} + \left(\vec{e_3}\cdot\vec{j}\right)\vec{j} + \left(\vec{e_3}\cdot\vec{k}\right)\vec{k} \\
&= l_{31}\,\vec{i} + l_{32}\,\vec{j} + l_{33}\,\vec{k}
\end{aligned}
$$

上式をベクトル表記すると、下記となる。ここで、座標変換行列：L とする。

$$
\begin{pmatrix}\vec{e_1}\\ \vec{e_2}\\ \vec{e_3}\end{pmatrix} = L \begin{pmatrix}\vec{i}\\ \vec{j}\\ \vec{k}\end{pmatrix},\quad L = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13}\\ l_{21} & l_{22} & l_{23}\\ l_{31} & l_{32} & l_{33}\end{pmatrix} \tag{4.2.15}
$$

```
TN71:transpose(TNL).TNL;
EV1:TNL.matrix([1],[0],[0]);
EV2:TNL.matrix([0],[1],[0]);
EV3:TNL.matrix([0],[0],[1]);
TR11:EV1.EV1=1;
TR12:EV2.EV2=1;
TR13:EV3.EV3=1;
TR14:EV1.EV2=0;
TR15:EV2.EV3=0;
TR16:EV3.EV1=0;
```

```
TR110:solve(TR11,l[31]^2)[1];
TR120:solve(TR12,l[32]^2)[1];
TR130:solve(TR13,l[33]^2)[1];
TR140:solve(TR14,l[11]*l[12])[1];
TR150:solve(TR15,l[12]*l[13])[1];
TR160:solve(TR16,l[11]*l[13])[1];
subst([TR110,TR120,TR130,TR140,TR150,
 TR160],TN71);
```

また、下記の関係がある。

$$
\begin{pmatrix}\vec{i}\\ \vec{j}\\ \vec{k}\end{pmatrix} = L^T \begin{pmatrix}\vec{e_1}\\ \vec{e_2}\\ \vec{e_3}\end{pmatrix}
$$

即ち、

$$
\begin{aligned}
\vec{i} &= l_{11}\vec{e_1} + l_{21}\vec{e_2} + l_{31}\vec{e_3}\\
\vec{j} &= l_{12}\vec{e_1} + l_{22}\vec{e_2} + l_{32}\vec{e_3}\\
\vec{k} &= l_{13}\vec{e_1} + l_{23}\vec{e_2} + l_{33}\vec{e_3}
\end{aligned}
$$

この直交座標系の単位ベクトル：$\vec{i}$、$\vec{j}$、$\vec{k}$ の内積から下記の関係を得る。

$$
\begin{aligned}
&l_{31}^2 + l_{21}^2 + l_{11}^2 = 1\\
&l_{32}^2 + l_{22}^2 + l_{12}^2 = 1\\
&l_{33}^2 + l_{23}^2 + l_{13}^2 = 1\\
&l_{31}\,l_{32} + l_{21}\,l_{22} + l_{11}\,l_{12} = 0\\
&l_{32}\,l_{33} + l_{22}\,l_{23} + l_{12}\,l_{13} = 0\\
&l_{31}\,l_{33} + l_{21}\,l_{23} + l_{11}\,l_{13} = 0
\end{aligned} \tag{4.2.16}
$$

上式を $L^T L$ に代入すると下記の単位マトリクスとなる。

$$
L^T L = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}
$$

ベクトルの座標変換

以上から、ベクトルの座標変換は次式で得られる。

$$\overrightarrow{A'} = L\,\overrightarrow{A} \tag{4.2.17}$$

テンソルの座標変換

```
TN51:MTA.transpose(MTB);
TN52:TNL.MTA;
TN53:TNL.MTB;
TN54:transpose(MTB).transpose(TNL);
TN55:transpose(TN53);
TN55-TN54;
TN56:TN52.TN54;
TN57:(TNL.TN51).transpose(TNL);
expand(TN56-TN57);
```

テンソル：C を下記のベクトル：$\overrightarrow{A}$ とベクトル：$\overrightarrow{B}$ の転置行列の内積で表現したものとする。

$$C = \overrightarrow{A}\,\overrightarrow{B}^T$$

このテンソル：C の座標変換を行う。ベクトル：$\overrightarrow{A}$ とベクトル：$\overrightarrow{B}$ の座標変換は、座標変換行列：L とすると、

$$\overrightarrow{A'} = L\overrightarrow{A}, \quad \overrightarrow{B'} = L\overrightarrow{B},$$

上式から、座標変換した C' は、

$$\overrightarrow{C'} = \overrightarrow{A'}\,\overrightarrow{B'}^T$$

ところで、

$$\overrightarrow{B'}^T = \overrightarrow{B}^T L^T$$

以上から、

$$\overrightarrow{C'} = L\overrightarrow{A}\,\overrightarrow{B}^T L^T = L\,C\,L^T \tag{4.2.18}$$

4.2.10 対称行列の対角化

下記の簡単な例で、正規行列を対角化する手順を示す。ここで正規行列：A は下記の関係が成り立つときである。

$$A\,A^T = A^T\,A$$

```
kill(all);
TNF:matrix([2,1],[1,2]);
X1:matrix([x[1]],[x[2]]);
EQ1:TNF.X1=\Lambda*X1;
TNF=ident(2)*\Lambda;
EQ2:%-rhs(%);
determinant(lhs(%))=0;
R1:solve(%,\Lambda);
TNFM1:invert(TNF);
TNFM1.EQ1;
EQ3:lhs(EQ2).X1=0;
subst([R1[1]],EQ3);
X2:c[1]*matrix([1],[1]);
X3:c[2]*matrix([1],[-1]);
TNL1:1/sqrt(2)*matrix([1,1],[1,-1]);
TNL2:invert(TNL1);
TNL2.TNF.TNL1;
```

下記の行列を対角化する。

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

上記行列は下記に示すように正規行列である。

$$A\,A^T = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad A^T\,A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

固有値：Λ を導入し、下記の方程式とする。

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \tag{4.2.19}$$

上式を次式とし、

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & \Lambda \end{pmatrix}$$

右辺を左辺に移項し、

$$\begin{pmatrix} 2-\Lambda & 1 \\ 1 & 2-\Lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

上式の左辺の行列式をとり、

$$det\begin{vmatrix} 2-\Lambda & 1 \\ 1 & 2-\Lambda \end{vmatrix} = (2-\Lambda)^2 - 1 = 0$$

上式の解は、

$$[\Lambda = 3, \Lambda = 1]$$

(4.2.19) 式から、

$$\begin{pmatrix} x_1\ (2-\Lambda)+x_2 \\ x_2\ (2-\Lambda)+x_1 \end{pmatrix} = 0 \qquad (4.2.20)$$

(4.2.20) 式に $\Lambda = 3$ を代入し、

$$\begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix} = 0$$

上式から、固有ベクトルは、

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Lambda = 1$ の場合、同様に固有ベクトルは、

$$c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

単位ベクトルからなる固有ベクトルを並べ、

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

次式により対角化できる。

$$P^{-1}\,A\,P = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

次に Maxima の下記の関数を使用した方法 [1] を示す。

$$eigenvectors(\text{行列})$$

上記の処理の結果を下記に示す。リストの一つ目の要素が、固有値と解空間の次元を表している。二つ目の要素は固有ベクトルである。

[[[固有値のリスト][解空間の次元のリスト]]
[固有ベクタのリスト]]

$$gramschmidt(\text{行列})$$

上記の処理の結果として、線型独立なベクトルの組が与えられたとき、ベクトルのノルムが 1 で、どの二つも互いに直交しているようなベクトルの組を作り出す。

以下に例題を示す。

```
kill(all);
A:matrix([2,1],[1,2]);
A.transpose(A)=transpose(A).A;
eigenvectors(A);
n : length(A);
B : eigenvectors(A);
C : zeromatrix(n, n);
B1:transpose(B[2][1][1]);
B2:transpose(B[2][2][1]);
Q:addcol(B1,B2);
m : length(Q);
B : transpose(Q);
n : length(B);
C : gramschmidt(B);
D : zeromatrix(n, m);
for i:1 thru n do
  (D[i] : unitvector(C[i]));
P:transpose(D);
P1:ratsimp(invert(P));
P1.A.P;
ratsimp(%);
```

前記と同じ行列を対角化する。

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$eigenvectors$ 関数の結果は、

$$[[[3,1],[1,1]],[[[1,1]],[[1,-1]]]]$$

変換行列：P は、

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

A の対角化した結果は、

$$P^{-1}\,A\,P = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

[1]足立健朗：行列計算における数式処理ソフト　maxima の利用について、http://www.yo.rim.or.jp/ kenrou/maxima/maxlin.pdf [17]), P.87 10.2. 対称行列の対角化

```
kill(all);
A:matrix([-21,4,7],[4,-6,28],[7,28,27]);
A.transpose(A)=transpose(A).A;
eigenvectors(A);
n : length(A);
B : eigenvectors(A);
C : zeromatrix(n, n);
B1:transpose(B[2][1][1]);
B2:transpose(B[2][2][1]);
B3:transpose(B[2][2][2]);
Q:addcol(B1,B2,B3);
m : length(Q);
B : transpose(Q);
n : length(B);
C : gramschmidt(B);
D : zeromatrix(n, m);
for i:1 thru n do
  (D[i] : unitvector(C[i]));
P:transpose(D);
P1:ratsimp(invert(P));
P1.A.P;
ratsimp(%);
```

下記の行列を対角化する。

$$A=\begin{pmatrix}-21 & 4 & 7\\ 4 & -6 & 28\\ 7 & 28 & 27\end{pmatrix}$$

$eigenvectors$ 関数の結果は、

$$[[[44,-22],[1,2]],[[[1,4,7]],[[1,0,-\frac{1}{7}],[0,1,-\frac{4}{7}]]]]$$

変換行列：P は、

$$P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{66}} & \frac{7}{5\sqrt{2}} & -\frac{2}{5\sqrt{33}}\\ \frac{4}{\sqrt{66}} & 0 & \frac{5}{\sqrt{33}}\\ \frac{7}{\sqrt{66}} & -\frac{1}{5\sqrt{2}} & -\frac{14}{5\sqrt{33}}\end{pmatrix}$$

A の対角化した結果は、

$$P^{-1}\,A\,P=\begin{pmatrix}44 & 0 & 0\\ 0 & -22 & 0\\ 0 & 0 & -22\end{pmatrix}$$

```
kill(all);
A:matrix([1,0,1],[0,1,0],[1,0,1]);
A.transpose(A)=transpose(A).A;
eigenvectors(A);
n : length(A);
B : eigenvectors(A);
C : zeromatrix(n, n);
B1:transpose(B[2][1][1]);
B2:transpose(B[2][2][1]);
B3:transpose(B[2][3][1]);
Q:addcol(B1,B2,B3);
m : length(Q);
B : transpose(Q);
n : length(B);
C : gramschmidt(B);
D : zeromatrix(n, m);
for i:1 thru n do
  (D[i] : unitvector(C[i]));
P:transpose(D);
P1:ratsimp(invert(P));
P1.A.P;
ratsimp(%);
```

下記の行列を対角化する。

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$eigenvectors$ 関数の結果は、

$$[[[1,2,0],[1,1,1]],[[[0,1,0]],[[1,0,1]],[[1,0,-1]]]]$$

変換行列：P は、

$$P=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

A の対角化した結果は、

$$P^{-1}\,A\,P=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

4.2.11　テンソルの不変量

トレース

```
TN57:(TNL.TNM).transpose(TNL);
TN571:expand(TN57[1][1]+TN57[2][2]
 +TN57[3][3]);
TN572:expand(subst([TR110,TR120,TR130,
 TR140*m[12],TR150*m[23],TR160*m[13]],
 TN571));
TN573:expand(subst([TR140*m[21],
 TR150*m[32],TR160*m[31]],TN572));
load ("nchrpl");
mattrace(TNM);
```

行列の対角項の和 : トレースが不変であることを示す。行列 : M を座標変換行列 : L で変換すると、

$$M' = L\,M\,L^T$$

座標変換した行列 : M' の対角項の和は下記となり、(4.2.16) 式の関係式を代入すると、

$$\begin{aligned}
&tr\,(M') = \\
&l_{33}^2\,m_{33} + l_{23}^2\,m_{33} + l_{13}^2\,m_{33} + l_{32}\,m_{32}\,l_{33} + m_{23}\,l_{32}\,l_{33} \\
&+ l_{31}\,m_{31}\,l_{33} + m_{13}\,l_{31}\,l_{33} + l_{22}\,l_{23}\,m_{32} + l_{12}\,l_{13}\,m_{32} \\
&+ m_{22}\,l_{32}^2 + m_{21}\,l_{31}\,l_{32} + m_{12}\,l_{31}\,l_{32} + l_{21}\,l_{23}\,m_{31} \\
&+ l_{11}\,l_{13}\,m_{31} + m_{11}\,l_{31}^2 + l_{22}\,l_{23}\,m_{23} + l_{12}\,l_{13}\,m_{23} \\
&+ m_{13}\,l_{21}\,l_{23} + l_{22}^2\,m_{22} + l_{12}^2\,m_{22} + l_{21}\,m_{21}\,l_{22} \\
&+ m_{12}\,l_{21}\,l_{22} + l_{11}\,l_{12}\,m_{21} + m_{11}\,l_{21}^2 + l_{11}\,l_{13}\,m_{13} \\
&+ l_{11}\,l_{12}\,m_{12} + l_{11}^2\,m_{11} \\
&= m_{33} + m_{22} + m_{11} \\
&= tr\,(M)
\end{aligned}$$

座標変換しても、行列の対角項の和は不変である。

行列式の不変量

```
determinant(TNM);
'TNL*TNM*TNL^(T);
```

座標変換した行列 : M' の行列式は元の行列 : M の行列式と等しい。

$$\begin{aligned}
det\,|M'| &= det\,\left|L\,M\,L^T\right| \\
&= det\,|L|\;det\,|M|\;det\,\left|L^T\right| \\
&= det\,\left|L^T\,L\right|\;det\,|M| \\
&= det\,|\,M\,|
\end{aligned}$$

テンソルの不変量まとめ

```
kill(all);
load ("nchrpl");
TN61:matrix([\sigma[1],0,0],
 [0,\sigma[2],0],[0,0,\sigma[3]]);
TN62:matrix([\sigma,0,0],[0,\sigma,0],
 [0,0,\sigma]);
TN63:TN61-TN62;
TN64:partfrac(expand(determinant(TN63)),
 \sigma);
TRA1:coeff(TN64,\sigma^2);
TRA2:-expand(coeff(TN64,\sigma));
TN61.TN61;
TRA1^2-mattrace(%);
expand(%/2);
TRA3:last(TN64);
determinant(TN61);
```

下記の対角行列 : M について、

$$M = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$$

σ を導入し、下記の行列式を考え、

$$\begin{vmatrix} \sigma_1 - \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 - \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 - \sigma \end{vmatrix} = 0$$

上式を解いて、

$$\begin{aligned}
-\sigma^3 &+ (\sigma_3 + \sigma_2 + \sigma_1)\,\sigma^2 \\
&+ ((-\sigma_2 - \sigma_1)\,\sigma_3 - \sigma_1\,\sigma_2)\,\sigma \\
&+ \sigma_1\,\sigma_2\,\sigma_3 = 0
\end{aligned}$$

σ^2 の係数は、

$$\text{第一不変量} = \sigma_3 + \sigma_2 + \sigma_1$$

上記はトレースの項で不変量である。

σ の係数は、

$$\text{第二不変量} = \sigma_2\,\sigma_3 + \sigma_1\,\sigma_3 + \sigma_1\,\sigma_2$$

上記は下記から不変量である。

$$M^2 = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\,\left((tr\,(M))^2 - tr\,\left(M^2\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\,\left((\sigma_3 + \sigma_2 + \sigma_1)^2 - \sigma_3^2 - \sigma_2^2 - \sigma_1^2\right) \\
&= \sigma_2\,\sigma_3 + \sigma_1\,\sigma_3 + \sigma_1\,\sigma_2
\end{aligned}$$

$$\text{第三不変量} = \sigma_1\,\sigma_2\,\sigma_3 = det\,|\,M\,|$$

上記は行列式の不変量から不変量である。

4.3　ベクトルの微分

4.3.1　ベクトルの微分

ベクトル：$\overrightarrow{A}$ は s の変数とする。s が Δs 変化したとき、$\overrightarrow{A}$ も $\Delta\overrightarrow{A}$ 変化するとする。このとき、$\overrightarrow{A}$ の微分は、

$$\frac{d}{d\,s}\,\overrightarrow{A} = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\left(\overrightarrow{A}+\Delta\overrightarrow{A}\right)-\overrightarrow{A}}{\Delta s} = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\overrightarrow{A}}{\Delta s}$$

ベクトル和の微分

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{d\,s}\left(\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}\right)\\
&\quad=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\left(\left(\overrightarrow{A}+\Delta\overrightarrow{A}\right)+\left(\overrightarrow{B}+\Delta\overrightarrow{B}\right)\right)-\left(\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}\right)}{\Delta s}\\
&\quad=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\left(\Delta\overrightarrow{A}+\Delta\overrightarrow{B}\right)}{\Delta s}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\overrightarrow{A}}{\Delta s}+\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\overrightarrow{B}}{\Delta s}\\
&\quad=\frac{d}{d\,s}\,\overrightarrow{A}+\frac{d}{d\,s}\,\overrightarrow{B}
\end{aligned} \tag{4.3.1}$$

ベクトルの内積の微分

(4.1.3) 式のベクトルの内積の分配則から、

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{d\,s}\left(\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}\right)\\
&\quad=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\left(\left(\overrightarrow{A}+\Delta\overrightarrow{A}\right)\cdot\left(\overrightarrow{B}+\Delta\overrightarrow{B}\right)\right)-\left(\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}\right)}{\Delta s}\\
&\quad=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\left(\Delta\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}+\overrightarrow{A}\cdot\Delta\overrightarrow{B}\right)}{\Delta s}\\
&\quad=\left(\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\overrightarrow{A}}{\Delta s}\right)\cdot\overrightarrow{B}+\overrightarrow{A}\cdot\left(\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\overrightarrow{B}}{\Delta s}\right)\\
&\quad=\left(\frac{d}{d\,s}\,\overrightarrow{A}\right)\cdot\overrightarrow{B}+\overrightarrow{A}\cdot\left(\frac{d}{d\,s}\,\overrightarrow{B}\right)
\end{aligned} \tag{4.3.2}$$

ベクトルの外積の微分

(4.1.5) 式のベクトルの外積の分配則から、

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{d\,s}\left(\overrightarrow{A}\times\overrightarrow{B}\right)\\
&\quad=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\left(\left(\overrightarrow{A}+\Delta\overrightarrow{A}\right)\times\left(\overrightarrow{B}+\Delta\overrightarrow{B}\right)\right)-\left(\overrightarrow{A}\times\overrightarrow{B}\right)}{\Delta s}\\
&\quad=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\left(\Delta\overrightarrow{A}\times\overrightarrow{B}+\overrightarrow{A}\times\Delta\overrightarrow{B}\right)}{\Delta s}\\
&\quad=\left(\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\overrightarrow{A}}{\Delta s}\right)\times\overrightarrow{B}+\overrightarrow{A}\times\left(\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\overrightarrow{B}}{\Delta s}\right)\\
&\quad=\left(\frac{d}{d\,s}\,\overrightarrow{A}\right)\times\overrightarrow{B}+\overrightarrow{A}\times\left(\frac{d}{d\,s}\,\overrightarrow{B}\right)
\end{aligned} \tag{4.3.3}$$

4.3.2　物質微分 (時間微分)

まず、時間に関係しているベクトルの微分について、位置ベクトル：$\overrightarrow{r}$、時間：t とすると、速度：$\overrightarrow{V}$ は、

$$\overrightarrow{V}=\frac{d}{d\,t}\overrightarrow{r}$$

変数：α が時間と位置により変化するとすると、

$$\alpha=f(\overrightarrow{r},\,t)$$

上式を時間：t で微分すると、

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\,t}\alpha =&\frac{\partial}{\partial\,t}\alpha+\frac{d}{d\,t}\overrightarrow{r}\frac{\partial}{\partial\,\overrightarrow{r}}f(\overrightarrow{r},\,t)\\ =&\frac{\partial}{\partial\,t}\alpha+\overrightarrow{V}\frac{\partial}{\partial\,\overrightarrow{r}}f(\overrightarrow{r},\,t)\\ =&\frac{\partial}{\partial\,t}\alpha+\overrightarrow{V}\frac{\partial}{\partial\,\overrightarrow{r}}\alpha\end{aligned}$$

上式から、

$$\frac{d}{d\,t}\alpha=\frac{\partial}{\partial\,t}\alpha+\overrightarrow{V}\nabla\alpha \tag{4.3.4}$$

いま、(4.3.4) 式で $\alpha\rightarrow\overrightarrow{A}$ と置くと、

$$\frac{d}{d\,t}\overrightarrow{A}=\frac{\partial}{\partial\,t}\overrightarrow{A}+\overrightarrow{V}\nabla\overrightarrow{A} \tag{4.3.5}$$

```
kill(all);
MTR:matrix([x],[y],[z]);
MTA:matrix([A[x]],[A[y]],[A[z]]);
depends([x,y,z],[t]);
depends(\alpha,[x,y,z,t]);
depends([A],[x,y,z,t]);
'diff(\alpha,t,1)=diff(\alpha,t,1);
subst(['diff(x,t,1)=u,'diff(y,t,1)=v,
 'diff(z,t,1)=w],%);
'diff(MTA,t,1)=diff(MTA,t,1);
subst(['diff(x,t,1)=u,'diff(y,t,1)=v,
 'diff(z,t,1)=w],%);
```

α が x,y,z,t の関数であるとし、更に x,y,z が t の関数であるとし、α を時間で微分すると、

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\,t}\,\alpha=&\left(\frac{d}{d\,z}\,\alpha\right)\,\left(\frac{d}{d\,t}\,z\right)+\left(\frac{d}{d\,y}\,\alpha\right)\,\left(\frac{d}{d\,t}\,y\right)\\ &+\left(\frac{d}{d\,x}\,\alpha\right)\,\left(\frac{d}{d\,t}\,x\right)+\frac{d}{d\,t}\,\alpha\end{aligned}$$

上式から、(4.3.4) 式と同じ次式が得られた。

$$\frac{d}{d\,t}\,\alpha=\left(\frac{d}{d\,z}\,\alpha\right)\,w+\left(\frac{d}{d\,y}\,\alpha\right)\,v+\left(\frac{d}{d\,x}\,\alpha\right)\,u+\frac{d}{d\,t}\,\alpha$$

同様にして、

$$\overrightarrow{A}=\begin{pmatrix}A_x\\A_y\\A_z\end{pmatrix}$$

とし、$\overrightarrow{A}$ が x,y,z,t の関数であるとし、更に x,y,z が t の関数であるとし、$\overrightarrow{A}$ を時間で微分すると、

$$\begin{aligned}&\frac{d}{d\,t}\,\begin{pmatrix}A_x\\A_y\\A_z\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}\left(\frac{d}{d\,z}\,A_x\right)\,\left(\frac{d}{d\,t}\,z\right)+\left(\frac{d}{d\,y}\,A_x\right)\,\left(\frac{d}{d\,t}\,y\right)+\left(\frac{d}{d\,t}\,x\right)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,A_x\right)+\frac{d}{d\,t}\,A_x\\ \left(\frac{d}{d\,z}\,A_y\right)\,\left(\frac{d}{d\,t}\,z\right)+\left(\frac{d}{d\,t}\,y\right)\,\left(\frac{d}{d\,y}\,A_y\right)+\left(\frac{d}{d\,t}\,x\right)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,A_y\right)+\frac{d}{d\,t}\,A_y\\ \left(\frac{d}{d\,t}\,z\right)\,\left(\frac{d}{d\,z}\,A_z\right)+\left(\frac{d}{d\,t}\,y\right)\,\left(\frac{d}{d\,y}\,A_z\right)+\left(\frac{d}{d\,t}\,x\right)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,A_z\right)+\frac{d}{d\,t}\,A_z\end{pmatrix}\end{aligned}$$

上式で、$\frac{d}{d\,t}\,x\;=\;u,\,\frac{d}{d\,t}\,y\;=\;v,\,\frac{d}{d\,t}\,z\;=\;w$ とすると、(4.3.5) 式と同じ次式が得られた。

$$\begin{aligned}&\frac{d}{d\,t}\,\begin{pmatrix}A_x\\A_y\\A_z\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}w\,\left(\frac{d}{d\,z}\,A_x\right)+v\,\left(\frac{d}{d\,y}\,A_x\right)+u\,\left(\frac{d}{d\,x}\,A_x\right)+\frac{d}{d\,t}\,A_x\\ w\,\left(\frac{d}{d\,z}\,A_y\right)+v\,\left(\frac{d}{d\,y}\,A_y\right)+u\,\left(\frac{d}{d\,x}\,A_y\right)+\frac{d}{d\,t}\,A_y\\ w\,\left(\frac{d}{d\,z}\,A_z\right)+v\,\left(\frac{d}{d\,y}\,A_z\right)+u\,\left(\frac{d}{d\,x}\,A_z\right)+\frac{d}{d\,t}\,A_z\end{pmatrix}\end{aligned}$$

4.3.3 勾配 (grad)

勾配 (grad) はスカラーの関数：f の下記を計算する。これは勾配のベクトルを表している。

$$grad(f) = \frac{d}{d\,x}f\,\vec{i} + \frac{d}{d\,y}f\,\vec{j} + \frac{d}{d\,z}f\,\vec{k} \qquad (4.3.6)$$

Maxima の勾配 (grad) の実行方法は下記の要領で行う。まず、vect を load しておく。

$$grad(\text{スカラーの関数})$$

この後、下記を実行し、微分表示とする。

$$express(\%)$$

微分を実行するには、更に下記を実行する。

$$ev(\%, diff)$$

下記に例を示す。

```
kill(all);
load("vect")$
depends([f],[x,y,z]);
NAB:grad(f);
transpose(express(%));
```

$$\mathrm{grad}\,(f) = \begin{pmatrix} \frac{d}{d\,x}\,f \\ \frac{d}{d\,y}\,f \\ \frac{d}{d\,z}\,f \end{pmatrix} \qquad (4.3.7)$$

f として、具体的な関数の例とすると、

```
E1:f=x^2+y^2;
grad(rhs(E1));
transpose(express(%));
ev(%,diff);
```

$$f = y^2 + x^2$$

$$\mathrm{grad}\,(y^2 + x^2) = \begin{pmatrix} \frac{d}{d\,x}\,(y^2+x^2) \\ \frac{d}{d\,y}\,(y^2+x^2) \\ \frac{d}{d\,z}\,(y^2+x^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,x \\ 2\,y \\ 0 \end{pmatrix}$$

4.3.4 発散 (div)

発散 (div) はベクトルの関数：$\vec{V}$ の下記を計算する。

$$div(\vec{V}) = \frac{d}{d\,x}V_x + \frac{d}{d\,y}V_y + \frac{d}{d\,z}V_z \qquad (4.3.8)$$

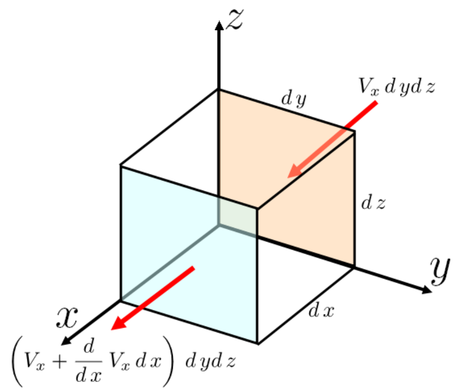


図 4.3.1: $d\,y\,d\,z$ を通過する流体の流量変化

上図から x 軸方向の $d\,y\,d\,z$ を通過する流体の流量変化は $\frac{d}{d\,x}V_x\,d\,x\,d\,y\,d\,z$ であり、単位容積あたり $\frac{d}{d\,x}V_x$ となる。他軸方向も同様に考えると、(4.3.8) 式は流場や電磁気場のわき出し量を表している。
Maxima の発散 (div) の実行方法は下記の要領で行う。まず、vect を load しておく。

$$div(\text{ベクトルの関数})$$

ここで Maxima のベクトルの微分で使うベクトルの関数は、行の行列で表す必要がある。この後、下記を実行し、微分表示とする。

$$express(\%)$$

微分を実行するには、更に下記を実行する。

$$ev(\%, diff)$$

下記に例を示す。

```
kill(all);
load("vect")$
depends([V],[x,y,z]);
MTA:matrix([V[x]],[V[y]],[V[z]]);
div(transpose(MTA)[1]);
express(%);
ev(%,diff);
```

下記のベクトル関数で、

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}$$

発散 (div) を求めると、

$$\mathrm{div}\,([V_x, V_y, V_z]) = \frac{d}{d\,z}V_z + \frac{d}{d\,y}V_y + \frac{d}{d\,x}V_x \qquad (4.3.9)$$

```
P1:-m/sqrt(x^2+y^2+z^2);
VX1:diff(P1,x,1);
VY1:diff(P1,y,1);
VZ1:diff(P1,z,1);
MTV:matrix([VX1],[VY1],[VZ1]);
div(transpose(MTV)[1]);
express(%);
ev(%,diff);
factor(%);
```

下記のわき出しの速度ポテンシャル[1]：Φ で、

$$[\Phi=-\frac{m}{\sqrt{z^2+y^2+x^2}}$$

流速ベクトル：$\overrightarrow{V}$ を求めると、

$$\overrightarrow{V}=\begin{pmatrix}\frac{m\,x}{(z^2+y^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\\\frac{m\,y}{(z^2+y^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\\\frac{m\,z}{(z^2+y^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\end{pmatrix}$$

上記の発散 (div) を求めると、

$$\begin{aligned}&\mathrm{div}\left([\frac{m\,x}{(z^2+y^2+x^2)^{\frac{3}{2}}},\frac{m\,y}{(z^2+y^2+x^2)^{\frac{3}{2}}},\right.\\&\left.\frac{m\,z}{(z^2+y^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}]\right)\\&=\frac{d}{d\,z}\frac{m\,z}{(z^2+y^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{d}{d\,y}\frac{m\,y}{(z^2+y^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\\&\quad+\frac{d}{d\,x}\frac{m\,x}{(z^2+y^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\\&=\frac{3\,m}{(z^2+y^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{3\,m\,z^2}{(z^2+y^2+x^2)^{\frac{5}{2}}}\\&\quad-\frac{3\,m\,y^2}{(z^2+y^2+x^2)^{\frac{5}{2}}}-\frac{3\,m\,x^2}{(z^2+y^2+x^2)^{\frac{5}{2}}}=0\end{aligned}$$

当然ながら、わき出しの速度ポテンシャル流場の原点以外の発散は零である。

```
P1:-m/(sqrt(x^2+y^2+z^2))^2;
VX1:diff(P1,x,1);
VY1:diff(P1,y,1);
VZ1:diff(P1,z,1);
MTV:matrix([VX1],[VY1],[VZ1]);
div(transpose(MTV)[1]);
express(%);
ev(%,diff);
factor(%);
```

下記の関数：Φ で、

$$\Phi=-\frac{m}{z^2+y^2+x^2}$$

ベクトル：$\overrightarrow{V}$ を下記とすると、

$$\overrightarrow{V}=\begin{pmatrix}\frac{2\,m\,x}{(z^2+y^2+x^2)^2}\\\frac{2\,m\,y}{(z^2+y^2+x^2)^2}\\\frac{2\,m\,z}{(z^2+y^2+x^2)^2}\end{pmatrix}$$

上記の発散 (div) を求めると、

$$\begin{aligned}&\mathrm{div}\left([\frac{2\,m\,x}{(z^2+y^2+x^2)^2},\frac{2\,m\,y}{(z^2+y^2+x^2)^2},\right.\\&\left.\frac{2\,m\,z}{(z^2+y^2+x^2)^2}]\right)\\&=\frac{d}{d\,z}\frac{2\,m\,z}{(z^2+y^2+x^2)^2}+\frac{d}{d\,y}\frac{2\,m\,y}{(z^2+y^2+x^2)^2}\\&\quad+\frac{d}{d\,x}\frac{2\,m\,x}{(z^2+y^2+x^2)^2}\\&=\frac{6\,m}{(z^2+y^2+x^2)^2}-\frac{8\,m\,z^2}{(z^2+y^2+x^2)^3}\\&\quad-\frac{8\,m\,y^2}{(z^2+y^2+x^2)^3}-\frac{8\,m\,x^2}{(z^2+y^2+x^2)^3}\\&=-\frac{2\,m}{(z^2+y^2+x^2)^2}\end{aligned}$$

零にはならない。

```
MTUVW:matrix([u],[v],[w]);
MTXYZ:matrix([x],[y],[z]);
TNL:matrix([l[11],l[12],l[13]],[l[21],
 l[22],l[23]],[l[31],l[32],l[33]]);
MTUVW=TNL.MTXYZ;
MTXYZ=transpose(TNL).rhs(%);
```

x,y,z 座標系の発散と u,v,w 座標系の発散について検討する。u,v,w 座標系は x,y,z 座標系から下記の変換マトリックスを用いて変換できる。

$$\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}l_{11}&l_{12}&l_{13}\\l_{21}&l_{22}&l_{23}\\l_{31}&l_{32}&l_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\tag{4.3.10}$$

また、その逆は、

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}l_{11}&l_{12}&l_{13}\\l_{21}&l_{22}&l_{23}\\l_{31}&l_{32}&l_{33}\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}\tag{4.3.11}$$

[1]溝口純敏：Maxima を使った流体力学基礎演習ノート　http://http://www9.plala.or.jp/alcwitchery/、第 6 章　3 次元完全流体、6.1.7 わき出し

```
depends([V],[u,v,w]);
MTUDU:diff(MTU1,u,1);
MTUDV:diff(MTU1,v,1);
MTUDW:diff(MTU1,w,1);
MTUD21:transpose(matrix(transpose(lhs(
 MTUDU))[1],transpose(lhs(MTUDV))[1],
 transpose(lhs(MTUDW))[1]));
MTUD22:transpose(matrix(transpose(rhs(
 MTUDU))[1],transpose(rhs(MTUDV))[1],
 transpose(rhs(MTUDW))[1]));
MTUD23:MTUD21=MTUD22;
MTVD3:subst([U[u]=V[x],U[v]=V[y],
 U[w]=V[z]],MTUD21);
MTVD31:TNL.MTVD3;
MTUD22-MTVD31;
```

ベクトル関数：$\overrightarrow{V}$ を x,y,z 座標系で表すと、

$$\overrightarrow{V}=\begin{pmatrix}V_x\\V_y\\V_z\end{pmatrix}$$

このときベクトル関数：$\overrightarrow{V}$ を u,v,w 座標系で表す $\overrightarrow{U}$ は次式で表せる。

$$\overrightarrow{U}=\begin{pmatrix}U_u\\U_v\\U_w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}l_{11}&l_{12}&l_{13}\\l_{21}&l_{22}&l_{23}\\l_{31}&l_{32}&l_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}V_x\\V_y\\V_z\end{pmatrix}$$

上式を u,v,w で微分すると、

$$\begin{pmatrix}\frac{d}{d\,u}\,U_u\\\frac{d}{d\,u}\,U_v\\\frac{d}{d\,u}\,U_w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}l_{13}\left(\frac{d}{d\,u}\,V_z\right)+l_{12}\left(\frac{d}{d\,u}\,V_y\right)+l_{11}\left(\frac{d}{d\,u}\,V_x\right)\\l_{23}\left(\frac{d}{d\,u}\,V_z\right)+l_{22}\left(\frac{d}{d\,u}\,V_y\right)+l_{21}\left(\frac{d}{d\,u}\,V_x\right)\\l_{33}\left(\frac{d}{d\,u}\,V_z\right)+l_{32}\left(\frac{d}{d\,u}\,V_y\right)+l_{31}\left(\frac{d}{d\,u}\,V_x\right)\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\frac{d}{d\,v}\,U_u\\\frac{d}{d\,v}\,U_v\\\frac{d}{d\,v}\,U_w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}l_{13}\left(\frac{d}{d\,v}\,V_z\right)+l_{12}\left(\frac{d}{d\,v}\,V_y\right)+l_{11}\left(\frac{d}{d\,v}\,V_x\right)\\l_{23}\left(\frac{d}{d\,v}\,V_z\right)+l_{22}\left(\frac{d}{d\,v}\,V_y\right)+l_{21}\left(\frac{d}{d\,v}\,V_x\right)\\l_{33}\left(\frac{d}{d\,v}\,V_z\right)+l_{32}\left(\frac{d}{d\,v}\,V_y\right)+l_{31}\left(\frac{d}{d\,v}\,V_x\right)\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\frac{d}{d\,w}\,U_u\\\frac{d}{d\,w}\,U_v\\\frac{d}{d\,w}\,U_w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}l_{13}\left(\frac{d}{d\,w}\,V_z\right)+l_{12}\left(\frac{d}{d\,w}\,V_y\right)+l_{11}\left(\frac{d}{d\,w}\,V_x\right)\\l_{23}\left(\frac{d}{d\,w}\,V_z\right)+l_{22}\left(\frac{d}{d\,w}\,V_y\right)+l_{21}\left(\frac{d}{d\,w}\,V_x\right)\\l_{33}\left(\frac{d}{d\,w}\,V_z\right)+l_{32}\left(\frac{d}{d\,w}\,V_y\right)+l_{31}\left(\frac{d}{d\,w}\,V_x\right)\end{pmatrix}$$

上式をまとまると、

$$\begin{pmatrix}\frac{d}{d\,u}\,U_u&\frac{d}{d\,v}\,U_u&\frac{d}{d\,w}\,U_u\\\frac{d}{d\,u}\,U_v&\frac{d}{d\,v}\,U_v&\frac{d}{d\,w}\,U_v\\\frac{d}{d\,u}\,U_w&\frac{d}{d\,v}\,U_w&\frac{d}{d\,w}\,U_w\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}l_{13}\left(\frac{d}{d\,u}\,V_z\right)+l_{12}\left(\frac{d}{d\,u}\,V_y\right)+l_{11}\left(\frac{d}{d\,u}\,V_x\right)&l_{13}\left(\frac{d}{d\,v}\,V_z\right)+l_{12}\left(\frac{d}{d\,v}\,V_y\right)+l_{11}\left(\frac{d}{d\,v}\,V_x\right)&l_{13}\left(\frac{d}{d\,w}\,V_z\right)+l_{12}\left(\frac{d}{d\,w}\,V_y\right)+l_{11}\left(\frac{d}{d\,w}\,V_x\right)\\l_{23}\left(\frac{d}{d\,u}\,V_z\right)+l_{22}\left(\frac{d}{d\,u}\,V_y\right)+l_{21}\left(\frac{d}{d\,u}\,V_x\right)&l_{23}\left(\frac{d}{d\,v}\,V_z\right)+l_{22}\left(\frac{d}{d\,v}\,V_y\right)+l_{21}\left(\frac{d}{d\,v}\,V_x\right)&l_{23}\left(\frac{d}{d\,w}\,V_z\right)+l_{22}\left(\frac{d}{d\,w}\,V_y\right)+l_{21}\left(\frac{d}{d\,w}\,V_x\right)\\l_{33}\left(\frac{d}{d\,u}\,V_z\right)+l_{32}\left(\frac{d}{d\,u}\,V_y\right)+l_{31}\left(\frac{d}{d\,u}\,V_x\right)&l_{33}\left(\frac{d}{d\,v}\,V_z\right)+l_{32}\left(\frac{d}{d\,v}\,V_y\right)+l_{31}\left(\frac{d}{d\,v}\,V_x\right)&l_{33}\left(\frac{d}{d\,w}\,V_z\right)+l_{32}\left(\frac{d}{d\,w}\,V_y\right)+l_{31}\left(\frac{d}{d\,w}\,V_x\right)\end{pmatrix}$$

上式は次式となる。

$$\begin{pmatrix}\frac{d}{d\,u}\,U_u&\frac{d}{d\,v}\,U_u&\frac{d}{d\,w}\,U_u\\\frac{d}{d\,u}\,U_v&\frac{d}{d\,v}\,U_v&\frac{d}{d\,w}\,U_v\\\frac{d}{d\,u}\,U_w&\frac{d}{d\,v}\,U_w&\frac{d}{d\,w}\,U_w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}l_{11}&l_{12}&l_{13}\\l_{21}&l_{22}&l_{23}\\l_{31}&l_{32}&l_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{d}{d\,u}\,V_x&\frac{d}{d\,v}\,V_x&\frac{d}{d\,w}\,V_x\\\frac{d}{d\,u}\,V_y&\frac{d}{d\,v}\,V_y&\frac{d}{d\,w}\,V_y\\\frac{d}{d\,u}\,V_z&\frac{d}{d\,v}\,V_z&\frac{d}{d\,w}\,V_z\end{pmatrix}\tag{4.3.12}$$

```
depends([V],[x,y,z]);
depends([x,y,z],[u,v,w]);
FXDU:'diff(V[x],u,1)=diff(V[x],u,1);
FXDV:'diff(V[x],v,1)=diff(V[x],v,1);
FXDW:'diff(V[x],w,1)=diff(V[x],w,1);
FYDU:'diff(V[y],u,1)=diff(V[y],u,1);
FYDV:'diff(V[y],v,1)=diff(V[y],v,1);
FYDW:'diff(V[y],w,1)=diff(V[y],w,1);
FZDU:'diff(V[z],u,1)=diff(V[z],u,1);
FZDV:'diff(V[z],v,1)=diff(V[z],v,1);
FZDW:'diff(V[z],w,1)=diff(V[z],w,1);
subst([FXDU,FXDV,FXDW],MTVD3);
subst([FYDU,FYDV,FYDW],%);
MTVD32:subst([FZDU,FZDV,FZDW],%);
MTVD33:MTVD3=MTVD32;
```

V_x,V_y,V_z を u,v,w で微分すると、

$$\frac{d}{d\,u}\,V_x=\left(\frac{d}{d\,z}\,V_x\right)\left(\frac{d}{d\,u}\,z\right)+\left(\frac{d}{d\,y}\,V_x\right)\left(\frac{d}{d\,u}\,y\right)+\left(\frac{d}{d\,u}\,x\right)\left(\frac{d}{d\,x}\,V_x\right)$$

$$\frac{d}{d\,v}\,V_x=\left(\frac{d}{d\,z}\,V_x\right)\left(\frac{d}{d\,v}\,z\right)+\left(\frac{d}{d\,y}\,V_x\right)\left(\frac{d}{d\,v}\,y\right)+\left(\frac{d}{d\,v}\,x\right)\left(\frac{d}{d\,x}\,V_x\right)$$

$$\frac{d}{d\,w}\,V_x=\left(\frac{d}{d\,z}\,V_x\right)\left(\frac{d}{d\,w}\,z\right)+\left(\frac{d}{d\,y}\,V_x\right)\left(\frac{d}{d\,w}\,y\right)+\left(\frac{d}{d\,w}\,x\right)\left(\frac{d}{d\,x}\,V_x\right)$$

$$\frac{d}{d\,u}\,V_y=\left(\frac{d}{d\,z}\,V_y\right)\left(\frac{d}{d\,u}\,z\right)+\left(\frac{d}{d\,u}\,y\right)\left(\frac{d}{d\,y}\,V_y\right)+\left(\frac{d}{d\,u}\,x\right)\left(\frac{d}{d\,x}\,V_y\right)$$

$$\frac{d}{d\,v}\,V_y=\left(\frac{d}{d\,z}\,V_y\right)\left(\frac{d}{d\,v}\,z\right)+\left(\frac{d}{d\,v}\,y\right)\left(\frac{d}{d\,y}\,V_y\right)+\left(\frac{d}{d\,v}\,x\right)\left(\frac{d}{d\,x}\,V_y\right)$$

$$\frac{d}{d\,w}\,V_y=\left(\frac{d}{d\,z}\,V_y\right)\left(\frac{d}{d\,w}\,z\right)+\left(\frac{d}{d\,w}\,y\right)\left(\frac{d}{d\,y}\,V_y\right)+\left(\frac{d}{d\,w}\,x\right)\left(\frac{d}{d\,x}\,V_y\right)$$

$$\frac{d}{d\,u}\,V_z=\left(\frac{d}{d\,u}\,z\right)\left(\frac{d}{d\,z}\,V_z\right)+\left(\frac{d}{d\,u}\,y\right)\left(\frac{d}{d\,y}\,V_z\right)+\left(\frac{d}{d\,u}\,x\right)\left(\frac{d}{d\,x}\,V_z\right)$$

$$\frac{d}{d\,v}\,V_z=\left(\frac{d}{d\,v}\,z\right)\left(\frac{d}{d\,z}\,V_z\right)+\left(\frac{d}{d\,v}\,y\right)\left(\frac{d}{d\,y}\,V_z\right)+\left(\frac{d}{d\,v}\,x\right)\left(\frac{d}{d\,x}\,V_z\right)$$

$$\frac{d}{d\,w}\,V_z=\left(\frac{d}{d\,w}\,z\right)\left(\frac{d}{d\,z}\,V_z\right)+\left(\frac{d}{d\,w}\,y\right)\left(\frac{d}{d\,y}\,V_z\right)+\left(\frac{d}{d\,w}\,x\right)\left(\frac{d}{d\,x}\,V_z\right)$$

上式を (4.3.12) 式右辺に代入すると、

$$
\begin{pmatrix} \frac{d}{d\,u}\,V_x & \frac{d}{d\,v}\,V_x & \frac{d}{d\,w}\,V_x \\ \frac{d}{d\,u}\,V_y & \frac{d}{d\,v}\,V_y & \frac{d}{d\,w}\,V_y \\ \frac{d}{d\,u}\,V_z & \frac{d}{d\,v}\,V_z & \frac{d}{d\,w}\,V_z \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} \left(\frac{d}{d\,z}\,V_x\right)\left(\frac{d}{d\,u}\,z\right)+\left(\frac{d}{d\,y}\,V_x\right)\left(\frac{d}{d\,u}\,y\right)+\left(\frac{d}{d\,u}\,x\right)\left(\frac{d}{d\,x}\,V_x\right) & \cdots & \left(\frac{d}{d\,z}\,V_x\right)\left(\frac{d}{d\,w}\,z\right)+\left(\frac{d}{d\,y}\,V_x\right)\left(\frac{d}{d\,w}\,y\right)+\left(\frac{d}{d\,w}\,x\right)\left(\frac{d}{d\,x}\,V_x\right) \\ \left(\frac{d}{d\,z}\,V_y\right)\left(\frac{d}{d\,u}\,z\right)+\left(\frac{d}{d\,u}\,y\right)\left(\frac{d}{d\,y}\,V_y\right)+\left(\frac{d}{d\,u}\,x\right)\left(\frac{d}{d\,x}\,V_y\right) & \cdots & \left(\frac{d}{d\,z}\,V_y\right)\left(\frac{d}{d\,w}\,z\right)+\left(\frac{d}{d\,w}\,y\right)\left(\frac{d}{d\,y}\,V_y\right)+\left(\frac{d}{d\,w}\,x\right)\left(\frac{d}{d\,x}\,V_y\right) \\ \left(\frac{d}{d\,u}\,z\right)\left(\frac{d}{d\,z}\,V_z\right)+\left(\frac{d}{d\,u}\,y\right)\left(\frac{d}{d\,y}\,V_z\right)+\left(\frac{d}{d\,u}\,x\right)\left(\frac{d}{d\,x}\,V_z\right) & \cdots & \left(\frac{d}{d\,w}\,z\right)\left(\frac{d}{d\,z}\,V_z\right)+\left(\frac{d}{d\,w}\,y\right)\left(\frac{d}{d\,y}\,V_z\right)+\left(\frac{d}{d\,w}\,x\right)\left(\frac{d}{d\,x}\,V_z\right) \end{pmatrix} \tag{4.3.13}
$$

```
MTXYZ1:MTXYZ=transpose(TNL).MTUVW;
MTXYZ10:diff(MTXYZ1,u,1);
MTXYZ11:lhs(MTXYZ10)[1][1]=
 rhs(MTXYZ10)[1][1];
MTXYZ12:lhs(MTXYZ10)[2][1]=
 rhs(MTXYZ10)[2][1];
MTXYZ13:lhs(MTXYZ10)[3][1]=
 rhs(MTXYZ10)[3][1];
MTXYZ20:diff(MTXYZ1,v,1);
MTXYZ21:lhs(MTXYZ20)[1][1]=
 rhs(MTXYZ20)[1][1];
MTXYZ22:lhs(MTXYZ20)[2][1]=
 rhs(MTXYZ20)[2][1];
MTXYZ23:lhs(MTXYZ20)[3][1]=
 rhs(MTXYZ20)[3][1];
MTXYZ30:diff(MTXYZ1,w,1);
MTXYZ31:lhs(MTXYZ30)[1][1]=
 rhs(MTXYZ30)[1][1];
MTXYZ32:lhs(MTXYZ30)[2][1]=
 rhs(MTXYZ30)[2][1];
MTXYZ33:lhs(MTXYZ30)[3][1]=
 rhs(MTXYZ30)[3][1];
subst([MTXYZ11,MTXYZ12,MTXYZ13],MTVD33);
subst([MTXYZ21,MTXYZ22,MTXYZ23],%);
```

```
MTUD41:subst([MTXYZ31,MTXYZ32,MTXYZ33],%);
MTUD4:subst([u=x,v=y,w=z],MTUD3);
MTUD4.transpose(TNL);
%-rhs(MTUD41);
MTUD21=TNL.MTUD4.transpose(TNL);
MTUD21[1][1]+MTUD21[2][2]+MTUD21[3][3]
 =MTUD4[1][1]+MTUD4[2][2]+MTUD4[3][3];
```

(4.3.11) 式から、

$$
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}
$$

上式を u, v, w で微分すると、

$$
\begin{pmatrix} \frac{d}{d\,u}\,x \\ \frac{d}{d\,u}\,y \\ \frac{d}{d\,u}\,z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} \\ l_{12} \\ l_{13} \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} \frac{d}{d\,v}\,x \\ \frac{d}{d\,v}\,y \\ \frac{d}{d\,v}\,z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{21} \\ l_{22} \\ l_{23} \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} \frac{d}{d\,w}\,x \\ \frac{d}{d\,w}\,y \\ \frac{d}{d\,w}\,z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{31} \\ l_{32} \\ l_{33} \end{pmatrix}
$$

上式を (4.3.13) 式に代入すると、

$$
\begin{pmatrix} \frac{d}{d\,u}\,V_x & \frac{d}{d\,v}\,V_x & \frac{d}{d\,w}\,V_x \\ \frac{d}{d\,u}\,V_y & \frac{d}{d\,v}\,V_y & \frac{d}{d\,w}\,V_y \\ \frac{d}{d\,u}\,V_z & \frac{d}{d\,v}\,V_z & \frac{d}{d\,w}\,V_z \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} l_{13}\left(\frac{d}{d\,z}\,V_x\right)+l_{12}\left(\frac{d}{d\,y}\,V_x\right)+l_{11}\left(\frac{d}{d\,x}\,V_x\right) & l_{23}\left(\frac{d}{d\,z}\,V_x\right)+l_{22}\left(\frac{d}{d\,y}\,V_x\right)+l_{21}\left(\frac{d}{d\,x}\,V_x\right) & l_{33}\left(\frac{d}{d\,z}\,V_x\right)+l_{32}\left(\frac{d}{d\,y}\,V_x\right)+l_{31}\left(\frac{d}{d\,x}\,V_x\right) \\ l_{13}\left(\frac{d}{d\,z}\,V_y\right)+l_{12}\left(\frac{d}{d\,y}\,V_y\right)+l_{11}\left(\frac{d}{d\,x}\,V_y\right) & l_{23}\left(\frac{d}{d\,z}\,V_y\right)+l_{22}\left(\frac{d}{d\,y}\,V_y\right)+l_{21}\left(\frac{d}{d\,x}\,V_y\right) & l_{33}\left(\frac{d}{d\,z}\,V_y\right)+l_{32}\left(\frac{d}{d\,y}\,V_y\right)+l_{31}\left(\frac{d}{d\,x}\,V_y\right) \\ l_{13}\left(\frac{d}{d\,z}\,V_z\right)+l_{12}\left(\frac{d}{d\,y}\,V_z\right)+l_{11}\left(\frac{d}{d\,x}\,V_z\right) & l_{23}\left(\frac{d}{d\,z}\,V_z\right)+l_{22}\left(\frac{d}{d\,y}\,V_z\right)+l_{21}\left(\frac{d}{d\,x}\,V_z\right) & l_{33}\left(\frac{d}{d\,z}\,V_z\right)+l_{32}\left(\frac{d}{d\,y}\,V_z\right)+l_{31}\left(\frac{d}{d\,x}\,V_z\right) \end{pmatrix}
$$

上式を整理すると、

$$
\begin{pmatrix} \frac{d}{d\,u}\,V_x & \frac{d}{d\,v}\,V_x & \frac{d}{d\,w}\,V_x \\ \frac{d}{d\,u}\,V_y & \frac{d}{d\,v}\,V_y & \frac{d}{d\,w}\,V_y \\ \frac{d}{d\,u}\,V_z & \frac{d}{d\,v}\,V_z & \frac{d}{d\,w}\,V_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{d\,x}\,V_x & \frac{d}{d\,y}\,V_x & \frac{d}{d\,z}\,V_x \\ \frac{d}{d\,x}\,V_y & \frac{d}{d\,y}\,V_y & \frac{d}{d\,z}\,V_y \\ \frac{d}{d\,x}\,V_z & \frac{d}{d\,y}\,V_z & \frac{d}{d\,z}\,V_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix}^T
$$

上式を (4.3.12) 式に代入すると、

$$\begin{pmatrix} \frac{d}{du}U_u & \frac{d}{dv}U_u & \frac{d}{dw}U_u \\ \frac{d}{du}U_v & \frac{d}{dv}U_v & \frac{d}{dw}U_v \\ \frac{d}{du}U_w & \frac{d}{dv}U_w & \frac{d}{dw}U_w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{d}{du}V_x & \frac{d}{dv}V_x & \frac{d}{dw}V_x \\ \frac{d}{du}V_y & \frac{d}{dv}V_y & \frac{d}{dw}V_y \\ \frac{d}{du}V_z & \frac{d}{dv}V_z & \frac{d}{dw}V_z \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{d}{dx}V_x & \frac{d}{dy}V_x & \frac{d}{dz}V_x \\ \frac{d}{dx}V_y & \frac{d}{dy}V_y & \frac{d}{dz}V_y \\ \frac{d}{dx}V_z & \frac{d}{dy}V_z & \frac{d}{dz}V_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix}^T \tag{4.3.14}$$

上式のトレース（対角成分の和）は次式となり、(4.2.16) 式から、

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dw}U_w + \frac{d}{dv}U_v + \frac{d}{du}U_u =& \left(l_{33}^2 + l_{23}^2 + l_{13}^2\right)\left(\frac{d}{dz}V_z\right) + \left(l_{32}\,l_{33} + l_{22}\,l_{23} + l_{12}\,l_{13}\right)\left(\frac{d}{dy}V_z\right) \\
&+ \left(l_{31}\,l_{33} + l_{21}\,l_{23} + l_{11}\,l_{13}\right)\left(\frac{d}{dx}V_z\right) + \left(l_{32}\,l_{33} + l_{22}\,l_{23} + l_{12}\,l_{13}\right)\left(\frac{d}{dz}V_y\right) \\
&+ \left(l_{32}^2 + l_{22}^2 + l_{12}^2\right)\left(\frac{d}{dy}V_y\right) + \left(l_{31}\,l_{32} + l_{21}\,l_{22} + l_{11}\,l_{12}\right)\left(\frac{d}{dx}V_y\right) \\
&+ \left(l_{31}\,l_{33} + l_{21}\,l_{23} + l_{11}\,l_{13}\right)\left(\frac{d}{dz}V_x\right) + \left(l_{31}\,l_{32} + l_{21}\,l_{22} + l_{11}\,l_{12}\right)\left(\frac{d}{dy}V_x\right) \\
&+ \left(l_{31}^2 + l_{21}^2 + l_{11}^2\right)\left(\frac{d}{dx}V_x\right) \\
=& \frac{d}{dz}V_z + \frac{d}{dy}V_y + \frac{d}{dx}V_x
\end{aligned}$$

また、(4.3.14) 式のトレース（対角成分の和）は 87 頁から、積の項を入れ替えても変わらないので、

$$\begin{aligned}
tr\left(\begin{pmatrix} \frac{d}{du}U_u & \frac{d}{dv}U_u & \frac{d}{dw}U_u \\ \frac{d}{du}U_v & \frac{d}{dv}U_v & \frac{d}{dw}U_v \\ \frac{d}{du}U_w & \frac{d}{dv}U_w & \frac{d}{dw}U_w \end{pmatrix}\right) =& tr\left(\begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{d}{dx}V_x & \frac{d}{dy}V_x & \frac{d}{dz}V_x \\ \frac{d}{dx}V_y & \frac{d}{dy}V_y & \frac{d}{dz}V_y \\ \frac{d}{dx}V_z & \frac{d}{dy}V_z & \frac{d}{dz}V_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix}^T\right) \\
=& tr\left(\begin{pmatrix} \frac{d}{dx}V_x & \frac{d}{dy}V_x & \frac{d}{dz}V_x \\ \frac{d}{dx}V_y & \frac{d}{dy}V_y & \frac{d}{dz}V_y \\ \frac{d}{dx}V_z & \frac{d}{dy}V_z & \frac{d}{dz}V_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix}\right) \\
=& tr\left(\begin{pmatrix} \frac{d}{dx}V_x & \frac{d}{dy}V_x & \frac{d}{dz}V_x \\ \frac{d}{dx}V_y & \frac{d}{dy}V_y & \frac{d}{dz}V_y \\ \frac{d}{dx}V_z & \frac{d}{dy}V_z & \frac{d}{dz}V_z \end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

上式のトレースから次式となる。この結果から、座標変換しても発散は変わらないことがわかる。

$$\frac{d}{dw}U_w + \frac{d}{dv}U_v + \frac{d}{du}U_u = \frac{d}{dz}V_z + \frac{d}{dy}V_y + \frac{d}{dx}V_x \tag{4.3.15}$$

4.3.5　回転 (rot,curl)

回転 (rot,curl) はベクトルの関数：$\overrightarrow{V}$ を微分する関数で下記を計算する。

$$\mathrm{curl}\left([V_x,\,V_y,\,V_z]\right)=\begin{pmatrix}\frac{d}{d\,y}\,V_z-\frac{d}{d\,z}\,V_y\\ \frac{d}{d\,z}\,V_x-\frac{d}{d\,x}\,V_z\\ \frac{d}{d\,x}\,V_y-\frac{d}{d\,y}\,V_x\end{pmatrix}\tag{4.3.16}$$

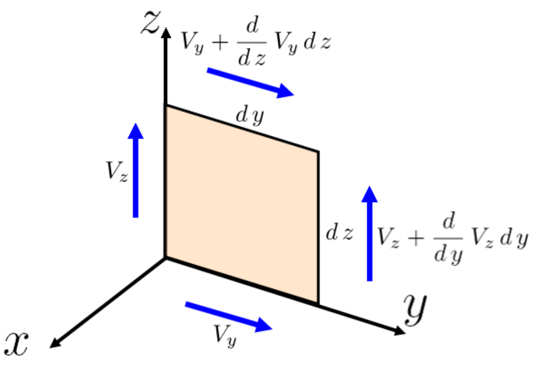


図 4.3.2: $d\,y\,d\,z$ の流速

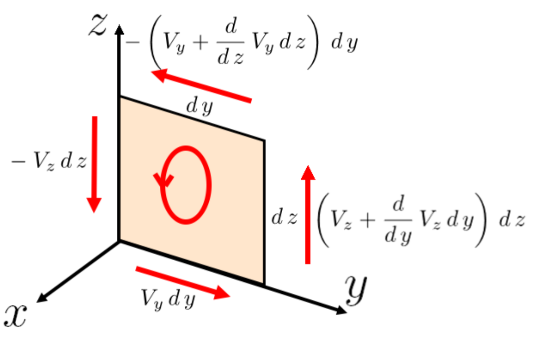


図 4.3.3: $d\,y\,d\,z$ の循環

上図の x 軸方向の $d\,y\,d\,z$ 周囲の循環：Γ は、流速に辺の長さを掛け、上図の回転方向を正として、

$$\begin{aligned}\Gamma=&V_y\,d\,y-V_z\,d\,z-\left(V_y+\frac{d}{d\,z}\,V_y\,d\,z\right)\,d\,y\\&+\left(V_z+\frac{d}{d\,y}\,V_z\,d\,y\right)\,d\,z\\=&-\frac{d}{d\,z}\,V_y\,d\,z\,d\,y+\frac{d}{d\,y}\,V_z\,d\,y\,d\,z\end{aligned}$$

以上から、単位面積あたり $\frac{d}{d\,y}\,V_z-\frac{d}{d\,z}\,V_y$ となる。他軸方向も同様に考えると、(4.3.9) 式は流場や電磁気場の回転を表している。
Maxima の回転 (rot,curl) の実行方法は下記の要領で行う。まず、vect を load しておく。

$$cirl(\text{ベクトルの関数})$$

ここで Maxima のベクトルの微分で使うベクトルの関数は、行の行列で表す必要がある。この後、下記を実行し、微分表示とする。

$$express(\%)$$

微分を実行するには、更に下記を実行する。

$$ev(\%,diff)$$

下記に例を示す。

```
kill(all);
load("vect")$
depends([V],[x,y,z]);
MTA:matrix([V[x]],[V[y]],[V[z]]);
curl(transpose(MTA)[1]);
transpose(express(%));
```

$$\mathrm{curl}\left([V_x,V_y,V_z]\right)=\begin{pmatrix}\frac{d}{d\,y}\,V_z-\frac{d}{d\,z}\,V_y\\ \frac{d}{d\,z}\,V_x-\frac{d}{d\,x}\,V_z\\ \frac{d}{d\,x}\,V_y-\frac{d}{d\,y}\,V_x\end{pmatrix}$$

```
P1:-m/sqrt(x^2+y^2+z^2);
VX1:diff(P1,x,1);
VY1:diff(P1,y,1);
VZ1:diff(P1,z,1);
MTV:matrix([VX1],[VY1],[VZ1]);
curl(transpose(MTV)[1]);
express(%);
ev(%,diff);
factor(%);
```

下記のわき出しの速度ポテンシャル[1]：Φ で、

$$\Phi=-\frac{m}{\sqrt{z^2+y^2+x^2}}$$

流速ベクトル：$\overrightarrow{V}$ を求めると、

$$\overrightarrow{V}=\begin{pmatrix}\frac{m\,x}{(z^2+y^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\\ \frac{m\,y}{(z^2+y^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\\ \frac{m\,z}{(z^2+y^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\end{pmatrix}$$

[1]溝口純敏：Maxima を使った流体力学基礎演習ノート http://http://www9.plala.or.jp/alcwitchery/、第 6 章　3 次元完全流体、6.1.7 わき出し

上記の回転 (rot,curl) を求めると、

$$\mathrm{curl}\left([\frac{m\,x}{(z^2+y^2+x^2)^{\frac{3}{2}}},\frac{m\,y}{(z^2+y^2+x^2)^{\frac{3}{2}}},\frac{m\,z}{(z^2+y^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}]\right)$$
$$=[\frac{d}{d\,y}\,\frac{m\,z}{(z^2+y^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{d}{d\,z}\,\frac{m\,y}{(z^2+y^2+x^2)^{\frac{3}{2}}},\frac{d}{d\,z}\,\frac{m\,x}{(z^2+y^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{d}{d\,x}\,\frac{m\,z}{(z^2+y^2+x^2)^{\frac{3}{2}}},\frac{d}{d\,x}\,\frac{m\,y}{(z^2+y^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{d}{d\,y}\,\frac{m\,x}{(z^2+y^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}]$$
$$=[0,0,0]$$

当然ながら、わき出しの速度ポテンシャル流場の回転は零である。

```
VR:A*(R-r)*(R+r);
VX1:0;
VY1:0;
VZ1:subst([r=sqrt(x^2+y^2)],VR);
MTV:matrix([VX1],[VY1],[VZ1]);
curl(transpose(MTV)[1]);
express(%);
ev(%,diff);
factor(%);
```

円管内の粘性流れの流速：V_z は下記で表現できる。

$$V_z=A\,(R-r)\,(R+r)$$
$$=A\,\left(R-\sqrt{y^2+x^2}\right)\,\left(R+\sqrt{y^2+x^2}\right)$$

上記をベクトルで表現すると、

$$\vec{V}=\begin{pmatrix}0\\0\\A\,\left(R-\sqrt{y^2+x^2}\right)\,\left(R+\sqrt{y^2+x^2}\right)\end{pmatrix}$$

上記の回転 (rot,curl) を求めると、

$$\mathrm{curl}\left([0,0,A\,\left(R-\sqrt{y^2+x^2}\right)\,\left(R+\sqrt{y^2+x^2}\right)]\right)$$
$$=[\frac{d}{d\,y}\,\left(A\,\left(R-\sqrt{y^2+x^2}\right)\,\left(R+\sqrt{y^2+x^2}\right)\right),-\frac{d}{d\,x}\,\left(A\,\left(R-\sqrt{y^2+x^2}\right)\,\left(R+\sqrt{y^2+x^2}\right)\right),0]$$
$$=[\frac{y\,A\,\left(R-\sqrt{y^2+x^2}\right)}{\sqrt{y^2+x^2}}-\frac{y\,A\,\left(R+\sqrt{y^2+x^2}\right)}{\sqrt{y^2+x^2}},\frac{x\,A\,\left(R+\sqrt{y^2+x^2}\right)}{\sqrt{y^2+x^2}}-\frac{x\,A\,\left(R-\sqrt{y^2+x^2}\right)}{\sqrt{y^2+x^2}},0]$$
$$=R[-2\,y\,A,2\,x\,A,0]$$

粘性流では x 軸、y 軸方向の回転は零にならない。

回転 (rot,curl) が座標系によらないこと、すなわち一定のベクトル値となることを示す。

```
FUVW:matrix(['diff(U[u],u,1),'diff(U[u],
 v,1),'diff(U[u],w,1)],['diff(U[v],u,1),
 'diff(U[v],v,1),'diff(U[v],w,1)],
 ['diff(U[w],u,1),'diff(U[w],v,1),
 'diff(U[w],w,1)]);
FXYZ:matrix(['diff(V[x],x,1),'diff(V[x],
 y,1),'diff(V[x],z,1)],['diff(V[y],x,1),
 'diff(V[y],y,1),'diff(V[y],z,1)],
 ['diff(V[z],x,1),'diff(V[z],y,1),
 'diff(V[z],z,1)]);
TNL:matrix([l[11],l[12],l[13]],[l[21],
 l[22],l[23]],[l[31],l[32],l[33]]);
I1:matrix([0,0,1]);
I2:matrix([0,1,0]);
I3:matrix([1,0,0]);
RXYZ:FXYZ-transpose(FXYZ);
RY1:RY=RXYZ[1][3];
RZ1:RZ=RXYZ[2][1];
RX1:RX=RXYZ[3][2];
RXYZ1:matrix([0,-RZ,RY],[RZ,0,-RX],
 [-RY,RX,0]);
subst([RX1,RY1,RZ1],RXYZ1);
%-RXYZ;
RUVW:FUVW-transpose(FUVW);
RV1:RV=RUVW[1][3];
RW1:RW=RUVW[2][1];
RU1:RU=RUVW[3][2];
RUVW1:matrix([0,-RW,RV],[RW,0,-RU],
 [-RV,RU,0]);
subst([RU1,RV1,RW1],RUVW1);
%-RUVW;
RXYZ2:TNL.(RXYZ1.transpose(TNL));
R0:RUVW1=RXYZ2;
partfrac(%,RX);
```

(4.3.14) 式の各項を下記のようにおくと、

$$F_{uvw}=\begin{pmatrix}\frac{d}{d\,u}\,U_u & \frac{d}{d\,v}\,U_u & \frac{d}{d\,w}\,U_u\\ \frac{d}{d\,u}\,U_v & \frac{d}{d\,v}\,U_v & \frac{d}{d\,w}\,U_v\\ \frac{d}{d\,u}\,U_w & \frac{d}{d\,v}\,U_w & \frac{d}{d\,w}\,U_w\end{pmatrix}$$

$$F_{xyz}=\begin{pmatrix}\frac{d}{d\,x}\,V_x & \frac{d}{d\,y}\,V_x & \frac{d}{d\,z}\,V_x\\ \frac{d}{d\,x}\,V_y & \frac{d}{d\,y}\,V_y & \frac{d}{d\,z}\,V_y\\ \frac{d}{d\,x}\,V_z & \frac{d}{d\,y}\,V_z & \frac{d}{d\,z}\,V_z\end{pmatrix}$$

$$L=\begin{pmatrix}l_{11} & l_{12} & l_{13}\\ l_{21} & l_{22} & l_{23}\\ l_{31} & l_{32} & l_{33}\end{pmatrix}$$

(4.3.14) 式は、

$$F_{uvw} = L\, F_{xyz}\, L^T \tag{4.3.17}$$

いま、F_{xyz} について、F_{xyz}^T との差をとると、回転 (rot,curl) の各項が得られ、

$$\begin{aligned}
&F_{xyz} - F_{xyz}^T \\
&= \begin{pmatrix} 0 & \frac{d}{d\,y}\,V_x - \frac{d}{d\,x}\,V_y & \frac{d}{d\,z}\,V_x - \frac{d}{d\,x}\,V_z \\ \frac{d}{d\,x}\,V_y - \frac{d}{d\,y}\,V_x & 0 & \frac{d}{d\,z}\,V_y - \frac{d}{d\,y}\,V_z \\ \frac{d}{d\,x}\,V_z - \frac{d}{d\,z}\,V_x & \frac{d}{d\,y}\,V_z - \frac{d}{d\,z}\,V_y & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -RW & RV \\ RW & 0 & -RU \\ -RV & RU & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{4.3.18}$$

$$\begin{aligned}
\text{ここで、}\quad RY =& \frac{d}{d\,z}\,V_x - \frac{d}{d\,x}\,V_z \\
RZ =& \frac{d}{d\,x}\,V_y - \frac{d}{d\,y}\,V_x \\
RX =& \frac{d}{d\,y}\,V_z - \frac{d}{d\,z}\,V_y
\end{aligned} \tag{4.3.19}$$

同様に、F_{uvw} について、F_{uvw}^T との差をとると、回転 (rot,curl) の各項が得られ、

$$\begin{aligned}
&F_{uvw} - F_{uvw}^T \\
&= \begin{pmatrix} 0 & \frac{d}{d\,v}\,U_u - \frac{d}{d\,u}\,U_v & \frac{d}{d\,w}\,U_u - \frac{d}{d\,u}\,U_w \\ \frac{d}{d\,u}\,U_v - \frac{d}{d\,v}\,U_u & 0 & \frac{d}{d\,w}\,U_v - \frac{d}{d\,v}\,U_w \\ \frac{d}{d\,u}\,U_w - \frac{d}{d\,w}\,U_u & \frac{d}{d\,v}\,U_w - \frac{d}{d\,w}\,U_v & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -RW & RV \\ RW & 0 & -RU \\ -RV & RU & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{4.3.20}$$

$$\begin{aligned}
\text{ここで、}\quad RV =& \frac{d}{d\,w}\,U_u - \frac{d}{d\,u}\,U_w \\
RW =& \frac{d}{d\,u}\,U_v - \frac{d}{d\,v}\,U_u \\
RU =& \frac{d}{d\,v}\,U_w - \frac{d}{d\,w}\,U_v
\end{aligned} \tag{4.3.21}$$

(4.3.17) 式の転置行列は 87 頁の「行列の積の転置行列」から、

$$\begin{aligned}
F_{uvw}^T =& \left(L\ \left((F_{xyz})\ L^T\right)\right)^T = \left((F_{xyz})\ L^T\right)^T\ L^T \\
=& L\ (F_{xyz})^T\ L^T
\end{aligned}$$

(4.3.17) 式と上式の差から、

$$F_{uvw} - F_{uvw}^T = L\ \left(F_{xyz} - F_{xyz}^T\right)\ L^T \tag{4.3.22}$$

上式に (4.3.18) 式、(4.3.20) 式を代入すると、

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 0 & -RW & RV \\ RW & 0 & -RU \\ -RV & RU & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -RZ & RY \\ RZ & 0 & -RX \\ -RY & RX & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix}^T \\
&= \left(\begin{matrix} 0 \\ (l_{11}\,l_{22} - l_{12}\,l_{21})\ RZ + (l_{13}\,l_{21} - l_{11}\,l_{23})\ RY + (l_{12}\,l_{23} - l_{13}\,l_{22})\ RX \\ (l_{11}\,l_{32} - l_{12}\,l_{31})\ RZ + (l_{13}\,l_{31} - l_{11}\,l_{33})\ RY + (l_{12}\,l_{33} - l_{13}\,l_{32})\ RX \end{matrix} \right. \\
&\quad \begin{matrix} (l_{12}\,l_{21} - l_{11}\,l_{22})\ RZ + (l_{11}\,l_{23} - l_{13}\,l_{21})\ RY + (l_{13}\,l_{22} - l_{12}\,l_{23})\ RX \\ 0 \\ (l_{21}\,l_{32} - l_{22}\,l_{31})\ RZ + (l_{23}\,l_{31} - l_{21}\,l_{33})\ RY + (l_{22}\,l_{33} - l_{23}\,l_{32})\ RX \end{matrix} \\
&\quad \left. \begin{matrix} (l_{12}\,l_{31} - l_{11}\,l_{32})\ RZ + (l_{11}\,l_{33} - l_{13}\,l_{31})\ RY + (l_{13}\,l_{32} - l_{12}\,l_{33})\ RX \\ (l_{22}\,l_{31} - l_{21}\,l_{32})\ RZ + (l_{21}\,l_{33} - l_{23}\,l_{31})\ RY + (l_{23}\,l_{32} - l_{22}\,l_{33})\ RX \\ 0 \end{matrix} \right)
\end{aligned} \tag{4.3.23}$$

```
-RUVW1[2][3]=-RXYZ2[2][3];
R11:partfrac(%,RX);
RUVW1[3][2]=RXYZ2[3][2];
R12:partfrac(%,RX);
RUVW1[1][3]=RXYZ2[1][3];
R21:partfrac(%,RX);
-RUVW1[3][1]=-RXYZ2[3][1];
R22:partfrac(%,RX);
-RUVW1[1][2]=-RXYZ2[1][2];
R31:partfrac(%,RX);
RUVW1[2][1]=RXYZ2[2][1];
R32:partfrac(%,RX);
```

(4.3.23) 式から、

$$\begin{aligned} RU &= (l_{21}\,l_{32} - l_{22}\,l_{31})\,RZ + (l_{23}\,l_{31} - l_{21}\,l_{33})\,RY \\ &\quad + (l_{22}\,l_{33} - l_{23}\,l_{32})\,RX \\ RV &= (l_{12}\,l_{31} - l_{11}\,l_{32})\,RZ + (l_{11}\,l_{33} - l_{13}\,l_{31})\,RY \\ &\quad + (l_{13}\,l_{32} - l_{12}\,l_{33})\,RX \\ RW &= (l_{11}\,l_{22} - l_{12}\,l_{21})\,RZ + (l_{13}\,l_{21} - l_{11}\,l_{23})\,RY \\ &\quad + (l_{12}\,l_{23} - l_{13}\,l_{22})\,RX \end{aligned} \tag{4.3.24}$$

```
LX:transpose(matrix([l[11],l[12],l[13]]));
LY:transpose(matrix([l[21],l[22],l[23]]));
LZ:transpose(matrix([l[31],l[32],l[33]]));
LZ1:LZ=col(adjoint(transpose(addcol(LX,LY,
 matrix([1],[1],[1])))),3);
LX1:LX=col(adjoint(transpose(addcol(LY,LZ,
 matrix([1],[1],[1])))),3);
LY1:LY=col(adjoint(transpose(addcol(LZ,LX,
 matrix([1],[1],[1])))),3);
RU1:RU=l[13]*RZ+l[12]*RY+l[11]*RX;
RV1:RV=l[23]*RZ+l[22]*RY+l[21]*RX;
RW1:RW=l[33]*RZ+l[32]*RY+l[31]*RX;
RUVW1:transpose(matrix([RU,RV,RW]));
RXYZ1:transpose(matrix([RX,RY,RZ]));
RUVW1=TNL.RXYZ1;
```

xyz 座標の各座標の単位ベクトルを $\overrightarrow{i}$、$\overrightarrow{j}$、$\overrightarrow{k}$ とし、uvw 座標の各座標の単位ベクトルを $\overrightarrow{e_1}$、$\overrightarrow{e_2}$、$\overrightarrow{e_3}$ とすると (4.2.15) 式から、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{e_1} &= l_{11}\,\overrightarrow{i} + l_{12}\,\overrightarrow{j} + l_{13}\,\overrightarrow{k} \\ \overrightarrow{e_2} &= l_{21}\,\overrightarrow{i} + l_{22}\,\overrightarrow{j} + l_{23}\,\overrightarrow{k} \\ \overrightarrow{e_3} &= l_{31}\,\overrightarrow{i} + l_{32}\,\overrightarrow{j} + l_{33}\,\overrightarrow{k} \end{aligned}$$

上式をベクトル表記すると、下記となる。ここで、座標変換行列：L とする。

$$\begin{pmatrix} \overrightarrow{e_1} \\ \overrightarrow{e_2} \\ \overrightarrow{e_3} \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} \overrightarrow{i} \\ \overrightarrow{j} \\ \overrightarrow{k} \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix}$$

上式から、

$$\overrightarrow{e_1} = \begin{pmatrix} l_{11} \\ l_{12} \\ l_{13} \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{e_2} = \begin{pmatrix} l_{21} \\ l_{22} \\ l_{23} \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{e_3} = \begin{pmatrix} l_{31} \\ l_{32} \\ l_{33} \end{pmatrix} \tag{4.3.25}$$

また、直角座標系であるから、

$$\overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{e_1} \times \overrightarrow{e_2} \qquad \overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{e_2} \times \overrightarrow{e_3} \qquad \overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{e_3} \times \overrightarrow{e_1}$$

上式に (4.3.25) 式を代入すると、下記の関係式が得られる。

$$\begin{pmatrix} l_{31} \\ l_{32} \\ l_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{12}\,l_{23} - l_{13}\,l_{22} \\ l_{13}\,l_{21} - l_{11}\,l_{23} \\ l_{11}\,l_{22} - l_{12}\,l_{21} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} l_{11} \\ l_{12} \\ l_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{22}\,l_{33} - l_{23}\,l_{32} \\ l_{23}\,l_{31} - l_{21}\,l_{33} \\ l_{21}\,l_{32} - l_{22}\,l_{31} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} l_{21} \\ l_{22} \\ l_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{13}\,l_{32} - l_{12}\,l_{33} \\ l_{11}\,l_{33} - l_{13}\,l_{31} \\ l_{12}\,l_{31} - l_{11}\,l_{32} \end{pmatrix}$$

上記の関係式を (4.3.24) 式に代入すると、

$$RU = l_{13}\,RZ + l_{12}\,RY + l_{11}\,RX$$

$$RV = l_{23}\,RZ + l_{22}\,RY + l_{21}\,RX$$

$$RW = l_{33}\,RZ + l_{32}\,RY + l_{31}\,RX$$

上式を行列を用いて表すと、

$$\begin{pmatrix} RU \\ RV \\ RW \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} RX \\ RY \\ RZ \end{pmatrix}$$

上式から回転 (rot,curl) が座標変換マトリックスで座標変換できる。このことは座標系によらないこと、すなわち一定のベクトル値となることを示している。

4.3.6　∇ を使った演算

∇ は下記の微分を含んだベクトルの式とする。

$$\nabla = \frac{d}{d\,x}\,\vec{i} + \frac{d}{d\,y}\,\vec{j} + \frac{d}{d\,z}\,\vec{k} \tag{4.3.26}$$

```
kill(all);
load("vect")$
depends([A,B],[x,y,z]);
MTA:matrix([A[x]],[A[y]],[A[z]]);
MTB:matrix([B[x]],[B[y]],[B[z]]);
NABM:matrix([d/dx],[d/dy],[d/dz]);
```

また、行列表記すると、

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{d}{dx} \\ \frac{d}{dy} \\ \frac{d}{dz} \end{pmatrix}$$

ベクトル：$\vec{A}$、ベクトル：$\vec{B}$ を下記とする。

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \qquad \vec{B} = \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}$$

(1) ∇ **とスカラーとの積** → grad　ベクトルに

```
/* nabra (grad f) */
NABM*f;
grad(f);
transpose(express(%));
```

∇ とスカラー：f の積は、

$$\nabla\,f = \begin{pmatrix} \frac{d\,f}{dx} \\ \frac{d\,f}{dy} \\ \frac{d\,f}{dz} \end{pmatrix}$$

上記は grad (f) であり、次の公式となる。

$$\nabla\,f = \mathrm{grad}\,(f) = \begin{pmatrix} \frac{d}{d\,x}\,f \\ \frac{d}{d\,y}\,f \\ \frac{d}{d\,z}\,f \end{pmatrix} \tag{4.3.27}$$

(2) ∇ **とベクトルの内積** → div　**スカラーに**

```
NABM.MTA;
div(transpose(MTA)[1]);
express(%);
```

∇ とベクトル：$\vec{A}$ の内積は、

$$\nabla\,\vec{A} = \frac{d\,A_z}{dz} + \frac{d\,A_y}{dy} + \frac{d\,A_x}{dx}$$

上記は div $\left(\vec{A}\right)$ であり、次の公式となる。

$$\nabla\,\vec{A} = \mathrm{div}\,([A_x, A_y, A_z]) = \frac{d}{d\,z}\,A_z + \frac{d}{d\,y}\,A_y + \frac{d}{d\,x}\,A_x \tag{4.3.28}$$

(3) ∇ **とベクトルの外積** $\to$ curl　ベクトルに

```
col(adjoint(transpose(addcol(NABM,MTA,
 matrix([1],[1],[1])))),3);
curl(transpose(MTA)[1]);
transpose(express(%));
ev(%,diff);
```

∇ とベクトル：$\overrightarrow{A}$ の外積は、

$$\nabla \times \overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} \frac{d\,A_z}{dy} - \frac{d\,A_y}{dz} \\ \frac{d\,A_x}{dz} - \frac{d\,A_z}{dx} \\ \frac{d\,A_y}{dx} - \frac{d\,A_x}{dy} \end{pmatrix}$$

上記は curl $\left(\overrightarrow{A}\right)$ であり、次の公式となる。

$$\nabla \times \overrightarrow{A} = \mathrm{curl}\left([A_x, A_y, A_z]\right) = \begin{pmatrix} \frac{d}{d\,y}\,A_z - \frac{d}{d\,z}\,A_y \\ \frac{d}{d\,z}\,A_x - \frac{d}{d\,x}\,A_z \\ \frac{d}{d\,x}\,A_y - \frac{d}{d\,y}\,A_x \end{pmatrix} \tag{4.3.29}$$

(4) $\overrightarrow{A}\,\nabla$

```
MTA.NABM;
```

$\overrightarrow{A}$ と ∇ の内積は次式に示すようにスカラー微分オペレータである。

$$\overrightarrow{A}\,\nabla = A_z \frac{d}{dz} + A_y \frac{d}{dy} + A_x \frac{d}{dx}$$

(5)∇^2　　div (grad (f))

```
expand((NABM.NABM)*f);
NAB:grad(f);
transpose(express(%));
div(transpose(%)[1]);
express(%);
expand((NABM.NABM)*MTB);
matrix([div(grad(MTB[1][1]))],
 [div(grad(MTB[2][1]))],
 [div(grad(MTB[3][1]))]);
express(%);
```

∇^2 は、∇ の内積で、∇^2 はスカラー微分オペレータであり、

$$\nabla^2 = (\nabla\,\nabla) = \frac{d^2}{dz^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dx^2}$$

∇^2 とスカラー：f の積は、

$$\nabla^2 f = \frac{d^2 f}{dz^2} + \frac{d^2 f}{dy^2} + \frac{d^2 f}{dx^2}$$

上記は div (grad (f)) であり、次の公式となる。

$$\begin{aligned} \nabla^2 f =& \mathrm{div}\left(\mathrm{grad}\left(f\right)\right) = \mathrm{div}\left(\left[\frac{d}{d\,x}\,f, \frac{d}{d\,y}\,f, \frac{d}{d\,z}\,f\right]\right) \\ =& \frac{d^2}{d\,z^2}\,f + \frac{d^2}{d\,y^2}\,f + \frac{d^2}{d\,x^2}\,f \end{aligned} \tag{4.3.30}$$

スカラーの ∇^2 とベクトル：$\overrightarrow{A}$ の積は、

$$\nabla^2 \overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} \frac{d^2\,A_x}{dz^2} + \frac{d^2\,A_x}{dy^2} + \frac{d^2\,A_x}{dx^2} \\ \frac{d^2\,A_y}{dz^2} + \frac{d^2\,A_y}{dy^2} + \frac{d^2\,A_y}{dx^2} \\ \frac{d^2\,A_z}{dz^2} + \frac{d^2\,A_z}{dy^2} + \frac{d^2\,A_z}{dx^2} \end{pmatrix}$$

上記は div (grad (ベクトルの各要素)) であり、次の公式となる。

$$\begin{aligned} \nabla^2 \overrightarrow{A} =& \begin{pmatrix} \mathrm{div}\left(\mathrm{grad}\left(A_x\right)\right) \\ \mathrm{div}\left(\mathrm{grad}\left(A_y\right)\right) \\ \mathrm{div}\left(\mathrm{grad}\left(A_z\right)\right) \end{pmatrix} \\ =& \begin{pmatrix} \frac{d^2}{d\,z^2}\,A_x + \frac{d^2}{d\,y^2}\,A_x + \frac{d^2}{d\,x^2}\,A_x \\ \frac{d^2}{d\,z^2}\,A_y + \frac{d^2}{d\,y^2}\,A_y + \frac{d^2}{d\,x^2}\,A_y \\ \frac{d^2}{d\,z^2}\,A_z + \frac{d^2}{d\,y^2}\,A_z + \frac{d^2}{d\,x^2}\,A_z \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{4.3.31}$$

また、(4.3.50) 式から、

$$\nabla^2 \overrightarrow{A} = \nabla\left(\nabla \overrightarrow{A}\right) - \nabla \times \left(\nabla \times \overrightarrow{A}\right) \tag{4.3.32}$$

(6) $\nabla\left(\overrightarrow{A}\times\overrightarrow{B}\right)=\overrightarrow{B}\left(\nabla\times\overrightarrow{A}\right)-\overrightarrow{A}\left(\nabla\times\overrightarrow{B}\right)$

$\mathrm{div}\left(\overrightarrow{A}\times\overrightarrow{B}\right)$

ベクトルの内積の微分 : (4.3.2) 式、ベクトルの外積の微分 : (4.3.3) 式から、∇ を作用させないものにサフィックス : 0 を付けると、下記のように書ける。

$$\nabla\left(\overrightarrow{A}\times\overrightarrow{B}\right)=\nabla\left(\overrightarrow{A}\times\overrightarrow{B_0}\right)+\nabla\left(\overrightarrow{A_0}\times\overrightarrow{B}\right)$$

スカラー 3 重積 : (4.1.6) 式から、

$$\begin{aligned}\nabla\left(\overrightarrow{A}\times\overrightarrow{B}\right)&=\nabla\left(\overrightarrow{A}\times\overrightarrow{B_0}\right)+\nabla\left(\overrightarrow{A_0}\times\overrightarrow{B}\right)\\&=\overrightarrow{B_0}\left(\nabla\times\overrightarrow{A}\right)-\overrightarrow{A_0}\left(\nabla\times\overrightarrow{B}\right)\qquad(4.3.33)\\&=\overrightarrow{B}\left(\nabla\times\overrightarrow{A}\right)-\overrightarrow{A}\left(\nabla\times\overrightarrow{B}\right)\end{aligned}$$

```
P1:col(adjoint(transpose(addcol(MTA,MTB,
 matrix([1],[1],[1])))),3);
div(transpose(%)[1]);
express(%);
P11:ev(%,diff);
curl(transpose(MTA)[1]);
P2:transpose(express(%));
curl(transpose(MTB)[1]);
P3:transpose(express(%));
P21:MTB.P2-MTA.P3;
P11-P21;
factor(%);
```

上式を具体的に求めて確かめる。内積は div、外積は $curl$ を使用して求める。(4.3.33) 式の左辺は、

$$\begin{aligned}&\nabla\left(\overrightarrow{A}\times\overrightarrow{B}\right)\\&=\frac{d}{d\,x}\left(A_y\,B_z-B_y\,A_z\right)+\frac{d}{d\,y}\left(B_x\,A_z-A_x\,B_z\right)\\&\quad+\frac{d}{d\,z}\left(A_x\,B_y-B_x\,A_y\right)\end{aligned}\tag{4.3.34}$$

(4.3.33) 式の右辺の一部は、

$$\nabla\times\overrightarrow{A}=\begin{pmatrix}\frac{d}{d\,y}A_z-\frac{d}{d\,z}A_y\\\frac{d}{d\,z}A_x-\frac{d}{d\,x}A_z\\\frac{d}{d\,x}A_y-\frac{d}{d\,y}A_x\end{pmatrix},$$

$$\nabla\times\overrightarrow{B}=\begin{pmatrix}\frac{d}{d\,y}B_z-\frac{d}{d\,z}B_y\\\frac{d}{d\,z}B_x-\frac{d}{d\,x}B_z\\\frac{d}{d\,x}B_y-\frac{d}{d\,y}B_x\end{pmatrix}$$

上式から、(4.3.33) 式の右辺は、

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{B}\left(\nabla\times\overrightarrow{A}\right)-\overrightarrow{A}\left(\nabla\times\overrightarrow{B}\right)\\&=-A_x\left(\frac{d}{d\,y}B_z-\frac{d}{d\,z}B_y\right)-A_y\left(\frac{d}{d\,z}B_x-\frac{d}{d\,x}B_z\right)\\&+B_x\left(\frac{d}{d\,y}A_z-\frac{d}{d\,z}A_y\right)+B_y\left(\frac{d}{d\,z}A_x-\frac{d}{d\,x}A_z\right)\\&+\left(\frac{d}{d\,x}A_y-\frac{d}{d\,y}A_x\right)B_z-\left(\frac{d}{d\,x}B_y-\frac{d}{d\,y}B_x\right)A_z\end{aligned}\tag{4.3.35}$$

(4.3.34) 式、(4.3.35) 式から (4.3.33) 式が成り立っていることがわかる。

(7) $\nabla \times \left(\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}\right) = \left(\overrightarrow{B}\nabla\right)\overrightarrow{A} - \left(\nabla\overrightarrow{A}\right)\overrightarrow{B} + \left(\nabla\overrightarrow{B}\right)\overrightarrow{A} - \left(\overrightarrow{A}\nabla\right)\overrightarrow{B}$

curl $\left(\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}\right)$

∇ を作用させないものにサフィックス : 0 を付けると、下記のように書ける。

$$\nabla \times \left(\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}\right) = \nabla \times \left(\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B_0}\right) + \nabla \times \left(\overrightarrow{A_0} \times \overrightarrow{B}\right)$$

ベクトル 3 重積 : (4.1.9) 式から下記となる。ここで、$\nabla\overrightarrow{A_0} \to \overrightarrow{A_0}\nabla$、$\nabla\overrightarrow{B_0} \to \overrightarrow{B_0}\nabla$ とする。

$$\nabla \times \left(\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B_0}\right) = \left(\overrightarrow{B_0}\nabla\right)\overrightarrow{A} - \left(\nabla\overrightarrow{A}\right)\overrightarrow{B_0}$$

$$\nabla \times \left(\overrightarrow{A_0} \times \overrightarrow{B}\right) = \left(\nabla\overrightarrow{B}\right)\overrightarrow{A_0} - \left(\overrightarrow{A_0}\nabla\right)\overrightarrow{B}$$

以上から、

$$\begin{aligned}
&\nabla \times \left(\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}\right) \\
&\quad = \nabla \times \left(\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B_0}\right) + \nabla \times \left(\overrightarrow{A_0} \times \overrightarrow{B}\right) \\
&\quad = \left(\overrightarrow{B_0}\nabla\right)\overrightarrow{A} - \left(\nabla\overrightarrow{A}\right)\overrightarrow{B_0} \\
&\qquad + \left(\nabla\overrightarrow{B}\right)\overrightarrow{A_0} - \left(\overrightarrow{A_0}\nabla\right)\overrightarrow{B}
\end{aligned}$$

上式から、

$$\begin{aligned}
&\nabla \times \left(\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}\right) \\
&\quad = \left(\overrightarrow{B}\nabla\right)\overrightarrow{A} - \left(\nabla\overrightarrow{A}\right)\overrightarrow{B} \\
&\qquad + \left(\nabla\overrightarrow{B}\right)\overrightarrow{A} - \left(\overrightarrow{A}\nabla\right)\overrightarrow{B}
\end{aligned} \tag{4.3.36}$$

```
P1:col(adjoint(transpose(addcol(MTA,MTB,
 matrix([1],[1],[1])))),3);
curl(transpose(%)[1]);
express(%);
transpose(%);
P11:ev(%,diff);
MTB.NABM;
BD1:B[z]*(d/dz)+B[y]*d/dy+B[x]*d/dx;
M11:B[z]*diff(A[x],z,1)+B[y]*
 diff(A[x],y,1)+B[x]*diff(A[x],x,1);
M12:subst([A[x]=A[y]],M11);
M13:subst([A[x]=A[z]],M11);
P2:matrix([M11],[M12],[M13]);
MTA.NABM;
AD1:A[z]*(d/dz)+A[y]*d/dy+A[x]*d/dx;
M21:A[z]*diff(B[x],z,1)+A[y]*
 diff(B[x],y,1)+A[x]*diff(B[x],x,1);
M22:subst([B[x]=B[y]],M21);
M23:subst([B[x]=B[z]],M21);
P3:matrix([M21],[M22],[M23]);
div(transpose(MTA)[1]);
express(%);
P4:MTB*%;
div(transpose(MTB)[1]);
express(%);
P5:MTA*%;
P2-P3-P4+P5;
%-P11;
factor(%);
```

上式を具体的に求めて確かめる。内積は div、外積は $curl$ を使用して、求める。(4.3.36) 式の左辺は、

$$\begin{aligned}
&\nabla \times \left(\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}\right) \\
&= \begin{pmatrix}
\frac{d}{d\,y}\,(A_x\,B_y - B_x\,A_y) - \frac{d}{d\,z}\,(B_x\,A_z - A_x\,B_z) \\
\frac{d}{d\,z}\,(A_y\,B_z - B_y\,A_z) - \frac{d}{d\,x}\,(A_x\,B_y - B_x\,A_y) \\
\frac{d}{d\,x}\,(B_x\,A_z - A_x\,B_z) - \frac{d}{d\,y}\,(A_y\,B_z - B_y\,A_z)
\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}
A_x\left(\frac{d}{d\,z}B_z\right) - B_x\left(\frac{d}{d\,z}A_z\right) + \left(\frac{d}{d\,z}A_x\right)B_z - \left(\frac{d}{d\,z}B_x\right)A_z + A_x\left(\frac{d}{d\,y}B_y\right) - B_x\left(\frac{d}{d\,y}A_y\right) + \left(\frac{d}{d\,y}A_x\right)B_y - \left(\frac{d}{d\,y}B_x\right)A_y \\
A_y\left(\frac{d}{d\,z}B_z\right) - B_y\left(\frac{d}{d\,z}A_z\right) + \left(\frac{d}{d\,z}A_y\right)B_z - \left(\frac{d}{d\,z}B_y\right)A_z - A_x\left(\frac{d}{d\,x}B_y\right) + B_x\left(\frac{d}{d\,x}A_y\right) - \left(\frac{d}{d\,x}A_x\right)B_y + \left(\frac{d}{d\,x}B_x\right)A_y \\
-A_y\left(\frac{d}{d\,y}B_z\right) - A_x\left(\frac{d}{d\,x}B_z\right) + B_y\left(\frac{d}{d\,y}A_z\right) + B_x\left(\frac{d}{d\,x}A_z\right) - \left(\frac{d}{d\,y}A_y\right)B_z - \left(\frac{d}{d\,x}A_x\right)B_z + \left(\frac{d}{d\,y}B_y\right)A_z + \left(\frac{d}{d\,x}B_x\right)A_z
\end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{4.3.37}$$

(4.3.36) 式の右辺第一項の $\overrightarrow{B}\nabla$ は、

$$\overrightarrow{B}\nabla = B_z\frac{d}{dz} + B_y\frac{d}{dy} + B_x\frac{d}{dx}$$

上記から、

$$\left(\overrightarrow{B}\nabla\right)\overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} \left(\frac{d}{d\,z}\,A_x\right)\,B_z + \left(\frac{d}{d\,y}\,A_x\right)\,B_y + B_x\,\left(\frac{d}{d\,x}\,A_x\right) \\ \left(\frac{d}{d\,z}\,A_y\right)\,B_z + B_y\,\left(\frac{d}{d\,y}\,A_y\right) + B_x\,\left(\frac{d}{d\,x}\,A_y\right) \\ B_z\,\left(\frac{d}{d\,z}\,A_z\right) + B_y\,\left(\frac{d}{d\,y}\,A_z\right) + B_x\,\left(\frac{d}{d\,x}\,A_z\right) \end{pmatrix} \tag{4.3.38}$$

右辺第四項は上記と同様にして、

$$\left(\overrightarrow{A}\nabla\right)\overrightarrow{B} = \begin{pmatrix} \left(\frac{d}{d\,z}\,B_x\right)\,A_z + \left(\frac{d}{d\,y}\,B_x\right)\,A_y + A_x\,\left(\frac{d}{d\,x}\,B_x\right) \\ \left(\frac{d}{d\,z}\,B_y\right)\,A_z + A_y\,\left(\frac{d}{d\,y}\,B_y\right) + A_x\,\left(\frac{d}{d\,x}\,B_y\right) \\ A_z\,\left(\frac{d}{d\,z}\,B_z\right) + A_y\,\left(\frac{d}{d\,y}\,B_z\right) + A_x\,\left(\frac{d}{d\,x}\,B_z\right) \end{pmatrix} \tag{4.3.39}$$

右辺第二項は、

$$\left(\nabla\overrightarrow{A}\right)\overrightarrow{B} = \begin{pmatrix} B_x\,\left(\frac{d}{d\,z}\,A_z + \frac{d}{d\,y}\,A_y + \frac{d}{d\,x}\,A_x\right) \\ B_y\,\left(\frac{d}{d\,z}\,A_z + \frac{d}{d\,y}\,A_y + \frac{d}{d\,x}\,A_x\right) \\ B_z\,\left(\frac{d}{d\,z}\,A_z + \frac{d}{d\,y}\,A_y + \frac{d}{d\,x}\,A_x\right) \end{pmatrix} \tag{4.3.40}$$

右辺第三項は、

$$\left(\nabla\overrightarrow{B}\right)\overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} A_x\,\left(\frac{d}{d\,z}\,B_z + \frac{d}{d\,y}\,B_y + \frac{d}{d\,x}\,B_x\right) \\ A_y\,\left(\frac{d}{d\,z}\,B_z + \frac{d}{d\,y}\,B_y + \frac{d}{d\,x}\,B_x\right) \\ A_z\,\left(\frac{d}{d\,z}\,B_z + \frac{d}{d\,y}\,B_y + \frac{d}{d\,x}\,B_x\right) \end{pmatrix} \tag{4.3.41}$$

(4.3.36) 式に (4.3.37) 式、(4.3.38) 式、(4.3.39) 式、(4.3.40) 式を代入すると、(4.3.36) 式が成り立つことがわかる。

(8)$\nabla\left(\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}\right)=\overrightarrow{A}\times\left(\nabla\times\overrightarrow{B}\right)+\left(\overrightarrow{A}\,\nabla\right)\cdot\overrightarrow{B}+\overrightarrow{B}\times\left(\nabla\times\overrightarrow{A}\right)+\left(\overrightarrow{B}\,\nabla\right)\cdot\overrightarrow{A}$

$\mathrm{grad}\left(\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}\right)$

∇ を作用させないものにサフィックス : 0 を付けると、下記のように書ける。

$$\nabla\left(\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}\right)=\nabla\left(\overrightarrow{A_0}\cdot\overrightarrow{B}\right)+\nabla\left(\overrightarrow{B_0}\cdot\overrightarrow{A}\right)$$

スカラーのみの 3 重積 : (4.1.10) 式から下記となる。

$$\nabla\left(\overrightarrow{A_0}\cdot\overrightarrow{B}\right)=\overrightarrow{A_0}\times\left(\nabla\times\overrightarrow{B}\right)+\left(\overrightarrow{A_0}\cdot\nabla\right)\cdot\overrightarrow{B}$$

$$\nabla\left(\overrightarrow{B_0}\cdot\overrightarrow{A}\right)=\overrightarrow{B_0}\times\left(\nabla\times\overrightarrow{A}\right)+\left(\overrightarrow{B_0}\cdot\nabla\right)\cdot\overrightarrow{A}$$

以上から、

$$\begin{aligned}&\nabla\left(\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}\right)\\&=\overrightarrow{A}\times\left(\nabla\times\overrightarrow{B}\right)+\left(\overrightarrow{A}\,\nabla\right)\cdot\overrightarrow{B}\\&\quad+\overrightarrow{B}\times\left(\nabla\times\overrightarrow{A}\right)+\left(\overrightarrow{B}\,\nabla\right)\cdot\overrightarrow{A}\end{aligned}\tag{4.3.42}$$

```
MTA.MTB;
grad(%);
express(%);
ev(%,diff);
P1:transpose(%);
curl(transpose(MTB)[1]);
transpose(express(%));
P4:col(adjoint(transpose(addcol(MTA,
 %,matrix([1],[1],[1])))),3);
curl(transpose(MTA)[1]);
transpose(express(%));
P5:col(adjoint(transpose(addcol(MTB,
 %,matrix([1],[1],[1])))),3);
P1-P2-P3-P4-P5;
factor(%);
```

上式を具体的に求めて確かめる。

(4.3.42) 式の左辺は、

$$\nabla\left(\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}\right)=\begin{pmatrix}A_z\left(\frac{d}{dx}B_z\right)+B_z\left(\frac{d}{dx}A_z\right)+A_y\left(\frac{d}{dx}B_y\right)+B_y\left(\frac{d}{dx}A_y\right)+A_x\left(\frac{d}{dx}B_x\right)+B_x\left(\frac{d}{dx}A_x\right)\\A_z\left(\frac{d}{dy}B_z\right)+B_z\left(\frac{d}{dy}A_z\right)+A_y\left(\frac{d}{dy}B_y\right)+B_y\left(\frac{d}{dy}A_y\right)+A_x\left(\frac{d}{dy}B_x\right)+B_x\left(\frac{d}{dy}A_x\right)\\A_z\left(\frac{d}{dz}B_z\right)+B_z\left(\frac{d}{dz}A_z\right)+A_y\left(\frac{d}{dz}B_y\right)+B_y\left(\frac{d}{dz}A_y\right)+A_x\left(\frac{d}{dz}B_x\right)+B_x\left(\frac{d}{dz}A_x\right)\end{pmatrix}\tag{4.3.43}$$

(4.3.42) 式の右辺第一項、右辺第三項は、

$$\overrightarrow{A}\times\left(\nabla\times\overrightarrow{B}\right)=\begin{pmatrix}A_y\left(\frac{d}{dx}B_y-\frac{d}{dy}B_x\right)-A_z\left(\frac{d}{dz}B_x-\frac{d}{dx}B_z\right)\\A_z\left(\frac{d}{dy}B_z-\frac{d}{dz}B_y\right)-A_x\left(\frac{d}{dx}B_y-\frac{d}{dy}B_x\right)\\A_x\left(\frac{d}{dz}B_x-\frac{d}{dx}B_z\right)-A_y\left(\frac{d}{dy}B_z-\frac{d}{dz}B_y\right)\end{pmatrix}\tag{4.3.44}$$

$$\overrightarrow{B}\times\left(\nabla\times\overrightarrow{A}\right)=\begin{pmatrix}B_y\left(\frac{d}{dx}A_y-\frac{d}{dy}A_x\right)-B_z\left(\frac{d}{dz}A_x-\frac{d}{dx}A_z\right)\\B_z\left(\frac{d}{dy}A_z-\frac{d}{dz}A_y\right)-B_x\left(\frac{d}{dx}A_y-\frac{d}{dy}A_x\right)\\B_x\left(\frac{d}{dz}A_x-\frac{d}{dx}A_z\right)-B_y\left(\frac{d}{dy}A_z-\frac{d}{dz}A_y\right)\end{pmatrix}\tag{4.3.45}$$

(4.3.42) 式に (4.3.38) 式、(4.3.39) 式、(4.3.43) 式、(4.3.44) 式、(4.3.45) 式を代入すると成り立つことがわかる。

(9) $\nabla\times\left(\nabla\times\overrightarrow{A}\right)=\nabla\left(\nabla\overrightarrow{A}\right)-\nabla^2\overrightarrow{A}$

$\mathrm{curl}\left(\mathrm{curl}\,\overrightarrow{A}\right)=\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\left(\overrightarrow{A}\right)-\mathrm{div}\left(\mathrm{grad}\,\overrightarrow{A}\right)$

```
kill(all);
load("vect")$
depends([A],[x,y,z]);
MTA:matrix([A[x]],[A[y]],[A[z]]);
curl(transpose(MTA)[1]);
express(%);
ev(%,diff);
curl(%);
express(%);
ev(%,diff);
MT1:transpose(%);
div(transpose(MTA)[1]);
express(%);
ev(%,diff);
grad(%);
express(%);
ev(%,diff);
MT21:transpose(%);
grad(transpose(MTA)[1]);
express(%);
ev(%,diff);
div(%);
express(%);
ev(%,diff);
MT22:transpose(%);
MT2:MT21-MT22;
MT1-MT2;
```

$$\nabla\times\nabla\times\overrightarrow{A}$$
$$=\begin{pmatrix}\frac{d^2}{d\,x\,d\,z}A_z+\frac{d^2}{d\,x\,d\,y}A_y-\frac{d^2}{d\,z^2}A_x-\frac{d^2}{d\,y^2}A_x\\ \frac{d^2}{d\,y\,d\,z}A_z-\frac{d^2}{d\,z^2}A_y-\frac{d^2}{d\,x^2}A_y+\frac{d^2}{d\,x\,d\,y}A_x\\ -\frac{d^2}{d\,y^2}A_z-\frac{d^2}{d\,x^2}A_z+\frac{d^2}{d\,y\,d\,z}A_y+\frac{d^2}{d\,x\,d\,z}A_x\end{pmatrix}\tag{4.3.46}$$

$$\left(\nabla\overrightarrow{A}\right)=\frac{d}{d\,z}A_z+\frac{d}{d\,y}A_y+\frac{d}{d\,x}A_x$$

さらに、

$$\nabla\left(\nabla\overrightarrow{A}\right)=\begin{pmatrix}\frac{d^2}{d\,x\,d\,z}A_z+\frac{d^2}{d\,x\,d\,y}A_y+\frac{d^2}{d\,x^2}A_x\\ \frac{d^2}{d\,y\,d\,z}A_z+\frac{d^2}{d\,y^2}A_y+\frac{d^2}{d\,x\,d\,y}A_x\\ \frac{d^2}{d\,z^2}A_z+\frac{d^2}{d\,y\,d\,z}A_y+\frac{d^2}{d\,x\,d\,z}A_x\end{pmatrix}\tag{4.3.47}$$

(4.3.31) 式から、

$$\nabla^2\overrightarrow{A}=\begin{pmatrix}\frac{d^2}{d\,z^2}A_x+\frac{d^2}{d\,y^2}A_x+\frac{d^2}{d\,x^2}A_x\\ \frac{d^2}{d\,z^2}A_y+\frac{d^2}{d\,y^2}A_y+\frac{d^2}{d\,x^2}A_y\\ \frac{d^2}{d\,z^2}A_z+\frac{d^2}{d\,y^2}A_z+\frac{d^2}{d\,x^2}A_z\end{pmatrix}\tag{4.3.48}$$

(4.3.46) 式、(4.3.47) 式、(4.3.48) 式から、次式が成り立つ。

$$\nabla\times\left(\nabla\times\overrightarrow{A}\right)=\nabla\left(\nabla\overrightarrow{A}\right)-\nabla^2\overrightarrow{A}\tag{4.3.49}$$

また、

$$\nabla^2\overrightarrow{A}=\nabla\left(\nabla\overrightarrow{A}\right)-\nabla\times\left(\nabla\times\overrightarrow{A}\right)\tag{4.3.50}$$

(10) $\left(\vec{A}\nabla\right)\vec{B}$

(4.3.36) 式から、

$$\begin{aligned}&\left(\vec{A}\nabla\right)\vec{B}\\&\quad=\left(\vec{B}\nabla\right)\vec{A}-\left(\nabla\vec{A}\right)\vec{B}\\&\qquad+\left(\nabla\vec{B}\right)\vec{A}-\nabla\times\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\end{aligned}$$

(4.3.42) 式から、

$$\begin{aligned}&\left(\vec{A}\,\nabla\right)\cdot\vec{B}\\&\quad=\nabla\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)-\vec{A}\times\left(\nabla\times\vec{B}\right)\\&\qquad-\vec{B}\times\left(\nabla\times\vec{A}\right)-\left(\vec{B}\,\nabla\right)\cdot\vec{A}\end{aligned}$$

上記二式の和を取ると、

$$\begin{aligned}&\left(\vec{A}\,\nabla\right)\cdot\vec{B}\\&\quad=\frac{1}{2}\Bigg(-\left(\nabla\vec{A}\right)\vec{B}\\&\qquad+\left(\nabla\vec{B}\right)\vec{A}-\nabla\times\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\\&\qquad+\nabla\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)-\vec{A}\times\left(\nabla\times\vec{B}\right)\\&\qquad-\vec{B}\times\left(\nabla\times\vec{A}\right)\Bigg)\end{aligned}\tag{4.3.51}$$

いま、上式を $\vec{B}\rightarrow\vec{A}$ と置くと、下記がえられ、(4.3.50) 式と同じ結果が得られた。

$$\left(\vec{A}\,\nabla\right)\vec{A}=\frac{1}{2}\nabla\left(\vec{A}^2\right)-\vec{A}\times\left(\nabla\times\vec{A}\right)\tag{4.3.52}$$

(4.3.51) 式に (4.3.36) 式を代入し、$\vec{A}$ が定数のベクトルとすると、上式は、

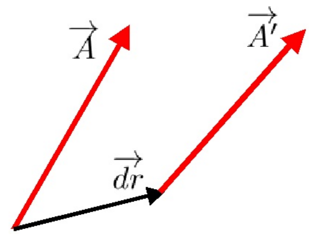
$$\begin{aligned}&2\left(\vec{A}\,\nabla\right)\cdot\vec{B}\\&\quad=-\left(\nabla\vec{A}\right)\vec{B}\\&\qquad+\left(\nabla\vec{B}\right)\vec{A}-\left(\vec{B}\nabla\right)\vec{A}+\left(\nabla\vec{A}\right)\vec{B}\\&\qquad-\left(\nabla\vec{B}\right)\vec{A}+\left(\vec{A}\nabla\right)\vec{B}\\&\qquad+\nabla\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)-\vec{A}\times\left(\nabla\times\vec{B}\right)\\&\qquad-\vec{B}\times\left(\nabla\times\vec{A}\right)\\&\quad=+\left(\vec{A}\nabla\right)\vec{B}\\&\qquad+\nabla\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)-\vec{A}\times\left(\nabla\times\vec{B}\right)\end{aligned}$$

以上から、$\vec{A}$ が定数のベクトルの場合には、

$$\left(\vec{A}\,\nabla\right)\cdot\vec{B}=\nabla\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)+\left(\nabla\times\vec{B}\right)\times\vec{A}\tag{4.3.53}$$

(11) $\vec{A'}=\vec{A}+\left(d\vec{r}\nabla\right)\vec{A}$

```
kill(all);
load("vect")$
depends([A],[x,y,z]);
F:matrix([A[x]],[A[y]],[A[z]]);
DR:matrix([dr[x]],[dr[y]],[dr[z]]);
DR.F;
grad(%);
express(%);
transpose(%);
DRF1:ev(%,diff);
curl(transpose(F)[1]);
express(%);
transpose(%);
DRF2:col(adjoint(transpose(addcol(%,DR,
 matrix([1],[1],[1])))),3);
DRF1+DRF2;
expand(%);
F+%;
```



下記とし、

$$\vec{A}=\begin{pmatrix}A_x\\A_y\\A_z\end{pmatrix},\quad d\vec{r}=\begin{pmatrix}dr_x\\dr_y\\dr_z\end{pmatrix}$$

(4.3.53) 式から、上式を代入すると、

$$\begin{aligned}\vec{A'}=&\vec{A}+\left(d\vec{r}\nabla\right)\vec{A}\\=&\begin{pmatrix}A_x\\A_y\\A_z\end{pmatrix}\\&+\begin{pmatrix}\left(\frac{d}{d\,z}A_x\right)dr_z+\left(\frac{d}{d\,y}A_x\right)dr_y+dr_x\left(\frac{d}{d\,x}A_x\right)\\\left(\frac{d}{d\,z}A_y\right)dr_z+dr_y\left(\frac{d}{d\,y}A_y\right)+dr_x\left(\frac{d}{d\,x}A_y\right)\\dr_z\left(\frac{d}{d\,z}A_z\right)+dr_y\left(\frac{d}{d\,y}A_z\right)+dr_x\left(\frac{d}{d\,x}A_z\right)\end{pmatrix}\end{aligned}\tag{4.3.54}$$

(12) $\nabla\left(f\,\overrightarrow{A}\right)=f\,\nabla\,\overrightarrow{A}+\nabla\,(f)\cdot\overrightarrow{A}$

$\mathrm{div}\,\left(f\,\overrightarrow{A}\right)=f\,\mathrm{div}\,\left(\overrightarrow{A}\right)+\mathrm{grad}\,(f)\cdot\overrightarrow{A}$

```
kill(all);
load("vect")$
depends([f],[x,y,z]);
depends([A],[x,y,z]);
MTA:matrix([A[x]],[A[y]],[A[z]]);
div(transpose(f*MTA)[1]);
express(%);
DV1:ev(%,diff);
div(transpose(MTA)[1]);
DV2:expand(f*express(%));
grad(f);
transpose(express(%));
DV3:%.MTA;
DV1;
DV2+DV3;
```

上式の左辺、右辺を具体的に求めて証明する。左辺は、

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\,\left(f\,\overrightarrow{A}\right)=&f\,\left(\frac{d}{d\,z}\,A_z\right)+\left(\frac{d}{d\,z}\,f\right)\,A_z\\&+f\,\left(\frac{d}{d\,y}\,A_y\right)+\left(\frac{d}{d\,y}\,f\right)\,A_y\\&+f\,\left(\frac{d}{d\,x}\,A_x\right)+\left(\frac{d}{d\,x}\,f\right)\,A_x\end{aligned}$$

右辺第一項は、

$$f\,\mathrm{div}\,\left(\overrightarrow{A}\right)=f\,\left(\frac{d}{d\,z}\,A_z\right)+f\,\left(\frac{d}{d\,y}\,A_y\right)+f\,\left(\frac{d}{d\,x}\,A_x\right)$$

右辺第二項は、

$$\mathrm{grad}\,(f)\cdot\overrightarrow{A}=\left(\frac{d}{d\,z}\,f\right)\,A_z+\left(\frac{d}{d\,y}\,f\right)\,A_y+\left(\frac{d}{d\,x}\,f\right)\,A_x$$

上式から、

$$\mathrm{div}\,\left(f\,\overrightarrow{A}\right)=f\,\mathrm{div}\,\left(\overrightarrow{A}\right)+\mathrm{grad}\,(f)\cdot\overrightarrow{A}\tag{4.3.55}$$

(13)$\nabla\times\left(\overrightarrow{A}\,f\right)$

∇ を作用させないものにサフィックス : 0 を付けると、下記のように書ける。

$$\begin{aligned}\nabla\times\left(\overrightarrow{A}\,f\right)=&\nabla\times\left(\overrightarrow{A_0}\,f\right)+\nabla\times\left(\overrightarrow{A}\,f_0\right)\\=&-\overrightarrow{A}\times(\nabla\,f)+f\left(\nabla\times\overrightarrow{A}\right)\end{aligned}\tag{4.3.56}$$

(14)$\nabla\times(\nabla\,f)=0$

$curl\,grad(f)$

```
kill(all);
load("vect")$
depends([f],[x,y,z]);
grad(f);
express(%);
curl(%);
express(%);
ev(%,diff);
MT1:transpose(%);
```

$$\nabla\,f=\begin{pmatrix}\frac{d}{d\,x}\,f\\\frac{d}{d\,y}\,f\\\frac{d}{d\,z}\,f\end{pmatrix}$$

$$\nabla\times(\nabla\,f)=\nabla\times\begin{pmatrix}\frac{d}{d\,x}\,f\\\frac{d}{d\,y}\,f\\\frac{d}{d\,z}\,f\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\tag{4.3.57}$$

(15)$\nabla\left(\nabla\times\overrightarrow{A}\right)=0$

$div\,curl(\overrightarrow{A})$

```
kill(all);
load("vect")$
depends([a,b,c],[x,y,z]);
MTA:matrix([a],[b],[c]);
curl(transpose(MTA)[1]);
express(%);
ev(%,diff);
div(%);
express(%);
ev(%,diff);
```

$$\nabla\times\overrightarrow{A}=\begin{pmatrix}\frac{d}{d\,y}\,A_z-\frac{d}{d\,z}\,A_y\\ \frac{d}{d\,z}\,A_x-\frac{d}{d\,x}\,A_z\\ \frac{d}{d\,x}\,A_y-\frac{d}{d\,y}\,A_x\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}&\nabla\left(\nabla\times\overrightarrow{A}\right)\\ &\quad=\frac{d}{d\,x}\left(\frac{d}{d\,y}\,A_z-\frac{d}{d\,z}\,A_y\right)\\ &\qquad+\frac{d}{d\,y}\left(\frac{d}{d\,z}\,A_x-\frac{d}{d\,x}\,A_z\right)\\ &\qquad+\frac{d}{d\,z}\left(\frac{d}{d\,x}\,A_y-\frac{d}{d\,y}\,A_x\right)=0\end{aligned}\tag{4.3.58}$$

(16) $\left(\vec{A}\nabla\right)\left(\vec{B}\cdot\vec{C}\right)=\vec{B}\left(\left(\vec{A}\nabla\right)\vec{C}\right)+\vec{C}\left(\left(\vec{A}\nabla\right)\vec{B}\right)$

∇ を作用させないものにサフィックス：0 を付けると、下記のように書け、ベクトルの内積は交換則が成り立つので、

$$\left(\vec{A}\nabla\right)\left(\vec{B}\cdot\vec{C}\right)=\left(\vec{A}\nabla\right)\left(\vec{B_0}\cdot\vec{C}+\vec{B}\cdot\vec{C_0}\right)=\vec{B}\left(\vec{A}\nabla\right)\vec{C}+\vec{C}\left(\vec{A}\nabla\right)\vec{B} \tag{4.3.59}$$

```
kill(all);
load("vect")$
depends([A,B,C],[x,y,z]);
NABM:matrix([d/dx],[d/dy],[d/dz]);
MTA:matrix([A[x]],[A[y]],[A[z]]);
MTB:matrix([B[x]],[B[y]],[B[z]]);
MTC:matrix([C[x]],[C[y]],[C[z]]);
P0:MTB.MTC;
MTA.NABM;
P01:A[x]*'diff(P0,x,1)+A[y]*'diff(P0,y,1)
 +A[z]*'diff(P0,z,1);
P02:ev(%,diff);
MTA.NABM;
%*MTC;
expand(%);
P21:A[x]*diff(C[x],x,1)+A[y]*
 diff(C[x],y,1)+A[z]*diff(C[x],z,1);
```

```
P22:subst([C[x]=C[y]],P21);
P23:subst([C[x]=C[z]],P21);
matrix([P21],[P22],[P23]);
P2:MTB.%;
MTA.NABM;
%*MTB;
expand(%);
P31:A[x]*diff(B[x],x,1)+A[y]*
 diff(B[x],y,1)+A[z]*diff(B[x],z,1);
P32:subst([B[x]=B[y]],P31);
P33:subst([B[x]=B[z]],P31);
matrix([P31],[P32],[P33]);
P3:MTC.%;
P02-P2-P3;
factor(%);
factor(%);
```

(4.3.59) 式の左辺は、

$$\begin{aligned}
&\left(\vec{A}\nabla\right)\left(\vec{B}\cdot\vec{C}\right)\\
&=\left(\vec{A}\nabla\right)\left(B_z\,C_z+B_y\,C_y+B_x\,C_x\right)\\
&=A_z\,\left(\frac{d}{d\,z}\,\left(B_z\,C_z+B_y\,C_y+B_x\,C_x\right)\right)+A_y\,\left(\frac{d}{d\,y}\,\left(B_z\,C_z+B_y\,C_y+B_x\,C_x\right)\right)\\
&\quad+A_x\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\left(B_z\,C_z+B_y\,C_y+B_x\,C_x\right)\right)\\
&=A_z\,\left(B_z\,\left(\frac{d}{d\,z}\,C_z\right)+C_z\,\left(\frac{d}{d\,z}\,B_z\right)+B_y\,\left(\frac{d}{d\,z}\,C_y\right)+C_y\,\left(\frac{d}{d\,z}\,B_y\right)+B_x\,\left(\frac{d}{d\,z}\,C_x\right)+C_x\,\left(\frac{d}{d\,z}\,B_x\right)\right)\\
&\quad+A_y\,\left(B_z\,\left(\frac{d}{d\,y}\,C_z\right)+C_z\,\left(\frac{d}{d\,y}\,B_z\right)+B_y\,\left(\frac{d}{d\,y}\,C_y\right)+C_y\,\left(\frac{d}{d\,y}\,B_y\right)+B_x\,\left(\frac{d}{d\,y}\,C_x\right)+C_x\,\left(\frac{d}{d\,y}\,B_x\right)\right)\\
&\quad+A_x\,\left(B_z\,\left(\frac{d}{d\,x}\,C_z\right)+C_z\,\left(\frac{d}{d\,x}\,B_z\right)+B_y\,\left(\frac{d}{d\,x}\,C_y\right)+C_y\,\left(\frac{d}{d\,x}\,B_y\right)+B_x\,\left(\frac{d}{d\,x}\,C_x\right)+C_x\,\left(\frac{d}{d\,x}\,B_x\right)\right)
\end{aligned} \tag{4.3.60}$$

(4.3.59) 式の右辺第一項は、

$$\begin{aligned}
\vec{B}\left(\vec{A}\nabla\right)\vec{C}=&\vec{B}\begin{pmatrix}\left(\frac{d}{d\,z}\,C_x\right)\,A_z+\left(\frac{d}{d\,y}\,C_x\right)\,A_y+A_x\,\left(\frac{d}{d\,x}\,C_x\right)\\ \left(\frac{d}{d\,z}\,C_y\right)\,A_z+A_y\,\left(\frac{d}{d\,y}\,C_y\right)+A_x\,\left(\frac{d}{d\,x}\,C_y\right)\\ A_z\,\left(\frac{d}{d\,z}\,C_z\right)+A_y\,\left(\frac{d}{d\,y}\,C_z\right)+A_x\,\left(\frac{d}{d\,x}\,C_z\right)\end{pmatrix}\\
=&B_z\,\left(A_z\,\left(\frac{d}{d\,z}\,C_z\right)+A_y\,\left(\frac{d}{d\,y}\,C_z\right)+A_x\,\left(\frac{d}{d\,x}\,C_z\right)\right)\\
&+B_y\,\left(\left(\frac{d}{d\,z}\,C_y\right)\,A_z+A_y\,\left(\frac{d}{d\,y}\,C_y\right)+A_x\,\left(\frac{d}{d\,x}\,C_y\right)\right)\\
&+B_x\,\left(\left(\frac{d}{d\,z}\,C_x\right)\,A_z+\left(\frac{d}{d\,y}\,C_x\right)\,A_y+A_x\,\left(\frac{d}{d\,x}\,C_x\right)\right)
\end{aligned} \tag{4.3.61}$$

(4.3.59) 式の右辺第二項は、

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{C}\left(\overrightarrow{A}\nabla\right)\overrightarrow{B} =& \overrightarrow{C}\begin{pmatrix} \left(\frac{d}{d\,z}\,B_x\right)\,A_z + \left(\frac{d}{d\,y}\,B_x\right)\,A_y + A_x\,\left(\frac{d}{d\,x}\,B_x\right) \\ \left(\frac{d}{d\,z}\,B_y\right)\,A_z + A_y\,\left(\frac{d}{d\,y}\,B_y\right) + A_x\,\left(\frac{d}{d\,x}\,B_y\right) \\ A_z\,\left(\frac{d}{d\,z}\,B_z\right) + A_y\,\left(\frac{d}{d\,y}\,B_z\right) + A_x\,\left(\frac{d}{d\,x}\,B_z\right) \end{pmatrix} \\
=& C_z\,\left(A_z\,\left(\frac{d}{d\,z}\,B_z\right) + A_y\,\left(\frac{d}{d\,y}\,B_z\right) + A_x\,\left(\frac{d}{d\,x}\,B_z\right)\right) \\
&+ C_y\,\left(\left(\frac{d}{d\,z}\,B_y\right)\,A_z + A_y\,\left(\frac{d}{d\,y}\,B_y\right) + A_x\,\left(\frac{d}{d\,x}\,B_y\right)\right) \\
&+ C_x\,\left(\left(\frac{d}{d\,z}\,B_x\right)\,A_z + \left(\frac{d}{d\,y}\,B_x\right)\,A_y + A_x\,\left(\frac{d}{d\,x}\,B_x\right)\right)
\end{aligned}
\tag{4.3.62}
$$

(4.3.60) 式、(4.3.61) 式、(4.3.62) 式から (4.3.59) 式が成り立つのがわかる。

(17) $\left(\vec{A}\nabla\right)\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)=\left(\left(\vec{A}\nabla\right)\vec{B}\right)\times\vec{C}+\vec{B}\times\left(\left(\vec{A}\nabla\right)\vec{C}\right)$

∇ を作用させないものにサフィックス：0 を付けると、下記のように書ける。

$$\left(\vec{A}\nabla\right)\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)=\left(\vec{A}\nabla\right)\left(\vec{B}\times\vec{C}_0+\vec{B}_0\times\vec{C}\right)=\left(\left(\vec{A}\nabla\right)\vec{B}\right)\times\vec{C}+\vec{B}\times\left(\left(\vec{A}\nabla\right)\vec{C}\right) \tag{4.3.63}$$

```
kill(all);
load("vect")$
depends([A,B,C],[x,y,z]);
NABM:matrix([d/dx],[d/dy],[d/dz]);
MTA:matrix([A[x]],[A[y]],[A[z]]);
MTB:matrix([B[x]],[B[y]],[B[z]]);
MTC:matrix([C[x]],[C[y]],[C[z]]);
MTA.NABM;
P0:col(adjoint(transpose(addcol(MTB,MTC,
 matrix([1],[1],[1])))),3);
P01:A[x]*'diff(P0,x,1)+A[y]*'diff(P0,y,1)
 +A[z]*'diff(P0,z,1);
P02:ev(%,diff);
```

```
P11:A[x]*'diff(MTB,x,1)+A[y]*'diff(MTB,
 y,1)+A[z]*'diff(MTB,z,1);
P12:ev(%,diff);
P13:col(adjoint(transpose(addcol(P12,MTC,
 matrix([1],[1],[1])))),3);
P21:A[x]*'diff(MTC,x,1)+A[y]*'diff(MTC,y,
 1)+A[z]*'diff(MTC,z,1);
P22:ev(%,diff);
P23:col(adjoint(transpose(addcol(MTB,P22,
 matrix([1],[1],[1])))),3);
P02-P13-P23;
factor(%);
```

(4.3.63) 式の左辺は、

$$\left(\vec{A}\nabla\right)\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)=\left(\vec{A}\nabla\right)\begin{pmatrix}B_y\,C_z-C_y\,B_z\\C_x\,B_z-B_x\,C_z\\B_x\,C_y-C_x\,B_y\end{pmatrix}$$
$$=A_z\left(\frac{d}{d\,z}\begin{pmatrix}B_y\,C_z-C_y\,B_z\\C_x\,B_z-B_x\,C_z\\B_x\,C_y-C_x\,B_y\end{pmatrix}\right)+A_y\left(\frac{d}{d\,y}\begin{pmatrix}B_y\,C_z-C_y\,B_z\\C_x\,B_z-B_x\,C_z\\B_x\,C_y-C_x\,B_y\end{pmatrix}\right)+A_x\left(\frac{d}{d\,x}\begin{pmatrix}B_y\,C_z-C_y\,B_z\\C_x\,B_z-B_x\,C_z\\B_x\,C_y-C_x\,B_y\end{pmatrix}\right)$$

上式の微分を実行すると、

$$\left(\vec{A}\nabla\right)\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)=\left(\begin{matrix}A_z\,\left(B_y\,\left(\frac{d}{d\,z}\,C_z\right)-C_y\,\left(\frac{d}{d\,z}\,B_z\right)+\left(\frac{d}{d\,z}\,B_y\right)\,C_z-\left(\frac{d}{d\,z}\,C_y\right)\,B_z\right)\\A_z\,\left(-B_x\,\left(\frac{d}{d\,z}\,C_z\right)+C_x\,\left(\frac{d}{d\,z}\,B_z\right)-\left(\frac{d}{d\,z}\,B_x\right)\,C_z+\left(\frac{d}{d\,z}\,C_x\right)\,B_z\right)\\\left(B_x\,\left(\frac{d}{d\,z}\,C_y\right)-C_x\,\left(\frac{d}{d\,z}\,B_y\right)+\left(\frac{d}{d\,z}\,B_x\right)\,C_y-\left(\frac{d}{d\,z}\,C_x\right)\,B_y\right)\,A_z\end{matrix}\right.$$
$$\begin{matrix}+A_y\,\left(B_y\,\left(\frac{d}{d\,y}\,C_z\right)-C_y\,\left(\frac{d}{d\,y}\,B_z\right)+\left(\frac{d}{d\,y}\,B_y\right)\,C_z-\left(\frac{d}{d\,y}\,C_y\right)\,B_z\right)\\+A_y\,\left(-B_x\,\left(\frac{d}{d\,y}\,C_z\right)+C_x\,\left(\frac{d}{d\,y}\,B_z\right)-\left(\frac{d}{d\,y}\,B_x\right)\,C_z+\left(\frac{d}{d\,y}\,C_x\right)\,B_z\right)\\+A_y\,\left(B_x\,\left(\frac{d}{d\,y}\,C_y\right)-C_x\,\left(\frac{d}{d\,y}\,B_y\right)+\left(\frac{d}{d\,y}\,B_x\right)\,C_y-\left(\frac{d}{d\,y}\,C_x\right)\,B_y\right)\end{matrix} \tag{4.3.64}$$
$$\left.\begin{matrix}+A_x\,\left(B_y\,\left(\frac{d}{d\,x}\,C_z\right)-C_y\,\left(\frac{d}{d\,x}\,B_z\right)+\left(\frac{d}{d\,x}\,B_y\right)\,C_z-\left(\frac{d}{d\,x}\,C_y\right)\,B_z\right)\\+A_x\,\left(-B_x\,\left(\frac{d}{d\,x}\,C_z\right)+C_x\,\left(\frac{d}{d\,x}\,B_z\right)-\left(\frac{d}{d\,x}\,B_x\right)\,C_z+\left(\frac{d}{d\,x}\,C_x\right)\,B_z\right)\\+A_x\,\left(B_x\,\left(\frac{d}{d\,x}\,C_y\right)-C_x\,\left(\frac{d}{d\,x}\,B_y\right)+\left(\frac{d}{d\,x}\,B_x\right)\,C_y-\left(\frac{d}{d\,x}\,C_x\right)\,B_y\right)\end{matrix}\right)$$

(4.3.63) 式の右辺第一項は下記となり、微分を実行すると、

$$
\begin{aligned}
&\left(\left(\overrightarrow{A}\nabla\right)\overrightarrow{B}\right)\times\overrightarrow{C}\\
&=\left(\left(\frac{d}{d\,z}\begin{pmatrix}B_x\\B_y\\B_z\end{pmatrix}\right)A_z+\left(\frac{d}{d\,y}\begin{pmatrix}B_x\\B_y\\B_z\end{pmatrix}\right)A_y+A_x\left(\frac{d}{d\,x}\begin{pmatrix}B_x\\B_y\\B_z\end{pmatrix}\right)\right)\times\overrightarrow{C}\\
&=\begin{pmatrix}\left(\frac{d}{d\,z}B_x\right)A_z+\left(\frac{d}{d\,y}B_x\right)A_y+A_x\left(\frac{d}{d\,x}B_x\right)\\ \left(\frac{d}{d\,z}B_y\right)A_z+A_y\left(\frac{d}{d\,y}B_y\right)+A_x\left(\frac{d}{d\,x}B_y\right)\\ A_z\left(\frac{d}{d\,z}B_z\right)+A_y\left(\frac{d}{d\,y}B_z\right)+A_x\left(\frac{d}{d\,x}B_z\right)\end{pmatrix}\times\overrightarrow{C}\\
&=\begin{pmatrix}\left(\left(\frac{d}{d\,z}B_y\right)A_z+A_y\left(\frac{d}{d\,y}B_y\right)+A_x\left(\frac{d}{d\,x}B_y\right)\right)C_z-C_y\left(A_z\left(\frac{d}{d\,z}B_z\right)+A_y\left(\frac{d}{d\,y}B_z\right)+A_x\left(\frac{d}{d\,x}B_z\right)\right)\\ C_x\left(A_z\left(\frac{d}{d\,z}B_z\right)+A_y\left(\frac{d}{d\,y}B_z\right)+A_x\left(\frac{d}{d\,x}B_z\right)\right)-\left(\left(\frac{d}{d\,z}B_x\right)A_z+\left(\frac{d}{d\,y}B_x\right)A_y+A_x\left(\frac{d}{d\,x}B_x\right)\right)C_z\\ C_y\left(\left(\frac{d}{d\,z}B_x\right)A_z+\left(\frac{d}{d\,y}B_x\right)A_y+A_x\left(\frac{d}{d\,x}B_x\right)\right)-C_x\left(\left(\frac{d}{d\,z}B_y\right)A_z+A_y\left(\frac{d}{d\,y}B_y\right)+A_x\left(\frac{d}{d\,x}B_y\right)\right)\end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{4.3.65}
$$

(4.3.63) 式の右辺第二項は下記となり、微分を実行すると、

$$
\begin{aligned}
&\overrightarrow{B}\times\left(\left(\overrightarrow{A}\nabla\right)\overrightarrow{C}\right)\\
&=\overrightarrow{B}\times\left(\left(\frac{d}{d\,z}\begin{pmatrix}C_x\\C_y\\C_z\end{pmatrix}\right)A_z+\left(\frac{d}{d\,y}\begin{pmatrix}C_x\\C_y\\C_z\end{pmatrix}\right)A_y+A_x\left(\frac{d}{d\,x}\begin{pmatrix}C_x\\C_y\\C_z\end{pmatrix}\right)\right)\\
&=\overrightarrow{B}\times\begin{pmatrix}\left(\frac{d}{d\,z}C_x\right)A_z+\left(\frac{d}{d\,y}C_x\right)A_y+A_x\left(\frac{d}{d\,x}C_x\right)\\ \left(\frac{d}{d\,z}C_y\right)A_z+A_y\left(\frac{d}{d\,y}C_y\right)+A_x\left(\frac{d}{d\,x}C_y\right)\\ A_z\left(\frac{d}{d\,z}C_z\right)+A_y\left(\frac{d}{d\,y}C_z\right)+A_x\left(\frac{d}{d\,x}C_z\right)\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}B_y\left(A_z\left(\frac{d}{d\,z}C_z\right)+A_y\left(\frac{d}{d\,y}C_z\right)+A_x\left(\frac{d}{d\,x}C_z\right)\right)-\left(\left(\frac{d}{d\,z}C_y\right)A_z+A_y\left(\frac{d}{d\,y}C_y\right)+A_x\left(\frac{d}{d\,x}C_y\right)\right)B_z\\ \left(\left(\frac{d}{d\,z}C_x\right)A_z+\left(\frac{d}{d\,y}C_x\right)A_y+A_x\left(\frac{d}{d\,x}C_x\right)\right)B_z-B_x\left(A_z\left(\frac{d}{d\,z}C_z\right)+A_y\left(\frac{d}{d\,y}C_z\right)+A_x\left(\frac{d}{d\,x}C_z\right)\right)\\ B_x\left(\left(\frac{d}{d\,z}C_y\right)A_z+A_y\left(\frac{d}{d\,y}C_y\right)+A_x\left(\frac{d}{d\,x}C_y\right)\right)-B_y\left(\left(\frac{d}{d\,z}C_x\right)A_z+\left(\frac{d}{d\,y}C_x\right)A_y+A_x\left(\frac{d}{d\,x}C_x\right)\right)\end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{4.3.66}
$$

(4.3.64) 式、(4.3.65) 式、(4.3.66) 式から (4.3.63) 式が成り立つのがわかる。

4.4　ベクトルの積分

4.4.1　多重積分

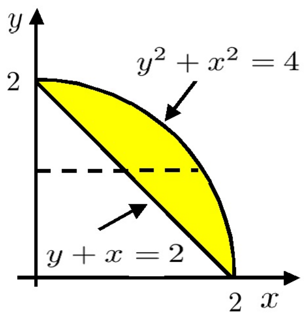
例 1　$\int_0^1 \int_1^2 x - y dydx$

```
kill(all);
I='integrate('integrate(x-y,y,1,2),x,0,1);
ev(%,integrate);
```

$$I = \int_0^1 \int_1^2 x - ydydx = -1$$

例 2　$\int\int_S xdxdy \quad S: y^2 + x^2 \leq 4, \quad y + x \geq 2$

```
kill(all);
assume(y<2);
assume(y>0);
I='integrate('integrate(x,x,2-y,
 sqrt(4-y^2)),y,0,2);
ev(%,integrate);
```



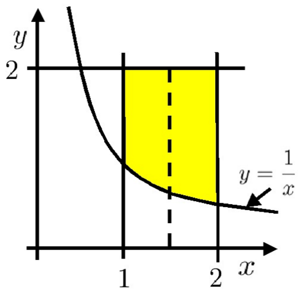
まず、積分範囲を考慮して y を一定として x で積分、そして y で積分すると、

$$I = \int_0^2 \int_{2-y}^{\sqrt{4-y^2}} xdxdy = \frac{4}{3}$$

例 3　$\int\int_S x\,(x - 3\,y)\,dydx$

$$S: 1 \leq x \leq 2, \quad \frac{1}{x} \leq y \leq 2$$

```
kill(all);
I='integrate('integrate(x*(x-3*y),y,
 1/x,2),x,1,2);
ev(%,integrate);
```



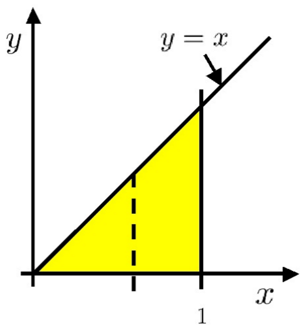
まず、積分範囲を考慮して x を一定として y で積分、そして x で積分すると、

$$I = \int_1^2 x \int_{\frac{1}{x}}^2 x - 3\,ydydx = \frac{3\log(2)}{2} - \frac{35}{6}$$

例 4　$\int\int_S \sqrt{4\,x^2 - y^2}dydx$

$$S: 0 \leq y \leq x, \quad 0 \leq x \leq 1$$

```
kill(all);
assume(x>0);
I='integrate('integrate(sqrt(4*x^2-y^2),
 y,0,x),x,0,1);
ev(%,integrate);
```



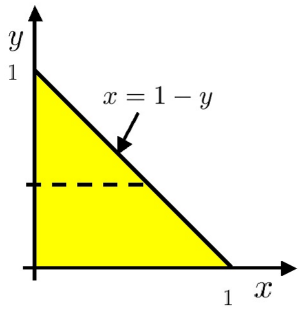
まず、積分範囲を考慮して x を一定として y で積分、そして x で積分すると、

$$I = \int_0^1 \int_0^x \sqrt{4\,x^2 - y^2}dydx = \frac{2\,\pi + 3^{\frac{3}{2}}}{18}$$

例 5　$\iint_S y^2+x^2dxdy$

$$S: x\geq 0,\ y\geq 0,\ x+y\leq 1$$

```
kill(all);
I='integrate('integrate(x^2+y^2,x,0,1-y),
 y,0,1);
ev(%,integrate);
```



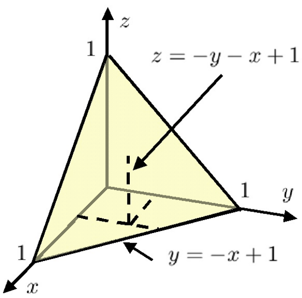
まず、積分範囲を考慮して y を一定として x で積分、そして y で積分すると、

$$I=\int_0^1\int_0^{1-y}y^2+x^2dxdy=\frac{1}{6}$$

例 6　$\iiint_V z+y+xdzdydx$

$$S: x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0,\ x+y+z\leq 1$$

```
kill(all);
I='integrate('integrate('integrate(x+y+z,
 z,0,1-x-y),y,0,1-x),x,0,1);
ev(%,integrate);
```



まず、積分範囲を考慮して x,y を一定として z で積分、x を一定として y で積分、そして x で積分すると、

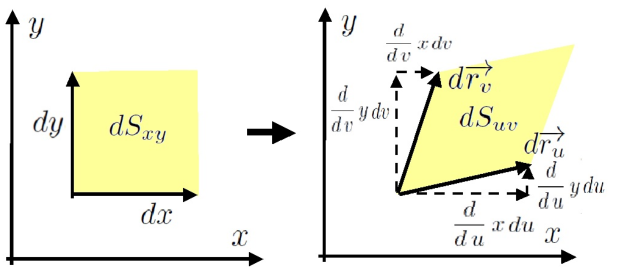
$$I=\int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{-y-x+1}z+y+xdzdydx=\frac{1}{8}$$

4.4.2　多重積分 (変数変換)

積分範囲によっては xyz の直角座標系より他の座標系を用いた方が簡素化されることがある。

二重積分の変数変換

```
kill(all);
load("vect")$
depends([x,y,z],[u,v,w]);
RU2:matrix([diff(x,u,1)],[diff(y,u,1)],
 [0]);
RV2:matrix([diff(x,v,1)],[diff(y,v,1)],
 [0]);
RUV2:col(adjoint(transpose(addcol(RU2,
 RV2,matrix([1],[1],[1])))),3);
DUV21:matrix([RU2[1][1],RU2[2][1]],
 [RV2[1][1],RV2[2][1]]);
DUV21:determinant(DUV21);
DUV21-RUV2[3][1];
```



x,y 座標を u,v で表すとすると、u 曲線の接線ベクトル：$d\vec{r_u}$、v 曲線の接線ベクトル：$d\vec{r_v}$ は上図から、

$$d\vec{r_u}=\begin{pmatrix}\frac{d}{du}x\\ \frac{d}{du}y\\ 0\end{pmatrix}du,\quad d\vec{r_v}=\begin{pmatrix}\frac{d}{dv}x\\ \frac{d}{dv}y\\ 0\end{pmatrix}dv$$

上記のベクトルの平行四辺形の面積：dS_{uv} は 79 頁から次式となる。

$$\begin{aligned}dS_{uv}&=|d\vec{r_u}\times d\vec{r_v}|\\&=\left(\left(\frac{d}{du}x\right)\left(\frac{d}{dv}y\right)-\left(\frac{d}{dv}x\right)\left(\frac{d}{du}y\right)\right)du\,dv\end{aligned}\tag{4.4.1}$$

また、下記のヤコビアン (ヤコビの行列式)：J からも得られる。

$$\begin{aligned}J&=\begin{vmatrix}\frac{d}{du}x & \frac{d}{du}y\\ \frac{d}{dv}x & \frac{d}{dv}y\end{vmatrix}\\&=\left(\frac{d}{du}x\right)\left(\frac{d}{dv}y\right)-\left(\frac{d}{dv}x\right)\left(\frac{d}{du}y\right)\end{aligned}\tag{4.4.2}$$

これにより、$dS_{xy}=dxdy\rightarrow dS_{uv}$ に置き換えることができる。

三重積分の変数変換

```
RU1:matrix([diff(x,u,1)],[diff(y,u,1)],
 [diff(z,u,1)]);
RV1:matrix([diff(x,v,1)],[diff(y,v,1)],
 [diff(z,v,1)]);
RW1:matrix([diff(x,w,1)],[diff(y,w,1)],
 [diff(z,w,1)]);
RUVW1:col(adjoint(transpose(addcol(RU1,
 RV1,matrix([1],[1],[1])))),3);
RUVW2:%.RW1;
DUV3:matrix(transpose(RU1)[1],
 transpose(RV1)[1],transpose(RW1)[1]);
DUV31:determinant(DUV3);
RUVW2-DUV31;
factor(%);
```

x, y, z 座標を u, v, w で表すとすると、u 曲線の接線ベクトル：$d\overrightarrow{r_u}$、v 曲線の接線ベクトル：$d\overrightarrow{r_v}$、w 曲線の接線ベクトル：$d\overrightarrow{r_w}$ は、

$$d\overrightarrow{r_u} = \begin{pmatrix} \frac{d}{d\,u}\,x \\ \frac{d}{d\,u}\,y \\ \frac{d}{d\,u}\,z \end{pmatrix} du \quad d\overrightarrow{r_v} = \begin{pmatrix} \frac{d}{d\,v}\,x \\ \frac{d}{d\,v}\,y \\ \frac{d}{d\,v}\,z \end{pmatrix} dv$$

$$d\overrightarrow{r_w} = \begin{pmatrix} \frac{d}{d\,w}\,x \\ \frac{d}{d\,w}\,y \\ \frac{d}{d\,w}\,z \end{pmatrix} dw$$

上記のベクトルの平行六面体の体積：dV_{uvw} は 80 頁から次式となる。

$$\begin{aligned}
&dV_{uvw} = d\overrightarrow{r_u} \times d\overrightarrow{r_v} \cdot d\overrightarrow{r_w} \\
&= \left(\left(\frac{d}{d\,u}\,x\right)\left(\frac{d}{d\,v}\,y\right) - \left(\frac{d}{d\,v}\,x\right)\left(\frac{d}{d\,u}\,y\right)\right)\left(\frac{d}{d\,w}\,z\right) \\
&+ \left(\frac{d}{d\,w}\,x\right)\left(\left(\frac{d}{d\,u}\,y\right)\left(\frac{d}{d\,v}\,z\right) - \left(\frac{d}{d\,v}\,y\right)\left(\frac{d}{d\,u}\,z\right)\right) \\
&+ \left(\frac{d}{d\,w}\,y\right)\left(\left(\frac{d}{d\,v}\,x\right)\left(\frac{d}{d\,u}\,z\right) - \left(\frac{d}{d\,u}\,x\right)\left(\frac{d}{d\,v}\,z\right)\right) \\
&\times\ du\,dv\,dw
\end{aligned} \tag{4.4.3}$$

また、下記のヤコビアン (ヤコビの行列式)：J からも得られる。

$$J = \begin{vmatrix} \frac{d}{d\,u}\,x & \frac{d}{d\,u}\,y & \frac{d}{d\,u}\,z \\ \frac{d}{d\,v}\,x & \frac{d}{d\,v}\,y & \frac{d}{d\,v}\,z \\ \frac{d}{d\,w}\,x & \frac{d}{d\,w}\,y & \frac{d}{d\,w}\,z \end{vmatrix} \tag{4.4.4}$$

これにより、$dV_{xyz} = dxdydz \to dV_{uvw}$ に置き換えることができる。

二重積分の変数変換 (極座標)

```
RU1:matrix([diff(x,u,1)],[diff(y,u,1)],
 [diff(z,u,1)]);
RV1:matrix([diff(x,v,1)],[diff(y,v,1)],
 [diff(z,v,1)]);
RW1:matrix([diff(x,w,1)],[diff(y,w,1)],
 [diff(z,w,1)]);
RUVW1:col(adjoint(transpose(addcol(RU1,
 RV1,matrix([1],[1],[1])))),3);
RUVW2:%.RW1;
DUV3:matrix(transpose(RU1)[1],transpose(
 RV1[1],transpose(RW1)[1]);
DUV31:determinant(DUV3);
RUVW2-DUV31;
factor(%);
```

xy 座標と二次元極座標の関係は下記である。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\theta) \\ r\sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}$$

上式を r、θ で微分すると、

$$d\overrightarrow{r_r} = \begin{pmatrix} \frac{d}{d\,r}\,x \\ \frac{d}{d\,r}\,y \\ 0 \end{pmatrix} dr = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} dr$$

$$d\overrightarrow{r_\theta} = \begin{pmatrix} \frac{d}{d\,\theta}\,x \\ \frac{d}{d\,\theta}\,y \\ 0 \end{pmatrix} d\theta = \begin{pmatrix} -r\sin(\theta) \\ r\cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} d\theta$$

(4.4.1) 式と上式から、

$$d\overrightarrow{r_r} \times d\overrightarrow{r_\theta} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r\sin(\theta)^2 + r\cos(\theta)^2 \end{pmatrix} dr\,d\theta$$

以上から、

$$dS_{r\theta} = r\,dr\,d\theta \tag{4.4.5}$$

また、ヤコビアン (ヤコビの行列式)：J からは、

$$J = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -r\sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{vmatrix} = r$$

三重積分の変数変換 (円柱座標)

```
kill(all);
load("vect")$
depends([x,y],[r,\theta,z]);
XYZ2:matrix([x],[y],[z])=matrix([r*cos(
 \theta)],[r*sin(\theta)],[z]);
DXYR1:diff(XYZ2,r,1);
DXYT1:diff(XYZ2,\theta,1);
DXYZ1:diff(XYZ2,z,1);
col(adjoint(transpose(addcol(rhs(DXYR1),
 rhs(DXYT1),matrix([1],[1],[1])))),3);
%.rhs(DXYZ1);
trigsimp(%);
matrix([rhs(DXYR1)[1][1],rhs(DXYR1)[2]
 [1],rhs(DXYR1)[3][1]],[rhs(DXYT1)[1][1],
 rhs(DXYT1)[2][1],rhs(DXYT1)[3][1]],
 [rhs(DXYZ1)[1][1],rhs(DXYZ1)[2][1],
 rhs(DXYZ1)[3][1]]);
determinant(%);
trigsimp(%);
```

xyz 座標と円柱座標の関係は下記である。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\theta) \\ r\sin(\theta) \\ z \end{pmatrix}$$

上式を r、θ、z で微分すると、

$$d\overrightarrow{r_r} = \begin{pmatrix} \frac{d}{dr}x \\ \frac{d}{dr}y \\ \frac{d}{dr}z \end{pmatrix} dr = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} dr$$

$$d\overrightarrow{r_\theta} = \begin{pmatrix} \frac{d}{d\theta}x \\ \frac{d}{d\theta}y \\ \frac{d}{d\theta}z \end{pmatrix} d\theta = \begin{pmatrix} -r\sin(\theta) \\ r\cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} d\theta$$

$$d\overrightarrow{r_z} = \begin{pmatrix} \frac{d}{dz}x \\ \frac{d}{dz}y \\ \frac{d}{dz}z \end{pmatrix} dz = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dz$$

(4.4.3) 式に上式を代入し、

$$d\overrightarrow{r_r} \times d\overrightarrow{r_\theta} \cdot \overrightarrow{r_z} = r\,dr\,d\theta\,dz$$

以上から、

$$dS_{r\,\theta\,z} = r\,dr\,d\theta\,dz \tag{4.4.6}$$

また、ヤコビアン (ヤコビの行列式)：J からは、

$$J = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -r\sin(\theta) & r\cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

三重積分の変数変換 (極座標)

```
kill(all);
load("vect")$
depends([x,y,z],[r,\theta,\psi]);
XYZ2:matrix([x],[y],[z])=matrix([r*sin(
 \theta)*cos(\psi)],[r*sin(\theta)
 *sin(\psi)],[r*cos(\theta)]);
DXYR1:diff(XYZ2,r,1);
DXYT1:diff(XYZ2,\theta,1);
DXYZ1:diff(XYZ2,\psi,1);
col(adjoint(transpose(addcol(rhs(DXYR1),
 rhs(DXYT1),matrix([1],[1],[1])))),3);
%.rhs(DXYZ1);
trigsimp(%);
matrix([rhs(DXYR1)[1][1],rhs(DXYR1)[2][1],
 rhs(DXYR1)[3][1]],[rhs(DXYT1)[1][1],
 rhs(DXYT1)[2][1],rhs(DXYT1)[3][1]],
 [rhs(DXYZ1)[1][1],rhs(DXYZ1)[2][1],
 rhs(DXYZ1)[3][1]]);
determinant(%);
trigsimp(%);
```

xyz 座標と三次元極座標の関係は下記である。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\psi)\ r\sin(\theta) \\ \sin(\psi)\ r\sin(\theta) \\ r\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

上式を r、θ、ψ で微分すると、

$$d\overrightarrow{r_r} = \begin{pmatrix} \frac{d}{dr}x \\ \frac{d}{dr}y \\ \frac{d}{dr}z \end{pmatrix} dr = \begin{pmatrix} \cos(\psi)\ \sin(\theta) \\ \sin(\psi)\ \sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix} dr$$

$$d\overrightarrow{r_\theta} = \begin{pmatrix} \frac{d}{d\theta}x \\ \frac{d}{d\theta}y \\ \frac{d}{d\theta}z \end{pmatrix} d\theta = \begin{pmatrix} \cos(\psi)\ r\cos(\theta) \\ \sin(\psi)\ r\cos(\theta) \\ -r\sin(\theta) \end{pmatrix} d\theta$$

$$d\overrightarrow{r_\psi} = \begin{pmatrix} \frac{d}{d\psi}x \\ \frac{d}{d\psi}y \\ \frac{d}{d\psi}z \end{pmatrix} d\psi = \begin{pmatrix} -\sin(\psi)\ r\sin(\theta) \\ \cos(\psi)\ r\sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} d\psi$$

(4.4.3) 式に上式を代入し、

$$d\overrightarrow{r_r} \times d\overrightarrow{r_\theta} \cdot \overrightarrow{r_\psi} = dS_{r\,\theta\,\psi} = r^2\sin(\theta)\ dr\,d\theta\,dz \tag{4.4.7}$$

また、ヤコビアン (ヤコビの行列式)：J からは、

$$J = \begin{vmatrix} \cos(\psi)\ \sin(\theta) & \sin(\psi)\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \\ \cos(\psi)\ r\cos(\theta) & \sin(\psi)\ r\cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ -\sin(\psi)\ r\sin(\theta) & \cos(\psi)\ r\sin(\theta) & 0 \end{vmatrix}$$

$$= r^2\sin(\theta)$$

例 1　円板の面積：$\iint_S dx\,dy \quad S : x^2+y^2 \le R^2$

```
kill(all);
DI1:1;
I1:'integrate('integrate(DI1,x),y);
I='integrate('integrate(DI1*r,r,0,R),
 \theta,0,2*%pi);
ev(%,integrate);
```

積分範囲が半径：R の円内であるから、二次元極座標の変数変換を行って、

$$\iint_S dx\,dy = \int_0^R \int_0^{2\pi} r\,d\theta dr I = 2\pi \int_0^R r dr = \pi R^2$$

例 2　円板の慣性モーメント：$\iint_S x^2+y^2 dx\,dy$

$S : x^2+y^2 \le R^2$

```
kill(all);
DI1:x^2+y^2;
I1:'integrate('integrate(DI1,x),y);
X1:x=r*cos(\theta);
Y1:y=r*sin(\theta);
subst([X1,Y1],DI1);
DI2:trigsimp(%);
I='integrate('integrate(DI2*r,r,0,R),
 \theta,0,2*%pi);
ev(%,integrate);
```

積分範囲が半径：R の円内であるから、二次元極座標の下記の変数変換を行って、

$$x = r\cos(\theta), \quad y = r\sin(\theta)$$

被積分関数に上式を代入し、

$$y^2+x^2 \to r^2\sin(\theta)^2 + r^2\cos(\theta)^2 = r^2$$

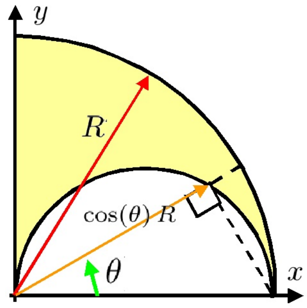
積分は、

$$\iint_S y^2+x^2 dxdy = \int_0^R \int_0^{2\pi} r^2 r d\theta\,dr$$
$$= 2\pi \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi R^4}{2}$$

例 3　$\iint_S \sqrt{y^2+x^2} dx\,dy$

$S : x,y \ge 0,\ x^2+y^2 \le R^2,\ x^2+y^2 \ge Rx$

```
kill(all);
assume(r>0);
DI1:sqrt(x^2+y^2);
I1:'integrate('integrate(DI1,x),y);
X1:x=r*cos(\theta);
Y1:y=r*sin(\theta);
subst([X1,Y1],DI1);
DI2:trigsimp(%);
I='integrate('integrate(DI2*r,r,R*cos(
 \theta),R),\theta,0,%pi/2);
ev(%,integrate);
```



$x^2+y^2 \le R^2$ は原点に中心を持つ半径：R 内の範囲を示しており、

$$y^2+x^2 \ge x R \to \left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + y^2 \ge \frac{R^2}{4}$$

から、x 軸上の $x = \frac{1}{2}R$ に中心を持つ半径：$\frac{R}{2}$ 外の範囲を示している。

上図の積分範囲で二次元極座標の下記の変数変換を行って、

$$x = r\cos(\theta), \quad y = r\sin(\theta)$$

被積分関数に上式を代入し、

$$\sqrt{y^2+x^2} \to \sqrt{r^2\sin(\theta)^2 + r^2\cos(\theta)^2} = r$$

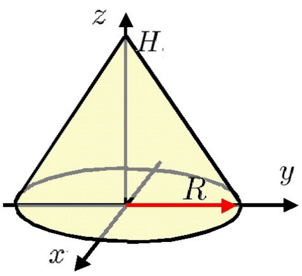
積分は、

$$\iint_S \sqrt{y^2+x^2} dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\cos(\theta)\,R}^R r \cdot r dr\,d\theta$$
$$= \frac{(3\pi-4)\,R^3}{18}$$

例 4　円錐の体積：$\iiint_V dx\,dy\,dz$

$$V: 0 \geq z \geq H,\, x^2+y^2 \leq \left(-\frac{R}{H}z+R\right)^2$$

```
kill(all);
assume(r>0);
DI1:1;
I1:'integrate('integrate('integrate(
 DI1,x),y),z);
X1:x=r*cos(\theta);
Y1:y=r*sin(\theta);
subst([X1,Y1],DI1);
DI2:trigsimp(%);
I='integrate('integrate('integrate(DI2*r,
 z,0,-H/R*r+H),r,0,R),\theta,0,2*%pi);
ev(%,integrate);
```



上図の積分範囲で三次元円柱座標の下記の変数変換を行って、

$$x = r\cos(\theta), \quad y = r\sin(\theta) \quad z = z$$

積分は、(4.4.6) 式から、

$$\iint_V dxdydz = \int_0^{2\pi}\int_0^R\int_0^{-\frac{H}{R}r+H} r dz\,dr\,d\theta$$
$$= \frac{\pi H R^2}{3}$$

例 5　円錐の慣性モーメント：$\iiint_V x^2+y^2\,dx\,dy\,dz$

$$V: 0 \geq z \geq H,\, x^2+y^2 \leq \left(-\frac{R}{H}z+R\right)^2$$

```
kill(all);
assume(r>0);
DI1:x^2+y^2;
I1:'integrate('integrate('integrate(DI1,
 x),y),z);
X1:x=r*cos(\theta);
Y1:y=r*sin(\theta);
subst([X1,Y1],DI1);
DI2:trigsimp(%);
I='integrate('integrate('integrate(DI2*r,
 z,0,-H/R*r+H),r,0,R),\theta,0,2*%pi);
ev(%,integrate);
```

前例と同じ積分範囲で三次元円柱座標の下記の変数変換を行って、

$$x = r\cos(\theta), \quad y = r\sin(\theta) \quad z = z$$

被積分関数に上式を代入し、

$$y^2+x^2 \to r^2\sin(\theta)^2 + r^2\cos(\theta)^2 = r^2$$

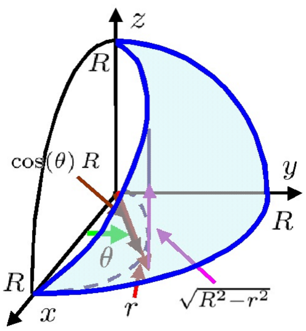
上式から積分は (4.4.6) 式から、

$$\iint_V x^2+y^2\,dxdydz$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^R\int_0^{-\frac{H}{R}r+H} r^2\cdot r dz\,dr\,d\theta = \frac{\pi H R^4}{10}$$

例 6　$\iiint_V z dx\, dy\, dz$

$$V : z \le 0,\, x^2+y^2+z^2 \le R^2,\, x^2+y^2 \ge R\,x$$

```
kill(all);
assume(r>0);
assume(R^2-r^2>0);
DI1:z;
I1:'integrate('integrate('integrate(DI1,
 x),y),z);
X1:x=r*cos(\theta);
Y1:y=r*sin(\theta);
subst([X1,Y1],DI1);
DI2:trigsimp(%);
I='integrate('integrate('integrate(DI2*r,
 z,0,sqrt(R^2-r^2)),r,0,R*cos(\theta)),
 \theta,0,%pi/2);
ev(%,integrate);
```



$x^2+y^2+z^2 \le R^2$ は原点に中心を持つ半径：R の球面の内部を示している。また、$x^2+y^2 \ge R\,x$ は、

$$y^2+x^2 \ge x\,R \to \left(x-\frac{R}{2}\right)^2+y^2 \ge \frac{R^2}{4}$$

から、x 軸上の $x=\frac{1}{2}R$ に中心を持つ半径：$\frac{R}{2}$ の半円柱の外の範囲を示している。

上図の積分範囲で三次元円柱座標の下記の変数変換を行って、

$$x = r\cos(\theta), \quad y = r\sin(\theta) \quad z = z$$

積分は、(4.4.6) 式から、

$$\iint_V z\, dxdydz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\cos(\theta)\,R} r \int_0^{\sqrt{R^2-r^2}} zdzdrd\theta$$
$$= \frac{5\,\pi\,R^4}{128}$$

例 7　**球の体積：**$\iiint_V dx\, dy\, dz$

$$V : x^2+y^2+z^2 \le R^2$$

```
kill(all);
assume(r>0);
DI1:1;
I1:'integrate('integrate('integrate(DI1,
 x),y),z);
X1:x=r*sin(\theta)*cos(\psi);
Y1:y=r*sin(\theta)*sin(\psi);
Z1:z=r*cos(\theta);
subst([X1,Y1,Z1],DI1);
DI2:trigsimp(%);
I='integrate('integrate('integrate(DI2*
 r^2*sin(\theta),r,0,R),\theta,0,%pi),
 \psi,0,2*%pi);
ev(%,integrate);
```

$x^2+y^2+z^2 \le R^2$ は原点に中心を持つ半径：R の球面の内部を示している。この積分範囲で三次元円柱座標の下記の変数変換を行って、

$$x = \cos(\psi)\, r\sin(\theta), \quad y = \sin(\psi)\, r\sin(\theta),$$

$$z = r\cos(\theta)$$

積分は、(4.4.7) 式から、

$$\iint_V dxdydz = \int_0^{2\,\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{R} r^2 \sin(\theta)\, drd\theta d\psi$$
$$= 2\,\pi \int_0^R r^2 dr \int_0^{\pi} \sin(\theta)\, d\theta = \frac{4\,\pi\,R^3}{3}$$

例 8 球の慣性モーメント：$\iiint_V x^2+y^2\,dx\,dy\,dz$

$V: x^2+y^2+z^2 \leq R^2$

```
kill(all);
assume(r>0);
DI1:x^2+y^2;
I1:'integrate('integrate('integrate(DI1,
 x),y),z);
X1:x=r*sin(\theta)*cos(\psi);
Y1:y=r*sin(\theta)*sin(\psi);
Z1:z=r*cos(\theta);
subst([X1,Y1,Z1],DI1);
DI2:trigsimp(%);
I='integrate('integrate('integrate(DI2*
 r^2*sin(\theta),r,0,R),\theta,0,%pi),
 \psi,0,2*%pi);
ev(%,integrate);
```

$x^2+y^2+z^2 \leq R^2$ は原点に中心を持つ半径：R の球面の内部を示している。この積分範囲で三次元円柱座標の下記の変数変換を行って、

$$x=\cos(\psi)\ r\sin(\theta), \quad y=\sin(\psi)\ r\sin(\theta),$$

$$z=r\cos(\theta)$$

被積分関数に上式を代入し、

$$\begin{aligned}&y^2+x^2\\&=\sin(\psi)^2 r^2\sin(\theta)^2+\cos(\psi)^2 r^2\sin(\theta)^2\\&=r^2\sin(\theta)^2\end{aligned}$$

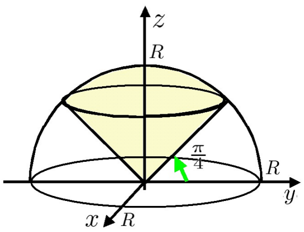
積分は、(4.4.7) 式から、

$$\begin{aligned}&\iiint_V x^2+y^2\,dxdydz\\&\quad=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} r^2\sin(\theta)^2\cdot r^2\sin(\theta)\,drd\theta d\psi\\&\quad=2\pi\int_0^R r^4dr\int_0^{\pi}\sin(\theta)^3d\theta=\frac{8\pi R^5}{15}\end{aligned}$$

例 9 $\iiint_V z\,dx\,dy\,dz$

$V: z \geq 0,\ x^2+y^2 \leq z^2,\ x^2+y^2+z^2 \leq R^2$

```
kill(all);
assume(r>0);
DI1:z;
I1:'integrate('integrate('integrate(DI1,
 x),y),z);
X1:x=r*sin(\theta)*cos(\psi);
Y1:y=r*sin(\theta)*sin(\psi);
Z1:z=r*cos(\theta);
subst([X1,Y1,Z1],DI1);
DI2:trigsimp(%);
I='integrate('integrate('integrate(DI2*
 r^2*sin(\theta),r,0,R),\theta,0,%pi/4),
 \psi,0,2*%pi);
ev(%,integrate);
```



$x^2+y^2+z^2 \leq R^2$ は原点に中心を持つ半径：R の球面の内部を示している。$x^2+y^2 \leq z^2$ は原点に頂点を持つ円錐の内部を示している。この積分範囲で三次元円柱座標の下記の変数変換を行って、

$$x=\cos(\psi)\ r\sin(\theta), \quad y=\sin(\psi)\ r\sin(\theta),$$

$$z=r\cos(\theta)$$

被積分関数に上式を代入し、積分は (4.4.7) 式から、

$$\begin{aligned}&\iiint_V z\,dxdydz\\&\quad=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} r\cos(\theta)\cdot r^2\sin(\theta)\,drd\theta d\psi\\&\quad=2\pi\int_0^R r^3dr\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos(\theta)\,\sin(\theta)\,d\theta=\frac{\pi R^4}{8}\end{aligned}$$

例 10　楕円の体積：$\iiint_V dx\,dy\,dz$

$V : \frac{z^2}{C^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{x^2}{A^2} \le 1$

```
kill(all);
load("vect")$
depends([x,y,z],[u,v,w]);
XYZ1:x^2/A^2+y^2/B^2+z^2/C^2=1;
X2:x=A*u;
Y2:y=B*v;
Z2:z=C*w;
subst([X2,Y2,Z2],XYZ1);
J1:J=matrix(['diff(x,u,1),'diff(y,u,1),
 'diff(z,u,1)],['diff(x,v,1),'diff(y,v,1),
 'diff(z,v,1)],['diff(x,w,1),'diff(y,w,1),
 'diff(z,w,1)]);
subst([X2,Y2,Z2],J1);
ev(%,diff);
J2:J=determinant(rhs(%));
DI1:1;
DI11:subst([X2,Y2,Z2],DI1);
I1:I='integrate('integrate('integrate(
 DI11,x),y),z);
DI2:subst([X2,Y2,Z2],DI1)*A*B*C;
I2:I='integrate('integrate('integrate(
 DI2,u),v),w);
U1:u=r*sin(\theta)*cos(\psi);
V1:v=r*sin(\theta)*sin(\psi);
W1:w=r*cos(\theta);
subst([U1,V1,W1],DI2);
DI2:trigsimp(%);
I='integrate('integrate('integrate(DI2*
 r^2*sin(\theta),r,0,1),\theta,0,%pi),
 \psi,0,2*%pi);
ev(%,integrate);
```

上記は楕円の積分範囲で下記の変数変換を行って、

$$x = u\,A, \quad ,y = v\,B, \quad z = w\,C$$

下記の半径：1 の球の積分範囲となる。

$$w^2 + v^2 + u^2 \le 1$$

(4.4.4) 式から、

$$J = \begin{vmatrix} \frac{d}{d\,u}\,x & \frac{d}{d\,u}\,y & \frac{d}{d\,u}\,z \\ \frac{d}{d\,v}\,x & \frac{d}{d\,v}\,y & \frac{d}{d\,v}\,z \\ \frac{d}{d\,w}\,x & \frac{d}{d\,w}\,y & \frac{d}{d\,w}\,z \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} \frac{d}{d\,u}\,(u\,A) & \frac{d}{d\,u}\,(v\,B) & \frac{d}{d\,u}\,(w\,C) \\ \frac{d}{d\,v}\,(u\,A) & \frac{d}{d\,v}\,(v\,B) & \frac{d}{d\,v}\,(w\,C) \\ \frac{d}{d\,w}\,(u\,A) & \frac{d}{d\,w}\,(v\,B) & \frac{d}{d\,w}\,(w\,C) \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{vmatrix} = A\,B\,C$$

以上から、$dS_{xyz} = A\,B\,C\,dS_{uvw}$ となり積分は、

$$\iiint_V dx\,dy\,dz = A\,B\,C\,\iiint_V du\,dv\,dw$$

さらに三次元極座標の下記の変換を行って、

$$u = \cos(\psi)\;r\sin(\theta)\,, \quad v = \sin(\psi)\;r\sin(\theta)$$

$$w = r\cos(\theta)$$

積分は (4.4.7) 式から、

$$\iint_V dxdydz = A\,B\,C\,\iint_V dudvdw$$
$$= A,\,B\,C\int_0^{2\,\pi}\int_0^{\pi}\int_0^1 r^2\sin(\theta)\,drd\theta d\psi$$
$$= \frac{4\,\pi\,A\,B\,C}{3}$$

例 11 楕円の慣性モーメント：

$$\iiint_V x^2+y^2\,dx\,dy\,dz \quad V:\frac{z^2}{C^2}+\frac{y^2}{B^2}+\frac{x^2}{A^2}\le 1$$

```
kill(all);
XYZ1:x^2/A^2+y^2/B^2+z^2/C^2=1;
X2:x=A*u;
Y2:y=B*v;
Z2:z=C*w;
subst([X2,Y2,Z2],XYZ1);
J1:J=matrix(['diff(x,u,1),'diff(y,u,1),
 'diff(z,u,1)],['diff(x,v,1),'diff(y,v,1),
 'diff(z,v,1)],['diff(x,w,1),'diff(y,w,1),
 'diff(z,w,1)]);
subst([X2,Y2,Z2],J1);
ev(%,diff);
J2:J=determinant(rhs(%));
DI1:x^2+y^2;
DI11:subst([X2,Y2,Z2],DI1);
I1:I='integrate('integrate('integrate(
 DI11,x),y),z);
DI2:subst([X2,Y2,Z2],DI1)*A*B*C;
I2:I='integrate('integrate('integrate(
 DI2,u),v),w);
U1:u=r*sin(\theta)*cos(\psi);
V1:v=r*sin(\theta)*sin(\psi);
W1:w=r*cos(\theta);
subst([U1,V1,W1],DI2);
DI2:factor(%);
I='integrate('integrate('integrate(DI2*
 r^2*sin(\theta),r,0,1),\theta,0,%pi),
 \psi,0,2*%pi);
ev(%,integrate);
factor(%);
```

上記は楕円の積分範囲で下記の変数変換を行って、

$$x=u\,A,\quad ,y=v\,B,\quad z=w\,C$$

下記の半径：1 の球の積分範囲となる。

$$w^2+v^2+u^2\le 1$$

(4.4.4) 式から、

$$J=\begin{vmatrix}\frac{d}{d\,u}\,x & \frac{d}{d\,u}\,y & \frac{d}{d\,u}\,z\\ \frac{d}{d\,v}\,x & \frac{d}{d\,v}\,y & \frac{d}{d\,v}\,z\\ \frac{d}{d\,w}\,x & \frac{d}{d\,w}\,y & \frac{d}{d\,w}\,z\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\frac{d}{d\,u}\,(u\,A) & \frac{d}{d\,u}\,(v\,B) & \frac{d}{d\,u}\,(w\,C)\\ \frac{d}{d\,v}\,(u\,A) & \frac{d}{d\,v}\,(v\,B) & \frac{d}{d\,v}\,(w\,C)\\ \frac{d}{d\,w}\,(u\,A) & \frac{d}{d\,w}\,(v\,B) & \frac{d}{d\,w}\,(w\,C)\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}A & 0 & 0\\ 0 & B & 0\\ 0 & 0 & C\end{vmatrix}=A\,B\,C$$

以上から、$dS_{xyz}=A\,B\,C\,dS_{uvw}$ となり、

$$y^2+x^2\to A\,B\,\left(v^2\,B^2+u^2\,A^2\right)\,C$$

積分は、

$$\iiint_V y^2+x^2\,dx\,dy\,dz$$
$$=A\,B\,C\,\iiint_V v^2\,B^2+u^2\,A^2\,du\,dv\,dw$$

さらに三次元極座標の下記の変換を行って、

$$u=\cos(\psi)\,r\sin(\theta)\,,\quad v=\sin(\psi)\,r\sin(\theta)$$

$$w=r\cos(\theta)$$

被積分関数に上式を代入し、

$$A\,B\,\left(v^2\,B^2+u^2\,A^2\right)\,C$$
$$=r^2\sin(\theta)^2\,A\,B\,\left(\sin(\psi)^2\,B^2+\cos(\psi)^2\,A^2\right)\,C$$

積分は、上式と (4.4.7) 式から、

$$\iiint_V x^2+y^2\,dxdydz$$
$$=\iiint_V A\,B\,\left(v^2\,B^2+u^2\,A^2\right)\,C\,dudvdw$$
$$=\int_0^{2\,\pi}\int_0^{\pi}\int_0^1 r^2\sin(\theta)^2\,A\,B$$
$$\times\left(\sin(\psi)^2\,B^2+\cos(\psi)^2\,A^2\right)\,C$$
$$\cdot\,r^2\sin(\theta)\,drd\theta d\psi$$
$$=\int_0^1 r^4dr\int_0^{\pi}\sin(\theta)^3d\theta\,A\,B$$
$$\times\int_0^{2\,\pi}\sin(\psi)^2\,B^2+\cos(\psi)^2\,A^2d\psi$$
$$=\frac{4\,\pi\,A\,B\,\left(B^2+A^2\right)\,C}{15}$$

4.4.3　スカラー場の線積分

線積分は関数：$\mathrm{F}(x(s), y(s), z(s))$ 内の 2 点 A, B を結ぶ曲線：C に沿って積分する。

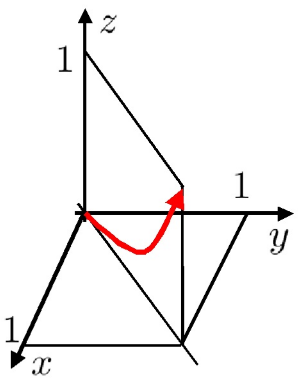
$$\int_C \mathrm{F}\left(x(s), y(s), z(s)\right) ds \tag{4.4.8}$$

いま、C を $x = f(t),\ y = g(t),\ z = h(t)$ で表すと $\frac{d}{dt}\, s = \sqrt{\left(\frac{d}{dt}\, f(t)\right)^2 + \left(\frac{d}{dt}\, g(t)\right)^2 + \left(\frac{d}{dt}\, h(t)\right)^2}$ であるから、

$$\begin{aligned}
&\int_C \mathrm{F}\left(x(s), y(s), z(s)\right) ds \\
&\quad = \int_C \mathrm{F}\left(f(t), g(t), h(t)\right) \\
&\quad\quad \times \sqrt{\left(\frac{d}{dt}\, f(t)\right)^2 + \left(\frac{d}{dt}\, g(t)\right)^2 + \left(\frac{d}{dt}\, h(t)\right)^2}\, dt
\end{aligned} \tag{4.4.9}$$

例 1　$\mathrm{F}\left(x, y, z\right) = 2\, y\, z + x \quad C : (t, t, t^2),\ 0 \leq t \leq 1$

```
kill(all);
F1:F(x,y,z)=x+2*y*z;
C1:x=t;
C2:y=t;
C3:z=t^2;
DS1:ds=sqrt(diff(rhs(C1),t,1)^2+diff(
 rhs(C2),t,1)^2+diff(rhs(C3),t,1)^2)*dt;
FT1:subst([C1,C2,C3],rhs(F1));
I='integrate(FT1*rhs(DS1)/dt,t,0,1);
ev(%,integrate);
```



下記の線積分を求める。

$$I = \int_C \mathrm{F}\left(x, y, z\right) = \int_C 2\, y\, z + x\, ds$$

ここで、積分経路：C として、

$$x = t,\ y = t,\ z = t^2 \quad \text{積分範囲：} 0 \leq t \leq 1$$

(4.4.9) 式から、

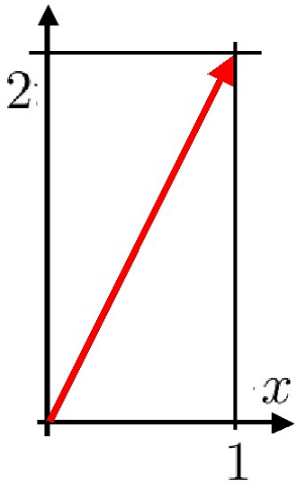
$$ds = dt\, \sqrt{4\, t^2 + 2}$$

被積分関数に積分経路の式を代入し、上式から、

$$I = \int_0^1 \sqrt{4\, t^2 + 2}\, \left(2\, t^3 + t\right) dt = \frac{9\, \sqrt{6}}{10} - \frac{1}{5\, \sqrt{2}}$$

例 2 $\mathrm{F}(x,y)=-x\,y \quad C:(t,2t,0),\ 0\le t\le 1$

```
kill(all);
F1:F(x,y)=-x*y;
C1:x=t;
C2:y=2*t;
C3:z=0;
DS1:ds=sqrt(diff(rhs(C1),t,1)^2+diff(
 rhs(C2),t,1)^2+diff(rhs(C3),t,1)^2)*dt;
FT1:subst([C1,C2,C3],rhs(F1));
I='integrate(FT1*rhs(DS1)/dt,t,0,1);
ev(%,integrate);
```



下記の線積分を求める。

$$I=\int_C \mathrm{F}(x,y)=\int_C -x\,y\,ds$$

ここで、積分経路：C として、

$$x=t,\ y=2t,\ z=0 \quad 積分範囲：0\le t\le 1$$

(4.4.9) 式から、

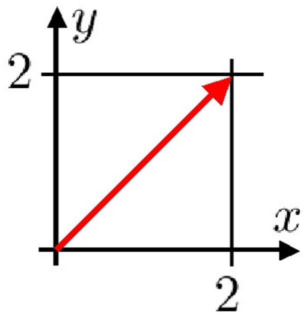
$$ds=\sqrt{5}\,dt$$

被積分関数に積分経路の式を代入し、上式から、

$$I=-2\sqrt{5}\int_0^1 t^2 dt=-\frac{2\sqrt{5}}{3}$$

例 3 $\mathrm{F}(x,y)=x^2\,y \quad C:(t,2-t,0),\ 0\le t\le 2$

```
kill(all);
F1:F(x,y)=x^2*y;
C1:x=t;
C2:y=2-t;
C3:z=0;
DS1:ds=sqrt(diff(rhs(C1),t,1)^2+diff(
 rhs(C2),t,1)^2+diff(rhs(C3),t,1)^2)*dt;
FT1:subst([C1,C2,C3],rhs(F1));
I='integrate(FT1*rhs(DS1)/dt,t,0,2);
ev(%,integrate);
```



下記の線積分を求める。

$$I=\int_C \mathrm{F}(x,y)=\int_C x^2\,y\,ds$$

ここで、積分経路：C として、

$$x=t,\ y=2-t,\ z=0 \quad 積分範囲：0\le t\le 2$$

(4.4.9) 式から、

$$ds=\sqrt{2}\,dt$$

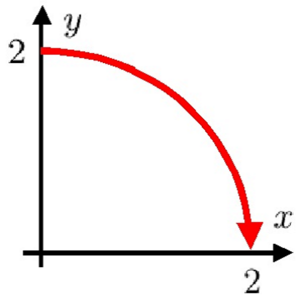
被積分関数に積分経路の式を代入し、上式から、

$$I=\sqrt{2}\int_0^2 (2-t)\ t^2 dt=\frac{2^{\frac{5}{2}}}{3}$$

例 4　$\mathrm{F}(x,y)=x^2\,y$

$C:(2\sin(t)\,,2\cos(t)\,,0),\ 0\le t\le\frac{\pi}{2}$

```
kill(all);
F1:F(x,y)=x^2*y;
C1:x=2*sin(t);
C2:y=2*cos(t);
C3:z=0;
DS1:ds=sqrt(diff(rhs(C1),t,1)^2+diff(
 rhs(C2),t,1)^2+diff(rhs(C3),t,1)^2)*dt;
FT1:subst([C1,C2,C3],rhs(F1));
I='integrate(FT1*rhs(DS1)/dt,t,0,%pi/2);
ev(%,integrate);
```



下記の線積分を求める。

$$I=\int_C \mathrm{F}(x,y)=\int_C x^2\,y\,ds$$

ここで、積分経路：C として、

$x=2\sin(t)\,,\ y=2\cos(t)\,,\ z=0$　積分範囲：$0\le t\le\frac{\pi}{2}$

(4.4.9) 式から、

$$ds=dt\,\sqrt{4\sin(t)^2+4\cos(t)^2}$$

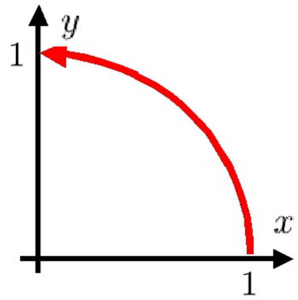
被積分関数に積分経路の式を代入し、上式から、

$$I=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(t)\,\sin(t)^2\,\sqrt{4\sin(t)^2+4\cos(t)^2}dt$$
$$=\frac{16}{3}$$

例 5　$\mathrm{F}(x,y)=x\,y^3$

$C:(\cos(t)\,,\sin(t)\,,0),\ 0\le t\le\frac{\pi}{2}$

```
kill(all);
F1:F(x,y)=x*y^3;
C1:x=cos(t);
C2:y=sin(t);
C3:z=0;
DS1:ds=sqrt(diff(rhs(C1),t,1)^2+diff(
 rhs(C2),t,1)^2+diff(rhs(C3),t,1)^2)*dt;
FT1:subst([C1,C2,C3],rhs(F1));
I='integrate(FT1*rhs(DS1)/dt,t,0,%pi/2);
ev(%,integrate);
```



下記の線積分を求める。

$$I=\int_C \mathrm{F}(x,y)=\int_C x\,y^3\,ds$$

ここで、積分経路：C として、

$x=\cos(t)\,,\ y=\sin(t)\,,\ z=0$　積分範囲：$0\le t\le\frac{\pi}{2}$

(4.4.9) 式から、

$$ds=dt\,\sqrt{\sin(t)^2+\cos(t)^2}$$

被積分関数に積分経路の式を代入し、上式から、

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(t)\,\sin(t)^3\,\sqrt{\sin(t)^2+\cos(t)^2}dtI=\frac{1}{4}$$

4.4.4　ベクトル場の線積分

ベクトル場：$\overrightarrow{F}$ 内の 2 点 A, B を結ぶ $\overrightarrow{r}$ の曲線：C に沿って積分する。

$$\int_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} \tag{4.4.10}$$

$\overrightarrow{F} = \mathrm{F_x}\,\overrightarrow{i} + \mathrm{F_y}\,\overrightarrow{j} + \mathrm{F_z}\,\overrightarrow{k},\ \overrightarrow{r} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k}$ とすると、

$$\int_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_C \mathrm{F_x}\,dx + \mathrm{F_y}\,dy + \mathrm{F_z}\,dz \tag{4.4.11}$$

いま、C を $x = f(t),\ y = g(t),\ z = h(t)$ で表すと上式は、

$$\begin{aligned}
&\int_C \mathrm{F_x}(x,y,z)\,dx + \mathrm{F_y}(x,y,z)\,dy + \mathrm{F_z}(x,y,z)\,dz \\
&= \int_C \mathrm{F_x}(f(t),g(t),h(t))\frac{d}{d\,x}f(t) \\
&\quad + \mathrm{F_y}(f(t),g(t),h(t))\,\frac{d}{d\,y}\,g(t) \\
&\quad + \mathrm{F_z}(f(t),g(t),h(t))\,\frac{d}{d\,z}\,h(t)dt
\end{aligned} \tag{4.4.12}$$

線積分結果が積分経路に依存しない条件 1

$$\nabla \times \overrightarrow{F} = curl\,\overrightarrow{F} = 0 \tag{4.4.13}$$

閉経路：C_O とすると、ストークスの定理：(4.4.59) 式 155 頁から、

$$\int_{C_O} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \iint_S \left(\nabla \times \overrightarrow{F}\right) \cdot \overrightarrow{n}\,dS$$

いま、$\nabla \times \overrightarrow{F} = curl\,\overrightarrow{F} = 0$ とすると、上式は零となり、

$$\int_{C_O} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = 0 \tag{4.4.14}$$

二点間：$(B \to A)$ の積分経路として二つの C_1, C_2 を考える。積分経路：C_1 による線積分：(4.4.10) 式は次式となり、$C_1 - C_2 = C_O$ は閉経路となるため、(4.4.14) 式から零となり、下記のように書き換えることができ、線積分結果が積分経路によらない。

$$\begin{aligned}
\int_{C_1} \overrightarrow{E} \cdot d\overrightarrow{r} &= \int_{C_1 - C_2} \overrightarrow{E} \cdot d\overrightarrow{r} + \int_{C_2} \overrightarrow{E} \cdot d\overrightarrow{r} \\
&= 0 + \int_{C_2} \overrightarrow{E} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_{C_2} \overrightarrow{E} \cdot d\overrightarrow{r}
\end{aligned}$$

線積分結果が積分経路に依存しない条件 2

$\overrightarrow{F} = grad\,G(x,y,z)$ で表される場合

$\overrightarrow{F} = grad\,G(x,y,z)$ で表され、$\frac{d}{d\,t}\,\overrightarrow{r}$ は、

$$\overrightarrow{F} = \begin{pmatrix} \frac{d}{d\,x}\,G \\ \frac{d}{d\,y}\,G \\ \frac{d}{d\,z}\,G \end{pmatrix}, \qquad \frac{d}{d\,t}\,\overrightarrow{r} = \begin{pmatrix} \frac{d}{d\,t}\,\mathrm{x}\,(t) \\ \frac{d}{d\,t}\,\mathrm{y}\,(t) \\ \frac{d}{d\,t}\,\mathrm{z}\,(t) \end{pmatrix}$$

上式から、(4.4.10) 式は、

$$\begin{aligned}
\int_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} &= \int_C grad\,G \cdot \frac{d}{d\,t}\,\overrightarrow{r}\,dt \\
&= \int_C \left(\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{z}\,(t)\right)\left(\frac{d}{d\,z}\,G\right) + \left(\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{y}\,(t)\right)\left(\frac{d}{d\,y}\,G\right) \\
&\quad + \left(\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{x}\,(t)\right)\left(\frac{d}{d\,x}\,G\right)dt
\end{aligned}$$

上式の被積分関数は $\frac{d}{d\,t}\,G$ であるから、

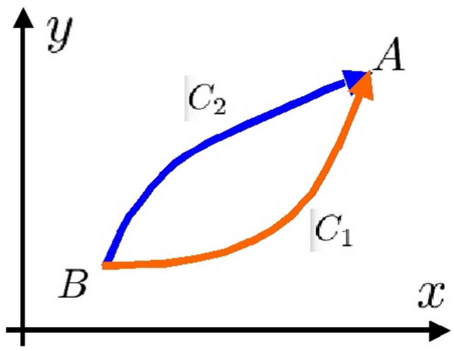
$$\begin{aligned}
\int_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} &= \int_A^B \frac{d}{d\,t}\,G\left(\mathrm{x}\,(t)\,, \mathrm{y}\,(t)\,, \mathrm{z}\,(t)\right)dt \\
&= \left[G\left(\mathrm{x}\,(t)\,, \mathrm{y}\,(t)\,, \mathrm{z}\,(t)\right)\right]_A^B \\
&= G\left(\mathrm{x}\,(B)\,, \mathrm{y}\,(B)\,, \mathrm{z}\,(B)\right) - G\left(\mathrm{x}\,(A)\,, \mathrm{y}\,(A)\,, \mathrm{z}\,(A)\right)
\end{aligned} \tag{4.4.15}$$

上式から、$\overrightarrow{F} = grad\,G(x,y,z)$ で表される場合には、$\overrightarrow{F}$ の線積分結果は積分経路に依存しない。

また、$\overrightarrow{F} = grad\,G(x,y,z)$ で表される場合、この回転：$curl$ は (4.3.57) 式から、

$$\nabla \times \overrightarrow{F} = curl\,grad\,G(x,y,z) = 0$$

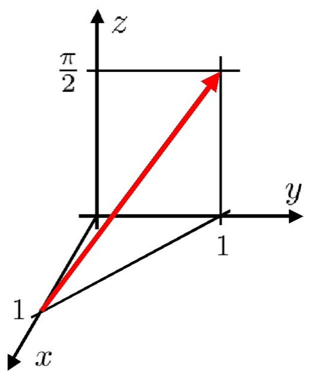
上式より前条件の (4.4.13) 式を満足しているので、線積分結果が積分経路に依存しない。



例 1　$\overrightarrow{F}=\left(2\,y,\,x,\,\sin\left(z\right)^{2}\right)$

$C:\left(1-t,\,t,\,\frac{\pi\,t}{2}\right),\,0\le t\le 1$

```
kill(all);
load("vect")$
depends(F,[x,y,z]);
depends([x,y,z],[t]);
F1:F=matrix([2*y],[x],[sin(z)^2]);
C1:x=1-t;
C2:y=t;
C3:z=%pi/2*t;
MTR:matrix([x],[y],[z]);
F2:subst([C1,C2,C3],F1);
MTR1:subst([C1,C2,C3],MTR);
DMRT1:diff(MTR1,t,1);
rhs(F2).DMRT1;
I='integrate(%,t,0,1);
ev(%,integrate);
```



下記の線積分を求める。

$$I=\int_{C}\overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r}$$

ここで、$\overrightarrow{F}$、積分経路:C を下記とし、積分範囲:$0\le t\le 1$ とすると、

$$\overrightarrow{F}=\begin{pmatrix}2\,y\\x\\\sin\left(z\right)^{2}\end{pmatrix},\quad C:\overrightarrow{r}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-t\\t\\\frac{\pi\,t}{2}\end{pmatrix}$$

被積分関数に上式の関係を代入し、$\overrightarrow{r}$ を t で微分して、

$$\overrightarrow{F}=\begin{pmatrix}2\,t\\1-t\\\sin\left(\frac{\pi\,t}{2}\right)^{2}\end{pmatrix},\quad d\overrightarrow{r}=\begin{pmatrix}-1\\1\\\frac{\pi}{2}\end{pmatrix}dt$$

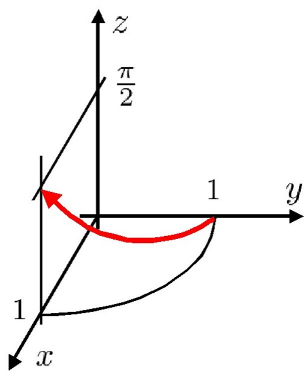
上式から線積分結果は、

$$I=\int_{C}\overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r}=\int_{0}^{1}\frac{\pi\sin\left(\frac{\pi\,t}{2}\right)^{2}}{2}-3\,t+1dt$$
$$=\frac{\pi-2}{4}$$

例 2　$\overrightarrow{F}=\left(2\,y,\,x,\,\sin\left(z\right)^{2}\right)$

$C:\left(\cos\left(t\right),\,\sin\left(t\right),\,t\right),\,0\le t\le\frac{\pi}{2}$

```
kill(all);
load("vect")$
depends(F,[x,y,z]);
depends([x,y,z],[t]);
F1:F=matrix([2*y],[x],[sin(z)^2]);
C1:x=cos(t);
C2:y=sin(t);
C3:z=t;
MTR:matrix([x],[y],[z]);
F2:subst([C1,C2,C3],F1);
MTR1:subst([C1,C2,C3],MTR);
DMRT1:diff(MTR1,t,1);
rhs(F2).DMRT1;
I='integrate(%,t,0,%pi/2);
ev(%,integrate);
```



下記の線積分を求める。

$$I=\int_{C}\overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r}$$

ここで、$\overrightarrow{F}$、積分経路：C を下記とし、積分範囲：$0\le t\le\frac{\pi}{2}$ とすると、

$$\overrightarrow{F}=\begin{pmatrix}2\,y\\x\\\sin\left(z\right)^{2}\end{pmatrix},\quad C:\overrightarrow{r}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\left(t\right)\\\sin\left(t\right)\\t\end{pmatrix}$$

被積分関数に上式の関係を代入し、$\overrightarrow{r}$ を t で微分して、

$$\overrightarrow{F}=\begin{pmatrix}2\sin\left(t\right)\\\cos\left(t\right)\\\sin\left(t\right)^{2}\end{pmatrix},\quad d\overrightarrow{r}=\begin{pmatrix}-\sin\left(t\right)\\\cos\left(t\right)\\1\end{pmatrix}dt$$

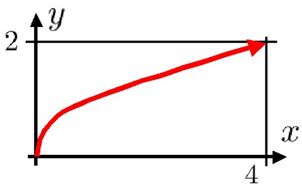
上式から線積分結果は、

$$I=\int_{C}\overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r}=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos\left(t\right)^{2}-\sin\left(t\right)^{2}dt$$
$$=0$$

例 3 $\overrightarrow{F}=(x+1,\,x\,y,\,0)$

$C:\left(t^2,\,t,\,0\right),\,0\le t\le 2$

```
kill(all);
load("vect")$
depends(F,[x,y,z]);
depends([x,y,z],[t]);
F1:F=matrix([x+1],[x*y],[0]);
C1:x=t^2;
C2:y=t;
C3:z=0;
MTR:matrix([x],[y],[z]);
F2:subst([C1,C2,C3],F1);
MTR1:subst([C1,C2,C3],MTR);
DMRT1:diff(MTR1,t,1);
rhs(F2).DMRT1;
I='integrate(%,t,0,2);
ev(%,integrate);
```



下記の線積分を求める。

$$I=\int_C \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r}$$

ここで、$\overrightarrow{F}$、積分経路:C を下記とし、積分範囲:$0\le t\le 2$ とすると、

$$\overrightarrow{F}=\begin{pmatrix}x+1\\x\,y\\0\end{pmatrix},\quad C:\overrightarrow{r}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t^2\\t\\0\end{pmatrix}$$

被積分関数に上式の関係を代入し、$\overrightarrow{r}$ を t で微分して、

$$\overrightarrow{F}=\begin{pmatrix}t^2+1\\t^3\\0\end{pmatrix},\quad d\overrightarrow{r}=\begin{pmatrix}2\,t\\1\\0\end{pmatrix}dt$$

上式から線積分結果は、

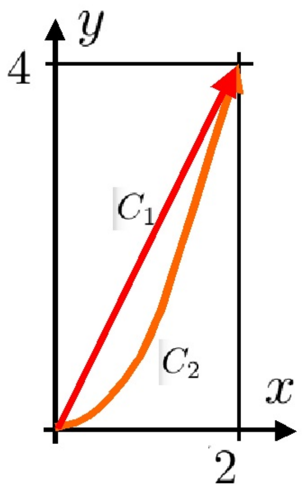
$$I=\int_C \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r}==\int_0^2 t^3+2\,t\,\left(t^2+1\right)dt$$
$$=16$$

例 4 $\overrightarrow{F}=\left(x^2,\, x+y,\, 0\right)$

$C_1:(2\,t,\, 4\,t,\, 0)\,,\, 0\le t\le 1$

$C_2:\left(t,\, t^2,\, 0\right)\,,\, 0\le t\le 2$

```
kill(all);
load("vect")$
depends(F,[x,y,z]);
depends([x,y,z],[t]);
F1:F=matrix([x^2],[x+y],[0]);
curl(transpose(rhs(F1))[1]);
express(%);
transpose(%);
ev(%,diff);
C1:x=2*t;
C2:y=4*t;
C3:z=0;
MTR:matrix([x],[y],[z]);
F2:subst([C1,C2,C3],F1);
MTR1:subst([C1,C2,C3],MTR);
DMRT1:diff(MTR1,t,1);
rhs(F2).DMRT1;
I='integrate(%,t,0,1);
ev(%,integrate);
```



下記の線積分を求める。

$$I=\int_C \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r}$$

ここで、$\overrightarrow{F}$ は下記から

$$\overrightarrow{F}=\begin{pmatrix} x^2\\ y+x\\ 0\end{pmatrix}$$

$\nabla\times\overrightarrow{F}$ は下記から積分経路で積分結果が変わる。

$$\nabla\times\overrightarrow{F}=\begin{pmatrix} -\frac{d}{d\,z}\,(y+x)\\ \frac{d}{d\,z}\,x^2\\ \frac{d}{d\,x}\,(y+x)-\frac{d}{d\,y}\,x^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\neq 0$$

積分経路：C_1 を下記とし、積分範囲：$0\le t\le 1$ とすると、

$$C_1:\overrightarrow{r}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\,t\\4\,t\\0\end{pmatrix}\quad 0\le t\le 1$$

被積分関数に上式の関係を代入し、$\overrightarrow{r}$ を t で微分して、

$$\overrightarrow{F}=\begin{pmatrix}4\,t^2\\6\,t\\0\end{pmatrix},\quad d\overrightarrow{r}=\begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix}dt$$

上式から線積分結果は、

$$I=\int_{C_1}\overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r}=\int_0^1 8\,t^2+24\,tdt$$
$$=\frac{44}{3}$$

```
C1:x=t;
C2:y=t^2;
C3:z=0;
MTR:matrix([x],[y],[z]);
F2:subst([C1,C2,C3],F1);
MTR1:subst([C1,C2,C3],MTR);
DMRT1:diff(MTR1,t,1);
rhs(F2).DMRT1;
I='integrate(%,t,0,2);
ev(%,integrate);
```

積分経路：C_2 を下記とし、積分範囲：$0\le t\le 2$ とすると、

$$C_2:\overrightarrow{r}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t\\t^2\\0\end{pmatrix}\quad 0\le t\le 2$$

被積分関数に上式の関係を代入し、$\overrightarrow{r}$ を t で微分して、

$$\overrightarrow{F}=\begin{pmatrix}t^2\\t^2+t\\0\end{pmatrix},\quad d\overrightarrow{r}=\begin{pmatrix}1\\2\,t\\0\end{pmatrix}dt$$

上式から線積分結果は、

$$I=\int_{C_2}\overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r}=\int_0^2 2\,t\,\left(t^2+t\right)+t^2dt$$
$$=16$$

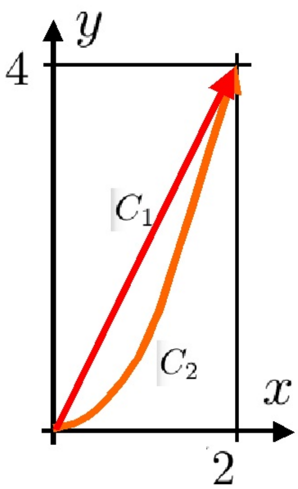
C_1, C_2 の積分経路で積分結果は異なっていた。

例 5　$\overrightarrow{F}=\left(x^2\,y^2,\,\frac{2\,x^3\,y}{3},\,0\right)$

$C_1:(t,\,2\,t,\,0)\,,\,0\le t\le 2$

$C_2:\left(t,\,t^2,\,0\right)\,,\,0\le t\le 2$

```
kill(all);
load("vect")$
depends(F,[x,y,z]);
depends([x,y,z],[t]);
F1:F=matrix([x^2*y^2],[2/3*x^3*y],[0]);
curl(transpose(rhs(F1))[1]);
express(%);
transpose(%);
ev(%,diff);
C1:x=t;
C2:y=2*t;
C3:z=0;
MTR:matrix([x],[y],[z]);
F2:subst([C1,C2,C3],F1);
MTR1:subst([C1,C2,C3],MTR);
DMRT1:diff(MTR1,t,1);
rhs(F2).DMRT1;
I='integrate(%,t,0,2);
ev(%,integrate);
```



下記の線積分を求める。

$$I=\int_C \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r}$$

ここで、$\overrightarrow{F}$ は下記から

$$F=\begin{pmatrix}x^2\,y^2\\ \frac{2\,x^3\,y}{3}\\ 0\end{pmatrix}$$

$\nabla\times\overrightarrow{F}$ は下記から零であるから、積分経路で積分結果は変らない。

$$\nabla\times\overrightarrow{F}=\begin{pmatrix}-\frac{d}{d\,z}\,\frac{2\,x^3\,y}{3}\\ \frac{d}{d\,z}\,\left(x^2\,y^2\right)\\ \frac{d}{d\,x}\,\frac{2\,x^3\,y}{3}-\frac{d}{d\,y}\,\left(x^2\,y^2\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

積分経路：C_1 を下記とし、積分範囲：$0\le t\le 2$ とすると、

$$C_1:\overrightarrow{r}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t\\2\,t\\0\end{pmatrix}\qquad 0\le t\le 2$$

被積分関数に上式の関係を代入し、$\overrightarrow{r}$ を t で微分して、

$$\overrightarrow{F}=\begin{pmatrix}4\,t^4\\ \frac{4\,t^4}{3}\\ 0\end{pmatrix},\quad d\overrightarrow{r}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\,dt$$

上式から線積分結果は、

$$I=\int_{C_1}\overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r}==\frac{20}{3}\int_0^2 t^4dt=\frac{128}{3}$$

```
C1:x=t;
C2:y=t^2;
C3:z=0;
MTR:matrix([x],[y],[z]);
F2:subst([C1,C2,C3],F1);
MTR1:subst([C1,C2,C3],MTR);
DMRT1:diff(MTR1,t,1);
rhs(F2).DMRT1;
I='integrate(%,t,0,2);
ev(%,integrate);
```

積分経路：C_2 を下記とし、積分範囲：$0\le t\le 2$ とすると、

$$C_2:\overrightarrow{r}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t\\t^2\\0\end{pmatrix}\qquad 0\le t\le 2$$

被積分関数に上式の関係を代入し、$\overrightarrow{r}$ を t で微分して、

$$\overrightarrow{F}=\begin{pmatrix}t^6\\ \frac{2\,t^5}{3}\\ 0\end{pmatrix},\quad d\overrightarrow{r}=\begin{pmatrix}1\\2\,t\\0\end{pmatrix}\,dt$$

上式から線積分結果は、

$$I=\int_{C_2}\overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r}==\frac{7}{3}\int_0^2 t^6dt=\frac{128}{3}$$

C_1,C_2 の積分経路で積分結果は同じであった。

4.4.5　スカラー場の面積分

積分する場合、x, y, z 座標でなく、別の座標系を用いた方が便利な場合がある。$x(u,v), y(u,v), z(u,v)$ の座標変換を行う。曲面: $\overrightarrow{r}$ 上の点：P は、

$$\overrightarrow{r} = x(u,v)\,\overrightarrow{i} + y(u,v)\,\overrightarrow{j} + z(u,v)\,\overrightarrow{k}$$

曲面上で、v 一定の u 曲線の接線ベクトル：$\frac{d}{d\,u}\overrightarrow{r}$、$u$ 一定の v 曲線の接線ベクトル：$\frac{d}{d\,v}\overrightarrow{r}$ となり下記となる。

$$\frac{d}{d\,u}\overrightarrow{r} = \begin{pmatrix} \frac{d}{d\,u}x \\ \frac{d}{d\,u}y \\ \frac{d}{d\,u}z \end{pmatrix}, \quad \frac{d}{d\,v}\overrightarrow{r} = \begin{pmatrix} \frac{d}{d\,v}x \\ \frac{d}{d\,v}y \\ \frac{d}{d\,v}z \end{pmatrix}$$

微小量：du, dv で作られる平行四辺形の微小面積：dS は、79 頁から次式となる。

$$dS = \left| \frac{d}{d\,u}\overrightarrow{r} \times \frac{d}{d\,v}\overrightarrow{r} \right| du\,dv$$

上式で、

$$\frac{d}{d\,u}\overrightarrow{r} \times \frac{d}{d\,v}\overrightarrow{r} = \begin{pmatrix} \left(\frac{d}{d\,u}y\right)\left(\frac{d}{d\,v}z\right) - \left(\frac{d}{d\,v}y\right)\left(\frac{d}{d\,u}z\right) \\ \left(\frac{d}{d\,v}x\right)\left(\frac{d}{d\,u}z\right) - \left(\frac{d}{d\,u}x\right)\left(\frac{d}{d\,v}z\right) \\ \left(\frac{d}{d\,u}x\right)\left(\frac{d}{d\,v}y\right) - \left(\frac{d}{d\,v}x\right)\left(\frac{d}{d\,u}y\right) \end{pmatrix}$$

上式から、

$$\begin{aligned} dS = \Biggl(&\left(\left(\frac{d}{d\,u}y\right)\left(\frac{d}{d\,v}z\right) - \left(\frac{d}{d\,v}y\right)\left(\frac{d}{d\,u}z\right)\right)^2 \\ &+ \left(\left(\frac{d}{d\,v}x\right)\left(\frac{d}{d\,u}z\right) - \left(\frac{d}{d\,u}x\right)\left(\frac{d}{d\,v}z\right)\right)^2 \\ &+ \left(\left(\frac{d}{d\,u}x\right)\left(\frac{d}{d\,v}y\right) - \left(\frac{d}{d\,v}x\right)\left(\frac{d}{d\,u}y\right)\right)^2 \Biggr)^{\frac{1}{2}} \\ &\times du\,dv \end{aligned}$$

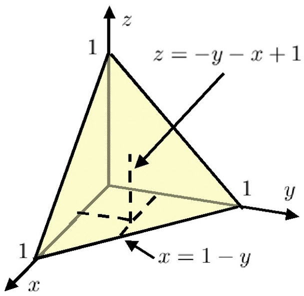
スカラー場:$F(x,y,z)$ における曲面:S 上での $F(x,y,z)$ の面積分は、

$$\iint_S F\,dS = \iint_D F \left| \frac{d}{d\,u}\overrightarrow{r} \times \frac{d}{d\,v}\overrightarrow{r} \right| du\,dv \tag{4.4.16}$$

例 1 $F = y\,z + x\,y$

$$S : z + y + x = 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0, z \geq 0$$

```
kill(all);
load("vect")$
DI1:x*y+y*z;
S1:x+y+z=1;
S2:solve(S1,z)[1];
subst([S2],DI1);
DI2:factor(%);
R1:matrix([x],[y],[rhs(S2)]);
RX1:diff(R1,x,1);
RY1:diff(R1,y,1);
col(adjoint(transpose(addcol(RX1,RY1,
 matrix([1],[1],[1])))),3);
CDS1:sqrt(%[1][1]^2+%[2][1]^2+%[3][1]^2);
subst([z=0],S1);
L1:solve(%,x)[1];
subst([z=0,x=0],S1);
L2:solve(%,y)[1];
I='integrate('integrate(DI2*CDS1,x,0,
 rhs(L1)),y,0,rhs(L2));
ev(%,integrate);
```



下記の面積分を求める。

$$I = \iint_S F dS = \iint_S y\,z + x\,y\,dS \tag{4.4.17}$$

曲面：S、積分範囲は下記とする。

$$S : z + y + x = 1 \quad x \geq 0,\ y \geq 0, z \geq 0$$

曲面上では、$z = -y - x + 1$ であるから、(4.4.17) 式に代入し、

$$I = \iint_S F dS = \iint_S -(y-1)\ y\,dS \tag{4.4.18}$$

$\vec{r}$, $\frac{d}{d\,x}\vec{r}$, $\frac{d}{d\,y}\vec{r}$ は、

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -y-x+1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{d\,x}\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \frac{d}{d\,y}\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

上式から、

$$\frac{d}{d\,x}\vec{r} \times \frac{d}{d\,y}\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(4.4.16) 式に上式を代入し、

$$dS = \left| \frac{d}{d\,x}\vec{r} \times \frac{d}{d\,y}\vec{r} \right| dx\,dy = \sqrt{3}\,dx\,dy$$

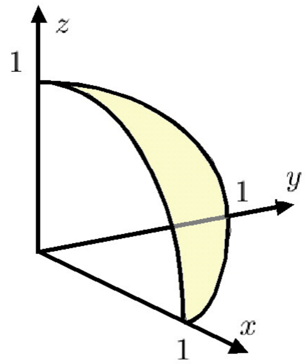
(4.4.18) 式の面積分は

$$\begin{aligned} I &= \iint_S F dS = \iint_S -(y-1)\ y\,dS \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-y} (-(y-1)\ y) \cdot \sqrt{3}\,dx\,dy \\ &= -\sqrt{3} \int_0^1 (1-y)\ (y-1)\ ydy \\ &= \frac{1}{4\sqrt{3}} \end{aligned}$$

例 2 $F = \sin(\psi)\cos(\theta)$

S : **半径 :** $r = 1$ **の球面,** $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le \psi \le \frac{\pi}{2}$

```
kill(all);
load("vect")$
DI1:cos(\theta)*sin(\psi);
R1:matrix([sin(\theta)*cos(\psi)],
 [sin(\theta)*sin(\psi)],[cos(\theta)]);
RX1:diff(R1,\theta,1);
RY1:diff(R1,\psi,1);
col(adjoint(transpose(addcol(RX1,RY1,
 matrix([1],[1],[1])))),3);
%[1][1]^2+%[2][1]^2+%[3][1]^2;
trigsimp(%);
CDS1:sin(\theta);
I='integrate('integrate(DI1*CDS1,\theta,
 0,%pi/2),\psi,0,%pi/2);
ev(%,integrate);
```



下記の面積分を求める。

$$I = \iint_S F dS = \iint_S \sin(\psi)\cos(\theta)\, dS \qquad (4.4.19)$$

曲面 : S : は半径 : $r = 1$ の球面であるから、下記の極座標を用いる。

$$S : \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\psi)\sin(\theta) \\ \sin(\psi)\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

また、積分範囲は下記とする。

$$0 \le \theta \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le \psi \le \frac{\pi}{2}$$

$\frac{d}{d\theta}\vec{r},\ \frac{d}{d\psi}\vec{r}$ は、

$$\frac{d}{d\theta}\vec{r} = \begin{pmatrix} \cos(\psi)\cos(\theta) \\ \sin(\psi)\cos(\theta) \\ -\sin(\theta) \end{pmatrix},\ \frac{d}{d\psi}\vec{r} = \begin{pmatrix} -\sin(\psi)\sin(\theta) \\ \cos(\psi)\sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}$$

上式から、

$$\frac{d}{dx}\vec{r} \times \frac{d}{dy}\vec{r} = \begin{pmatrix} \cos(\psi)\sin(\theta)^2 \\ \sin(\psi)\sin(\theta)^2 \\ \sin(\psi)^2\cos(\theta)\sin(\theta) + \cos(\psi)^2\cos(\theta)\sin(\theta) \end{pmatrix}$$

(4.4.16) 式に上式を代入し、積分範囲を考慮して、

$$dS = \left| \frac{d}{d\theta}\vec{r} \times \frac{d}{d\psi}\vec{r} \right| d\theta\, d\psi = \sin(\theta)\ d\theta\, d\psi$$

(4.4.18) 式の面積分は

$$\begin{aligned} I &= \iint_S F dS = \iint_S \sin(\psi)\cos(\theta)\, dS \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\psi)\, d\psi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\theta)\sin(\theta)\, d\theta \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

4.4.6 ベクトル場の面積分

積分する場合、x, y, z 座標でなく、別の座標系を用いた方が便利な場合がある。$x(u,v), y(u,v), z(u,v)$ の座標変換を行う。曲面: $\overrightarrow{r}$ 上の点 : P は、

$$\overrightarrow{r} = x(u,v)\overrightarrow{i} + y(u,v)\overrightarrow{j} + z(u,v)\overrightarrow{k}$$

曲面上で、v 一定の u 曲線の接線ベクトル : $\frac{d}{d\,u}\overrightarrow{r}$、$u$ 一定の v 曲線の接線ベクトル : $\frac{d}{d\,v}\overrightarrow{r}$ となり下記となる。

$$\frac{d}{d\,u}\overrightarrow{r} = \begin{pmatrix} \frac{d}{d\,u}x \\ \frac{d}{d\,u}y \\ \frac{d}{d\,u}z \end{pmatrix}, \quad \frac{d}{d\,v}\overrightarrow{r} = \begin{pmatrix} \frac{d}{d\,v}x \\ \frac{d}{d\,v}y \\ \frac{d}{d\,v}z \end{pmatrix}$$

微小量 : du, dv で作られる平行四辺形の面積要素 : dS は、79 頁から次式となる。

$$dS = \left| \frac{d}{d\,u}\overrightarrow{r} \times \frac{d}{d\,v}\overrightarrow{r} \right| du\,dv$$

また、この面積要素に垂直な単位ベクトル : $\overrightarrow{n}$ は、

$$\overrightarrow{n} = \frac{\frac{d}{d\,u}\overrightarrow{r} \times \frac{d}{d\,v}\overrightarrow{r}}{\left|\frac{d}{d\,u}\overrightarrow{r} \times \frac{d}{d\,v}\overrightarrow{r}\right|}$$

面積要素 : dS のベクトル表記として、$\overrightarrow{n}$ 方向とすると、

$$d\overrightarrow{S} = dS\,\overrightarrow{n} = \frac{d}{d\,u}\overrightarrow{r} \times \frac{d}{d\,v}\overrightarrow{r}\,du\,dv$$

ベクトル場 : $\overrightarrow{F}$ における曲面 : S 上での面積分は、

$$\iint_S \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{S} = \iint_D \overrightarrow{F} \cdot \left(\frac{d}{d\,u}\overrightarrow{r} \times \frac{d}{d\,v}\overrightarrow{r} \right) du\,dv \tag{4.4.20}$$

例 1 $\vec{F}=2xz\vec{i}+yz\vec{j}+xy\vec{k}$

$S: x^2+y^2+z^2=1,\ 0\leq z$

```
kill(all);
load("vect")$
DI1:matrix([2*x*z],[y*z],[x*y]);
X1:x=sin(\theta)*cos(\psi);
Y1:y=sin(\theta)*sin(\psi);
Z1:z=cos(\theta);
XYZ1:matrix([x],[y],[z]);
R1:matrix([sin(\theta)*cos(\psi)],
 [sin(\theta)*sin(\psi)],[cos(\theta)]);
RX1:diff(R1,\theta,1);
RY1:diff(R1,\psi,1);
RXY1:col(adjoint(transpose(addcol(RX1,
 RY1,matrix([1],[1],[1])))),3);
DI2:subst([X1,Y1,Z1],DI1);
DI2.RXY1;
DI3:trigsimp(%);
I='integrate('integrate(DI3,\theta,0,
 %pi/2),\psi,0,2*%pi);
ev(%,integrate);
```

ベクトル場：$\vec{F}$ における曲面：S 上での面積分は (4.4.20) 式から、

$$\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S}=\iint_D \vec{F}\cdot\left(\frac{d}{du}\vec{r}\times\frac{d}{dv}\vec{r}\right)du\,dv$$

$$\text{ここで、}\quad \vec{F}=\begin{pmatrix}2\,x\,z\\ y\,z\\ x\,y\end{pmatrix} \tag{4.4.21}$$

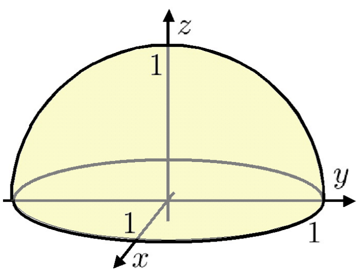
曲面：S：は半径：$r=1$ の球面であるから、下記の極座標を用いる。

$$S:\vec{r}=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(\psi)\,\sin(\theta)\\ \sin(\psi)\,\sin(\theta)\\ \cos(\theta)\end{pmatrix} \tag{4.4.22}$$

また、積分範囲は $0\leq z$ である。

$\frac{d}{d\theta}\vec{r},\ \frac{d}{d\psi}\vec{r}$ は、

$$\frac{d}{d\theta}\vec{r}=\begin{pmatrix}\cos(\psi)\,\cos(\theta)\\ \sin(\psi)\,\cos(\theta)\\ -\sin(\theta)\end{pmatrix},\quad \frac{d}{d\psi}\vec{r}=\begin{pmatrix}-\sin(\psi)\,\sin(\theta)\\ \cos(\psi)\,\sin(\theta)\\ 0\end{pmatrix}$$



上式から、

$$\frac{d}{d\,x}\vec{r}\times\frac{d}{d\,y}\vec{r}=\begin{pmatrix}\cos(\psi)\,\sin(\theta)^2\\ \sin(\psi)\,\sin(\theta)^2\\ \sin(\psi)^2\cos(\theta)\,\sin(\theta)+\cos(\psi)^2\cos(\theta)\,\sin(\theta)\end{pmatrix} \tag{4.4.23}$$

また、被積分関数：$\vec{F}$ は、(4.4.22) 式を代入し、

$$\vec{F}=\begin{pmatrix}2\,x\,z\\ y\,z\\ x\,y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cos(\psi)\,\cos(\theta)\,\sin(\theta)\\ \sin(\psi)\,\cos(\theta)\,\sin(\theta)\\ \cos(\psi)\,\sin(\psi)\,\sin(\theta)^2\end{pmatrix} \tag{4.4.24}$$

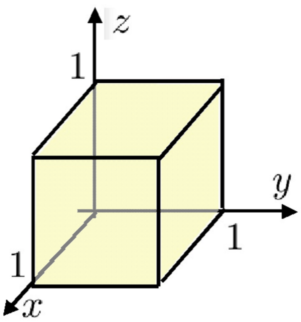
(4.4.21) 式に (4.4.23) 式、(4.4.24) 式上式を代入し、面積分は、

$$\begin{aligned}\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S}&=\iint_D \vec{F}\cdot\left(\frac{d}{du}\vec{r}\times\frac{d}{dv}\vec{r}\right)du\,dv\\ &=\int_0^{2\pi}\cos(\psi)\,\sin(\psi)+\cos(\psi)^2+1d\psi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(\theta)\,\sin(\theta)^3d\theta=\frac{3\,\pi}{4}\end{aligned}$$

例 2 $\overrightarrow{F}=\left(x^2+y^2\right)\overrightarrow{i}+2xy\overrightarrow{j}+\left(y^2-xy\right)\overrightarrow{k}$

$S:0\leq x\leq 1,\,0\leq y\leq 1,\,0\leq z\leq 1$

```
kill(all);
load("vect")$
DI1:matrix([x^2-y^2],[2*x*y],[y^2-x*y]);
Z0:matrix([0],[0],[-1]);
DIZ0:subst([z=0],DI1);
DIZ0.Z0;
'integrate('integrate(%,x,0,1),y,0,1);
IZ0:ev(%,integrate);
```



被積分関数：$\overrightarrow{F}$ は、

$$\overrightarrow{F}=\begin{pmatrix}x^2-y^2\\2\,x\,y\\y^2-x\,y\end{pmatrix}\tag{4.4.25}$$

$z=0$ の xy 面の $\overrightarrow{n}$ は、

$$\overrightarrow{n}=\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$$

(4.4.25) 式に $z=0$ を代入し、$\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{n}$ は、

$$\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{n}=\begin{pmatrix}x^2-y^2\\2\,x\,y\\y^2-x\,y\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}=x\,y-y^2$$

これを積分し、I_1 は、

$$I_1=\int_0^1\int_0^1 x\,y-y^2dxdy=-\frac{1}{12}\tag{4.4.26}$$

```
Z1:matrix([0],[0],[1]);
DIZ1:subst([z=1],DI1);
DIZ1.Z1;
'integrate('integrate(%,x,0,1),y,0,1);
IZ1:ev(%,integrate);
```

$z=1$ の xy 面の $\overrightarrow{n}$ は、

$$\overrightarrow{n}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

(4.4.25) 式に $z=1$ を代入し、$\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{n}$ は、

$$\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{n}=\begin{pmatrix}x^2-y^2\\2\,x\,y\\y^2-x\,y\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=y^2-x\,y$$

これを積分し、I_2 は、

$$I_2=\int_0^1\int_0^1 y^2-x\,ydxdy=\frac{1}{12}\tag{4.4.27}$$

```
X0:matrix([-1],[0],[0]);
DIX0:subst([x=0],DI1);
DIX0.X0;
'integrate('integrate(%,y,0,1),z,0,1);
IX0:ev(%,integrate);
```

$x=0$ の yz 面の $\overrightarrow{n}$ は、

$$\overrightarrow{n}=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$$

(4.4.25) 式に $x=0$ を代入し、$\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{n}$ は、

$$\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{n}=\begin{pmatrix}-y^2\\0\\y^2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}=y^2$$

これを積分し、I_3 は、

$$I_2=\int_0^1\int_0^1 y^2dydz=\frac{1}{3}\tag{4.4.28}$$

```
X1:matrix([1],[0],[0]);
DIX1:subst([x=1],DI1);
DIX1.X1;
'integrate('integrate(%,y,0,1),z,0,1);
IX1:ev(%,integrate);
```

$x=1$ の yz 面の $\overrightarrow{n}$ は、

$$\overrightarrow{n}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

(4.4.25) 式に $x=1$ を代入し、$\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{n}$ は、

$$\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{n}=\begin{pmatrix}1-y^2\\2\,y\\y^2-y\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=1-y^2$$

これを積分し、I_4 は、

$$I_4=\int_0^1\int_0^1 1-y^2dydz=\frac{2}{3}\tag{4.4.29}$$

```
Y0:matrix([0],[-1],[0]);
DIY0:subst([y=0],DI1);
DIY0.Y0;
'integrate('integrate(%,x,0,1),z,0,1);
IY0:ev(%,integrate);
```

$y=0$ の zx 面の $\vec{n}$ は、

$$\vec{n}=\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}$$

(4.4.25) 式に $y=0$ を代入し、$\vec{F}\cdot\vec{n}$ は、

$$\vec{F}\cdot\vec{n}=\begin{pmatrix}x^2\\0\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}=0$$

これを積分し、I_5 は、

$$I_5=0 \tag{4.4.30}$$

```
Y1:matrix([0],[1],[0]);
DIY1:subst([y=1],DI1);
DIY1.Y1;
'integrate('integrate(%,x,0,1),z,0,1);
IY1:ev(%,integrate);
I=IZ0+IZ1+IX0+IX1+IY0+IY1;
```

$y=1$ の zx 面の $\vec{n}$ は、

$$\vec{n}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

(4.4.25) 式に $y=1$ を代入し、$\vec{F}\cdot\vec{n}$ は、

$$\vec{F}\cdot\vec{n}=\begin{pmatrix}x^2-1\\2\,x\\1-x\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=2\,x$$

これを積分し、I_6 は、

$$I_6=2\int_0^1\int_0^1 x\,dxdz=1 \tag{4.4.31}$$

以上から、

$$I=I_1+I_2+I_3+I_4+I_5+I_6=2$$

4.4.7 平面におけるグリーンの定理

```
kill(all);
GX1:-'integrate('integrate(diff(P(x,y),y,
 1),y,y[1],y[2]),x,a,b);
GX1=ev(GX1,integrate);
GX1=-('integrate(P(x,y[2]),x,a,b)
 -'integrate(P(x,y[1]),x,a,b));
GX1='integrate(P(x,y[1]),x,a,b)
 +'integrate(P(x,y[2]),x,b,a);
GY1:'integrate('integrate(diff(Q(x,y),
 x,1),x,x[1],x[2]),y,c,d);
GY1=ev(GY1,integrate);
GY1='integrate(Q(x[2],y),y,c,d)
 -'integrate(Q(x[1],y),y,c,d);
GY:GY1='integrate(Q(x[2],y),y,c,d)
 +'integrate(Q(x[1],y),y,d,c);
```

下記の平面におけるグリーンの定理を証明する。

$$\iint_S \left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{Q}-\frac{d}{d\,y}\,\mathrm{P}\right)dydx=\oint_C \mathrm{Q}\,dy+\mathrm{P}\,dx \tag{4.4.32}$$

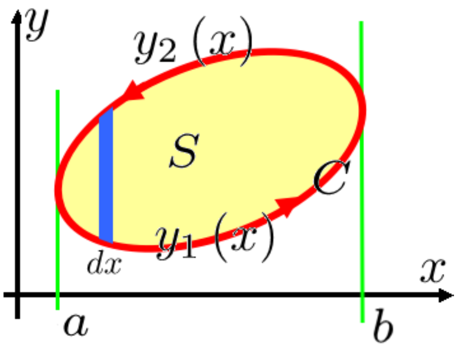


図 4.4.1: 曲線：C で囲まれた領域における $\frac{d}{dy}\,\mathrm{P}\,(x,y)$ の面積分

曲線：C で囲まれた領域の関数：$\mathrm{P}\,(x,y)\,,\mathrm{Q}\,(x,y)$ を考える。次の面積分について考える。

$$\iint_S \left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{Q}-\frac{d}{d\,y}\,\mathrm{P}\right)dydx$$

曲線：C で囲まれた領域における $\frac{d}{dy}\,\mathrm{P}\,(x,y)$ の面積分を求める。曲線：C の $a\to b$ の下側の曲線を $y_1\,(x)$、$b\to a$ の上側の曲線を $y_2\,(x)$ とすると、積分結果は下記となる。

$$\begin{aligned}
&-\int_a^b\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}\frac{d}{d\,y}\,\mathrm{P}\,(x,y)\,dydx\\
&=-\int_a^b \mathrm{P}\,(x,y_2\,(x))-\mathrm{P}\,(x,y_1\,(x))\,dx\\
&=\int_b^a \mathrm{P}\,(x,y_2\,(x))\,dx+\int_a^b \mathrm{P}\,(x,y_1\,(x))\,dx\\
&=\oint_C \mathrm{P}\,(x,y)\;dx
\end{aligned} \tag{4.4.33}$$

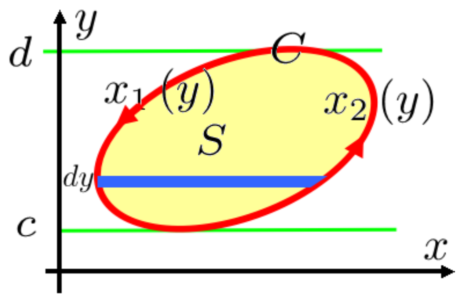


図 4.4.2: 曲線：C で囲まれた領域における $\frac{d}{dy}\,\mathrm{Q}\,(x,y)$ の面積分

同様に、曲線：C で囲まれた領域における $\frac{d}{dy}\,\mathrm{Q}\,(x,y)$ の面積分を求める。曲線：C の $d\to c$ の下側の曲線を $x_1\,(y)$、$c\to d$ の上側の曲線を $x_2\,(y)$ とすると、積分結果は下記となる。

$$\begin{aligned}
&\int_c^d\int_{x_1(y)}^{x_2(y)}\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{Q}\,(x,y)\,dxdy\\
&=\int_c^d \mathrm{Q}\,(x_2\,(y)\,,y)-\mathrm{Q}\,(x_1\,(y)\,,y)\,dy\\
&=\int_c^d \mathrm{Q}\,(x_2\,(y)\,,y)\,dy+\int_d^c \mathrm{Q}\,(x_1\,(y)\,,y)\,dy\\
&=\oint_C \mathrm{Q}\,(x,y)\,dxdy
\end{aligned} \tag{4.4.34}$$

(4.4.33) 式と (4.4.34) 式の和をとると、

$$\begin{aligned}
&\iint_S \left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{Q}-\frac{d}{d\,y}\,\mathrm{P}\right)dydx\\
&=\int_c^d\int_{x_1(y)}^{x_2(y)}\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{Q}\,(x,y)\,dxdy\\
&\quad-\int_a^b\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}\frac{d}{d\,y}\,\mathrm{P}\,(x,y)\,dydx\\
&=\oint_C \mathrm{P}\,(x,y)\;dx+\oint_C \mathrm{Q}\,(x,y)\,dy
\end{aligned}$$

上式を整理すると、平面におけるグリーンの定理となる。

$$\iint_S \left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{Q}-\frac{d}{d\,y}\,\mathrm{P}\right)dydx=\oint_C \mathrm{Q}\,dy+\mathrm{P}\,dx$$

二次元グリーンの第二定理

```
kill(all);
load("vect");
depends(r,[x,y,z]);
depends([\phi,\psi],[x,y]);
DS1:'diff(Q,x,1)-'diff(P,y,1);
DS2:Q*dy+P*dx;
DXT3:dx=-n[y]*ds;
DYT3:dy=n[x]*ds;
DS3:subst([DXT3,DYT3],DS2);
Q3:Q=\phi*diff(\psi,x,1);
P3:P=-\phi*diff(\psi,y,1);
subst([Q3,P3],DS1);
DS11:ev(%,diff);
subst([Q3,P3],DS3);
DS31:ds*\phi*('diff(\psi,n,1));
Q4:Q=\psi*diff(\phi,x,1);
P4:P=-\psi*diff(\phi,y,1);
subst([Q4,P4],DS1);
DS12:ev(%,diff);
subst([Q4,P4],DS3);
```

```
DS32:ds*\psi*('diff(\phi,n,1));
DS11-DS12;
DS14:partfrac(%,\phi);
DS31-DS32;
```

(4.4.32) 式の平面におけるグリーンの定理を変形する。

$$\iint_S \left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{Q}-\frac{d}{d\,y}\,\mathrm{P}\right)\,dydx=\oint_C \mathrm{Q}\,dy+\mathrm{P}\,dx \tag{4.4.35}$$

上式右辺の dx, dy は、

$$dx=-ds\,n_y,\quad dy=ds\,n_x$$

(4.4.35) 式に上式を代入し、

$$\iint_S \left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{Q}-\frac{d}{d\,y}\,\mathrm{P}\right)\,dydx=\oint_C n_x\,\mathrm{Q}-n_y\,P\,ds \tag{4.4.36}$$

上式に下式を代入すると、

$$Q=\phi\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\psi\right),\quad P=-\phi\,\left(\frac{d}{d\,y}\,\psi\right)$$

$$\begin{aligned}&\iint_S \left(\phi\,\left(\frac{d^2}{d\,y^2}\,\psi\right)+\left(\frac{d}{d\,y}\,\phi\right)\,\left(\frac{d}{d\,y}\,\psi\right)+\phi\,\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,\psi\right)+\left(\frac{d}{d\,x}\,\phi\right)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\psi\right)\right)\,dydx\\&\quad=\oint_C \phi\,\left(\frac{d}{d\,y}\,\psi\right)\,n_y+\phi\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\psi\right)\,n_x\,ds\\&\quad=\oint_C \phi\,\left(\frac{d}{d\,n}\,\psi\right)\,ds\end{aligned} \tag{4.4.37}$$

(4.4.36) 式に下式を代入すると、

$$Q=\left(\frac{d}{d\,x}\,\phi\right)\,\psi\quad P=-\left(\frac{d}{d\,y}\,\phi\right)\,\psi$$

$$\begin{aligned}&\iint_S \left(\left(\frac{d}{d\,y}\,\phi\right)\,\left(\frac{d}{d\,y}\,\psi\right)+\left(\frac{d}{d\,x}\,\phi\right)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\psi\right)+\left(\frac{d^2}{d\,y^2}\,\phi\right)\,\psi+\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,\phi\right)\,\psi\right)\,dydx\\&\quad=\oint_C \left(\frac{d}{d\,y}\,\phi\right)\,\psi\,n_y+\left(\frac{d}{d\,x}\,\phi\right)\,\psi\,n_x\,ds\\&\quad=\oint_C \left(\frac{d}{d\,n}\,\phi\right)\,\psi\,ds\end{aligned} \tag{4.4.38}$$

(4.4.37) 式ー (4.4.38) 式を求めると、

$$\iint_S \left(\phi\,\left(\frac{d^2}{d\,y^2}\,\psi+\frac{d^2}{d\,x^2}\,\psi\right)+\left(-\frac{d^2}{d\,y^2}\,\phi-\frac{d^2}{d\,x^2}\,\phi\right)\,\psi\right)\,dydx=\oint_C \left(\phi\,\left(\frac{d}{d\,n}\,\psi\right)-ds\,\left(\frac{d}{d\,n}\,\phi\right)\,\psi\right)\,ds$$

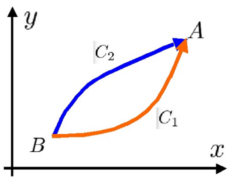
上式から、

$$\iint_S \left(\phi\,\left(\nabla^2\,\psi\right)-\left(\nabla^2\,\phi\right)\,\psi\right)\,dydx=\oint_C \left(\phi\,\left(\frac{d}{d\,n}\,\psi\right)-\left(\frac{d}{d\,n}\,\phi\right)\,\psi\right)\,ds \tag{4.4.39}$$

平面上の線積分が積分経路によらない条件

線積分が積分経路によらなけらば、任意の積分経路：C_1, C_2 として、下記となる。

$$\int_{C_1} \mathrm{Q}\,dy + \mathrm{P}\,dx = \int_{C_2} \mathrm{Q}\,dy + \mathrm{P}\,dx$$



線積分が積分経路によらないとすると、

$$\begin{aligned}&\int_{C_1} \mathrm{Q}\,dy + \mathrm{P}\,dx - \int_{C_2} \mathrm{Q}\,dy + \mathrm{P}\,dx\\ &= \int_{C_1-C_2} \mathrm{Q}\,dy + \mathrm{P}\,dx\\ &= \oint_C \mathrm{Q}\,dy + \mathrm{P}\,dx = 0\end{aligned}$$

平面におけるグリーンの定理：(4.4.32) 式から、

$$\iint_S \left(\frac{d}{d\,x}\mathrm{Q} - \frac{d}{d\,y}\mathrm{P}\right) dydx = 0$$

以上から、線積分が積分経路によらない必要十分条件は、

$$\frac{d}{d\,x}\mathrm{Q} = \frac{d}{d\,y}\mathrm{P} \tag{4.4.40}$$

$B : (x_0, y_0)$ から $A : (x, y)$ の線積分で、下記の $U(x, y)$ を考える。

$$\mathrm{U}(x, y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \mathrm{Q}\,dy + \mathrm{P}\,dx$$

上式で x を δx だけ移動させると、

$$\begin{aligned}\mathrm{U}(x+\delta x, y) &= \int_{(x_0,y_0)}^{(x+\delta x,y)} \mathrm{Q}\,dy + \mathrm{P}\,dx\\ &= \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \mathrm{Q}\,dy + \mathrm{P}\,dx + \int_{(x,y)}^{(x+\delta x,y)} \mathrm{P}\,dx\\ &=\mathrm{U}(x, y) + \int_{(x,y)}^{(x+\delta x,y)} \mathrm{P}\,dx\\ &=\mathrm{U}(x, y) + \mathrm{P}\,\delta x\\ &=\mathrm{U}(x, y) + \frac{d}{d\,x}\mathrm{U}\,\delta x\end{aligned}$$

以上から下記となり、同様に、

$$\frac{d}{d\,x}\mathrm{U} = \mathrm{P}, \quad \frac{d}{d\,y}\mathrm{U} = \mathrm{Q}$$

上記で定義される U で P, Q の (4.4.32) 式の線積分は積分経路によらない。

4.4.8　グリーンの定理

下記のグリーンの定理を証明する。

$$\begin{aligned}&\iiint_V F\,(\nabla^2 G) - G\,(\nabla^2 F)\,dV\\ &\quad= \iint_S F\,\frac{d}{dn}G - G\,\frac{d}{dn}F\,dS\end{aligned} \tag{4.4.41}$$

ガウスの定理：(4.4.44) 式から、

$$\iiint_V \nabla\cdot\vec{A}dV = \iint_S \vec{A}\cdot\vec{n}\,dS \tag{4.4.42}$$

いま、$\vec{A} = F\,\vec{B}$ とすると、

$$\nabla\vec{A} = \nabla\left(F\,\vec{B}\right) = \vec{B}\,(\nabla\,F) + F\,\left(\nabla\,\vec{B}\right)$$

(4.4.42) 式に上式を代入すると、

$$\begin{aligned}&\iiint_V \vec{B}\,(\nabla\,F)\,dV + \iiint_V F\,\left(\nabla\,\vec{B}\right) dV\\ &\quad= \iint_S \left(F\,\vec{B}\right)\cdot\vec{n}\,dS\end{aligned} \tag{4.4.43}$$

$\vec{B} = \nabla\,G$ とおくと、

$$\begin{aligned}&\iiint_V (\nabla\,G)\,(\nabla\,F)\,dV + \iiint_V F\,(\nabla^2 G)\,dV\\ &= \iint_S F\,(\nabla\,G)\cdot\vec{n}\,dS\\ &= \iint_S F\,\frac{d}{dn}G\,dS\end{aligned}$$

F と G を置き換えて、

$$\begin{aligned}&\iiint_V (\nabla\,F)\,(\nabla\,G)\,dV + \iiint_V G\,(\nabla^2 F)\,dV\\ &= \iint_S G\,\frac{d}{dn}F\,dS\end{aligned}$$

上式から下式を引くと、下記のグリーンの定理が得られた。

$$\begin{aligned}&\iiint_V F\,(\nabla^2 G) - G\,(\nabla^2 F)\,dV\\ &\quad= \iint_S F\,\frac{d}{dn}G - G\,\frac{d}{dn}F\,dS\end{aligned}$$

4.4.9　ガウスの定理

```
kill(all);
load("vect");
depends([P,Q,R],[x,y,z]);
VCA:matrix([P],[Q],[R]);
VCN:matrix([n[x]],[n[y]],[n[z]]);
S1:matrix([x],[y],[z[1](x,y)]);
S2:matrix([x],[y],[z[2](x,y)]);
VCA.VCN;
div(transpose(VCA)[1]);
express(%);
DVCA:IVXYZ:ev(%,diff);
GZ1:'integrate('integrate('integrate(
 diff(R(x,y,z),z,1),z,z[1],z[2]),x),y);
GZ2:GZ1=ev(GZ1,integrate);
DS1X:diff(S1,x,1);
DS1Y:diff(S1,y,1);
DS1V:col(adjoint(transpose(addcol(DS1X,
 DS1Y,matrix([1],[1],[1])))),3);
DS1AB:sqrt(DS1V[1][1]^2+DS1V[2][1]^2
 +DS1V[3][1]^2);
DS12:dS=DS1AB*dx*dy;
N1:DS1V/DS1AB;
N1Z:N1[3][1];
DS2X:diff(S2,x,1);
DS2Y:diff(S2,y,1);
DS2V:col(adjoint(transpose(addcol(DS2X,
 DS2Y,matrix([1],[1],[1])))),3);
DS2AB:sqrt(DS2V[1][1]^2+DS2V[2][1]^2
 +DS2V[3][1]^2);
DS21:dS=DS2AB*dx*dy;
N2:DS2V/DS2AB;
N2Z:N2[3][1];
```

下記のガウスの定理を証明する。

$$\iiint_V \nabla\cdot\vec{A}\,dV = \iint_S \vec{A}\cdot\vec{n}\,dS \tag{4.4.44}$$

曲面 : S で囲まれた領域の関数 : $\mathrm{P}(x,y,z)$, $\mathrm{Q}(x,y,z)$, $\mathrm{R}(x,y,z)$ を考える。これらの関数を基にした下記のベクトル関数 : $\vec{A}$ および曲面の単位法線ベクトル : $\vec{n}$ とすると、

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}, \qquad \vec{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} \tag{4.4.45}$$

ここで、下記の関係がある。

$$\vec{A}\cdot\vec{n} = n_z\,R + n_y\,Q + n_x\,P \tag{4.4.46}$$

$$\nabla\cdot\vec{A} = \mathrm{div}\,\vec{A} = \frac{d}{d\,z}R + \frac{d}{d\,y}Q + \frac{d}{d\,x}P \tag{4.4.47}$$

また、(4.4.44) 式は (4.4.46) 式、(4.4.47) 式から下記のように記述できる。

$$\begin{aligned}\iiint_V \frac{d}{d\,z}R + \frac{d}{d\,y}Q + \frac{d}{d\,x}P dV \\ = \iint_S n_z\,R + n_y\,Q + n_x\,P\,dS\end{aligned} \tag{4.4.48}$$

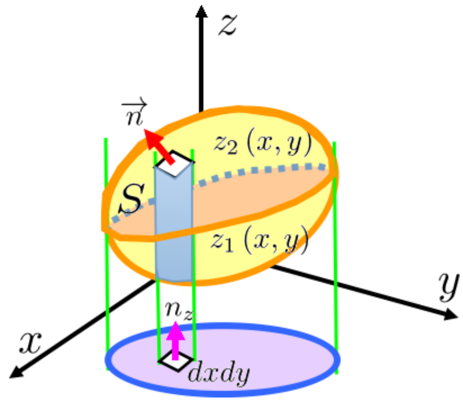


図 4.4.3: 曲面 : S で囲まれた領域における $\frac{d}{dz}\mathrm{R}(x,y,z)$ の体積分

(4.4.48) 式の左辺の被積分関数の第一項 : $\frac{d}{dz}R$ の体積分について、

$$\begin{aligned}\iiint_{z_1}^{z_2} \frac{d}{d\,z}\mathrm{R}(x,y,z)\,dzdxdy \\ = \iint_S \mathrm{R}(x,y,z_2) - \mathrm{R}(x,y,z_1)\,dxdy\end{aligned} \tag{4.4.49}$$

(4.4.48) 式の右辺の被積分関数の第一項 : $n_z\,R$ の面積分について、曲面 : S の下部を $z_1(x,y)$、上部を $z_2(x,y)$ とし、下部の面を表すベクトル : $\vec{r_1}$ とすると、

$$\vec{r_1} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z_1(x,y) \end{pmatrix}$$

$\vec{r_1}$ を x,y で微分すると、

$$\frac{d}{d\,x}\vec{r_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{d}{d\,x}z_1(x,y) \end{pmatrix}, \qquad \frac{d}{d\,y}\vec{r_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{d}{d\,y}z_1(x,y) \end{pmatrix}$$

微小面積 : dS は、79 頁から次式となる。

$$dS = \left|\frac{d}{d\,x}\vec{r}\times\frac{d}{d\,y}\vec{r}\right|dx\,dy$$

上式から、

$$\frac{d}{d\,x}\vec{r_1}\times\frac{d}{d\,y}\vec{r_1} = \begin{pmatrix} -\frac{d}{d\,x}z_1(x,y) \\ -\frac{d}{d\,y}z_1(x,y) \\ 1 \end{pmatrix} \tag{4.4.50}$$

以上から、dS は、

$$dS = dx\,dy\sqrt{\left(\frac{d}{d\,y}\,z_1\left(x,y\right)\right)^2 + \left(\frac{d}{d\,x}\,z_1\left(x,y\right)\right)^2 + 1}$$

S 面に垂直な単位ベクトル：$\overrightarrow{n_1}$ は、

$$\overrightarrow{n_1} = \frac{\begin{pmatrix} -\frac{d}{d\,x}\,z_1\left(x,y\right) \\ -\frac{d}{d\,y}\,z_1\left(x,y\right) \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{\left(\frac{d}{d\,y}\,z_1\left(x,y\right)\right)^2 + \left(\frac{d}{d\,x}\,z_1\left(x,y\right)\right)^2 + 1}} \tag{4.4.51}$$

$\overrightarrow{n_1}$ の z 軸方向は、

$$\overrightarrow{n_1} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d}{d\,y}\,z_2\left(x,y\right)\right)^2 + \left(\frac{d}{d\,x}\,z_2\left(x,y\right)\right)^2 + 1}}$$

以上から、下部の面：$z_1\left(x,y\right)$ は下向きであるから、

$$n_z\,dS = 1\,dx\,dy \rightarrow n_z\,dS = -1\,dx\,dy$$

上部の面も同じようにすると、上部の面：$z_2\left(x,y\right)$ は上向きであるから、

$$n_z\,dS = 1\,dx\,dy \tag{4.4.52}$$

以上から、

$$\iint_S n_z\,R\,dS = \iint_S \mathrm{R}\left(x,y,z_2\right) - \mathrm{R}\left(x,y,z_1\right)dxdy \tag{4.4.53}$$

(4.4.49) 式の右辺と (4.4.53) 式の右辺が一致しているので、その左辺が等しいとして、

$$\iiint_{z_1}^{z_2}\frac{d}{d\,z}\,\mathrm{R}\left(x,y,z\right)dzdxdy = \iint_S n_z\,R\,dS$$

上式から x,y 軸も同様にして得られ、(4.4.48) 式のガウスの定理を証明できた。

また、$\nabla\cdot\overrightarrow{A} = \mathrm{div}\overrightarrow{A} = 0$ の場合には、(4.4.44) 式から、$\iint_S \overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{n}\,dS$ は、積分範囲によらず、積分結果は零となる。

ガウスの積分例

$$\iint_S \frac{\overrightarrow{r}\cdot\overrightarrow{n}}{r^3}\,dS=\begin{cases}0 & \text{（原点が曲面：}S\text{ の外）}\\ 4\,\pi & \text{（原点が曲面：}S\text{ の内）}\end{cases} \tag{4.4.54}$$

```
kill(all);
load("vect");
R1:matrix([x],[y],[z]);
RAB1:sqrt(x^2+y^2+z^2);
R2:R1/RAB1^3;
div(transpose(R2)[1]);
express(%);
ev(%,diff);
factor(%);
-(-R)/R^3*4*%pi*R^2;
```

(4.4.54) 式をガウスの定理 : (4.4.44) 式に適用すると、

$$\iiint_V \nabla\cdot\frac{\overrightarrow{r}}{r^3}dV=\iint_S \frac{\overrightarrow{r}}{r^3}\cdot\overrightarrow{n}\,dS \tag{4.4.55}$$

$\overrightarrow{r}$, $|r|$ は、

$$\overrightarrow{r}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},\quad |r|=\sqrt{z^2+y^2+x^2}$$

上式から、

$$\frac{\overrightarrow{r}}{r^3}=\begin{pmatrix}\frac{x}{(z^2+y^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\\ \frac{y}{(z^2+y^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\\ \frac{z}{(z^2+y^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\end{pmatrix}$$

$\nabla\cdot\frac{\overrightarrow{r}}{r^3}$ は、

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\frac{\overrightarrow{r}}{r^3}=&div\left(\frac{\overrightarrow{r}}{r^3}\right)\\ =&\frac{3}{(z^2+y^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{3\,z^2}{(z^2+y^2+x^2)^{\frac{5}{2}}}\\ &-\frac{3\,y^2}{(z^2+y^2+x^2)^{\frac{5}{2}}}-\frac{3\,x^2}{(z^2+y^2+x^2)^{\frac{5}{2}}}\\ =&0\end{aligned} \tag{4.4.56}$$

以上から、原点を含まない場合には特異点はなく、(4.4.54) 式で原点が曲面：S の外では零となる。

一方、原点では特異点のなるので、微小半径：δR の球で囲んで除き、外部の局面：S_1、半径：δR の球面：S_2 とすると、

$$\iint_S \frac{\overrightarrow{r}}{r^3}\cdot\overrightarrow{n}\,dS=\iint_{S_1} \frac{\overrightarrow{r}}{r^3}\cdot\overrightarrow{n}\,dS-\iint_{S_2} \frac{\overrightarrow{r}}{r^3}\cdot\overrightarrow{n}\,dS=0 \tag{4.4.57}$$

上式の右辺第一項は、(4.4.55) 式、(4.4.56) 式から、

$$\iint_{S_1} \frac{\overrightarrow{r}}{r^3}\cdot\overrightarrow{n}\,dS=\iiint_{V_1}\nabla\cdot\frac{\overrightarrow{r}}{r^3}dV=0$$

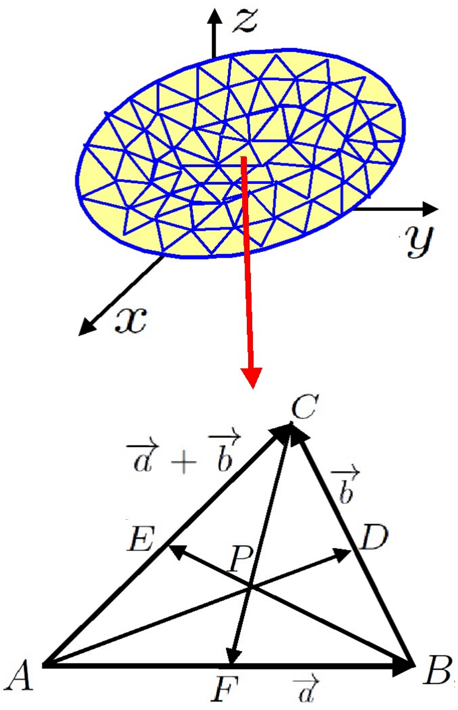
以上から、$\overrightarrow{n}$ は内向きであるから、$\overrightarrow{r}\cdot\overrightarrow{n}=-\delta R$ となり、

$$\begin{aligned}\iint_S \frac{\overrightarrow{r}}{r^3}\cdot\overrightarrow{n}\,dS=&-\iint_{S_2} \frac{\overrightarrow{r}}{r^3}\cdot\overrightarrow{n}\,dS\\ =&-\frac{-\delta R}{\delta R^3}4\,\pi\,\delta R^2=4\,\pi\end{aligned} \tag{4.4.58}$$

以上から (4.4.54) 式が証明された。

4.4.10 ストークスの定理

```
kill(all);
load("vect");
depends([A],[x,y,z]);
NB:matrix([d/dx],[d/dy],[d/dz]);
AP:matrix([A[x]],[A[y]],[A[z]]);
VA:matrix([a[x]],[a[y]],[a[z]]);
VB:matrix([b[x]],[b[y]],[b[z]]);
```



下記のストークスの定理を証明する。

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_S \left(\nabla\times\vec{F}\right)\cdot\vec{n}\,dS \tag{4.4.59}$$

曲面の積分範囲を前図のように多くの三角形で分割し、その微小三角形の一部で上式左辺の線積分について検討する。

$$\int_{\Delta C} \vec{F}\cdot d\vec{r} \tag{4.4.60}$$

いま、下記とする。

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}, \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$$

三角形の頂点を A, B, C、三角形の中心を P、辺 : AB の中点を F、辺 : BC の中点を D、辺 : CA の中点を E とする。点 : D, E, F における $\vec{F}$ の値 : $\vec{F_D}, \vec{F_E}, \vec{F_F}$ と中心 : P の $\vec{F_P}$ の関係は、(4.3.54) 式から、

$$\vec{F_D} = \vec{F_P} + \left(\overrightarrow{PD}\cdot\nabla\right)\vec{F_P}$$

$$\vec{F_E} = \vec{F_P} + \left(\overrightarrow{PE}\cdot\nabla\right)\vec{F_P}$$

$$\vec{F_F} = \vec{F_P} + \left(\overrightarrow{PF}\cdot\nabla\right)\vec{F_P}$$

ここで、$\overrightarrow{PD}, \overrightarrow{PE}, \overrightarrow{PF}$ は、

$$\overrightarrow{PF} - \overrightarrow{PE} = \overrightarrow{EF} = -\frac{1}{2}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{PD} - \overrightarrow{PE} = \overrightarrow{ED} = \frac{1}{2}\vec{a}$$

(4.4.60) 式は上式を用いて、

$$\begin{aligned}
&\oint_{\Delta C} \vec{F}\cdot d\vec{r} \\
&= \vec{b}\cdot\vec{F_D} - \left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{F_E} + \vec{a}\cdot\vec{F_F} \\
&= \vec{a}\left(\vec{F_F}-\vec{F_E}\right) + \vec{b}\left(\vec{F_D}-\vec{F_E}\right) \\
&= \vec{a}\left(\left(\overrightarrow{PF}\cdot\nabla\right)\vec{F_P} - \left(\overrightarrow{PE}\cdot\nabla\right)\vec{F_P}\right) \\
&\quad + \vec{b}\left(\left(\overrightarrow{PD}\cdot\nabla\right)\vec{F_P} - \left(\overrightarrow{PE}\cdot\nabla\right)\vec{F_P}\right) \\
&= \vec{a}\left(\left(\overrightarrow{EF}\cdot\nabla\right)\vec{F_P}\right) + \vec{b}\left(\left(\overrightarrow{ED}\cdot\nabla\right)\vec{F_P}\right) \\
&= -\frac{1}{2}\vec{a}\left(\left(\vec{b}\cdot\nabla\right)\vec{F_P}\right) + \frac{1}{2}\vec{b}\left((\vec{a}\cdot\nabla)\vec{F_P}\right)
\end{aligned} \tag{4.4.61}$$

```
VA.AP;
grad(%);
express(%);
ev(%,diff);
VPA21:transpose(%);
curl(transpose(AP)[1]);
transpose(express(%));
ev(%,diff);
VPA22:col(adjoint(transpose(addcol(%,VA,
 matrix([1],[1],[1])))),3);
VPA21+VPA22;
VPA1:expand(%);
VB.VPA1;
I11:%/2;
VB.AP;
grad(%);
express(%);
ev(%,diff);
VPB21:transpose(%);
curl(transpose(AP)[1]);
transpose(express(%));
ev(%,diff);
VPB22:col(adjoint(transpose(addcol(%,VB,
 matrix([1],[1],[1])))),3);
VPB21+VPB22;
```

```
VPB1:expand(%);
VA.VPB1;
I12:%/2;
I11-I12;
I1:expand(%);
```

下記は (4.3.53) 式から計算することができ、

$$
\begin{aligned}
&\oint_{\Delta C} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} \\
&\quad = -\frac{1}{2}\overrightarrow{a}\left(\left(\left(\overrightarrow{b}\cdot\nabla\right)\overrightarrow{F_P}\right)+\frac{1}{2}\overrightarrow{b}\left(\left(\overrightarrow{a}\cdot\nabla\right)\overrightarrow{F_P}\right)\right. \\
&\quad = \frac{a_y\, b_z\, \left(\frac{d}{d\,y}\,A_z\right)}{2} - \frac{b_y\, a_z\, \left(\frac{d}{d\,y}\,A_z\right)}{2} + \frac{a_x\, b_z\, \left(\frac{d}{d\,x}\,A_z\right)}{2} \\
&\qquad - \frac{b_x\, a_z\, \left(\frac{d}{d\,x}\,A_z\right)}{2} - \frac{a_y\, \left(\frac{d}{d\,z}\,A_y\right)\, b_z}{2} - \frac{a_x\, \left(\frac{d}{d\,z}\,A_x\right)\, b_z}{2} \\
&\qquad + \frac{b_y\, \left(\frac{d}{d\,z}\,A_y\right)\, a_z}{2} + \frac{b_x\, \left(\frac{d}{d\,z}\,A_x\right)\, a_z}{2} + \frac{a_x\, b_y\, \left(\frac{d}{d\,x}\,A_y\right)}{2} \\
&\qquad - \frac{b_x\, a_y\, \left(\frac{d}{d\,x}\,A_y\right)}{2} - \frac{a_x\, \left(\frac{d}{d\,y}\,A_x\right)\, b_y}{2} + \frac{b_x\, \left(\frac{d}{d\,y}\,A_x\right)\, a_y}{2}
\end{aligned}
\tag{4.4.62}
$$

```
curl(transpose(AP)[1]);
transpose(express(%));
CVCA1:ev(%,diff);
col(adjoint(transpose(addcol(VA,VB,
 matrix([1],[1],[1])))),3);
%.CVCA1/2;
I2:expand(%);
I1-I2;
factor(%);
```

(4.4.59) 式の右辺の微小三角形の面積分について検討する。

$$\iint_{\Delta S} \left(\nabla\times\overrightarrow{F}\right)\cdot\overrightarrow{n}\,dS$$

ここで、

$$\overrightarrow{n}\,dS = \frac{1}{2}\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$$

上式から、

$$
\begin{aligned}
&\iint_{\Delta S} \left(\nabla\times\overrightarrow{F}\right)\cdot\overrightarrow{n}\,dS = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}\right)\left(\nabla\times\overrightarrow{F}\right) \\
&\quad = \frac{a_y\, b_z\, \left(\frac{d}{d\,y}\,A_z\right)}{2} - \frac{b_y\, a_z\, \left(\frac{d}{d\,y}\,A_z\right)}{2} + \frac{a_x\, b_z\, \left(\frac{d}{d\,x}\,A_z\right)}{2} \\
&\qquad - \frac{b_x\, a_z\, \left(\frac{d}{d\,x}\,A_z\right)}{2} - \frac{a_y\, \left(\frac{d}{d\,z}\,A_y\right)\, b_z}{2} - \frac{a_x\, \left(\frac{d}{d\,z}\,A_x\right)\, b_z}{2} \\
&\qquad + \frac{b_y\, \left(\frac{d}{d\,z}\,A_y\right)\, a_z}{2} + \frac{b_x\, \left(\frac{d}{d\,z}\,A_x\right)\, a_z}{2} + \frac{a_x\, b_y\, \left(\frac{d}{d\,x}\,A_y\right)}{2} \\
&\qquad - \frac{b_x\, a_y\, \left(\frac{d}{d\,x}\,A_y\right)}{2} - \frac{a_x\, \left(\frac{d}{d\,y}\,A_x\right)\, b_y}{2} + \frac{b_x\, \left(\frac{d}{d\,y}\,A_x\right)\, a_y}{2}
\end{aligned}
\tag{4.4.63}
$$

(4.4.62) 式、(4.4.63) 式から、両式の右辺は等しいから、

$$\oint_{\Delta C} \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r} = \iint_{\Delta S} \left(\nabla\times\overrightarrow{F}\right)\cdot\overrightarrow{n}\,dS$$

各微小部分に接する線積分はお互いに打ち消しあい、最終的に与えられた線積分境界と面積分となり、(4.4.59) 式が証明された。

ストークスの定理の別解

```
kill(all);
load("vect");
depends([A],[x,y,z]);
depends([x,y,z],[u,v]);
VCA:matrix([A[x]],[A[y]],[A[z]]);
curl(transpose(VCA)[1]);
transpose(express(%));
CVCA1:ev(%,diff);
DRU1:matrix([diff(x,u,1)],[diff(y,u,1)],
 [diff(z,u,1)]);
DRV1:matrix([diff(x,v,1)],[diff(y,v,1)],
 [diff(z,v,1)]);
DUV1:col(adjoint(transpose(addcol(DRU1,
 DRV1,matrix([1],[1],[1])))),3);
CVCA1.DUV1;
CVCA2:expand(%);
AXP:+('diff(x,v,1))*('diff(A[x],z,1))
 *('diff(z,u,1))+('diff(x,v,1))
 *('diff(A[x],y,1))*('diff(y,u,1));
AXM:-('diff(x,u,1))*('diff(A[x],y,1))
 *('diff(y,v,1))-('diff(x,u,1))
 *('diff(A[x],z,1))*('diff(z,v,1));
AYP:+('diff(y,v,1))*('diff(A[y],z,1))
 *('diff(z,u,1))+('diff(x,u,1))
 *('diff(y,v,1))*('diff(A[y],x,1));
AYM:-('diff(y,u,1))*('diff(A[y],z,1))
 *('diff(z,v,1))-('diff(x,v,1))
 *('diff(y,u,1))*('diff(A[y],x,1));
AZP:('diff(y,u,1))*('diff(z,v,1))
 *('diff(A[z],y,1))+('diff(x,u,1))
 *('diff(z,v,1))*('diff(A[z],x,1));
AZM:-('diff(y,v,1))*('diff(z,u,1))
 *('diff(A[z],y,1))-('diff(x,v,1))
 *('diff(z,u,1))*('diff(A[z],x,1));
AXP+AXM+AYP+AYM+AZP+AZM;
CVCA2-%;
```

(4.4.59) 式の下記について調べる。(4.4.20) 式から、

$$\iint_S \left(\nabla\times\overrightarrow{A}\right)\cdot\overrightarrow{n}\,dS = \iint_D \left(\nabla\times\overrightarrow{A}\right)\cdot\left(\frac{d}{d\,u}\overrightarrow{r}\times\frac{d}{d\,v}\overrightarrow{r}\right)du\,dv \tag{4.4.64}$$

ここで、

$$\overrightarrow{A}=\begin{pmatrix}A_x\\A_y\\A_z\end{pmatrix},\quad \nabla\times\overrightarrow{A}=\begin{pmatrix}\frac{d}{d\,y}A_z-\frac{d}{d\,z}A_y\\ \frac{d}{d\,z}A_x-\frac{d}{d\,x}A_z\\ \frac{d}{d\,x}A_y-\frac{d}{d\,y}A_x\end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{d\,u}\overrightarrow{r}=\begin{pmatrix}\frac{d}{d\,u}x\\ \frac{d}{d\,u}y\\ \frac{d}{d\,u}z\end{pmatrix},\quad \frac{d}{d\,v}\overrightarrow{r}=\begin{pmatrix}\frac{d}{d\,v}x\\ \frac{d}{d\,v}y\\ \frac{d}{d\,v}z\end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{d\,u}\overrightarrow{r}\times\frac{d}{d\,v}\overrightarrow{r}=\begin{pmatrix}\left(\frac{d}{d\,u}y\right)\left(\frac{d}{d\,v}z\right)-\left(\frac{d}{d\,v}y\right)\left(\frac{d}{d\,u}z\right)\\ \left(\frac{d}{d\,v}x\right)\left(\frac{d}{d\,u}z\right)-\left(\frac{d}{d\,u}x\right)\left(\frac{d}{d\,v}z\right)\\ \left(\frac{d}{d\,u}x\right)\left(\frac{d}{d\,v}y\right)-\left(\frac{d}{d\,v}x\right)\left(\frac{d}{d\,u}y\right)\end{pmatrix}$$

以上から、

$$\begin{aligned}\left(\nabla\times\overrightarrow{A}\right)\cdot\left(\frac{d}{d\,u}\overrightarrow{r}\times\frac{d}{d\,v}\overrightarrow{r}\right)=&\left(\left(\frac{d}{d\,v}x\right)\left(\frac{d}{d\,z}A_x\right)\left(\frac{d}{d\,u}z\right)+\left(\frac{d}{d\,v}x\right)\left(\frac{d}{d\,y}A_x\right)\left(\frac{d}{d\,u}y\right)\right)\\&+\left(-\left(\frac{d}{d\,u}x\right)\left(\frac{d}{d\,z}A_x\right)\left(\frac{d}{d\,v}z\right)-\left(\frac{d}{d\,u}x\right)\left(\frac{d}{d\,y}A_x\right)\left(\frac{d}{d\,v}y\right)\right)\\&+\left(\left(\frac{d}{d\,v}y\right)\left(\frac{d}{d\,z}A_y\right)\left(\frac{d}{d\,u}z\right)+\left(\frac{d}{d\,u}x\right)\left(\frac{d}{d\,v}y\right)\left(\frac{d}{d\,x}A_y\right)\right)\\&+\left(-\left(\frac{d}{d\,u}y\right)\left(\frac{d}{d\,z}A_y\right)\left(\frac{d}{d\,v}z\right)-\left(\frac{d}{d\,v}x\right)\left(\frac{d}{d\,u}y\right)\left(\frac{d}{d\,x}A_y\right)\right)\\&+\left(\left(\frac{d}{d\,u}y\right)\left(\frac{d}{d\,v}z\right)\left(\frac{d}{d\,y}A_z\right)+\left(\frac{d}{d\,u}x\right)\left(\frac{d}{d\,v}z\right)\left(\frac{d}{d\,x}A_z\right)\right)\\&+\left(-\left(\frac{d}{d\,v}y\right)\left(\frac{d}{d\,u}z\right)\left(\frac{d}{d\,y}A_z\right)-\left(\frac{d}{d\,v}x\right)\left(\frac{d}{d\,u}z\right)\left(\frac{d}{d\,x}A_z\right)\right)\end{aligned} \tag{4.4.65}$$

```
AXA:('diff(x,v,1))*('diff(A[x],x,1))
 *('diff(x,u,1));
AYA:('diff(y,v,1))*('diff(A[y],y,1))
 *('diff(y,u,1));
AZA:('diff(z,v,1))*('diff(A[z],z,1))
 *('diff(z,u,1));
AXP+AXA;
factor(%);
AXP1:'diff(A[x],u,1)*'diff(x,v,1);
AXM-AXA;
factor(%);
AXM1:-'diff(A[x],v,1)*'diff(x,u,1);
AYP+AYA;
factor(%);
AYP1:'diff(A[y],u,1)*'diff(y,v,1);
AYM-AYA;
factor(%);
AYM1:-'diff(A[y],v,1)*'diff(y,u,1);
AZP+AZA;
factor(%);
AZP1:'diff(A[z],u,1)*'diff(z,v,1);
AZM-AZA;
factor(%);
AZM1:-'diff(A[z],v,1)*'diff(z,u,1);
AXYZ1:AXP1+AYP1+AZP1;
```

```
AXYZ2:AXM1+AYM1+AZM1;
remove (A, dependency);
depends([A],[u,v]);
DVAU1:diff(VCA,u,1);
DVAV1:diff(VCA,v,1);
DS1:DVAU1.DRV1;
DS1-AXYZ1;
DS2:DVAV1.DRU1;
DS2+AXYZ2;
VCA.DRV1;
DS11:diff(%,u,1);
VCA.DRU1;
DS21:diff(%,v,1);
DS11-DS21;
DS1-DS2-%;
```

(4.4.65) 式の右辺第一項に $\left(\frac{d}{d\,u}\,x\right)\left(\frac{d}{d\,v}\,x\right)\left(\frac{d}{d\,x}\,A_x\right)$ を足し、I_{11} とし、右辺第二項に同じ $\left(\frac{d}{d\,u}\,x\right)\left(\frac{d}{d\,v}\,x\right)\left(\frac{d}{d\,x}\,A_x\right)$ を引き、I_{12} とする。

(4.4.65) 式の右辺第三項に $\left(\frac{d}{d\,u}\,y\right)\left(\frac{d}{d\,v}\,y\right)\left(\frac{d}{d\,y}\,A_y\right)$ を足し、I_{21} とし、右辺第四項に同じ $\left(\frac{d}{d\,u}\,y\right)\left(\frac{d}{d\,v}\,y\right)\left(\frac{d}{d\,y}\,A_y\right)$ を引き、I_{22} とする。

(4.4.65) 式の右辺第五項に $\left(\frac{d}{d\,u}\,z\right)\left(\frac{d}{d\,v}\,z\right)\left(\frac{d}{d\,z}\,A_z\right)$ を足し、I_{31} とし、右辺第六項に同じ $\left(\frac{d}{d\,u}\,z\right)\left(\frac{d}{d\,v}\,z\right)\left(\frac{d}{d\,z}\,A_z\right)$ を引き、I_{32} とする。

上記から、

$$
\begin{aligned}
I_{11}&=\left(\frac{d}{d\,v}\,x\right)\left(\left(\frac{d}{d\,z}\,A_x\right)\left(\frac{d}{d\,u}\,z\right)+\left(\frac{d}{d\,y}\,A_x\right)\left(\frac{d}{d\,u}\,y\right)+\left(\frac{d}{d\,u}\,x\right)\left(\frac{d}{d\,x}\,A_x\right)\right)=\left(\frac{d}{d\,v}\,x\right)\left(\frac{d}{d\,u}\,A_x\right)\\
I_{12}&=-\left(\frac{d}{d\,u}\,x\right)\left(\left(\frac{d}{d\,z}\,A_x\right)\left(\frac{d}{d\,v}\,z\right)+\left(\frac{d}{d\,y}\,A_x\right)\left(\frac{d}{d\,v}\,y\right)+\left(\frac{d}{d\,v}\,x\right)\left(\frac{d}{d\,x}\,A_x\right)\right)=-\left(\frac{d}{d\,u}\,x\right)\left(\frac{d}{d\,v}\,A_x\right)\\
I_{21}&=\left(\frac{d}{d\,v}\,y\right)\left(\left(\frac{d}{d\,z}\,A_y\right)\left(\frac{d}{d\,u}\,z\right)+\left(\frac{d}{d\,u}\,y\right)\left(\frac{d}{d\,y}\,A_y\right)+\left(\frac{d}{d\,u}\,x\right)\left(\frac{d}{d\,x}\,A_y\right)\right)=\left(\frac{d}{d\,v}\,y\right)\left(\frac{d}{d\,u}\,A_y\right)\\
I_{22}&=-\left(\frac{d}{d\,u}\,y\right)\left(\left(\frac{d}{d\,z}\,A_y\right)\left(\frac{d}{d\,v}\,z\right)+\left(\frac{d}{d\,v}\,y\right)\left(\frac{d}{d\,y}\,A_y\right)+\left(\frac{d}{d\,v}\,x\right)\left(\frac{d}{d\,x}\,A_y\right)\right)=-\left(\frac{d}{d\,u}\,y\right)\left(\frac{d}{d\,v}\,A_y\right)\\
I_{31}&=\left(\frac{d}{d\,v}\,z\right)\left(\left(\frac{d}{d\,u}\,z\right)\left(\frac{d}{d\,z}\,A_z\right)+\left(\frac{d}{d\,u}\,y\right)\left(\frac{d}{d\,y}\,A_z\right)+\left(\frac{d}{d\,u}\,x\right)\left(\frac{d}{d\,x}\,A_z\right)\right)=\left(\frac{d}{d\,v}\,z\right)\left(\frac{d}{d\,u}\,A_z\right)\\
I_{33}&=-\left(\frac{d}{d\,u}\,z\right)\left(\left(\frac{d}{d\,v}\,z\right)\left(\frac{d}{d\,z}\,A_z\right)+\left(\frac{d}{d\,v}\,y\right)\left(\frac{d}{d\,y}\,A_z\right)+\left(\frac{d}{d\,v}\,x\right)\left(\frac{d}{d\,x}\,A_z\right)\right)=-\left(\frac{d}{d\,u}\,z\right)\left(\frac{d}{d\,v}\,A_z\right)
\end{aligned}
$$

上式を整理して、

$$
\begin{aligned}
I_{11}+I_{21}+I_{31}&=\left(\frac{d}{d\,v}\,z\right)\left(\frac{d}{d\,u}\,A_z\right)+\left(\frac{d}{d\,v}\,y\right)\left(\frac{d}{d\,u}\,A_y\right)+\left(\frac{d}{d\,v}\,x\right)\left(\frac{d}{d\,u}\,A_x\right)\\
I_{12}+I_{22}+I_{32}&=-\left(\frac{d}{d\,u}\,z\right)\left(\frac{d}{d\,v}\,A_z\right)-\left(\frac{d}{d\,u}\,y\right)\left(\frac{d}{d\,v}\,A_y\right)-\left(\frac{d}{d\,u}\,x\right)\left(\frac{d}{d\,v}\,A_x\right)
\end{aligned}
$$

$I_{11}+I_{21}+I_{31}$ は、

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\,u}\overrightarrow{A}\cdot\frac{d}{d\,v}\overrightarrow{r}=\begin{pmatrix}\frac{d}{d\,u}A_x\\ \frac{d}{d\,u}A_y\\ \frac{d}{d\,u}A_z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{d}{d\,v}x\\ \frac{d}{d\,v}y\\ \frac{d}{d\,v}z\end{pmatrix}&=\left(\frac{d}{d\,v}z\right)\left(\frac{d}{d\,u}A_z\right)+\left(\frac{d}{d\,v}y\right)\left(\frac{d}{d\,u}A_y\right)+\left(\frac{d}{d\,v}x\right)\left(\frac{d}{d\,u}A_x\right)\\&=I_{11}+I_{21}+I_{31}\end{aligned}$$

$I_{12}+I_{22}+I_{32}$ は、

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\,v}\overrightarrow{A}\cdot\frac{d}{d\,u}\overrightarrow{r}=\begin{pmatrix}\frac{d}{d\,v}A_x\\ \frac{d}{d\,v}A_y\\ \frac{d}{d\,v}A_z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{d}{d\,u}x\\ \frac{d}{d\,u}y\\ \frac{d}{d\,u}z\end{pmatrix}&=\left(\frac{d}{d\,u}z\right)\left(\frac{d}{d\,v}A_z\right)+\left(\frac{d}{d\,u}y\right)\left(\frac{d}{d\,v}A_y\right)+\left(\frac{d}{d\,u}x\right)\left(\frac{d}{d\,v}A_x\right)\\&=I_{12}+I_{22}+I_{32}\end{aligned}$$

(4.4.64) 式は上記の結果から、

$$\iint_S\left(\nabla\times\overrightarrow{A}\right)\cdot\overrightarrow{n}\,dS=\iint_D\left(\nabla\times\overrightarrow{A}\right)\cdot\left(\frac{d}{d\,u}\overrightarrow{r}\times\frac{d}{d\,v}\overrightarrow{r}\right)du\,dv=\iint_D\frac{d}{d\,u}\overrightarrow{A}\cdot\frac{d}{d\,v}\overrightarrow{r}-\frac{d}{d\,v}\overrightarrow{A}\cdot\frac{d}{d\,u}\overrightarrow{r}\,du\,dv \tag{4.4.66}$$

ところで、

$$\overrightarrow{A}\cdot\frac{d}{d\,v}\overrightarrow{r}=A_z\left(\frac{d}{d\,v}z\right)+A_y\left(\frac{d}{d\,v}y\right)+A_x\left(\frac{d}{d\,v}x\right),\quad\overrightarrow{A}\cdot\frac{d}{d\,u}\overrightarrow{r}=A_z\left(\frac{d}{d\,u}z\right)+A_y\left(\frac{d}{d\,u}y\right)+A_x\left(\frac{d}{d\,u}x\right)$$

上式を u,v で微分すると、

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\,u}\left(\overrightarrow{A}\cdot\frac{d}{d\,v}\overrightarrow{r}\right)-\frac{d}{d\,v}\left(\overrightarrow{A}\cdot\frac{d}{d\,u}\overrightarrow{r}\right)=&-\left(\frac{d}{d\,u}z\right)\left(\frac{d}{d\,v}A_z\right)+\left(\frac{d}{d\,v}z\right)\left(\frac{d}{d\,u}A_z\right)-\left(\frac{d}{d\,u}y\right)\left(\frac{d}{d\,v}A_y\right)\\&+\left(\frac{d}{d\,v}y\right)\left(\frac{d}{d\,u}A_y\right)-\left(\frac{d}{d\,u}x\right)\left(\frac{d}{d\,v}A_x\right)+\left(\frac{d}{d\,v}x\right)\left(\frac{d}{d\,u}A_x\right)\end{aligned}$$

上式は $I_{11}+I_{21}+I_{31}+I_{12}+I_{22}+I_{32}$ と等しく、

$$\frac{d}{d\,u}\left(\overrightarrow{A}\cdot\frac{d}{d\,v}\overrightarrow{r}\right)-\frac{d}{d\,v}\left(\overrightarrow{A}\cdot\frac{d}{d\,u}\overrightarrow{r}\right)=\frac{d}{d\,u}\overrightarrow{A}\cdot\frac{d}{d\,v}\overrightarrow{r}-\frac{d}{d\,v}\overrightarrow{A}\cdot\frac{d}{d\,u}\overrightarrow{r}$$

(4.4.66) 式に上式を代入すると、

$$\iint_S\left(\nabla\times\overrightarrow{A}\right)\cdot\overrightarrow{n}\,dS=\iint_D\frac{d}{d\,u}\overrightarrow{A}\cdot\frac{d}{d\,v}\overrightarrow{r}-\frac{d}{d\,v}\overrightarrow{A}\cdot\frac{d}{d\,u}\overrightarrow{r}\,du\,dv=\iint_D\frac{d}{d\,u}\left(\overrightarrow{A}\cdot\frac{d}{d\,v}\overrightarrow{r}\right)-\frac{d}{d\,v}\left(\overrightarrow{A}\cdot\frac{d}{d\,u}\overrightarrow{r}\right)du\,dv \tag{4.4.67}$$

(4.4.32) 式の下記の平面におけるグリーンの定理から、

$$\iint_S\left(\frac{d}{d\,x}\mathrm{Q}-\frac{d}{d\,y}\mathrm{P}\right)dydx=\oint_C\mathrm{Q}\,dy+\mathrm{P}\,dx$$

上記を適用し、下記からストークスの定理が証明された。

$$\begin{aligned}\iint_S\left(\nabla\times\overrightarrow{A}\right)\cdot\overrightarrow{n}\,dS&=\iint_D\frac{d}{d\,u}\left(\overrightarrow{A}\cdot\frac{d}{d\,v}\overrightarrow{r}\right)-\frac{d}{d\,v}\left(\overrightarrow{A}\cdot\frac{d}{d\,u}\overrightarrow{r}\right)du\,dv\\&=\oint_C\left(\overrightarrow{A}\cdot\frac{d}{d\,u}\overrightarrow{r}\right)du+\left(\overrightarrow{A}\cdot\frac{d}{d\,v}\overrightarrow{r}\right)dv=\oint_C\overrightarrow{A}\cdot d\overrightarrow{r}\end{aligned} \tag{4.4.68}$$

4.4.11　スカラーポッテンシャル

```
kill(all);
load("vect");
V:matrix([u],[v],[w]);
depends(u,[x,y,z,t]);
depends(v,[x,y,z,t]);
depends(w,[x,y,z,t]);
depends(p,[x,y,z,t]);
depends(\Phi,[x,y,z,t]);
X:matrix([0],[0],[-\rho*g]);
curl(transpose(V)[1])=0;
express(%);
transpose(lhs(%))=0;
grad(\Phi);
express(%);
PH01:ev(%,diff);
PH02:V=transpose(PH01);
curl(PH01);
express(%);
ev(%,diff);
div(transpose(V)[1])=0;
express(%);
EQC01:ev(%,diff);
```

ベクトル場：$\overrightarrow{V}$ とし、

$$\overrightarrow{V}=\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}$$

下記の回転無しとする。

$$curl(\overrightarrow{V})=\nabla\times\overrightarrow{V}=\begin{pmatrix}\frac{d}{d\,y}\,w-\frac{d}{d\,z}\,v\\\frac{d}{d\,z}\,u-\frac{d}{d\,x}\,w\\\frac{d}{d\,x}\,v-\frac{d}{d\,y}\,u\end{pmatrix}=0$$

(4.4.59) 式のストークスの定理から、

$$\int_C\overrightarrow{V}\cdot d\overrightarrow{r}=\iint_S\left(\nabla\times\overrightarrow{V}\right)\cdot\overrightarrow{n}\,dS$$

回転無し：$\nabla\times\overrightarrow{V}=0$ から、上式の右辺が零となり、

$$\int_C\overrightarrow{V}\cdot d\overrightarrow{r}=0 \tag{4.4.69}$$

上式の基準点：O から点：P の線積分をポテンシャル：Φ とすると、

$$\Phi=\int_O^P\overrightarrow{V}\cdot d\overrightarrow{r} \tag{4.4.70}$$

また、二点間：$(O\ \to\ P)$ の積分経路として二つの C_1,C_2 を考える。積分経路：C_1 によるポテンシャル：Φ は次式となり、C_1-C_2 は閉経路となるため、(4.4.69) 式から零となり、下記のように書き換えることができる。

$$\begin{aligned}\Phi=&\int_{C_1}\overrightarrow{V}\cdot d\overrightarrow{r}=\int_{C_1-C_2}\overrightarrow{V}\cdot d\overrightarrow{r}+\int_{C_2}\overrightarrow{V}\cdot d\overrightarrow{r}\\=&0+\int_{C_2}\overrightarrow{V}\cdot d\overrightarrow{r}=\int_{C_2}\overrightarrow{V}\cdot d\overrightarrow{r}\end{aligned}$$

上式から、ポテンシャル：Φ は積分経路に依存しないことが示された。

Φ について、下記の関係がある。

$$d\Phi=\frac{d\Phi}{dx}\,dx+\frac{d\Phi}{dy}\,dy+\frac{d\Phi}{dz}\,dz$$

$$d\overrightarrow{r}=dx\,\overrightarrow{i}+dy\,\overrightarrow{j}+dz\,\overrightarrow{k}$$

$$grad\,\Phi=\frac{d\Phi}{dx}\,\overrightarrow{i}+\frac{d\Phi}{dy}\,\overrightarrow{j}+\frac{d\Phi}{dz}\,\overrightarrow{k}$$

上式から、

$$d\Phi=grad\,\Phi\cdot d\overrightarrow{r} \tag{4.4.71}$$

上式と (4.4.70) 式から、

$$d\Phi=grad\,\Phi\cdot d\overrightarrow{r}=\overrightarrow{V}\cdot d\overrightarrow{r}$$

上式からポテンシャル：Φ とベクトル場：$\overrightarrow{V}$ との関係式は、

$$\overrightarrow{V}=grad\,\Phi=\begin{pmatrix}\frac{d}{d\,x}\,\Phi\\\frac{d}{d\,y}\,\Phi\\\frac{d}{d\,z}\,\Phi\end{pmatrix} \tag{4.4.72}$$

また、ポテンシャル：Φ は積分経路に依存しないことから、点：A の座標：(a,b,c) から点：B の座標：(x,y,z) の積分経路で、経路：$(a,b,c)\to(x,b,c)\to(x,y,c)\to(x,y,z)$ とすると、

$$\begin{aligned}\Phi=&\int_a^x V_x(x^{\text{`}},b,c)dx^{\text{`}}+\int_b^y V_y(x,y^{\text{`}},c)dy^{\text{`}}\\&+\int_c^z V_z(x,y,z^{\text{`}})dz^{\text{`}}\end{aligned}$$

上式を z で微分すると、

$$\frac{d\Phi}{dz}=V_z$$

同様にして、

$$\frac{d\Phi}{dx}=V_x,\quad\frac{d\Phi}{dy}=V_y$$

以上から (4.4.72) 式と同じ結果が得られた。

例 1　重力ポテンシャル・静電ポテンシャル

質量 : M と質量 : m の物体が r だけ離れているとき、物体間に作用する引力は、

$$F = G\,\frac{m\,M}{r^2}$$

また、二つの小さい球が帯電し、球間距離 : r が球の大きさより十分大きいとする。小球の電荷 : Q_1, Q_2 とすると、球間に作用するクーロン力 : F は、

$$F = \frac{1}{\epsilon_0}\,\frac{Q_1\,Q_2}{4\,\pi\,r^2}$$

ここで、$\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} C^2 \cdot N^{-1} \cdot m^{-2}$ これらの力は $\frac{1}{r^2}$ に比例しているので、これについて調べる。

```
kill(all);
load("vect")$
XYZ1:matrix([x],[y],[z]);
ABC1:matrix([A],[B],[C]);
F=G*(m*M)/(r^2);
F=1/(4*%pi*\epsilon[0])*
 Q[1]*Q[2]/r^2;
XA1:XYZ1-ABC1;
XA11:XA1.XA1;
XA2:XA11^(3/2);
XA3:XA1/XA2;
XA4:1/XA11^(1/2);
div(transpose(XA3)[1]);
express(%);
ev(%,diff);
factor(%);
curl(transpose(XA3)[1]);
express(%);
```

```
ev(%,diff);
grad(XA4);
express(%);
ev(%,diff);
transpose(%);
%+XA3;
```

物体の位置 : $\overrightarrow{a}$、評価位置 : $\overrightarrow{r}$ とすると、

$$\overrightarrow{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{r} - \overrightarrow{a}$ は、

$$\overrightarrow{r} - \overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} x-A \\ y-B \\ z-C \end{pmatrix}$$

また、$|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{a}|$ は、

$$|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{a}| = \sqrt{(z-C)^2 + (y-B)^2 + (x-A)^2}$$

F をベクトル表記し、係数 : G、質量または電荷 : q_j とすると、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{F} =&G\,q_j\,\frac{\overrightarrow{r} - \overrightarrow{a}}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{a}|^{\frac{3}{2}}} \\ =&G\,q_j \begin{pmatrix} \frac{x-A}{\left((z-C)^2+(y-B)^2+(x-A)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{y-B}{\left((z-C)^2+(y-B)^2+(x-A)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{z-C}{\left((z-C)^2+(y-B)^2+(x-A)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \end{pmatrix}\end{aligned} \tag{4.4.73}$$

$div\,\overrightarrow{F}$, $curl\,\overrightarrow{F}$ を求めると、

$$\begin{aligned}div\,\overrightarrow{F} = \nabla\,\overrightarrow{F} =&G\,q_j \left(\frac{d}{d\,z}\,\frac{z-C}{\left((z-C)^2+(y-B)^2+(x-A)^2\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{d}{d\,y}\,\frac{y-B}{\left((z-C)^2+(y-B)^2+(x-A)^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right. \\ &\left. + \frac{d}{d\,x}\,\frac{x-A}{\left((z-C)^2+(y-B)^2+(x-A)^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right) \\ =&G\,q_j \left(-\frac{3\,(z-C)^2}{\left((z-C)^2+(y-B)^2+(x-A)^2\right)^{\frac{5}{2}}} + \frac{3}{\left((z-C)^2+(y-B)^2+(x-A)^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right. \\ &\left. - \frac{3\,(y-B)^2}{\left((z-C)^2+(y-B)^2+(x-A)^2\right)^{\frac{5}{2}}} - \frac{3\,(x-A)^2}{\left((z-C)^2+(y-B)^2+(x-A)^2\right)^{\frac{5}{2}}}\right) \\ =&0\end{aligned} \tag{4.4.74}$$

$$curl\,\overrightarrow{F}=\nabla\times\overrightarrow{F}=G\,q_j\begin{pmatrix}\frac{d}{d\,y}\,\frac{z-C}{\left((z-C)^2+(y-B)^2+(x-A)^2\right)^{\frac{3}{2}}}-\frac{d}{d\,z}\,\frac{y-B}{\left((z-C)^2+(y-B)^2+(x-A)^2\right)^{\frac{3}{2}}}\\ \frac{d}{d\,z}\,\frac{x-A}{\left((z-C)^2+(y-B)^2+(x-A)^2\right)^{\frac{3}{2}}}-\frac{d}{d\,x}\,\frac{z-C}{\left((z-C)^2+(y-B)^2+(x-A)^2\right)^{\frac{3}{2}}}\\ \frac{d}{d\,x}\,\frac{y-B}{\left((z-C)^2+(y-B)^2+(x-A)^2\right)^{\frac{3}{2}}}-\frac{d}{d\,y}\,\frac{x-A}{\left((z-C)^2+(y-B)^2+(x-A)^2\right)^{\frac{3}{2}}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\qquad(4.4.75)$$

上式から、重力場・静電場の $\frac{1}{r^2}$ に比例する力は回転無しとなり、(4.4.70) 式から、基準点：O から点：P の線積分のポテンシャル：Φ とすると、

$$\Phi=-\int_O^P\overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r}\qquad(4.4.76)$$

Φ を上式で無限遠を基準点とすると、

$$\Phi=-\int_\infty^P\overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r}=\int_P^\infty\overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r}$$

(4.4.73) 式から、

$$\begin{aligned}\Phi=&\int_P^\infty\overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r}=\int_r^\infty\overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r}\\=&\int_r^\infty G\,q_j\frac{1}{r^2}\cdot dr=G\,q_j\left[-\frac{1}{r}\right]_r^\infty\\=&G\,q_j\,\frac{1}{r}=G\,q_j\,\frac{1}{|\overrightarrow{r}-\overrightarrow{a}|}\end{aligned}$$

この Φ の $grad$ を求めると、(4.4.73) 式から、

$$grad\,\Phi=G\,q_j\begin{pmatrix}-\frac{x-A}{\left((z-C)^2+(y-B)^2+(x-A)^2\right)^{\frac{3}{2}}}\\-\frac{y-B}{\left((z-C)^2+(y-B)^2+(x-A)^2\right)^{\frac{3}{2}}}\\-\frac{z-C}{\left((z-C)^2+(y-B)^2+(x-A)^2\right)^{\frac{3}{2}}}\end{pmatrix}=-\overrightarrow{F}\qquad(4.4.77)$$

上式から、

$$\overrightarrow{F}=-grad\,\Phi\qquad(4.4.78)$$

また、$div\,grad\,\Phi$ を求めると、(4.4.74) 式および上式から、

$$div\,grad\,\Phi=\nabla^2\,\Phi=-div\,\overrightarrow{F}=0\qquad(4.4.79)$$

q_j を静電気の電荷とし、それが $q_1,q_1,q_1,\cdots q_n$ ある時、静電ポテンシャル：Φ は、

$$\Phi=G\sum_{j=1}^{n}\frac{q_j}{|\overrightarrow{r}-\overrightarrow{r_j}|}\qquad(4.4.80)$$

電荷の体積密度：$\rho(\overrightarrow{r^{`}})$ が分布している時の静電ポテンシャル：Φ は、

$$\Phi=G\iiint_V\frac{\rho(\overrightarrow{r^{`}})}{\left|\overrightarrow{r}-\overrightarrow{r^{`}}\right|}dV\qquad(4.4.81)$$

上式を ∇^2 の微分を行うと、ガウスの定理：(4.4.44) 式から下記のポアソンの方程式が得られる。

$$\begin{aligned}\nabla^2\Phi=&G\,\rho(\overrightarrow{r^{`}})div\,grad\iiint_V\frac{1}{\left|\overrightarrow{r}-\overrightarrow{r^{`}}\right|}dV\\=&G\,\rho(\overrightarrow{r^{`}})\iint_S grad\,\frac{1}{\left|\overrightarrow{r}-\overrightarrow{r^{`}}\right|}\overrightarrow{n(r^{`})}dS\\=&-G\,\rho(\overrightarrow{r^{`}})\iint_{r^{`}=R}\frac{1}{r^2}\overrightarrow{n(r^{`})}dS\\=&-4\,\pi\,G\,\rho(r^{`})\end{aligned}\qquad(4.4.82)$$

例 1　流体力学：速度ポテンシャル

```
div(grad(\Phi))=0;
express(%);
EQC02:ev(%,diff);
```

流速 :: $\overrightarrow{V}$ とし、

$$\overrightarrow{V}=\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}$$

下記の渦無し流れとし、

$$curl(\overrightarrow{V})=\nabla\times\overrightarrow{V}=\begin{pmatrix}\frac{d}{d\,y}\,w-\frac{d}{d\,z}\,v\\\frac{d}{d\,z}\,u-\frac{d}{d\,x}\,w\\\frac{d}{d\,x}\,v-\frac{d}{d\,y}\,u\end{pmatrix}=0$$

速度ポテンシャル：Φ と流速：$\overrightarrow{V}$ の関係は、(4.4.72) 式から、

$$\overrightarrow{V}=grad\,\Phi=\begin{pmatrix}\frac{d}{d\,x}\,\Phi\\\frac{d}{d\,y}\,\Phi\\\frac{d}{d\,z}\,\Phi\end{pmatrix}\tag{4.4.83}$$

流体の質量保存の方程式は、

$$div(\overrightarrow{V})=\frac{d}{d\,z}\,w+\frac{d}{d\,y}\,v+\frac{d}{d\,x}\,u=0$$

上式に (4.4.83) 式を代入すると、

$$div\,(grad\,(\Phi))=\frac{d^2}{d\,z^2}\,\Phi+\frac{d^2}{d\,y^2}\,\Phi+\frac{d^2}{d\,x^2}\,\Phi=0\tag{4.4.84}$$

速度ポテンシャル : Φ の質量保存の方程式は上記となり、速度ポテンシャル : Φ は上記のラプラスの方程式を満足する必要がある。

4.5 ベクトルの座標変換

4.5.1 速度・加速度ベクトルの円柱座標系への変換

xyz 座標系の速度･加速度ベクトルを円柱座標 $r-\theta-z$ 系に変換表記する。二次元極座標への変換については、円柱座標系で z 軸の項を省けばよい。xyz 座標系の速度：v_x, v_y, v_z、加速度：a_x, a_y, a_z を円柱座標変換し、速度：v_r, v_θ, v_z、加速度：a_r, a_θ, a_z を求める。下図に xyz 座標系と円柱座標系の関係を示す。

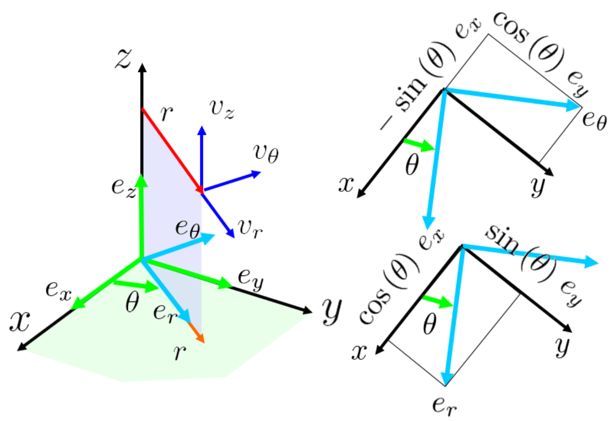


図 4.5.1: xyz 座標系と円柱座標系の関係

```
kill(all);
load("vect")$
depends(r,[t]);
depends(\theta,[t]);
depends(x,[t]);
depends(y,[t]);
depends(z,[t]);
XR:x=r*cos(\theta);
YR:y=r*sin(\theta);
ZR:z=z;
ER1:e[r]=e[x]*cos(\theta)+e[y]*sin(\theta);
ET1:e[\theta]=-e[x]*sin(\theta)+e[y]
 *cos(\theta);
EZ1:e[z]=e[z];
TR:matrix([cos(\theta),sin(\theta),0],
 [-sin(\theta),cos(\theta),0],[0,0,1]);
ERTZ1:matrix([e[r]],[e[\theta]],[e[z]]);
EXYZ1:matrix([e[x]],[e[y]],[e[z]]);
ERTZ1=TR.EXYZ1;
```

xyz 座標系と円柱座標系の関係式は、

$$x = r\cos(\theta), \quad y = r\sin(\theta), \quad z = z \tag{4.5.1}$$

xyz 座標系の単位ベクトル：$, e_x, e_y, e_z$ と円柱座標系の単位ベクトル：$, e_r, e_\theta, e_z$ の関係は上図から、

$$e_r = \sin(\theta)\ e_y + \cos(\theta)\ e_x$$

$$e_\theta = \cos(\theta)\ e_y - \sin(\theta)\ e_x$$

$$e_z = e_z$$

上式をベクトル表記すると、

$$\begin{pmatrix} e_r \\ e_\theta \\ e_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\theta)\ e_y + \cos(\theta)\ e_x \\ \cos(\theta)\ e_y - \sin(\theta)\ e_x \\ e_z \end{pmatrix}$$

以上から座標変換行列：L は、

$$L = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.5.2}$$

```
VXR1:diff(XR,t,1);
VYR1:diff(YR,t,1);
VZR1:diff(ZR,t,1);
LVXY1:['diff(x,t,1)=v[x],'diff(y,t,1)
 =v[y],'diff(z,t,1)=v[z]];
VXR2:subst(LVXY1,VXR1);
VYR2:subst(LVXY1,VYR1);
VZR2:subst(LVXY1,lhs(VZR1))=rhs(VZR1);
VXY1:matrix([v[x]],[v[y]],[v[z]]);
VRT1:matrix([v[r]],[v[\theta]],[v[z]]);
VRT1=TR.VXY1;
lhs(%)=subst([VXR2,VYR2,VZR2],rhs(%));
VRT2:trigsimp(%);
```

速度は下記で表せる。

$$[\frac{d}{d\,t}\,x = v_x, \frac{d}{d\,t}\,y = v_y, \frac{d}{d\,t}\,z = v_z]$$

(4.5.1) 式を時間：t で微分し、上記の関係から、

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{d}{d\,t}\,x = \left(\frac{d}{d\,t}\,r\right)\,\cos(\theta) - r\sin(\theta)\,\left(\frac{d}{d\,t}\,\theta\right) \\ v_y &= \frac{d}{d\,t}\,y = r\cos(\theta)\,\left(\frac{d}{d\,t}\,\theta\right) + \left(\frac{d}{d\,t}\,r\right)\,\sin(\theta) \\ v_z &= \frac{d}{d\,t}\,z = \frac{d}{d\,t}\,z \end{aligned} \tag{4.5.3}$$

円柱座標系の速度：v_r, v_θ, v_z は座標変換行列：L を使って、

$$\begin{pmatrix} v_r \\ v_\theta \\ v_z \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\theta)\ v_y + \cos(\theta)\ v_x \\ \cos(\theta)\ v_y - \sin(\theta)\ v_x \\ v_z \end{pmatrix}$$

上式に (4.5.3) 式を代入し、整理すると、下記の円柱座標系の速度：v_r, v_θ, v_z が得られる。

$$\begin{pmatrix} v_r \\ v_\theta \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{d\,t}\,r \\ r\,\left(\frac{d}{d\,t}\,\theta\right) \\ \frac{d}{d\,t}\,z \end{pmatrix} \tag{4.5.4}$$

```
AXR1:diff(XR,t,2);
AYR1:diff(YR,t,2);
AZR1:diff(ZR,t,2);
LAXY1:['diff(x,t,2)=a[x],'diff(y,t,2)=
 a[y],'diff(z,t,2)=a[z]];
AXR2:subst(LAXY1,AXR1);
AYR2:subst(LAXY1,AYR1);
AZR2:subst(LAXY1,lhs(AZR1))=rhs(AZR1);
AXY1:matrix([a[x]],[a[y]],[a[z]]);
ART1:matrix([a[r]],[a[\theta]],[a[z]]);
ART1=TR.AXY1;
lhs(%)=subst([AXR2,AYR2,AZR2],rhs(%));
ART2:trigsimp(%);
```

加速度は下記で表せる。

$$[\frac{d^2}{d\,t^2}\,x = a_x, \frac{d^2}{d\,t^2}\,y = a_y, \frac{d^2}{d\,t^2}\,z = a_z]$$

(4.5.1) 式を時間：t で二階微分し、上記の関係から、

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{d^2}{d\,t^2}\,x = -\,r\sin(\theta)\,\left(\frac{d^2}{d\,t^2}\,\theta\right) - r\cos(\theta)\,\left(\frac{d}{d\,t}\,\theta\right)^2 - 2\,\left(\frac{d}{d\,t}\,r\right)\,\sin(\theta)\,\left(\frac{d}{d\,t}\,\theta\right) + \left(\frac{d^2}{d\,t^2}\,r\right)\,\cos(\theta) \\ a_y &= \frac{d^2}{d\,t^2}\,y = r\cos(\theta)\,\left(\frac{d^2}{d\,t^2}\,\theta\right) - r\sin(\theta)\,\left(\frac{d}{d\,t}\,\theta\right)^2 + 2\,\left(\frac{d}{d\,t}\,r\right)\,\cos(\theta)\,\left(\frac{d}{d\,t}\,\theta\right) + \left(\frac{d^2}{d\,t^2}\,r\right)\,\sin(\theta) \\ a_z &= \frac{d^2}{d\,t^2}\,z = \frac{d^2}{d\,t^2}\,z \end{aligned} \tag{4.5.5}$$

円柱座標系の加速度：a_r, a_θ, a_z は座標変換行列：L を使って、

$$\begin{pmatrix} a_r \\ a_\theta \\ a_z \end{pmatrix} = L\,\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\theta)\,a_y + \cos(\theta)\,a_x \\ \cos(\theta)\,a_y - \sin(\theta)\,a_x \\ a_z \end{pmatrix}$$

上式に (4.5.5) 式を代入し、整理すると、下記の円柱座標系の加速度：a_r, a_θ, a_z が得られる。

$$\begin{pmatrix} a_r \\ a_\theta \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d^2}{d\,t^2}\,r - r\,\left(\frac{d}{d\,t}\,\theta\right)^2 \\ r\,\left(\frac{d^2}{d\,t^2}\,\theta\right) + 2\,\left(\frac{d}{d\,t}\,r\right)\,\left(\frac{d}{d\,t}\,\theta\right) \\ \frac{d^2}{d\,t^2}\,z \end{pmatrix} \tag{4.5.6}$$

4.5.2　微分ベクトルの円柱座標系への変換

xyz 座標系の微分ベクトルを円柱座標 $r-\theta-z$ 系に変換表記する。

```
kill(all);
load("vect")$
depends([r,\theta],[x,y]);
XR:x=r*cos(\theta);
YR:y=r*sin(\theta);
LXR1:diff(XR,x,1);
LYR1:diff(YR,x,1);
solve([LXR1,LYR1],['diff(r,x,1),
 'diff(\theta,x,1)]);
LXYR1:trigrat(%)[1];
LXR2:diff(XR,y,1);
LYR2:diff(YR,y,1);
solve([LXR2,LYR2],['diff(r,y,1),
 'diff(\theta,y,1)]);
LXYR2:trigrat(%)[1];
LXR3:diff(XR,x,2);
LYR3:diff(YR,x,2);
solve([LXR3,LYR3],['diff(r,x,2),
 'diff(\theta,x,2)]);
LXYR3:trigrat(%)[1];
LXR4:diff(XR,y,2);
LYR4:diff(YR,y,2);
solve([LXR4,LYR4],['diff(r,y,2),
 'diff(\theta,y,2)]);
LXYR4:trigrat(%)[1];
TR:matrix([cos(\theta),sin(\theta),0],
 [-sin(\theta),cos(\theta),0],[0,0,1]);
TR1:transpose(TR);
VXYZ:matrix([u],[v],[w]);
VRTZ:matrix([a],[b],[c]);
depends([u,v,w],[x,y,z]);
depends([a,b,c],[r,\theta,z]);
```

xyz 座標系と円柱座標系の関係式は、

$$x=r\cos(\theta),\quad y=r\sin(\theta),\quad z=z \tag{4.5.7}$$

(4.5.7) 式を x および y で微分し、下記の関係を得る。

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}\,r=\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)^2+\cos(\theta)^2},\frac{d}{dx}\,\theta=-\frac{\sin(\theta)}{r\sin(\theta)^2+r\cos(\theta)^2}\\
&\frac{d}{dx}\,r=\cos(\theta),\frac{d}{dx}\,\theta=-\frac{\sin(\theta)}{r}\\
&\frac{d}{dy}\,r=\frac{\sin(\theta)}{\sin(\theta)^2+\cos(\theta)^2},\frac{d}{dy}\,\theta=\frac{\cos(\theta)}{r\sin(\theta)^2+r\cos(\theta)^2}\\
&\frac{d}{dy}\,r=\sin(\theta),\frac{d}{dy}\,\theta=\frac{\cos(\theta)}{r}]
\end{aligned} \tag{4.5.8}$$

(4.5.7) 式を x および y で二階微分し、下記の関係を得る。

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2}{dx^2}\,r=r\left(\frac{d}{dx}\,\theta\right)^2,\frac{d^2}{dx^2}\,\theta=-\frac{2\left(\frac{d}{dx}\,r\right)\left(\frac{d}{dx}\,\theta\right)}{r}\\
&\frac{d^2}{dx^2}\,r=r\left(\frac{d}{dx}\,\theta\right)^2,\frac{d^2}{dx^2}\,\theta=-\frac{2\left(\frac{d}{dx}\,r\right)\left(\frac{d}{dx}\,\theta\right)}{r}\\
&\frac{d^2}{dy^2}\,r=r\left(\frac{d}{dy}\,\theta\right)^2,\frac{d^2}{dy^2}\,\theta=-\frac{2\left(\frac{d}{dy}\,r\right)\left(\frac{d}{dy}\,\theta\right)}{r}\\
&\frac{d^2}{dy^2}\,r=r\left(\frac{d}{dy}\,\theta\right)^2,\frac{d^2}{dy^2}\,\theta=-\frac{2\left(\frac{d}{dy}\,r\right)\left(\frac{d}{dy}\,\theta\right)}{r}]
\end{aligned} \tag{4.5.9}$$

xyz 座標から円柱座標 $r-\theta-z$ 系に変換する座標変換行列：L は、(4.5.2) 式から、

$$L=\begin{pmatrix}\cos(\theta) & \sin(\theta) & 0\\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \tag{4.5.10}$$

ここで、速度：$\overrightarrow{V}$ を xyz 座標系の速度：v_x,v_y,v_z、円柱座標型の速度：v_r,v_θ,v_z とする。Maxima の処理の都合上、それぞれ、xyz 座標系の速度：u,v,w、円柱座標型の速度：a,b,c とする。

$$\overrightarrow{V}=\begin{pmatrix}v_x\\ v_y\\ v_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u\\ v\\ w\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{V}=\begin{pmatrix}v_r\\ v_\theta\\ v_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}$$

勾配 (grad)

```
/* grad */
depends(A,[r,\theta,z]);
grad(A);
express(%);
transpose(%);
ev(%,diff);
subst([LXYR1],%);
subst([LXYR2],%);
TR.%;
trigsimp(%);
```

勾配 (grad) は (4.3.7) 式から、

$$\mathrm{grad}\,(A) = \begin{pmatrix} \frac{d}{d\,x}\,A \\ \frac{d}{d\,y}\,A \\ \frac{d}{d\,z}\,A \end{pmatrix}$$

上式で A が r, θ, z の関数であるとし、微分して、(4.5.8) 式を代入し、座標変換行列：L を掛けて、整理すると、

$$\begin{aligned}\mathrm{grad}\,(A) =& L \cdot \begin{pmatrix} \left(\frac{d}{d\,x}\,\theta\right)\,\left(\frac{d}{d\,\theta}\,A\right) + \left(\frac{d}{d\,x}\,r\right)\,\left(\frac{d}{d\,r}\,A\right) \\ \left(\frac{d}{d\,y}\,\theta\right)\,\left(\frac{d}{d\,\theta}\,A\right) + \left(\frac{d}{d\,y}\,r\right)\,\left(\frac{d}{d\,r}\,A\right) \\ \frac{d}{d\,z}\,A \end{pmatrix} \\ =& \begin{pmatrix} \frac{d}{d\,r}\,A \\ \frac{\frac{d}{d\,\theta}\,A}{r} \\ \frac{d}{d\,z}\,A \end{pmatrix}\end{aligned} \tag{4.5.11}$$

発散 (div)

```
/* divergence */
div(transpose(VXYZ)[1]);
express(%);
DIVXYZ:ev(%,diff);
VXYZ1:VXYZ=TR1.VRTZ;
UA:lhs(VXYZ1)[1][1]=rhs(VXYZ1)[1][1];
VA:lhs(VXYZ1)[2][1]=rhs(VXYZ1)[2][1];
WA:lhs(VXYZ1)[3][1]=rhs(VXYZ1)[3][1];
subst([UA,VA,WA],DIVXYZ);
ev(%,diff);
subst([LXYR1],%);
subst([LXYR2],%);
trigsimp(%);
expand(%);
subst([c=v[z],a=v[r],b=v[\theta]],%);
```

発散 (div) は (4.3.8) 式から、

$$\mathrm{div}\left(\overrightarrow{V}\right) = \frac{d}{d\,z}\,w + \frac{d}{d\,y}\,v + \frac{d}{d\,x}\,u \tag{4.5.12}$$

xyz 座標系の速度：u, v, w と円柱座標型の速度：a, b, c の関係は、

$$\overrightarrow{V} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = L^T\,\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos(\theta) - b\sin(\theta) \\ a\sin(\theta) + b\cos(\theta) \\ c \end{pmatrix} \tag{4.5.13}$$

(4.5.12) 式に上式を代入し、円柱座標型の速度：a, b, c は r, θ, z の関数であるから、これらで微分し、(4.5.8) 式を代入して整理すると、

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\left(\overrightarrow{V}\right) =& \frac{d}{d\,x}\,\left(a\cos(\theta) - b\sin(\theta)\right) + \frac{d}{d\,y}\,\left(a\sin(\theta) + b\cos(\theta)\right) + \frac{d}{d\,z}\,c \\ =& \cos(\theta)\,\left(\left(\frac{d}{d\,\theta}\,b\right)\,\left(\frac{d}{d\,y}\,\theta\right) + \left(\frac{d}{d\,r}\,b\right)\,\left(\frac{d}{d\,y}\,r\right)\right) + \sin(\theta)\,\left(\left(\frac{d}{d\,\theta}\,a\right)\,\left(\frac{d}{d\,y}\,\theta\right) + \left(\frac{d}{d\,r}\,a\right)\,\left(\frac{d}{d\,y}\,r\right)\right) \\ &- b\sin(\theta)\,\left(\frac{d}{d\,y}\,\theta\right) + a\cos(\theta)\,\left(\frac{d}{d\,y}\,\theta\right) - \sin(\theta)\,\left(\left(\frac{d}{d\,\theta}\,b\right)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\theta\right) + \left(\frac{d}{d\,r}\,b\right)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,r\right)\right) \\ &+ \cos(\theta)\,\left(\left(\frac{d}{d\,\theta}\,a\right)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\theta\right) + \left(\frac{d}{d\,r}\,a\right)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,r\right)\right) - a\sin(\theta)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\theta\right) - b\cos(\theta)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\theta\right) + \frac{d}{d\,z}\,c \\ =& \frac{\frac{d}{d\,\theta}\,b}{r} + \frac{a}{r} + \frac{d}{d\,z}\,c + \frac{d}{d\,r}\,a \\ =& \frac{d}{d\,z}\,v_z + \frac{\frac{d}{d\,\theta}\,v_\theta}{r} + \frac{d}{d\,r}\,v_r + \frac{v_r}{r}\end{aligned} \tag{4.5.14}$$

∇^2

```
/* nabla^2 */
NABA:'diff(A,x,2)+'diff(A,y,2)+'diff(A,z,2);
ev(%,diff);
subst([LXYR4],%);
subst([LXYR3],%);
subst([LXYR2],%);
subst([LXYR1],%);
trigsimp(%);
expand(%);
```

∇^2 は (4.3.30) 式から、

$$\nabla^2 A = \frac{d^2}{d\,z^2}\,A + \frac{d^2}{d\,y^2}\,A + \frac{d^2}{d\,x^2}\,A$$

上式で A が r,θ,z の関数であるとし、微分して、(4.5.8) 式、(4.5.9) 式を代入し、整理すると、

$$\begin{aligned}
\nabla^2 A =& \frac{d^2}{d\,z^2}\,A + \left(\frac{d}{d\,y}\,\theta\right)\left(\left(\frac{d}{d\,y}\,\theta\right)\left(\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,A\right)\right. \\
&\left. + \left(\frac{d}{d\,y}\,r\right)\left(\frac{d^2}{d\,r\,d\,\theta}\,A\right)\right) \\
&+ \left(\frac{d}{d\,x}\,\theta\right)\left(\left(\frac{d}{d\,x}\,\theta\right)\left(\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,A\right)\right. \\
&\left. + \left(\frac{d}{d\,x}\,r\right)\left(\frac{d^2}{d\,r\,d\,\theta}\,A\right)\right) \\
&+ \left(\frac{d^2}{d\,y^2}\,\theta\right)\left(\frac{d}{d\,\theta}\,A\right) + \left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,\theta\right)\left(\frac{d}{d\,\theta}\,A\right) \\
&+ \left(\frac{d}{d\,y}\,r\right)\left(\left(\frac{d}{d\,y}\,r\right)\left(\frac{d^2}{d\,r^2}\,A\right)\right. \\
&\left. + \left(\frac{d}{d\,y}\,\theta\right)\left(\frac{d^2}{d\,r\,d\,\theta}\,A\right)\right) \\
&+ \left(\frac{d}{d\,x}\,r\right)\left(\left(\frac{d}{d\,x}\,r\right)\left(\frac{d^2}{d\,r^2}\,A\right)\right. \\
&\left. + \left(\frac{d}{d\,x}\,\theta\right)\left(\frac{d^2}{d\,r\,d\,\theta}\,A\right)\right) \\
&+ \left(\frac{d^2}{d\,y^2}\,r\right)\left(\frac{d}{d\,r}\,A\right) + \left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,r\right)\left(\frac{d}{d\,r}\,A\right) \\
=& \frac{d^2}{d\,z^2}\,A + \frac{\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,A}{r^2} + \frac{d^2}{d\,r^2}\,A + \frac{\frac{d}{d\,r}\,A}{r}
\end{aligned} \tag{4.5.15}$$

回転 (rot,curl)

```
/* rotation */
curl(transpose(VXYZ)[1]);
express(%);
VXYZCURL:transpose(ev(%,diff));
subst([UA,VA,WA],VXYZCURL);
ev(%,diff);
subst([LXYR1],%);
subst([LXYR2],%);
trigrat(expand(TR.%));
subst([c=v[z],a=v[r],b=v[\theta]],%);
```

回転 (rot,curl) は (4.3.9) 式から、

$$\mathrm{curl}\left(\overrightarrow{V}\right) = \begin{pmatrix} \frac{d}{d\,y}\,w - \frac{d}{d\,z}\,v \\ \frac{d}{d\,z}\,u - \frac{d}{d\,x}\,w \\ \frac{d}{d\,x}\,v - \frac{d}{d\,y}\,u \end{pmatrix}$$

上式に (4.5.13) 式を代入し、座標変換行列 : L を掛け、

$$\begin{aligned}
&\mathrm{curl}\left(\overrightarrow{V}\right) \\
&= L\begin{pmatrix} \frac{d}{d\,y}\,c - \frac{d}{d\,z}\,(a\sin(\theta) + b\cos(\theta)) \\ \frac{d}{d\,z}\,(a\cos(\theta) - b\sin(\theta)) - \frac{d}{d\,x}\,c \\ \frac{d}{d\,x}\,(a\sin(\theta) + b\cos(\theta)) - \frac{d}{d\,y}\,(a\cos(\theta) - b\sin(\theta)) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

a,b,c が r,θ,z の関数であるとし、微分して、(4.5.8) 式を代入し、整理すると、

$$\begin{aligned}
\mathrm{curl}\left(\overrightarrow{V}\right) &= \begin{pmatrix} -\frac{\left(\frac{d}{d\,z}\,b\right)r - \frac{d}{d\,\theta}\,c}{r} \\ \frac{d}{d\,z}\,a - \frac{d}{d\,r}\,c \\ \frac{\left(\frac{d}{d\,r}\,b\right)r + b - \frac{d}{d\,\theta}\,a}{r} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{r\left(\frac{d}{d\,z}\,v_\theta\right) - \frac{d}{d\,\theta}\,v_z}{r} \\ \frac{d}{d\,z}\,v_r - \frac{d}{d\,r}\,v_z \\ \frac{r\left(\frac{d}{d\,r}\,v_\theta\right) + v_\theta - \frac{d}{d\,\theta}\,v_r}{r} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{4.5.16}$$

4.5.3 速度・加速度ベクトルの極座標系への変換

xyz 座標系を極座標系 $r-\theta-\phi$ 座標に変換する。xyz 座標系の速度：v_x, v_y, v_z、加速度：a_x, a_y, a_z を極座標変換し、速度：v_r, v_θ, v_ϕ、加速度：a_r, a_θ, a_ϕ を求める。下図に xyz 座標系と極座標系の関係を示す。

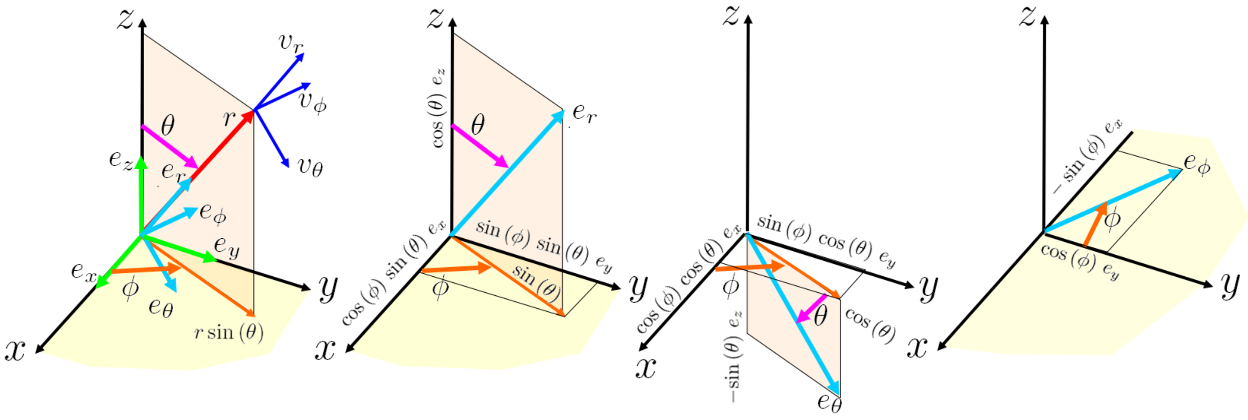


図 4.5.2: xyz 座標系と極座標系の関係

```
kill(all);
load("vect")$
depends(r,[t]);
depends(\theta,[t]);
depends(\phi,[t]);
depends(x,[t]);
depends(y,[t]);
depends(z,[t]);
XR:x=r*sin(\theta)*cos(\phi);
YR:y=r*sin(\theta)*sin(\phi);
ZR:z=r*cos(\theta);
ER1:e[r]=e[x]*sin(\theta)*cos(\phi)+e[y]*sin(\theta)*sin(\phi)+e[z]*cos(\theta);
ET1:e[\theta]=e[x]*cos(\theta)*cos(\phi)+e[y]*cos(\theta)*sin(\phi)-e[z]*sin(\theta);
EZ1:e[\phi]=-e[x]*sin(\phi)+e[y]*cos(\phi);
TR:matrix([sin(\theta)*cos(\phi),sin(\theta)*sin(\phi),cos(\theta)],
 [cos(\theta)*cos(\phi),cos(\theta)*sin(\phi),-sin(\theta)],[-sin(\phi),cos(\phi),0]);
ERTZ1:matrix([e[r]],[e[\theta]],[e[\phi]]);
EXYZ1:matrix([e[x]],[e[y]],[e[z]]);
ERTZ1=TR.EXYZ1;
```

xyz 座標系と極座標系の関係式は、

$$x = \cos(\phi)\, r \sin(\theta), \quad y = \sin(\phi)\, r \sin(\theta), \quad z = r\cos(\theta) \tag{4.5.17}$$

xyz 座標系の単位ベクトル：$, e_x, e_y, e_z$ と極座標系の単位ベクトル：$, e_r, e_\theta, e_\phi$ の関係は上図から、

$$e_r = \cos(\theta)\ e_z + \sin(\phi)\ \sin(\theta)\ e_y + \cos(\phi)\ \sin(\theta)\ e_x$$

$$e_\theta = -\sin(\theta)\ e_z + \sin(\phi)\ \cos(\theta)\ e_y + \cos(\phi)\ \cos(\theta)\ e_x$$

$$e_\phi = \cos(\phi)\ e_y - \sin(\phi)\ e_x$$

上式をベクトル表記すると、

$$\begin{pmatrix} e_r \\ e_\theta \\ e_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta)\ e_z + \sin(\phi)\ \sin(\theta)\ e_y + \cos(\phi)\ \sin(\theta)\ e_x \\ -\sin(\theta)\ e_z + \sin(\phi)\ \cos(\theta)\ e_y + \cos(\phi)\ \cos(\theta)\ e_x \\ \cos(\phi)\ e_y - \sin(\phi)\ e_x \end{pmatrix}$$

以上から座標変換行列：L は、

$$L = \begin{pmatrix} \cos(\phi)\ \sin(\theta) & \sin(\phi)\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \\ \cos(\phi)\ \cos(\theta) & \sin(\phi)\ \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \end{pmatrix} \tag{4.5.18}$$

```
VXR1:diff(XR,t,1);
VYR1:diff(YR,t,1);
VZR1:diff(ZR,t,1);
LVXY1:['diff(x,t,1)=v[x],'diff(y,t,1)=v[y],'diff(z,t,1)=v[z]];
VXR2:subst(LVXY1,VXR1);
VYR2:subst(LVXY1,VYR1);
VZR2:subst(LVXY1,lhs(VZR1))=rhs(VZR1);
VXY1:matrix([v[x]],[v[y]],[v[z]]);
VRT1:matrix([v[r]],[v[\theta]],[v[\phi]]);
VRT1=TR.VXY1;
lhs(%)=subst([VXR2,VYR2,VZR2],rhs(%));
VRT2:trigsimp(%);
```

速度は下記で表せる。

$$[\frac{d}{d\,t}\,x = v_x, \frac{d}{d\,t}\,y = v_y, \frac{d}{d\,t}\,z = v_z]$$

(4.5.17) 式を時間：t で微分し、上記の関係から、

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{d}{d\,t}\,x = \cos(\phi)\ r\cos(\theta)\ \left(\frac{d}{d\,t}\,\theta\right) + \cos(\phi)\ \left(\frac{d}{d\,t}\,r\right)\ \sin(\theta) - \sin(\phi)\ \left(\frac{d}{d\,t}\,\phi\right)\ r\sin(\theta) \\ v_y &= \frac{d}{d\,t}\,y = \sin(\phi)\ r\cos(\theta)\ \left(\frac{d}{d\,t}\,\theta\right) + \sin(\phi)\ \left(\frac{d}{d\,t}\,r\right)\ \sin(\theta) + \cos(\phi)\ \left(\frac{d}{d\,t}\,\phi\right)\ r\sin(\theta) \\ v_z &= \frac{d}{d\,t}\,z = \left(\frac{d}{d\,t}\,r\right)\ \cos(\theta) - r\sin(\theta)\ \left(\frac{d}{d\,t}\,\theta\right) \end{aligned} \tag{4.5.19}$$

極座標系の速度：v_r, v_θ, v_ϕ は座標変換行列：L を使って、

$$\begin{pmatrix} v_r \\ v_\theta \\ v_\phi \end{pmatrix} = L\ \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta)\ v_z + \sin(\phi)\ \sin(\theta)\ v_y + \cos(\phi)\ \sin(\theta)\ v_x \\ -\sin(\theta)\ v_z + \sin(\phi)\ \cos(\theta)\ v_y + \cos(\phi)\ \cos(\theta)\ v_x \\ \cos(\phi)\ v_y - \sin(\phi)\ v_x \end{pmatrix}$$

上式に (4.5.19) 式を代入し、整理すると、下記の極座標系の速度：v_r, v_θ, v_ϕ が得られる。

$$\begin{pmatrix} v_r \\ v_\theta \\ v_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{d\,t}\,r \\ r\ \left(\frac{d}{d\,t}\,\theta\right) \\ \left(\frac{d}{d\,t}\,\phi\right)\ r\sin(\theta) \end{pmatrix} \tag{4.5.20}$$

```
AXR1:diff(XR,t,2);
AYR1:diff(YR,t,2);
AZR1:diff(ZR,t,2);
LAXY1:['diff(x,t,2)=a[x],'diff(y,t,2)=a[y],'diff(z,t,2)=a[z]];
AXR2:subst(LAXY1,AXR1);
AYR2:subst(LAXY1,AYR1);
AZR2:subst(LAXY1,lhs(AZR1))=rhs(AZR1);
AXY1:matrix([a[x]],[a[y]],[a[z]]);
ART1:matrix([a[r]],[a[\theta]],[a[\phi]]);
ART1=TR.AXY1;
lhs(%)=subst([AXR2,AYR2,AZR2],rhs(%));
trigsimp(%);
ART2:expand(%);
```

加速度は下記で表せる。

$$[\frac{d^2}{d\,t^2}\,x=a_x,\frac{d^2}{d\,t^2}\,y=a_y,\frac{d^2}{d\,t^2}\,z=a_z]$$

(4.5.17) 式を時間：t で二階微分し、上記の関係から、

$$\begin{aligned}
a_x=\frac{d^2}{d\,t^2}\,x=&\cos(\phi)\,r\cos(\theta)\,\left(\frac{d^2}{d\,t^2}\,\theta\right)-\cos(\phi)\,r\sin(\theta)\,\left(\frac{d}{d\,t}\,\theta\right)^2+2\cos(\phi)\,\left(\frac{d}{d\,t}\,r\right)\,\cos(\theta)\,\left(\frac{d}{d\,t}\,\theta\right)\\
&-2\sin(\phi)\,\left(\frac{d}{d\,t}\,\phi\right)\,r\cos(\theta)\,\left(\frac{d}{d\,t}\,\theta\right)+\cos(\phi)\,\left(\frac{d^2}{d\,t^2}\,r\right)\,\sin(\theta)\\
&-2\sin(\phi)\,\left(\frac{d}{d\,t}\,\phi\right)\,\left(\frac{d}{d\,t}\,r\right)\,\sin(\theta)-\sin(\phi)\,\left(\frac{d^2}{d\,t^2}\,\phi\right)\,r\sin(\theta)-\cos(\phi)\,\left(\frac{d}{d\,t}\,\phi\right)^2\,r\sin(\theta)\\
a_y=\frac{d^2}{d\,t^2}\,y=&\sin(\phi)\,r\cos(\theta)\,\left(\frac{d^2}{d\,t^2}\,\theta\right)-\sin(\phi)\,r\sin(\theta)\,\left(\frac{d}{d\,t}\,\theta\right)^2+2\sin(\phi)\,\left(\frac{d}{d\,t}\,r\right)\,\cos(\theta)\,\left(\frac{d}{d\,t}\,\theta\right)\\
&+2\cos(\phi)\,\left(\frac{d}{d\,t}\,\phi\right)\,r\cos(\theta)\,\left(\frac{d}{d\,t}\,\theta\right)+\sin(\phi)\,\left(\frac{d^2}{d\,t^2}\,r\right)\,\sin(\theta)\\
&+2\cos(\phi)\,\left(\frac{d}{d\,t}\,\phi\right)\,\left(\frac{d}{d\,t}\,r\right)\,\sin(\theta)+\cos(\phi)\,\left(\frac{d^2}{d\,t^2}\,\phi\right)\,r\sin(\theta)-\sin(\phi)\,\left(\frac{d}{d\,t}\,\phi\right)^2\,r\sin(\theta)\\
a_z=\frac{d^2}{d\,t^2}\,z=&-r\sin(\theta)\,\left(\frac{d^2}{d\,t^2}\,\theta\right)-r\cos(\theta)\,\left(\frac{d}{d\,t}\,\theta\right)^2-2\,\left(\frac{d}{d\,t}\,r\right)\,\sin(\theta)\,\left(\frac{d}{d\,t}\,\theta\right)+\left(\frac{d^2}{d\,t^2}\,r\right)\,\cos(\theta)
\end{aligned}\tag{4.5.21}$$

極座標系の加速度：a_r,a_θ,a_ϕ は座標変換行列：L を使って、

$$\begin{pmatrix}a_r\\a_\theta\\a_\phi\end{pmatrix}=L\begin{pmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(\theta)\,a_z+\sin(\phi)\,\sin(\theta)\,a_y+\cos(\phi)\,\sin(\theta)\,a_x\\-\sin(\theta)\,a_z+\sin(\phi)\,\cos(\theta)\,a_y+\cos(\phi)\,\cos(\theta)\,a_x\\\cos(\phi)\,a_y-\sin(\phi)\,a_x\end{pmatrix}$$

上式に (4.5.21) 式を代入し、整理すると、下記の極座標系の加速度：a_r,a_θ,a_ϕ が得られる。

$$\begin{pmatrix}a_r\\a_\theta\\a_\phi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-r\left(\frac{d}{d\,t}\,\theta\right)^2-\left(\frac{d}{d\,t}\,\phi\right)^2r\sin(\theta)^2+\frac{d^2}{d\,t^2}\,r\\r\,\left(\frac{d^2}{d\,t^2}\,\theta\right)+2\,\left(\frac{d}{d\,t}\,r\right)\,\left(\frac{d}{d\,t}\,\theta\right)-\left(\frac{d}{d\,t}\,\phi\right)^2r\cos(\theta)\,\sin(\theta)\\2\,\left(\frac{d}{d\,t}\,\phi\right)\,r\cos(\theta)\,\left(\frac{d}{d\,t}\,\theta\right)+2\,\left(\frac{d}{d\,t}\,\phi\right)\,\left(\frac{d}{d\,t}\,r\right)\,\sin(\theta)+\left(\frac{d^2}{d\,t^2}\,\phi\right)\,r\sin(\theta)\end{pmatrix}\tag{4.5.22}$$

4.5.4 微分ベクトルの極座標系への変換

xyz 座標系の微分ベクトルを極座標 $r-\theta-\phi$ 系に変換表記する。

```
kill(all);
load("vect")$
depends([r,\phi,\theta],[x,y,z]);
XR:x=r*sin(\theta)*cos(\phi);
YR:y=r*sin(\theta)*sin(\phi);
ZR:z=r*cos(\theta);
LXR1:diff(XR,x,1);
LYR1:diff(YR,x,1);
LZR1:diff(ZR,x,1);
solve([LXR1,LYR1,LZR1],['diff(r,x,1),
 'diff(\theta,x,1),'diff(\phi,x,1)]);
LXYZR1:trigsimp(%)[1];
LXR2:diff(XR,y,1);
LYR2:diff(YR,y,1);
LZR2:diff(ZR,y,1);
solve([LXR2,LYR2,LZR2],['diff(r,y,1),
 'diff(\theta,y,1),'diff(\phi,y,1)]);
LXYZR2:trigsimp(%)[1];
LXR3:diff(XR,z,1);
LYR3:diff(YR,z,1);
LZR3:diff(ZR,z,1);
solve([LXR3,LYR3,LZR3],['diff(r,z,1),
 'diff(\theta,z,1),'diff(\phi,z,1)]);
LXYZR3:trigsimp(%)[1];
LXR4:diff(XR,x,2);
```

```
LYR4:diff(YR,x,2);
LZR4:diff(ZR,x,2);
solve([LXR4,LYR4,LZR4],['diff(r,x,2),
 'diff(\theta,x,2),'diff(\phi,x,2)]);
LXYZR4:trigsimp(%)[1];
LXR5:diff(XR,y,2);
LYR5:diff(YR,y,2);
LZR5:diff(ZR,y,2);
solve([LXR5,LYR5,LZR5],['diff(r,y,2),
 'diff(\theta,y,2),'diff(\phi,y,2)]);
LXYZR5:trigsimp(%)[1];
LXR6:diff(XR,z,2);
LYR6:diff(YR,z,2);
LZR6:diff(ZR,z,2);
solve([LXR6,LYR6,LZR6],['diff(r,z,2),
 'diff(\theta,z,2),'diff(\phi,z,2)]);
LXYZR6:trigsimp(%)[1];
TR:matrix([sin(\theta)*cos(\phi),
 sin(\theta)*sin(\phi),cos(\theta)],
 [cos(\theta)*cos(\phi),
 cos(\theta)*sin(\phi),-sin(\theta)],
 [-sin(\phi),cos(\phi),0]);
TR1:transpose(TR);
VXYZ:matrix([u],[v],[w]);
VRTP:matrix([a],[b],[c]);
depends([u,v,w],[x,y,z]);
depends([a,b,c],[r,\theta,\phi]);
```

xyz 座標系と極座標系の関係式は、

$$x=\cos(\phi)\,r\sin(\theta),\quad y=\sin(\phi)\,r\sin(\theta),\quad z=r\cos(\theta) \tag{4.5.23}$$

(4.5.23) 式を x,y,z で微分し、下記の関係を得る。

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{d\,x}\,r=\cos(\phi)\,\sin(\theta)\,,\ \frac{d}{d\,x}\,\theta=\frac{\cos(\phi)\,\cos(\theta)}{r},\ \frac{d}{d\,x}\,\phi=-\frac{\sin(\phi)}{r\sin(\theta)}\\
&\frac{d}{d\,y}\,r=\sin(\phi)\,\sin(\theta)\,,\ \frac{d}{d\,y}\,\theta=\frac{\sin(\phi)\,\cos(\theta)}{r},\ \frac{d}{d\,y}\,\phi=\frac{\cos(\phi)}{r\sin(\theta)}\\
&\frac{d}{d\,z}\,r=\cos(\theta)\,,\ \frac{d}{d\,z}\,\theta=-\frac{\sin(\theta)}{r},\ \frac{d}{d\,z}\,\phi=0
\end{aligned} \tag{4.5.24}$$

(4.5.23) 式を x, y, z で二階微分し、下記の関係を得る。

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2}{d\,x^2}\,r = r\left(\frac{d}{d\,x}\,\theta\right)^2 + \left(\frac{d}{d\,x}\,\phi\right)^2 r\sin(\theta)^2, \frac{d^2}{d\,x^2}\,\theta = -\frac{2\,\left(\frac{d}{d\,x}\,r\right)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\theta\right) - \left(\frac{d}{d\,x}\,\phi\right)^2 r\cos(\theta)\,\sin(\theta)}{r},\\
&\qquad \frac{d^2}{d\,x^2}\,\phi = -\frac{2\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\phi\right)\,r\cos(\theta)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\theta\right) + 2\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\phi\right)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,r\right)\,\sin(\theta)}{r\sin(\theta)}\\
&\frac{d^2}{d\,y^2}\,r = r\left(\frac{d}{d\,y}\,\theta\right)^2 + \left(\frac{d}{d\,y}\,\phi\right)^2 r\sin(\theta)^2, \frac{d^2}{d\,y^2}\,\theta = -\frac{2\,\left(\frac{d}{d\,y}\,r\right)\,\left(\frac{d}{d\,y}\,\theta\right) - \left(\frac{d}{d\,y}\,\phi\right)^2 r\cos(\theta)\,\sin(\theta)}{r},\\
&\qquad \frac{d^2}{d\,y^2}\,\phi = -\frac{2\,\left(\frac{d}{d\,y}\,\phi\right)\,r\cos(\theta)\,\left(\frac{d}{d\,y}\,\theta\right) + 2\,\left(\frac{d}{d\,y}\,\phi\right)\,\left(\frac{d}{d\,y}\,r\right)\,\sin(\theta)}{r\sin(\theta)}\\
&\frac{d^2}{d\,z^2}\,r = r\left(\frac{d}{d\,z}\,\theta\right)^2 + \left(\frac{d}{d\,z}\,\phi\right)^2 r\sin(\theta)^2, \frac{d^2}{d\,z^2}\,\theta = -\frac{2\,\left(\frac{d}{d\,z}\,r\right)\,\left(\frac{d}{d\,z}\,\theta\right) - \left(\frac{d}{d\,z}\,\phi\right)^2 r\cos(\theta)\,\sin(\theta)}{r},\\
&\qquad \frac{d^2}{d\,z^2}\,\phi = -\frac{2\,\left(\frac{d}{d\,z}\,\phi\right)\,r\cos(\theta)\,\left(\frac{d}{d\,z}\,\theta\right) + 2\,\left(\frac{d}{d\,z}\,\phi\right)\,\left(\frac{d}{d\,z}\,r\right)\,\sin(\theta)}{r\sin(\theta)}
\end{aligned} \tag{4.5.25}$$

xyz 座標から極座標 $r-\theta-\phi$ 系に変換する座標変換行列：L は、(4.5.18) 式から、

$$L = \begin{pmatrix} \cos(\phi)\,\sin(\theta) & \sin(\phi)\,\sin(\theta) & \cos(\theta) \\ \cos(\phi)\,\cos(\theta) & \sin(\phi)\,\cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \end{pmatrix} \tag{4.5.26}$$

ここで、速度：$\overrightarrow{V}$ を xyz 座標系の速度：v_x, v_y, v_z、極座標型の速度：v_r, v_θ, v_ϕ とする。Maxima の処理の都合上、それぞれ、xyz 座標系の速度：u, v, w、極座標型の速度：a, b, c とする。

$$\overrightarrow{V} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{V} = \begin{pmatrix} v_r \\ v_\theta \\ v_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

勾配 (grad)

```
depends(A,[r,\theta,\phi]);
grad(A);
express(%);
transpose(%);
ev(%,diff);
subst([LXYZR1],%);
subst([LXYZR2],%);
subst([LXYZR3],%);
TR.%;
trigsimp(%);
```

勾配 (grad) は (4.3.7) 式から、

$$\mathrm{grad}\,(A) = \begin{pmatrix} \frac{d}{d\,x}\,A \\ \frac{d}{d\,y}\,A \\ \frac{d}{d\,z}\,A \end{pmatrix}$$

上式で A が r,θ,ϕ の関数であるとし、微分して、(4.5.24) 式を代入し、座標変換行列：L を掛けて、整理すると、

$$\begin{aligned}\mathrm{grad}\,(A) =& L\cdot\begin{pmatrix} \left(\frac{d}{d\,x}\,\theta\right)\,\left(\frac{d}{d\,\theta}\,A\right)+\left(\frac{d}{d\,x}\,r\right)\,\left(\frac{d}{d\,r}\,A\right)+\left(\frac{d}{d\,x}\,\phi\right)\,\left(\frac{d}{d\,\phi}\,A\right) \\ \left(\frac{d}{d\,y}\,\theta\right)\,\left(\frac{d}{d\,\theta}\,A\right)+\left(\frac{d}{d\,y}\,r\right)\,\left(\frac{d}{d\,r}\,A\right)+\left(\frac{d}{d\,y}\,\phi\right)\,\left(\frac{d}{d\,\phi}\,A\right) \\ \left(\frac{d}{d\,z}\,\theta\right)\,\left(\frac{d}{d\,\theta}\,A\right)+\left(\frac{d}{d\,z}\,r\right)\,\left(\frac{d}{d\,r}\,A\right)+\left(\frac{d}{d\,z}\,\phi\right)\,\left(\frac{d}{d\,\phi}\,A\right) \end{pmatrix} \\ =& \begin{pmatrix} \frac{d}{d\,r}\,A \\ \frac{\frac{d}{d\,\theta}\,A}{r} \\ \frac{\frac{d}{d\,\phi}\,A}{r\,\sin(\theta)} \end{pmatrix}\end{aligned} \tag{4.5.27}$$

発散 (div)

```
/* divergence */
div(transpose(VXYZ)[1]);
express(%);
DIVXYZ:ev(%,diff);
VXYZ1:VXYZ=TR1.VRTP;
UA:lhs(VXYZ1)[1][1]=rhs(VXYZ1)[1][1];
VA:lhs(VXYZ1)[2][1]=rhs(VXYZ1)[2][1];
WA:lhs(VXYZ1)[3][1]=rhs(VXYZ1)[3][1];
subst([UA,VA,WA],DIVXYZ);
ev(%,diff);
subst([LXYZR1],%);
subst([LXYZR2],%);
subst([LXYZR3],%);
trigsimp(%);
expand(%);
subst([a=v[r],b=v[\theta],c=v[\phi]],%);
```

発散 (div) は (4.3.8) 式から、

$$\mathrm{div}\left(\overrightarrow{V}\right) = \frac{d}{d\,z}\,w + \frac{d}{d\,y}\,v + \frac{d}{d\,x}\,u \tag{4.5.28}$$

xyz 座標系の速度：u, v, w と極座標型の速度：a, b, c の関係は、

$$\overrightarrow{V} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = L^T \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos(\phi)\,\sin(\theta) + b\cos(\phi)\,\cos(\theta) - c\sin(\phi) \\ a\sin(\phi)\,\sin(\theta) + b\sin(\phi)\,\cos(\theta) + c\cos(\phi) \\ a\cos(\theta) - b\sin(\theta) \end{pmatrix} \tag{4.5.29}$$

(4.5.28) 式に上式を代入し、極座標型の速度：a, b, c は r, θ, ϕ の関数であるから、これらで微分し、(4.5.24) 式を代入して整理すると、

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}\left(\overrightarrow{V}\right) =& \frac{d}{d\,y}\,\left(a\sin(\phi)\,\sin(\theta) + b\sin(\phi)\,\cos(\theta) + c\cos(\phi)\right) \\
&+ \frac{d}{d\,x}\,\left(a\cos(\phi)\,\sin(\theta) + b\cos(\phi)\,\cos(\theta) - c\sin(\phi)\right) \\
&+ \frac{d}{d\,z}\,\left(a\cos(\theta) - b\sin(\theta)\right) \\
=& \frac{b\cos(\theta)}{r\sin(\theta)} + \frac{\frac{d}{d\,\phi}\,c}{r\sin(\theta)} + \frac{\frac{d}{d\,\theta}\,b}{r} + \frac{2\,a}{r} + \frac{d}{d\,r}\,a \\
=& \frac{\frac{d}{d\,\theta}\,v_\theta}{r} + \frac{v_\theta\cos(\theta)}{r\sin(\theta)} + \frac{\frac{d}{d\,\phi}\,v_\phi}{r\sin(\theta)} + \frac{d}{d\,r}\,v_r + \frac{2\,v_r}{r}
\end{aligned} \tag{4.5.30}$$

∇^2

```
/* nabla^2 */
NABA:'diff(A,x,2)+'diff(A,y,2)+'diff(A,z,2);
ev(%,diff);
subst([LXYZR6],%);
subst([LXYZR5],%);
subst([LXYZR4],%);
subst([LXYZR3],%);
subst([LXYZR2],%);
subst([LXYZR1],%);
trigsimp(%);
expand(%);
```

∇^2 は (4.3.30) 式から、

$$\nabla^2 A = \frac{d^2}{d\,z^2}\,A + \frac{d^2}{d\,y^2}\,A + \frac{d^2}{d\,x^2}\,A$$

上式で A が r,θ,ϕ の関数であるとし、微分して、(4.5.24) 式、(4.5.25) 式を代入し、整理すると、

$$\begin{aligned}\nabla^2 A =& \frac{\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,A}{r^2} + \frac{\cos(\theta)\,\left(\frac{d}{d\,\theta}\,A\right)}{r^2\sin(\theta)} + \frac{d^2}{d\,r^2}\,A \\ &+ \frac{2\,\left(\frac{d}{d\,r}\,A\right)}{r} + \frac{\frac{d^2}{d\,\phi^2}\,A}{r^2\sin(\theta)^2}\end{aligned} \tag{4.5.31}$$

上式に (4.5.29) 式を代入し、座標変換行列：L を掛け、

回転 (rot,curl)

```
/* rotation */
curl(transpose(VXYZ)[1]);
express(%);
VXYZCURL:transpose(ev(%,diff));
subst([UA,VA,WA],VXYZCURL);
ev(%,diff);
subst([LXYZR1],%);
subst([LXYZR2],%);
subst([LXYZR3],%);
trigrat(expand(TR.%));
subst([a=v[r],b=v[\theta],c=v[\phi]],%);
```

回転 (rot,curl) は (4.3.9) 式から、

$$\mathrm{curl}\left(\overrightarrow{V}\right) = \begin{pmatrix}\frac{d}{d\,y}\,w - \frac{d}{d\,z}\,v \\ \frac{d}{d\,z}\,u - \frac{d}{d\,x}\,w \\ \frac{d}{d\,x}\,v - \frac{d}{d\,y}\,u\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}&\mathrm{curl}\left(\overrightarrow{V}\right) \\ &= L\begin{pmatrix}\frac{d}{d\,y}\,\left(a\cos(\theta) - b\sin(\theta)\right) - \frac{d}{d\,z}\,\left(a\sin(\phi)\,\sin(\theta) + b\sin(\phi)\,\cos(\theta) + c\cos(\phi)\right) \\ \frac{d}{d\,z}\,\left(a\cos(\phi)\,\sin(\theta) + b\cos(\phi)\,\cos(\theta) - c\sin(\phi)\right) - \frac{d}{d\,x}\,\left(a\cos(\theta) - b\sin(\theta)\right) \\ \frac{d}{d\,x}\,\left(a\sin(\phi)\,\sin(\theta) + b\sin(\phi)\,\cos(\theta) + c\cos(\phi)\right) - \frac{d}{d\,y}\,\left(a\cos(\phi)\,\sin(\theta) + b\cos(\phi)\,\cos(\theta) - c\sin(\phi)\right)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

a,b,c が r,θ,ϕ の関数であるとし、微分して、(4.5.24) 式を代入し、整理すると、

$$\begin{aligned}\mathrm{curl}\left(\overrightarrow{V}\right) &= \begin{pmatrix}\frac{\left(\frac{d}{d\,\theta}\,c\right)\sin(\theta) + c\cos(\theta) - \frac{d}{d\,\phi}\,b}{r\sin(\theta)} \\ -\frac{\left(\left(\frac{d}{d\,r}\,c\right)r + c\right)\sin(\theta) - \frac{d}{d\,\phi}\,a}{r\sin(\theta)} \\ \frac{\left(\frac{d}{d\,r}\,b\right)r + b - \frac{d}{d\,\theta}\,a}{r}\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}\frac{-\frac{d}{d\,\phi}\,v_\theta + \left(\frac{d}{d\,\theta}\,v_\phi\right)\sin(\theta) + v_\phi\cos(\theta)}{r\sin(\theta)} \\ -\frac{\left(\left(\frac{d}{d\,r}\,v_\phi\right)r + v_\phi\right)\sin(\theta) - \frac{d}{d\,\phi}\,v_r}{r\sin(\theta)} \\ \frac{r\left(\frac{d}{d\,r}\,v_\theta\right) + v_\theta - \frac{d}{d\,\theta}\,v_r}{r}\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{4.5.32}$$

4.5.5 直交曲線座標系への座標変換

直交座標系：x,y,z の点は、$x=$ 一定, $y=$ 一定, $z=$ 一定 のお互いに垂直な面の交点で与えられる。直交座標系：x,y,z の単位ベクトルを各々 $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ とする。

いま、直交座標系：u_1,u_2,u_3 とする。これを x,y,z 座標系で表すと、[1]

$$\begin{aligned} x =& f_1(u_1,u_2,u_3),\ y=f_2(u_1,u_2,u_3),\\ z =& f_3(u_1,u_2,u_3) \end{aligned}$$

直交座標系：u_1,u_2,u_3 の点は、$u_1=$ 一定, $u_2=$ 一定, $u_3=$ 一定 のお互いに垂直な面の交点で与えられる。u_1,u_2,u_3 の単位ベクトルを各々 $\vec{i_1}$, $\vec{i_2}$, $\vec{i_3}$ とする。u_1,u_2,u_3 と $u_1+du_1,u_2+du_2,u_3+du_3$ に対応する面で、端部：$h_1\,du_1,h_2\,du_2,h_3\,du_3$ の直方体の図を描くと下図となる。

ここで h_1,h_2,h_3 は下記の関係式で得られる。

$$ds^2=dz^2+dy^2+dx^2 \tag{4.5.33}$$

ここで、

$$\begin{aligned} dx =& du_3\left(\frac{d}{d\,u_3}\,x\right)+du_2\left(\frac{d}{d\,u_2}\,x\right)+du_1\left(\frac{d}{d\,u_1}\,x\right)\\ dy =& du_3\left(\frac{d}{d\,u_3}\,y\right)+du_2\left(\frac{d}{d\,u_2}\,y\right)+du_1\left(\frac{d}{d\,u_1}\,y\right)\\ dz =& du_3\left(\frac{d}{d\,u_3}\,z\right)+du_2\left(\frac{d}{d\,u_2}\,z\right)+du_1\left(\frac{d}{d\,u_1}\,z\right) \end{aligned} \tag{4.5.34}$$

(4.5.33) 式に (4.5.34) 式を代入すると、

$$\begin{aligned} ds^2 =& \left(du_3\left(\frac{d}{d\,u_3}\,z\right)+du_2\left(\frac{d}{d\,u_2}\,z\right)+du_1\left(\frac{d}{d\,u_1}\,z\right)\right)^2\\ &+\left(du_3\left(\frac{d}{d\,u_3}\,y\right)+du_2\left(\frac{d}{d\,u_2}\,y\right)+du_1\left(\frac{d}{d\,u_1}\,y\right)\right)^2\\ &+\left(du_3\left(\frac{d}{d\,u_3}\,x\right)+du_2\left(\frac{d}{d\,u_2}\,x\right)+du_1\left(\frac{d}{d\,u_1}\,x\right)\right)^2 \end{aligned} \tag{4.5.35}$$

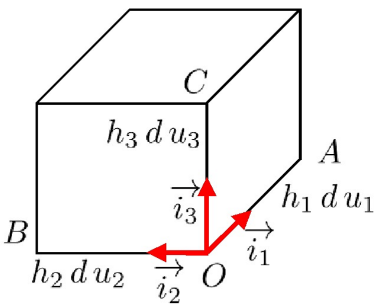


図 4.5.3: 直交曲線座標

```
kill(all);
depends([x,y,z,\Phi],[u[1],u[2],u[3]]);
DS1:(ds)^2=(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2;
DS2:(ds)^2=h[1]^2*(du[1])^2+h[2]^2
 *(du[2])^2+h[3]^2*(du[3])^2;
DX1:dx=diff(x,u[1])*du[1]+diff(x,u[2])
 *du[2]+diff(x,u[3])*du[3];
DY1:dy=diff(y,u[1])*du[1]+diff(y,u[2])
 *du[2]+diff(y,u[3])*du[3];
DZ1:dz=diff(z,u[1])*du[1]+diff(z,u[2])
 *du[2]+diff(z,u[3])*du[3];
DS2:subst([DX1,DY1,DZ1],DS1);
subst([du[2]=0,du[3]=0],DS2);
factor(%);
%/(du[1])^2;
H12:h[1]^2=rhs(%);
subst([du[3]=0,du[1]=0],DS2);
factor(%);
%/(du[2])^2;
H22:h[2]^2=rhs(%);
subst([du[1]=0,du[2]=0],DS2);
factor(%);
%/(du[3])^2;
H32:h[3]^2=rhs(%);
```

上式で直交座標系の性質から、$du_1\,du_2$ の高次項を無視する。また、du_1 について、du_1 の方向に対して、du_2、du_3 の方向は直角であるため、上式で $du_2=0,\ du_3=0$ と置くことができ、下記の関係式を得る。

$$ds^2=du_1^2\left(\left(\frac{d}{d\,u_1}\,z\right)^2+\left(\frac{d}{d\,u_1}\,y\right)^2+\left(\frac{d}{d\,u_1}\,x\right)^2\right)$$

上式から、h_1 は下記となる。

$$h_1^2=\left(\frac{d}{d\,u_1}\,z\right)^2+\left(\frac{d}{d\,u_1}\,y\right)^2+\left(\frac{d}{d\,u_1}\,x\right)^2$$

上記から、

$$\begin{aligned} ds^2 =& dz^2+dy^2+dx^2\\ =& du_3^2\,h_3^2+du_2^2\,h_2^2+du_1^2\,h_1^2 \end{aligned} \tag{4.5.36}$$

ここで、

$$\begin{aligned} h_1^2 =& \left(\frac{d}{d\,u_1}\,z\right)^2+\left(\frac{d}{d\,u_1}\,y\right)^2+\left(\frac{d}{d\,u_1}\,x\right)^2\\ h_2^2 =& \left(\frac{d}{d\,u_2}\,z\right)^2+\left(\frac{d}{d\,u_2}\,y\right)^2+\left(\frac{d}{d\,u_2}\,x\right)^2\\ h_3^2 =& \left(\frac{d}{d\,u_3}\,z\right)^2+\left(\frac{d}{d\,u_3}\,y\right)^2+\left(\frac{d}{d\,u_3}\,x\right)^2 \end{aligned} \tag{4.5.37}$$

直交座標系：x,y,z では ∇ は (4.3.26) 式から、

$$\nabla=\frac{d}{d\,x}\,\vec{i}+\frac{d}{d\,y}\,\vec{j}+\frac{d}{d\,z}\,\vec{k} \tag{4.5.38}$$

[1] L. M. Milne-Thomson : Theretical Hydrodynamics, Fourth Edition, Macmillan & Co. Ltd., 1962 2・72 Orthogonal Curvilinear coordinates P.60

∇ を直交座標系：u_1, u_2, u_3 で表すと、

$$\begin{aligned}\nabla F =&\frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial u_1}F\vec{i_1}+\frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial u_2}F\vec{i_2}+\frac{1}{h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}F\vec{i_3}\\ =&F_1\,\vec{i_1}+F_2\,\vec{i_2}+F_3\,\vec{i_3}\end{aligned}$$

$$\text{ここで、}\quad F_1=\frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial u_1}F,\quad F_2=\frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial u_2}F,\quad F_3=\frac{1}{h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}F \tag{4.5.39}$$

また、

$$\nabla=\frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial u_1}\vec{i_1}+\frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial u_2}\vec{i_2}+\frac{1}{h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}\vec{i_3} \tag{4.5.40}$$

$\nabla\vec{F}$ について、(4.5.39) 式から、

$$\begin{aligned}\nabla\vec{F} =&F_1\,\nabla\vec{i_1}+\vec{i_1}\,\nabla F_1+F_2\,\nabla\vec{i_2}+\vec{i_2}\,\nabla F_2\\ &+F_3\,\nabla\vec{i_3}+\vec{i_3}\,\nabla F_3\end{aligned} \tag{4.5.41}$$

上式の ∇F_1 について、$\vec{i_1}\cdot\vec{i_1}=1,\ \vec{i_1}\cdot\vec{i_2}=0,\ \vec{i_1}\cdot\vec{i_3}=0$ であるから、

$$\vec{i_1}\,\nabla F_1=\frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial u_1}F_1$$

同様に、

$$\begin{aligned}\vec{i_1}\,\nabla F_1 =&\frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial u_1}F_1\\ \vec{i_2}\,\nabla F_2 =&\frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial u_2}F_2\\ \vec{i_3}\,\nabla F_3 =&\frac{1}{h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}F_3\end{aligned} \tag{4.5.42}$$

(4.5.41) 式の $\nabla\vec{i_1}$ について、(4.3.33) 式から、

$$\nabla\vec{i_1}=\nabla\left(\vec{i_2}\times\vec{i_3}\right)=\vec{i_3}\left(\nabla\times\vec{i_2}\right)-\vec{i_2}\left(\nabla\times\vec{i_3}\right)$$

同様にして、

$$\begin{aligned}\nabla\vec{i_1} =&\nabla\left(\vec{i_2}\times\vec{i_3}\right)=\vec{i_3}\left(\nabla\times\vec{i_2}\right)-\vec{i_2}\left(\nabla\times\vec{i_3}\right)\\ \nabla\vec{i_2} =&\nabla\left(\vec{i_3}\times\vec{i_1}\right)=\vec{i_1}\left(\nabla\times\vec{i_3}\right)-\vec{i_3}\left(\nabla\times\vec{i_1}\right)\\ \nabla\vec{i_3} =&\nabla\left(\vec{i_1}\times\vec{i_2}\right)=\vec{i_2}\left(\nabla\times\vec{i_1}\right)-\vec{i_1}\left(\nabla\times\vec{i_2}\right)\end{aligned} \tag{4.5.43}$$

さらに、$\nabla\times\vec{i_1}$ について、(4.3.56) 式から、

$$\frac{1}{h_1}\left(\nabla\times\vec{i_1}\right)=\nabla\times\left(\vec{i_1}\,\frac{1}{h_1}\right)+\vec{i_1}\times\nabla\left(\frac{1}{h_1}\right)$$

(4.5.40) 式から $\vec{i_1}\,\frac{1}{h_1}=\nabla u_1$ で上式の右辺第一項は $\nabla\times(\nabla u_1)=0$ から零となる。よって、上式は、

$$\begin{aligned}\frac{1}{h_1}\left(\nabla\times\vec{i_1}\right) =&\vec{i_1}\times\nabla\left(\frac{1}{h_1}\right)\\ =&-\vec{i_1}\times\left(\frac{1}{h_1^3}\frac{\partial}{\partial u_1}h_1\,\vec{i_1}\right.\\ &\left.+\frac{1}{h_1^2h_2}\frac{\partial}{\partial u_2}h_1\,\vec{i_2}+\frac{1}{h_1^2h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}h_1\,\vec{i_3}\right)\\ =&-\frac{1}{h_1^2h_2}\frac{\partial}{\partial u_2}h_1\,\vec{i_3}+\frac{1}{h_1^2h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}h_1\,\vec{i_2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{h_2}\left(\nabla\times\vec{i_2}\right) =&\vec{i_2}\times\nabla\left(\frac{1}{h_2}\right)\\ =&-\vec{i_2}\times\left(\frac{1}{h_1h_2^2}\frac{\partial}{\partial u_1}h_2\,\vec{i_1}\right.\\ &\left.+\frac{1}{h_2^3}\frac{\partial}{\partial u_2}h_2\,\vec{i_2}+\frac{1}{h_2^2h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}h_2\,\vec{i_3}\right)\\ =&\frac{1}{h_1h_2^2}\frac{\partial}{\partial u_1}h_2\,\vec{i_3}-\frac{1}{h_2^2h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}h_2\,\vec{i_1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{h_3}\left(\nabla\times\vec{i_3}\right) =&\vec{i_3}\times\nabla\left(\frac{1}{h_3}\right)\\ =&-\vec{i_3}\times\left(\frac{1}{h_1h_3^2}\frac{\partial}{\partial u_1}h_3\,\vec{i_1}\right.\\ &\left.+\frac{1}{h_2h_3^2}\frac{\partial}{\partial u_2}h_3\,\vec{i_2}+\frac{1}{h_3^3}\frac{\partial}{\partial u_3}h_3\,\vec{i_3}\right)\\ =&-\frac{1}{h_1h_3^2}\frac{\partial}{\partial u_1}h_3\,\vec{i_2}+\frac{1}{h_2h_3^2}\frac{\partial}{\partial u_2}h_3\,\vec{i_1}\end{aligned}$$

上式から、

$$\begin{aligned}\nabla\times\vec{i_1}=&-\frac{1}{h_1\,h_2}\frac{\partial}{\partial u_2}h_1\,\vec{i_3}+\frac{1}{h_1\,h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}h_1\,\vec{i_2}\\ \nabla\times\vec{i_2}=&+\frac{1}{h_1h_2}\frac{\partial}{\partial u_1}h_2\,\vec{i_3}-\frac{1}{h_2h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}h_2\,\vec{i_1}\\ \nabla\times\vec{i_3}=&-\frac{1}{h_1h_3}\frac{\partial}{\partial u_1}h_3\,\vec{i_2}+\frac{1}{h_2h_3}\frac{\partial}{\partial u_2}h_3\,\vec{i_1}\end{aligned} \tag{4.5.44}$$

(4.5.43) 式に (4.5.44) 式を代入し、

$$\begin{aligned}\nabla\vec{i_1} =&\frac{1}{h_1h_2}\frac{\partial}{\partial u_1}h_2+\frac{1}{h_1h_3}\frac{\partial}{\partial u_1}h_3\\ =&\frac{1}{h_1h_2h_3}\frac{\partial}{\partial u_1}\left(h_2h_3\right)\\ \nabla\vec{i_2} =&\frac{1}{h_2h_3}\frac{\partial}{\partial u_2}h_3+\frac{1}{h_1\,h_2}\frac{\partial}{\partial u_2}h_1\\ =&\frac{1}{h_1\,h_2h_3}\frac{\partial}{\partial u_2}\left(h_1h_3\right)\\ \nabla\vec{i_3} =&\frac{1}{h_1\,h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}h_1+\frac{1}{h_2h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}h_2\\ =&\frac{1}{h_1\,h_2h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}\left(h_1h_2\right)\end{aligned} \tag{4.5.45}$$

(4.5.41) 式に (4.5.42) 式、(4.5.45) 式を代入し、

$$\begin{aligned}\nabla\overrightarrow{F} =&\frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial u_1}F_1+\frac{F_1}{h_1h_2h_3}\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2h_3)\\&+\frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial u_2}F_2+\frac{F_2}{h_1h_2h_3}\frac{\partial}{\partial u_2}(h_1h_3)\\&+\frac{1}{h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}F_3+\frac{F_3}{h_1h_2h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}(h_1h_2)\\=&\frac{1}{h_1h_2h_3}\frac{\partial}{\partial u_1}(F_1h_2h_3)\\&+\frac{1}{h_1h_2h_3}\frac{\partial}{\partial u_2}(F_2h_1h_3)\\&+\frac{1}{h_1h_2h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}(F_3h_1h_2)\end{aligned}\tag{4.5.46}$$

∇^2F について、上式に (4.5.39) 式の下記の関係を代入し、

$$F_1=\frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial u_1}F,\quad F_2=\frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial u_2}F,\quad F_3=\frac{1}{h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}F$$

$$\begin{aligned}\nabla^2F=\nabla(\nabla F)=&\frac{1}{h_1h_2h_3}\left(\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial}{\partial u_1}F\right)\right.\\&+\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_1h_3}{h_2}\frac{\partial}{\partial u_2}F\right)\\&\left.+\frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}F\right)\right)\end{aligned}\tag{4.5.47}$$

$\nabla\times\overrightarrow{F}$ について、(4.5.39) 式から、

$$\nabla\times\overrightarrow{F}=\nabla\times\left(F_1\overrightarrow{i_1}+F_2\overrightarrow{i_2}+F_3\overrightarrow{i_3}\right)$$

(4.3.56) 式から、上式は、

$$\begin{aligned}\nabla\times\overrightarrow{F}=&-\overrightarrow{i_1}\times\nabla F_1+F_1\left(\nabla\times\overrightarrow{i_1}\right)\\&-\overrightarrow{i_2}\times\nabla F_2+F_2\left(\nabla\times\overrightarrow{i_2}\right)\\&-\overrightarrow{i_3}\times\nabla F_3+F_3\left(\nabla\times\overrightarrow{i_3}\right)\end{aligned}$$

上式に (4.5.39) 式、(4.5.44) 式から、

$$\begin{aligned}\nabla\times\overrightarrow{F}=&-\overrightarrow{i_1}\times\left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial u_1}F_1\overrightarrow{i_1}+\frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial u_2}F_1\overrightarrow{i_2}+\frac{1}{h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}F_1\overrightarrow{i_3}\right)-\frac{F_1}{h_1h_2}\frac{\partial}{\partial u_2}h_1\overrightarrow{i_3}+\frac{F_1}{h_1h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}h_1\overrightarrow{i_2}\\&-\overrightarrow{i_2}\times\left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial u_1}F_2\overrightarrow{i_1}+\frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial u_2}F_2\overrightarrow{i_2}+\frac{1}{h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}F_2\overrightarrow{i_3}\right)+\frac{F_2}{h_1h_2}\frac{\partial}{\partial u_1}h_2\overrightarrow{i_3}-\frac{F_2}{h_2h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}h_2\overrightarrow{i_1}\\&-\overrightarrow{i_3}\times\left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial u_1}F_3\overrightarrow{i_1}+\frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial u_2}F_3\overrightarrow{i_2}+\frac{1}{h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}F_3\overrightarrow{i_3}\right)-\frac{F_3}{h_1h_3}\frac{\partial}{\partial u_1}h_3\overrightarrow{i_2}+\frac{F_3}{h_2h_3}\frac{\partial}{\partial u_2}h_3\overrightarrow{i_1}\end{aligned}$$

上式に単位ベクトル：$\overrightarrow{i_1},\overrightarrow{i_2},\overrightarrow{i_3}$ の外積から、

$$\begin{aligned}\nabla\times\overrightarrow{F}=&-\frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial u_2}F_1\overrightarrow{i_3}+\frac{1}{h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}F_1\overrightarrow{i_2}-\frac{F_1}{h_1h_2}\frac{\partial}{\partial u_2}h_1\overrightarrow{i_3}+\frac{F_1}{h_1h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}h_1\overrightarrow{i_2}\\&+\frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial u_1}F_2\overrightarrow{i_3}-\frac{1}{h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}F_2\overrightarrow{i_1}+\frac{F_2}{h_1h_2}\frac{\partial}{\partial u_1}h_2\overrightarrow{i_3}-\frac{F_2}{h_2h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}h_2\overrightarrow{i_1}\\&-\frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial u_1}F_3\overrightarrow{i_2}+\frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial u_2}F_3\overrightarrow{i_1}-\frac{F_3}{h_1h_3}\frac{\partial}{\partial u_1}h_3\overrightarrow{i_2}+\frac{F_3}{h_2h_3}\frac{\partial}{\partial u_2}h_3\overrightarrow{i_1}\\=&-\frac{1}{h_1h_2}\frac{\partial}{\partial u_2}h_1F_1\overrightarrow{i_3}+\frac{1}{h_1h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}h_1F_1\overrightarrow{i_2}+\frac{1}{h_1h_2}\frac{\partial}{\partial u_1}h_2F_2\overrightarrow{i_3}-\frac{1}{h_2h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}h_2F_2\overrightarrow{i_1}\\&-\frac{1}{h_1h_3}\frac{\partial}{\partial u_1}h_3F_3\overrightarrow{i_2}+\frac{1}{h_2h_3}\frac{\partial}{\partial u_2}h_3F_3\overrightarrow{i_1}\end{aligned}$$

上式から、

$$\begin{aligned}\nabla\times\overrightarrow{F}==&+\frac{1}{h_2h_3}\left(\frac{\partial}{\partial u_2}h_3F_3-\frac{\partial}{\partial u_3}h_2F_2\right)\overrightarrow{i_1}+\frac{1}{h_1h_3}\left(\frac{\partial}{\partial u_3}h_1F_1-\frac{\partial}{\partial u_1}h_3F_3\right)\overrightarrow{i_2}\\&+\frac{1}{h_1h_2}\left(\frac{\partial}{\partial u_1}h_2F_2-\frac{\partial}{\partial u_2}h_1F_1\right)\overrightarrow{i_3}\end{aligned}\tag{4.5.48}$$

上記までの式をまとめる。ここでベクトルをマトリックスで表現する。

$$\overrightarrow{F} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} \tag{4.5.49}$$

$$\nabla F = \begin{pmatrix} \frac{\frac{d}{d\,u_1}\,F}{h_1} \\ \frac{\frac{d}{d\,u_2}\,F}{h_2} \\ \frac{\frac{d}{d\,u_3}\,F}{h_3} \end{pmatrix} \tag{4.5.50}$$

$$\begin{aligned}\nabla\overrightarrow{F} =& \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\frac{\partial}{\partial\,u_1}\,(F_1 h_2 h_3) \\ &+ \frac{1}{h_1\,h_2 h_3}\frac{\partial}{\partial\,u_2}\,(F_2 h_1 h_3) \\ &+ \frac{1}{h_1\,h_2 h_3}\frac{\partial}{\partial\,u_3}\,(F_3 h_1 h_2)\end{aligned} \tag{4.5.51}$$

$$\begin{aligned}\nabla^2 F =& \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left(\frac{\partial}{\partial\,u_1}\,\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial}{\partial\,u_1}\,F\right)\right. \\ &+ \frac{\partial}{\partial\,u_2}\,\left(\frac{h_1 h_3}{h_2}\frac{\partial}{\partial\,u_2}\,F\right) \\ &\left.+ \frac{\partial}{\partial\,u_3}\,\left(\frac{h_1 h_2}{h_3}\frac{\partial}{\partial\,u_3}\,F\right)\right)\end{aligned} \tag{4.5.52}$$

$$\nabla \times \overrightarrow{F} = \begin{pmatrix} \frac{1}{h_2 h_3}\left(\frac{\partial}{\partial\,u_2}\,h_3 F_3 - \frac{\partial}{\partial\,u_3}\,h_2 F_2\right) \\ \frac{1}{h_1\,h_3}\left(\frac{\partial}{\partial\,u_3}\,h_1 F_1 - \frac{\partial}{\partial\,u_1}\,h_3 F_3\right) \\ \frac{1}{h_1 h_2}\left(\frac{\partial}{\partial\,u_1}\,h_2 F_2 - \frac{\partial}{\partial\,u_2}\,h_1 F_1\right) \end{pmatrix} \tag{4.5.53}$$

上記の結果をプログラムすると、

```
/* 直角座標系 */
kill(all);
depends([x,y,z,F],[u[1],u[2],u[3]]);
DS1:(ds)^2=(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2;
DS2:(ds)^2=h[1]^2*(du[1])^2+h[2]^2
 *(du[2])^2+h[3]^2*(du[3])^2;
DX1:dx=diff(x,u[1])*du[1]+diff(x,u[2])
 *du[2]+diff(x,u[3])*du[3];
DY1:dy=diff(y,u[1])*du[1]+diff(y,u[2])
 *du[2]+diff(y,u[3])*du[3];
DZ1:dz=diff(z,u[1])*du[1]+diff(z,u[2])
 *du[2]+diff(z,u[3])*du[3];
DS2:subst([DX1,DY1,DZ1],DS1);
subst([du[2]=0,du[3]=0],DS2);
factor(%);
%/(du[1])^2;
H12:h[1]^2=rhs(%);
subst([du[3]=0,du[1]=0],DS2);
factor(%);
%/(du[2])^2;
H22:h[2]^2=rhs(%);
subst([du[1]=0,du[2]=0],DS2);
factor(%);
%/(du[3])^2;
H32:h[3]^2=rhs(%);
DF1:\nabla*F=matrix([ 1/h[1]*'diff(F,u[1]
 ,1) ],[ 1/h[2]*'diff(F,u[2],1) ],[ 1/h[3]
 *'diff(F,u[3],1) ]);
DF2:\nabla*F=1/(h[1]*h[2]*h[3])*('diff(
 (h[2]*h[3]*F[1]),u[1],1)+ 'diff((h[3]*
 h[1]*F[2]),u[2],1)+ 'diff((h[1]*h[2]
 *F[3]),u[3],1));
DF3:\nabla^2*F=1/(h[1]*h[2]*h[3])*(
 'diff(h[2]*h[3]/h[1]*'diff(F,u[1]),u[1])
 +'diff(h[1]*h[3]/h[2]*'diff(F,u[2]),u[2])
 +'diff(h[2]*h[1]/h[3]*'diff(F,u[3]),
 u[3]));
DF4:\nabla*F=matrix([ 1/(h[2]*h[3])*
 ('diff((h[3]*F[3]),u[2],1)-'diff((h[2]
 *F[2]), u[3],1) )],[ 1/(h[3]*h[1])*(
 'diff((h[1]*F[1]),u[3],1)-'diff((h[3]
 *F[3]),u[1],1) )],[1/(h[1]*h[2])*
 ('diff((h[2]*F[2]),u[1],1)-'diff((h[1]
 *F[1]),u[2],1) )]);
```

円柱座標系

```
/* 円柱座標系 */
depends([x,y,z,F],[r,\theta,t]);
X1:x=r*cos(\theta);
Y1:y=r*sin(\theta);
Z1:z=t;
U1:u[1]=r;
U2:u[2]=\theta;
U3:u[3]=t;
subst([U1,U2,U3],H12);
subst([X1,Y1,Z1],%);
ev(%,diff);
trigsimp(%);
H13:h[1]=1;
subst([U1,U2,U3],H22);
subst([X1,Y1,Z1],%);
ev(%,diff);
trigsimp(%);
H23:h[2]=r;
subst([U1,U2,U3],H32);
subst([X1,Y1,Z1],%);
ev(%,diff);
trigsimp(%);
H33:h[3]=1;
subst([H13,H23,H33,U1,U2,U3],DF1);
ev(%,diff);
expand(%);
subst([H13,H23,H33,U1,U2,U3],DF2);
ev(%,diff);
DF21:expand(%);
subst([H13,H23,H33,U1,U2,U3],DF3);
ev(%,diff);
expand(%);
subst([H13,H23,H33,U1,U2,U3],DF4);
ev(%,diff);
expand(%);
```

xyz 座標と円柱座標の関係式は、

$$x = r\cos(\theta), \quad y = r\sin(\theta), \quad z = t \tag{4.5.54}$$

円柱座標の変数は、

$$u_1 = r, \quad u_2 = \theta, \quad u_3 = t \tag{4.5.55}$$

(4.5.37) 式に (4.5.54) 式、(4.5.55) 式を代入し、

$$h_1 = 1, \quad h_2 = r, \quad h_3 = 1 \tag{4.5.56}$$

(4.5.50) 式に (4.5.55) 式、(4.5.56) 式を代入し、

$$\nabla F = \begin{pmatrix} \frac{d}{dr}F \\ \frac{\frac{d}{d\theta}F}{r} \\ \frac{d}{dt}F \end{pmatrix}$$

上式は (4.5.11) 式と一致している。

(4.5.51) 式に (4.5.55) 式、(4.5.56) 式を代入し、

$$\nabla \overrightarrow{F} = \frac{\frac{d}{d\theta}F_2}{r} + \frac{F_1}{r} + \frac{d}{dt}F_3 + \frac{d}{dr}F_1$$

上式は (4.5.14) 式と一致している。

(4.5.52) 式 (4.5.55) 式、(4.5.56) 式を代入し、

$$\nabla^2 F = \frac{\frac{d^2}{d\theta^2}F}{r^2} + \frac{d^2}{dt^2}F + \frac{d^2}{dr^2}F + \frac{\frac{d}{dr}F}{r}$$

上式は (4.5.15) 式と一致している。

(4.5.53) 式に (4.5.55) 式、(4.5.56) 式を代入し、

$$\nabla \times \overrightarrow{F} = \begin{pmatrix} \frac{\frac{d}{d\theta}F_3}{r} - \frac{d}{dt}F_2 \\ \frac{d}{dt}F_1 - \frac{d}{dr}F_3 \\ -\frac{\frac{d}{d\theta}F_1}{r} + \frac{F_2}{r} + \frac{d}{dr}F_2 \end{pmatrix}$$

上式は (4.5.16) 式と一致している。

極座標系

```
/* 極座標系 */
depends([x,y,z,F],[r,\theta,\phi]);
X1:x=r*cos(\phi)*sin(\theta);
Y1:y=r*sin(\phi)*sin(\theta);
Z1:z=r*cos(\theta);
U1:u[1]=r;
U2:u[2]=\theta;
U3:u[3]=\phi;
subst([U1,U2,U3],H12);
subst([X1,Y1,Z1],%);
ev(%,diff);
trigsimp(%);
H13:h[1]=1;
subst([U1,U2,U3],H22);
subst([X1,Y1,Z1],%);
ev(%,diff);
trigsimp(%);
H23:h[2]=r;
subst([U1,U2,U3],H32);
subst([X1,Y1,Z1],%);
ev(%,diff);
trigsimp(%);
H33:h[3]=r*sin(\theta);
subst([H13,H23,H33,U1,U2,U3],DF1);
ev(%,diff);
expand(%);
subst([H13,H23,H33,U1,U2,U3],DF2);
ev(%,diff);
expand(%);
subst([H13,H23,H33,U1,U2,U3],DF3);
ev(%,diff);
expand(%);
subst([H13,H23,H33,U1,U2,U3],DF4);
ev(%,diff);
expand(%);
```

xyz 座標と極座標の関係式は、

$$\begin{aligned} x =& \cos(\phi)\, r\sin(\theta), \quad y = \sin(\phi)\, r\sin(\theta) \\ z =& r\cos(\theta) \end{aligned} \tag{4.5.57}$$

極座標の変数は、

$$u_1 = r, \quad u_2 = \theta, \quad u_3 = \phi \tag{4.5.58}$$

(4.5.37) 式に (4.5.57) 式、(4.5.58) 式を代入し、

$$h_1 = 1, \quad h_2 = r, \quad h_3 = r\sin(\theta) \tag{4.5.59}$$

(4.5.50) 式に (4.5.58) 式、(4.5.59) 式を代入し、

$$\nabla F = \begin{pmatrix} \frac{d}{d\,r} F \\ \frac{\frac{d}{d\,\theta} F}{r} \\ \frac{\frac{d}{d\,\phi} F}{r\sin(\theta)} \end{pmatrix}$$

上式は (4.5.27) 式と一致している。

(4.5.51) 式に (4.5.58) 式、(4.5.59) 式を代入し、

$$\nabla \overrightarrow{F} = \frac{F_2\cos(\theta)}{r\sin(\theta)} + \frac{\frac{d}{d\,\phi} F_3}{r\sin(\theta)} + \frac{\frac{d}{d\,\theta} F_2}{r} + \frac{2\,F_1}{r} + \frac{d}{d\,r} F_1$$

上式は (4.5.30) 式と一致している。

(4.5.52) 式に (4.5.58) 式、(4.5.59) 式を代入し、

$$\begin{aligned} \nabla^2 F =& \frac{\frac{d^2}{d\,\theta^2} F}{r^2} + \frac{\cos(\theta)\,\left(\frac{d}{d\,\theta} F\right)}{r^2\sin(\theta)} + \frac{d^2}{d\,r^2} F + \frac{2\,\left(\frac{d}{d\,r} F\right)}{r} \\ &+ \frac{\frac{d^2}{d\,\phi^2} F}{r^2\sin(\theta)^2} \end{aligned}$$

上式は (4.5.31) 式と一致している。

(4.5.53) 式に (4.5.58) 式、(4.5.59) 式を代入し、

$$\nabla \times \overrightarrow{F} = \begin{pmatrix} \frac{F_3\cos(\theta)}{r\sin(\theta)} - \frac{\frac{d}{d\,\phi} F_2}{r\sin(\theta)} + \frac{\frac{d}{d\,\theta} F_3}{r} \\ \frac{\frac{d}{d\,\phi} F_1}{r\sin(\theta)} - \frac{F_3}{r} - \frac{d}{d\,r} F_3 \\ -\frac{\frac{d}{d\,\theta} F_1}{r} + \frac{F_2}{r} + \frac{d}{d\,r} F_2 \end{pmatrix}$$

上式は (4.5.32) 式と一致している。

4.6 テンソル（斜交座標）

4.6.1 基底ベクトルと双対基底ベクトル (二次元)

直角座標系では座標間の角度は 90 度で、座標軸は例として単位ベクトル：$\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z}$ で、その大きさは 1 である。下図の斜交座標では座標間の角度は一般的に 90 度ではない。また、座標軸の基底ベクトル：$\vec{e_1}, \vec{e_2}$ の大きさは 1 とは限らない。この基底ベクトル：$\vec{e_1}, \vec{e_2}$ に対して、双対基底ベクトルを $\vec{e_2}$ と直角な $\vec{e^1}$、$\vec{e_1}$ と直角な $\vec{e^2}$ の基底ベクトルとし、$\vec{e_1} \cdot \vec{e^1} = 1$、$\vec{e_2} \cdot \vec{e^2} = 1$ となるように双対基底ベクトルの大きさを決める。

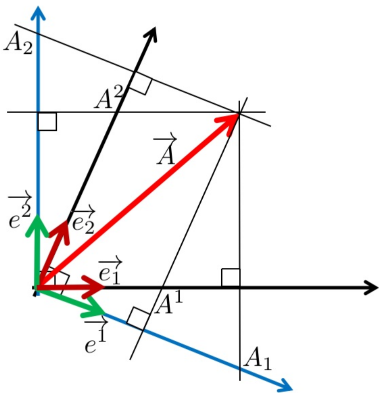


図 4.6.1: 基底ベクトルと双対基底ベクトル (二次元)

```
kill(all);
load("vect")$
ABV10:A=A^"1"*e[1]+A^"2"*e[2];
ADBV10:A=A[1]*e^"1"+A[2]*e^"2";
E10:e[1]=matrix([e["1x"]],[e["1y"]]);
E20:e[2]=matrix([e["2x"]],[e["2y"]]);
EP10:e^"1"=matrix([\epsilon["1x"]],
 [\epsilon["1y"]]);
EP20:e^"2"=matrix([\epsilon["2x"]],
 [\epsilon["2y"]]);
EQ1:rhs(E10).rhs(EP10)=1;
EQ2:rhs(E20).rhs(EP20)=1;
EQ3:rhs(E10).rhs(EP20)=0;
EQ4:rhs(E20).rhs(EP10)=0;
EBV1:matrix([e[1]],[e[2]]);
EDBV1:matrix([e^"1"],[e^"2"]);
EBVXY1:matrix([e[x]],[e[y]]);
E3:matrix([rhs(E10)[1][1],rhs(E10)[2][1]]
 ,[rhs(E20)[1][1],rhs(E20)[2][1]]);
```

```
EP3:matrix([rhs(EP10)[1][1],rhs(EP10)[2]
 [1]],[rhs(EP20)[1][1],rhs(EP20)[2][1]]);
E3.transpose(EP3);
subst([EQ1,EQ2,EQ3,EQ4],%);
EP31:invert(E3);
E3.EP31;
factor(%);
EP4:transpose(EP31);
E3.transpose(EP4);
factor(%);
EP41:e^"1"=matrix([EP4[1][1]],
 [EP4[1][2]]);
EP42:e^"2"=matrix([EP4[2][1]],
 [EP4[2][2]]);
EP40:solve([EQ1,EQ2,EQ3,EQ4],
 [\epsilon["1x"],\epsilon["1y"],
 \epsilon["2x"],\epsilon["2y"]]);
EP12:e^"1"=matrix([rhs(EP41[1][1])],
 [rhs(EP41[1][2])]);
EP22:e^"2"=matrix([rhs(EP41[1][3])],
 [rhs(EP41[1][4])]);
EP11-EP12;
factor(%);
EP21-EP22;
factor(%);
factor(%);
```

ベクトル：$\vec{A}$ を基底ベクトルで表すと、

$$\vec{A} = \vec{e_2}\, A^2 + \vec{e_1}\, A^1 \tag{4.6.1}$$

ベクトル：$\vec{A}$ を双対基底ベクトルで表すと、

$$\vec{A} = A_2\, \vec{e^2} + A_1\, \vec{e^1} \tag{4.6.2}$$

基底ベクトルを xy 座標で表すと、

$$\vec{e_1} = \begin{pmatrix} e_{1x} \\ e_{1y} \end{pmatrix}, \quad \vec{e_2} = \begin{pmatrix} e_{2x} \\ e_{2y} \end{pmatrix} \tag{4.6.3}$$

双対基底ベクトルを xy 座標で表すと、

$$\vec{e^1} = \begin{pmatrix} \epsilon_{1x} \\ \epsilon_{1y} \end{pmatrix}, \quad \vec{e^2} = \begin{pmatrix} \epsilon_{2x} \\ \epsilon_{2y} \end{pmatrix} \tag{4.6.4}$$

基底ベクトルと双対基底ベクトルの関係は上記から、

$$\begin{aligned} \vec{e_1} \cdot \vec{e^1} &= e_{1y}\, \epsilon_{1y} + e_{1x}\, \epsilon_{1x} = 1 \\ \vec{e_2} \cdot \vec{e^2} &= e_{2y}\, \epsilon_{2y} + e_{2x}\, \epsilon_{2x} = 1 \\ \vec{e_1} \cdot \vec{e^2} &= e_{1y}\, \epsilon_{2y} + e_{1x}\, \epsilon_{2x} = 0 \\ \vec{e_2} \cdot \vec{e^1} &= \epsilon_{1y}\, e_{2y} + \epsilon_{1x}\, e_{2x} = 0 \end{aligned} \tag{4.6.5}$$

(4.6.3) 式の基底ベクトルを別の形で表すと、

$$\begin{pmatrix} \vec{e_1} \\ \vec{e_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{1x} & e_{1y} \\ e_{2x} & e_{2y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{e_x} \\ \vec{e_y} \end{pmatrix} \tag{4.6.6}$$

(4.6.4) 式の双対基底ベクトルを別の形で表すと、

$$\begin{pmatrix} \overrightarrow{e^1} \\ \overrightarrow{e^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_{1x} & \epsilon_{1y} \\ \epsilon_{2x} & \epsilon_{2y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \overrightarrow{e_x} \\ \overrightarrow{e_y} \end{pmatrix} \tag{4.6.7}$$

(4.6.6) 式、(4.6.7) 式のマトリックスから下記を求め、(4.6.5) 式を代入すると、単位マトリックスとなる。

$$\begin{pmatrix} e_{1x} & e_{1y} \\ e_{2x} & e_{2y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \epsilon_{1x} & \epsilon_{1y} \\ \epsilon_{2x} & \epsilon_{2y} \end{pmatrix}^T$$
$$= \begin{pmatrix} e_{1y}\,\epsilon_{1y} + e_{1x}\,\epsilon_{1x} & e_{1y}\,\epsilon_{2y} + e_{1x}\,\epsilon_{2x} \\ \epsilon_{1y}\,e_{2y} + \epsilon_{1x}\,e_{2x} & e_{2y}\,\epsilon_{2y} + e_{2x}\,\epsilon_{2x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.6.8}$$

また、(4.6.6) 式の逆行列を求めると、

$$\begin{pmatrix} e_{1x} & e_{1y} \\ e_{2x} & e_{2y} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{e_{2y}}{e_{1x}\,e_{2y}-e_{1y}\,e_{2x}} & -\frac{e_{1y}}{e_{1x}\,e_{2y}-e_{1y}\,e_{2x}} \\ -\frac{e_{2x}}{e_{1x}\,e_{2y}-e_{1y}\,e_{2x}} & \frac{e_{1x}}{e_{1x}\,e_{2y}-e_{1y}\,e_{2x}} \end{pmatrix} \tag{4.6.9}$$

元のマトリックスに逆行列を掛けると単位行列となるから、

$$\begin{pmatrix} e_{1x} & e_{1y} \\ e_{2x} & e_{2y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_{1x} & e_{1y} \\ e_{2x} & e_{2y} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.6.10}$$

(4.6.8) 式と (4.6.10) 式から、双対基底ベクトルのマトリックスは、基底ベクトルのマトリックスの逆行列：(4.6.9) 式の転置行列で得られる。

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{1x} & \epsilon_{1y} \\ \epsilon_{2x} & \epsilon_{2y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{e_{2y}}{e_{1x}\,e_{2y}-e_{1y}\,e_{2x}} & -\frac{e_{2x}}{e_{1x}\,e_{2y}-e_{1y}\,e_{2x}} \\ -\frac{e_{1y}}{e_{1x}\,e_{2y}-e_{1y}\,e_{2x}} & \frac{e_{1x}}{e_{1x}\,e_{2y}-e_{1y}\,e_{2x}} \end{pmatrix} \tag{4.6.11}$$

(4.6.7) 式と上式から、基底ベクトルと双対基底ベクトルの関係式が得られた。

$$\overrightarrow{e^1} = \begin{pmatrix} \frac{e_{2y}}{e_{1x}\,e_{2y}-e_{1y}\,e_{2x}} \\ -\frac{e_{2x}}{e_{1x}\,e_{2y}-e_{1y}\,e_{2x}} \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{e^2} = \begin{pmatrix} -\frac{e_{1y}}{e_{1x}\,e_{2y}-e_{1y}\,e_{2x}} \\ \frac{e_{1x}}{e_{1x}\,e_{2y}-e_{1y}\,e_{2x}} \end{pmatrix} \tag{4.6.12}$$

また、(4.6.5) 式から連立方程式で $\epsilon_{1x}, \epsilon_{1y}, \epsilon_{2x}, \epsilon_{2y}$ を求めると、

$$\epsilon_{1x} = -\frac{e_{2y}}{e_{1y}\,e_{2x} - e_{1x}\,e_{2y}}, \epsilon_{1y} = \frac{e_{2x}}{e_{1y}\,e_{2x} - e_{1x}\,e_{2y}},$$
$$\epsilon_{2x} = \frac{e_{1y}}{e_{1y}\,e_{2x} - e_{1x}\,e_{2y}}, \epsilon_{2y} = -\frac{e_{1x}}{e_{1y}\,e_{2x} - e_{1x}\,e_{2y}} \tag{4.6.13}$$

(4.6.2) 式に上式を代入すると下記が得られ、(4.6.12) 式と同じ結果が得られた。

$$\overrightarrow{e^1} = \begin{pmatrix} -\frac{e_{2y}}{e_{1y}\,e_{2x}-e_{1x}\,e_{2y}} \\ \frac{e_{2x}}{e_{1y}\,e_{2x}-e_{1x}\,e_{2y}} \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{e^2} = \begin{pmatrix} \frac{e_{1y}}{e_{1y}\,e_{2x}-e_{1x}\,e_{2y}} \\ -\frac{e_{1x}}{e_{1y}\,e_{2x}-e_{1x}\,e_{2y}} \end{pmatrix}$$

4.6.2 基底ベクトルと双対基底ベクトル (三次元)

前節の三次元問題について検討する。斜交座標の基底ベクトル：$\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$、双対基底ベクトル：$\overrightarrow{e^1}, \overrightarrow{e^2}, \overrightarrow{e^3}$ とする。

```
kill(all);
load("vect")$
E10:e[1]=matrix([e["1x"]],[e["1y"]],
 [e["1z"]]);
E20:e[2]=matrix([e["2x"]],[e["2y"]],
 [e["2z"]]);
E30:e[3]=matrix([e["3x"]],[e["3y"]],
 [e["3z"]]);
EP10:e^"1"=matrix([\epsilon["1x"]],
 [\epsilon["1y"]],[\epsilon["1z"]]);
EP20:e^"2"=matrix([\epsilon["2x"]],
 [\epsilon["2y"]],[\epsilon["2z"]]);
EP30:e^"3"=matrix([\epsilon["3x"]],
 [\epsilon["3y"]],[\epsilon["3z"]]);
EQ1:rhs(E10).rhs(EP10)=1;
EQ2:rhs(E20).rhs(EP20)=1;
EQ3:rhs(E30).rhs(EP30)=1;
EQ4:rhs(E10).rhs(EP20)=0;
EQ5:rhs(E10).rhs(EP30)=0;
EQ6:rhs(E20).rhs(EP10)=0;
EQ7:rhs(E20).rhs(EP30)=0;
EQ8:rhs(E30).rhs(EP10)=0;
EQ9:rhs(E30).rhs(EP20)=0;
EQ01:lhs(E10)*lhs(EP10)=1;
EQ02:lhs(E20)*lhs(EP20)=1;
EQ03:lhs(E30)*lhs(EP30)=1;
EQ04:lhs(E10)*lhs(EP20)=0;
EQ05:lhs(E10)*lhs(EP30)=0;
EQ06:lhs(E20)*lhs(EP10)=0;
EQ07:lhs(E20)*lhs(EP30)=0;
EQ08:lhs(E30)*lhs(EP10)=0;
EQ09:lhs(E30)*lhs(EP20)=0;
EBV1:matrix([e[1]],[e[2]],[e[3]]);
EDBV1:matrix([e^"1"],[e^"2"],[e^"3"]);
E3:matrix([transpose(rhs(E10))[1][1],
 transpose(rhs(E10))[1][2],transpose(
 rhs(E10))[1][3]],[transpose(rhs(E20))[1]
 [1], transpose(rhs(E20))[1][2],transpose(
 rhs(E20))[1][3]],[transpose(rhs(E30))[1]
 [1], transpose(rhs(E30))[1][2],
 transpose(rhs(E30))[1][3]]);
```

```
EP3:matrix([transpose(rhs(EP10))[1][1],
 transpose(rhs(EP10))[1][2],transpose(
 rhs(EP10))[1][3]],[transpose(rhs(EP20))
 [1] [1],transpose(rhs(EP20))[1][2],
 transpose(rhs(EP20))[1][3]],[transpose(
 rhs(EP30))[1][1],transpose(rhs(EP30))[1]
 [2],transpose(rhs(EP30))[1][3]]);
E3.transpose(EP3);
subst([EQ1,EQ2,EQ3,EQ4,EQ5,EQ6,EQ7,EQ8,
 EQ9],%);
EP31:invert(E3);
E3.EP31;
factor(%);
EP4:transpose(EP31);
E3.transpose(EP4);
factor(%);
EP41:e^"1"=matrix([EP4[1][1]],[EP4[1][2]]
 ,[EP4[1][3]]);
EP42:e^"2"=matrix([EP4[2][1]],[EP4[2][2]]
 ,[EP4[2][3]]);
EP43:e^"3"=matrix([EP4[3][1]],[EP4[3][2]]
 ,[EP4[3][3]]);
```

基底ベクトルを xy 座標で表すと、

$$\overrightarrow{e_1} = \begin{pmatrix} e_{1x} \\ e_{1y} \\ e_{1z} \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{e_2} = \begin{pmatrix} e_{2x} \\ e_{2y} \\ e_{2z} \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{e_3} = \begin{pmatrix} e_{3x} \\ e_{3y} \\ e_{3z} \end{pmatrix} \tag{4.6.14}$$

双対基底ベクトル xy 座標で表すと、

$$\overrightarrow{e^1} = \begin{pmatrix} \epsilon_{1x} \\ \epsilon_{1y} \\ \epsilon_{1z} \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{e^2} = \begin{pmatrix} \epsilon_{2x} \\ \epsilon_{2y} \\ \epsilon_{2z} \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{e^3} = \begin{pmatrix} \epsilon_{3x} \\ \epsilon_{3y} \\ \epsilon_{3z} \end{pmatrix} \tag{4.6.15}$$

前節に記した基底ベクトルと双対基底ベクトルの関係から、

$$\begin{aligned} &\overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{e^1}=1, \quad \overrightarrow{e_2}\cdot\overrightarrow{e^2}=1, \quad \overrightarrow{e_3}\cdot\overrightarrow{e^3}=1 \\ &\overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{e^2}=0, \quad \overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{e^3}=0, \quad \overrightarrow{e_2}\cdot\overrightarrow{e^1}=0 \\ &\overrightarrow{e_2}\cdot\overrightarrow{e^3}=0, \quad \overrightarrow{e_3}\cdot\overrightarrow{e^1}=0, \quad \overrightarrow{e_3}\cdot\overrightarrow{e^2}=0 \end{aligned} \tag{4.6.16}$$

上式に (4.6.14) 式、(4.6.15) 式を代入すると、

$$\begin{aligned}
&e_{1z}\,\epsilon_{1z}+e_{1y}\,\epsilon_{1y}+e_{1x}\,\epsilon_{1x}=1\\
&e_{2z}\,\epsilon_{2z}+e_{2y}\,\epsilon_{2y}+e_{2x}\,\epsilon_{2x}=1\\
&e_{3z}\,\epsilon_{3z}+e_{3y}\,\epsilon_{3y}+e_{3x}\,\epsilon_{3x}=1\\
&e_{1z}\,\epsilon_{2z}+e_{1y}\,\epsilon_{2y}+e_{1x}\,\epsilon_{2x}=0\\
&e_{1z}\,\epsilon_{3z}+e_{1y}\,\epsilon_{3y}+e_{1x}\,\epsilon_{3x}=0\\
&\epsilon_{1z}\,e_{2z}+\epsilon_{1y}\,e_{2y}+\epsilon_{1x}\,e_{2x}=0\\
&e_{2z}\,\epsilon_{3z}+e_{2y}\,\epsilon_{3y}+e_{2x}\,\epsilon_{3x}=0\\
&\epsilon_{1z}\,e_{3z}+\epsilon_{1y}\,e_{3y}+\epsilon_{1x}\,e_{3x}=0\\
&\epsilon_{2z}\,e_{3z}+\epsilon_{2y}\,e_{3y}+\epsilon_{2x}\,e_{3x}=0
\end{aligned} \tag{4.6.17}$$

(4.6.14) 式の基底ベクトルを別の形で表すと、

$$\begin{pmatrix}\overrightarrow{e_1}\\ \overrightarrow{e_2}\\ \overrightarrow{e_3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e_{1x}&e_{1y}&e_{1z}\\ e_{2x}&e_{2y}&e_{2z}\\ e_{3x}&e_{3y}&e_{3z}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\overrightarrow{e_x}\\ \overrightarrow{e_y}\\ \overrightarrow{e_z}\end{pmatrix} \tag{4.6.18}$$

(4.6.15) 式の双対基底ベクトルを別の形で表すと、

$$\begin{pmatrix}\overrightarrow{e^1}\\ \overrightarrow{e^2}\\ \overrightarrow{e^3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\epsilon_{1x}&\epsilon_{1y}&\epsilon_{1z}\\ \epsilon_{2x}&\epsilon_{2y}&\epsilon_{2z}\\ \epsilon_{3x}&\epsilon_{3y}&\epsilon_{3z}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\overrightarrow{e_x}\\ \overrightarrow{e_y}\\ \overrightarrow{e_z}\end{pmatrix} \tag{4.6.19}$$

(4.6.18) 式、(4.6.19) 式のマトリックスから下記を求め、(4.6.17) 式を代入すると、単位行列となる。

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix}e_{1x}&e_{1y}&e_{1z}\\ e_{2x}&e_{2y}&e_{2z}\\ e_{3x}&e_{3y}&e_{3z}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\epsilon_{1x}&\epsilon_{1y}&\epsilon_{1z}\\ \epsilon_{2x}&\epsilon_{2y}&\epsilon_{2z}\\ \epsilon_{3x}&\epsilon_{3y}&\epsilon_{3z}\end{pmatrix}^T\\
&=\begin{pmatrix}e_{1z}\,\epsilon_{1z}+e_{1y}\,\epsilon_{1y}+e_{1x}\,\epsilon_{1x} & e_{1z}\,\epsilon_{2z}+e_{1y}\,\epsilon_{2y}+e_{1x}\,\epsilon_{2x} & e_{1z}\,\epsilon_{3z}+e_{1y}\,\epsilon_{3y}+e_{1x}\,\epsilon_{3x}\\ \epsilon_{1z}\,e_{2z}+\epsilon_{1y}\,e_{2y}+\epsilon_{1x}\,e_{2x} & e_{2z}\,\epsilon_{2z}+e_{2y}\,\epsilon_{2y}+e_{2x}\,\epsilon_{2x} & e_{2z}\,\epsilon_{3z}+e_{2y}\,\epsilon_{3y}+e_{2x}\,\epsilon_{3x}\\ \epsilon_{1z}\,e_{3z}+\epsilon_{1y}\,e_{3y}+\epsilon_{1x}\,e_{3x} & \epsilon_{2z}\,e_{3z}+\epsilon_{2y}\,e_{3y}+\epsilon_{2x}\,e_{3x} & e_{3z}\,\epsilon_{3z}+e_{3y}\,\epsilon_{3y}+e_{3x}\,\epsilon_{3x}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{4.6.20}$$

また、(4.6.18) 式のマトリックスの逆行列を求め、元のマトリックスに逆行列を掛けると単位行列となるから、

$$\begin{pmatrix}e_{1x}&e_{1y}&e_{1z}\\ e_{2x}&e_{2y}&e_{2z}\\ e_{3x}&e_{3y}&e_{3z}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}e_{1x}&e_{1y}&e_{1z}\\ e_{2x}&e_{2y}&e_{2z}\\ e_{3x}&e_{3y}&e_{3z}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \tag{4.6.21}$$

(4.6.20) 式と (4.6.21) 式から、(4.6.19) 式の双対基底ベクトルのマトリックスは、基底ベクトルのマトリックスの逆行列：(4.6.9) 式の転置行列で得られる。これから双対基底ベクトルのマトリックスは、

$$\begin{pmatrix}\epsilon_{1x}&\epsilon_{1y}&\epsilon_{1z}\\ \epsilon_{2x}&\epsilon_{2y}&\epsilon_{2z}\\ \epsilon_{3x}&\epsilon_{3y}&\epsilon_{3z}\end{pmatrix}=\left(\begin{pmatrix}e_{1x}&e_{1y}&e_{1z}\\ e_{2x}&e_{2y}&e_{2z}\\ e_{3x}&e_{3y}&e_{3z}\end{pmatrix}^{-1}\right)^T \tag{4.6.22}$$

上式から双対基底ベクトル：$\overrightarrow{e^1},\overrightarrow{e^2},\overrightarrow{e^3}$ は、

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{e^1}&=\begin{pmatrix}\frac{e_{2y}\,e_{3z}-e_{2z}\,e_{3y}}{e_{1x}\,(e_{2y}\,e_{3z}-e_{2z}\,e_{3y})+e_{1y}\,(e_{2z}\,e_{3x}-e_{2x}\,e_{3z})+e_{1z}\,(e_{2x}\,e_{3y}-e_{2y}\,e_{3x})}\\ \frac{e_{2z}\,e_{3x}-e_{2x}\,e_{3z}}{e_{1x}\,(e_{2y}\,e_{3z}-e_{2z}\,e_{3y})+e_{1y}\,(e_{2z}\,e_{3x}-e_{2x}\,e_{3z})+e_{1z}\,(e_{2x}\,e_{3y}-e_{2y}\,e_{3x})}\\ \frac{e_{2x}\,e_{3y}-e_{2y}\,e_{3x}}{e_{1x}\,(e_{2y}\,e_{3z}-e_{2z}\,e_{3y})+e_{1y}\,(e_{2z}\,e_{3x}-e_{2x}\,e_{3z})+e_{1z}\,(e_{2x}\,e_{3y}-e_{2y}\,e_{3x})}\end{pmatrix}\\
\overrightarrow{e^2}&=\begin{pmatrix}\frac{e_{1z}\,e_{3y}-e_{1y}\,e_{3z}}{e_{1x}\,(e_{2y}\,e_{3z}-e_{2z}\,e_{3y})+e_{1y}\,(e_{2z}\,e_{3x}-e_{2x}\,e_{3z})+e_{1z}\,(e_{2x}\,e_{3y}-e_{2y}\,e_{3x})}\\ \frac{e_{1x}\,e_{3z}-e_{1z}\,e_{3x}}{e_{1x}\,(e_{2y}\,e_{3z}-e_{2z}\,e_{3y})+e_{1y}\,(e_{2z}\,e_{3x}-e_{2x}\,e_{3z})+e_{1z}\,(e_{2x}\,e_{3y}-e_{2y}\,e_{3x})}\\ \frac{e_{1y}\,e_{3x}-e_{1x}\,e_{3y}}{e_{1x}\,(e_{2y}\,e_{3z}-e_{2z}\,e_{3y})+e_{1y}\,(e_{2z}\,e_{3x}-e_{2x}\,e_{3z})+e_{1z}\,(e_{2x}\,e_{3y}-e_{2y}\,e_{3x})}\end{pmatrix}\\
\overrightarrow{e^3}&=\begin{pmatrix}\frac{e_{1y}\,e_{2z}-e_{1z}\,e_{2y}}{e_{1x}\,(e_{2y}\,e_{3z}-e_{2z}\,e_{3y})+e_{1y}\,(e_{2z}\,e_{3x}-e_{2x}\,e_{3z})+e_{1z}\,(e_{2x}\,e_{3y}-e_{2y}\,e_{3x})}\\ \frac{e_{1z}\,e_{2x}-e_{1x}\,e_{2z}}{e_{1x}\,(e_{2y}\,e_{3z}-e_{2z}\,e_{3y})+e_{1y}\,(e_{2z}\,e_{3x}-e_{2x}\,e_{3z})+e_{1z}\,(e_{2x}\,e_{3y}-e_{2y}\,e_{3x})}\\ \frac{e_{1x}\,e_{2y}-e_{1y}\,e_{2x}}{e_{1x}\,(e_{2y}\,e_{3z}-e_{2z}\,e_{3y})+e_{1y}\,(e_{2z}\,e_{3x}-e_{2x}\,e_{3z})+e_{1z}\,(e_{2x}\,e_{3y}-e_{2y}\,e_{3x})}\end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{4.6.23}$$

```
E23:col(adjoint(transpose(addcol(rhs(E20)
 ,rhs(E30),matrix([1],[1],[1])))),3);
EP51:e^"1"=(E23/(rhs(E10).E23));
EP41-EP51;
E31:col(adjoint(transpose(addcol(rhs(E30)
 ,rhs(E10),matrix([1],[1],[1])))),3);
EP52:e^"2"=(E31/(rhs(E20).E31));
EP42-EP52;
factor(%);
E12:col(adjoint(transpose(addcol(rhs(E10)
 ,rhs(E20),matrix([1],[1],[1])))),3);
EP53:e^"3"=(E12/(rhs(E30).E12));
EP43-EP53;
factor(%);
```

```
solve([EQ1,EQ2,EQ3,EQ4,EQ5,EQ6,EQ7,EQ8,
 EQ9],[\epsilon["1x"],\epsilon["1y"],
 \epsilon["1z"],\epsilon["2x"],
 \epsilon["2y"], \epsilon["2z"],
 \epsilon["3x"],\epsilon["3y"],
 \epsilon["3z"]]);
EQEP1:%[1];
subst(EQEP1,EP41);
factor(%-EP51);
subst(EQEP1,EP42);
factor(%-EP52);
subst(EQEP1,EP43);
factor(%-EP53);
```

基底ベクトルの $\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}$ の外積は、これに垂直な方向ベクトルとなり、$\overrightarrow{e^1}$ の方向となる。ベクトルの大きさとして、$\overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{e^1}=1$ であるから、次式で双対基底ベクトルが得られる。

$$\overrightarrow{e^1}=\frac{\overrightarrow{e_2}\times\overrightarrow{e_2}}{\overrightarrow{e_1}\cdot(\overrightarrow{e_2}\times\overrightarrow{e_2})},\quad \overrightarrow{e^2}=\frac{\overrightarrow{e_3}\times\overrightarrow{e_1}}{\overrightarrow{e_2}\cdot(\overrightarrow{e_3}\times\overrightarrow{e_1})},\quad \overrightarrow{e^3}=\frac{\overrightarrow{e_1}\times\overrightarrow{e_2}}{\overrightarrow{e_3}\cdot(\overrightarrow{e_1}\times\overrightarrow{e_2})} \tag{4.6.24}$$

(4.6.17) 式から連立方程式で $\epsilon_{1x}\rightarrow\epsilon_{3z}$ を求めると下記となり、(4.6.15) 式に下記を代入すると双対基底ベクトルが得られる。

$$\begin{aligned}
\epsilon_{1x}=&\frac{e_{2z}\,e_{3y}-e_{2y}\,e_{3z}}{e_{1x}\,\left(e_{2z}\,e_{3y}-e_{2y}\,e_{3z}\right)+e_{1y}\,\left(e_{2x}\,e_{3z}-e_{2z}\,e_{3x}\right)+e_{1z}\,\left(e_{2y}\,e_{3x}-e_{2x}\,e_{3y}\right)},\\
\epsilon_{1y}=&-\frac{e_{2z}\,e_{3x}-e_{2x}\,e_{3z}}{e_{1x}\,\left(e_{2z}\,e_{3y}-e_{2y}\,e_{3z}\right)+e_{1y}\,\left(e_{2x}\,e_{3z}-e_{2z}\,e_{3x}\right)+e_{1z}\,\left(e_{2y}\,e_{3x}-e_{2x}\,e_{3y}\right)},\\
\epsilon_{1z}=&\frac{e_{2y}\,e_{3x}-e_{2x}\,e_{3y}}{e_{1x}\,\left(e_{2z}\,e_{3y}-e_{2y}\,e_{3z}\right)+e_{1y}\,\left(e_{2x}\,e_{3z}-e_{2z}\,e_{3x}\right)+e_{1z}\,\left(e_{2y}\,e_{3x}-e_{2x}\,e_{3y}\right)},\\
\epsilon_{2x}=&-\frac{e_{1z}\,e_{3y}-e_{1y}\,e_{3z}}{e_{1x}\,\left(e_{2z}\,e_{3y}-e_{2y}\,e_{3z}\right)+e_{1y}\,\left(e_{2x}\,e_{3z}-e_{2z}\,e_{3x}\right)+e_{1z}\,\left(e_{2y}\,e_{3x}-e_{2x}\,e_{3y}\right)},\\
\epsilon_{2y}=&\frac{e_{1z}\,e_{3x}-e_{1x}\,e_{3z}}{e_{1x}\,\left(e_{2z}\,e_{3y}-e_{2y}\,e_{3z}\right)+e_{1y}\,\left(e_{2x}\,e_{3z}-e_{2z}\,e_{3x}\right)+e_{1z}\,\left(e_{2y}\,e_{3x}-e_{2x}\,e_{3y}\right)},\\
\epsilon_{2z}=&-\frac{e_{1y}\,e_{3x}-e_{1x}\,e_{3y}}{e_{1x}\,\left(e_{2z}\,e_{3y}-e_{2y}\,e_{3z}\right)+e_{1y}\,\left(e_{2x}\,e_{3z}-e_{2z}\,e_{3x}\right)+e_{1z}\,\left(e_{2y}\,e_{3x}-e_{2x}\,e_{3y}\right)},\\
\epsilon_{3x}=&\frac{e_{1z}\,e_{2y}-e_{1y}\,e_{2z}}{e_{1x}\,\left(e_{2z}\,e_{3y}-e_{2y}\,e_{3z}\right)+e_{1y}\,\left(e_{2x}\,e_{3z}-e_{2z}\,e_{3x}\right)+e_{1z}\,\left(e_{2y}\,e_{3x}-e_{2x}\,e_{3y}\right)},\\
\epsilon_{3y}=&-\frac{e_{1z}\,e_{2x}-e_{1x}\,e_{2z}}{e_{1x}\,\left(e_{2z}\,e_{3y}-e_{2y}\,e_{3z}\right)+e_{1y}\,\left(e_{2x}\,e_{3z}-e_{2z}\,e_{3x}\right)+e_{1z}\,\left(e_{2y}\,e_{3x}-e_{2x}\,e_{3y}\right)},\\
\epsilon_{3z}=&\frac{e_{1y}\,e_{2x}-e_{1x}\,e_{2y}}{e_{1x}\,\left(e_{2z}\,e_{3y}-e_{2y}\,e_{3z}\right)+e_{1y}\,\left(e_{2x}\,e_{3z}-e_{2z}\,e_{3x}\right)+e_{1z}\,\left(e_{2y}\,e_{3x}-e_{2x}\,e_{3y}\right)}
\end{aligned} \tag{4.6.25}$$

4.6.3 基底ベクトルによるベクトル表現 (反変ベクトルと共変ベクトル)

```
ABV1:A=A^"1"*e[1]+A^"2"*e[2]+A^"3"*e[3];
ADBV1:A=A[1]*e^"1"+A[2]*e^"2"+A[3]*e^"3";
ABVM1:matrix([A^"1"],[A^"2"],[A^"3"]);
ADBVM1:matrix([A[1]],[A[2]],[A[3]]);
ABV2:A=ABVM1.EBV1;
ADBV2:A=ADBVM1.EDBV1;
ABDBV:rhs(ABV2)=rhs(ADBV2);
ABDBV*e[1];
expand(%);
lhs(%)=subst([e^"3"=0,e^"2"=0,e^"1"=1,
 e[1]=1],rhs(%));
ABDBV*e[2];
expand(%);
lhs(%)=subst([e^"3"=0,e^"2"=1,e^"1"=0,
 e[2]=1],rhs(%));
ABDBV*e[3];
expand(%);
lhs(%)=subst([e^"3"=1,e^"2"=0,e^"1"=0,
 e[3]=1],rhs(%));
GABV1:matrix([g[11],g[12],g[13]],[g[21],
 g[22],g[23]],[g[31],g[32],g[33]]);
GA11:g[11]=rhs(E10).rhs(E10);
GA12:g[12]=rhs(E10).rhs(E20);
GA13:g[13]=rhs(E10).rhs(E30);
GA21:g[21]=rhs(E20).rhs(E10);
GA22:g[22]=rhs(E20).rhs(E20);
GA23:g[23]=rhs(E20).rhs(E30);
GA31:g[31]=rhs(E30).rhs(E10);
GA32:g[32]=rhs(E30).rhs(E20);
GA33:g[33]=rhs(E30).rhs(E30);
GA110:g[11]=e[1]*e[1];
GA120:g[12]=e[1]*e[2];
GA130:g[13]=e[1]*e[3];
GA210:g[21]=e[2]*e[1];
GA220:g[22]=e[2]*e[2];
GA230:g[23]=e[2]*e[3];
GA310:g[31]=e[3]*e[1];
GA320:g[32]=e[3]*e[2];
GA330:g[33]=e[3]*e[3];
ADBV3:ADBV1=GABV1.ABVM1;
ADBV31:subst([GA110,GA120,GA130,GA210,
 GA220,GA230,GA310,GA320,GA330],GABV1);
ADBV32:subst([GA11,GA12,GA13,GA21,GA22,
 GA23,GA31,GA32,GA33],ADBV3);
ADBV33:subst([GA11,GA12,GA13,GA21,GA22,
 GA23,GA31,GA32,GA33],GABV1);
```

ベクトル：$\overrightarrow{A}$ を基底ベクトルで表したものを反変ベクトルといい、下記となる。

$$\overrightarrow{A} = \overrightarrow{e_3}\,A^3+\overrightarrow{e_2}\,A^2+\overrightarrow{e_1}\,A^1 = \begin{pmatrix} A^1 \\ A^2 \\ A^3 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} \overrightarrow{e_1} \\ \overrightarrow{e_2} \\ \overrightarrow{e_3} \end{pmatrix} \tag{4.6.26}$$

ベクトル：$\overrightarrow{A}$ を双対基底ベクトルで表したものを共変ベクトルといい、下記となる。

$$\overrightarrow{A} = A_3\,\overrightarrow{e^3}+A_2\,\overrightarrow{e^2}+A_1\,\overrightarrow{e^1} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} \overrightarrow{e^1} \\ \overrightarrow{e^2} \\ \overrightarrow{e^3} \end{pmatrix} \tag{4.6.27}$$

(4.6.26) 式と (4.6.27) 式は同じベクトル：$\overrightarrow{A}$ であるから、

$$\overrightarrow{e_3}\,A^3+\overrightarrow{e_2}\,A^2+\overrightarrow{e_1}\,A^1 = A_3\,\overrightarrow{e^3}+A_2\,\overrightarrow{e^2}+A_1\,\overrightarrow{e^1} \tag{4.6.28}$$

基底ベクトルで表した反変ベクトルの係数:A^1, A^2 A^3 が与えられたときの共変ベクトルの係数:A_1, A_2 A_3 を求める。上式の両辺に、$\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ をそれぞれ掛け、(4.6.16) 式の関係式から次式を得る。

$$\overrightarrow{e_1}\,\overrightarrow{e_3}\,A^3 + \overrightarrow{e_1}\,\overrightarrow{e_2}\,A^2 + \overrightarrow{e_1}^2\,A^1 = A_1$$
$$\overrightarrow{e_2}\,\overrightarrow{e_3}\,A^3 + \overrightarrow{e_2}^2\,A^2 + \overrightarrow{e_2}\,\overrightarrow{e_1}\,A^1 = A_2$$
$$\overrightarrow{e_3}^2\,A^3 + \overrightarrow{e_3}\,\overrightarrow{e_2}\,A^2 + \overrightarrow{e_3}\,\overrightarrow{e_1}\,A^1 = A_3$$

上式をまとめると下記となり、g_{ij} は反変成分を共変成分に変換する働きがある。また、g_{ij} を基本計量共変テンソルと言う。

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \overrightarrow{e_1}^2 & \overrightarrow{e_1}\,\overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_1}\,\overrightarrow{e_3} \\ \overrightarrow{e_2}\,\overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2}^2 & \overrightarrow{e_2}\,\overrightarrow{e_3} \\ \overrightarrow{e_3}\,\overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_3}\,\overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3}^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A^1 \\ A^2 \\ A^3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A^1 \\ A^2 \\ A^3 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{4.6.29}$$

ここで、

$$\begin{aligned} g_{11} &= \overrightarrow{e_1}^2 = e_{1z}^2 + e_{1y}^2 + e_{1x}^2 \\ g_{12} &= \overrightarrow{e_1}\,\overrightarrow{e_2} = e_{1z}\,e_{2z} + e_{1y}\,e_{2y} + e_{1x}\,e_{2x} \\ g_{13} &= \overrightarrow{e_1}\,\overrightarrow{e_3} = e_{1z}\,e_{3z} + e_{1y}\,e_{3y} + e_{1x}\,e_{3x} \\ g_{21} &= \overrightarrow{e_2}\,\overrightarrow{e_1} = e_{1z}\,e_{2z} + e_{1y}\,e_{2y} + e_{1x}\,e_{2x} \\ g_{22} &= \overrightarrow{e_2}^2 = e_{2z}^2 + e_{2y}^2 + e_{2x}^2 \\ g_{23} &= \overrightarrow{e_2}\,\overrightarrow{e_3} = e_{2z}\,e_{3z} + e_{2y}\,e_{3y} + e_{2x}\,e_{3x} \\ g_{31} &= \overrightarrow{e_3}\,\overrightarrow{e_1} = e_{1z}\,e_{3z} + e_{1y}\,e_{3y} + e_{1x}\,e_{3x} \\ g_{32} &= \overrightarrow{e_3}\,\overrightarrow{e_2} = e_{2z}\,e_{3z} + e_{2y}\,e_{3y} + e_{2x}\,e_{3x} \\ g_{33} &= \overrightarrow{e_3}^2 = e_{3z}^2 + e_{3y}^2 + e_{3x}^2 \end{aligned} \tag{4.6.30}$$

上式から、共変ベクトルの係数：A_1, A_2 A_3 を求める
計量テンソル：g_{ij} は、

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{1z}^2 + e_{1y}^2 + e_{1x}^2 & e_{1z}\,e_{2z} + e_{1y}\,e_{2y} + e_{1x}\,e_{2x} & e_{1z}\,e_{3z} + e_{1y}\,e_{3y} + e_{1x}\,e_{3x} \\ e_{1z}\,e_{2z} + e_{1y}\,e_{2y} + e_{1x}\,e_{2x} & e_{2z}^2 + e_{2y}^2 + e_{2x}^2 & e_{2z}\,e_{3z} + e_{2y}\,e_{3y} + e_{2x}\,e_{3x} \\ e_{1z}\,e_{3z} + e_{1y}\,e_{3y} + e_{1x}\,e_{3x} & e_{2z}\,e_{3z} + e_{2y}\,e_{3y} + e_{2x}\,e_{3x} & e_{3z}^2 + e_{3y}^2 + e_{3x}^2 \end{pmatrix}$$

```
ABDBV*e^"1";
expand(%);
rhs(%)=subst([e^"1"=1,e[2]=0,e[3]=0,
 e[1]=1],lhs(%));
ABDBV*e^"2";
expand(%);
rhs(%)=subst([e^"2"=1,e[2]=1,e[3]=0,
 e[1]=0],lhs(%));
ABDBV*e^"3";
expand(%);
rhs(%)=subst([e^"3"=1,e[2]=0,e[3]=1,
 e[1]=0],lhs(%));
GDABV1:matrix([g^"11",g^"12",g^"13"],
 [g^"21",g^"22",g^"23"],[g^"31",g^"32",
 g^"33"]);
GDA11:g^"11"=rhs(EP10).rhs(EP10);
GDA12:g^"12"=rhs(EP10).rhs(EP20);
GDA13:g^"13"=rhs(EP10).rhs(EP30);
GDA21:g^"21"=rhs(EP20).rhs(EP10);
GDA22:g^"22"=rhs(EP20).rhs(EP20);
GDA23:g^"23"=rhs(EP20).rhs(EP30);
GDA31:g^"31"=rhs(EP30).rhs(EP10);
GDA32:g^"32"=rhs(EP30).rhs(EP20);
GDA33:g^"33"=rhs(EP30).rhs(EP30);
GDA110:g^"11"=e^"1"*e^"1";
GDA120:g^"12"=e^"1"*e^"2";
GDA130:g^"13"=e^"1"*e^"3";
GDA210:g^"21"=e^"2"*e^"1";
GDA220:g^"22"=e^"2"*e^"2";
GDA230:g^"23"=e^"2"*e^"3";
GDA310:g^"31"=e^"3"*e^"1";
GDA320:g^"32"=e^"3"*e^"2";
GDA330:g^"33"=e^"3"*e^"3";
GDA111:g^"11"=rhs(EP41).rhs(EP41);
GDA121:g^"12"=rhs(EP41).rhs(EP42);
GDA131:g^"13"=rhs(EP41).rhs(EP43);
GDA211:g^"21"=rhs(EP42).rhs(EP41);
GDA221:g^"22"=rhs(EP42).rhs(EP42);
GDA231:g^"23"=rhs(EP42).rhs(EP43);
GDA311:g^"31"=rhs(EP43).rhs(EP41);
GDA321:g^"32"=rhs(EP43).rhs(EP42);
GDA331:g^"33"=rhs(EP43).rhs(EP43);
```

```
ADBV4:ABVM1=GDABV1.ADBVM1;
ADBV42:subst([GDA11,GDA12,GDA13,GDA21,
 GDA22,GDA23,GDA31,GDA32,GDA33],GDABV1);
ADBV41:subst([GDA110,GDA120,GDA130,
 GDA210,GDA220,GDA230,GDA310,GDA320,
 GDA330],GDABV1);
ADBV43:subst([GDA111,GDA121,GDA131,
 GDA211,GDA221,GDA231,GDA311,GDA321,
 GDA331],GDABV1);
ADBV33.ADBV43;
factor(%);
ABV2:A=ABVM1.EBV1;
ABV22:first(rhs(ABV2));
ABV23:last(rhs(ABV2));
ABV24:rhs(ABV2)-ABV22-ABV23;
ABV3:A=A1*rhs(E10)+A2*rhs(E20)
 +A3*rhs(E30);
ABV31:subst([A1=A^"1",A2=A^"2",A3=A^"3"],
 %);
ADBV2:A=ADBVM1.EDBV1;
ADBV32;
A=AA1*rhs(EP41)+AA2*rhs(EP42)+AA3
 *rhs(EP43);
subst([AA1=rhs(ADBV32)[1][1]],%);
subst([AA2=rhs(ADBV32)[2][1]],%);
subst([AA3=rhs(ADBV32)[3][1]],%);
ABV51:factor(%);
ABV31;
ABV51-ABV31;
```

共変ベクトルの係数：A_1, A_2 A_3 が与えられたときの反変ベクトルの係数：A^1, A^2 A^3 を求める。(4.6.28) 式の両辺に、$\overrightarrow{e^1}, \overrightarrow{e^2}, \overrightarrow{e^3}$ をそれぞれ掛け、(4.6.16) 式の関係式から次式を得る。

$$A_3\,\overrightarrow{e^1}\,\overrightarrow{e^3} + A_2\,\overrightarrow{e^1}\,\overrightarrow{e^2} + A_1\,\overrightarrow{e^1}^2 = A^1$$
$$A_3\,\overrightarrow{e^2}\,\overrightarrow{e^3} + A_2\,\overrightarrow{e^2}^2 + A_1\,\overrightarrow{e^2}\,\overrightarrow{e^1} = A^2$$
$$A_3\,\overrightarrow{e^3}^2 + A_2\,\overrightarrow{e^3}\,\overrightarrow{e^2} + A_1\,\overrightarrow{e^3}\,\overrightarrow{e^1} = A^3$$

上式をまとめると下記となり、g^{ij} は共変成分を反変成分に変換する働きがある。また、g^{ij} を基本計量反変

テンソルと言う。

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}A^1\\A^2\\A^3\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}\overrightarrow{e^1}^2 & \overrightarrow{e^1}\,\overrightarrow{e^2} & \overrightarrow{e^1}\,\overrightarrow{e^3}\\ \overrightarrow{e^2}\,\overrightarrow{e^1} & \overrightarrow{e^2}^2 & \overrightarrow{e^2}\,\overrightarrow{e^3}\\ \overrightarrow{e^3}\,\overrightarrow{e^1} & \overrightarrow{e^3}\,\overrightarrow{e^2} & \overrightarrow{e^3}^2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}A_1\\A_2\\A_3\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}g^{11}&g^{12}&g^{13}\\g^{21}&g^{22}&g^{23}\\g^{31}&g^{32}&g^{33}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}A_1\\A_2\\A_3\end{pmatrix}\end{aligned}\tag{4.6.31}$$

ここで、

$$\begin{aligned}g^{11}=&\overrightarrow{e^1}^2=\epsilon_{1z}^2+\epsilon_{1y}^2+\epsilon_{1x}^2\\g^{12}=&\overrightarrow{e^1}\,\overrightarrow{e^2}=\epsilon_{1z}\,\epsilon_{2z}+\epsilon_{1y}\,\epsilon_{2y}+\epsilon_{1x}\,\epsilon_{2x}\\g^{13}=&\overrightarrow{e^1}\,\overrightarrow{e^3}=\epsilon_{1z}\,\epsilon_{3z}+\epsilon_{1y}\,\epsilon_{3y}+\epsilon_{1x}\,\epsilon_{3x}\\g^{21}=&\overrightarrow{e^2}\,\overrightarrow{e^1}=\epsilon_{1z}\,\epsilon_{2z}+\epsilon_{1y}\,\epsilon_{2y}+\epsilon_{1x}\,\epsilon_{2x}\\g^{22}=&\overrightarrow{e^2}^2=\epsilon_{2z}^2+\epsilon_{2y}^2+\epsilon_{2x}^2\\g^{23}=&\overrightarrow{e^2}\,\overrightarrow{e^3}=\epsilon_{2z}\,\epsilon_{3z}+\epsilon_{2y}\,\epsilon_{3y}+\epsilon_{2x}\,\epsilon_{3x}\\g^{31}=&\overrightarrow{e^3}\,\overrightarrow{e^1}=\epsilon_{1z}\,\epsilon_{3z}+\epsilon_{1y}\,\epsilon_{3y}+\epsilon_{1x}\,\epsilon_{3x}\\g^{32}=&\overrightarrow{e^3}\,\overrightarrow{e^2}=\epsilon_{2z}\,\epsilon_{3z}+\epsilon_{2y}\,\epsilon_{3y}+\epsilon_{2x}\,\epsilon_{3x}\\g^{33}=&\overrightarrow{e^3}^2=\epsilon_{3z}^2+\epsilon_{3y}^2+\epsilon_{3x}^2\end{aligned}\tag{4.6.32}$$

A^1, A^2, A^3 を求める計量テンソル:g^{ij} は上式及び (4.6.25) 式から得られる。
また、(4.6.29) 式、(4.6.31) 式から

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}A_1\\A_2\\A_3\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}g_{11}&g_{12}&g_{13}\\g_{21}&g_{22}&g_{23}\\g_{31}&g_{32}&g_{33}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}A^1\\A^2\\A^3\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}g_{11}&g_{12}&g_{13}\\g_{21}&g_{22}&g_{23}\\g_{31}&g_{32}&g_{33}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}g^{11}&g^{12}&g^{13}\\g^{21}&g^{22}&g^{23}\\g^{31}&g^{32}&g^{33}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}A_1\\A_2\\A_3\end{pmatrix}\end{aligned}\tag{4.6.33}$$

上式から次式となり、g^{ij} は g_{ij} の逆行列でも得られる。

$$\begin{pmatrix}g_{11}&g_{12}&g_{13}\\g_{21}&g_{22}&g_{23}\\g_{31}&g_{32}&g_{33}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}g^{11}&g^{12}&g^{13}\\g^{21}&g^{22}&g^{23}\\g^{31}&g^{32}&g^{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\tag{4.6.34}$$

4.6.4 ベクトルの内積と計量テンソル

ベクトル:$\overrightarrow{A},\overrightarrow{B}$ を斜交座標軸の基底ベクトル:$\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}$、双対基底ベクトル：$\overrightarrow{e^1},\overrightarrow{e^2},\overrightarrow{e^3}$ で表し、その内積を求める。
(本節の下記のプログラムは前節のプログラムに続いて実行する。)

```
BBV1:B=B^"1"*e[1]+B^"2"*e[2]+B^"3"*e[3];
BDBV1:B=B[1]*e^"1"+B[2]*e^"2"+B[3]*e^"3";
BBVM1:matrix([B^"1"],[B^"2"],[B^"3"]);
BDBVM1:matrix([B[1]],[B[2]],[B[3]]);
BBV2:B=BBVM1.EBV1;
BDBV2:B=BDBVM1.EDBV1;
ABV1*BBV1;
ABBV60:expand(%);
transpose(ABVM1).ADBV31.BBVM1;
ABBV61:expand(%);
rhs(ABBV60)-ABBV61;
factor(%);
ADBV1*BDBV1;
ABDBV62:expand(%);
transpose(ADBVM1).ADBV41.BDBVM1;
ABDBV63:expand(%);
rhs(ABDBV62)-ABDBV63;
factor(%);
```

(4.6.26) 式からベクトル:$\overrightarrow{A}$ を基底ベクトルで表すと、

$$\overrightarrow{A}=\overrightarrow{e_3}\,A^3+\overrightarrow{e_2}\,A^2+\overrightarrow{e_1}\,A^1=\begin{pmatrix}A^1\\A^2\\A^3\end{pmatrix}^T\cdot\begin{pmatrix}\overrightarrow{e_1}\\\overrightarrow{e_2}\\\overrightarrow{e_3}\end{pmatrix} \tag{4.6.35}$$

(4.6.27) 式からベクトル：$\overrightarrow{A}$ を双対基底ベクトルで表すと、

$$\overrightarrow{A}=A_3\,\overrightarrow{e^3}+A_2\,\overrightarrow{e^2}+A_1\,\overrightarrow{e^1} \tag{4.6.36}$$

ベクトル：$\overrightarrow{B}$ を基底ベクトルで表すと、

$$\overrightarrow{B}=\overrightarrow{e_3}\,B^3+\overrightarrow{e_2}\,B^2+\overrightarrow{e_1}\,B^1=\begin{pmatrix}\overrightarrow{e_1}\\\overrightarrow{e_2}\\\overrightarrow{e_3}\end{pmatrix}^T\cdot\begin{pmatrix}B^1\\B^2\\B^3\end{pmatrix} \tag{4.6.37}$$

ベクトル：$\overrightarrow{B}$ を双対基底ベクトルで表すと、

$$\overrightarrow{B}=B_3\,\overrightarrow{e^3}+B_2\,\overrightarrow{e^2}+B_1\,\overrightarrow{e^1} \tag{4.6.38}$$

基底ベクトルで表されたベクトル：$\overrightarrow{A},\overrightarrow{B}$ の内積は、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}=&\overrightarrow{e_3}^2\,A^3\,B^3+\overrightarrow{e_2}\,\overrightarrow{e_3}\,A^2\,B^3+\overrightarrow{e_1}\,\overrightarrow{e_3}\,A^1\,B^3\\&+\overrightarrow{e_2}\,\overrightarrow{e_3}\,A^3\,B^2+\overrightarrow{e_2}^2\,A^2\,B^2+\overrightarrow{e_1}\,\overrightarrow{e_2}\,A^1\,B^2\\&+\overrightarrow{e_1}\,\overrightarrow{e_3}\,A^3\,B^1+\overrightarrow{e_1}\,\overrightarrow{e_2}\,A^2\,B^1+\overrightarrow{e_1}^2\,A^1\,B^1\end{aligned} \tag{4.6.39}$$

上式を書き換えると、(4.6.35) 式、(4.6.37) 式、(4.6.29) 式から下記となる。ここで g_{ij} を計量テンソルという。

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}&=\begin{pmatrix}A^1\\A^2\\A^3\end{pmatrix}^T\cdot\begin{pmatrix}\overrightarrow{e_1}^2&\overrightarrow{e_1}\,\overrightarrow{e_2}&\overrightarrow{e_1}\,\overrightarrow{e_3}\\\overrightarrow{e_1}\,\overrightarrow{e_2}&\overrightarrow{e_2}^2&\overrightarrow{e_2}\,\overrightarrow{e_3}\\\overrightarrow{e_1}\,\overrightarrow{e_3}&\overrightarrow{e_2}\,\overrightarrow{e_3}&\overrightarrow{e_3}^2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}B^1\\B^2\\B^3\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}A^1\\A^2\\A^3\end{pmatrix}^T\cdot\begin{pmatrix}g_{11}&g_{12}&g_{13}\\g_{21}&g_{22}&g_{23}\\g_{31}&g_{32}&g_{33}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}B^1\\B^2\\B^3\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}A^1\\A^2\\A^3\end{pmatrix}^T\cdot\begin{pmatrix}B_1\\B_2\\B_3\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{4.6.40}$$

双対基底ベクトルで表されたベクトル：$\overrightarrow{A},\overrightarrow{B}$ の内積は、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A}\,\overrightarrow{B}=&A_2\,B_3\,\overrightarrow{e^2}\,\overrightarrow{e^3}+A_3\,B_3\,\overrightarrow{e^3}^2+B_2\,A_3\,\overrightarrow{e^3}\,\overrightarrow{e^2}\\&+A_1\,B_3\,\overrightarrow{e^1}\,\overrightarrow{e^3}+B_1\,A_3\,\overrightarrow{e^3}\,\overrightarrow{e^1}+A_1\,B_2\,\overrightarrow{e^1}\,\overrightarrow{e^2}\\&+A_2\,B_2\,\overrightarrow{e^2}^2+B_1\,A_2\,\overrightarrow{e^2}\,\overrightarrow{e^1}+A_1\,B_1\,\overrightarrow{e^1}^2\end{aligned} \tag{4.6.41}$$

上式を書き換えると、(4.6.31) 式、(4.6.32) 式から、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}&=\begin{pmatrix}A_1\\A_2\\A_3\end{pmatrix}^T\cdot\begin{pmatrix}\overrightarrow{e^1}^2&\overrightarrow{e^2}\,\overrightarrow{e^1}&\overrightarrow{e^3}\,\overrightarrow{e^1}\\\overrightarrow{e^1}\,\overrightarrow{e^2}&\overrightarrow{e^2}^2&\overrightarrow{e^3}\,\overrightarrow{e^2}\\\overrightarrow{e^1}\,\overrightarrow{e^3}&\overrightarrow{e^2}\,\overrightarrow{e^3}&\overrightarrow{e^3}^2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}B_1\\B_2\\B_3\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}A_1\\A_2\\A_3\end{pmatrix}^T\cdot\begin{pmatrix}g^{11}&g^{12}&g^{13}\\g^{21}&g^{22}&g^{23}\\g^{31}&g^{32}&g^{33}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}B_1\\B_2\\B_3\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}A_1\\A_2\\A_3\end{pmatrix}^T\cdot\begin{pmatrix}B^1\\B^2\\B^3\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{4.6.42}$$

微小変位ベクトル：$\overrightarrow{dr}$ とするとき、基底ベクトルで表すと、

$$\overrightarrow{dr}=\overrightarrow{e_3}\,dr^3+\overrightarrow{e_2}\,dr^2+\overrightarrow{e_1}\,dr^1 \tag{4.6.43}$$

双対基底ベクトルで表すと、

$$\overrightarrow{dr}=dr_3\,\overrightarrow{e^3}+dr_2\,\overrightarrow{e^2}+dr_1\,\overrightarrow{e^1} \tag{4.6.44}$$

微小変位ベクトル:$\overrightarrow{dr}$ の長さの二乗:ds^2 は、(4.6.40) 式、(4.6.42) 式から、

$$ds^2=\begin{pmatrix}dr^1\\dr^2\\dr^3\end{pmatrix}^T\cdot\begin{pmatrix}dr_1\\dr_2\\dr_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}dr_1\\dr_2\\dr_3\end{pmatrix}^T\cdot\begin{pmatrix}dr^1\\dr^2\\dr^3\end{pmatrix}$$

4.6.5　基底ベクトル、双対基底ベクトルが作る体積

斜交座標軸の基底ベクトル：$\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$、双対基底ベクトル：$\overrightarrow{e^1}, \overrightarrow{e^2}, \overrightarrow{e^3}$ が作る平行六面体の体積について調べる。(本節の下記のプログラムは前節のプログラムに続いて実行する。)

```
DV1:v=rhs(E30).col(adjoint(transpose(
 addcol(rhs(E10),rhs(E20),
 matrix([1],[1],[1])))),3);
DTE3:determinant(E3);
rhs(DV1)-DTE3;
factor(%);
DTE32:DTE3^(2);
DTE33:determinant(ADBV33);
DTE32-DTE33;
factor(%);
DVP1:v=rhs(EP30).col(adjoint(transpose(
 addcol(rhs(EP10),rhs(EP20),
 matrix([1],[1],[1])))),3);
DTEP3:determinant(EP3);
rhs(DVP1)-DTEP3;
factor(%);
```

```
DTEP32:DTEP3^(2);
DTEP33:determinant(ADBV42);
DTEP32-DTEP33;
factor(%);
DTE43:determinant(ADBV43);
DTE43*DTE33;
factor(%);
```

基盤ベクトル：$\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ が作る平行六面体の体積：V はスカラー 3 重積：(4.1.6) 式から、

$$\begin{aligned} V = \overrightarrow{e_3} \cdot (\overrightarrow{e_1} \times \overrightarrow{e_2}) &= (e_{1x}\, e_{2y} - e_{1y}\, e_{2x})\; e_{3z} \\ &+ (e_{1z}\, e_{2x} - e_{1x}\, e_{2z})\; e_{3y} \\ &+ (e_{1y}\, e_{2z} - e_{1z}\, e_{2y})\; e_{3x} \end{aligned} \tag{4.6.45}$$

また、(4.6.18) 式の基盤ベクトルのマトリックスの行列式を求めると、下記となり上式と一致する。

$$\begin{aligned} &det \begin{vmatrix} e_{1x} & e_{1y} & e_{1z} \\ e_{2x} & e_{2y} & e_{2z} \\ e_{3x} & e_{3y} & e_{3z} \end{vmatrix} \\ =&e_{1x}\; (e_{2y}\, e_{3z} - e_{2z}\, e_{3y}) - e_{1y}\; (e_{2x}\, e_{3z} - e_{2z}\, e_{3x}) \\ &+ e_{1z}\; (e_{2x}\, e_{3y} - e_{2y}\, e_{3x}) = V \end{aligned} \tag{4.6.46}$$

(4.6.29) 式の基盤ベクトルのマトリックス g_{ij} の行列式を求めると V^2 となる。

$$det \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} = det \begin{vmatrix} e_{1z}^2 + e_{1y}^2 + e_{1x}^2 & e_{1z}\, e_{2z} + e_{1y}\, e_{2y} + e_{1x}\, e_{2x} & e_{1z}\, e_{3z} + e_{1y}\, e_{3y} + e_{1x}\, e_{3x} \\ e_{1z}\, e_{2z} + e_{1y}\, e_{2y} + e_{1x}\, e_{2x} & e_{2z}^2 + e_{2y}^2 + e_{2x}^2 & e_{2z}\, e_{3z} + e_{2y}\, e_{3y} + e_{2x}\, e_{3x} \\ e_{1z}\, e_{3z} + e_{1y}\, e_{3y} + e_{1x}\, e_{3x} & e_{2z}\, e_{3z} + e_{2y}\, e_{3y} + e_{2x}\, e_{3x} & e_{3z}^2 + e_{3y}^2 + e_{3x}^2 \end{vmatrix} = V^2 \tag{4.6.47}$$

双対基底ベクトル：$\overrightarrow{e^1}, \overrightarrow{e^2}, \overrightarrow{e^3}$ が作る平行六面体の体積：V' はスカラー 3 重積：(4.1.6) 式から、

$$\begin{aligned} V' = \overrightarrow{e^3} \cdot \left(\overrightarrow{e^1} \times \overrightarrow{e^2}\right) &= (\epsilon_{1x}\, \epsilon_{2y} - \epsilon_{1y}\, \epsilon_{2x})\; \epsilon_{3z} \\ &+ (\epsilon_{1z}\, \epsilon_{2x} - \epsilon_{1x}\, \epsilon_{2z})\; \epsilon_{3y} \\ &+ (\epsilon_{1y}\, \epsilon_{2z} - \epsilon_{1z}\, \epsilon_{2y})\; \epsilon_{3x} \end{aligned} \tag{4.6.48}$$

また、(4.6.19) 式の双対基盤ベクトルのマトリックスの行列式を求めると、下記となり上式と一致する。

$$\begin{aligned} &det \begin{vmatrix} \epsilon_{1x} & \epsilon_{1y} & \epsilon_{1z} \\ \epsilon_{2x} & \epsilon_{2y} & \epsilon_{2z} \\ \epsilon_{3x} & \epsilon_{3y} & \epsilon_{3z} \end{vmatrix} \\ =&\epsilon_{1x}\; (\epsilon_{2y}\, \epsilon_{3z} - \epsilon_{2z}\, \epsilon_{3y}) - \epsilon_{1y}\; (\epsilon_{2x}\, \epsilon_{3z} - \epsilon_{2z}\, \epsilon_{3x}) \\ &+ \epsilon_{1z}\; (\epsilon_{2x}\, \epsilon_{3y} - \epsilon_{2y}\, \epsilon_{3x}) = V' \end{aligned} \tag{4.6.49}$$

(4.6.29) 式の双対基盤ベクトルのマトリックス g^{ij} の行列式を求めると、式は長くなるので省略するが、V'^2 となる。

$$det \begin{vmatrix} g^{11} & g^{12} & g^{13} \\ g^{21} & g^{22} & g^{23} \\ g^{31} & g^{32} & g^{33} \end{vmatrix} = V'^2 \tag{4.6.50}$$

(4.6.34) 式から、

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} & g^{13} \\ g^{21} & g^{22} & g^{23} \\ g^{31} & g^{32} & g^{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.6.51}$$

上式の行列式を求めると、(4.2.5) 式から、

$$\begin{aligned} &det \left| \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} & g^{13} \\ g^{21} & g^{22} & g^{23} \\ g^{31} & g^{32} & g^{33} \end{pmatrix} \right| \\ &= det \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} det \begin{vmatrix} g^{11} & g^{12} & g^{13} \\ g^{21} & g^{22} & g^{23} \\ g^{31} & g^{32} & g^{33} \end{vmatrix} = V^2 \cdot V'^2 = 1 \end{aligned} \tag{4.6.52}$$

4.6.6 ベクトル・テンソルの座標変換 (線形関係)

4.6.6.1 基底ベクトルと双対基底ベクトルの座標変換

```
kill(all);
load("vect")$
EBV1:matrix([e[1]],[e[2]],[e[3]]);
EDBV1:matrix([e^"1"],[e^"2"],[e^"3"]);
EBVT1:matrix([e["1’"]],[e["2’"]],
 [e["3’"]]);
EDBVT1:matrix([e^"1’"],[e^"2’"],[e^"3’"]);
ATRT1:matrix([A["1’"]^("  1"),
 A["1’"]^("  2"),A["1’"]^("  3")],
 [A["2’"]^("  1"),A["2’"]^("  2"),
 A["2’"]^("  3")],[A["3’"]^("  1"),
 A["3’"]^("  2"),A["3’"]^("  3")]);
BTRT1:matrix([B["  1"]^("1’"),
 B["  2"]^("1’"),B["  3"]^("1’")],
 [B["  1"]^("2’"),B["  2"]^("2’"),
 B["  3"]^("2’")],[B["  1"]^("3’"),
 B["  2"]^("3’"),B["  3"]^("3’")]);
TRE1:EBVT1=ATRT1.EBV1;
IAT1:IATRT1=ATRT1^("-1");
TRE2:EBV1=IATRT1.EBVT1;
TREP1:EDBVT1=BTRT1.EDBV1;
IBT1:IBTRT1=BTRT1^("-1");
TREP2:EDBV1=IBTRT1.EDBVT1;
EBV1.transpose(EDBV1);
EBVT1.transpose(EDBVT1);
X1:transpose(BTRT1.EDBV1);
X2:transpose(EDBV1).transpose(BTRT1);
X1-X2;
EBVT1.transpose(EDBVT1);
ATRT1;
EBV1.transpose(EDBV1);
transpose(BTRT1);
```

元の基底ベクトル：$\overrightarrow{e_j}$(4.6.18) 式を係数：$A_{i'}{}^{j}$ で座標変換後の基底ベクトル：$\overrightarrow{e_{j'}}$ に線形変換すると、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{e_{1'}} &= A_{1'}{}^{1}\,\overrightarrow{e_1} + A_{1'}{}^{2}\,\overrightarrow{e_2} + A_{1'}{}^{3}\,\overrightarrow{e_3}\\ \overrightarrow{e_{2'}} &= A_{2'}{}^{1}\,\overrightarrow{e_1} + A_{2'}{}^{2}\,\overrightarrow{e_2} + A_{2'}{}^{3}\,\overrightarrow{e_3}\\ \overrightarrow{e_{3'}} &= A_{3'}{}^{1}\,\overrightarrow{e_1} + A_{3'}{}^{2}\,\overrightarrow{e_2} + A_{3'}{}^{3}\,\overrightarrow{e_3}\end{aligned} \tag{4.6.53}$$

上式をテンソルを使って表現すると、

$$\begin{pmatrix}\overrightarrow{e_{1'}}\\ \overrightarrow{e_{2'}}\\ \overrightarrow{e_{3'}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}A_{1'}{}^{1} & A_{1'}{}^{2} & A_{1'}{}^{3}\\ A_{2'}{}^{1} & A_{2'}{}^{2} & A_{2'}{}^{3}\\ A_{3'}{}^{1} & A_{3'}{}^{2} & A_{3'}{}^{3}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\overrightarrow{e_1}\\ \overrightarrow{e_2}\\ \overrightarrow{e_3}\end{pmatrix} \tag{4.6.54}$$

上式のテンソルの逆行列を掛けると、

$$\begin{pmatrix}\overrightarrow{e_1}\\ \overrightarrow{e_2}\\ \overrightarrow{e_3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}A_{1'}{}^{1} & A_{1'}{}^{2} & A_{1'}{}^{3}\\ A_{2'}{}^{1} & A_{2'}{}^{2} & A_{2'}{}^{3}\\ A_{3'}{}^{1} & A_{3'}{}^{2} & A_{3'}{}^{3}\end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix}\overrightarrow{e_{1'}}\\ \overrightarrow{e_{2'}}\\ \overrightarrow{e_{3'}}\end{pmatrix} \tag{4.6.55}$$

元の双対基底ベクトル：$\overrightarrow{e^j}$(4.6.19) 式を係数：$B^{i'}_{j}$ で座標変換後の双対基底ベクトル：$\overrightarrow{e^{j'}}$ に線形変換すると、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{e^{1'}} &= B^{1'}{}_{1}\,\overrightarrow{e^1} + B^{1'}{}_{2}\,\overrightarrow{e^2} + B^{1'}{}_{3}\,\overrightarrow{e^3}\\ \overrightarrow{e^{2'}} &= B^{2'}{}_{1}\,\overrightarrow{e^1} + B^{2'}{}_{2}\,\overrightarrow{e^2} + B^{2'}{}_{3}\,\overrightarrow{e^3}\\ \overrightarrow{e^{3'}} &= B^{3'}{}_{1}\,\overrightarrow{e^1} + B^{3'}{}_{2}\,\overrightarrow{e^2} + B^{3'}{}_{3}\,\overrightarrow{e^3}\end{aligned} \tag{4.6.56}$$

上式をテンソルを使って表現すると、

$$\begin{pmatrix}\overrightarrow{e^{1'}}\\ \overrightarrow{e^{2'}}\\ \overrightarrow{e^{3'}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}B^{1'}{}_{1} & B^{1'}{}_{2} & B^{1'}{}_{3}\\ B^{2'}{}_{1} & B^{2'}{}_{2} & B^{2'}{}_{3}\\ B^{3'}{}_{1} & B^{3'}{}_{2} & B^{3'}{}_{3}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\overrightarrow{e^1}\\ \overrightarrow{e^2}\\ \overrightarrow{e^3}\end{pmatrix} \tag{4.6.57}$$

上式のテンソルの逆行列を掛けると、

$$\begin{pmatrix}\overrightarrow{e^1}\\ \overrightarrow{e^2}\\ \overrightarrow{e^3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}B^{1'}{}_{1} & B^{1'}{}_{2} & B^{1'}{}_{3}\\ B^{2'}{}_{1} & B^{2'}{}_{2} & B^{2'}{}_{3}\\ B^{3'}{}_{1} & B^{3'}{}_{2} & B^{3'}{}_{3}\end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix}\overrightarrow{e^{1'}}\\ \overrightarrow{e^{2'}}\\ \overrightarrow{e^{3'}}\end{pmatrix} \tag{4.6.58}$$

(4.6.57) 式の転置行列は、

$$\begin{pmatrix}\overrightarrow{e^{1'}}\\ \overrightarrow{e^{2'}}\\ \overrightarrow{e^{3'}}\end{pmatrix}^{T} = \begin{pmatrix}\overrightarrow{e^1}\\ \overrightarrow{e^2}\\ \overrightarrow{e^3}\end{pmatrix}^{T} \cdot \begin{pmatrix}B^{1'}{}_{1} & B^{1'}{}_{2} & B^{1'}{}_{3}\\ B^{2'}{}_{1} & B^{2'}{}_{2} & B^{2'}{}_{3}\\ B^{3'}{}_{1} & B^{3'}{}_{2} & B^{3'}{}_{3}\end{pmatrix}^{T} \tag{4.6.59}$$

(4.6.54) 式に (4.6.59) 式を掛けると、

$$\begin{pmatrix}\overrightarrow{e_{1'}}\\ \overrightarrow{e_{2'}}\\ \overrightarrow{e_{3'}}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\overrightarrow{e^{1'}}\\ \overrightarrow{e^{2'}}\\ \overrightarrow{e^{3'}}\end{pmatrix}^{T} = \begin{pmatrix}A_{1'}{}^{1} & A_{1'}{}^{2} & A_{1'}{}^{3}\\ A_{2'}{}^{1} & A_{2'}{}^{2} & A_{2'}{}^{3}\\ A_{3'}{}^{1} & A_{3'}{}^{2} & A_{3'}{}^{3}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\overrightarrow{e_1}\\ \overrightarrow{e_2}\\ \overrightarrow{e_3}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\overrightarrow{e^1}\\ \overrightarrow{e^2}\\ \overrightarrow{e^3}\end{pmatrix}^{T} \cdot \begin{pmatrix}B^{1'}{}_{1} & B^{1'}{}_{2} & B^{1'}{}_{3}\\ B^{2'}{}_{1} & B^{2'}{}_{2} & B^{2'}{}_{3}\\ B^{3'}{}_{1} & B^{3'}{}_{2} & B^{3'}{}_{3}\end{pmatrix}^{T}$$

上式を展開すると、

$$\begin{pmatrix} \overrightarrow{e_{1'}}\,\overrightarrow{e^{1'}} & \overrightarrow{e_{1'}}\,\overrightarrow{e^{2'}} & \overrightarrow{e_{1'}}\,\overrightarrow{e^{3'}} \\ \overrightarrow{e_{2'}}\,\overrightarrow{e^{1'}} & \overrightarrow{e_{2'}}\,\overrightarrow{e^{2'}} & \overrightarrow{e_{2'}}\,\overrightarrow{e^{3'}} \\ \overrightarrow{e_{3'}}\,\overrightarrow{e^{1'}} & \overrightarrow{e_{3'}}\,\overrightarrow{e^{2'}} & \overrightarrow{e_{3'}}\,\overrightarrow{e^{3'}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{1'}{}^{1} & A_{1'}{}^{2} & A_{1'}{}^{3} \\ A_{2'}{}^{1} & A_{2'}{}^{2} & A_{2'}{}^{3} \\ A_{3'}{}^{1} & A_{3'}{}^{2} & A_{3'}{}^{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \overrightarrow{e_1}\,\overrightarrow{e^1} & \overrightarrow{e_1}\,\overrightarrow{e^2} & \overrightarrow{e_1}\,\overrightarrow{e^3} \\ \overrightarrow{e_2}\,\overrightarrow{e^1} & \overrightarrow{e_2}\,\overrightarrow{e^2} & \overrightarrow{e_2}\,\overrightarrow{e^3} \\ \overrightarrow{e_3}\,\overrightarrow{e^1} & \overrightarrow{e_3}\,\overrightarrow{e^2} & \overrightarrow{e_3}\,\overrightarrow{e^3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B^{1'}{}_{1} & B^{1'}{}_{2} & B^{1'}{}_{3} \\ B^{2'}{}_{1} & B^{2'}{}_{2} & B^{2'}{}_{3} \\ B^{3'}{}_{1} & B^{3'}{}_{2} & B^{3'}{}_{3} \end{pmatrix}^T$$

(4.6.16) 式の基底ベクトルと双対基底ベクトルの関係式：$\overrightarrow{e_i} \cdot \overrightarrow{e^j} = \delta_{ij}$ および座標変換後の基底ベクトルと双対基底ベクトルの関係式：$\overrightarrow{e_{i'}} \cdot \overrightarrow{e^{j'}} = \delta_{i'j'}$ から、

$$\begin{pmatrix} A_{1'}{}^{1} & A_{1'}{}^{2} & A_{1'}{}^{3} \\ A_{2'}{}^{1} & A_{2'}{}^{2} & A_{2'}{}^{3} \\ A_{3'}{}^{1} & A_{3'}{}^{2} & A_{3'}{}^{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B^{1'}{}_{1} & B^{1'}{}_{2} & B^{1'}{}_{3} \\ B^{2'}{}_{1} & B^{2'}{}_{2} & B^{2'}{}_{3} \\ B^{3'}{}_{1} & B^{3'}{}_{2} & B^{3'}{}_{3} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.6.60}$$

上式の転置テンソルを求めると、

$$\begin{pmatrix} B^{1'}{}_{1} & B^{1'}{}_{2} & B^{1'}{}_{3} \\ B^{2'}{}_{1} & B^{2'}{}_{2} & B^{2'}{}_{3} \\ B^{3'}{}_{1} & B^{3'}{}_{2} & B^{3'}{}_{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{1'}{}^{1} & A_{1'}{}^{2} & A_{1'}{}^{3} \\ A_{2'}{}^{1} & A_{2'}{}^{2} & A_{2'}{}^{3} \\ A_{3'}{}^{1} & A_{3'}{}^{2} & A_{3'}{}^{3} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

上式から双対基底ベクトの線形変換マトリックス：$B^{i'}_j$ を求めると、

$$\begin{pmatrix} B^{1'}{}_{1} & B^{1'}{}_{2} & B^{1'}{}_{3} \\ B^{2'}{}_{1} & B^{2'}{}_{2} & B^{2'}{}_{3} \\ B^{3'}{}_{1} & B^{3'}{}_{2} & B^{3'}{}_{3} \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} A_{1'}{}^{1} & A_{1'}{}^{2} & A_{1'}{}^{3} \\ A_{2'}{}^{1} & A_{2'}{}^{2} & A_{2'}{}^{3} \\ A_{3'}{}^{1} & A_{3'}{}^{2} & A_{3'}{}^{3} \end{pmatrix}^T \right)^{-1} \tag{4.6.61}$$

いま、(4.6.54) 式を横ベクトル表記にすると、

$$\begin{pmatrix} \overrightarrow{e_{1'}} & \overrightarrow{e_{2'}} & \overrightarrow{e_{3'}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{1'}{}^{1} & A_{2'}{}^{1} & A_{3'}{}^{1} \\ A_{1'}{}^{2} & A_{2'}{}^{2} & A_{3'}{}^{2} \\ A_{1'}{}^{3} & A_{2'}{}^{3} & A_{3'}{}^{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{1'}{}^{1} & A_{1'}{}^{2} & A_{1'}{}^{3} \\ A_{2'}{}^{1} & A_{2'}{}^{2} & A_{2'}{}^{3} \\ A_{3'}{}^{1} & A_{3'}{}^{2} & A_{3'}{}^{3} \end{pmatrix}^T \tag{4.6.62}$$

(4.6.57) 式をそのまま縦ベクトル表記し、(4.6.61) 式を代入すると、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \overrightarrow{e^{1'}} \\ \overrightarrow{e^{2'}} \\ \overrightarrow{e^{3'}} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} B^{1'}{}_{1} & B^{1'}{}_{2} & B^{1'}{}_{3} \\ B^{2'}{}_{1} & B^{2'}{}_{2} & B^{2'}{}_{3} \\ B^{3'}{}_{1} & B^{3'}{}_{2} & B^{3'}{}_{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \overrightarrow{e^1} \\ \overrightarrow{e^2} \\ \overrightarrow{e^3} \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} A_{1'}{}^{1} & A_{1'}{}^{2} & A_{1'}{}^{3} \\ A_{2'}{}^{1} & A_{2'}{}^{2} & A_{2'}{}^{3} \\ A_{3'}{}^{1} & A_{3'}{}^{2} & A_{3'}{}^{3} \end{pmatrix}^T \right)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \overrightarrow{e^1} \\ \overrightarrow{e^2} \\ \overrightarrow{e^3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_{1'}{}^{1} & A_{2'}{}^{1} & A_{3'}{}^{1} \\ A_{1'}{}^{2} & A_{2'}{}^{2} & A_{3'}{}^{2} \\ A_{1'}{}^{3} & A_{2'}{}^{3} & A_{3'}{}^{3} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \overrightarrow{e^1} \\ \overrightarrow{e^2} \\ \overrightarrow{e^3} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{4.6.63}$$

基底ベクトルを横ベクトル表記に、双対基底ベクトを縦ベクトル表記にすると、双対基底ベクトの線形変換マトリックス：$B^{i'}_j$ は、

$$\begin{pmatrix} B^{1'}{}_{1} & B^{1'}{}_{2} & B^{1'}{}_{3} \\ B^{2'}{}_{1} & B^{2'}{}_{2} & B^{2'}{}_{3} \\ B^{3'}{}_{1} & B^{3'}{}_{2} & B^{3'}{}_{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{1'}{}^{1} & A_{2'}{}^{1} & A_{3'}{}^{1} \\ A_{1'}{}^{2} & A_{2'}{}^{2} & A_{3'}{}^{2} \\ A_{1'}{}^{3} & A_{2'}{}^{3} & A_{3'}{}^{3} \end{pmatrix}^{-1} \tag{4.6.64}$$

4.6.6.2 ベクトルの座標変換 (反変成分)

```
PM1:matrix([P^"1"],[P^"2"],[P^"3"]);
PMD1:matrix([P["1"]],[P["2"]],[P["3"]]);
PMT1:matrix([P^"1’"],[P^"2’"],[P^"3’"]);
PMDT1:matrix([P["1’"]],[P["2’"]],
 [P["3’"]]);
PBV1:P=P^"1"*e[1]+P^"2"*e[2]+P^"3"*e[3];
PBV2:P=P1*e[1]+P2*e[2]+P3*e[3];
PBVTR1:P=P^"1’"*e["1’"]+P^"2’"*e["2’"]
 +P^"3’"*e["3’"];
PBVTR2:P=PT1*e["1’"]+PT2*e["2’"]
 +PT3*e["3’"];
rhs(PBVTR2)*lhs(TREP1);
X2:expand(%);
subst([PT1=P^"1’",PT2=P^"2’",PT3=P^"3’"],
 %);
```

```
X30:rhs(PBV2)*(rhs(TREP1));
subst([P1=P^"1",P2=P^"2",P3=P^"3"],%);
X3:expand(X30);
BTRT1.matrix([P1],[P2],[P3]);
subst([P1=P^"1",P2=P^"2",P3=P^"3"],%);
```

基底ベクトルを使った下記の任意ベクトル：$\overrightarrow{P}$ の反変成分の座標変換を行う。

$$\overrightarrow{P} = \overrightarrow{e_3}\, P^3 + \overrightarrow{e_2}\, P^2 + \overrightarrow{e_1}\, P^1 \tag{4.6.65}$$

変換結果を下記とする。

$$\overrightarrow{P} = \overrightarrow{e_{3'}}\, P^{3'} + \overrightarrow{e_{2'}}\, P^{2'} + \overrightarrow{e_{1'}}\, P^{1'} \tag{4.6.66}$$

同じベクトルであるから、

$$\begin{aligned} &\overrightarrow{e_{3'}}\, P^{3'} + \overrightarrow{e_{2'}}\, P^{2'} + \overrightarrow{e_{1'}}\, P^{1'} \\ &\quad = \overrightarrow{e_3}\, P^3 + \overrightarrow{e_2}\, P^2 + \overrightarrow{e_1}\, P^1 \end{aligned} \tag{4.6.67}$$

上式をベクトル表記し、(4.6.57) 式を掛けると、

$$\begin{pmatrix} \overrightarrow{e^{1'}} \\ \overrightarrow{e^{2'}} \\ \overrightarrow{e^{3'}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \overrightarrow{e_{1'}} \\ \overrightarrow{e_{2'}} \\ \overrightarrow{e_{3'}} \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} P^{1'} \\ P^{2'} \\ P^{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{1'}{}_1 & B^{1'}{}_2 & B^{1'}{}_3 \\ B^{2'}{}_1 & B^{2'}{}_2 & B^{2'}{}_3 \\ B^{3'}{}_1 & B^{3'}{}_2 & B^{3'}{}_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \overrightarrow{e^1} \\ \overrightarrow{e^2} \\ \overrightarrow{e^3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \overrightarrow{e_1} \\ \overrightarrow{e_2} \\ \overrightarrow{e_3} \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} P^1 \\ P^2 \\ P^3 \end{pmatrix}$$

上式を展開すると、

$$\begin{pmatrix} \overrightarrow{e_{1'}}\,\overrightarrow{e^{1'}} & \overrightarrow{e_{1'}}\,\overrightarrow{e^{2'}} & \overrightarrow{e_{1'}}\,\overrightarrow{e^{3'}} \\ \overrightarrow{e_{2'}}\,\overrightarrow{e^{1'}} & \overrightarrow{e_{2'}}\,\overrightarrow{e^{2'}} & \overrightarrow{e_{2'}}\,\overrightarrow{e^{3'}} \\ \overrightarrow{e_{3'}}\,\overrightarrow{e^{1'}} & \overrightarrow{e_{3'}}\,\overrightarrow{e^{2'}} & \overrightarrow{e_{3'}}\,\overrightarrow{e^{3'}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P^{1'} \\ P^{2'} \\ P^{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{1'}{}_1 & B^{1'}{}_2 & B^{1'}{}_3 \\ B^{2'}{}_1 & B^{2'}{}_2 & B^{2'}{}_3 \\ B^{3'}{}_1 & B^{3'}{}_2 & B^{3'}{}_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \overrightarrow{e_1}\,\overrightarrow{e^1} & \overrightarrow{e_1}\,\overrightarrow{e^2} & \overrightarrow{e_1}\,\overrightarrow{e^3} \\ \overrightarrow{e_2}\,\overrightarrow{e^1} & \overrightarrow{e_2}\,\overrightarrow{e^2} & \overrightarrow{e_2}\,\overrightarrow{e^3} \\ \overrightarrow{e_3}\,\overrightarrow{e^1} & \overrightarrow{e_3}\,\overrightarrow{e^2} & \overrightarrow{e_3}\,\overrightarrow{e^3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P^1 \\ P^2 \\ P^3 \end{pmatrix}$$

(4.6.16) 式の基底ベクトルと双対基底ベクトルの関係式：$\overrightarrow{e_i} \cdot \overrightarrow{e^j} = \delta_{ij}$ および座標変換後の基底ベクトルと双対基底ベクトルの関係式：$\overrightarrow{e_{i'}} \cdot \overrightarrow{e^{j'}} = \delta_{i'j'}$ から、

$$\begin{pmatrix} P^{1'} \\ P^{2'} \\ P^{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{1'}{}_1 & B^{1'}{}_2 & B^{1'}{}_3 \\ B^{2'}{}_1 & B^{2'}{}_2 & B^{2'}{}_3 \\ B^{3'}{}_1 & B^{3'}{}_2 & B^{3'}{}_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P^1 \\ P^2 \\ P^3 \end{pmatrix} \tag{4.6.68}$$

上式のテンソル：$B_i^{j'}$ の逆行列を上式に掛け、(4.6.61) 式を代入すると、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} P^1 \\ P^2 \\ P^3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} B^{1'}{}_1 & B^{1'}{}_2 & B^{1'}{}_3 \\ B^{2'}{}_1 & B^{2'}{}_2 & B^{2'}{}_3 \\ B^{3'}{}_1 & B^{3'}{}_2 & B^{3'}{}_3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} P^{1'} \\ P^{2'} \\ P^{3'} \end{pmatrix} = \left(\left(\left(\begin{pmatrix} A_{1'}{}^1 & A_{1'}{}^2 & A_{1'}{}^3 \\ A_{2'}{}^1 & A_{2'}{}^2 & A_{2'}{}^3 \\ A_{3'}{}^1 & A_{3'}{}^2 & A_{3'}{}^3 \end{pmatrix}^T \right)^{-1} \right)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} P^{1'} \\ P^{2'} \\ P^{3'} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_{1'}{}^1 & A_{1'}{}^2 & A_{1'}{}^3 \\ A_{2'}{}^1 & A_{2'}{}^2 & A_{2'}{}^3 \\ A_{3'}{}^1 & A_{3'}{}^2 & A_{3'}{}^3 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} P^{1'} \\ P^{2'} \\ P^{3'} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{4.6.69}$$

4.6.6.3　ベクトルの座標変換 (共変成分)

```
ADBV1:P=P[1]*e^"1"+P[2]*e^"2"+P[3]*e^"3";
ADBV2:P=P[1]*E1+P[2]*E2+P[3]*E3;
ADBVTR1:P=P["1’"]*e^"1’"+P["2’"]*e^"2’"
 +P["3’"]*e^"3’";
ADBVTR2:P=P["1’"]*ET1+P["2’"]*ET2
 +P["3’"]*ET3;
rhs(ADBVTR2)*lhs(TRE1);
expand(%);
subst([ET1=e^"1’",ET2=e^"2’",ET3=e^"3’"],
 %);
rhs(ADBV2)*(rhs(TRE1));
expand(%);
subst([E1=e^"1",E2=e^"2",E3=e^"3"],%);
ATRT1.matrix([P1],[P2],[P3]);
subst([P1=P["1"],P2=P["2"],P3=P["3"]],%);
```

基底ベクトルを使った下記の任意ベクトル：$\overrightarrow{A}$ の共変成分の座標変換を行う。

$$\overrightarrow{P} = \overrightarrow{e^3}\,P_3 + \overrightarrow{e^2}\,P_2 + \overrightarrow{e^1}\,P_1 \tag{4.6.70}$$

変換結果を下記とする。

$$\overrightarrow{P} = \overrightarrow{e^{3'}}\,P_{3'} + \overrightarrow{e^{2'}}\,P_{2'} + \overrightarrow{e^{1'}}\,P_{1'} \tag{4.6.71}$$

同じベクトルであるから、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{e^{3'}}\,P_{3'} + \overrightarrow{e^{2'}}\,P_{2'} + \overrightarrow{e^{1'}}\,P_{1'}\\ = \overrightarrow{e^3}\,P_3 + \overrightarrow{e^2}\,P_2 + \overrightarrow{e^1}\,P_1\end{aligned} \tag{4.6.72}$$

上式をベクトル表記し、(4.6.54) 式を掛けると、

$$\begin{pmatrix}\overrightarrow{e_{1'}}\\ \overrightarrow{e_{2'}}\\ \overrightarrow{e_{3'}}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\overrightarrow{e^{1'}}\\ \overrightarrow{e^{2'}}\\ \overrightarrow{e^{3'}}\end{pmatrix}^T\cdot\begin{pmatrix}P_{1'}\\ P_{2'}\\ P_{3'}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}A_{1'}{}^1 & A_{1'}{}^2 & A_{1'}{}^3\\ A_{2'}{}^1 & A_{2'}{}^2 & A_{2'}{}^3\\ A_{3'}{}^1 & A_{3'}{}^2 & A_{3'}{}^3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\overrightarrow{e_1}\\ \overrightarrow{e_2}\\ \overrightarrow{e_3}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\overrightarrow{e^1}\\ \overrightarrow{e^2}\\ \overrightarrow{e^3}\end{pmatrix}^T\cdot\begin{pmatrix}P_1\\ P_2\\ P_3\end{pmatrix}$$

上式を展開すると、

$$\begin{pmatrix}\overrightarrow{e_{1'}}\,\overrightarrow{e^{1'}} & \overrightarrow{e_{1'}}\,\overrightarrow{e^{2'}} & \overrightarrow{e_{1'}}\,\overrightarrow{e^{3'}}\\ \overrightarrow{e_{2'}}\,\overrightarrow{e^{1'}} & \overrightarrow{e_{2'}}\,\overrightarrow{e^{2'}} & \overrightarrow{e_{2'}}\,\overrightarrow{e^{3'}}\\ \overrightarrow{e_{3'}}\,\overrightarrow{e^{1'}} & \overrightarrow{e_{3'}}\,\overrightarrow{e^{2'}} & \overrightarrow{e_{3'}}\,\overrightarrow{e^{3'}}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}P_{1'}\\ P_{2'}\\ P_{3'}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}A_{1'}{}^1 & A_{1'}{}^2 & A_{1'}{}^3\\ A_{2'}{}^1 & A_{2'}{}^2 & A_{2'}{}^3\\ A_{3'}{}^1 & A_{3'}{}^2 & A_{3'}{}^3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\overrightarrow{e_1}\,\overrightarrow{e^1} & \overrightarrow{e_1}\,\overrightarrow{e^2} & \overrightarrow{e_1}\,\overrightarrow{e^3}\\ \overrightarrow{e_2}\,\overrightarrow{e^1} & \overrightarrow{e_2}\,\overrightarrow{e^2} & \overrightarrow{e_2}\,\overrightarrow{e^3}\\ \overrightarrow{e_3}\,\overrightarrow{e^1} & \overrightarrow{e_3}\,\overrightarrow{e^2} & \overrightarrow{e_3}\,\overrightarrow{e^3}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}P_1\\ P_2\\ P_3\end{pmatrix}$$

(4.6.16) 式の基底ベクトルと双対基底ベクトルの関係式：$\overrightarrow{e_i}\cdot\overrightarrow{e^j} = \delta_{ij}$ および座標変換後の基底ベクトルと双対基底ベクトルの関係式：$\overrightarrow{e_{i'}}\cdot\overrightarrow{e^{j'}} = \delta_{i'j'}$ から、

$$\begin{pmatrix}P_{1'}\\ P_{2'}\\ P_{3'}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}A_{1'}{}^1 & A_{1'}{}^2 & A_{1'}{}^3\\ A_{2'}{}^1 & A_{2'}{}^2 & A_{2'}{}^3\\ A_{3'}{}^1 & A_{3'}{}^2 & A_{3'}{}^3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}P_1\\ P_2\\ P_3\end{pmatrix} \tag{4.6.73}$$

(4.6.61) 式の転置テンソルは、

$$\begin{pmatrix}B^{1'}{}_1 & B^{1'}{}_2 & B^{1'}{}_3\\ B^{2'}{}_1 & B^{2'}{}_2 & B^{2'}{}_3\\ B^{3'}{}_1 & B^{3'}{}_2 & B^{3'}{}_3\end{pmatrix}^T = \left(\left(\begin{pmatrix}A_{1'}{}^1 & A_{1'}{}^2 & A_{1'}{}^3\\ A_{2'}{}^1 & A_{2'}{}^2 & A_{2'}{}^3\\ A_{3'}{}^1 & A_{3'}{}^2 & A_{3'}{}^3\end{pmatrix}^T\right)^{-1}\right)^T = \begin{pmatrix}A_{1'}{}^1 & A_{1'}{}^2 & A_{1'}{}^3\\ A_{2'}{}^1 & A_{2'}{}^2 & A_{2'}{}^3\\ A_{3'}{}^1 & A_{3'}{}^2 & A_{3'}{}^3\end{pmatrix}^{-1} \tag{4.6.74}$$

(4.6.73) 式のテンソル：$A_{i'}^j$ の逆行列を (4.6.73) 式に掛け、上式を代入すると、

$$\begin{pmatrix}P_1\\ P_2\\ P_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}A_{1'}{}^1 & A_{1'}{}^2 & A_{1'}{}^3\\ A_{2'}{}^1 & A_{2'}{}^2 & A_{2'}{}^3\\ A_{3'}{}^1 & A_{3'}{}^2 & A_{3'}{}^3\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}P_{1'}\\ P_{2'}\\ P_{3'}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}B^{1'}{}_1 & B^{1'}{}_2 & B^{1'}{}_3\\ B^{2'}{}_1 & B^{2'}{}_2 & B^{2'}{}_3\\ B^{3'}{}_1 & B^{3'}{}_2 & B^{3'}{}_3\end{pmatrix}^T\cdot\begin{pmatrix}P_{1'}\\ P_{2'}\\ P_{3'}\end{pmatrix} \tag{4.6.75}$$

4.6.6.4 計量テンソルの座標変換

```
GABV1:matrix([g[11],g[12],g[13]],[g[21],
 g[22],g[23]],[g[31],g[32],g[33]]);
GDABV1:matrix([g^"11",g^"12",g^"13"],
 [g^"21",g^"22",g^"23"],[g^"31",g^"32",
 g^"33"]);
GABVT1:matrix([g["1’1’"],g["1’2’"],
 g["1’3’"]],[g["2’1’"],g["2’2’"],
 g["2’3’"]], [g["3’1’"],g["3’2’"],
 g["3’3’"]]);
GDABVT1:matrix([g^"1’1’",g^"1’2’",
 g^"1’3’"],[g^"2’1’",g^"2’2’",g^"2’3’"],
 [g^"3’1’",g^"3’2’",g^"3’3’"]);
GABVT1=EBVT1.transpose(EBVT1);
GABV1=EBV1.transpose(EBV1);
GDABV1=EDBVT1.transpose(EDBVT1);
GDABV1=EDBV1.transpose(EDBV1);
```

座標変換後の基底ベクトルの計量テンソルは、

$$\begin{pmatrix} g_{1'1'} & g_{1'2'} & g_{1'3'} \\ g_{2'1'} & g_{2'2'} & g_{2'3'} \\ g_{3'1'} & g_{3'2'} & g_{3'3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{1'}^2 & e_{1'}\,e_{2'} & e_{1'}\,e_{3'} \\ e_{1'}\,e_{2'} & e_{2'}^2 & e_{2'}\,e_{3'} \\ e_{1'}\,e_{3'} & e_{2'}\,e_{3'} & e_{3'}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{1'} \\ e_{2'} \\ e_{3'} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_{1'} \\ e_{2'} \\ e_{3'} \end{pmatrix}^T \tag{4.6.76}$$

元の基底ベクトルの計量テンソルは、

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}^T \tag{4.6.77}$$

(4.6.54) 式の転置テンソルは、

$$\begin{pmatrix} \overrightarrow{e_{1'}} \\ \overrightarrow{e_{2'}} \\ \overrightarrow{e_{3'}} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \overrightarrow{e_1} \\ \overrightarrow{e_2} \\ \overrightarrow{e_3} \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} A_{1'}{}^{1} & A_{1'}{}^{2} & A_{1'}{}^{3} \\ A_{2'}{}^{1} & A_{2'}{}^{2} & A_{2'}{}^{3} \\ A_{3'}{}^{1} & A_{3'}{}^{2} & A_{3'}{}^{3} \end{pmatrix}^T \tag{4.6.78}$$

(4.6.76) 式に (4.6.54) 式と上式を代入すると、

$$\begin{pmatrix} g_{1'1'} & g_{1'2'} & g_{1'3'} \\ g_{2'1'} & g_{2'2'} & g_{2'3'} \\ g_{3'1'} & g_{3'2'} & g_{3'3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{1'}{}^{1} & A_{1'}{}^{2} & A_{1'}{}^{3} \\ A_{2'}{}^{1} & A_{2'}{}^{2} & A_{2'}{}^{3} \\ A_{3'}{}^{1} & A_{3'}{}^{2} & A_{3'}{}^{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \overrightarrow{e_1} \\ \overrightarrow{e_2} \\ \overrightarrow{e_3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \overrightarrow{e_1} \\ \overrightarrow{e_2} \\ \overrightarrow{e_3} \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} A_{1'}{}^{1} & A_{1'}{}^{2} & A_{1'}{}^{3} \\ A_{2'}{}^{1} & A_{2'}{}^{2} & A_{2'}{}^{3} \\ A_{3'}{}^{1} & A_{3'}{}^{2} & A_{3'}{}^{3} \end{pmatrix}^T$$

上式に (4.6.77) 式を代入すると、座標変換後の基底ベクトルの計量テンソル：$g_{i'j'}$ は、

$$\begin{pmatrix} g_{1'1'} & g_{1'2'} & g_{1'3'} \\ g_{2'1'} & g_{2'2'} & g_{2'3'} \\ g_{3'1'} & g_{3'2'} & g_{3'3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{1'}{}^{1} & A_{1'}{}^{2} & A_{1'}{}^{3} \\ A_{2'}{}^{1} & A_{2'}{}^{2} & A_{2'}{}^{3} \\ A_{3'}{}^{1} & A_{3'}{}^{2} & A_{3'}{}^{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{1'}{}^{1} & A_{1'}{}^{2} & A_{1'}{}^{3} \\ A_{2'}{}^{1} & A_{2'}{}^{2} & A_{2'}{}^{3} \\ A_{3'}{}^{1} & A_{3'}{}^{2} & A_{3'}{}^{3} \end{pmatrix}^T \tag{4.6.79}$$

座標変換後の双対基底ベクトルの計量テンソルは、

$$\begin{pmatrix} g^{1'1'} & g^{1'2'} & g^{1'3'} \\ g^{2'1'} & g^{2'2'} & g^{2'3'} \\ g^{3'1'} & g^{3'2'} & g^{3'3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{1'} \\ e^{2'} \\ e^{3'} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{1'} \\ e^{2'} \\ e^{3'} \end{pmatrix}^T \tag{4.6.80}$$

元の双対基底ベクトルの計量テンソルは、

$$\begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} & g^{13} \\ g^{21} & g^{22} & g^{23} \\ g^{31} & g^{32} & g^{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^1 \\ e^2 \\ e^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^1 \\ e^2 \\ e^3 \end{pmatrix}^T \tag{4.6.81}$$

(4.6.57) 式の転置テンソルは、

$$\begin{pmatrix} \overrightarrow{e^{1'}} \\ \overrightarrow{e^{2'}} \\ \overrightarrow{e^{3'}} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \overrightarrow{e^1} \\ \overrightarrow{e^2} \\ \overrightarrow{e^3} \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} B^{1'}{}_{1} & B^{1'}{}_{2} & B^{1'}{}_{3} \\ B^{2'}{}_{1} & B^{2'}{}_{2} & B^{2'}{}_{3} \\ B^{3'}{}_{1} & B^{3'}{}_{2} & B^{3'}{}_{3} \end{pmatrix}^T \tag{4.6.82}$$

(4.6.80) 式に (4.6.57) 式と (4.6.82) 式を代入すると、

$$\begin{pmatrix} g^{1'1'} & g^{1'2'} & g^{1'3'} \\ g^{2'1'} & g^{2'2'} & g^{2'3'} \\ g^{3'1'} & g^{3'2'} & g^{3'3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{1'}{}_{1} & B^{1'}{}_{2} & B^{1'}{}_{3} \\ B^{2'}{}_{1} & B^{2'}{}_{2} & B^{2'}{}_{3} \\ B^{3'}{}_{1} & B^{3'}{}_{2} & B^{3'}{}_{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^1 \\ e^2 \\ e^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^1 \\ e^2 \\ e^3 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} B^{1'}{}_{1} & B^{1'}{}_{2} & B^{1'}{}_{3} \\ B^{2'}{}_{1} & B^{2'}{}_{2} & B^{2'}{}_{3} \\ B^{3'}{}_{1} & B^{3'}{}_{2} & B^{3'}{}_{3} \end{pmatrix}^T$$

上式に (4.6.81) 式を代入すると、座標変換後の双対基底ベクトルの計量テンソル：$g^{i'j'}$ は、

$$\begin{pmatrix} g^{1'1'} & g^{1'2'} & g^{1'3'} \\ g^{2'1'} & g^{2'2'} & g^{2'3'} \\ g^{3'1'} & g^{3'2'} & g^{3'3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{1'}{}_{1} & B^{1'}{}_{2} & B^{1'}{}_{3} \\ B^{2'}{}_{1} & B^{2'}{}_{2} & B^{2'}{}_{3} \\ B^{3'}{}_{1} & B^{3'}{}_{2} & B^{3'}{}_{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} & g^{13} \\ g^{21} & g^{22} & g^{23} \\ g^{31} & g^{32} & g^{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B^{1'}{}_{1} & B^{1'}{}_{2} & B^{1'}{}_{3} \\ B^{2'}{}_{1} & B^{2'}{}_{2} & B^{2'}{}_{3} \\ B^{3'}{}_{1} & B^{3'}{}_{2} & B^{3'}{}_{3} \end{pmatrix}^T \tag{4.6.83}$$

4.6.6.5　ベクトル内積の座標変換不変性

座標変換されたベクトル：$\overrightarrow{P}$, $\overrightarrow{Q}$ は (4.6.61) 式から、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{P} &= \overrightarrow{e_{3'}} P^{3'} + \overrightarrow{e_{2'}} P^{2'} + \overrightarrow{e_{1'}} P^{1'} \\ \overrightarrow{Q} &= \overrightarrow{e_{3'}} Q^{3'} + \overrightarrow{e_{2'}} Q^{2'} + \overrightarrow{e_{1'}} Q^{1'}\end{aligned} \tag{4.6.84}$$

座標変換されたベクトル：$\overrightarrow{P}$, $\overrightarrow{Q}$ 内積は (4.6.40) 式から、

$$\overrightarrow{P} \cdot \overrightarrow{Q} = \begin{pmatrix} P^{1'} \\ P^{2'} \\ P^{3'} \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} g_{1'1'} & g_{1'2'} & g_{1'3'} \\ g_{2'1'} & g_{2'2'} & g_{2'3'} \\ g_{3'1'} & g_{3'2'} & g_{3'3'} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Q^{1'} \\ Q^{2'} \\ Q^{3'} \end{pmatrix} \tag{4.6.85}$$

(4.6.79) 式から、

$$\overrightarrow{P} \cdot \overrightarrow{Q} = \begin{pmatrix} P^{1'} \\ P^{2'} \\ P^{3'} \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} A_{1'}{}^1 & A_{1'}{}^2 & A_{1'}{}^3 \\ A_{2'}{}^1 & A_{2'}{}^2 & A_{2'}{}^3 \\ A_{3'}{}^1 & A_{3'}{}^2 & A_{3'}{}^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{1'}{}^1 & A_{1'}{}^2 & A_{1'}{}^3 \\ A_{2'}{}^1 & A_{2'}{}^2 & A_{2'}{}^3 \\ A_{3'}{}^1 & A_{3'}{}^2 & A_{3'}{}^3 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} Q^{1'} \\ Q^{2'} \\ Q^{3'} \end{pmatrix} \tag{4.6.86}$$

(4.6.68) 式から、

$$\begin{pmatrix} P^{1'} \\ P^{2'} \\ P^{3'} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} P^1 \\ P^2 \\ P^3 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} B^{1'}{}_1 & B^{1'}{}_2 & B^{1'}{}_3 \\ B^{2'}{}_1 & B^{2'}{}_2 & B^{2'}{}_3 \\ B^{3'}{}_1 & B^{3'}{}_2 & B^{3'}{}_3 \end{pmatrix}^T , \quad \begin{pmatrix} Q^{1'} \\ Q^{2'} \\ Q^{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{1'}{}_1 & B^{1'}{}_2 & B^{1'}{}_3 \\ B^{2'}{}_1 & B^{2'}{}_2 & B^{2'}{}_3 \\ B^{3'}{}_1 & B^{3'}{}_2 & B^{3'}{}_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Q^1 \\ Q^2 \\ Q^3 \end{pmatrix}$$

(4.6.86) 式に上式を代入すると、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{P} \cdot \overrightarrow{Q} = &\begin{pmatrix} P^1 \\ P^2 \\ P^3 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} B^{1'}{}_1 & B^{1'}{}_2 & B^{1'}{}_3 \\ B^{2'}{}_1 & B^{2'}{}_2 & B^{2'}{}_3 \\ B^{3'}{}_1 & B^{3'}{}_2 & B^{3'}{}_3 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} A_{1'}{}^1 & A_{1'}{}^2 & A_{1'}{}^3 \\ A_{2'}{}^1 & A_{2'}{}^2 & A_{2'}{}^3 \\ A_{3'}{}^1 & A_{3'}{}^2 & A_{3'}{}^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} \\ &\cdot \begin{pmatrix} A_{1'}{}^1 & A_{1'}{}^2 & A_{1'}{}^3 \\ A_{2'}{}^1 & A_{2'}{}^2 & A_{2'}{}^3 \\ A_{3'}{}^1 & A_{3'}{}^2 & A_{3'}{}^3 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} B^{1'}{}_1 & B^{1'}{}_2 & B^{1'}{}_3 \\ B^{2'}{}_1 & B^{2'}{}_2 & B^{2'}{}_3 \\ B^{3'}{}_1 & B^{3'}{}_2 & B^{3'}{}_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Q^1 \\ Q^2 \\ Q^3 \end{pmatrix}\end{aligned} \tag{4.6.87}$$

(4.6.61) 式から、

$$\begin{pmatrix} B^{1'}{}_1 & B^{1'}{}_2 & B^{1'}{}_3 \\ B^{2'}{}_1 & B^{2'}{}_2 & B^{2'}{}_3 \\ B^{3'}{}_1 & B^{3'}{}_2 & B^{3'}{}_3 \end{pmatrix}^T = \left(\left(\begin{pmatrix} A_{1'}{}^1 & A_{1'}{}^2 & A_{1'}{}^3 \\ A_{2'}{}^1 & A_{2'}{}^2 & A_{2'}{}^3 \\ A_{3'}{}^1 & A_{3'}{}^2 & A_{3'}{}^3 \end{pmatrix}^T \right)^{-1} \right)^T = \begin{pmatrix} A_{1'}{}^1 & A_{1'}{}^2 & A_{1'}{}^3 \\ A_{2'}{}^1 & A_{2'}{}^2 & A_{2'}{}^3 \\ A_{3'}{}^1 & A_{3'}{}^2 & A_{3'}{}^3 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} B^{1'}{}_1 & B^{1'}{}_2 & B^{1'}{}_3 \\ B^{2'}{}_1 & B^{2'}{}_2 & B^{2'}{}_3 \\ B^{3'}{}_1 & B^{3'}{}_2 & B^{3'}{}_3 \end{pmatrix}^{-1} = \left(\left(\begin{pmatrix} A_{1'}{}^1 & A_{1'}{}^2 & A_{1'}{}^3 \\ A_{2'}{}^1 & A_{2'}{}^2 & A_{2'}{}^3 \\ A_{3'}{}^1 & A_{3'}{}^2 & A_{3'}{}^3 \end{pmatrix}^T \right)^{-1} \right)^{-1} = \begin{pmatrix} A_{1'}{}^1 & A_{1'}{}^2 & A_{1'}{}^3 \\ A_{2'}{}^1 & A_{2'}{}^2 & A_{2'}{}^3 \\ A_{3'}{}^1 & A_{3'}{}^2 & A_{3'}{}^3 \end{pmatrix}^T$$

(4.6.87) 式に上式を代入すると下記となり、元のベクトル内積となり、内積結果は座標変換しても変わらない。

$$\overrightarrow{P} \cdot \overrightarrow{Q} = \begin{pmatrix} P^1 \\ P^2 \\ P^3 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Q^1 \\ Q^2 \\ Q^3 \end{pmatrix}$$

いま、座標変換されたベクトル：$\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{B}$ を座標変換された微小変位ベクトル：$\overrightarrow{dr'}$ としてその長さの二乗：ds^2 を求めると、上式から下記となり、座標変換しても長さは変わらない。

$$ds^2 = \overrightarrow{dr'} \cdot \overrightarrow{dr'} = \begin{pmatrix} dr'^{1'} \\ dr'^{2'} \\ dr'^{3'} \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} g_{1'1'} & g_{1'2'} & g_{1'3'} \\ g_{2'1'} & g_{2'2'} & g_{2'3'} \\ g_{3'1'} & g_{3'2'} & g_{3'3'} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dr'^{1'} \\ dr'^{2'} \\ dr'^{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dr^1 \\ dr^2 \\ dr^3 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dr^1 \\ dr^2 \\ dr^3 \end{pmatrix} = \overrightarrow{dr} \cdot \overrightarrow{dr} \tag{4.6.88}$$

4.6.7 テンソルの内積

テンソル : A とテンソル : B のテンソルの内積を $A:B$ で表す。計算は $A_{ij} \times B_{ij}$ で行う。このため、A,B の行の数 : m_a, m_b と列の数 : n_a, n_b はそれぞれ一致 : $m_a = m_b, n_a = n_b$ しなければならない。Maxima では＊記号を使って下記のように実行する。

```
kill(all);
A1:matrix([A[11],A[12],A[13]],[A[21],
 A[22],A[23]],[A[31],A[32],A[33]]);
B1:matrix([B[11],B[12],B[13]],[B[21],
 B[22],B[23]],[B[31],B[32],B[33]]);
A1*B1;
```

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{pmatrix}$$

$$A:B = \begin{pmatrix} A_{11}\,B_{11} & A_{12}\,B_{12} & A_{13}\,B_{13} \\ A_{21}\,B_{21} & A_{22}\,B_{22} & A_{23}\,B_{23} \\ A_{31}\,B_{31} & A_{32}\,B_{32} & A_{33}\,B_{33} \end{pmatrix}$$

4.6.8 クロネッカー積

クロネッカー積は行列の積と異なり、kronecker_product 関数を使って、下記のようにして得られる。
kronecker_product 関数を使うには、linearalgebra を load しておく必要がある。

$$kronecker\_product(テンソル_1,\, テンソル_2)$$

クロネッカー積は下記の演算で得られる。C を m,n のテンソル、D をテンソルとすると、

$$C \otimes D = \begin{pmatrix} c_{11}D & \cdots & c_{1n}D \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1}D & \cdots & c_{mn}D \end{pmatrix}$$

```
kill(all);
load("linearalgebra")$
A1:matrix([A[1]],[A[2]],[A[3]]);
B1:matrix([B[1]],[B[2]],[B[3]]);
C1:matrix([C[1]],[C[2]]);
D1:matrix([D[11],D[12],D[13]],[D[21],
 D[22],D[23]],[D[31],D[32],D[33]]);
E1:matrix([E[11],E[12]],[E[21],E[22]]);
```

テンソル：$A,B,C,D.E$ を下記とする。

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$
$$D = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{pmatrix} \tag{4.6.89}$$

```
A1.transpose(B1);
```

これまでのベクトルの内積を使用して、

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1\,B_1 & A_1\,B_2 & A_1\,B_3 \\ B_1\,A_2 & A_2\,B_2 & A_2\,B_3 \\ B_1\,A_3 & B_2\,A_3 & A_3\,B_3 \end{pmatrix}$$

```
kronecker_product(A1,transpose(B1));
```

kronecker_product 関数を使用して求めると、上記と同じ結果が得られる。

$$A \otimes B^T = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \end{pmatrix} \\ A_2 \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \end{pmatrix} \\ A_3 \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1\,B_1 & A_1\,B_2 & A_1\,B_3 \\ B_1\,A_2 & A_2\,B_2 & A_2\,B_3 \\ B_1\,A_3 & B_2\,A_3 & A_3\,B_3 \end{pmatrix}$$

以下に例を示す。

```
A1.C1;
kronecker_product(A1,transpose(C1));
```

kronecker_product 関数を使用して下記を求める。ベクトルの内積では得られない。

$$A \otimes C^T = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \end{pmatrix} \\ A_2 \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \end{pmatrix} \\ A_3 \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1\,C_1 & A_1\,C_2 \\ C_1\,A_2 & A_2\,C_2 \\ C_1\,A_3 & C_2\,A_3 \end{pmatrix}$$

```
kronecker_product(transpose(A1),C1);
```

kronecker_product 関数を使用して下記を求める。

$$A^T \otimes C = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} & A_2 \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} & A_3 \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1\,C_1 & C_1\,A_2 & C_1\,A_3 \\ A_1\,C_2 & A_2\,C_2 & C_2\,A_3 \end{pmatrix}$$

```
kronecker_product(A1,C1);
```

kronecker_product 関数を使用して下記を求める。

$$
\begin{aligned}
A^T \otimes C &= \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} A_1 \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \\ A_2 \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \\ A_3 \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1\,C_1 \\ A_1\,C_2 \\ C_1\,A_2 \\ A_2\,C_2 \\ C_1\,A_3 \\ C_2\,A_3 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

```
kronecker_product(transpose(A1),
 transpose(C1));
```

```
kronecker_product(A1,E1);
```

kronecker_product 関数を使用して下記を求める。

$$
\begin{aligned}
E \otimes D &= \begin{pmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} E_{11} \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{pmatrix} & E_{12} \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{pmatrix} \\ E_{21} \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{pmatrix} & E_{22} \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} D_{11}\,E_{11} & E_{11}\,D_{12} & E_{11}\,D_{13} & D_{11}\,E_{12} & D_{12}\,E_{12} & E_{12}\,D_{13} \\ E_{11}\,D_{21} & E_{11}\,D_{22} & E_{11}\,D_{23} & E_{12}\,D_{21} & E_{12}\,D_{22} & E_{12}\,D_{23} \\ E_{11}\,D_{31} & E_{11}\,D_{32} & E_{11}\,D_{33} & E_{12}\,D_{31} & E_{12}\,D_{32} & E_{12}\,D_{33} \\ D_{11}\,E_{21} & D_{12}\,E_{21} & D_{13}\,E_{21} & D_{11}\,E_{22} & D_{12}\,E_{22} & D_{13}\,E_{22} \\ D_{21}\,E_{21} & E_{21}\,D_{22} & E_{21}\,D_{23} & D_{21}\,E_{22} & D_{22}\,E_{22} & E_{22}\,D_{23} \\ E_{21}\,D_{31} & E_{21}\,D_{32} & E_{21}\,D_{33} & E_{22}\,D_{31} & E_{22}\,D_{32} & E_{22}\,D_{33} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

kronecker_product 関数を使用して下記を求める。

$$
\begin{aligned}
A^T \otimes C^T &= \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} A_1 \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \end{pmatrix} & A_2 \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \end{pmatrix} & A_3 \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} A_1\,C_1 & A_1\,C_2 & C_1\,A_2 & A_2\,C_2 & C_1\,A_3 & C_2\,A_3 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

```
kronecker_product(A1,E1);
```

kronecker_product 関数を使用して下記を求める。

$$
\begin{aligned}
A \otimes E &= \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} A_1 \begin{pmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{pmatrix} \\ A_2 \begin{pmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{pmatrix} \\ A_3 \begin{pmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1\,E_{11} & A_1\,E_{12} \\ A_1\,E_{21} & A_1\,E_{22} \\ A_2\,E_{11} & A_2\,E_{12} \\ A_2\,E_{21} & A_2\,E_{22} \\ A_3\,E_{11} & A_3\,E_{12} \\ A_3\,E_{21} & A_3\,E_{22} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

4.6.9　テンソル積

(1) ベクトルのテンソル積の定義

n 次元線形空間 : A とし、その基底 : $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \cdots \overrightarrow{a_n}$、ベクトル : $\overrightarrow{A}$ とする。また、m 次元線形空間 : B とし、その基底 : $\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \cdots \overrightarrow{b_m}$、ベクトル : $\overrightarrow{B}$ とする。$\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ は、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A} &= A^1\overrightarrow{a_1} + A^2\overrightarrow{a_2} + \cdots + A^n\overrightarrow{a_n}\\ \overrightarrow{B} &= B^1\overrightarrow{b_1} + B^2\overrightarrow{b_2} + \cdots + B^n\overrightarrow{b_m}\end{aligned} \tag{4.6.90}$$

上記のテンソル積 : $A \otimes B$ を以下で定義する。

$$A \otimes B = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} A^i\,B^j\,\overrightarrow{a_i} \otimes \overrightarrow{b_j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} S^{i\,j}\,\overrightarrow{a_i} \otimes \overrightarrow{b_j} \tag{4.6.91}$$

```
kill(all);
load("vect")$
A1:A=A^"1"*a[1]+A^"2"*a[2]+A^"3"*a[3];
AD1:AD=A^"1'"*a[1]+A^"2'"*a[2]+A^"3'"
 *a[3];
B1:B=B^"1"*b[1]+B^"2"*b[2]+B^"3"*b[3];
C1:C=C^"1"*c[1]+C^"2"*c[2]+C^"3"*c[3];
MA1:matrix([A^"1"],[A^"2"],[A^"3"]);
MAD1:matrix([A^"1'"],[A^"2'"],
 [A^"3'"]);
MAT1:matrix([a[1]],[a[2]],[a[3]]);
MB1:matrix([B^"1"],[B^"2"],[B^"3"]);
MBT1:matrix([b[1]],[b[2]],[b[3]]);
MC1:matrix([C^"1"],[C^"2"],[C^"3"]);
MCT1:matrix([c[1]],[c[2]],[c[3]]);
A=transpose(MA1).(MAT1);
B=transpose(MB1).(MBT1);
SM1:A1*B1;
expand(%);
AB1:MA1.transpose(MB1);
ABT1:MAT1.transpose(MBT1);
AB1*ABT1;
SM2:sum(sum(%[i][j],i,1,3),j,1,3);
rhs(SM1)-SM2;
factor(%);
```

いま、ベクトル : $\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}$ を下記とすると、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A} &= \overrightarrow{a_3}\,A^3 + \overrightarrow{a_2}\,A^2 + \overrightarrow{a_1}\,A^1\\ \overrightarrow{B} &= \overrightarrow{b_3}\,B^3 + \overrightarrow{b_2}\,B^2 + \overrightarrow{b_1}\,B^1\end{aligned} \tag{4.6.92}$$

線形空間 : A の基底 : $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ と線形空間 : B の基底 : $\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{b_3}$ を基に $a_1 \otimes b_1, a1 \otimes b_2, a_1 \otimes b_3, b_1 \otimes a_2, a_2 \otimes b_2, a_2 \otimes b_3, b_1 \otimes a_3, b_2 \otimes a_3, a_3 \otimes b_3$ の 9 個の基底とした線形空間 $A \otimes B$ とし、A と B のテンソル積という。具体的には、このテンソル積は下記の $\overrightarrow{A}$ と $\overrightarrow{B}$ の積の展開で表わされる。

$$\begin{aligned}A \otimes B =& A^3\,B^3\,\overrightarrow{a_3} \otimes \overrightarrow{b_3} + A^2\,B^3\,\overrightarrow{a_2} \otimes \overrightarrow{b_3}\\ &+ A^1\,B^3\,\overrightarrow{a_1} \otimes \overrightarrow{b_3} + A^3\,B^2\,\overrightarrow{a_3} \otimes \overrightarrow{b_2}\\ &+ A^2\,B^2\,\overrightarrow{a_2} \otimes \overrightarrow{b_2} + A^1\,B^2\,\overrightarrow{a_1} \otimes \overrightarrow{b_2}\\ &+ A^3\,B^1\,\overrightarrow{a_3} \otimes \overrightarrow{b_1} + A^2\,B^1\,\overrightarrow{a_2} \otimes \overrightarrow{b_1}\\ &+ A^1\,B^1\,\overrightarrow{a_1} \otimes \overrightarrow{b_1}\\ =& \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} A^i\,B^j\,\overrightarrow{a_i} \otimes \overrightarrow{b_j}\end{aligned} \tag{4.6.93}$$

$S^{i\,j} = A^i\,B^j$ は下記のベクトルの内積で得られる。

$$S^{i\,j} = \begin{pmatrix}A^1\\A^2\\A^3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}B^1\\B^2\\B^3\end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix}A^1\,B^1 & A^1\,B^2 & A^1\,B^3\\ A^2\,B^1 & A^2\,B^2 & A^2\,B^3\\ A^3\,B^1 & A^3\,B^2 & A^3\,B^3\end{pmatrix} \tag{4.6.94}$$

上記の係数に対応した 9 個の基底も同様に基底の内積で得られる。

$$\begin{pmatrix}\overrightarrow{a_1}\\\overrightarrow{a_2}\\\overrightarrow{a_3}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\overrightarrow{b_1}\\\overrightarrow{b_2}\\\overrightarrow{b_3}\end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix}\overrightarrow{a_1} \otimes \overrightarrow{b_1} & \overrightarrow{a_1} \otimes \overrightarrow{b_2} & \overrightarrow{a_1} \otimes \overrightarrow{b_3}\\ \overrightarrow{a_2} \otimes \overrightarrow{b_1} & \overrightarrow{a_2} \otimes \overrightarrow{b_2} & \overrightarrow{a_2} \otimes \overrightarrow{b_3}\\ \overrightarrow{a_3} \otimes \overrightarrow{b_1} & \overrightarrow{a_3} \otimes \overrightarrow{b_2} & \overrightarrow{a_3} \otimes \overrightarrow{b_3}\end{pmatrix} \tag{4.6.95}$$

以上から、$A \otimes B$ の各項は、(4.6.94) 式と (4.6.95) 式のテンソルの内積で得られる。

(2) ベクトルのテンソル積の双線形性

いま、ベクトル：$\overrightarrow{A}, \overrightarrow{A'}, \overrightarrow{B}$ を下記とし、$\overrightarrow{A}, \overrightarrow{A'}$ は共通の基底とする。ここで、P, Q は定数とする。

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A} &= A^1\overrightarrow{a_1} + A^2\overrightarrow{a_2} + \cdots + A^n\overrightarrow{a_n} \\ \overrightarrow{A'} &= A^{1'}\overrightarrow{a_1} + A^{2'}\overrightarrow{a_2} + \cdots + A^{n'}\overrightarrow{a_n} \\ \overrightarrow{B} &= B^1\overrightarrow{b_1} + B^2\overrightarrow{b_2} + \cdots + B^n\overrightarrow{b_m}\end{aligned} \tag{4.6.96}$$

上式から、

$$\begin{aligned}&\left(P\,\overrightarrow{A} + Q\,\overrightarrow{A}^{'}\right) \otimes B \\ &= \left(P\sum_{i=1}^{n} A^i\,\overrightarrow{a_i} + Q\sum_{i=1}^{n} A^{i'}\,\overrightarrow{a_i}\right) \otimes \left(\sum_{j=1}^{m} B^j\,\overrightarrow{b_j}\right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n}\left(P\,A^i + Q\,A^{i'}\right)\overrightarrow{a_i}\right) \otimes \left(\sum_{j=1}^{m} B^j\,\overrightarrow{b_j}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} P\,A^i\,B^j\,\overrightarrow{a_i} \otimes \overrightarrow{b_j} \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} Q\,A^{i'}\,B^j\,\overrightarrow{a_i} \otimes \overrightarrow{b_j} \\ &= P\,\overrightarrow{A} \otimes B + Q\,\overrightarrow{A}^{'} \otimes B\end{aligned} \tag{4.6.97}$$

(3) ベクトルのテンソル積の非可換性

$$A \otimes B \neq B \otimes A \tag{4.6.98}$$

いま、(4.6.96) 式の共通の基盤ベクトルのテンソル積でも、一般に $A^iA^{j'} \neq A^{i'}A^j$ であるから可換性はない。

(4) テンソル空間

```
kill(all);
A1:A=A^"1"*e[1]+A^"2"*e[2]+A^"3"*e[3];
B1:B=B^"1"*e[1]+B^"2"*e[2];
C1:C=C^"1"*e[1]+C^"3"*e[3];
D1:D=D[1]*e^"1"+D[2]*e^"2";
A1*B1;
AB1:expand(%);
```

反変ベクトル：A, B を下記とすると、

$$A = \overrightarrow{e_3}\,A^3 + \overrightarrow{e_2}\,A^2 + \overrightarrow{e_1}\,A^1$$

$$B = \overrightarrow{e_2}\,B^2 + \overrightarrow{e_1}\,B^1$$

上記のテンソル積は、

$$\begin{aligned}A \otimes B =& \left(A^3\overrightarrow{e_3} + A^2\overrightarrow{e_2} + A^1\overrightarrow{e_1}\right)\left(B^2\overrightarrow{e_2} + B^1\overrightarrow{e_1}\right) \\ =& A^3\,B^2\overrightarrow{e_3} \otimes \overrightarrow{e_2} + A^2\,B^2\overrightarrow{e_2} \otimes \overrightarrow{e_2} \\ &+ A^1\,B^2\overrightarrow{e_1} \otimes \overrightarrow{e_2} + A^3\,B^1\overrightarrow{e_3} \otimes \overrightarrow{e_1} \\ &+ A^2\,B^1\overrightarrow{e_2} \otimes \overrightarrow{e_1} + A^1\,B^1\overrightarrow{e_1} \otimes \overrightarrow{e_1}\end{aligned}$$

上記の $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$ などの 2 個の基底ベクトルで作る $\overrightarrow{e_1} \otimes \overrightarrow{e_2}$ などの 6 個の組み合わせを基底とした 6 次元線形空間を $T^2(V)$ と表し、2 階の反変テンソル空間という。

```
AB1*C1;
expand(%);
```

反変ベクトル：C を下記とすると、

$$C = C^3\overrightarrow{e_3} + C^1\overrightarrow{e_1}$$

$$\begin{aligned}&(A \otimes B) \otimes C \\ &\quad= \left(A^3\,B^2\overrightarrow{e_3} \otimes \overrightarrow{e_2} + A^2\,B^2\overrightarrow{e_2} \otimes \overrightarrow{e_2}\right. \\ &\qquad + A^1\,B^2\overrightarrow{e_1} \otimes \overrightarrow{e_2} + A^3\,B^1\overrightarrow{e_3} \otimes \overrightarrow{e_1} \\ &\qquad \left.+ A^2\,B^1\overrightarrow{e_2} \otimes \overrightarrow{e_1} + A^1\,B^1\overrightarrow{e_1} \otimes \overrightarrow{e_1}\right) \\ &\qquad \otimes \left(C^3\overrightarrow{e_3} + C^1\overrightarrow{e_1}\right) \\ &\quad= A^3\,B^2\,C^3\overrightarrow{e_3} \otimes \overrightarrow{e_2} \otimes \overrightarrow{e_3} + A^2\,B^2\,C^3\overrightarrow{e_2} \otimes \overrightarrow{e_2} \otimes \overrightarrow{e_3} \\ &\qquad + A^1\,B^2\,C^3\overrightarrow{e_1} \otimes \overrightarrow{e_2} \otimes \overrightarrow{e_3} + A^3\,B^1\,C^3\overrightarrow{e_3} \otimes \overrightarrow{e_1} \otimes \overrightarrow{e_3} \\ &\qquad + A^2\,B^1\,C^3\overrightarrow{e_2} \otimes \overrightarrow{e_1} \otimes \overrightarrow{e_3} + A^1\,B^1\,C^3\overrightarrow{e_1} \otimes \overrightarrow{e_1} \otimes \overrightarrow{e_3} \\ &\qquad + A^3\,B^2\,C^1\overrightarrow{e_3} \otimes \overrightarrow{e_2} \otimes \overrightarrow{e_1} + A^2\,B^2\,C^1\overrightarrow{e_2} \otimes \overrightarrow{e_2} \otimes \overrightarrow{e_1} \\ &\qquad + A^1\,B^2\,C^1\overrightarrow{e_1} \otimes \overrightarrow{e_2} \otimes \overrightarrow{e_1} + A^3\,B^1\,C^1\overrightarrow{e_3} \otimes \overrightarrow{e_1} \otimes \overrightarrow{e_1} \\ &\qquad + A^2\,B^1\,C^1\overrightarrow{e_2} \otimes \overrightarrow{e_1} \otimes \overrightarrow{e_1} + A^1\,B^1\,C^1\overrightarrow{e_1} \otimes \overrightarrow{e_1} \otimes \overrightarrow{e_1}\end{aligned}$$

上記の $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ などの 3 個の基底ベクトルで作る $\overrightarrow{e_1} \otimes \overrightarrow{e_2} \otimes \overrightarrow{e_3}$ などの 12 個の組み合わせを基底とした 12

次元線形空間を $T^3(V)$ と表し、3 階の反変テンソル空間という。また、共変ベクトルのみによるテンソル積の空間を共変テンソル空間という。

```
A1*D1;
expand(%);
```

共変ベクトル：D を下記とすると、

$$D = D_2\,\overrightarrow{e^2} + D_1\,\overrightarrow{e^1}$$

反変テンソル : A と共変ベクトル : D のテンソル積は、

$$\begin{aligned}A \otimes D =& \left(A^3\overrightarrow{e_3} + A^2\overrightarrow{e_2} + A^1\overrightarrow{e_1}\right) \otimes \left(D_2\overrightarrow{e^2} + D_1\overrightarrow{e^1}\right)\\ =& A^3 D_2\overrightarrow{e_3}\,\overrightarrow{e^2} +, A^3 D_1\overrightarrow{e_3}\,\overrightarrow{e^1}\\ &+ A^2 D_2\overrightarrow{e_2}\,\overrightarrow{e^2} + A^2 D_1\overrightarrow{e_2}\,\overrightarrow{e^1}\\ &+ A^1 D_2\overrightarrow{e_1}\,\overrightarrow{e^2} + A^1 D_1\overrightarrow{e_1}\,\overrightarrow{e^1}\end{aligned}$$

上記で 1 個の基底ベクトルと 1 個の双対基底ベクトルのテンソル積の 6 個の組み合わせを基底とした 6 次元線形空間を、$T_1^1(V)$ と表し、1 階反変・1 階共変のテンソル空間という。

4.6.10 テンソル積の座標変換 (基底の取り換え)

下記のテンソル積の座標変換を行う。

$$V=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}S^{i\,j}\,\overrightarrow{e_i}\otimes\overrightarrow{e_j} \tag{4.6.99}$$

```
kill(all);
load("vect")$
load("linearalgebra")$
load(itensor)$
EBV2:matrix([e[1]],[e[2]]);
EBVT2:matrix([e["1'"]],[e["2'"]]);
ATRT2:matrix([A["1'"]^("  1"),A["1'"]
 ^("  2")],[A["2'"]^("  1"),A["2'"]
 ^("  2")]);
BTRT2:matrix([Av["1"]^("  1'"),
 Av["1"]^("  2'")],[Av["2"]
 ^("  1'"),Av["2"]^("  2'")]);
S2:matrix([S^("11"),S^("12")],[S^("21"),
 S^("22")]);
TRE2:EBVT2=ATRT2.EBV2;
TRE21:EBV2=BTRT2.EBVT2;
TRE22:subst([e=f,Av=D],TRE21);
EBV22:subst([e=f,Av=D],EBV2);
BTRT22:subst([e=f,Av=D],BTRT2);
EBVT22:subst([e=f,Av=D],EBVT2);
kronecker_product(lhs(TRE21),transpose(
 lhs(TRE22)))=kronecker_product(rhs(TRE21),
 transpose(rhs(TRE22)));
```

```
S2*%;
sum(sum(lhs(%)[i][j],i,1,2),j,1,2)=sum(sum
 (rhs(%)[i][j],i,1,2),j,1,2);
Y1:expand(%);
```

m,n が大きい数字では式が煩雑になるので、$m=2,\,n=2$ の場合について、下記の $\overrightarrow{e_i}\to\overrightarrow{e_{i'}}$ の座標変換を行ったときのテンソル積 : V を求める。$\overrightarrow{e_i}$ と $\overrightarrow{e_{i'}}$ の関係は (4.6.54) 式から、

$$\begin{pmatrix}\overrightarrow{e_{1'}}\\ \overrightarrow{e_{2'}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_{1'}{}^{1} & A_{1'}{}^{2}\\ A_{2'}{}^{1} & A_{2'}{}^{2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\overrightarrow{e_1}\\ \overrightarrow{e_2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e_2\,A_{1'}{}^{2}+e_1\,A_{1'}{}^{1}\\ e_2\,A_{2'}{}^{2}+e_1\,A_{2'}{}^{1}\end{pmatrix} \tag{4.6.100}$$

上式から $\overrightarrow{e_i}$ を求めるには (4.6.55) 式から、

$$\begin{pmatrix}\overrightarrow{e_1}\\ \overrightarrow{e_2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}Av_1{}^{1'} & Av_1{}^{2'}\\ Av_2{}^{1'} & Av_2{}^{2'}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\overrightarrow{e_{1'}}\\ \overrightarrow{e_{2'}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}Av_1{}^{2'}\,e_{2'}+Av_1{}^{1'}\,e_{1'}\\ e_{1'}\,Av_2{}^{1'}+Av_2{}^{2'}\,e_{2'}\end{pmatrix}$$

$$\text{ここで、}\begin{pmatrix}Av_1{}^{1'} & Av_1{}^{2'}\\ Av_2{}^{1'} & Av_2{}^{2'}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_{1'}{}^{1} & A_{1'}{}^{2}\\ A_{2'}{}^{1} & A_{2'}{}^{2}\end{pmatrix}^{-1} \tag{4.6.101}$$

上式を基に $\overrightarrow{e_i}\otimes\overrightarrow{e_j}$ を求めると下記となる。

$$\begin{aligned}\overrightarrow{e_i}\otimes\overrightarrow{e_j}&=\begin{pmatrix}\overrightarrow{e_1}\\ \overrightarrow{e_2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\overrightarrow{e_1}\\ \overrightarrow{e_2}\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}e_1^2 & e_1\,e_2\\ e_2\,e_1 & e_2^2\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}Av_1{}^{2'}\,e_{2'}+Av_1{}^{1'}\,e_{1'}\\ e_{1'}\,Av_2{}^{1'}+Av_2{}^{2'}\,e_{2'}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}Av_1{}^{2'}\,e_{2'}+Av_1{}^{1'}\,e_{1'}\\ e_{1'}\,Av_2{}^{1'}+Av_2{}^{2'}\,e_{2'}\end{pmatrix}^T\\
&=\begin{pmatrix}Av_1{}^{1'} & Av_1{}^{2'}\\ Av_2{}^{1'} & Av_2{}^{2'}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\overrightarrow{e_{1'}}\\ \overrightarrow{e_{2'}}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\overrightarrow{e_{1'}}\\ \overrightarrow{e_{2'}}\end{pmatrix}^T\cdot\begin{pmatrix}Av_1{}^{1'} & Av_1{}^{2'}\\ Av_2{}^{1'} & Av_2{}^{2'}\end{pmatrix}^T\\
&=\begin{pmatrix}Av_1{}^{1'} & Av_1{}^{2'}\\ Av_2{}^{1'} & Av_2{}^{2'}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\overrightarrow{e_{1'}^2} & \overrightarrow{e_{1'}}\,\overrightarrow{e_{2'}}\\ \overrightarrow{e_{2'}}\,\overrightarrow{e_{1'}} & \overrightarrow{e_{2'}^2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}Av_1{}^{1'} & Av_1{}^{2'}\\ Av_2{}^{1'} & Av_2{}^{2'}\end{pmatrix}^T\end{aligned} \tag{4.6.102}$$

上式は計量テンソルの座標変換 : (4.6.83) 式と同じである。上式を展開するにあたり、テンソル積の基底 : $\overrightarrow{e_i}\otimes\overrightarrow{e_j}$ でその前後を区別する必要があることと、簡略化するため、ベクトル表記の $\rightarrow$ を省き、次 : $\overrightarrow{e_i}\otimes\overrightarrow{e_j}\to e_i\,f_j$ のように書き換える。即ち、e_i は前の、f_j は後ろのテンソル積の基底とする。(4.6.102) 式を展開すると、

$$\begin{pmatrix}e_1\,f_1 & e_1\,f_2\\ f_1\,e_2 & e_2\,f_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\left(Av_1{}^{2'}\,e_{2'}+Av_1{}^{1'}\,e_{1'}\right)\left(Av_1{}^{2'}\,f_{2'}+Av_1{}^{1'}\,f_{1'}\right) & \left(Av_1{}^{2'}\,e_{2'}+Av_1{}^{1'}\,e_{1'}\right)\left(f_{1'}\,Av_2{}^{1'}+Av_2{}^{2'}\,f_{2'}\right)\\ \left(Av_1{}^{2'}\,f_{2'}+Av_1{}^{1'}\,f_{1'}\right)\left(e_{1'}\,Av_2{}^{1'}+Av_2{}^{2'}\,e_{2'}\right) & \left(e_{1'}\,Av_2{}^{1'}+Av_2{}^{2'}\,e_{2'}\right)\left(f_{1'}\,Av_2{}^{1'}+Av_2{}^{2'}\,f_{2'}\right)\end{pmatrix}$$

$S^{i\,j}$ を下記として、上式に次式のテンソル内積をし、各項目の和をとると (4.6.102) 式の V が得られ、次式となる。

$$S=\begin{pmatrix}S^{11} & S^{12}\\ S^{21} & S^{22}\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}V=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}S^{i\,j}\,\overrightarrow{e_i}\otimes\overrightarrow{e_j}&=e_2\,f_2\,S^{22}+f_1\,e_2\,S^{21}+e_1\,f_2\,S^{12}+e_1\,f_1\,S^{11}\\
=&e_{1'}\,f_{1'}\,Av_2{}^{1'}\,Av_2{}^{1'}\,S^{22}+e_{1'}\,Av_2{}^{1'}\,Av_2{}^{2'}\,f_{2'}\,S^{22}+Av_2{}^{2'}\,Av_2{}^{2'}\,e_{2'}\,f_{2'}\,S^{22}+f_{1'}\,Av_2{}^{2'}\,Av_2{}^{1'}\,e_{2'}\,S^{22}\\
&+Av_1{}^{1'}\,e_{1'}\,f_{1'}\,Av_2{}^{1'}\,S^{21}+Av_1{}^{2'}\,e_{1'}\,Av_2{}^{1'}\,f_{2'}\,S^{21}+Av_1{}^{2'}\,Av_2{}^{2'}\,e_{2'}\,f_{2'}\,S^{21}+Av_1{}^{1'}\,f_{1'}\,Av_2{}^{2'}\,e_{2'}\,S^{21}\\
&+Av_1{}^{1'}\,e_{1'}\,f_{1'}\,Av_2{}^{1'}\,S^{12}+Av_1{}^{1'}\,e_{1'}\,Av_2{}^{2'}\,f_{2'}\,S^{12}+Av_1{}^{2'}\,Av_2{}^{2'}\,e_{2'}\,f_{2'}\,S^{12}+Av_1{}^{2'}\,f_{1'}\,Av_2{}^{1'}\,e_{2'}\,S^{12}\\
&+Av_1{}^{2'}\,Av_1{}^{2'}\,e_{2'}\,f_{2'}\,S^{11}+Av_1{}^{1'}\,Av_1{}^{2'}\,e_{1'}\,f_{2'}\,S^{11}+Av_1{}^{2'}\,Av_1{}^{1'}\,f_{1'}\,e_{2'}\,S^{11}+Av_1{}^{1'}\,Av_1{}^{1'}\,e_{1'}\,f_{1'}\,S^{11}\end{aligned} \tag{4.6.103}$$

4.6.11　縮約記法

アインシュタインの縮約記法は $\sum_{i=1}^{3} a_i\, b^i$ を $\sum$ を省略して、$a_i\, b^i$ と表す記法です。これによると、これまで示してきたベクトルやテンソルの演算が簡単な表記となり、各表記が前後してもかまいません。ただ、総和をとるときの添え字の振り方、これが演算の方法を決めるので、注意を払う必要があります。ここでは、例題で添え字の振り方を示します。*Maxima* で添え字をうまく扱う関数として *ishow* があります。これを使うときには *itensor* を予め読み込む必要があります。

ishow は、下記のように、上付き、下付きを入力します。

$$ishow([\text{下付き}], [\text{上付き}], \text{下付き})$$

例として、

```
kill(all);
load(itensor);
ishow(a([i,j],[k,l],m,n)*b([k,o],[j,m,p]
 ,q,r));
```

下記が出力される。

$$a_{ij,mn}^{kl}\, b_{ko,qr}^{jmp}$$

$$\mathrm{a}\,([i,j],[k,l],m,n)\ \mathrm{b}\,([k,o],[j,m,p],q,r)$$

以降、基底：$\overrightarrow{e_i} \otimes \overrightarrow{e_j} \otimes \overrightarrow{e^k}$ などの基底表現を Maxima 使用上と簡略化のため、ベクトル表記の $\rightarrow$ を省き、$\overrightarrow{e_i} \otimes \overrightarrow{e_j} \otimes \overrightarrow{e^k} \rightarrow e_i\, f_j\, g^k$ のように書き換える。即ち、e_i は前の、f_j はその後ろ、g^k はさらにその後ろの基底のテンソル積とする。また、座標変換の基底：$\overrightarrow{e_{i'}}$ の $'$ が Maxima の添え字関数：*ishow* で使用できないので、基底：$\overrightarrow{e_{i'}} \rightarrow u_i$ とし、この後ろのテンソル積を v_j、さらにその後ろを w_k と表す。

(1)2 階反変テンソル積

```
kill(all);
load("vect")$
load("linearalgebra")$
load(itensor)$
S1:matrix([S^11,S^12],[S^21,S^22]);
EBV2:matrix([e[1]],[e[2]]);
EBV3:matrix([e[1]],[e[2]],[e[3]]);
EBV2;
EBV2F:subst([e=f],EBV2);
EBV2G:subst([e=g],EBV2);
EBV2.transpose(EBV2F);
S1*%;
sum(sum(lhs(%)[i][j],i,1,2),j,1,2);
X1:expand(%);
```

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} S^{i\,j}\,\overrightarrow{e_i} \otimes \overrightarrow{e_j}$$

上式をベクトル表記すると、

$$\begin{pmatrix} S^{11} & S^{12} \\ S^{21} & S^{22} \end{pmatrix} : \left(\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}^T \right)$$
$$= \begin{pmatrix} S^{11} & S^{12} \\ S^{21} & S^{22} \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} e_1\, f_1 & e_1\, f_2 \\ f_1\, e_2 & e_2\, f_2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} e_1\, f_1\, S^{11} & e_1\, f_2\, S^{12} \\ f_1\, e_2\, S^{21} & e_2\, f_2\, S^{22} \end{pmatrix}$$

上記の結果の各項の和をとると、

$$e_2\, f_2\, S^{22} + f_1\, e_2\, S^{21} + e_1\, f_2\, S^{12} + e_1\, f_1\, S^{11}$$

```
LI1:S([],[i,j])*e([i],[])*f([j],[]);
ishow(LI1);
X2:sum(sum(LI1,i,1,2),j,1,2);
ishow(X2);
```

入力結果として、縮約表記は、

$$S^{ij}\, e_i\, f_j \qquad (4.6.104)$$

和の ishow 出力結果は下記となり、上記と同じ結果である。

$$S^{22}\, e_2\, f_2 + S^{12}\, e_1\, f_2 + S^{21}\, f_1\, e_2 + S^{11}\, e_1\, f_1$$

(2)3 階反変テンソル積

$S=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}S^{ij}\overrightarrow{e_i}\otimes\overrightarrow{f_j}$ と $T=\sum_{k=1}^{2}T^k\overrightarrow{g_k}$ のテンソル積を求める。

```
S2:matrix([S^11,S^12,S^13],[S^21,S^22,
  S^23],[S^31,S^32,S^33]);
T2:matrix([T^"1"],[T^"2"]);
EBV3;
EBV3F:subst([e=f],EBV3);
kronecker_product(EBV3,transpose(EBV3F));
X0:S2*%;
kronecker_product(%,T2*EBV2G);
sum(sum(lhs(%)[i][j],i,1,6),j,1,3);
X1:expand(%);
```

$$S'=\begin{pmatrix}S^{11}&S^{12}&S^{13}\\S^{21}&S^{22}&S^{23}\\S^{31}&S^{32}&S^{33}\end{pmatrix}:\begin{pmatrix}e_1\\e_2\\e_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}f_1\\f_2\\f_3\end{pmatrix}^T$$
$$=\begin{pmatrix}e_1\,f_1\,S^{11}&e_1\,f_2\,S^{12}&e_1\,f_3\,S^{13}\\f_1\,e_2\,S^{21}&e_2\,f_2\,S^{22}&e_2\,f_3\,S^{23}\\f_1\,e_3\,S^{31}&f_2\,e_3\,S^{32}&e_3\,f_3\,S^{33}\end{pmatrix}$$

$$T'=\begin{pmatrix}T^1\\T^2\end{pmatrix}:\begin{pmatrix}g_1\\g_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}g_1\,T^1\\g_2\,T^2\end{pmatrix}$$

上式のクロネッカー積をとり、

$$S'\otimes T'=\begin{pmatrix}e_1\,f_1\,g_1\,S^{11}\,T^1&e_1\,g_1\,f_2\,S^{12}\,T^1&e_1\,g_1\,f_3\,S^{13}\,T^1\\e_1\,f_1\,g_2\,S^{11}\,T^2&e_1\,f_2\,g_2\,S^{12}\,T^2&e_1\,g_2\,f_3\,S^{13}\,T^2\\f_1\,g_1\,e_2\,S^{21}\,T^1&g_1\,e_2\,f_2\,S^{22}\,T^1&g_1\,e_2\,f_3\,S^{23}\,T^1\\f_1\,e_2\,g_2\,S^{21}\,T^2&e_2\,f_2\,g_2\,S^{22}\,T^2&e_2\,g_2\,f_3\,S^{23}\,T^2\\f_1\,g_1\,e_3\,S^{31}\,T^1&g_1\,f_2\,e_3\,S^{32}\,T^1&g_1\,e_3\,f_3\,S^{33}\,T^1\\f_1\,g_2\,e_3\,S^{31}\,T^2&f_2\,g_2\,e_3\,S^{32}\,T^2&g_2\,e_3\,f_3\,S^{33}\,T^2\end{pmatrix}$$

上式の各項の和から、

$$\begin{aligned}S\otimes T=&g_2\,e_3\,f_3\,S^{33}\,T^2+f_2\,g_2\,e_3\,S^{32}\,T^2+f_1\,g_2\,e_3\,S^{31}\,T^2+e_2\,g_2\,f_3\,S^{23}\,T^2+e_2\,f_2\,g_2\,S^{22}\,T^2+f_1\,e_2\,g_2\,S^{21}\,T^2\\&+e_1\,g_2\,f_3\,S^{13}\,T^2+e_1\,f_2\,g_2\,S^{12}\,T^2+e_1\,f_1\,g_2\,S^{11}\,T^2+g_1\,e_3\,f_3\,S^{33}\,T^1+g_1\,f_2\,e_3\,S^{32}\,T^1+f_1\,g_1\,e_3\,S^{31}\,T^1\\&+g_1\,e_2\,f_3\,S^{23}\,T^1+g_1\,e_2\,f_2\,S^{22}\,T^1+f_1\,g_1\,e_2\,S^{21}\,T^1+e_1\,g_1\,f_3\,S^{13}\,T^1+e_1\,g_1\,f_2\,S^{12}\,T^1+e_1\,f_1\,g_1\,S^{11}\,T^1\end{aligned}$$

```
LI1:S([],[i,j])*e([i],[])*f([j],[])
 *T([],[k])*g([k],[]);
ishow(LI1);
X2:sum(sum(sum(LI1,i,1,3),j,1,3),k,1,2);
ishow(X2);
```

入力結果として、縮約表記は、

$$S^{ij}\,T^k\,e_i\,f_j\,g_k \tag{4.6.105}$$

和の ishow 出力結果は下記となり、上記と同じ結果である。

$$\begin{aligned}S\otimes T=&T^2\,S^{33}\,g_2\,e_3\,f_3+T^1\,S^{33}\,g_1\,e_3\,f_3+T^2\,S^{23}\,e_2\,g_2\,f_3+S^{13}\,T^2\,e_1\,g_2\,f_3+T^1\,S^{23}\,g_1\,e_2\,f_3+T^1\,S^{13}\,e_1\,g_1\,f_3\\&+T^2\,S^{32}\,f_2\,g_2\,e_3+T^2\,S^{31}\,f_1\,g_2\,e_3+T^1\,S^{32}\,g_1\,f_2\,e_3+T^1\,S^{31}\,f_1\,g_1\,e_3+T^2\,S^{22}\,e_2\,f_2\,g_2+S^{12}\,T^2\,e_1\,f_2\,g_2\\&+T^2\,S^{21}\,f_1\,e_2\,g_2+S^{11}\,T^2\,e_1\,f_1\,g_2+T^1\,S^{22}\,g_1\,e_2\,f_2+T^1\,S^{12}\,e_1\,g_1\,f_2+T^1\,S^{21}\,f_1\,g_1\,e_2+T^1\,S^{11}\,e_1\,f_1\,g_1\end{aligned}$$

(3) 基底の座標変換

```
EDBV2:matrix([e^"1"],[e^"2"]);
EPBV2:matrix([u[1]],[u[2]]);
EDPBV2:matrix([u^"1"],[u^"2"]);
A1:matrix([A[1]^"1",A[1]^"2"],
 [A[2]^"1",A[2]^"2"]);
B1:matrix([B[1]^"1",B[2]^"1"],
 [B[1]^"2",B[2]^"2"]);
AI1:matrix([Av[1]^("1"),Av[1]^("2")],
 [Av[2]^("1"),Av[2]^("2")]);
BI1:matrix([Bv[1]^("1"),Bv[2]^("1")],
 [Bv["1"]^("2"),Bv[2]^("2")]);
EPBV2=A1.EBV2;
EBV2=AI1.EPBV2;
EDBV2=BI1.EDPBV2;
```

(4.6.53) 式、(4.6.54) 式 (4.6.55) 式から、ishow では $'$ が添え字として使えないため、基底：$\overrightarrow{e_1'}, \overrightarrow{e_2'}$ を下記の $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}$ に置き換えて座標変換する。

$$\begin{aligned}\overrightarrow{e_1'} \rightarrow \overrightarrow{u_1} &= A_1^1\,\overrightarrow{e_1} + A_1^2\,\overrightarrow{e_2}\\ \overrightarrow{e_2'} \rightarrow \overrightarrow{u_2} &= A_2^1\,\overrightarrow{e_1} + A_2^2\,\overrightarrow{e_2}\\ \text{縮約表記}\quad \overrightarrow{e_i'} &= A_i^j\,\overrightarrow{e_j}\end{aligned} \tag{4.6.106}$$

ベクトル表記すると、

$$\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}A_1^1 & A_1^2\\A_2^1 & A_2^2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}e_1\\e_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e_1\,A_1^1 + A_1^2\,e_2\\e_2\,A_2^2 + e_1\,A_2^1\end{pmatrix}$$

係数マトリックスの逆行列を求め、

$$\begin{pmatrix}A_1^1 & A_1^2\\A_2^1 & A_2^2\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}Av_1^1 & Av_1^2\\Av_2^1 & Av_2^2\end{pmatrix} \tag{4.6.107}$$

上式に掛けると、

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}e_1\\e_2\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}A_1^1 & A_1^2\\A_2^1 & A_2^2\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}Av_1^1 & Av_1^2\\Av_2^1 & Av_2^2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}Av_1^2\,u_2 + Av_1^1\,u_1\\u_1\,Av_2^1 + Av_2^2\,u_2\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{4.6.108}$$

上式を書き換えると、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{e_1} &= Av_1^1\,\overrightarrow{u_1} + Av_1^2\,\overrightarrow{u_2}\\ \overrightarrow{e_2} &= Av_2^1\,\overrightarrow{u_1} + Av_2^2\,\overrightarrow{u_2}\\ \text{縮約表記}\quad \overrightarrow{e_i} &= Av_i^j\,\overrightarrow{e_j'}\end{aligned} \tag{4.6.109}$$

(4.6.56) 式、(4.6.57) 式、(4.6.58) 式、(4.6.61) 式から、

双対基底：$\overrightarrow{e'^1}, \overrightarrow{e'^2}$ を $\overrightarrow{u^1}, \overrightarrow{u^2}$ に置き換えて座標変換する。

$$\begin{aligned}\overrightarrow{e'^1} \rightarrow \overrightarrow{u^1} &= B_1^1\,\overrightarrow{e^1} + B_2^1\,\overrightarrow{e^2}\\ \overrightarrow{e'^2} \rightarrow \overrightarrow{u^2} &= B_2^1\,\overrightarrow{e^1} + B_2^2\,\overrightarrow{e^2}\\ \text{縮約表記}\quad \overrightarrow{e'^i} &= B_i^j\,\overrightarrow{e^j}\end{aligned}$$

$$\text{ここで、}\begin{pmatrix}B_1^1 & B_2^1\\B_1^2 & B_2^2\end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix}A_1^1 & A_1^2\\A_2^1 & A_2^2\end{pmatrix}^T\right)^{-1} \tag{4.6.110}$$

ベクトル表記すると、

$$\begin{pmatrix}u^1\\u^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}B_1^1 & B_2^1\\B_1^2 & B_2^2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}e^1\\e^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}B_2^1\,e^2 + B_1^1\,e^1\\B_2^2\,e^2 + B_1^2\,e^1\end{pmatrix}$$

係数マトリックスの逆行列を求め、

$$\begin{pmatrix}B_1^1 & B_2^1\\B_1^2 & B_2^2\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}Bv_1^1 & Bv_2^1\\Bv_1^2 & Bv_2^2\end{pmatrix}$$

上式に掛けると、

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}e^1\\e^2\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}B_1^1 & B_2^1\\B_1^2 & B_2^2\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}u^1\\u^2\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}Bv_1^1 & Bv_2^1\\Bv_1^2 & Bv_2^2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}u^1\\u^2\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}Bv_2^1\,u^2 + Bv_1^1\,u^1\\Bv_2^2\,u^2 + Bv_1^2\,u^1\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{4.6.111}$$

上式を書き換えると、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{e^1} &= Bv_1^1\,\overrightarrow{u^1} + Bv_2^1\,\overrightarrow{u^2}\\ \overrightarrow{e^2} &= Bv_1^2\,\overrightarrow{u^1} + Bv_2^2\,\overrightarrow{u^2}\\ \text{縮約表記}\quad \overrightarrow{e^i} &= Bv_j^i\,\overrightarrow{e'^j}\end{aligned} \tag{4.6.112}$$

```
LI1:u([i],[])=A([i],[j])*e([j],[]);
ishow(%);
X2:lhs(LI1)=sum(rhs(LI1),j,1,2);
ishow(%);
subst([i=1],X2);
ishow(%);
subst([i=2],X2);
ishow(%);
LI2:e([i],[])=Av([i],[j])*u([j],[]);
ishow(%);
X2:lhs(LI2)=sum(rhs(LI2),j,1,2);
ishow(%);
subst([i=1],X2);
ishow(%);
subst([i=2],X2);
ishow(%);
```

基底：$\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$ の座標変換の縮約表記は、

$$\overrightarrow{e'_i} = \overrightarrow{u_i} = A_i^j\,\overrightarrow{e_j} \tag{4.6.113}$$

$$\overrightarrow{e_i} = Av_i^j\,\overrightarrow{u_j} = Av_i^j\,\overrightarrow{e'_j} \tag{4.6.114}$$

和の ishow 出力結果は下記となり、

$$u_i = e_2\,A_i^2 + e_1\,A_i^1, \quad e_i = u_2\,Av_i^2 + u_1\,Av_i^1$$

$i=1, i=2$ とすると下記となり、上記と同じ結果である。

$$u_1 = A_1^2\,e_2 + e_1\,A_1^1, \quad e_1 = Av_1^2\,u_2 + u_1\,Av_1^1$$
$$u_2 = e_2\,A_2^2 + e_1\,A_2^1, \quad e_2 = u_2\,Av_2^2 + u_1\,Av_2^1$$

```
LDI1:u([],[k])=B([l],[k])*e([],[l]);
ishow(%);
X3:lhs(LDI1)=sum(rhs(LDI1),l,1,2);
ishow(%);
subst([k=1],X3);
ishow(%);
subst([k=2],X3);
ishow(%);
LDI2:e([],[k])=Bv([l],[k])*u([],[l]);
ishow(%);
X3:lhs(LDI2)=sum(rhs(LDI2),l,1,2);
ishow(%);
subst([k=1],X3);
ishow(%);
subst([k=2],X3);
ishow(%);
```

双対基底：$\overrightarrow{e^1}, \overrightarrow{e^2}$ の座標変換の縮約表記は、

$$\overrightarrow{e'^k} = u^k = \overrightarrow{e^l}\,B_l^k \tag{4.6.115}$$

$$\overrightarrow{e^k} = u^l\,Bv_l^k = Bv_l^k\,\overrightarrow{e'^l} \tag{4.6.116}$$

和の ishow 出力結果は下記となり、

$$u^k = e^2\,B_2^k + e^1\,B_1^k, \quad e^k = u^2\,Bv_2^k + u^1\,Bv_1^k$$

$k=1, k=2$ とすると下記となり、上記と同じ結果である。

$$u^1 = e^2\,B_2^1 + e^1\,B_1^1, \quad e^1 = u^2\,Bv_2^1 + u^1\,Bv_1^1$$
$$u^2 = e^2\,B_2^2 + e^1\,B_1^2, \quad e^2 = u^2\,Bv_2^2 + u^1\,Bv_1^2$$

(4) 計量テンソルの座標変換

```
EPBV2V:matrix([v[1]],[v[2]]);
EBV2.transpose(EBV2F);
EPBV2.transpose(EPBV2V)=A1.
 %.transpose(subst([A=D],A1));
X1:expand(%);
```

基底：$\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$ を下記の $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}$ に座標変換する。

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_1^2 \\ A_2^1 & A_2^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$$

このとき u の計量テンソルは、後方の $u \to v$ に変換し、

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}^T \to= \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} u_1\, v_1 & u_1\, v_2 \\ v_1\, u_2 & u_2\, v_2 \end{pmatrix}$$

e の計量テンソルは、後方の $e \to f$ に変換し、

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1\, f_1 & e_1\, f_2 \\ f_1\, e_2 & e_2\, f_2 \end{pmatrix}$$

上記の計量テンソルの座標変換の関係式 (4.6.79) 式から、

$$\begin{pmatrix} u_1\, v_1 & u_1\, v_2 \\ v_1\, u_2 & u_2\, v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_1^2 \\ A_2^1 & A_2^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_1\, f_1 & e_1\, f_2 \\ f_1\, e_2 & e_2\, f_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_1^1 & A_1^2 \\ A_2^1 & A_2^2 \end{pmatrix}^T$$

上式の $(A)^T \to (D)^T$ を置き換えて、展開し、$D \to A$ に置き換えると、

$$\begin{pmatrix} u_1\, v_1 & u_1\, v_2 \\ v_1\, u_2 & u_2\, v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1\, f_1\, A_1^1\, A_1^1 + e_1\, A_1^1\, A_1^2\, f_2 + A_1^2\, A_1^2\, e_2\, f_2 + f_1\, A_1^2\, A_1^1\, e_2 & e_1\, A_1^1\, f_2\, A_2^2 + A_1^2\, e_2\, f_2\, A_2^2 + e_1\, f_1\, A_1^1\, A_2^1 + f_1\, A_1^2\, e_2\, A_2^1 \\ A_1^2\, e_2\, f_2\, A_2^2 + f_1\, A_1^1\, e_2\, A_2^2 + e_1\, f_1\, A_1^1\, A_2^1 + e_1\, A_1^2\, f_2\, A_2^1 & e_2\, f_2\, A_2^2\, A_2^2 + e_1\, f_2\, A_2^1\, A_2^2 + f_1\, e_2\, A_2^2\, A_2^1 + e_1\, f_1\, A_2^1\, A_2^1 \end{pmatrix}$$

```
LI1:u([i],[])=A([i],[m])*e([m],[]);
ishow(%);
LI2:v([j],[])=D([j],[n])*f([n],[]);
ishow(%);
LI3:LI1*LI2;
ishow(lhs(LI3));
ishow(rhs(LI3));
X2:lhs(LI3)=sum(sum(rhs(LI3),m,1,2),
 n,1,2);
ishow(%);
subst([i=1,j=1],X2);
ishow(%);
subst([i=1,j=2],X2);
ishow(%);
subst([i=2,j=1],X2);
ishow(%);
subst([i=2,j=2],X2);
ishow(%);
```

座標変換の式の縮約表記は、

$$u_i = A_i^m\, e_m, \quad v_j = A_j^n\, f_n$$

計量テンソルの座標変換の縮約表記は、

$$g'_{ij} = u_i\, v_j = A_i^m\, A_j^n\, e_m\, f_n = A_i^m\, A_j^n\, g_{mn} \qquad (4.6.117)$$

和の ishow 出力結果は下記となり、

$$u_i\, v_j = e_2\, f_2\, A_i^2\, A_j^2 + e_1\, f_2\, A_i^1\, A_j^2 + f_1\, e_2\, A_i^2\, A_j^1 + e_1\, f_1\, A_i^1\, A_j^1$$

計量テンソルの縮約表記の $A_j^n \to D_j^n$ と置き換え、$m = 1, 2$ $n = 1, 2$ の和をとり、$i = 1, 2$ $j = 1, 2$ を入力し、$D \to A$ と置き換えると下記が得られ、これは上記の結果と一致している。

$$u_1\, v_1 = A_1^2\, A_1^2\, e_2\, f_2 + e_1\, A_1^1\, A_1^2\, f_2 + f_1\, A_1^1\, A_1^2\, e_2 + e_1\, f_1\, A_1^1\, A_1^1$$

$$u_1\, v_2 = A_1^2\, e_2\, f_2\, A_2^2 + e_1\, A_1^1\, f_2\, A_2^2 + f_1\, A_1^2\, e_2\, A_2^1 + e_1\, f_1\, A_1^1\, A_2^1$$

$$v_1\, u_2 = A_1^2\, e_2\, f_2\, A_2^2 + f_1\, A_1^1\, e_2\, A_2^2 + e_1\, A_1^2\, f_2\, A_2^1 + e_1\, f_1\, A_1^1\, A_2^1$$

$$u_2\, v_2 = e_2\, f_2\, A_2^2\, A_2^2 + e_1\, f_2\, A_2^1\, A_2^2 + f_1\, e_2\, A_2^1\, A_2^2 + e_1\, f_1\, A_2^1\, A_2^1$$

(5) テンソル積の座標変換

「4.6.10 テンソル積の座標変換 (基底の取り換え)」の(4.6.99) 式の下記のテンソル積を縮約表記で行う。ここでは $m=2,\, n=2$ の場合について示す。

$$V=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}S^{i\,j}\,\overrightarrow{e_i}\otimes\overrightarrow{e_j} \tag{4.6.118}$$

```
LI1:u([i],[])=A([i],[j])*e([j],[]);
ishow(%);
X2:lhs(LI1)=sum(rhs(LI1),j,1,2);
ishow(%);
subst([i=1],X2);
ishow(%);
subst([i=2],X2);
ishow(%);
LI2:e([i],[])=Av([i],[j])*u([j],[]);
ishow(%);
X2:lhs(LI2)=sum(rhs(LI2),j,1,2);
ishow(%);
subst([i=1],X2);
ishow(%);
subst([i=2],X2);
ishow(%);
LI3:subst([e=f,Av=Dv,i=k,j=l,u=v],LI2);
ishow(%);
X2:lhs(LI3)=sum(rhs(LI3),l,1,2);
ishow(%);
LI4:S([],[i,k])*e([i],[])*f([k],[]);
ishow(LI4);
X2:sum(sum(LI4,i,1,2),k,1,2);
ishow(X2);
LI5:subst([LI2,LI3],LI4);
```

```
ishow(LI5);
X4:sum(sum(sum(sum(LI5,i,1,2),j,1,2),
 k,1,2),l,1,2);
ishow(X4);
```

(4.6.106) 式から、ishow では $'$ が添え字として使えないため、基底 : $\overrightarrow{e_1},\,\overrightarrow{e_2}$ を下記の $\overrightarrow{e_{1'}}\to\overrightarrow{u_1},\,\overrightarrow{e_{2'}}\to\overrightarrow{u_2}$ に置き換えて座標変換する。

$$\begin{aligned}\overrightarrow{e_{1'}}\to\overrightarrow{u_1}&=A_1^1\,\overrightarrow{e_1}+A_1^2\,\overrightarrow{e_2}\\ \overrightarrow{e_{2'}}\to\overrightarrow{u_2}&=A_2^1\,\overrightarrow{e_1}+A_2^2\,\overrightarrow{e_2}\end{aligned} \tag{4.6.119}$$

上式を縮約表記すると、

$$u_i=A_i^j\,e_j$$

(4.6.107) 式から下記として、

$$\begin{pmatrix}A_1^1 & A_1^2\\ A_2^1 & A_2^2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}Av_1^1 & Av_1^2\\ Av_2^1 & Av_2^2\end{pmatrix} \tag{4.6.120}$$

e_j を求めると (4.6.109) 式から、

$$\begin{aligned}e_1&=Av_1^1\,u_1+Av_1^2\,u_2\\ e_2&=Av_2^1\,u_1+Av_2^2\,u_2\end{aligned} \tag{4.6.121}$$

上式を縮約表記すると、

$$e_i=Av_i^m\,u_m \tag{4.6.122}$$

(4.6.118) 式の後方の e_j を上式から $e\to f,\,u\to v$ の書き換えを行うと、

$$f_j=Av_j^n\,v_n \tag{4.6.123}$$

(4.6.118) 式のテンソル積を縮約表記すると、

$$S^{ij}\,e_i\,f_j$$

上式に (4.6.122) 式、(4.6.123) 式を代入すると、

$$S^{ij}\,Av_i^m\,Av_j^n\,u_m\,v_n \tag{4.6.124}$$

和の ishow 出力結果に $Dv\to Av$ と置き換えると下記となり、(4.6.103) 式と同じ結果が得られた。

$$\begin{aligned}V=&\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}S^{i\,j}\,\overrightarrow{e_i}\otimes\overrightarrow{e_j}=e_2\,f_2\,S^{22}+f_1\,e_2\,S^{21}+e_1\,f_2\,S^{12}+e_1\,f_1\,S^{11}\\ =&S^{22}\,u_2\,v_2\,Av_2^2\,Av_2^2+S^{22}\,u_1\,v_2\,Av_2^1\,Av_2^2+S^{12}\,Av_1^2\,u_2\,v_2\,Av_2^2+S^{12}\,u_1\,Av_1^1\,v_2\,Av_2^2\\ &+S^{22}\,v_1\,u_2\,Av_2^1\,Av_2^2+S^{21}\,Av_1^2\,u_2\,v_2\,Av_2^2+S^{21}\,v_1\,Av_1^1\,u_2\,Av_2^2+S^{22}\,u_1\,v_1\,Av_2^1\,Av_2^1\\ &+S^{12}\,v_1\,Av_1^2\,u_2\,Av_2^1+S^{12}\,u_1\,v_1\,Av_1^1\,Av_2^1+S^{21}\,u_1\,Av_1^2\,v_2\,Av_2^1+S^{21}\,u_1\,v_1\,Av_1^1\,Av_2^1\\ &+S^{11}\,Av_1^2\,Av_1^2\,u_2\,v_2+S^{11}\,u_1\,Av_1^1\,Av_1^2\,v_2+S^{11}\,v_1\,Av_1^1\,Av_1^2\,u_2+S^{11}\,u_1\,v_1\,Av_1^1\,Av_1^1\end{aligned}$$

4.6.12 テンソル積の縮合

基底ベクトル：$\overrightarrow{e_i}$ と双対基底ベクトル：$\overrightarrow{e^k}$ が混在するテンソル積では、(4.6.16) 式に示す基底ベクトルと双対基底ベクトルの下記の関係から、縮合できる。

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{e^1}=1,\quad \overrightarrow{e_2}\cdot\overrightarrow{e^2}=1,\quad \overrightarrow{e_3}\cdot\overrightarrow{e^3}=1\\
&\overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{e^2}=0,\quad \overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{e^3}=0,\quad \overrightarrow{e_2}\cdot\overrightarrow{e^1}=0\\
&\overrightarrow{e_2}\cdot\overrightarrow{e^3}=0,\quad \overrightarrow{e_3}\cdot\overrightarrow{e^1}=0,\quad \overrightarrow{e_3}\cdot\overrightarrow{e^2}=0
\end{aligned} \tag{4.6.125}$$

```
kill(all);
load("vect")$
load("linearalgebra")$
load(itensor)$
EBV2:matrix([e[1]],[e[2]]);
EBV2F:subst([e=f],EBV2);
EBV2H:matrix([e^"1"],[e^"2"]);
S2:matrix([S^"11",S^"12"],[S^"21",S^"22"]);
T2:matrix([T^"1"],[T^"2"]);
kronecker_product(EBV2,transpose(EBV2F));
X0:S2*%;
T2*EBV2H;
kronecker_product(X0,%);
sum(sum(%[i][j],i,1,4),j,1,2);
X1:expand(%);
```

$S=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}S^{ij}\overrightarrow{e_i}\otimes\overrightarrow{f_j}$ と $T=\sum_{k=1}^{2}T^k\overrightarrow{e^k}$ のテンソル積を求める。

$$\begin{aligned}
S'&=\begin{pmatrix}S^{11}&S^{12}\\S^{21}&S^{22}\end{pmatrix}:\begin{pmatrix}e_1\\e_2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}f_1\\f_2\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}e_1\,f_1\,S^{11}&e_1\,f_2\,S^{12}\\f_1\,e_2\,S^{21}&e_2\,f_2\,S^{22}\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$T'=\begin{pmatrix}T^1\\T^2\end{pmatrix}:\begin{pmatrix}e^1\\e^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^1\,T^1\\e^2\,T^2\end{pmatrix}$$

上式のクロネッカー積をとり、

$$S'\otimes T'=\begin{pmatrix}e_1\,f_1\,e^1\,S^{11}\,T^1&e_1\,f_2\,e^1\,S^{12}\,T^1\\e_1\,f_1\,e^2\,S^{11}\,T^2&e_1\,f_2\,e^2\,S^{12}\,T^2\\f_1\,e_2\,e^1\,S^{21}\,T^1&e_2\,f_2\,e^1\,S^{22}\,T^1\\f_1\,e_2\,e^2\,S^{21}\,T^2&e_2\,f_2\,e^2\,S^{22}\,T^2\end{pmatrix}$$

上式の各項の和から、

$$\begin{aligned}
S\otimes T=&e_2\,f_2\,e^2\,S^{22}\,T^2+f_1\,e_2\,e^2\,S^{21}\,T^2+e_1\,f_2\,e^2\,S^{12}\,T^2\\
&+e_1\,f_1\,e^2\,S^{11}\,T^2+e_2\,f_2\,e^1\,S^{22}\,T^1+f_1\,e_2\,e^1\,S^{21}\,T^1\\
&+e_1\,f_2\,e^1\,S^{12}\,T^1+e_1\,f_1\,e^1\,S^{11}\,T^1
\end{aligned}$$

```
LI1:S([],[i,j])*T([],[k])*e([i],[])
 *f([j],[])*e([],[k])*delta[j,k];
ishow(%);
X2:sum(sum(sum(LI1,i,1,2),j,1,2),k,1,2);
X3:ishow(%);
subst([delta[1,1]=1/(e([],[1])*f([1],[])),
 delta[2,2]=1/(e([],[2])*f([2],[])),
 delta[1,2]=0,delta[2,1]=0],X2);
ishow(%);
LI1:S([],[i,j])*T([],[k])*e([i],[])
 *f([j],[])*e([],[k])*delta[i,k];
ishow(%);
X2:sum(sum(sum(LI1,i,1,2),j,1,2),k,1,2);
subst([delta[1,1]=1/(e([],[1])*e([1],[])),
 delta[2,2]=1/(e([],[2])*e([2],[])),
 delta[1,2]=0,delta[2,1]=0],X2);
ishow(%);
```

$S\otimes T$ の縮合表記は、f_j と e^k 間の (4.6.125) 式の関係をとるため、$\delta_{j,k}$ を導入し、下記となる。

$$\begin{aligned}
S\otimes T=&S^{ij}\,e^k\,T^k\,e_i\,\delta_{j,k}\,f_j\\
&\text{ここで、}\quad \delta_{j=k}=\frac{1}{f_j\,e^k},\ \delta_{j\neq k}=0
\end{aligned}$$

和の ishow 出力結果は下記となり、上記の結果と同じである。

$$\begin{aligned}
S\otimes T=&\delta_{2,2}\,e^2\,T^2\,S^{22}\,e_2\,f_2+\delta_{2,1}\,e^1\,T^1\,S^{22}\,e_2\,f_2\\
&+\delta_{2,2}\,S^{12}\,e^2\,T^2\,e_1\,f_2+\delta_{2,1}\,e^1\,T^1\,S^{12}\,e_1\,f_2\\
&+\delta_{1,2}\,e^2\,T^2\,S^{21}\,f_1\,e_2+\delta_{1,1}\,e^1\,T^1\,S^{21}\,f_1\,e_2\\
&+\delta_{1,2}\,S^{11}\,e^2\,T^2\,e_1\,f_1+\delta_{1,1}\,e^1\,T^1\,S^{11}\,e_1\,f_1
\end{aligned}$$

$\delta_{j,k}$ を処理し、縮合すると、

$$S\otimes T=T^2\,S^{22}\,e_2+T^1\,S^{21}\,e_2+S^{12}\,T^2\,e_1+T^1\,S^{11}\,e_1$$

$S\otimes T$ の縮合表記は、e_i と e^k 間の (4.6.125) 式の関係をとるため、$\delta_{i,k}$ を導入し、下記となる。

$$\begin{aligned}
S\otimes T=&S^{ij}\,e^k\,T^k\,\delta_{i,k}\,e_i\,f_j\\
&\text{ここで、}\quad \delta_{i=k}=\frac{1}{e_i\,e^k},\ \delta_{i\neq k}=0
\end{aligned}$$

和の ishow 出力結果に $\delta_{j,k}$ を処理し、縮合すると、

$$S\otimes T=T^2\,S^{22}\,f_2+T^1\,S^{12}\,f_2+T^2\,S^{21}\,f_1+T^1\,S^{11}\,f_1$$

4.6.13 ベクトル・テンソルの座標変換 (微分線要素間に線形関係)

4.6.13.1 反変的に変換する

「4.6.6 ベクトル・テンソルの座標変換 (線形関係) 4.6.6.2 ベクトルの座標変換 (反変成分)」では座標変換を線形変換として扱っています。しかし、一般的には次式の極座標変換のように線形変換ではありません。

$$x = \cos(\phi)\, r \sin(\theta)$$
$$y = \sin(\phi)\, r \sin(\theta)$$
$$z = r \cos(\theta)$$

しかし、x, y, z の微分と r, θ, ϕ の微分の関係では、たとえば、$\mathrm{del}(x)$ では、

$$\mathrm{del}(x) = \cos(\phi)\, r\cos(\theta)\ \mathrm{del}(\theta) + \cos(\phi)\, \sin(\theta)\ \mathrm{del}(r) - \sin(\phi)\, r\sin(\theta)\ \mathrm{del}(\phi)$$

上式から、ある場所の無限小の場において線形な関係が成り立ちます。

```
kill(all);
load("vect")$
DUVW1:matrix([del(u)],[del(v)],[del(w)]);
DX1:matrix([del(x)],[del(y)],[del(z)]);
depends([u,v,w],[x,y,z]);
D1:del(u)=diff(u);
D2:del(v)=diff(v);
D3:del(w)=diff(w);
DX11:coeff(rhs(D1),del(x));
DX12:coeff(rhs(D1),del(y));
DX13:coeff(rhs(D1),del(z));
DX21:coeff(rhs(D2),del(x));
DX22:coeff(rhs(D2),del(y));
DX23:coeff(rhs(D2),del(z));
DX31:coeff(rhs(D3),del(x));
DX32:coeff(rhs(D3),del(y));
DX33:coeff(rhs(D3),del(z));
DMT1:matrix([DX11,DX12,DX13],[DX21,DX22,
 DX23],[DX31,DX32,DX33]);
DMT2:DUVW1=DMT1.DX1;
subst([x=x^"1",y=x^"2",z=x^"3"],DMT2);
DMT3:subst([u=x^"'1",v=x^"'2",w=x^"'3"],%);
```

いま、u, v, w が x, y, z の関数であるとすると、u, v, w の全微分は、

$$\begin{aligned}
\mathrm{del}(u) &= \left(\frac{d}{dz}u\right)\mathrm{del}(z) + \left(\frac{d}{dy}u\right)\mathrm{del}(y) + \left(\frac{d}{dx}u\right)\mathrm{del}(x)\\
\mathrm{del}(v) &= \left(\frac{d}{dz}v\right)\mathrm{del}(z) + \left(\frac{d}{dy}v\right)\mathrm{del}(y) + \left(\frac{d}{dx}v\right)\mathrm{del}(x)\\
\mathrm{del}(w) &= \left(\frac{d}{dz}w\right)\mathrm{del}(z) + \left(\frac{d}{dy}w\right)\mathrm{del}(y) + \left(\frac{d}{dx}w\right)\mathrm{del}(x)
\end{aligned} \tag{4.6.126}$$

上式を変換行列の形で表現すると、

$$\begin{pmatrix}\mathrm{del}(u)\\ \mathrm{del}(v)\\ \mathrm{del}(w)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{d}{dx}u & \frac{d}{dy}u & \frac{d}{dz}u\\ \frac{d}{dx}v & \frac{d}{dy}v & \frac{d}{dz}v\\ \frac{d}{dx}w & \frac{d}{dy}w & \frac{d}{dz}w\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\mathrm{del}(x)\\ \mathrm{del}(y)\\ \mathrm{del}(z)\end{pmatrix} \tag{4.6.127}$$

上式を u, v, w を $x^{'1}, x^{'2}, x^{'3}$ と、x, y, z を x^1, x^2, x^3 と置き換えると、

$$\begin{pmatrix}\mathrm{del}\left(x^{'1}\right)\\ \mathrm{del}\left(x^{'2}\right)\\ \mathrm{del}\left(x^{'3}\right)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{d}{dx^3}x^{'1}\,\mathrm{del}\left(x^3\right) + \frac{d}{dx^2}x^{'1}\,\mathrm{del}\left(x^2\right) + \frac{d}{dx^1}x^{'1}\,\mathrm{del}\left(x^1\right)\\ \frac{d}{dx^3}x^{'2}\,\mathrm{del}\left(x^3\right) + \frac{d}{dx^2}x^{'2}\,\mathrm{del}\left(x^2\right) + \frac{d}{dx^1}x^{'2}\,\mathrm{del}\left(x^1\right)\\ \frac{d}{dx^3}x^{'3}\,\mathrm{del}\left(x^3\right) + \frac{d}{dx^2}x^{'3}\,\mathrm{del}\left(x^2\right) + \frac{d}{dx^1}x^{'3}\,\mathrm{del}\left(x^1\right)\end{pmatrix} \tag{4.6.128}$$

縮約表記すると、

$$dx^{`i} = \frac{dx^{`i}}{dx^j}\,dx^j \tag{4.6.129}$$

また、ベクトルの座標変換 (反変成分) を、もとの座標軸に対する接ベクトルととらまえ、$\begin{pmatrix}\mathrm{del}\left(x^{'1}\right)\\ \mathrm{del}\left(x^{'2}\right)\\ \mathrm{del}\left(x^{'3}\right)\end{pmatrix} \to \overrightarrow{P'} = \begin{pmatrix}P^{'1}\\ P^{'2}\\ P^{'3}\end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix}\mathrm{del}\left(x^1\right)\\ \mathrm{del}\left(x^2\right)\\ \mathrm{del}\left(x^3\right)\end{pmatrix} \to \overrightarrow{P} = \begin{pmatrix}P^1\\ P^2\\ P^3\end{pmatrix}$ とすると、

$$\begin{pmatrix}P^{'1}\\ P^{'2}\\ P^{'3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{d}{dx^1}x^{'1} & \frac{d}{dx^2}x^{'1} & \frac{d}{dx^3}x^{'1}\\ \frac{d}{dx^1}x^{'2} & \frac{d}{dx^2}x^{'2} & \frac{d}{dx^3}x^{'2}\\ \frac{d}{dx^1}x^{'3} & \frac{d}{dx^2}x^{'3} & \frac{d}{dx^3}x^{'3}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}P^1\\ P^2\\ P^3\end{pmatrix} \tag{4.6.130}$$

縮約表記すると、

$$P^{'i} = \frac{dx^{'i}}{dx^j}\,P^j \tag{4.6.131}$$

4.6.13.2　反変的に変換する：円柱座標系の座標変換

円柱座標系：r, θ, p と xyz 座標系の関係は (4.5.1) 式から下記である。

$$x = r\cos(\theta), \quad y = r\sin(\theta), \quad z = p \tag{4.6.132}$$

```
kill(all);
load("vect")$
DUV1:matrix([del(r)],[del(\theta)],
 [del(p)]);
DX1:matrix([del(x)],[del(y)],[del(z)]);
depends([x,y,z],[r,\theta,p]);
D1:del(x)=diff(x);
D2:del(y)=diff(y);
D3:del(z)=diff(z);
X1:x=r*cos(\theta);
Y1:y=r*sin(\theta);
Z1:z=p;
lhs(D1)=subst([X1,Y1,Z1],rhs(D1));
D11:lhs(%)=ev(rhs(%),diff);
lhs(D2)=subst([X1,Y1,Z1],rhs(D2));
D21:lhs(%)=ev(rhs(%),diff);
```

```
lhs(D3)=subst([X1,Y1,Z1],rhs(D3));
D31:lhs(%)=ev(rhs(%),diff);
DX11:coeff(rhs(D11),del(r));
DX12:coeff(rhs(D11),del(\theta));
DX13:coeff(rhs(D11),del(p));
DX21:coeff(rhs(D21),del(r));
DX22:coeff(rhs(D21),del(\theta));
DX23:coeff(rhs(D21),del(p));
DX31:coeff(rhs(D31),del(r));
DX32:coeff(rhs(D31),del(\theta));
DX33:coeff(rhs(D31),del(p));
matrix([DX11,DX12,DX13],[DX21,DX22,DX23],
 [DX31,DX32,DX33]);
DMT1:trigsimp(%);
DX1=DMT1.DUV1;
invert(DMT1);
DMT2:trigsimp(%);
DUV1=DMT2.DX1;
trigsimp(%);
```

x, y, z が r, θ, p の関数であるとして、全微分すると、

$$\begin{aligned}
\mathrm{del}(x) &= \left(\frac{d}{d\,\theta}\,x\right)\mathrm{del}(\theta) + \left(\frac{d}{d\,r}\,x\right)\mathrm{del}(r) + \left(\frac{d}{d\,p}\,x\right)\mathrm{del}(p) \\
\mathrm{del}(y) &= \left(\frac{d}{d\,\theta}\,y\right)\mathrm{del}(\theta) + \left(\frac{d}{d\,r}\,y\right)\mathrm{del}(r) + \left(\frac{d}{d\,p}\,y\right)\mathrm{del}(p) \\
\mathrm{del}(z) &= \left(\frac{d}{d\,\theta}\,z\right)\mathrm{del}(\theta) + \left(\frac{d}{d\,r}\,z\right)\mathrm{del}(r) + \left(\frac{d}{d\,p}\,z\right)\mathrm{del}(p)
\end{aligned}$$

上式に (4.6.132) 式を代入し、整理すると、

$$\begin{pmatrix}\mathrm{del}(x)\\ \mathrm{del}(y)\\ \mathrm{del}(z)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(\theta) & -r\sin(\theta) & 0\\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\mathrm{del}(r)\\ \mathrm{del}(\theta)\\ \mathrm{del}(p)\end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix}\mathrm{del}(r)\\ \mathrm{del}(\theta)\\ \mathrm{del}(p)\end{pmatrix}$ は行列の逆行列を掛けることにより得られ、

$$\begin{pmatrix}\mathrm{del}(r)\\ \mathrm{del}(\theta)\\ \mathrm{del}(p)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(\theta) & \sin(\theta) & 0\\ -\frac{\sin(\theta)}{r} & \frac{\cos(\theta)}{r} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\mathrm{del}(x)\\ \mathrm{del}(y)\\ \mathrm{del}(z)\end{pmatrix}$$

ここで、$\mathrm{del}(r) \to \overrightarrow{e_r}$, $r\,\mathrm{del}(\theta) \to \overrightarrow{e_\theta}$, $\mathrm{del}(p) \to \overrightarrow{e_z}$, $\mathrm{del}(x) \to \overrightarrow{e_x}$, $\mathrm{del}(y) \to \overrightarrow{e_y}$, $\mathrm{del}(z) \to \overrightarrow{e_z}$, とすると、下記となり、(4.5.2) 式の座標変換行列と一致する。

$$\begin{pmatrix}\overrightarrow{e_r}\\ \overrightarrow{e_\theta}\\ \overrightarrow{e_z}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(\theta) & \sin(\theta) & 0\\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\overrightarrow{e_x}\\ \overrightarrow{e_y}\\ \overrightarrow{e_z}\end{pmatrix}$$

4.6.13.3 反変的に変換する：極座標系の座標変換

極座標系：r,θ,ϕ と xyz 座標系の関係は (4.5.17) 式から下記である。

$$x=\cos(\phi)\,r\sin(\theta)\,,y=\sin(\phi)\,r\sin(\theta)\,,z=r\cos(\theta) \tag{4.6.133}$$

```
kill(all);
load("vect")$
DUV1:matrix([del(r)],[del(\theta)],
 [del(\phi)]);
DX1:matrix([del(x)],[del(y)],[del(z)]);
depends([x,y,z],[r,\theta,\phi]);
D1:del(x)=diff(x);
D2:del(y)=diff(y);
D3:del(z)=diff(z);
X1:x=r*cos(\phi)*sin(\theta);
Y1:y=r*sin(\phi)*sin(\theta);
Z1:z=r*cos(\theta);
lhs(D1)=subst([X1,Y1,Z1],rhs(D1));
D11:lhs(%)=ev(rhs(%),diff);
lhs(D2)=subst([X1,Y1,Z1],rhs(D2));
D21:lhs(%)=ev(rhs(%),diff);
lhs(D3)=subst([X1,Y1,Z1],rhs(D3));
D31:lhs(%)=ev(rhs(%),diff);
DX11:coeff(rhs(D11),del(r));
DX12:coeff(rhs(D11),del(\theta));
DX13:coeff(rhs(D11),del(\phi));
DX21:coeff(rhs(D21),del(r));
DX22:coeff(rhs(D21),del(\theta));
DX23:coeff(rhs(D21),del(\phi));
DX31:coeff(rhs(D31),del(r));
DX32:coeff(rhs(D31),del(\theta));
DX33:coeff(rhs(D31),del(\phi));
DMT1:matrix([DX11,DX12,DX13],[DX21,DX22,
 DX23],[DX31,DX32,DX33]);
DX1=DMT1.DUV1;
invert(DMT1);
DMT2:trigsimp(%);
DUV1=DMT2.DX1;
trigsimp(%);
expand(%);
```

x,y,z が r,θ,ϕ の関数であるとして、全微分すると、

$$\begin{aligned}
\mathrm{del}(x)&=\left(\frac{d}{d\,\theta}\,x\right)\,\mathrm{del}(\theta)+\left(\frac{d}{d\,r}\,x\right)\,\mathrm{del}(r)+\left(\frac{d}{d\,\phi}\,x\right)\,\mathrm{del}(\phi)\\
\mathrm{del}(y)&=\left(\frac{d}{d\,\theta}\,y\right)\,\mathrm{del}(\theta)+\left(\frac{d}{d\,r}\,y\right)\,\mathrm{del}(r)+\left(\frac{d}{d\,\phi}\,y\right)\,\mathrm{del}(\phi)\\
\mathrm{del}(z)&=\left(\frac{d}{d\,\theta}\,z\right)\,\mathrm{del}(\theta)+\left(\frac{d}{d\,r}\,z\right)\,\mathrm{del}(r)+\left(\frac{d}{d\,\phi}\,z\right)\,\mathrm{del}(\phi)
\end{aligned}$$

上式に (4.6.133) 式を代入し、整理すると、

$$\begin{pmatrix}\mathrm{del}(x)\\ \mathrm{del}(y)\\ \mathrm{del}(z)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(\phi)\,\sin(\theta) & \cos(\phi)\,r\cos(\theta) & -\sin(\phi)\,r\sin(\theta)\\ \sin(\phi)\,\sin(\theta) & \sin(\phi)\,r\cos(\theta) & \cos(\phi)\,r\sin(\theta)\\ \cos(\theta) & -r\sin(\theta) & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\mathrm{del}(r)\\ \mathrm{del}(\theta)\\ \mathrm{del}(\phi)\end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix}\mathrm{del}(r)\\ \mathrm{del}(\theta)\\ \mathrm{del}(\phi)\end{pmatrix}$ は行列の逆行列を掛けることにより得られ、

$$\begin{pmatrix}\mathrm{del}(r)\\ \mathrm{del}(\theta)\\ \mathrm{del}(\phi)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(\phi)\,\sin(\theta) & \sin(\phi)\,\sin(\theta) & \cos(\theta)\\ \frac{\cos(\phi)\cos(\theta)}{r} & \frac{\sin(\phi)\cos(\theta)}{r} & -\frac{\sin(\theta)}{r}\\ -\frac{\sin(\phi)}{r\sin(\theta)} & \frac{\cos(\phi)}{r\sin(\theta)} & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\mathrm{del}(x)\\ \mathrm{del}(y)\\ \mathrm{del}(z)\end{pmatrix}$$

ここで、$\mathrm{del}(r)\to\overrightarrow{e_r}$, $r\,\mathrm{del}(\theta)\to\overrightarrow{e_\theta}$, $r\sin(\theta)\,\mathrm{del}(\phi)\to\overrightarrow{e_\phi}$, $\mathrm{del}(x)\to\overrightarrow{e_x}$, $\mathrm{del}(y)\to\overrightarrow{e_y}$, $\mathrm{del}(z)\to\overrightarrow{e_z}$, とすると、下記となり、(4.5.18) 式の座標変換行列と一致する。

$$\begin{pmatrix}\overrightarrow{e_r}\\ \overrightarrow{e_\theta}\\ \overrightarrow{e_\phi}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(\phi)\,\sin(\theta) & \sin(\phi)\,\sin(\theta) & \cos(\theta)\\ \cos(\phi)\,\cos(\theta) & \sin(\phi)\,\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\overrightarrow{e_x}\\ \overrightarrow{e_y}\\ \overrightarrow{e_z}\end{pmatrix}$$

4.6.13.4 共変的に変換する (スカラー量の座標変換)

「4.6.6 基底ベクトルのベクトル・テンソルの座標変換 (3) ベクトルの座標変換 (共変成分)」では座標変換を線形変換として扱っています。しかし、一般的には線形変換ではありません。あるスカラー量：$f(x,y,z)$ で与えられているとする。これを x,y,z 座標から u,v,w 座標に変換する。

```
kill(all);
load("vect")$
depends([x,y,z],[u,v,w]);
depends([f],[x,y,z]);
F1:'diff(f,u)=diff(f,u);
F2:'diff(f,v)=diff(f,v);
F3:'diff(f,w)=diff(f,w);
FX11:coeff(rhs(F1),'diff(f,x));
FX12:coeff(rhs(F1),'diff(f,y));
FX13:coeff(rhs(F1),'diff(f,z));
FX21:coeff(rhs(F2),'diff(f,x));
FX22:coeff(rhs(F2),'diff(f,y));
FX23:coeff(rhs(F2),'diff(f,z));
FX31:coeff(rhs(F3),'diff(f,x));
FX32:coeff(rhs(F3),'diff(f,y));
FX33:coeff(rhs(F3),'diff(f,z));
FUVW1:matrix([lhs(F1)],[lhs(F2)],
 [lhs(F3)]);
FX1:matrix(['diff(f,x[1])],['diff(f,x[2])],
 ['diff(f,x[3])]);
FMT1:matrix([FX11,FX12,FX13],[FX21,FX22,
 FX23],[FX31,FX32,FX33]);
FUVW1=FMT1.FX1;
```

x,y,z が u,v,w の関数であるとして、f を u,v,w で偏微分すると、

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\,u}\,f &= \left(\frac{d}{d\,z}\,f\right)\,\left(\frac{d}{d\,u}\,z\right)+\left(\frac{d}{d\,y}\,f\right)\,\left(\frac{d}{d\,u}\,y\right)+\left(\frac{d}{d\,x}\,f\right)\,\left(\frac{d}{d\,u}\,x\right)\\
\frac{d}{d\,v}\,f &= \left(\frac{d}{d\,z}\,f\right)\,\left(\frac{d}{d\,v}\,z\right)+\left(\frac{d}{d\,y}\,f\right)\,\left(\frac{d}{d\,v}\,y\right)+\left(\frac{d}{d\,x}\,f\right)\,\left(\frac{d}{d\,v}\,x\right)\\
\frac{d}{d\,w}\,f &= \left(\frac{d}{d\,z}\,f\right)\,\left(\frac{d}{d\,w}\,z\right)+\left(\frac{d}{d\,y}\,f\right)\,\left(\frac{d}{d\,w}\,y\right)+\left(\frac{d}{d\,x}\,f\right)\,\left(\frac{d}{d\,w}\,x\right)
\end{aligned}$$

上式を変換行列の形で表現すると、

$$\begin{pmatrix}\frac{d}{d\,u}\,f\\ \frac{d}{d\,v}\,f\\ \frac{d}{d\,w}\,f\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{d}{d\,u}\,x & \frac{d}{d\,u}\,y & \frac{d}{d\,u}\,z\\ \frac{d}{d\,v}\,x & \frac{d}{d\,v}\,y & \frac{d}{d\,v}\,z\\ \frac{d}{d\,w}\,x & \frac{d}{d\,w}\,y & \frac{d}{d\,w}\,z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{d}{d\,x}\,f\\ \frac{d}{d\,y}\,f\\ \frac{d}{d\,z}\,f\end{pmatrix} \tag{4.6.134}$$

上式を u,v,w を $x^{`1},x^{`2},x^{`3}$ と、x,y,z を x^1,x^2,x^3 と置き換えると、

$$\begin{pmatrix}\frac{d}{d\,x^{`1}}\,f\\ \frac{d}{d\,x^{`2}}\,f\\ \frac{d}{d\,x^{`3}}\,f\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{d}{d\,x^{`1}}\,x^1 & \frac{d}{d\,x^{`1}}\,x^2 & \frac{d}{d\,x^{`1}}\,x^3\\ \frac{d}{d\,x^{`2}}\,x^1 & \frac{d}{d\,x^{`2}}\,x^2 & \frac{d}{d\,x^{`2}}\,x^3\\ \frac{d}{d\,x^{`3}}\,x^1 & \frac{d}{d\,x^{`3}}\,x^2 & \frac{d}{d\,x^{`3}}\,x^3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{d}{d\,x^1}\,f\\ \frac{d}{d\,x^2}\,f\\ \frac{d}{d\,x^3}\,f\end{pmatrix} \tag{4.6.135}$$

上式を縮約表記すると、

$$\frac{d}{dx^{`i}}\,f=\frac{dx^j}{dx^{`i}}\,\frac{d}{dx^j}\,f \tag{4.6.136}$$

上式の変換行列の要素：$\frac{dx^j}{dx^{`i}}$ は反変的に変換する (座標変換) の変換行列の要素：$\frac{dx^{`i}}{dx^j}$ の逆数である。したがって、上式の変換行列の要素：$\frac{dx^j}{dx^{`i}}$ は座標変換行列の要素：$\frac{dx^{`i}}{dx^j}$ に対して共変的に変化する。

また、ベクトルの座標変換 (共変成分) は、$\begin{pmatrix}\frac{d}{d\,x^{`1}}\,f\\ \frac{d}{d\,x^{`2}}\,f\\ \frac{d}{d\,x^{`3}}\,f\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\frac{d}{d\,x^1}\,f\\ \frac{d}{d\,x^2}\,f\\ \frac{d}{d\,x^3}\,f\end{pmatrix}$ をベクトルととらまえ、

$\begin{pmatrix}\frac{d}{d\,x^{`1}}\,f\\ \frac{d}{d\,x^{`2}}\,f\\ \frac{d}{d\,x^{`3}}\,f\end{pmatrix}\to\overrightarrow{P}'=\begin{pmatrix}P_1'\\ P_2'\\ P_3'\end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix}\frac{d}{d\,x^1}\,f\\ \frac{d}{d\,x^2}\,f\\ \frac{d}{d\,x^3}\,f\end{pmatrix}\to\overrightarrow{P}=\begin{pmatrix}P_1\\ P_2\\ P_3\end{pmatrix}$ とすると、

$$\begin{pmatrix}P_1'\\ P_2'\\ P_3'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{d}{d\,x'^1}\,x^1 & \frac{d}{d\,x'^1}\,x^2 & \frac{d}{d\,x'^1}\,x^3\\ \frac{d}{d\,x'^2}\,x^1 & \frac{d}{d\,x'^2}\,x^2 & \frac{d}{d\,x'^2}\,x^3\\ \frac{d}{d\,x'^3}\,x^1 & \frac{d}{d\,x^{`3}}\,x^2 & \frac{d}{d\,x^{`3}}\,x^3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}P_1\\ P_2\\ P_3\end{pmatrix}\quad \text{縮約すると、}\quad P_i'=\frac{dx^j}{dx'^i}\,P_j \tag{4.6.137}$$

4.6.13.5 曲線と接ベクトル

曲線：f の座標を経路：s で表現すると、曲線上で定義されるスカラー関数：f は、

$$f(s)=f(x^1(s),x^2(s),x^3(s))$$

```
kill(all);
load("vect")$
depends([x,y,z],[s]);
depends([f],[x,y,z]);
DFS1:'diff(f,s)=diff(f,s);
subst([x=x^"1",y=x^"2",z=x^"3"],DFS1);
V1:matrix(['diff(x^"1",s,1)],
 ['diff(x^"2",s,1)],['diff(x^"3",s,1)]);
NF1:matrix(['diff(f,x^"1")],
 ['diff(f,x^"2")],['diff(f,x^"3")]);
'diff(f,s)=NF1.V1;
```

$x^1=x,\ x^2=y,\ x^3=z,$ の置き換えを行って、f を s で微分すると、

$$\frac{d}{d\,s}\,f=\left(\frac{d}{d\,z}\,f\right)\,\left(\frac{d}{d\,s}\,z\right)+\left(\frac{d}{d\,y}\,f\right)\,\left(\frac{d}{d\,s}\,y\right)+\left(\frac{d}{d\,x}\,f\right)\,\left(\frac{d}{d\,s}\,x\right)$$

上式を、$x=x^1,\ y=x^2,\ z=x^3,$ の置き換えを行って

$$\frac{d}{d\,s}\,f=\left(\frac{d}{d\,x^3}\,f\right)\,\left(\frac{d}{d\,s}\,x^3\right)+\left(\frac{d}{d\,x^2}\,f\right)\,\left(\frac{d}{d\,s}\,x^2\right)+\left(\frac{d}{d\,x^1}\,f\right)\,\left(\frac{d}{d\,s}\,x^1\right)\tag{4.6.138}$$

ここで、ベクトル：$\overrightarrow{V}$ を下記のように定義する。

$$\overrightarrow{V}=\begin{pmatrix}\frac{d}{d\,s}\,x^1\\ \frac{d}{d\,s}\,x^2\\ \frac{d}{d\,s}\,x^3\end{pmatrix}\tag{4.6.139}$$

f の勾配は、

$$\nabla\,f=\begin{pmatrix}\frac{d}{d\,x^1}\,f\\ \frac{d}{d\,x^2}\,f\\ \frac{d}{d\,x^3}\,f\end{pmatrix}\tag{4.6.140}$$

上式を使って、$\frac{d}{d\,s}\,f$ は、

$$\frac{d}{d\,s}\,f=\nabla\,f\cdot\overrightarrow{V}$$

$\overrightarrow{V}$ は曲線に接しており、接ベクトルといわれる。

4.6.13.6　計量テンソル

「4.6.6.5 ベクトル内積の座標変換不変性」の微小変位ベクトルの長さの二乗を「4.6.13.1 反変的に変換する」から、

```
kill(all);
load("vect")$
DUVW1:matrix([del(u)],[del(v)],[del(w)]);
DX1:matrix([del(x)],[del(y)],[del(z)]);
depends([u,v,w],[x,y,z]);
D1:del(u)=diff(u);
D2:del(v)=diff(v);
D3:del(w)=diff(w);
DX11:coeff(rhs(D1),del(x));
DX12:coeff(rhs(D1),del(y));
DX13:coeff(rhs(D1),del(z));
DX21:coeff(rhs(D2),del(x));
DX22:coeff(rhs(D2),del(y));
DX23:coeff(rhs(D2),del(z));
DX31:coeff(rhs(D3),del(x));
DX32:coeff(rhs(D3),del(y));
DX33:coeff(rhs(D3),del(z));
DMT1:matrix([DX11,DX12,DX13],[DX21,DX22,
 DX23],[DX31,DX32,DX33]);
DMT2:DUVW1=DMT1.DX1;
subst([x=x^"1",y=x^"2",z=x^"3"],DMT2);
DMT3:subst([u=x^"'1",v=x^"'2",w=x^"'3"],%);
DMT4:transpose(lhs(DMT3)).lhs(DMT3);
DMT5:transpose(rhs(DMT3)).rhs(DMT3);
DMT6:expand(DMT5);
```

(4.6.88) 式から、

$$ds^2 = \begin{pmatrix} dr^1 \\ dr^2 \\ dr^3 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dr^1 \\ dr^2 \\ dr^3 \end{pmatrix} \tag{4.6.141}$$

(4.6.126) 式から ds^2 を求め、u,v,w を $x^{'1},x^{'2},x^{'3}$ と、x,y,z を x^1,x^2,x^3 と置き換えると、

$$\begin{aligned}
ds^2 =& \mathrm{del}\left(x^{'3}\right)^2 + \mathrm{del}\left(x^{'2}\right)^2 + \mathrm{del}\left(x^{'1}\right)^2 \\
=& 2\left(\frac{d}{d\,x^2}\,x^{'3}\right)\left(\frac{d}{d\,x^3}\,x^{'3}\right)\mathrm{del}\left(x^2\right)\,\mathrm{del}\left(x^3\right) + 2\left(\frac{d}{d\,x^2}\,x^{'2}\right)\left(\frac{d}{d\,x^3}\,x^{'2}\right)\mathrm{del}\left(x^2\right)\,\mathrm{del}\left(x^3\right) \\
&+ 2\left(\frac{d}{d\,x^2}\,x^{'1}\right)\left(\frac{d}{d\,x^3}\,x^{'1}\right)\mathrm{del}\left(x^2\right)\,\mathrm{del}\left(x^3\right) \\
&+ 2\left(\frac{d}{d\,x^1}\,x^{'3}\right)\left(\frac{d}{d\,x^3}\,x^{'3}\right)\mathrm{del}\left(x^1\right)\,\mathrm{del}\left(x^3\right) + 2\left(\frac{d}{d\,x^1}\,x^{'2}\right)\left(\frac{d}{d\,x^3}\,x^{'2}\right)\mathrm{del}\left(x^1\right)\,\mathrm{del}\left(x^3\right) \\
&+ 2\left(\frac{d}{d\,x^1}\,x^{'1}\right)\left(\frac{d}{d\,x^3}\,x^{'1}\right)\mathrm{del}\left(x^1\right)\,\mathrm{del}\left(x^3\right) \\
&+ 2\left(\frac{d}{d\,x^1}\,x^{'3}\right)\left(\frac{d}{d\,x^2}\,x^{'3}\right)\mathrm{del}\left(x^1\right)\,\mathrm{del}\left(x^2\right) + 2\left(\frac{d}{d\,x^1}\,x^{'2}\right)\left(\frac{d}{d\,x^2}\,x^{'2}\right)\mathrm{del}\left(x^1\right)\,\mathrm{del}\left(x^2\right) \\
&+ 2\left(\frac{d}{d\,x^1}\,x^{'1}\right)\left(\frac{d}{d\,x^2}\,x^{'1}\right)\mathrm{del}\left(x^1\right)\,\mathrm{del}\left(x^2\right) \\
&+ \left(\frac{d}{d\,x^3}\,x^{'3}\right)^2\mathrm{del}\left(x^3\right)^2 + \left(\frac{d}{d\,x^3}\,x^{'2}\right)^2\mathrm{del}\left(x^3\right)^2 + \left(\frac{d}{d\,x^3}\,x^{'1}\right)^2\mathrm{del}\left(x^3\right)^2 \\
&+ \left(\frac{d}{d\,x^2}\,x^{'3}\right)^2\mathrm{del}\left(x^2\right)^2 + \left(\frac{d}{d\,x^2}\,x^{'2}\right)^2\mathrm{del}\left(x^2\right)^2 + \left(\frac{d}{d\,x^2}\,x^{'1}\right)^2\mathrm{del}\left(x^2\right)^2 \\
&+ \left(\frac{d}{d\,x^1}\,x^{'3}\right)^2\mathrm{del}\left(x^1\right)^2 + \left(\frac{d}{d\,x^1}\,x^{'2}\right)^2\mathrm{del}\left(x^1\right)^2 + \left(\frac{d}{d\,x^1}\,x^{'1}\right)^2\mathrm{del}\left(x^1\right)^2
\end{aligned} \tag{4.6.142}$$

上式を整理して、

$$
\begin{aligned}
ds^2 =& \mathrm{del}\left(x^{'3}\right)^2 + \mathrm{del}\left(x^{'2}\right)^2 + \mathrm{del}\left(x^{'1}\right)^2 \\
=& \left(\frac{d}{d\,x^3}\,x^{'3}\,\frac{d}{d\,x^2}\,x^{'3} + \frac{d}{d\,x^3}\,x^{'2}\,\frac{d}{d\,x^2}\,x^{'2} + \frac{d}{d\,x^3}\,x^{'1}\,\frac{d}{d\,x^2}\,x^{'1}\right)\mathrm{del}\left(x^3\right)\,\mathrm{del}\left(x^2\right) \\
&+ \left(\frac{d}{d\,x^2}\,x^{'3}\,\frac{d}{d\,x^3}\,x^{'3} + \frac{d}{d\,x^2}\,x^{'2}\,\frac{d}{d\,x^3}\,x^{'2} + \frac{d}{d\,x^2}\,x^{'1}\,\frac{d}{d\,x^3}\,x^{'1}\right)\mathrm{del}\left(x^2\right)\,\mathrm{del}\left(x^3\right) \\
&+ \left(\frac{d}{d\,x^3}\,x^{'3}\,\frac{d}{d\,x^1}\,x^{'3} + \frac{d}{d\,x^3}\,x^{'2}\,\frac{d}{d\,x^1}\,x^{'2} + \frac{d}{d\,x^3}\,x^{'1}\,\frac{d}{d\,x^1}\,x^{'1}\right)\mathrm{del}\left(x^3\right)\,\mathrm{del}\left(x^1\right) \\
&+ \left(\frac{d}{d\,x^1}\,x^{'3}\,\frac{d}{d\,x^3}\,x^{'3} + \frac{d}{d\,x^1}\,x^{'2}\,\frac{d}{d\,x^3}\,x^{'2} + \frac{d}{d\,x^1}\,x^{'1}\,\frac{d}{d\,x^3}\,x^{'1}\right)\mathrm{del}\left(x^1\right)\,\mathrm{del}\left(x^3\right) \\
&+ \left(\frac{d}{d\,x^2}\,x^{'3}\,\frac{d}{d\,x^1}\,x^{'3} + \frac{d}{d\,x^2}\,x^{'2}\,\frac{d}{d\,x^1}\,x^{'2} + \frac{d}{d\,x^2}\,x^{'1}\,\frac{d}{d\,x^1}\,x^{'1}\right)\mathrm{del}\left(x^2\right)\,\mathrm{del}\left(x^1\right) \\
&+ \left(\frac{d}{d\,x^1}\,x^{'3}\,\frac{d}{d\,x^2}\,x^{'3} + \frac{d}{d\,x^1}\,x^{'2}\,\frac{d}{d\,x^2}\,x^{'2} + \frac{d}{d\,x^1}\,x^{'1}\,\frac{d}{d\,x^2}\,x^{'1}\right)\mathrm{del}\left(x^1\right)\,\mathrm{del}\left(x^2\right) \\
&+ \left(\frac{d}{d\,x^3}\,x^{'3}\,\frac{d}{d\,x^3}\,x^{'3} + \frac{d}{d\,x^3}\,x^{'2}\,\frac{d}{d\,x^3}\,x^{'2} + \frac{d}{d\,x^3}\,x^{'1}\,\frac{d}{d\,x^3}\,x^{'1}\right)\mathrm{del}\left(x^3\right)\mathrm{del}\left(x^3\right) \\
&+ \left(\frac{d}{d\,x^2}\,x^{'3}\,\frac{d}{d\,x^2}\,x^{'3} + \frac{d}{d\,x^2}\,x^{'2}\,\frac{d}{d\,x^2}\,x^{'2} + \frac{d}{d\,x^2}\,x^{'1}\,\frac{d}{d\,x^2}\,x^{'1}\right)\mathrm{del}\left(x^2\right)\mathrm{del}\left(x^2\right) \\
&+ \left(\frac{d}{d\,x^1}\,x^{'3}\,\frac{d}{d\,x^1}\,x^{'3} + \frac{d}{d\,x^1}\,x^{'2}\,\frac{d}{d\,x^1}\,x^{'2} + \frac{d}{d\,x^1}\,x^{'1}\,\frac{d}{d\,x^1}\,x^{'1}\right)\mathrm{del}\left(x^1\right)\mathrm{del}\left(x^1\right)
\end{aligned}
\tag{4.6.143}
$$

上式と (4.6.141) 式から、g_{ij} を求めると、

$$
\begin{aligned}
g_{11} =& \frac{d}{d\,x^1}\,x^{'3}\,\frac{d}{d\,x^1}\,x^{'3} + \frac{d}{d\,x^1}\,x^{'2}\,\frac{d}{d\,x^1}\,x^{'2} + \frac{d}{d\,x^1}\,x^{'1}\,\frac{d}{d\,x^1}\,x^{'1} \\
g_{22} =& \frac{d}{d\,x^2}\,x^{'3}\,\frac{d}{d\,x^2}\,x^{'3} + \frac{d}{d\,x^2}\,x^{'2}\,\frac{d}{d\,x^2}\,x^{'2} + \frac{d}{d\,x^2}\,x^{'1}\,\frac{d}{d\,x^2}\,x^{'1} \\
g_{33} =& \frac{d}{d\,x^3}\,x^{'3}\,\frac{d}{d\,x^3}\,x^{'3} + \frac{d}{d\,x^3}\,x^{'2}\,\frac{d}{d\,x^3}\,x^{'2} + \frac{d}{d\,x^3}\,x^{'1}\,\frac{d}{d\,x^3}\,x^{'1} \\
g_{12} =& \frac{d}{d\,x^1}\,x^{'3}\,\frac{d}{d\,x^2}\,x^{'3} + \frac{d}{d\,x^1}\,x^{'2}\,\frac{d}{d\,x^2}\,x^{'2} + \frac{d}{d\,x^1}\,x^{'1}\,\frac{d}{d\,x^2}\,x^{'1} \\
g_{21} =& \frac{d}{d\,x^2}\,x^{'3}\,\frac{d}{d\,x^1}\,x^{'3} + \frac{d}{d\,x^2}\,x^{'2}\,\frac{d}{d\,x^1}\,x^{'2} + \frac{d}{d\,x^2}\,x^{'1}\,\frac{d}{d\,x^1}\,x^{'1} \\
g_{13} =& \frac{d}{d\,x^1}\,x^{'3}\,\frac{d}{d\,x^3}\,x^{'3} + \frac{d}{d\,x^1}\,x^{'2}\,\frac{d}{d\,x^3}\,x^{'2} + \frac{d}{d\,x^1}\,x^{'1}\,\frac{d}{d\,x^3}\,x^{'1} \\
g_{31} =& \frac{d}{d\,x^3}\,x^{'3}\,\frac{d}{d\,x^1}\,x^{'3} + \frac{d}{d\,x^3}\,x^{'2}\,\frac{d}{d\,x^1}\,x^{'2} + \frac{d}{d\,x^3}\,x^{'1}\,\frac{d}{d\,x^1}\,x^{'1} \\
g_{23} =& \frac{d}{d\,x^2}\,x^{'3}\,\frac{d}{d\,x^3}\,x^{'3} + \frac{d}{d\,x^2}\,x^{'2}\,\frac{d}{d\,x^3}\,x^{'2} + \frac{d}{d\,x^2}\,x^{'1}\,\frac{d}{d\,x^3}\,x^{'1} \\
g_{32} =& \frac{d}{d\,x^3}\,x^{'3}\,\frac{d}{d\,x^2}\,x^{'3} + \frac{d}{d\,x^3}\,x^{'2}\,\frac{d}{d\,x^2}\,x^{'2} + \frac{d}{d\,x^3}\,x^{'1}\,\frac{d}{d\,x^2}\,x^{'1}
\end{aligned}
\tag{4.6.144}
$$

上式を縮約すると、

$$
g_{ij} = \frac{d}{d\,x^i}\,x^{'3}\,\frac{d}{d\,x^j}\,x^{'3} + \frac{d}{d\,x^i}\,x^{'2}\,\frac{d}{d\,x^j}\,x^{'2} + \frac{d}{d\,x^i}\,x^{'1}\,\frac{d}{d\,x^j}\,x^{'1} \tag{4.6.145}
$$

更に縮約すると、

$$
g_{ij} = \frac{d}{d\,x^i}\,x^{'m}\,\frac{d}{d\,x^j}\,x^{'m} \tag{4.6.146}
$$

(4.6.144) 式と $g_{ij} = \overrightarrow{e_i} \cdot \overrightarrow{e_j}$ から、

$$
\overrightarrow{e_1} = \begin{pmatrix} \frac{d}{d\,x^1}\,x^{'1} \\ \frac{d}{d\,x^1}\,x^{'2} \\ \frac{d}{d\,x^1}\,x^{'3} \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{e_2} = \begin{pmatrix} \frac{d}{d\,x^2}\,x^{'1} \\ \frac{d}{d\,x^2}\,x^{'2} \\ \frac{d}{d\,x^2}\,x^{'3} \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{e_3} = \begin{pmatrix} \frac{d}{d\,x^3}\,x^{'1} \\ \frac{d}{d\,x^3}\,x^{'2} \\ \frac{d}{d\,x^3}\,x^{'3} \end{pmatrix} \tag{4.6.147}
$$

(1) 極座標系の計量テンソル

極座標系：r, θ, ϕ と xyz 座標系の関係は (4.5.17) 式から下記である。

$$x = \cos(\phi)\, r \sin(\theta), y = \sin(\phi)\, r \sin(\theta), z = r\cos(\theta) \tag{4.6.148}$$

```
kill(all);
D11:'diff(x^"'1",x^"1");
D12:'diff(x^"'1",x^"2");
D13:'diff(x^"'1",x^"3");
D21:'diff(x^"'2",x^"1");
D22:'diff(x^"'2",x^"2");
D23:'diff(x^"'2",x^"3");
D31:'diff(x^"'3",x^"1");
D32:'diff(x^"'3",x^"2");
D33:'diff(x^"'3",x^"3");
G11:g[11]=D11*D11+D21*D21+D31*D31;
G22:g[22]=D12*D12+D22*D22+D32*D32;
G33:g[33]=D13*D13+D23*D23+D33*D33;
G12:g[12]=D11*D12+D21*D22+D31*D32;
G13:g[13]=D11*D13+D21*D23+D31*D33;
G23:g[23]=D12*D13+D22*D23+D32*D33;
GG1:matrix([g[11],g[12],g[13]],[g[21],g[22],
 g[23]],[g[31],g[32],g[33]]);
X1:x=r*cos(\phi)*sin(\theta);
Y1:y=r*sin(\phi)*sin(\theta);
Z1:z=r*cos(\theta);
LI1:[x^"'1"=x,x^"'2"=y,x^"'3"=z,x^"1"=r,
 x^"2"=\theta,x^"3"=\phi,X1,Y1,Z1];
subst(LI1,G11);
ev(%,diff);
GG11:trigsimp(%);
subst(LI1,G11);
ev(%,diff);
GG11:trigsimp(%);
subst(LI1,G22);
ev(%,diff);
GG22:trigsimp(%);
subst(LI1,G33);
ev(%,diff);
GG33:trigsimp(%);
subst(LI1,G12);
ev(%,diff);
GG12:trigsimp(%);
subst(LI1,G13);
ev(%,diff);
GG13:trigsimp(%);
subst(LI1,G23);
ev(%,diff);
GG23:trigsimp(%);
GG1=subst([g[21]=g[12],g[31]=g[13],
 g[32]=g[23],GG11,GG22,GG33,GG12,
  GG13,GG23],GG1);
```

(4.6.144) 式の x'^1, x'^2, x'^3 を x, y, x に、x^1, x^2, x^3 を r, ϕ, θ と置き換え、(4.6.148) 式を代入すると、極座標系の計量テンソル：g_{ij} は下記となり、非対角は零となる。これは直交座標系であることを示している。

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin(\theta)^2 \end{pmatrix} \tag{4.6.149}$$

また、g^{ij} は (4.6.34) 式から、上式の逆行列で得られ、

$$\begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} & g^{13} \\ g^{21} & g^{22} & g^{23} \\ g^{31} & g^{32} & g^{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \sin(\theta)^2} \end{pmatrix} \tag{4.6.150}$$

(2) 円柱座標系の計量テンソル

円柱座標系：r, θ, p と xyz 座標系の関係は (4.5.17) 式から下記である。

$$x = \cos(\theta)\ r, y = \sin(\theta)\ r, z = p \tag{4.6.151}$$

```
kill(all);
D11:'diff(x^"'1",x^"1");
D12:'diff(x^"'1",x^"2");
D13:'diff(x^"'1",x^"3");
D21:'diff(x^"'2",x^"1");
D22:'diff(x^"'2",x^"2");
D23:'diff(x^"'2",x^"3");
D31:'diff(x^"'3",x^"1");
D32:'diff(x^"'3",x^"2");
D33:'diff(x^"'3",x^"3");
G11:g[11]=D11*D11+D21*D21+D31*D31;
G22:g[22]=D12*D12+D22*D22+D32*D32;
G33:g[33]=D13*D13+D23*D23+D33*D33;
G12:g[12]=D11*D12+D21*D22+D31*D32;
G13:g[13]=D11*D13+D21*D23+D31*D33;
G23:g[23]=D12*D13+D22*D23+D32*D33;
GG1:matrix([g[11],g[12],g[13]],[g[21],g[22],
 g[23]],[g[31],g[32],g[33]]);
X1:x=r*cos(\theta);
Y1:y=r*sin(\theta);
Z1:z=p;
LI1:[x^"'1"=x,x^"'2"=y,x^"'3"=z,x^"1"=r,
 x^"2"=\theta,x^"3"=p,X1,Y1,Z1];
subst(LI1,G11);
ev(%,diff);
GG11:trigsimp(%);
subst(LI1,G11);
ev(%,diff);
GG11:trigsimp(%);
subst(LI1,G22);
ev(%,diff);
GG22:trigsimp(%);
subst(LI1,G33);
ev(%,diff);
GG33:trigsimp(%);
subst(LI1,G12);
ev(%,diff);
GG12:trigsimp(%);
subst(LI1,G13);
ev(%,diff);
GG13:trigsimp(%);
subst(LI1,G23);
ev(%,diff);
GG23:trigsimp(%);
GG1=subst([g[21]=g[12],g[31]=g[13],
 g[32]=g[23],GG11,GG22,GG33,GG12,
  GG13,GG23],GG1);
```

(4.6.144) 式の $x^{'1}, x^{'2}, x^{'3}$ を x, y, x に、x^1, x^2, x^3 を r, θ, p と置き換え、(4.6.151) 式を代入すると、円柱座標系の計量テンソルは下記となり、非対角は零となる。これは直交座標系であることを示している。

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.6.152}$$

また、g^{ij} は (4.6.34) 式から、上式の逆行列で得られ、

$$\begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} & g^{13} \\ g^{21} & g^{22} & g^{23} \\ g^{31} & g^{32} & g^{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.6.153}$$

4.6.13.7　計量テンソルの座標変換

x^1, x^2, x^3 座標系の $f(x^1, x^2, x^3)$ を $x^{`1}, x^{`2}, x^{`3}$ 座標系の $f(x^{`1}, x^{`2}, x^{`3})$ に変換する。ここで、$x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$、$x^{`1} = u, x^{`2} = v, x^{`3} = z$ と置き換える。

```
kill(all);
load("vect")$
depends([x,y,z],[u,v,w]);
depends([f],[x,y,z]);
DFU1:'diff(f,u)=diff(f,u);
DFV1:'diff(f,v)=diff(f,v);
DFW1:'diff(f,w)=diff(f,w);
EU1:'diff(f,u)=e[u];
EV1:'diff(f,v)=e[v];
EW1:'diff(f,w)=e[w];
EX1:'diff(f,x)=e[x];
EY1:'diff(f,y)=e[y];
EZ1:'diff(f,z)=e[z];
DFU2:subst([EU1,EV1,EW1,EX1,EY1,EZ1],DFU1);
DFV2:subst([EU1,EV1,EW1,EX1,EY1,EZ1],DFV1);
DFW2:subst([EU1,EV1,EW1,EX1,EY1,EZ1],DFW1);
DFU2*DFU2;
GUU1:expand(%);
DFU2*DFV2;
GUV1:expand(%);
DFU2*DFW2;
GUW1:expand(%);
DFV2*DFU2;
GVU1:expand(%);
DFV2*DFV2;
GVV1:expand(%);
DFV2*DFW2;
GVW1:expand(%);
DFW2*DFU2;
GWU1:expand(%);
DFW2*DFV2;
GWV1:expand(%);
DFW2*DFW2;
GWW1:expand(%);
LI1:[x=x^"1",y=x^"2",z=x^"3",u=x^"'1",
  v=x^"'2",w=x^"'3"];
subst(LI1,GUU1);
subst(LI1,GUV1);
subst(LI1,GUW1);
subst(LI1,GVU1);
subst(LI1,GVV1);
subst(LI1,GVW1);
subst(LI1,GWU1);
subst(LI1,GWV1);
subst(LI1,GWW1);
```

x, y, z が u, v, w の関数であるとして、f を u, v, w で微分すると、

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{d\,u}\,f &= \left(\frac{d}{d\,z}\,f\right)\left(\frac{d}{d\,u}\,z\right)+\left(\frac{d}{d\,y}\,f\right)\left(\frac{d}{d\,u}\,y\right)\\
&\quad+\left(\frac{d}{d\,x}\,f\right)\left(\frac{d}{d\,u}\,x\right)\\
\frac{d}{d\,v}\,f &= \left(\frac{d}{d\,z}\,f\right)\left(\frac{d}{d\,v}\,z\right)+\left(\frac{d}{d\,y}\,f\right)\left(\frac{d}{d\,v}\,y\right)\\
&\quad+\left(\frac{d}{d\,x}\,f\right)\left(\frac{d}{d\,v}\,x\right)\\
\frac{d}{d\,w}\,f &= \left(\frac{d}{d\,z}\,f\right)\left(\frac{d}{d\,w}\,z\right)+\left(\frac{d}{d\,y}\,f\right)\left(\frac{d}{d\,w}\,y\right)\\
&\quad+\left(\frac{d}{d\,x}\,f\right)\left(\frac{d}{d\,w}\,x\right)
\end{aligned}
\tag{4.6.154}
$$

上式に下記の置き換えを行うと、

$$
\frac{d}{d\,u}\,f = e_u,\ \frac{d}{d\,v}\,f = e_v,\ \frac{d}{d\,w}\,f = e_w
$$

$$
\frac{d}{d\,x}\,f = e_x,\ \frac{d}{d\,y}\,f = e_y,\ \frac{d}{d\,z}\,f = e_z
$$

$$
\begin{aligned}
e_u &= e_z\left(\frac{d}{d\,u}\,z\right)+e_y\left(\frac{d}{d\,u}\,y\right)+e_x\left(\frac{d}{d\,u}\,x\right)\\
e_v &= e_z\left(\frac{d}{d\,v}\,z\right)+e_y\left(\frac{d}{d\,v}\,y\right)+e_x\left(\frac{d}{d\,v}\,x\right)\\
e_w &= e_z\left(\frac{d}{d\,w}\,z\right)+e_y\left(\frac{d}{d\,w}\,y\right)+e_x\left(\frac{d}{d\,w}\,x\right)
\end{aligned}
\tag{4.6.155}
$$

(4.6.155) 式の e_u, e_v, e_w を相互に掛け、展開すると下記となる。

$$
\begin{aligned}
e_u^2 =& e_z^2 \left(\frac{d}{d\,u}\,z\right)^2 + 2\,e_y\,\left(\frac{d}{d\,u}\,y\right)\,e_z\,\left(\frac{d}{d\,u}\,z\right) + 2\,e_x\,\left(\frac{d}{d\,u}\,x\right)\,e_z\,\left(\frac{d}{d\,u}\,z\right)\\
&+ e_y^2 \left(\frac{d}{d\,u}\,y\right)^2 + 2\,e_x\,\left(\frac{d}{d\,u}\,x\right)\,e_y\,\left(\frac{d}{d\,u}\,y\right) + e_x^2 \left(\frac{d}{d\,u}\,x\right)^2\\
e_u\,e_v =& e_z^2\,\left(\frac{d}{d\,u}\,z\right)\,\left(\frac{d}{d\,v}\,z\right) + e_y\,\left(\frac{d}{d\,u}\,y\right)\,e_z\,\left(\frac{d}{d\,v}\,z\right) + e_x\,\left(\frac{d}{d\,u}\,x\right)\,e_z\,\left(\frac{d}{d\,v}\,z\right)\\
&+ e_y\,\left(\frac{d}{d\,v}\,y\right)\,e_z\,\left(\frac{d}{d\,u}\,z\right) + e_x\,\left(\frac{d}{d\,v}\,x\right)\,e_z\,\left(\frac{d}{d\,u}\,z\right) + e_y^2\,\left(\frac{d}{d\,u}\,y\right)\,\left(\frac{d}{d\,v}\,y\right)\\
&+ e_x\,\left(\frac{d}{d\,u}\,x\right)\,e_y\,\left(\frac{d}{d\,v}\,y\right) + e_x\,\left(\frac{d}{d\,v}\,x\right)\,e_y\,\left(\frac{d}{d\,u}\,y\right) + e_x^2\,\left(\frac{d}{d\,u}\,x\right)\,\left(\frac{d}{d\,v}\,x\right)\\
e_u\,e_w =& e_z^2\,\left(\frac{d}{d\,u}\,z\right)\,\left(\frac{d}{d\,w}\,z\right) + e_y\,\left(\frac{d}{d\,u}\,y\right)\,e_z\,\left(\frac{d}{d\,w}\,z\right) + e_x\,\left(\frac{d}{d\,u}\,x\right)\,e_z\,\left(\frac{d}{d\,w}\,z\right)\\
&+ e_y\,\left(\frac{d}{d\,w}\,y\right)\,e_z\,\left(\frac{d}{d\,u}\,z\right) + e_x\,\left(\frac{d}{d\,w}\,x\right)\,e_z\,\left(\frac{d}{d\,u}\,z\right) + e_y^2\,\left(\frac{d}{d\,u}\,y\right)\,\left(\frac{d}{d\,w}\,y\right)\\
&+ e_x\,\left(\frac{d}{d\,u}\,x\right)\,e_y\,\left(\frac{d}{d\,w}\,y\right) + e_x\,\left(\frac{d}{d\,w}\,x\right)\,e_y\,\left(\frac{d}{d\,u}\,y\right) + e_x^2\,\left(\frac{d}{d\,u}\,x\right)\,\left(\frac{d}{d\,w}\,x\right)\\
e_u\,e_v =& e_z^2\,\left(\frac{d}{d\,u}\,z\right)\,\left(\frac{d}{d\,v}\,z\right) + e_y\,\left(\frac{d}{d\,u}\,y\right)\,e_z\,\left(\frac{d}{d\,v}\,z\right) + e_x\,\left(\frac{d}{d\,u}\,x\right)\,e_z\,\left(\frac{d}{d\,v}\,z\right)\\
&+ e_y\,\left(\frac{d}{d\,v}\,y\right)\,e_z\,\left(\frac{d}{d\,u}\,z\right) + e_x\,\left(\frac{d}{d\,v}\,x\right)\,e_z\,\left(\frac{d}{d\,u}\,z\right) + e_y^2\,\left(\frac{d}{d\,u}\,y\right)\,\left(\frac{d}{d\,v}\,y\right)\\
&+ e_x\,\left(\frac{d}{d\,u}\,x\right)\,e_y\,\left(\frac{d}{d\,v}\,y\right) + e_x\,\left(\frac{d}{d\,v}\,x\right)\,e_y\,\left(\frac{d}{d\,u}\,y\right) + e_x^2\,\left(\frac{d}{d\,u}\,x\right)\,\left(\frac{d}{d\,v}\,x\right)\\
e_v^2 =& e_z^2 \left(\frac{d}{d\,v}\,z\right)^2 + 2\,e_y\,\left(\frac{d}{d\,v}\,y\right)\,e_z\,\left(\frac{d}{d\,v}\,z\right) + 2\,e_x\,\left(\frac{d}{d\,v}\,x\right)\,e_z\,\left(\frac{d}{d\,v}\,z\right)\\
&+ e_y^2 \left(\frac{d}{d\,v}\,y\right)^2 + 2\,e_x\,\left(\frac{d}{d\,v}\,x\right)\,e_y\,\left(\frac{d}{d\,v}\,y\right) + e_x^2 \left(\frac{d}{d\,v}\,x\right)^2\\
e_v\,e_w =& e_z^2\,\left(\frac{d}{d\,v}\,z\right)\,\left(\frac{d}{d\,w}\,z\right) + e_y\,\left(\frac{d}{d\,v}\,y\right)\,e_z\,\left(\frac{d}{d\,w}\,z\right) + e_x\,\left(\frac{d}{d\,v}\,x\right)\,e_z\,\left(\frac{d}{d\,w}\,z\right)\\
&+ e_y\,\left(\frac{d}{d\,w}\,y\right)\,e_z\,\left(\frac{d}{d\,v}\,z\right) + e_x\,\left(\frac{d}{d\,w}\,x\right)\,e_z\,\left(\frac{d}{d\,v}\,z\right) + e_y^2\,\left(\frac{d}{d\,v}\,y\right)\,\left(\frac{d}{d\,w}\,y\right)\\
&+ e_x\,\left(\frac{d}{d\,v}\,x\right)\,e_y\,\left(\frac{d}{d\,w}\,y\right) + e_x\,\left(\frac{d}{d\,w}\,x\right)\,e_y\,\left(\frac{d}{d\,v}\,y\right) + e_x^2\,\left(\frac{d}{d\,v}\,x\right)\,\left(\frac{d}{d\,w}\,x\right)\\
e_u\,e_w =& e_z^2\,\left(\frac{d}{d\,u}\,z\right)\,\left(\frac{d}{d\,w}\,z\right) + e_y\,\left(\frac{d}{d\,u}\,y\right)\,e_z\,\left(\frac{d}{d\,w}\,z\right) + e_x\,\left(\frac{d}{d\,u}\,x\right)\,e_z\,\left(\frac{d}{d\,w}\,z\right)\\
&+ e_y\,\left(\frac{d}{d\,w}\,y\right)\,e_z\,\left(\frac{d}{d\,u}\,z\right) + e_x\,\left(\frac{d}{d\,w}\,x\right)\,e_z\,\left(\frac{d}{d\,u}\,z\right) + e_y^2\,\left(\frac{d}{d\,u}\,y\right)\,\left(\frac{d}{d\,w}\,y\right)\\
&+ e_x\,\left(\frac{d}{d\,u}\,x\right)\,e_y\,\left(\frac{d}{d\,w}\,y\right) + e_x\,\left(\frac{d}{d\,w}\,x\right)\,e_y\,\left(\frac{d}{d\,u}\,y\right) + e_x^2\,\left(\frac{d}{d\,u}\,x\right)\,\left(\frac{d}{d\,w}\,x\right)\\
e_v\,e_w =& e_z^2\,\left(\frac{d}{d\,v}\,z\right)\,\left(\frac{d}{d\,w}\,z\right) + e_y\,\left(\frac{d}{d\,v}\,y\right)\,e_z\,\left(\frac{d}{d\,w}\,z\right) + e_x\,\left(\frac{d}{d\,v}\,x\right)\,e_z\,\left(\frac{d}{d\,w}\,z\right)\\
&+ e_y\,\left(\frac{d}{d\,w}\,y\right)\,e_z\,\left(\frac{d}{d\,v}\,z\right) + e_x\,\left(\frac{d}{d\,w}\,x\right)\,e_z\,\left(\frac{d}{d\,v}\,z\right) + e_y^2\,\left(\frac{d}{d\,v}\,y\right)\,\left(\frac{d}{d\,w}\,y\right)\\
&+ e_x\,\left(\frac{d}{d\,v}\,x\right)\,e_y\,\left(\frac{d}{d\,w}\,y\right) + e_x\,\left(\frac{d}{d\,w}\,x\right)\,e_y\,\left(\frac{d}{d\,v}\,y\right) + e_x^2\,\left(\frac{d}{d\,v}\,x\right)\,\left(\frac{d}{d\,w}\,x\right)\\
e_w^2 =& e_z^2 \left(\frac{d}{d\,w}\,z\right)^2 + 2\,e_y\,\left(\frac{d}{d\,w}\,y\right)\,e_z\,\left(\frac{d}{d\,w}\,z\right) + 2\,e_x\,\left(\frac{d}{d\,w}\,x\right)\,e_z\,\left(\frac{d}{d\,w}\,z\right)\\
&+ e_y^2 \left(\frac{d}{d\,w}\,y\right)^2 + 2\,e_x\,\left(\frac{d}{d\,w}\,x\right)\,e_y\,\left(\frac{d}{d\,w}\,y\right) + e_x^2 \left(\frac{d}{d\,w}\,x\right)^2
\end{aligned}
\tag{4.6.156}
$$

ここで、$x=x^1, y=x^2, z=x^3$、$u=x^{`1}, v=x^{`2}, w=x^{`3}$ と置き換え、計量テンソルの定義から、$e_x\,e_x=g_{11},\ e_x\,e_y=g_{12},\ e_x\,e_z=g_{13}, e_y\,e_x=g_{21},\ e_y\,e_y=g_{22},\ e_y\,e_z=g_{23}, e_z\,e_x=g_{31},\ e_z\,e_y=g_{32},\ e_z\,e_z=g_{33}, e_u\,e_u=g^{`}_{11},\ e_u\,e_v=g^{`}_{12},\ e_u\,e_w=g^{`}_{13}, e_v\,e_u=g^{`}_{21},\ e_v\,e_v=g^{`}_{22},\ e_v\,e_w=g^{`}_{23}, e_w\,e_u=g^{`}_{31},\ e_w\,e_v=g^{`}_{32},\ e_w\,e_w=g^{`}_{33}$ と置き換えると、

$$
\begin{aligned}
g^{`}_{11} =&\left(\frac{d}{d\,x'^1}\,x^3\right)^2 g_{33}+2\left(\frac{d}{d\,x'^1}\,x^2\right)\left(\frac{d}{d\,x'^1}\,x^3\right)g_{23}+2\left(\frac{d}{d\,x'^1}\,x^1\right)\left(\frac{d}{d\,x'^1}\,x^3\right)g_{13}\\
&+\left(\frac{d}{d\,x'^1}\,x^2\right)^2 g_{22}+2\left(\frac{d}{d\,x'^1}\,x^1\right)\left(\frac{d}{d\,x'^1}\,x^2\right)g_{12}+\left(\frac{d}{d\,x'^1}\,x^1\right)^2 g_{11}\\
g^{`}_{12} =&\left(\frac{d}{d\,x'^1}\,x^3\right)\left(\frac{d}{d\,x'^2}\,x^3\right)g_{33}+\left(\frac{d}{d\,x'^1}\,x^2\right)\left(\frac{d}{d\,x'^2}\,x^3\right)g_{23}+\left(\frac{d}{d\,x'^1}\,x^1\right)\left(\frac{d}{d\,x'^2}\,x^3\right)g_{13}\\
&+\left(\frac{d}{d\,x'^2}\,x^2\right)\left(\frac{d}{d\,x'^1}\,x^3\right)g_{32}+\left(\frac{d}{d\,x'^2}\,x^1\right)\left(\frac{d}{d\,x'^1}\,x^3\right)g_{31}+\left(\frac{d}{d\,x'^1}\,x^2\right)\left(\frac{d}{d\,x'^2}\,x^2\right)g_{22}\\
&+\left(\frac{d}{d\,x'^1}\,x^1\right)\left(\frac{d}{d\,x'^2}\,x^2\right)g_{12}+\left(\frac{d}{d\,x'^2}\,x^1\right)\left(\frac{d}{d\,x'^1}\,x^2\right)g_{21}+\left(\frac{d}{d\,x'^1}\,x^1\right)\left(\frac{d}{d\,x'^2}\,x^1\right)g_{11}\\
g^{`}_{13} =&\left(\frac{d}{d\,x'^1}\,x^3\right)\left(\frac{d}{d\,x'^3}\,x^3\right)g_{33}+\left(\frac{d}{d\,x'^1}\,x^2\right)\left(\frac{d}{d\,x'^3}\,x^3\right)g_{23}+\left(\frac{d}{d\,x'^1}\,x^1\right)\left(\frac{d}{d\,x'^3}\,x^3\right)g_{13}\\
&+\left(\frac{d}{d\,x'^3}\,x^2\right)\left(\frac{d}{d\,x'^1}\,x^3\right)g_{32}+\left(\frac{d}{d\,x'^3}\,x^1\right)\left(\frac{d}{d\,x'^1}\,x^3\right)g_{31}+\left(\frac{d}{d\,x'^1}\,x^2\right)\left(\frac{d}{d\,x'^3}\,x^2\right)g_{22}\\
&+\left(\frac{d}{d\,x'^1}\,x^1\right)\left(\frac{d}{d\,x'^3}\,x^2\right)g_{12}+\left(\frac{d}{d\,x'^3}\,x^1\right)\left(\frac{d}{d\,x'^1}\,x^2\right)g_{21}+\left(\frac{d}{d\,x'^1}\,x^1\right)\left(\frac{d}{d\,x'^3}\,x^1\right)g_{11}\\
g^{`}_{21} =&\left(\frac{d}{d\,x'^1}\,x^3\right)\left(\frac{d}{d\,x'^2}\,x^3\right)g_{33}+\left(\frac{d}{d\,x'^1}\,x^2\right)\left(\frac{d}{d\,x'^2}\,x^3\right)g_{23}+\left(\frac{d}{d\,x'^1}\,x^1\right)\left(\frac{d}{d\,x'^2}\,x^3\right)g_{13}\\
&+\left(\frac{d}{d\,x'^2}\,x^2\right)\left(\frac{d}{d\,x'^1}\,x^3\right)g_{32}+\left(\frac{d}{d\,x'^2}\,x^1\right)\left(\frac{d}{d\,x'^1}\,x^3\right)g_{31}+\left(\frac{d}{d\,x'^1}\,x^2\right)\left(\frac{d}{d\,x'^2}\,x^2\right)g_{22}\\
&+\left(\frac{d}{d\,x'^1}\,x^1\right)\left(\frac{d}{d\,x'^2}\,x^2\right)g_{12}+\left(\frac{d}{d\,x'^2}\,x^1\right)\left(\frac{d}{d\,x'^1}\,x^2\right)g_{21}+\left(\frac{d}{d\,x'^1}\,x^1\right)\left(\frac{d}{d\,x'^2}\,x^1\right)g_{11}\\
g^{`}_{22} =&\left(\frac{d}{d\,x'^2}\,x^3\right)^2 g_{33}+2\left(\frac{d}{d\,x'^2}\,x^2\right)\left(\frac{d}{d\,x'^2}\,x^3\right)g_{23}+2\left(\frac{d}{d\,x'^2}\,x^1\right)\left(\frac{d}{d\,x'^2}\,x^3\right)g_{13}\\
&+\left(\frac{d}{d\,x'^2}\,x^2\right)^2 g_{22}+2\left(\frac{d}{d\,x'^2}\,x^1\right)\left(\frac{d}{d\,x'^2}\,x^2\right)g_{12}+\left(\frac{d}{d\,x'^2}\,x^1\right)^2 g_{11}\\
g^{`}_{23} =&\left(\frac{d}{d\,x'^2}\,x^3\right)\left(\frac{d}{d\,x'^3}\,x^3\right)g_{33}+\left(\frac{d}{d\,x'^2}\,x^2\right)\left(\frac{d}{d\,x'^3}\,x^3\right)g_{23}+\left(\frac{d}{d\,x'^2}\,x^1\right)\left(\frac{d}{d\,x'^3}\,x^3\right)g_{13}\\
&+\left(\frac{d}{d\,x'^3}\,x^2\right)\left(\frac{d}{d\,x'^2}\,x^3\right)g_{32}+\left(\frac{d}{d\,x'^3}\,x^1\right)\left(\frac{d}{d\,x'^2}\,x^3\right)g_{31}+\left(\frac{d}{d\,x'^2}\,x^2\right)\left(\frac{d}{d\,x'^3}\,x^2\right)g_{22}\\
&+\left(\frac{d}{d\,x'^2}\,x^1\right)\left(\frac{d}{d\,x'^3}\,x^2\right)g_{12}+\left(\frac{d}{d\,x'^3}\,x^1\right)\left(\frac{d}{d\,x'^2}\,x^2\right)g_{21}+\left(\frac{d}{d\,x'^2}\,x^1\right)\left(\frac{d}{d\,x'^3}\,x^1\right)g_{11}\\
g^{`}_{31} =&\left(\frac{d}{d\,x'^1}\,x^3\right)\left(\frac{d}{d\,x'^3}\,x^3\right)g_{33}+\left(\frac{d}{d\,x'^1}\,x^2\right)\left(\frac{d}{d\,x'^3}\,x^3\right)g_{32}+\left(\frac{d}{d\,x'^1}\,x^1\right)\left(\frac{d}{d\,x'^3}\,x^3\right)g_{31}\\
&+\left(\frac{d}{d\,x'^3}\,x^2\right)\left(\frac{d}{d\,x'^1}\,x^3\right)g_{23}+\left(\frac{d}{d\,x'^3}\,x^1\right)\left(\frac{d}{d\,x'^1}\,x^3\right)g_{13}+\left(\frac{d}{d\,x'^1}\,x^2\right)\left(\frac{d}{d\,x'^3}\,x^2\right)g_{22}\\
&+\left(\frac{d}{d\,x'^1}\,x^1\right)\left(\frac{d}{d\,x'^3}\,x^2\right)g_{21}+\left(\frac{d}{d\,x'^3}\,x^1\right)\left(\frac{d}{d\,x'^1}\,x^2\right)g_{12}+\left(\frac{d}{d\,x'^1}\,x^1\right)\left(\frac{d}{d\,x'^3}\,x^1\right)g_{11}\\
g^{`}_{32} =&\left(\frac{d}{d\,x'^2}\,x^3\right)\left(\frac{d}{d\,x'^3}\,x^3\right)g_{33}+\left(\frac{d}{d\,x'^2}\,x^2\right)\left(\frac{d}{d\,x'^3}\,x^3\right)g_{32}+\left(\frac{d}{d\,x'^2}\,x^1\right)\left(\frac{d}{d\,x'^3}\,x^3\right)g_{31}\\
&+\left(\frac{d}{d\,x'^3}\,x^2\right)\left(\frac{d}{d\,x'^2}\,x^3\right)g_{23}+\left(\frac{d}{d\,x'^3}\,x^1\right)\left(\frac{d}{d\,x'^2}\,x^3\right)g_{13}+\left(\frac{d}{d\,x'^2}\,x^2\right)\left(\frac{d}{d\,x'^3}\,x^2\right)g_{22}\\
&+\left(\frac{d}{d\,x'^2}\,x^1\right)\left(\frac{d}{d\,x'^3}\,x^2\right)g_{21}+\left(\frac{d}{d\,x'^3}\,x^1\right)\left(\frac{d}{d\,x'^2}\,x^2\right)g_{12}+\left(\frac{d}{d\,x'^2}\,x^1\right)\left(\frac{d}{d\,x'^3}\,x^1\right)g_{11}\\
g^{`}_{33} =&\left(\frac{d}{d\,x'^3}\,x^3\right)^2 g_{33}+2\left(\frac{d}{d\,x'^3}\,x^2\right)\left(\frac{d}{d\,x'^3}\,x^3\right)g_{32}+2\left(\frac{d}{d\,x'^3}\,x^1\right)\left(\frac{d}{d\,x'^3}\,x^3\right)g_{31}\\
&+\left(\frac{d}{d\,x'^3}\,x^2\right)^2 g_{22}+2\,e_{x^1}\left(\frac{d}{d\,x'^3}\,x^1\right)\left(\frac{d}{d\,x'^3}\,x^2\right)g_{21}+\left(\frac{d}{d\,x'^3}\,x^1\right)^2 g_{11}
\end{aligned}
\tag{4.6.157}
$$

上式を縮約すると下記となり、、次頁の (4.6.171) 式の共変テンソルの座標変換の結果と一致している。

$$
g^{`}_{ij}=\frac{dx^k}{dx'^i}\,\frac{dx^l}{dx'^j}\,g_{kl}
\tag{4.6.158}
$$

```
kill(all);
load("vect")$
load(itensor)$
depends([x],[u]);
depends([g],[x]);
depends([gu],[u]);
GUX1:gu([i,j],[])='diff(x[a],u[i],1)
 *'diff(x[b],u[j],1)*g([a,b],[]);
ishow(%);
DLX1:g([l,b],[])*g([],[b,k])=
 \delta([l],[k]);
ishow(%);
DLX2:solve(DLX1,\delta([l],[k]))[1];
ishow(%);
DLU1:gu([i,a],[])*gu([],[a,j])=
 \Delta([i],[j]);
ishow(%);
DLU2:solve(DLU1,\Delta([i],[j]))[1];
ishow(%);
DLUX1:\Delta([i],[j])='diff(x[l],u[i],1)
 *'diff(u[j],x[k],1)*\delta([l],[k]);
ishow(%);
DLUX2:subst([DLX2,DLU2],DLUX1);
ishow(%);
GUX2:subst([a=l,j=a],GUX1);
ishow(%);
GUX21:subst([GUX2],DLUX2);
ishow(%);
GUX22:GUX21/g([l,b],[]);
ishow(%);
GUX23:GUX22*'diff(u[i],x[l],1)
 *'diff(u[a],x[b],1);
ishow(%);
GUX24:gu([],[a,j])=g([],[b,k])
 *('diff(u[a],x[b],1))*('diff(u[j],x[k],1));
ishow(%);
```

基底ベクトルの計量テンソル：$g_{i,j}$、双対基底ベクトルの計量テンソル：$g^{k,l}$ とし、x_i の関数、$gu_{i,j}$, $gu^{k,l}$ は u_i の関数とする。基底ベクトルの計量テンソルの座標変換関係式は (4.6.158) 式を書き換えて、

$$gu_{ij} = \left(\frac{d}{d\,u_i}\,x_a\right)\,g_{ab}\,\left(\frac{d}{d\,u_j}\,x_b\right) \tag{4.6.159}$$

基底ベクトルの計量テンソルと双対基底ベクトルの計量テンソルの関係は、

$$g^{bk}\,g_{lb} = \delta_l^k \tag{4.6.160}$$

$$gu^{aj}\,gu_{ia} = \delta u_i^j \tag{4.6.161}$$

δ_l^k は混合テンソルであるから、この座標変換関係式は、

$$\delta u_i^j = \left(\frac{d}{d\,x_k}\,u_j\right)\left(\frac{d}{d\,u_i}\,x_l\right)\,\delta_l^k \tag{4.6.162}$$

上式に (4.6.160) 式、(4.6.161) 式を代入すると、

$$gu^{aj}\,gu_{ia} = g^{bk}\,\left(\frac{d}{d\,x_k}\,u_j\right)\left(\frac{d}{d\,u_i}\,x_l\right)\,g_{lb} \tag{4.6.163}$$

(4.6.159) 式を書き直すと、

$$gu_{ia} = \left(\frac{d}{d\,u_a}\,x_b\right)\left(\frac{d}{d\,u_i}\,x_l\right)\,g_{lb}$$

(4.6.163) 式に上式を代入すると、

$$\begin{aligned} &gu^{aj}\,\left(\frac{d}{d\,u_a}\,x_b\right)\left(\frac{d}{d\,u_i}\,x_l\right)\,g_{lb} \\ &\quad = g^{bk}\,\left(\frac{d}{d\,x_k}\,u_j\right)\left(\frac{d}{d\,u_i}\,x_l\right)\,g_{lb} \end{aligned} \tag{4.6.164}$$

上式を整理すると、

$$gu^{aj}\,\left(\frac{d}{d\,u_a}\,x_b\right)\left(\frac{d}{d\,u_i}\,x_l\right) = g^{bk}\,\left(\frac{d}{d\,x_k}\,u_j\right)\left(\frac{d}{d\,u_i}\,x_l\right)$$

上式の両辺に $\left(\frac{d}{d\,x_b}\,u_a\right)\left(\frac{d}{d\,x_l}\,u_i\right)$ を掛けると、

$$\begin{aligned} &gu^{aj}\,\left(\frac{d}{d\,x_b}\,u_a\right)\left(\frac{d}{d\,u_a}\,x_b\right)\left(\frac{d}{d\,x_l}\,u_i\right)\left(\frac{d}{d\,u_i}\,x_l\right) \\ &\quad = g^{bk}\,\left(\frac{d}{d\,x_b}\,u_a\right)\left(\frac{d}{d\,x_l}\,u_i\right)\left(\frac{d}{d\,x_k}\,u_j\right)\left(\frac{d}{d\,u_i}\,x_l\right) \end{aligned} \tag{4.6.165}$$

上式で、$\left(\frac{d}{d\,x_b}\,u_a\right)\left(\frac{d}{d\,u_a}\,x_b\right) = 1$, $\left(\frac{d}{d\,x_l}\,u_i\right)\left(\frac{d}{d\,u_i}\,x_l\right) = 1$ であるから、双対基底ベクトルの計量テンソルの座標変換関係式は、

$$gu^{aj} = g^{bk}\,\left(\frac{d}{d\,x_b}\,u_a\right)\left(\frac{d}{d\,x_k}\,u_j\right) \tag{4.6.166}$$

4.6.13.8　ベクトル・テンソルの座標変換まとめ

ベクトル：$\overrightarrow{A}$ は反変成分、共変成分で表すと、

$$\overrightarrow{A} = A^i\,\overrightarrow{e_i} = A_i\,\overrightarrow{e^i} \tag{4.6.167}$$

ベクトルの反変成分の座標変換は、(4.6.131) 式から、もとの座標系の反変成分：A^j、新しい座標系の反変成分：A'^i とすると、

$$A'^i = \frac{dx'^i}{dx^j}\,A^j \tag{4.6.168}$$

ベクトルの共変成分の座標変換は、(4.6.137) 式から、もとの座標系の共変成分：A_j、新しい座標系の共変成分：$A_{'i}$ とすると、

$$A^{`}_i = \frac{dx^j}{dx'^i}\,A_j \tag{4.6.169}$$

(4.6.168) 式から、もとの座標系の反変テンソル成分：A^{kl}、新しい座標系の反変テンソル成分：$A^{`ij}$ とすると、

$$A^{`ij} = \frac{dx'^i}{dx^k}\,\frac{dx'^j}{dx^l}\,A^{kl} \tag{4.6.170}$$

(4.6.169) 式から、もとの座標系の共変テンソル成分：A_{kl}、新しい座標系の共変テンソル成分：$A_{`ij}$ とすると、

$$A^{`}_{ij} = \frac{dx^k}{dx'^i}\,\frac{dx^l}{dx'^j}\,A_{kl} \tag{4.6.171}$$

混合テンソルでは、(4.6.168) 式、(4.6.169) 式から、もとの座標系の混合テンソル成分：A^k_l、新しい座標系の混合テンソル成分：$A^{`i}_j$ とすると、

$$A^{`i}_j = \frac{dx^{`i}}{dx^k}\,\frac{dx^l}{dx'^j}\,A^k_l \tag{4.6.172}$$

4.6.14 ベクトル・テンソルの微分

4.6.14.1 反変ベクトルの微分 (クリストフェルの記号)

反変ベクトル：$\overrightarrow{A}$ の微分について検討する。

```
kill(all);
load("vect")$
load(itensor)$
depends([A,e],[x[j]]);
depends([u,v,w],[x[1],x[2],x[3],x[i],x[j]]);
A1:A=A([],[i])*e([i],[]);
ishow(%);
A11:lhs(A1)=sum(rhs(A1),i,1,3);
ishow(%);
DA1:diff(A1,x[j],1);
ishow(%);
DA11:lhs(DA1)=sum(rhs(DA1),i,1,3);
ishow(%);
```

反変ベクトル：$\overrightarrow{A}$ を基底ベクトル：$\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ で表し、基底ベクトルが x^1, x^2, x^3 の関数であるとする。反変ベクトル：$\overrightarrow{A}$ は、

$$\overrightarrow{A} = \overrightarrow{e_3}\, A^3 + \overrightarrow{e_2}\, A^2 + \overrightarrow{e_1}\, A^1 \tag{4.6.173}$$

反変ベクトル：$\overrightarrow{A}$ を x^3 で微分すると、

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\,x^3}\overrightarrow{A} =& \overrightarrow{e_3}\left(\frac{d}{d\,x^3}A^3\right) + \overrightarrow{e_2}\left(\frac{d}{d\,x^3}A^2\right)\\ &+ \overrightarrow{e_1}\left(\frac{d}{d\,x^3}A^1\right) + \left(\frac{d}{d\,x^3}\overrightarrow{e_3}\right)A^3\\ &+ \left(\frac{d}{d\,x^3}\overrightarrow{e_2}\right)A^2 + \left(\frac{d}{d\,x^3}\overrightarrow{e_1}\right)A^1\end{aligned} \tag{4.6.174}$$

上式を縮約すると、

$$\frac{d}{d\,x^j}\overrightarrow{A} = \overrightarrow{e_i}\left(\frac{d}{d\,x^j}A^i\right) + \left(\frac{d}{d\,x^j}\overrightarrow{e_i}\right)A^i \tag{4.6.175}$$

```
LI3:[x[i]=x([],[i]),x[j]=x([],[j]),
 x[k]=x([],[k])];
DEIJ0:diff(e([i],[]),x[j],1)=
 Gamma([i,j],[k])*e([k],[]);
ishow(%);
DEIJ1:lhs(DEIJ0)=sum(rhs(DEIJ0),k,1,3);
ishow(%);
DEIJ2:subst([LI3],DEIJ1);
ishow(%);
DE11:subst([i=1,j=1],DEIJ2);
DE111:ishow(%);
DE12:subst([i=1,j=2],DEIJ2);
DE121:ishow(%);
DE13:subst([i=1,j=3],DEIJ2);
DE131:ishow(%);
```

```
DE21:subst([i=2,j=1],DEIJ2);
DE211:ishow(%);
DE22:subst([i=2,j=2],DEIJ2);
DE221:ishow(%);
DE23:subst([i=2,j=3],DEIJ2);
DE231:ishow(%);
DE31:subst([i=3,j=1],DEIJ2);
DE311:ishow(%);
DE32:subst([i=3,j=2],DEIJ2);
DE321:ishow(%);
DE33:subst([i=3,j=3],DEIJ2);
DE331:ishow(%);
```

(4.6.175) 式の $\overrightarrow{e_i}$ の x^j による微分を、基底ベクトルと重み係数 (クリストフェルの記号)：Γ_{ij}^k で下記のように定義する。

$$\frac{d}{d\,x^j}\,\overrightarrow{e_i} = \overrightarrow{e_3}\,\Gamma_{ij}^3 + \overrightarrow{e_2}\,\Gamma_{ij}^2 + \overrightarrow{e_1}\,\Gamma_{ij}^1 \tag{4.6.176}$$

上式を縮約すると、

$$\frac{d}{d\,x^j}\,\overrightarrow{e_i} = \overrightarrow{e_k}\,\Gamma_{ij}^k \tag{4.6.177}$$

具体的には下記に示すように、27 個のクリストフェルの記号が必要となる。

$$\frac{d}{d\,x^1}\,\overrightarrow{e_1} = \Gamma_{11}^3\,\overrightarrow{e_3} + \Gamma_{11}^2\,\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_1}\,\Gamma_{11}^1$$

$$\frac{d}{d\,x^2}\,\overrightarrow{e_1} = \Gamma_{12}^3\,\overrightarrow{e_3} + \Gamma_{12}^2\,\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_1}\,\Gamma_{12}^1$$

$$\frac{d}{d\,x^3}\,\overrightarrow{e_1} = \Gamma_{13}^3\,\overrightarrow{e_3} + \Gamma_{13}^2\,\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_1}\,\Gamma_{13}^1$$

$$\frac{d}{d\,x^1}\,\overrightarrow{e_2} = \Gamma_{21}^3\,\overrightarrow{e_3} + \Gamma_{21}^2\,\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_1}\,\Gamma_{21}^1$$

$$\frac{d}{d\,x^2}\,\overrightarrow{e_2} = \Gamma_{22}^3\,\overrightarrow{e_3} + \Gamma_{22}^2\,\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_1}\,\Gamma_{22}^1$$

$$\frac{d}{d\,x^3}\,\overrightarrow{e_2} = \Gamma_{23}^3\,\overrightarrow{e_3} + \Gamma_{23}^2\,\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_1}\,\Gamma_{23}^1$$

$$\frac{d}{d\,x^1}\,\overrightarrow{e_3} = \Gamma_{31}^3\,\overrightarrow{e_3} + \Gamma_{31}^2\,\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_1}\,\Gamma_{31}^1$$

$$\frac{d}{d\,x^2}\,\overrightarrow{e_3} = \Gamma_{32}^3\,\overrightarrow{e_3} + \Gamma_{32}^2\,\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_1}\,\Gamma_{32}^1$$

$$\frac{d}{d\,x^2}\,\overrightarrow{e_3} = \Gamma_{32}^3\,\overrightarrow{e_3} + \Gamma_{32}^2\,\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_1}\,\Gamma_{32}^1$$

```
DEIJ0*e([],[l]);
DEIJL:ishow(%);
subst([k=l],DEIJL);
ishow(%);
Gamma([i,j],[l])=lhs(%);
DEIJL1:ishow(%);
e[i]=matrix([diff(u,x[i],1)],
 [diff(v,x[i],1)],[diff(w,x[i],1)]);
DEIJA:'diff(lhs(%),x[j],1)=
 diff(rhs(%),x[j],1);
e[j]=matrix([diff(u,x[j],1)],
 [diff(v,x[j],1)],[diff(w,x[j],1)]);
DEJIA:'diff(lhs(%),x[i],1)
 =diff(rhs(%),x[i],1);
lhs(DEIJA)=lhs(DEJIA);
lhs(DEIJL1)=ishow('diff(e[i],x[j],1))/2
 *e([],[l])+ishow('diff(e[j],x[i],1))/2
 *e([],[l]);
DEIJL2:ishow(%);
subst([LI3],%);
DEIJL21:ishow(%);
```

(4.6.177) 式に $\overrightarrow{e^l}$ を掛けると、

$$\overrightarrow{e^l}\left(\frac{d}{d\,x^j}\,\overrightarrow{e_i}\right)=\overrightarrow{e^l}\,\Gamma_{ij}^k\,\overrightarrow{e_k}$$

$\overrightarrow{e^l}\cdot\overrightarrow{e_k}=1$ at $l=k$　$\overrightarrow{e^l}\cdot\overrightarrow{e_k}=0$ at $l\neq k$　だから、$k\to l$ として、

$$\Gamma_{ij}^l=\overrightarrow{e^l}\left(\frac{d}{d\,x^j}\,\overrightarrow{e_i}\right) \tag{4.6.178}$$

基底ベクトルは (4.6.147) 式から、$x^{'1},x^{'2},x^{'3}$ を u,v,w と置き換えて、次式で表せる。

$$\overrightarrow{e_i}=\begin{pmatrix}\frac{d}{d\,x^i}\,u\\ \frac{d}{d\,x^i}\,v\\ \frac{d}{d\,x^i}\,w\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{e_j}=\begin{pmatrix}\frac{d}{d\,x^j}\,u\\ \frac{d}{d\,x^j}\,v\\ \frac{d}{d\,x^j}\,w\end{pmatrix}$$

上式を各々 x^i,x^j で微分すると、

$$\frac{d}{d\,x^j}\,\overrightarrow{e_i}=\begin{pmatrix}\frac{d^2}{d\,x^i\,d\,x^j}\,u\\ \frac{d^2}{d\,x^i\,d\,x^j}\,v\\ \frac{d^2}{d\,x^i\,d\,x^j}\,w\end{pmatrix},\quad \frac{d}{d\,x^i}\,\overrightarrow{e_j}=\begin{pmatrix}\frac{d^2}{d\,x^i\,d\,x^j}\,u\\ \frac{d^2}{d\,x^i\,d\,x^j}\,v\\ \frac{d^2}{d\,x^i\,d\,x^j}\,w\end{pmatrix}$$

上式の右辺は等しいので、

$$\frac{d}{d\,x^j}\,\overrightarrow{e_i}=\frac{d}{d\,x^i}\,\overrightarrow{e_j} \tag{4.6.179}$$

上式から、(4.6.178) 式は下記のように書き換えられる。

$$\Gamma_{ij}^l=\frac{\overrightarrow{e^l}\,\left(\frac{d}{d\,x^i}\,\overrightarrow{e_j}\right)}{2}+\frac{\overrightarrow{e^l}\,\left(\frac{d}{d\,x^j}\,\overrightarrow{e_i}\right)}{2} \tag{4.6.180}$$

```
DEI01:'diff(e[k],x[j],1)/2*e([i],[])*
 g([],[k,l]);
ishow(%);
DEI011:subst([LI3],%);
ishow(%);
DEI02:'diff(e[j],x[k],1)/2*e([i],[])*
 g([],[k,l]);
ishow(%);
DEI021:subst([LI3],%);
ishow(%);
DEI03:ishow('diff(e[k],x[i],1))/2*
 e([j],[])*g([],[k,l]);
ishow(%);
DEI031:subst([LI3],%);
ishow(%);
DEI04:'diff(e[i],x[k],1)/2*e([j],[])*
 g([],[k,l]);
ishow(%);
DEI041:subst([LI3],%);
ishow(%);
DEI011-DEI021+DEI031-DEI041;
ishow(%);
subst([LI3],%);
ishow(%);
```

また、(4.6.179) 式を使って、零となる次式を考える。

$$\begin{aligned}&\frac{g^{kl}\,\overrightarrow{e_i}\,\left(\frac{d}{d\,x^j}\,\overrightarrow{e_k}\right)}{2}+\frac{g^{kl}\,\overrightarrow{e_j}\,\left(\frac{d}{d\,x^i}\,\overrightarrow{e_k}\right)}{2}\\ &-\frac{g^{kl}\,\left(\frac{d}{d\,x^k}\,\overrightarrow{e_i}\right)\,\overrightarrow{e_j}}{2}-\frac{g^{kl}\,\overrightarrow{e_i}\,\left(\frac{d}{d\,x^k}\,\overrightarrow{e_j}\right)}{2}=0\end{aligned} \tag{4.6.181}$$

```
GKL1:g([],[k,l])=e([],[k])*e([],[l]);
ishow(%);
GKL1*e([k],[]);
ishow(%);
e([],[l])=lhs(%);
EL1:ishow(%);
lhs(DEIJL2)=rhs(DEIJL2)+DEI01-DEI02+DEI03
 -DEI04;
ishow(%);
subst([EL1],%);
ishow(%);
factor(%);
GKL2:ishow(%);
subst([LI3],%);
ishow(%);
```

計量テンソルの定義から、

$$g^{kl}=\overrightarrow{e^k}\,\overrightarrow{e^l}$$

上式に $\overrightarrow{e_k}$ を掛け、

$$g^{kl}\,\overrightarrow{e_k}=\overrightarrow{e^k}\,\overrightarrow{e^l}\,\overrightarrow{e_k}$$

$\overrightarrow{e^k}\cdot\overrightarrow{e_k}=1$ だから、

$$\overrightarrow{e^l}=g^{kl}\,\overrightarrow{e_k} \tag{4.6.182}$$

(4.6.180) 式と (4.6.181) 式の和をとり、(4.6.182) 式を代入すると、

$$\begin{aligned}\Gamma^l_{ij}=&\frac{g^{kl}\,\left(\frac{d}{d\,x^i}\,\overrightarrow{e_j}\right)\,\overrightarrow{e_k}}{2}+\frac{g^{kl}\,\left(\frac{d}{d\,x^j}\,\overrightarrow{e_i}\right)\,\overrightarrow{e_k}}{2}\\&+\frac{g^{kl}\,\overrightarrow{e_i}\,\left(\frac{d}{d\,x^j}\,\overrightarrow{e_k}\right)}{2}+\frac{g^{kl}\,\overrightarrow{e_j}\,\left(\frac{d}{d\,x^i}\,\overrightarrow{e_k}\right)}{2}\\&-\frac{g^{kl}\,\left(\frac{d}{d\,x^k}\,\overrightarrow{e_i}\right)\,\overrightarrow{e_j}}{2}-\frac{g^{kl}\,\overrightarrow{e_i}\,\left(\frac{d}{d\,x^k}\,\overrightarrow{e_j}\right)}{2}\end{aligned} \tag{4.6.183}$$

上式を整理すると、

$$\begin{aligned}\Gamma^l_{ij}=&\frac{g^{kl}}{2}\left(\left(\frac{d}{d\,x^i}\,\overrightarrow{e_j}\right)\,\overrightarrow{e_k}+\left(\frac{d}{d\,x^j}\,\overrightarrow{e_i}\right)\,\overrightarrow{e_k}\right.\\&+\overrightarrow{e_i}\,\left(\frac{d}{d\,x^j}\,\overrightarrow{e_k}\right)+\overrightarrow{e_j}\,\left(\frac{d}{d\,x^i}\,\overrightarrow{e_k}\right)\\&\left.-\left(\frac{d}{d\,x^k}\,\overrightarrow{e_i}\right)\,\overrightarrow{e_j}-\overrightarrow{e_i}\,\left(\frac{d}{d\,x^k}\,\overrightarrow{e_j}\right)\right)\end{aligned} \tag{4.6.184}$$

```
EKL1:(e([i],[]))*(e([k],[]));
diff(%,x[j],1)='diff(EKL1,x[j],1);
EKL11:ishow(%);
%-last(lhs(%));
%/(e([i],[]));
ishow(%);
EKL12:'diff(e[k],x[j],1)=rhs(%);
subst([LI3],%);
ishow(%);
EKL2:ishow(e([j],[]))*ishow(e([k],[]));
diff(%,x[i],1)='diff(EKL2,x[i],1);
EKL21:ishow(%);
%-first(lhs(%));
%/(e([k],[]));
ishow(%);
EKL22:'diff(e[j],x[i],1)=rhs(%);
subst([LI3],%);
ishow(%);
```

```
EKL3:ishow(e([i],[]))*ishow(e([j],[]));
diff(%,x[k],1)='diff(EKL3,x[k],1);
EKL31:ishow(%);
%-first(lhs(%));
%/(e([j],[]));
ishow(%);
EKL32:'diff(e[i],x[k],1)=rhs(%);
subst([LI3],%);
ishow(%);
subst([EKL12,EKL22,EKL32],GKL2);
ishow(%);
subst(['diff(e([k],[]),x[i],1)=
 'diff(e[k],x[i],1)],%);
subst(['diff(e([j],[]),x[k],1)=
 'diff(e[j],x[k],1)],%);
subst(['diff(e([i],[]),x[j],1)=
 'diff(e[i],x[j],1)],%);
subst([e([j],[])*e([k],[])=g([j,k],[])],%);
subst([e([i],[])*e([k],[])=g([k,i],[])],%);
subst([e([i],[])*e([j],[])=g([i,j],[])],%);
GIJL3:ishow(%);
subst([LI3],%);
ishow(%);
GIJL4:lhs(GIJL3)=sum(rhs(GIJL3),k,1,3);
ishow(%);
subst([LI3],%);
ishow(%);
```

$\overrightarrow{e_i}\cdot\overrightarrow{e_k}$ を x_j で微分する。他も同様にして、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{e_i}\,\left(\frac{d}{d\,x^j}\,\overrightarrow{e_k}\right)+\left(\frac{d}{d\,x^j}\,\overrightarrow{e_i}\right)\,\overrightarrow{e_k}=&\frac{d}{d\,x^j}\,\left(\overrightarrow{e_i}\,\overrightarrow{e_k}\right)\\\overrightarrow{e_j}\,\left(\frac{d}{d\,x^i}\,\overrightarrow{e_k}\right)+\left(\frac{d}{d\,x^i}\,\overrightarrow{e_j}\right)\,\overrightarrow{e_k}=&\frac{d}{d\,x^i}\,\left(\overrightarrow{e_j}\,\overrightarrow{e_k}\right)\\\overrightarrow{e_i}\,\left(\frac{d}{d\,x^k}\,\overrightarrow{e_j}\right)+\left(\frac{d}{d\,x^k}\,\overrightarrow{e_i}\right)\,\overrightarrow{e_j}=&\frac{d}{d\,x^k}\,\left(\overrightarrow{e_i}\,\overrightarrow{e_j}\right)\end{aligned} \tag{4.6.185}$$

上式から、

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\,x^j}\,\overrightarrow{e_k}=&\frac{\frac{d}{d\,x^j}\,\left(\overrightarrow{e_i}\,\overrightarrow{e_k}\right)-\left(\frac{d}{d\,x^j}\,\overrightarrow{e_i}\right)\,\overrightarrow{e_k}}{\overrightarrow{e_i}}\\\frac{d}{d\,x^i}\,\overrightarrow{e_j}=&\frac{\frac{d}{d\,x^i}\,\left(\overrightarrow{e_j}\,\overrightarrow{e_k}\right)-\overrightarrow{e_j}\,\left(\frac{d}{d\,x^i}\,\overrightarrow{e_k}\right)}{\overrightarrow{e_k}}\\\frac{d}{d\,x^k}\,\overrightarrow{e_i}=&\frac{\frac{d}{d\,x^k}\,\left(\overrightarrow{e_i}\,\overrightarrow{e_j}\right)-\overrightarrow{e_i}\,\left(\frac{d}{d\,x^k}\,\overrightarrow{e_j}\right)}{\overrightarrow{e_j}}\end{aligned} \tag{4.6.186}$$

(4.6.184) 式に上式を代入すると、

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{ij}^{l} =& \frac{g^{kl}}{2}\left(\frac{d}{d\,x^i}\,(\overrightarrow{e_j}\,\overrightarrow{e_k})+\frac{d}{d\,x^j}\,(\overrightarrow{e_i}\,\overrightarrow{e_k})\right.\\
&-\overrightarrow{e_j}\left(\frac{d}{d\,x^i}\,\overrightarrow{e_k}\right)-\left(\frac{d}{d\,x^j}\,\overrightarrow{e_i}\right)\overrightarrow{e_k}\\
&+\left(\frac{d}{d\,x^j}\,\overrightarrow{e_i}\right)\overrightarrow{e_k}+\overrightarrow{e_j}\left(\frac{d}{d\,x^i}\,\overrightarrow{e_k}\right)\\
&-\frac{d}{d\,x^k}\,(\overrightarrow{e_i}\,\overrightarrow{e_j})+\overrightarrow{e_i}\left(\frac{d}{d\,x^k}\,\overrightarrow{e_j}\right)\\
&\left.-\overrightarrow{e_i}\left(\frac{d}{d\,x^k}\,\overrightarrow{e_j}\right)\right)
\end{aligned}
\tag{4.6.187}
$$

$\overrightarrow{e_j}\,\overrightarrow{e_k}=g_{jk}$ であり、他も同様にして、上式に代入し、整理すると、クリストフェルの記号が得られる。

$$
\Gamma_{ij}^{l}=\frac{g^{kl}\,\left(\frac{d}{d\,x^j}\,g_{ki}+\frac{d}{d\,x^i}\,g_{jk}-\frac{d}{d\,x^k}\,g_{ij}\right)}{2}
\tag{4.6.188}
$$

上式を $k=1\to 3$ で展開すると、

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{ij}^{l} =& \frac{g^{3l}\,\left(\frac{d}{d\,x^i}\,g_{j3}-\frac{d}{d\,x^3}\,g_{ij}+\frac{d}{d\,x^j}\,g_{3i}\right)}{2}\\
&+\frac{g^{2l}\,\left(\frac{d}{d\,x^i}\,g_{j2}-\frac{d}{d\,x^2}\,g_{ij}+\frac{d}{d\,x^j}\,g_{2i}\right)}{2}\\
&+\frac{g^{1l}\,\left(\frac{d}{d\,x^i}\,g_{j1}-\frac{d}{d\,x^1}\,g_{ij}+\frac{d}{d\,x^j}\,g_{1i}\right)}{2}
\end{aligned}
\tag{4.6.189}
$$

```
LI11:[x[1]=x([],[1]),x[2]=x([],[2]),
 x[3]=x([],[3])];
subst([i=1,j=1,l=1],GIJL4);
GIJL4111:ishow(%);
subst([LI11],%);
ishow(%);
subst([i=1,j=1,l=2],GIJL4);
GIJL4112:ishow(%);
subst([LI11],%);
ishow(%);
subst([i=1,j=1,l=3],GIJL4);
GIJL4113:ishow(%);
subst([LI11],%);
ishow(%);
subst([i=1,j=2,l=1],GIJL4);
GIJL4121:ishow(%);
subst([LI11],%);
ishow(%);
```

```
subst([i=1,j=2,l=2],GIJL4);
GIJL4122:ishow(%);
subst([LI11],%);
ishow(%);
subst([i=1,j=2,l=3],GIJL4);
GIJL4123:ishow(%);
subst([LI11],%);
ishow(%);
subst([i=1,j=3,l=1],GIJL4);
GIJL4131:ishow(%);
subst([LI11],%);
ishow(%);
subst([i=1,j=3,l=2],GIJL4);
GIJL4132:ishow(%);
subst([LI11],%);
ishow(%);
subst([i=1,j=3,l=3],GIJL4);
GIJL4133:ishow(%);
subst([LI11],%);
ishow(%);
subst([i=2,j=1,l=1],GIJL4);
GIJL4121:ishow(%);
subst([LI11],%);
ishow(%);
subst([i=2,j=1,l=2],GIJL4);
GIJL4122:ishow(%);
subst([LI11],%);
ishow(%);
subst([i=2,j=1,l=3],GIJL4);
GIJL4123:ishow(%);
subst([LI11],%);
ishow(%);
```

具体的に i, j, l を変えて、クリストフェルの記号：Γ^{l}_{ij} の一部を (4.6.188) 式から求めると、

$$\Gamma^{1}_{11}=\frac{g^{31}\,\left(\frac{d}{d\,x^1}\,g_{31}+\frac{d}{d\,x^1}\,g_{13}-\frac{d}{d\,x^3}\,g_{11}\right)}{2}+\frac{g^{21}\,\left(\frac{d}{d\,x^1}\,g_{21}+\frac{d}{d\,x^1}\,g_{12}-\frac{d}{d\,x^2}\,g_{11}\right)}{2}+\frac{g^{11}\,\left(\frac{d}{d\,x^1}\,g_{11}\right)}{2}$$

$$\Gamma^{2}_{11}=\frac{g^{32}\,\left(\frac{d}{d\,x^1}\,g_{31}+\frac{d}{d\,x^1}\,g_{13}-\frac{d}{d\,x^3}\,g_{11}\right)}{2}+\frac{g^{22}\,\left(\frac{d}{d\,x^1}\,g_{21}+\frac{d}{d\,x^1}\,g_{12}-\frac{d}{d\,x^2}\,g_{11}\right)}{2}+\frac{g^{12}\,\left(\frac{d}{d\,x^1}\,g_{11}\right)}{2}$$

$$\Gamma^{3}_{11}=\frac{g^{33}\,\left(\frac{d}{d\,x^1}\,g_{31}+\frac{d}{d\,x^1}\,g_{13}-\frac{d}{d\,x^3}\,g_{11}\right)}{2}+\frac{g^{23}\,\left(\frac{d}{d\,x^1}\,g_{21}+\frac{d}{d\,x^1}\,g_{12}-\frac{d}{d\,x^2}\,g_{11}\right)}{2}+\frac{g^{13}\,\left(\frac{d}{d\,x^1}\,g_{11}\right)}{2}$$

$$\Gamma^{1}_{12}=\frac{g^{31}\,\left(\frac{d}{d\,x^2}\,g_{31}+\frac{d}{d\,x^1}\,g_{23}-\frac{d}{d\,x^3}\,g_{12}\right)}{2}+\frac{g^{21}\,\left(\frac{d}{d\,x^1}\,g_{22}+\frac{d}{d\,x^2}\,g_{21}-\frac{d}{d\,x^2}\,g_{12}\right)}{2}+\frac{g^{11}\,\left(\frac{d}{d\,x^1}\,g_{21}-\frac{d}{d\,x^1}\,g_{12}+\frac{d}{d\,x^2}\,g_{11}\right)}{2}$$

$$\Gamma^{2}_{12}=\frac{g^{32}\,\left(\frac{d}{d\,x^2}\,g_{31}+\frac{d}{d\,x^1}\,g_{23}-\frac{d}{d\,x^3}\,g_{12}\right)}{2}+\frac{g^{22}\,\left(\frac{d}{d\,x^1}\,g_{22}+\frac{d}{d\,x^2}\,g_{21}-\frac{d}{d\,x^2}\,g_{12}\right)}{2}+\frac{g^{12}\,\left(\frac{d}{d\,x^1}\,g_{21}-\frac{d}{d\,x^1}\,g_{12}+\frac{d}{d\,x^2}\,g_{11}\right)}{2}$$

$$\Gamma^{3}_{12}=\frac{g^{33}\,\left(\frac{d}{d\,x^2}\,g_{31}+\frac{d}{d\,x^1}\,g_{23}-\frac{d}{d\,x^3}\,g_{12}\right)}{2}+\frac{g^{23}\,\left(\frac{d}{d\,x^1}\,g_{22}+\frac{d}{d\,x^2}\,g_{21}-\frac{d}{d\,x^2}\,g_{12}\right)}{2}+\frac{g^{13}\,\left(\frac{d}{d\,x^1}\,g_{21}-\frac{d}{d\,x^1}\,g_{12}+\frac{d}{d\,x^2}\,g_{11}\right)}{2}$$

$$\Gamma^{1}_{13}=\frac{g^{31}\,\left(\frac{d}{d\,x^1}\,g_{33}+\frac{d}{d\,x^3}\,g_{31}-\frac{d}{d\,x^3}\,g_{13}\right)}{2}+\frac{g^{21}\,\left(\frac{d}{d\,x^1}\,g_{32}+\frac{d}{d\,x^3}\,g_{21}-\frac{d}{d\,x^2}\,g_{13}\right)}{2}+\frac{g^{11}\,\left(\frac{d}{d\,x^1}\,g_{31}-\frac{d}{d\,x^1}\,g_{13}+\frac{d}{d\,x^3}\,g_{11}\right)}{2}$$

$$\Gamma^{2}_{13}=\frac{g^{32}\,\left(\frac{d}{d\,x^1}\,g_{33}+\frac{d}{d\,x^3}\,g_{31}-\frac{d}{d\,x^3}\,g_{13}\right)}{2}+\frac{g^{22}\,\left(\frac{d}{d\,x^1}\,g_{32}+\frac{d}{d\,x^3}\,g_{21}-\frac{d}{d\,x^2}\,g_{13}\right)}{2}+\frac{g^{12}\,\left(\frac{d}{d\,x^1}\,g_{31}-\frac{d}{d\,x^1}\,g_{13}+\frac{d}{d\,x^3}\,g_{11}\right)}{2}$$

$$\Gamma^{3}_{13}=\frac{g^{33}\,\left(\frac{d}{d\,x^1}\,g_{33}+\frac{d}{d\,x^3}\,g_{31}-\frac{d}{d\,x^3}\,g_{13}\right)}{2}+\frac{g^{23}\,\left(\frac{d}{d\,x^1}\,g_{32}+\frac{d}{d\,x^3}\,g_{21}-\frac{d}{d\,x^2}\,g_{13}\right)}{2}+\frac{g^{13}\,\left(\frac{d}{d\,x^1}\,g_{31}-\frac{d}{d\,x^1}\,g_{13}+\frac{d}{d\,x^3}\,g_{11}\right)}{2}$$

$$\Gamma^{1}_{21}=\frac{g^{31}\,\left(\frac{d}{d\,x^1}\,g_{32}-\frac{d}{d\,x^3}\,g_{21}+\frac{d}{d\,x^2}\,g_{13}\right)}{2}+\frac{g^{21}\,\left(\frac{d}{d\,x^1}\,g_{22}-\frac{d}{d\,x^2}\,g_{21}+\frac{d}{d\,x^2}\,g_{12}\right)}{2}+\frac{g^{11}\,\left(-\frac{d}{d\,x^1}\,g_{21}+\frac{d}{d\,x^1}\,g_{12}+\frac{d}{d\,x^2}\,g_{11}\right)}{2}$$

$$\Gamma^{2}_{21}=\frac{g^{32}\,\left(\frac{d}{d\,x^1}\,g_{32}-\frac{d}{d\,x^3}\,g_{21}+\frac{d}{d\,x^2}\,g_{13}\right)}{2}+\frac{g^{22}\,\left(\frac{d}{d\,x^1}\,g_{22}-\frac{d}{d\,x^2}\,g_{21}+\frac{d}{d\,x^2}\,g_{12}\right)}{2}+\frac{g^{12}\,\left(-\frac{d}{d\,x^1}\,g_{21}+\frac{d}{d\,x^1}\,g_{12}+\frac{d}{d\,x^2}\,g_{11}\right)}{2}$$

$$\Gamma^{3}_{21}=\frac{g^{33}\,\left(\frac{d}{d\,x^1}\,g_{32}-\frac{d}{d\,x^3}\,g_{21}+\frac{d}{d\,x^2}\,g_{13}\right)}{2}+\frac{g^{23}\,\left(\frac{d}{d\,x^1}\,g_{22}-\frac{d}{d\,x^2}\,g_{21}+\frac{d}{d\,x^2}\,g_{12}\right)}{2}+\frac{g^{13}\,\left(-\frac{d}{d\,x^1}\,g_{21}+\frac{d}{d\,x^1}\,g_{12}+\frac{d}{d\,x^2}\,g_{11}\right)}{2}$$

(1) 極座標のクリストフェルの記号

下記のクリストフェルの記号：(4.6.189) 式に極座標系の計量テンソル：(4.6.149) 式、(4.6.150) 式を代入して、極座標のクリストフェルの記号を求めることができる。ここで $x^1=r,\ x^2=\theta,\ x^3=\phi$ である。

$$\begin{aligned}\Gamma^l_{ij} =& \frac{g^{3l}\left(\frac{d}{d\,x^i}\,g_{j3}-\frac{d}{d\,x^3}\,g_{ij}+\frac{d}{d\,x^j}\,g_{3i}\right)}{2}\\ &+\frac{g^{2l}\left(\frac{d}{d\,x^i}\,g_{j2}-\frac{d}{d\,x^2}\,g_{ij}+\frac{d}{d\,x^j}\,g_{2i}\right)}{2}\\ &+\frac{g^{1l}\left(\frac{d}{d\,x^i}\,g_{j1}-\frac{d}{d\,x^1}\,g_{ij}+\frac{d}{d\,x^j}\,g_{1i}\right)}{2}\end{aligned} \tag{4.6.190}$$

```
kill(all);
load("vect")$
load(itensor)$
X1:x=r*cos(\phi)*sin(\theta);
Y1:y=r*sin(\phi)*sin(\theta);
Z1:z=r*cos(\theta);
LI1:[x[1]=r,x[2]=\theta,x[3]=\phi];
LI2:[1=r,2=\theta,3=\phi];
MTA:matrix([g([1,1],[]),g([1,2],[]),
 g([1,3],[])],[g([2,1],[]),g([2,2],[]),
 g([2,3],[])],[g([3,1],[]),g([3,2],[]),
 g([3,3],[])])=matrix([1,0,0],[0,r^2,0],
 [0,0,r^2*sin(theta)^2]);
MTB:matrix([g([],[1,1]),g([],[1,2]),
 g([],[1,3])],[g([],[2,1]),g([],[2,2]),
 g([],[2,3])],[g([],[3,1]),g([],[3,2]),
 g([],[3,3])])=matrix([1,0,0],[0,1/r^2,0],
 [0,0,1/(r^2*sin(theta)^2)]);
GA11:lhs(MTA)[1,1]=rhs(MTA)[1,1];
GA12:lhs(MTA)[1,2]=rhs(MTA)[1,2];
GA13:lhs(MTA)[1,3]=rhs(MTA)[1,3];
GA21:lhs(MTA)[2,1]=rhs(MTA)[2,1];
GA22:lhs(MTA)[2,2]=rhs(MTA)[2,2];
GA23:lhs(MTA)[2,3]=rhs(MTA)[2,3];
GA31:lhs(MTA)[3,1]=rhs(MTA)[3,1];
GA32:lhs(MTA)[3,2]=rhs(MTA)[3,2];
GA33:lhs(MTA)[3,3]=rhs(MTA)[3,3];
GB11:lhs(MTB)[1,1]=rhs(MTB)[1,1];
GB12:lhs(MTB)[1,2]=rhs(MTB)[1,2];
GB13:lhs(MTB)[1,3]=rhs(MTB)[1,3];
GB21:lhs(MTB)[2,1]=rhs(MTB)[2,1];
GB22:lhs(MTB)[2,2]=rhs(MTB)[2,2];
GB23:lhs(MTB)[2,3]=rhs(MTB)[2,3];
GB31:lhs(MTB)[3,1]=rhs(MTB)[3,1];
GB32:lhs(MTB)[3,2]=rhs(MTB)[3,2];
GB33:lhs(MTB)[3,3]=rhs(MTB)[3,3];
```

(4.6.149) 式、(4.6.150) 式から計量テンソルは下記となる。

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13}\\ g_{21} & g_{22} & g_{23}\\ g_{31} & g_{32} & g_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & r^2 & 0\\ 0 & 0 & r^2\sin(\theta)^2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} & g^{13}\\ g^{21} & g^{22} & g^{23}\\ g^{31} & g^{32} & g^{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2\sin(\theta)^2}\end{pmatrix}$$

```
for L:1 thru 3 do(
L1:L,
for I:1 thru 3 do(
I1:I,
for J:1 thru 3 do(
J1:J,
GAM21:subst([l=L1,i=I1,j=J1],GAM2),
GAM22:subst(LI1,GAM21),
GAM23:subst([GA11,GA12,GA13,GA21,GA22,
 GA23,GA31,GA32,GA33],GAM22),
GAM24:subst([GB11,GB12,GB13,GB21,GB22,
 GB23,GB31,GB32,GB33],GAM23),
GAM25:ev(GAM24,diff),
GAM26:subst(LI2,lhs(GAM25))=rhs(GAM25),
print(ishow(GAM26)))));
```

以上より、極座標のクリストフェルの記号は下記となる。

$$\begin{aligned}
&\Gamma^r_{rr}=0, && \Gamma^r_{r\theta}=0, && \Gamma^r_{r\phi}=0\\
&\Gamma^r_{\theta r}=0, && \Gamma^r_{\theta\theta}=-r, && \Gamma^r_{\theta\phi}=0\\
&\Gamma^r_{\phi r}=0, && \Gamma^r_{\phi\theta}=0, && \Gamma^r_{\phi\phi}=-r\sin(\theta)^2\\
&\Gamma^\theta_{rr}=0, && \Gamma^\theta_{r\theta}=\frac{1}{r}, && \Gamma^\theta_{r\phi}=0\\
&\Gamma^\theta_{\theta r}=\frac{1}{r}, && \Gamma^\theta_{\theta\theta}=0, && \Gamma^\theta_{\theta\phi}=0\\
&\Gamma^\theta_{\phi r}=0, && \Gamma^\theta_{\phi\theta}=0, && \Gamma^\theta_{\phi\phi}=-\cos(\theta)\,\sin(\theta)\\
&\Gamma^\phi_{rr}=0, && \Gamma^\phi_{r\theta}=0, && \Gamma^\phi_{r\phi}=\frac{1}{r}\\
&\Gamma^\phi_{\theta r}=0, && \Gamma^\phi_{\theta\theta}=0, && \Gamma^\phi_{\theta\phi}=\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\\
&\Gamma^\phi_{\phi r}=\frac{1}{r}, && \Gamma^\phi_{\phi\theta}=\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}, && \Gamma^\phi_{\phi\phi}=0
\end{aligned}$$

4.6.14.2 共変ベクトルの微分

共変ベクトル：$\overrightarrow{A}$ の微分について検討する。

```
kill(all);
load("vect")$
load(itensor)$
depends([A,e],[x[j]]);
A1:A=A([i],[])*e([],[i]);
ishow(%);
A11:lhs(A1)=sum(rhs(A1),i,1,3);
ishow(%);
DA1:diff(A1,x[j],1);
ishow(%);
DA11:lhs(DA1)=sum(rhs(DA1),i,1,3);
ishow(%);
DEIJ0:'diff(e([],[i]),x[j],1)=
 Lambda([i,j],[k])*e([],[k]);
ishow(%);
DA2:subst([DEIJ0],DA1);
ishow(%);
DA21:lhs(DA2)=sum(first(rhs(DA2)),i,1,3)
 +sum(sum(last(rhs(DA2)),k,1,3),i,1,3);
ishow(%);
EIJ1:(e([i],[]))*(e([],[j]))=\delta[i]^j;
ishow(%);
EIJD1:diff(EIJ1,x[k],1)=0;
ishow(%);
GDM1:diff(e([i],[]),x[k],1)=sum(
 Gamma([i,k],[m])*e([m],[]),m,1,3);
ishow(%);
LDN1:diff(e([],[j]),x[k],1)=sum(
 Lambda([j,k],[n])*e([],[n]),n,1,3);
ishow(%);
subst([GDM1,LDN1],EIJD1);
ishow(%);
e([i],[])*e([],[i])*Lambda([j,k],[i])
 +e([],[j])*e([j],[])*Gamma([i,k],[j])=0;
ishow(%);
Lambda([j,k],[i])+Gamma([i,k],[j])=0;
ishow(%);
LD1:Lambda([j,k],[i])=-Gamma([i,k],[j]);
ishow(%);
LD2:Lambda([i,j],[k])=-Gamma([k,j],[i]);
ishow(%);
DEIJ2:subst([LD2],DEIJ0);
ishow(%);
lhs(DEIJ2)=sum(rhs(DEIJ2),k,1,3);
ishow(%);
```

共変ベクトル：$\overrightarrow{A}$ を双対基底ベクトル：$\overrightarrow{e^1},\overrightarrow{e^2},\overrightarrow{e^3}$ で表し、双対基底ベクトルが x^1,x^2,x^3 の関数であるとする。共変ベクトル：$\overrightarrow{A}$ は、

$$\overrightarrow{A}=A_3\,\overrightarrow{e^3}+A_2\,\overrightarrow{e^2}+A_1\,\overrightarrow{e^1} \tag{4.6.191}$$

上式を縮約すると、

$$A=e^i\,A_i \tag{4.6.192}$$

共変ベクトル：$\overrightarrow{A}$ を x^j で微分すると、

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\,x^j}\overrightarrow{A}=&A_3\left(\frac{d}{d\,x^j}\,\overrightarrow{e^3}\right)+A_2\left(\frac{d}{d\,x^j}\,\overrightarrow{e^2}\right)\\&+A_1\left(\frac{d}{d\,x^j}\,\overrightarrow{e^1}\right)+\left(\frac{d}{d\,x^j}\,A_3\right)\overrightarrow{e^3}\\&+\left(\frac{d}{d\,x^j}\,A_2\right)\overrightarrow{e^2}+\left(\frac{d}{d\,x^j}\,A_1\right)\overrightarrow{e^1}\end{aligned} \tag{4.6.193}$$

上式を縮約すると、

$$\frac{d}{d\,x^j}\,A=e^i\left(\frac{d}{d\,x^j}\,A_i\right)+\left(\frac{d}{d\,x^j}\,e^i\right)A_i \tag{4.6.194}$$

ここで、

$$\overrightarrow{e^j}\,\overrightarrow{e_i}=\delta_i^j$$
$$\text{ここで、}\delta_i^j=1 \text{ at } i=j,\quad \delta_i^j=0 \text{ at } i\neq j \tag{4.6.195}$$

上式を x^k で微分すると、

$$\overrightarrow{e^j}\left(\frac{d}{d\,x^k}\,\overrightarrow{e_i}\right)+\left(\frac{d}{d\,x^k}\,\overrightarrow{e^j}\right)\overrightarrow{e_i}=0 \tag{4.6.196}$$

(4.6.176) 式から、基底ベクトル：$\overrightarrow{e_i}$ の x^k による微分は、

$$\frac{d}{d\,x^k}\,\overrightarrow{e_i}=\overrightarrow{e_3}\,\Gamma_{ik}^3+\overrightarrow{e_2}\,\Gamma_{ik}^2+\overrightarrow{e_1}\,\Gamma_{ik}^1 \tag{4.6.197}$$

双対基底ベクトル：$\overrightarrow{e^j}$ の x^k による微分を、双対基底ベクトルと重み係数：Λ_{jk}^i で下記のように定義する。

$$\frac{d}{d\,x^k}\,\overrightarrow{e^j}=\overrightarrow{e^3}\,\Lambda_{jk}^3+\overrightarrow{e^2}\,\Lambda_{jk}^2+\overrightarrow{e^1}\,\Lambda_{jk}^1 \tag{4.6.198}$$

(4.6.196) 式に (4.6.197) 式、(4.6.198) 式を代入すると、

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{e_i}\left(\overrightarrow{e^3}\,\Lambda_{jk}^3+\overrightarrow{e^2}\,\Lambda_{jk}^2+\overrightarrow{e^1}\,\Lambda_{jk}^1\right)\\&\quad+\overrightarrow{e^j}\left(\overrightarrow{e_3}\,\Gamma_{ik}^3+\overrightarrow{e_2}\,\Gamma_{ik}^2+\overrightarrow{e_1}\,\Gamma_{ik}^1\right)=0\end{aligned}$$

(4.6.195) 式から、

$$\overrightarrow{e^i}\,\overrightarrow{e_i}\,\Lambda_{jk}^i+\overrightarrow{e^j}\,\Gamma_{ik}^j\,\overrightarrow{e_j}=0$$
$$\Lambda_{jk}^i+\Gamma_{ik}^j=0$$

以上から、

$$\Lambda_{jk}^i=-\Gamma_{ik}^j \tag{4.6.199}$$

(4.6.198) 式に上式を代入すると、

$$\frac{d}{d\,x^k}\,\overrightarrow{e^j}=-\overrightarrow{e^3}\,\Gamma_{3k}^j-\overrightarrow{e^2}\,\Gamma_{2k}^j-\overrightarrow{e^1}\,\Gamma_{1k}^j \tag{4.6.200}$$

上式を縮約すると、

$$\frac{d}{d\,x^j}\,\overrightarrow{e^i}=-\overrightarrow{e^k}\,\Gamma_{kj}^i \tag{4.6.201}$$

4.6.14.3　クリストフェル記号の座標変換

クリストフェル記号：Γ_{ij}^{l} の座標変換について検討する [1]。

```
kill(all);
load("vect")$
load(itensor)$
depends([x],[u]);
depends([g],[x]);
depends([gu],[u]);
GMU1:\Gamma([i,j],[l])=1/2*g([],[k,l])
 *('diff(g([i,k],[]),x[j],1)+'diff(
 g([k,j],[]),x[i],1)-'diff(g([i,j],[]),
 x[k],1));
ishow(%);
GMX1:subst([i=a,j=b,k=c,l=h],GMU1);
ishow(%);
GUX1:gu([i,j],[])='diff(x[a],u[i],1)
 *'diff(x[b],u[j],1)*g([a,b],[]);
ishow(%);
GUX2:gu([i,j],[])=sum(sum('diff(x[a],u[i],
 1)*'diff(x[b],u[j],1)*g([a,b],[]),
 a,1,3),b,1,3);
ishow(%);
DGUX1:'diff(gu([i,j],[]),u[k],1)='diff(
 x[a],u[i],1)*'diff(x[b],u[j],1)*'diff(
 x[c],u[k],1)*'diff(g([a,b],[]),x[c],1)
 +'diff(x[a],u[i],1,u[k],1)*'diff(x[b],
 u[j],1)*g([a,b],[])+'diff(x[a],u[i],1)
 *'diff(x[b],u[j],1,u[k],1)*g([a,b],[]);
ishow(%);
DGUX0:subst([i=o,j=p,k=q],DGUX1);
ishow(%);
```

```
DGUX2:subst([o=i,p=k,q=j],DGUX0);
ishow(%);
DGUX3:subst([o=k,p=j,q=i],DGUX0);
ishow(%);
GMU00:subst([g=gu,x=u],GMU1);
ishow(%);
GMU10:GMU00*2/gu([],[k,l]);
ishow(%);
subst([DGUX1],rhs(GMU10));
subst([DGUX2],%);
DGUX2:subst([DGUX3],%);
ishow(%);
```

(4.6.188) 式から、クリストフェル記号：Γ_{ij}^{l} は、

$$\Gamma_{ij}^{l}=\frac{g^{kl}\left(\frac{d}{d\,x^i}\,g_{kj}+\frac{d}{d\,x^j}\,g_{ik}-\frac{d}{d\,x^k}\,g_{ij}\right)}{2} \tag{4.6.202}$$

計量テンソル：gu は u^i の関数、計量テンソル：g は x^i の関数とする。クリストフェル記号：Γu_{ij}^{l} が計量テンソル：gu、u^i の関数とすると、

$$\Gamma u_{ij}^{l}=\frac{gu^{kl}\left(\frac{d}{d\,u^i}\,gu_{kj}+\frac{d}{d\,u^j}\,gu_{ik}-\frac{d}{d\,u^k}\,gu_{ij}\right)}{2} \tag{4.6.203}$$

上式を下記のように変更する。

$$\frac{2\,\Gamma u_{ij}^{l}}{gu^{kl}}=\frac{d}{d\,u^i}\,gu_{kj}+\frac{d}{d\,u^j}\,gu_{ik}-\frac{d}{d\,u^k}\,gu_{ij} \tag{4.6.204}$$

計量テンソルの座標変換は (4.6.158) 式から次式である。

$$gu_{ij}=\left(\frac{d}{d\,u^i}\,x^a\right)\,g_{ab}\,\left(\frac{d}{d\,u^j}\,x^b\right) \tag{4.6.205}$$

(4.6.205) 式を基に gu_{ij} を u^k で微分すると、

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\,u^k}\,gu_{ij}=&\left(\frac{d}{d\,u^i}\,x^a\right)\left(\frac{d}{d\,x^c}\,g_{ab}\right)\left(\frac{d}{d\,u^j}\,x^b\right)\left(\frac{d}{d\,u^k}\,x^c\right)+\left(\frac{d}{d\,u^i}\,x^a\right)\,g_{ab}\,\left(\frac{d^2}{d\,u^j\,d\,u^k}\,x^b\right)\\&+\left(\frac{d^2}{d\,u^i\,d\,u^k}\,x^a\right)\,g_{ab}\,\left(\frac{d}{d\,u^j}\,x^b\right)\end{aligned} \tag{4.6.206}$$

(4.6.205) 式を基に gu_{ik} を u^j で微分すると、

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\,u^j}\,gu_{ik}=&\left(\frac{d}{d\,u^i}\,x^a\right)\left(\frac{d}{d\,x^c}\,g_{ab}\right)\left(\frac{d}{d\,u^k}\,x^b\right)\left(\frac{d}{d\,u^j}\,x^c\right)+\left(\frac{d^2}{d\,u^i\,d\,u^j}\,x^a\right)\,g_{ab}\,\left(\frac{d}{d\,u^k}\,x^b\right)\\&+\left(\frac{d}{d\,u^i}\,x^a\right)\,g_{ab}\,\left(\frac{d^2}{d\,u^j\,d\,u^k}\,x^b\right)\end{aligned} \tag{4.6.207}$$

[1] F Nの高校物理　数学　曲面上の幾何学　http://fnorio.com

(4.6.205) 式を基に gu_{kj} を u^i で微分すると、

$$\frac{d}{d\,u^i}\,gu_{kj}=\left(\frac{d}{d\,u^k}\,x^a\right)\,\left(\frac{d}{d\,x^c}\,g_{ab}\right)\,\left(\frac{d}{d\,u^j}\,x^b\right)\,\left(\frac{d}{d\,u^i}\,x^c\right)+\left(\frac{d^2}{d\,u^i\,d\,u^k}\,x^a\right)\,g_{ab}\,\left(\frac{d}{d\,u^j}\,x^b\right)+\left(\frac{d}{d\,u^k}\,x^a\right)\,g_{ab}\,\left(\frac{d^2}{d\,u^i\,d\,u^j}\,x^b\right) \tag{4.6.208}$$

(4.6.204) 式に、(4.6.206) 式、(4.6.207) 式、(4.6.208) 式を代入すると、

$$\frac{2\,\Gamma u^l_{ij}}{gu^{kl}}=-\left(\frac{d}{d\,u^i}\,x^a\right)\,\left(\frac{d}{d\,x^c}\,g_{ab}\right)\,\left(\frac{d}{d\,u^j}\,x^b\right)\,\left(\frac{d}{d\,u^k}\,x^c\right)+\left(\frac{d}{d\,u^i}\,x^a\right)\,\left(\frac{d}{d\,x^c}\,g_{ab}\right)\,\left(\frac{d}{d\,u^k}\,x^b\right)\,\left(\frac{d}{d\,u^j}\,x^c\right)+\left(\frac{d}{d\,u^k}\,x^a\right)\,\left(\frac{d}{d\,x^c}\,g_{ab}\right)\,\left(\frac{d}{d\,u^j}\,x^b\right)\,\left(\frac{d}{d\,u^i}\,x^c\right)+\left(\frac{d^2}{d\,u^i\,d\,u^j}\,x^a\right)\,g_{ab}\,\left(\frac{d}{d\,u^k}\,x^b\right)+\left(\frac{d}{d\,u^k}\,x^a\right)\,g_{ab}\,\left(\frac{d^2}{d\,u^i\,d\,u^j}\,x^b\right) \tag{4.6.209}$$

```
DGUX22:rest(DGUX2,3);
ishow(%);
DGUX21:DGUX2-DGUX22;
ishow(%);
DGUX20:subst([a=o,b=p,c=q],DGUX21);
ishow(%);
DGUX201:rest(DGUX20,2);
ishow(%);
DGUX20-DGUX201;
ishow(%);
DGUX202:rest(%,1);
ishow(%);
DGUX203:DGUX20-DGUX201-DGUX202;
ishow(%);
DGUX301:subst([q=a,p=b,o=c],DGUX201);
ishow(%);
DGUX302:subst([o=a,p=b,q=c],DGUX202);
ishow(%);
DGUX303:subst([q=b,p=c,o=a],DGUX203);
ishow(%);
```

```
DGUX304:DGUX301+DGUX302+DGUX303;
ishow(%);
DGUX31:factor(DGUX304);
ishow(%);
DGUX31+DGUX22;
ishow(%);
sum(sum(sum(DGUX22,a,1,3),b,1,3),k,1,3);
subst([g([2,1],[])=g([1,2],[]),g([3,1],[])
 =g([1,3],[])],%);
DGUX321:subst([g([3,2],[])=g([2,3],[])],%);
ishow(%);
DGUX32:last(DGUX22)*2;
sum(sum(sum(DGUX32,a,1,3),b,1,3),k,1,3);
subst([g([2,1],[])=g([1,2],[]),g([3,1],[])
 =g([1,3],[])],%);
DGUX322:subst([g([3,2],[])=g([2,3],[])],%);
ishow(%);
DGUX321-DGUX322;
DGUX3:DGUX31+DGUX32;
ishow(%);
```

(4.6.209) 式の右辺第一項から第三項を $\left(\frac{d}{d\,u^i}\,x^a\right)\left(\frac{d}{d\,u^j}\,x^b\right)\left(\frac{d}{d\,u^k}\,x^c\right)$ でくくる。そのため、$\frac{d}{d\,x^c}\,g_{ab}$ の a,b,c も変更し、整理すると、

$$\frac{2\,\Gamma u^l_{ij}}{gu^{kl}}=\left(\frac{d}{d\,u^i}\,x^a\right)\,\left(\frac{d}{d\,u^j}\,x^b\right)\,\left(\frac{d}{d\,u^k}\,x^c\right)\,\left(\frac{d}{d\,x^a}\,g_{cb}+\frac{d}{d\,x^b}\,g_{ac}-\frac{d}{d\,x^c}\,g_{ab}\right)+\left(\frac{d^2}{d\,u^i\,d\,u^j}\,x^a\right)\,g_{ab}\,\left(\frac{d}{d\,u^k}\,x^b\right)+\left(\frac{d}{d\,u^k}\,x^a\right)\,g_{ab}\,\left(\frac{d^2}{d\,u^i\,d\,u^j}\,x^b\right) \tag{4.6.210}$$

上式の第二項と第三項を下記の式と比べ、$a,b,k=1\to 3$ で展開すると、同じであることがわかる。

$$\left(\frac{d^2}{d\,u^i\,d\,u^j}\,x^a\right)\,g_{ab}\,\left(\frac{d}{d\,u^k}\,x^b\right)+\left(\frac{d}{d\,u^k}\,x^a\right)\,g_{ab}\,\left(\frac{d^2}{d\,u^i\,d\,u^j}\,x^b\right)\quad\to\quad 2\,\left(\frac{d}{d\,u^k}\,x^a\right)\,g_{ab}\,\left(\frac{d^2}{d\,u^i\,d\,u^j}\,x^b\right)$$

これから (4.6.210) 式を書き換えて、

$$\frac{2\,\Gamma u^l_{ij}}{gu^{kl}}=\left(\frac{d}{d\,u^i}\,x^a\right)\,\left(\frac{d}{d\,u^j}\,x^b\right)\,\left(\frac{d}{d\,u^k}\,x^c\right)\,\left(\frac{d}{d\,x^a}\,g_{cb}+\frac{d}{d\,x^b}\,g_{ac}-\frac{d}{d\,x^c}\,g_{ab}\right)+2\,\left(\frac{d}{d\,u^k}\,x^a\right)\,g_{ab}\,\left(\frac{d^2}{d\,u^i\,d\,u^j}\,x^b\right) \tag{4.6.211}$$

```
DGUX41:DGUX31*gu([],[k,l])/2;
ishow(%);
DGUX42:DGUX32*gu([],[k,l])/2;
ishow(%);
DGUX4:DGUX41+DGUX42;
ishow(%);
GUX30:gu([],[a,j])=g([],[b,k])*('diff(u[a],
 x[b],1))*('diff(u[j],x[k],1));
ishow(%);
subst([a=o,b=p,j=q,k=r],GUX30);
GUX31:subst([o=k,p=c,q=l,r=h],%);
ishow(%);
DGUX410:subst([GUX31],DGUX41);
ishow(%);
DGUX411:subst(['diff(x[c],u[k],1)=1,
 'diff(u[k],x[c],1)=1],DGUX410);
ishow(%);
DGUX412:('diff(x[a],u[i],1))*('diff(x[b],
 u[j],1))*('diff(u[l],x[h],1))*
 \Gamma([a,b],[h]);
```

```
ishow(%);
subst([a=o,b=p,j=q,k=r],GUX30);
GUX32:subst([o=k,p=a,q=l,r=h],%);
ishow(%);
DGUX4211:subst([GUX32],DGUX42);
ishow(%);
DGUX421:subst(['diff(x[a],u[k],1)=1,
 'diff(u[k],x[a],1)=1],DGUX4211);
ishow(%);
DGUX422:subst([h=b],DGUX421);
ishow(%);
DGUX423:('diff(x[b],u[i],1,u[j],1))*
 ('diff(u[l],x[b],1));
ishow(%);
GMU4:lhs(GMU1)=DGUX412+DGUX423;
ishow(%);
subst([l=k,h=c],GMU4);
ishow(%);
```

(4.6.211) 式を変形し、

$$\begin{aligned}\Gamma u_{ij}^{l} =& \frac{gu^{kl}}{2}\left(\frac{d}{d\,u^i}\,x^a\right)\left(\frac{d}{d\,u^j}\,x^b\right)\left(\frac{d}{d\,u^k}\,x^c\right)\left(\frac{d}{d\,x^a}\,g_{cb}+\frac{d}{d\,x^b}\,g_{ac}-\frac{d}{d\,x^c}\,g_{ab}\right)\\ &+gu^{kl}\left(\frac{d}{d\,u^k}\,x^a\right)g_{ab}\left(\frac{d^2}{d\,u^i\,d\,u^j}\,x^b\right)\end{aligned} \tag{4.6.212}$$

双対基底ベクトルの計量テンソルの座標変換関係式は (4.6.166) 式から、

$$gu^{aj} = g^{bk}\left(\frac{d}{d\,x^b}\,u^a\right)\left(\frac{d}{d\,x^k}\,u^j\right) \tag{4.6.213}$$

(4.6.212) 式の右辺第一項の gu^{kl} の座標変換をクリストフェル記号に置き換えるため、(4.6.213) 式の座標変換関係式は、

$$gu^{kl} = g^{ch}\left(\frac{d}{d\,x^c}\,u^k\right)\left(\frac{d}{d\,x^h}\,u^l\right) \tag{4.6.214}$$

(4.6.212) 式の右辺第一項に上式を代入し、$\left(\frac{d}{d\,u^k}\,x^c\right)\left(\frac{d}{d\,x^c}\,u^k\right)=1$ であるから簡略化でき、クリストフェル記号に置き換えると、

$$\begin{aligned}&\frac{g^{ch}}{2}\left(\frac{d}{d\,u^i}\,x^a\right)\left(\frac{d}{d\,u^j}\,x^b\right)\left(\frac{d}{d\,u^k}\,x^c\right)\left(\frac{d}{d\,x^a}\,g_{cb}+\frac{d}{d\,x^b}\,g_{ac}-\frac{d}{d\,x^c}\,g_{ab}\right)\left(\frac{d}{d\,x^c}\,u^k\right)\left(\frac{d}{d\,x^h}\,u^l\right)\\ &=\frac{g^{ch}}{2}\left(\frac{d}{d\,u^i}\,x^a\right)\left(\frac{d}{d\,u^j}\,x^b\right)\left(\frac{d}{d\,x^a}\,g_{cb}+\frac{d}{d\,x^b}\,g_{ac}-\frac{d}{d\,x^c}\,g_{ab}\right)\left(\frac{d}{d\,x^h}\,u^l\right)\\ &=\left(\frac{d}{d\,u^i}\,x^a\right)\Gamma_{ab}^{h}\left(\frac{d}{d\,u^j}\,x^b\right)\left(\frac{d}{d\,x^h}\,u^l\right)\end{aligned} \tag{4.6.215}$$

(4.6.212) 式の右辺第二項の gu^{kl} の座標変換を $g^{ab}\,g_{ab}=1$ に置き換えるため、(4.6.213) 式の座標変換関係式は、

$$gu^{kl} = g^{ah}\left(\frac{d}{d\,x^a}\,u^k\right)\left(\frac{d}{d\,x^h}\,u^l\right) \tag{4.6.216}$$

(4.6.212) 式の右辺第二項に上式を代入し、$\left(\frac{d}{d\,u^k}\,x^a\right)\left(\frac{d}{d\,x^a}\,u^k\right)=1$ であり、$h \neq b$ のとき $g^{ah}\,g_{ab}=0$、$h=b$ のとき $g^{ab}\,g_{ab}=1$ であるから、

$$\begin{aligned}
&g^{ah}\left(\frac{d}{d\,u^k}\,x^a\right)g_{ab}\left(\frac{d^2}{d\,u^i\,d\,u^j}\,x^b\right)\left(\frac{d}{d\,x^a}\,u^k\right)\left(\frac{d}{d\,x^h}\,u^l\right)\\
&= g^{ah}\,g_{ab}\left(\frac{d^2}{d\,u^i\,d\,u^j}\,x^b\right)\left(\frac{d}{d\,x^h}\,u^l\right)\\
&= g^{ab}\,g_{ab}\left(\frac{d^2}{d\,u^i\,d\,u^j}\,x^b\right)\left(\frac{d}{d\,x^b}\,u^l\right)\\
&= \left(\frac{d^2}{d\,u^i\,d\,u^j}\,x^b\right)\left(\frac{d}{d\,x^b}\,u^l\right)
\end{aligned} \tag{4.6.217}$$

(4.6.215) 式、(4.6.217) 式から、(4.6.212) 式は、

$$\Gamma u^l_{ij} = \left(\frac{d}{d\,u^i}\,x^a\right)\Gamma^h_{ab}\left(\frac{d}{d\,u^j}\,x^b\right)\left(\frac{d}{d\,x^h}\,u^l\right) + \left(\frac{d^2}{d\,u^i\,d\,u^j}\,x^b\right)\left(\frac{d}{d\,x^b}\,u^l\right)$$

上式の $l \to k,\ h \to c$ の置き換えを行うと、

$$\Gamma u^k_{ij} = \left(\frac{d}{d\,u^i}\,x^a\right)\Gamma^c_{ab}\left(\frac{d}{d\,u^j}\,x^b\right)\left(\frac{d}{d\,x^c}\,u^k\right) + \left(\frac{d^2}{d\,u^i\,d\,u^j}\,x^b\right)\left(\frac{d}{d\,x^b}\,u^k\right) \tag{4.6.218}$$

4.6.14.4　反変ベクトル共変微分係数

反変ベクトルの共変微分係数を求める。

```
kill(all);
load("vect")$
load(itensor)$
depends([A,e],[x[j]]);
A1:A=A([],[i])*e([i],[]);
ishow(%);
A11:lhs(A1)=sum(rhs(A1),i,1,3);
ishow(%);
DA1:diff(A1,x[j],1);
ishow(%);
DA11:lhs(DA1)=sum(rhs(DA1),i,1,3);
ishow(%);
DEIJ0:'diff(e([i],[]),x[j],1)=
 Gamma([i,j],[k])*e([k],[]);
ishow(%);
AVD6:subst([DEIJ0],DA1);
ishow(%);
AVD61:lhs(AVD6)=sum(last(rhs(AVD6)),i,1,3)
 +sum(sum(first(rhs(AVD6)),i,1,3),k,1,3);
ishow(%);
AVD62:coeff(rhs(AVD61),e([1],[]));
ishow(%);
coeff(rhs(AVD61),e([2],[]));
ishow(%);
coeff(rhs(AVD61),e([3],[]));
ishow(%);
AVD71:subst([A([],[1])=A([],[i])],
 first(AVD62))+subst([1=i,3=k],
 first(AVD62-first(AVD62)));
ishow(%);
AVD72:lhs(AVD6)=AVD71*e([i],[]);
expand(%);
AVD73:lhs(%)=sum(last(rhs(%)),i,1,3)
 +sum(sum(first(rhs(%)),i,1,3),k,1,3);
ishow(%);
AVD61-AVD73;
subst([x[j]=x^"j"],AVD72);
ishow(%);
```

反変ベクトル：$\overrightarrow{A}$ は、基底ベクトルを $\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}$ とすると、

$$\overrightarrow{A}=A^3\,\overrightarrow{e_3}+A^2\,\overrightarrow{e_2}+A^1\,\overrightarrow{e_1}$$

縮約表記すると、

$$\overrightarrow{A}=A^i\,\overrightarrow{e_i}$$

上式を x^j で微分すると、

$$\frac{d}{d\,x^j}\,\overrightarrow{A}=A^i\left(\frac{d}{d\,x^j}\,\overrightarrow{e_i}\right)+\left(\frac{d}{d\,x^j}\,A^i\right)\,\overrightarrow{e_i} \tag{4.6.219}$$

上式を $i=1\rightarrow 3$ で展開すると、

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\,x^j}\,\overrightarrow{A}=&A^3\left(\frac{d}{d\,x^j}\,\overrightarrow{e_3}\right)+A^2\left(\frac{d}{d\,x^j}\,\overrightarrow{e_2}\right)\\&+A^1\left(\frac{d}{d\,x^j}\,\overrightarrow{e_1}\right)+\overrightarrow{e_3}\left(\frac{d}{d\,x^j}\,A^3\right)\\&+\overrightarrow{e_2}\left(\frac{d}{d\,x^j}\,A^2\right)+\overrightarrow{e_1}\left(\frac{d}{d\,x^j}\,A^1\right)\end{aligned} \tag{4.6.220}$$

(4.6.177) 式から、

$$\frac{d}{d\,x^j}\,\overrightarrow{e_i}=\Gamma_{ij}^k\,\overrightarrow{e_k}$$

(4.6.219) 式に上式を代入すると、

$$\frac{d}{d\,x^j}\,\overrightarrow{A}=A^i\,\Gamma_{ij}^k\,\overrightarrow{e_k}+\left(\frac{d}{d\,x^j}\,A^i\right)\,\overrightarrow{e_i} \tag{4.6.221}$$

上式を $i,k=1\rightarrow 3$ で展開すると、

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\,x^j}\,\overrightarrow{A}=&\overrightarrow{e_3}\left(\frac{d}{d\,x^j}\,A^3\right)+\overrightarrow{e_2}\left(\frac{d}{d\,x^j}\,A^2\right)\\&+\overrightarrow{e_1}\left(\frac{d}{d\,x^j}\,A^1\right)+A^3\,\overrightarrow{e_3}\,\Gamma_{3j}^3\\&+A^3\,\overrightarrow{e_2}\,\Gamma_{3j}^2+A^3\,\overrightarrow{e_1}\,\Gamma_{3j}^1\\&+A^2\,\Gamma_{2j}^3\,\overrightarrow{e_3}+A^1\,\Gamma_{1j}^3\,\overrightarrow{e_3}\\&+A^2\,\overrightarrow{e_2}\,\Gamma_{2j}^2+A^2\,\overrightarrow{e_1}\,\Gamma_{2j}^1\\&+A^1\,\Gamma_{1j}^2\,\overrightarrow{e_2}+A^1\,\overrightarrow{e_1}\,\Gamma_{1j}^1\end{aligned} \tag{4.6.222}$$

(4.6.222) 式の $\overrightarrow{e_1}$ 項をまとめると、

$$\frac{d}{d\,x^j}\,A^1+A^3\,\Gamma_{3j}^1+A^2\,\Gamma_{2j}^1+A^1\,\Gamma_{1j}^1$$

(4.6.222) 式の $\overrightarrow{e_2}$ 項をまとめると、

$$\frac{d}{d\,x^j}\,A^2+A^3\,\Gamma_{3j}^2+A^2\,\Gamma_{2j}^2+A^1\,\Gamma_{1j}^2$$

(4.6.222) 式の $\overrightarrow{e_3}$ 項をまとめると、

$$\frac{d}{d\,x^j}\,A^3+A^3\,\Gamma_{3j}^3+A^2\,\Gamma_{2j}^3+A^1\,\Gamma_{1j}^3$$

上式を縮約表記すると、反変ベクトル共変微分係数は、

$$A^k\,\Gamma_{kj}^i+\frac{d}{d\,x^j}\,A^i \tag{4.6.223}$$

上式から、

$$\frac{d}{d\,x^j}\,A=\overrightarrow{e_i}\left(A^k\,\Gamma_{kj}^i+\frac{d}{d\,x^j}\,A^i\right) \tag{4.6.224}$$

また、次のように記述する。

$$A_{,j}^i=A^k\,\Gamma_{kj}^i+\frac{d}{d\,x^j}\,A^i \tag{4.6.225}$$

4.6.14.5 共変ベクトル共変微分係数

共変ベクトルの共変微分係数を求める。

```
kill(all);
load("vect")$
load(itensor)$
depends([A,e],[x[j]]);
A1:A=A([i],[])*e([],[i]);
ishow(%);
LI1:[x[j]=x^"j"];
DA1:diff(A1,x[j],1);
subst(LI1,%);
ishow(%);
DEIJ0:'diff(e([],[i]),x[j],1)=
 Lambda([i,j],[k])*e([],[k]);
subst(LI1,%);
ishow(%);
LD1:Lambda([j,k],[i])=-Gamma([i,k],[j]);
ishow(%);
LD2:Lambda([i,j],[k])=-Gamma([k,j],[i]);
ishow(%);
DEIJ2:subst([LD2],DEIJ0);
subst(LI1,%);
ishow(%);
DA2:subst([DEIJ2],DA1);
DA3:lhs(DA2)=sum(first(rhs(DA2)),i,1,3)
 +sum(sum(last(rhs(DA2)),i,1,3),k,1,3);
subst(LI1,%);
ishow(%);
C1:coeff(rhs(DA3),e([],[1]));
subst(LI1,%);
ishow(%);
C2:coeff(rhs(DA3),e([],[2]));
subst(LI1,%);
ishow(%);
C3:coeff(rhs(DA3),e([],[3]));
subst(LI1,%);
ishow(%);
C0:'diff(A[i],x[j],1)-A[k]
 *Gamma([i,j],[k]);
subst(LI1,%);
ishow(%);
DA4:lhs(DA2)=C0*e([],[i]);
subst(LI1,%);
ishow(%);
```

共変ベクトル：$\overrightarrow{A}$ は、双対基底ベクトルを $\overrightarrow{e^1},\overrightarrow{e^2},\overrightarrow{e^3}$ とし、縮約表記すると、

$$\overrightarrow{A}=\overrightarrow{e^i}\,A_i$$

上式を x^j で微分すると、

$$\frac{d}{d\,x^j}\,\overrightarrow{A}=\overrightarrow{e^i}\,\left(\frac{d}{d\,x^j}\,A_i\right)+\left(\frac{d}{d\,x^j}\,\overrightarrow{e^i}\right)\,A_i \tag{4.6.226}$$

(4.6.198) 式から双対基底ベクトル：$\overrightarrow{e^i}$ の x^j による微分を、双対基底ベクトルと重み係数：Λ^i_{jk} で下記のように縮約できる。

$$\frac{d}{d\,x^j}\,\overrightarrow{e^i}=\overrightarrow{e^k}\,\Lambda^k_{ij} \tag{4.6.227}$$

(4.6.199) 式から

$$\Lambda^i_{jk}=-\Gamma^j_{ik}$$

(4.6.227) 式にあう添え字にして、

$$\Lambda^k_{ij}=-\Gamma^i_{kj}$$

(4.6.227) 式に上式を代入すると、

$$\frac{d}{d\,x^j}\,\overrightarrow{e^i}=-\overrightarrow{e^k}\,\Gamma^i_{kj}$$

(4.6.226) 式に上式を代入すると、

$$\frac{d}{d\,x^j}\,A=e^i\,\left(\frac{d}{d\,x^j}\,A_i\right)-e^k\,A_i\,\Gamma^i_{kj}$$

上式を $i,k=1\rightarrow 3$ で展開すると、

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\,x^j}\,\overrightarrow{A}=&\overrightarrow{e^3}\,\left(\frac{d}{d\,x^j}\,A_3\right)+\overrightarrow{e^2}\,\left(\frac{d}{d\,x^j}\,A_2\right)\\&+\overrightarrow{e^1}\,\left(\frac{d}{d\,x^j}\,A_1\right)\\&-\overrightarrow{e^3}\,A_3\,\Gamma^3_{3j}-\overrightarrow{e^3}\,A_2\,\Gamma^2_{3j}-\overrightarrow{e^3}\,A_1\,\Gamma^1_{3j}\\&-\overrightarrow{e^2}\,\Gamma^3_{2j}\,A_3-\overrightarrow{e^1}\,\Gamma^3_{1j}\,A_3-\overrightarrow{e^2}\,A_2\,\Gamma^2_{2j}\\&-\overrightarrow{e^2}\,A_1\,\Gamma^1_{2j}-\overrightarrow{e^1}\,\Gamma^2_{1j}\,A_2-\overrightarrow{e^1}\,A_1\,\Gamma^1_{1j}\end{aligned} \tag{4.6.228}$$

(4.6.228) 式の $\overrightarrow{e^1}$ 項をまとめると、

$$\frac{d}{d\,x^j}\,A_1-\Gamma^3_{1j}\,A_3-\Gamma^2_{1j}\,A_2-A_1\,\Gamma^1_{1j}$$

(4.6.228) 式の $\overrightarrow{e^2}$ 項をまとめると、

$$\frac{d}{d\,x^j}\,A_2-\Gamma^3_{2j}\,A_3-A_2\,\Gamma^2_{2j}-A_1\,\Gamma^1_{2j}$$

(4.6.228) 式の $\overrightarrow{e^3}$ 項をまとめると、

$$\frac{d}{d\,x^j}\,A_3-A_3\,\Gamma^3_{3j}-A_2\,\Gamma^2_{3j}-A_1\,\Gamma^1_{3j}$$

上式を縮約表記すると、共変ベクトル共変微分係数は、

$$\frac{d}{d\,x^j}\,A_i-\Gamma^k_{ij}\,A_k \tag{4.6.229}$$

上式から、

$$\frac{d}{d\,x^j}\,\overrightarrow{A}=\overrightarrow{e^i}\,\left(\frac{d}{d\,x^j}\,A_i-\Gamma^k_{ij}\,A_k\right) \tag{4.6.230}$$

また、次のように記述する。

$$A_{i,j}=\frac{d}{d\,x^j}\,A_i-\Gamma^k_{ij}\,A_k \tag{4.6.231}$$

4.6.14.6　反変テンソル共変微分係数

反変テンソルの共変微分係数を求める。

```
kill(all);
load("vect")$
load(itensor)$
depends([T,e],[x[k]]);
T1:T([],[i,j])*e([i],[])*f([j],[]);
ishow(%);
DT1:diff(T1,x[k],1);
ishow(%);
DEIJ0:'diff(e([i],[]),x[j],1)=Gamma([i,j],
 [m])*e([m],[]);
ishow(%);
DEIJ1:'diff(e([i],[]),x[k],1)=Gamma([i,k],
 [m])*e([m],[]);
ishow(%);
DEIJ2:'diff(f([j],[]),x[k],1)=Gamma([j,k],
 [n])*f([n],[]);
ishow(%);
DT2:subst([DEIJ1,DEIJ2],DT1);
ishow(%);
```

反変テンソル：V を下記とし、後ろの $\overrightarrow{e_j}$ を $\overrightarrow{f_j}$ と表し、下記とする。

$$V = T^{ij}\,\overrightarrow{e_i} \otimes \overrightarrow{e_j} = T^{ij}\,\overrightarrow{e_i}\,\overrightarrow{f_j} \tag{4.6.232}$$

上式を x^k で微分すると、

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\,x^k}\,V =& T^{ij}\,\overrightarrow{e_i}\left(\frac{d}{d\,x^k}\,\overrightarrow{f_j}\right) + T^{ij}\left(\frac{d}{d\,x^k}\,\overrightarrow{e_i}\right)\overrightarrow{f_j}\\ &+\left(\frac{d}{d\,x^k}\,T^{ij}\right)\overrightarrow{e_i}\,\overrightarrow{f_j}\end{aligned} \tag{4.6.233}$$

反変ベクトルの基底ベクトル：$\overrightarrow{e_i}$ を x^j で微分した結果：(4.6.177) 式から、

$$\frac{d}{d\,x^j}\,\overrightarrow{e_i} = \Gamma_{ij}^{m}\,\overrightarrow{e_m}$$

上式で $j \to k$ の置き換えを行って、

$$\frac{d}{d\,x^k}\,\overrightarrow{e_i} = \Gamma_{ik}^{m}\,\overrightarrow{e_m} \tag{4.6.234}$$

基底ベクトル：$\overrightarrow{f_j}$ についても、同様にして、

$$\frac{d}{d\,x^k}\,\overrightarrow{f_j} = \Gamma_{jk}^{n}\,\overrightarrow{f_n} \tag{4.6.235}$$

(4.6.233) 式に (4.6.234) 式 (4.6.235) 式を代入し、

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\,x^k}\,V =& T^{ij}\,e_i\,\Gamma_{jk}^{n}\,f_n + T^{ij}\,\Gamma_{ik}^{m}\,f_j\,e_m\\ &+\left(\frac{d}{d\,x^k}\,T^{ij}\right)e_i\,f_j\end{aligned} \tag{4.6.236}$$

```
DT3:first(DT2);
ishow(%);
DT4:DT2-DT3-last(DT2);
ishow(%);
DT30:sum(sum(sum(DT3,i,1,3),j,1,3),n,1,3);
ishow(%);
DT31:coeff(DT30,e([1],[]));
DT311:coeff(DT31,f([1],[]))*e([1],[])
 *f([1],[]);
ishow(DT311);
DT312:coeff(DT31,f([2],[]))*e([1],[])
 *f([2],[]);
ishow(DT312);
DT313:coeff(DT31,f([3],[]))*e([1],[])
 *f([3],[]);
ishow(DT313);
DT32:coeff(DT30,e([2],[]));
DT321:coeff(DT32,f([1],[]))*e([2],[])*
 f([1],[]);
ishow(DT321);
DT322:coeff(DT32,f([2],[]))*e([2],[])
 *f([2],[]);
ishow(DT322);
DT323:coeff(DT32,f([3],[]))*e([2],[])
 *f([3],[]);
ishow(DT323);
DT33:coeff(DT30,e([3],[]));
DT331:coeff(DT33,f([1],[]))*e([3],[])
 *f([1],[]);
ishow(DT331);
DT332:coeff(DT33,f([2],[]))*e([3],[])
 *f([2],[]);
ishow(DT332);
DT333:coeff(DT33,f([3],[]))*e([3],[])
 *f([3],[]);
ishow(DT333);
DT35:e([i],[])*f([j],[])*T([],[i,n])
 *Gamma([n,k],[j]);
ishow(%);
subst([i=1,j=2],DT35);
sum(%,n,1,3);
factor(%-DT312);
subst([i=2,j=3],DT35);
sum(%,n,1,3);
factor(%-DT323);
subst([i=3,j=2],DT35);
sum(%,n,1,3);
factor(%-DT332);
```

(4.6.236) 式の下記の右辺第一項について、

$$T^{ij}\,e_i\,\Gamma^{n}_{jk}\,f_n$$

(4.6.236) 式の右辺第三項と同じ $e_i\,f_j$ の項を求めるため、上式を $i,j,n=1\to 3$ で展開すると、

$$\begin{aligned}
&T^{33}\,e_3\,f_3\,\Gamma^{3}_{3k}+T^{23}\,e_2\,f_3\,\Gamma^{3}_{3k}+T^{13}\,e_1\,f_3\,\Gamma^{3}_{3k}\\
&+T^{33}\,f_2\,e_3\,\Gamma^{2}_{3k}+T^{23}\,e_2\,f_2\,\Gamma^{2}_{3k}+T^{13}\,e_1\,f_2\,\Gamma^{2}_{3k}\\
&+T^{33}\,f_1\,e_3\,\Gamma^{1}_{3k}+T^{23}\,f_1\,e_2\,\Gamma^{1}_{3k}+T^{13}\,e_1\,f_1\,\Gamma^{1}_{3k}\\
&+T^{32}\,\Gamma^{3}_{2k}\,e_3\,f_3+T^{31}\,\Gamma^{3}_{1k}\,e_3\,f_3+T^{22}\,e_2\,\Gamma^{3}_{2k}\,f_3\\
&+T^{12}\,e_1\,\Gamma^{3}_{2k}\,f_3+T^{21}\,\Gamma^{3}_{1k}\,e_2\,f_3+T^{11}\,e_1\,\Gamma^{3}_{1k}\,f_3\\
&+T^{32}\,f_2\,\Gamma^{2}_{2k}\,e_3+T^{32}\,f_1\,\Gamma^{1}_{2k}\,e_3+T^{31}\,\Gamma^{2}_{1k}\,f_2\,e_3\\
&+T^{31}\,f_1\,\Gamma^{1}_{1k}\,e_3+T^{22}\,e_2\,f_2\,\Gamma^{2}_{2k}+T^{12}\,e_1\,f_2\,\Gamma^{2}_{2k}\\
&+T^{22}\,f_1\,e_2\,\Gamma^{1}_{2k}+T^{12}\,e_1\,f_1\,\Gamma^{1}_{2k}+T^{21}\,\Gamma^{2}_{1k}\,e_2\,f_2\\
&+T^{11}\,e_1\,\Gamma^{2}_{1k}\,f_2+T^{21}\,f_1\,\Gamma^{1}_{1k}\,e_2+T^{11}\,e_1\,f_1\,\Gamma^{1}_{1k}
\end{aligned}\tag{4.6.237}$$

$e_i\,f_j \quad i,j=1\to 3$ の各項を求めると、

$$\begin{aligned}
&e_1\,f_1\;\left(T^{13}\,\Gamma^{1}_{3k}+T^{12}\,\Gamma^{1}_{2k}+T^{11}\,\Gamma^{1}_{1k}\right)\\
&e_1\,f_2\;\left(T^{13}\,\Gamma^{2}_{3k}+T^{12}\,\Gamma^{2}_{2k}+T^{11}\,\Gamma^{2}_{1k}\right)\\
&e_1\,f_3\;\left(T^{13}\,\Gamma^{3}_{3k}+T^{12}\,\Gamma^{3}_{2k}+T^{11}\,\Gamma^{3}_{1k}\right)\\
&f_1\,e_2\;\left(T^{23}\,\Gamma^{1}_{3k}+T^{22}\,\Gamma^{1}_{2k}+T^{21}\,\Gamma^{1}_{1k}\right)\\
&e_2\,f_2\;\left(T^{23}\,\Gamma^{2}_{3k}+T^{22}\,\Gamma^{2}_{2k}+T^{21}\,\Gamma^{2}_{1k}\right)\\
&e_2\,f_3\;\left(T^{23}\,\Gamma^{3}_{3k}+T^{22}\,\Gamma^{3}_{2k}+T^{21}\,\Gamma^{3}_{1k}\right)\\
&f_1\,e_3\;\left(T^{33}\,\Gamma^{1}_{3k}+T^{32}\,\Gamma^{1}_{2k}+T^{31}\,\Gamma^{1}_{1k}\right)\\
&f_2\,e_3\;\left(T^{33}\,\Gamma^{2}_{3k}+T^{32}\,\Gamma^{2}_{2k}+T^{31}\,\Gamma^{2}_{1k}\right)\\
&e_3\,f_3\;\left(T^{33}\,\Gamma^{3}_{3k}+T^{32}\,\Gamma^{3}_{2k}+T^{31}\,\Gamma^{3}_{1k}\right)
\end{aligned}$$

上式をまとめ、縮約表記すると、

$$T^{in}\,e_i\,f_j\,\Gamma^{j}_{nk}\tag{4.6.238}$$

```
DT30:sum(sum(sum(DT4,i,1,3),j,1,3),m,1,3);
ishow(%);
DT31:coeff(DT30,e([1],[]));
DT311:coeff(DT31,f([1],[]))*e([1],[])
 *f([1],[]);
ishow(DT311);
DT312:coeff(DT31,f([2],[]))*e([1],[])
 *f([2],[]);
ishow(DT312);
DT313:coeff(DT31,f([3],[]))*e([1],[])
 *f([3],[]);
ishow(DT313);
DT32:coeff(DT30,e([2],[]));
DT321:coeff(DT32,f([1],[]))*e([2],[])
 *f([1],[]);
ishow(DT321);
DT322:coeff(DT32,f([2],[]))*e([2],[])
 *f([2],[]);
ishow(DT322);
DT323:coeff(DT32,f([3],[]))*e([2],[])
 *f([3],[]);
ishow(DT323);
DT33:coeff(DT30,e([3],[]));
DT331:coeff(DT33,f([1],[]))*e([3],[])
 *f([1],[]);
ishow(DT331);
DT332:coeff(DT33,f([2],[]))*e([3],[])
 *f([2],[]);
ishow(DT332);
DT333:coeff(DT33,f([3],[]))*e([3],[])
 *f([3],[]);
ishow(DT333);
DT45:e([i],[])*f([j],[])*T([],[m,j])
 *Gamma([m,k],[i]);
ishow(%);
subst([i=1,j=2],DT45);
sum(%,m,1,3);
factor(%-DT312);
subst([i=2,j=3],DT45);
sum(%,m,1,3);
factor(%-DT323);
subst([i=3,j=2],DT45);
sum(%,m,1,3);
factor(%-DT332);
DT35+DT45+last(DT2);
subst([n=m],%);
factor(%);
ishow(%);
```

(4.6.236) 式の下記の右辺第二項について、

$$T^{ij}\,\Gamma^m_{ik}\,f_j\,e_m$$

(4.6.236) 式の右辺第三項と同じ $e_i\,f_j$ の項を求めるため、上式を $i,j,n=1\to 3$ で展開すると、

$$\begin{aligned}
&T^{33}\,e_3\,f_3\,\Gamma^3_{3k}+T^{32}\,f_2\,e_3\,\Gamma^3_{3k}+T^{31}\,f_1\,e_3\,\Gamma^3_{3k}\\
&+T^{33}\,e_2\,f_3\,\Gamma^2_{3k}+T^{32}\,e_2\,f_2\,\Gamma^2_{3k}+T^{31}\,f_1\,e_2\,\Gamma^2_{3k}\\
&+T^{33}\,e_1\,f_3\,\Gamma^1_{3k}+T^{32}\,e_1\,f_2\,\Gamma^1_{3k}+T^{31}\,e_1\,f_1\,\Gamma^1_{3k}\\
&+T^{23}\,\Gamma^3_{2k}\,e_3\,f_3+T^{13}\,\Gamma^3_{1k}\,e_3\,f_3+T^{23}\,e_2\,\Gamma^2_{2k}\,f_3\\
&+T^{23}\,e_1\,\Gamma^1_{2k}\,f_3+T^{13}\,\Gamma^2_{1k}\,e_2\,f_3+T^{13}\,e_1\,\Gamma^1_{1k}\,f_3\\
&+T^{22}\,f_2\,\Gamma^3_{2k}\,e_3+T^{21}\,f_1\,\Gamma^3_{2k}\,e_3+T^{12}\,\Gamma^3_{1k}\,f_2\,e_3\\
&+T^{11}\,f_1\,\Gamma^3_{1k}\,e_3+T^{22}\,e_2\,f_2\,\Gamma^2_{2k}+T^{21}\,f_1\,e_2\,\Gamma^2_{2k}\\
&+T^{22}\,e_1\,f_2\,\Gamma^1_{2k}+T^{21}\,e_1\,f_1\,\Gamma^1_{2k}+T^{12}\,\Gamma^2_{1k}\,e_2\,f_2\\
&+T^{12}\,e_1\,\Gamma^1_{1k}\,f_2+T^{11}\,f_1\,\Gamma^2_{1k}\,e_2+T^{11}\,e_1\,f_1\,\Gamma^1_{1k}
\end{aligned} \tag{4.6.239}$$

$e_i\,f_j$　$i,j=1\to 3$ の各項を求めると、

$$\begin{aligned}
&e_1\,f_1\,\left(T^{31}\,\Gamma^1_{3k}+T^{21}\,\Gamma^1_{2k}+T^{11}\,\Gamma^1_{1k}\right)\\
&e_1\,f_2\,\left(T^{32}\,\Gamma^1_{3k}+T^{22}\,\Gamma^1_{2k}+T^{12}\,\Gamma^1_{1k}\right)\\
&e_1\,f_3\,\left(T^{33}\,\Gamma^1_{3k}+T^{23}\,\Gamma^1_{2k}+T^{13}\,\Gamma^1_{1k}\right)\\
&f_1\,e_2\,\left(T^{31}\,\Gamma^2_{3k}+T^{21}\,\Gamma^2_{2k}+T^{11}\,\Gamma^2_{1k}\right)\\
&e_2\,f_2\,\left(T^{32}\,\Gamma^2_{3k}+T^{22}\,\Gamma^2_{2k}+T^{12}\,\Gamma^2_{1k}\right)\\
&e_2\,f_3\,\left(T^{33}\,\Gamma^2_{3k}+T^{23}\,\Gamma^2_{2k}+T^{13}\,\Gamma^2_{1k}\right)\\
&f_1\,e_3\,\left(T^{31}\,\Gamma^3_{3k}+T^{21}\,\Gamma^3_{2k}+T^{11}\,\Gamma^3_{1k}\right)\\
&f_2\,e_3\,\left(T^{32}\,\Gamma^3_{3k}+T^{22}\,\Gamma^3_{2k}+T^{12}\,\Gamma^3_{1k}\right)\\
&e_3\,f_3\,\left(T^{33}\,\Gamma^3_{3k}+T^{23}\,\Gamma^3_{2k}+T^{13}\,\Gamma^3_{1k}\right)
\end{aligned}$$

上式をまとめ、縮約表記すると、

$$T^{mj}\,e_i\,f_j\,\Gamma^i_{mk} \tag{4.6.240}$$

(4.6.236) 式の右辺第三項と (4.6.238) 式、(4.6.240) 式の和から、$n=m$ として、

$$\frac{d}{d\,x^k}\,V=e_i\,f_j\,\left(T^{im}\,\Gamma^j_{mk}+T^{mj}\,\Gamma^i_{mk}+\frac{d}{d\,x^k}\,T^{ij}\right) \tag{4.6.241}$$

また、次のように記述する。

$$T^{ij}_{,k}=T^{im}\,\Gamma^j_{mk}+T^{mj}\,\Gamma^i_{mk}+\frac{d}{d\,x^k}\,T^{ij} \tag{4.6.242}$$

以上から、反変テンソル共変微分係数は、

$$T^{im}\,\Gamma^j_{mk}+T^{mj}\,\Gamma^i_{mk}+\frac{d}{d\,x^k}\,T^{ij} \tag{4.6.243}$$

4.6.14.7 共変テンソル共変微分係数

共変テンソルの共変微分係数を求める。

```
kill(all);
load("vect")$
load(itensor)$
depends([T,e],[x[k]]);
T1:T([i,j],[])*e([],[i])*f([],[j]);
ishow(%);
DT1:diff(T1,x[k],1);
ishow(%);
DEIJ0:'diff(e([],[i]),x[j],1)=
 -Gamma([m,j],[i])*e([],[m]);
ishow(%);
DEIJ1:'diff(f([],[j]),x[k],1)=
 -Gamma([m,k],[j])*f([],[m]);
ishow(%);
DEIJ2:'diff(e([],[i]),x[k],1)=
 -Gamma([m,k],[i])*e([],[m]);
ishow(%);
DT2:subst([DEIJ1,DEIJ2],DT1);
ishow(%);
```

共変テンソル：V を下記とし、後ろの $\overrightarrow{e^j}$ を $\overrightarrow{f^j}$ と表し、下記とする。

$$V = T_{ij}\,\overrightarrow{e^i} \otimes \overrightarrow{e^j} = T_{ij}\,e^i\,f^j \tag{4.6.244}$$

上式を x^k で微分すると、

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\,x^k}\,V =& \overrightarrow{e^i}\,\overrightarrow{f^j}\,\left(\frac{d}{d\,x^k}\,T_{ij}\right) + \overrightarrow{e^i}\,\left(\frac{d}{d\,x^k}\,\overrightarrow{f^j}\right)\,T_{ij}\\ &+ \overrightarrow{f^j}\,\left(\frac{d}{d\,x^k}\,\overrightarrow{e^i}\right)\,T_{ij}\end{aligned} \tag{4.6.245}$$

共変ベクトルの双対基底ベクトル：$\overrightarrow{e^i}$ を x^j で微分した結果：(4.6.201) 式から、

$$\frac{d}{d\,x^j}\,\overrightarrow{e^i} = -\overrightarrow{e^m}\,\Gamma^i_{mj}$$

上式で $j \to k$ の置き換えを行って、

$$\frac{d}{d\,x^k}\,\overrightarrow{e^i} = -\overrightarrow{e^m}\,\Gamma^i_{mk} \tag{4.6.246}$$

基底ベクトル：$\overrightarrow{f^j}$ についても、同様にして、

$$\frac{d}{d\,x^k}\,\overrightarrow{f^j} = -\overrightarrow{f^m}\,\Gamma^j_{mk} \tag{4.6.247}$$

(4.6.245) 式に (4.6.246) 式 (4.6.247) 式を代入し、

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\,x^k}\,V =& -\overrightarrow{e^i}\,\overrightarrow{f^m}\,T_{ij}\,\Gamma^j_{mk} - \overrightarrow{f^j}\,\overrightarrow{e^m}\,T_{ij}\,\Gamma^i_{mk}\\ &+ \overrightarrow{e^i}\,\overrightarrow{f^j}\,\left(\frac{d}{d\,x^k}\,T_{ij}\right)\end{aligned} \tag{4.6.248}$$

```
DT21:last(DT2);
ishow(%);
DT22:DT2-DT21;
ishow(%);
DT221:first(DT22);
ishow(%);
DT222:last(DT22);
ishow(%);
DT30:sum(sum(sum(DT221,i,1,3),j,1,3),m,
 1,3);
ishow(%);
DT31:coeff(DT30,e([],[1]));
DT311:coeff(DT31,f([],[1]))*e([],[1])
 *f([],[1]);
ishow(DT311);
DT312:coeff(DT31,f([],[2]))*e([],[1])
 *f([],[2]);
ishow(DT312);
DT313:coeff(DT31,f([],[3]))*e([],[1])
 *f([],[3]);
ishow(DT313);
DT32:coeff(DT30,e([],[2]));
DT321:coeff(DT32,f([],[1]))*e([],[2])
 *f([],[1]);
ishow(DT321);
DT322:coeff(DT32,f([],[2]))*e([],[2])
 *f([],[2]);
ishow(DT322);
DT323:coeff(DT32,f([],[3]))*e([],[2])
 *f([],[3]);
ishow(DT323);
DT33:coeff(DT30,e([],[3]));
DT331:coeff(DT33,f([],[1]))*e([],[3])
 *f([],[1]);
ishow(DT331);
DT332:coeff(DT33,f([],[2]))*e([],[3])
 *f([],[2]);
ishow(DT332);
DT333:coeff(DT33,f([],[3]))*e([],[3])
 *f([],[3]);
ishow(DT333);
DT35:-e([],[i])*f([],[j])*T([i,m],[])
 *Gamma([j,k],[m]);
ishow(%);
subst([i=1,j=2],DT35);
sum(%,m,1,3);
factor(%-DT312);
```

```
subst([i=2,j=3],DT35);
sum(%,m,1,3);
factor(%-DT323);
subst([i=3,j=2],DT35);
sum(%,m,1,3);
factor(%-DT332);
```

(4.6.248) 式の下記の右辺第一項について、

$$-e^i\,f^m\,T_{ij}\,\Gamma^{j}_{mk}$$

(4.6.248) 式の右辺第三項と同じ $e^i\,f^j$ の項を求めるため、上式を $i,j,m=1\to 3$ で展開すると、

$$\begin{aligned}
&-e^3\,f^3\,T_{33}\,\Gamma^3_{3k}-e^2\,f^3\,T_{23}\,\Gamma^3_{3k}-e^1\,f^3\,T_{13}\,\Gamma^3_{3k}\\
&-e^3\,f^3\,T_{32}\,\Gamma^2_{3k}-e^2\,f^3\,T_{22}\,\Gamma^2_{3k}-e^1\,f^3\,T_{12}\,\Gamma^2_{3k}\\
&-e^3\,f^3\,T_{31}\,\Gamma^1_{3k}-e^2\,f^3\,T_{21}\,\Gamma^1_{3k}-e^1\,f^3\,T_{11}\,\Gamma^1_{3k}\\
&-f^2\,e^3\,\Gamma^3_{2k}\,T_{33}-f^1\,e^3\,\Gamma^3_{1k}\,T_{33}-f^2\,e^3\,\Gamma^2_{2k}\,T_{32}\\
&-f^1\,e^3\,\Gamma^2_{1k}\,T_{32}-f^2\,e^3\,\Gamma^1_{2k}\,T_{31}-f^1\,e^3\,\Gamma^1_{1k}\,T_{31}\\
&-e^2\,f^2\,T_{23}\,\Gamma^3_{2k}-e^1\,f^2\,T_{13}\,\Gamma^3_{2k}-e^2\,f^2\,T_{22}\,\Gamma^2_{2k}\\
&-e^1\,f^2\,T_{12}\,\Gamma^2_{2k}-e^2\,f^2\,T_{21}\,\Gamma^1_{2k}-e^1\,f^2\,T_{11}\,\Gamma^1_{2k}\\
&-f^1\,e^2\,\Gamma^3_{1k}\,T_{23}-f^1\,e^2\,\Gamma^2_{1k}\,T_{22}-f^1\,e^2\,\Gamma^1_{1k}\,T_{21}\\
&-e^1\,f^1\,T_{13}\,\Gamma^3_{1k}-e^1\,f^1\,T_{12}\,\Gamma^2_{1k}-e^1\,f^1\,T_{11}\,\Gamma^1_{1k}
\end{aligned}\tag{4.6.249}$$

$e^i\,f^j\quad i,j=1\to 3$ の各項を求めると、

$$e^1\,f^1\,\left(-T_{13}\,\Gamma^3_{1k}-T_{12}\,\Gamma^2_{1k}-T_{11}\,\Gamma^1_{1k}\right)$$

$$e^1\,f^2\,\left(-T_{13}\,\Gamma^3_{2k}-T_{12}\,\Gamma^2_{2k}-T_{11}\,\Gamma^1_{2k}\right)$$

$$e^1\,f^3\,\left(-T_{13}\,\Gamma^3_{3k}-T_{12}\,\Gamma^2_{3k}-T_{11}\,\Gamma^1_{3k}\right)$$

$$f^1\,e^2\,\left(-\Gamma^3_{1k}\,T_{23}-\Gamma^2_{1k}\,T_{22}-\Gamma^1_{1k}\,T_{21}\right)$$

$$e^2\,f^2\,\left(-T_{23}\,\Gamma^3_{2k}-T_{22}\,\Gamma^2_{2k}-T_{21}\,\Gamma^1_{2k}\right)$$

$$e^2\,f^3\,\left(-T_{23}\,\Gamma^3_{3k}-T_{22}\,\Gamma^2_{3k}-T_{21}\,\Gamma^1_{3k}\right)$$

$$f^1\,e^3\,\left(-\Gamma^3_{1k}\,T_{33}-\Gamma^2_{1k}\,T_{32}-\Gamma^1_{1k}\,T_{31}\right)$$

$$f^2\,e^3\,\left(-\Gamma^3_{2k}\,T_{33}-\Gamma^2_{2k}\,T_{32}-\Gamma^1_{2k}\,T_{31}\right)$$

$$e^3\,f^3\,\left(-T_{33}\,\Gamma^3_{3k}-T_{32}\,\Gamma^2_{3k}-T_{31}\,\Gamma^1_{3k}\right)$$

上式をまとめ、縮約表記すると、

$$-e^i\,f^j\,T_{im}\,\Gamma^m_{jk}\tag{4.6.250}$$

```
DT30:sum(sum(sum(DT222,i,1,3),j,1,3),
 m,1,3);
ishow(%);
DT31:coeff(DT30,e([],[1]));
DT311:coeff(DT31,f([],[1]))*e([],[1])
 *f([],[1]);
ishow(DT311);
DT312:coeff(DT31,f([],[2]))*e([],[1])
 *f([],[2]);
ishow(DT312);
DT313:coeff(DT31,f([],[3]))*e([],[1])
 *f([],[3]);
ishow(DT313);
DT32:coeff(DT30,e([],[2]));
DT321:coeff(DT32,f([],[1]))*e([],[2])
 *f([],[1]);
ishow(DT321);
DT322:coeff(DT32,f([],[2]))*e([],[2])
 *f([],[2]);
ishow(DT322);
DT323:coeff(DT32,f([],[3]))*e([],[2])
 *f([],[3]);
ishow(DT323);
DT33:coeff(DT30,e([],[3]));
DT331:coeff(DT33,f([],[1]))*e([],[3])
 *f([],[1]);
ishow(DT331);
DT332:coeff(DT33,f([],[2]))*e([],[3])
 *f([],[2]);
ishow(DT332);
DT333:coeff(DT33,f([],[3]))*e([],[3])
 *f([],[3]);
ishow(DT333);
DT36:-e([],[i])*f([],[j])*T([m,j],[])
 *Gamma([i,k],[m]);
ishow(%);
subst([i=1,j=2],DT36);
sum(%,m,1,3);
factor(%-DT312);
subst([i=2,j=3],DT36);
sum(%,m,1,3);
factor(%-DT323);
subst([i=3,j=2],DT36);
sum(%,m,1,3);
factor(%-DT332);
DT4:DT35+DT36+DT21;
ishow(%);
```

```
DT41:factor(DT4);
ishow(%);
DT41/(e([],[i])*f([],[j]));
ishow(%);
```

(4.6.248) 式の下記の右辺第二項について、

$$-f^j\,e^m\,T_{ij}\,\Gamma^i_{mk}$$

(4.6.248) 式の右辺第三項と同じ $e^i\,f^j$ の項を求めるため、上式を $i,j,m=1\to 3$ で展開すると、

$$\begin{aligned}
&-e^3\,f^3\,T_{33}\,\Gamma^3_{3k}-f^2\,e^3\,T_{32}\,\Gamma^3_{3k}-f^1\,e^3\,T_{31}\,\Gamma^3_{3k}\\
&-e^3\,f^3\,T_{23}\,\Gamma^2_{3k}-f^2\,e^3\,T_{22}\,\Gamma^2_{3k}-f^1\,e^3\,T_{21}\,\Gamma^2_{3k}\\
&-e^3\,f^3\,T_{13}\,\Gamma^1_{3k}-f^2\,e^3\,T_{12}\,\Gamma^1_{3k}-f^1\,e^3\,T_{11}\,\Gamma^1_{3k}\\
&-e^2\,f^3\,\Gamma^3_{2k}\,T_{33}-e^1\,f^3\,\Gamma^3_{1k}\,T_{33}-e^2\,f^2\,\Gamma^3_{2k}\,T_{32}\\
&-e^1\,f^2\,\Gamma^3_{1k}\,T_{32}-f^1\,e^2\,\Gamma^3_{2k}\,T_{31}-e^1\,f^1\,\Gamma^3_{1k}\,T_{31}\\
&-e^2\,f^3\,T_{23}\,\Gamma^2_{2k}-e^2\,f^2\,T_{22}\,\Gamma^2_{2k}-f^1\,e^2\,T_{21}\,\Gamma^2_{2k}\\
&-e^2\,f^3\,T_{13}\,\Gamma^1_{2k}-e^2\,f^2\,T_{12}\,\Gamma^1_{2k}-f^1\,e^2\,T_{11}\,\Gamma^1_{2k}\\
&-e^1\,f^3\,\Gamma^2_{1k}\,T_{23}-e^1\,f^2\,\Gamma^2_{1k}\,T_{22}-e^1\,f^1\,\Gamma^2_{1k}\,T_{21}\\
&-e^1\,f^3\,T_{13}\,\Gamma^1_{1k}-e^1\,f^2\,T_{12}\,\Gamma^1_{1k}-e^1\,f^1\,T_{11}\,\Gamma^1_{1k}
\end{aligned}\tag{4.6.251}$$

$e^i\,f^j\quad i,j=1\to 3$ の各項を求めると、

$$\begin{aligned}
&e^1\,f^1\,\left(-\Gamma^3_{1k}\,T_{31}-\Gamma^2_{1k}\,T_{21}-T_{11}\,\Gamma^1_{1k}\right)\\
&e^1\,f^2\,\left(-\Gamma^3_{1k}\,T_{32}-\Gamma^2_{1k}\,T_{22}-T_{12}\,\Gamma^1_{1k}\right)\\
&e^1\,f^3\,\left(-\Gamma^3_{1k}\,T_{33}-\Gamma^2_{1k}\,T_{23}-T_{13}\,\Gamma^1_{1k}\right)\\
&f^1\,e^2\,\left(-\Gamma^3_{2k}\,T_{31}-T_{21}\,\Gamma^2_{2k}-T_{11}\,\Gamma^1_{2k}\right)\\
&e^2\,f^2\,\left(-\Gamma^3_{2k}\,T_{32}-T_{22}\,\Gamma^2_{2k}-T_{12}\,\Gamma^1_{2k}\right)\\
&e^2\,f^3\,\left(-\Gamma^3_{2k}\,T_{33}-T_{23}\,\Gamma^2_{2k}-T_{13}\,\Gamma^1_{2k}\right)\\
&f^1\,e^3\,\left(-T_{31}\,\Gamma^3_{3k}-T_{21}\,\Gamma^2_{3k}-T_{11}\,\Gamma^1_{3k}\right)\\
&f^2\,e^3\,\left(-T_{32}\,\Gamma^3_{3k}-T_{22}\,\Gamma^2_{3k}-T_{12}\,\Gamma^1_{3k}\right)\\
&e^3\,f^3\,\left(-T_{33}\,\Gamma^3_{3k}-T_{23}\,\Gamma^2_{3k}-T_{13}\,\Gamma^1_{3k}\right)
\end{aligned}$$

上式をまとめ、縮約表記すると、

$$-e^i\,f^j\,\Gamma^m_{ik}\,T_{mj}\tag{4.6.252}$$

(4.6.248) 式の右辺第三項と (4.6.250) 式、(4.6.252) 式の和から、

$$\frac{d}{d\,x^k}\,V=-e^i\,f^j\,\left(\Gamma^m_{ik}\,T_{mj}+T_{im}\,\Gamma^m_{jk}-\frac{d}{d\,x^k}\,T_{ij}\right)\tag{4.6.253}$$

また、次のように記述する。

$$T_{ij,k}=\Gamma^m_{ik}\,T_{mj}+T_{im}\,\Gamma^m_{jk}-\frac{d}{d\,x^k}\,T_{ij}\tag{4.6.254}$$

以上から、共変テンソル共変微分係数は、

$$-\Gamma^m_{ik}\,T_{mj}-T_{im}\,\Gamma^m_{jk}+\frac{d}{d\,x^k}\,T_{ij}\tag{4.6.255}$$

4.6.14.8 混合テンソル共変微分係数

混合テンソルの共変微分係数を求める。

```
kill(all);
load("vect")$
load(itensor)$
depends([T,e],[x[k]]);
T1:T([j],[i])*e([i],[])*f([],[j]);
ishow(%);
DT1:diff(T1,x[k],1);
ishow(%);
DEIJ01:'diff(e([i],[]),x[j],1)=
 Gamma([i,j],[m])*e([m],[]);
ishow(%);
DEIJ02:'diff(e([],[i]),x[j],1)=
 -Gamma([m,j],[i])*e([],[m]);
ishow(%);
DEIJ1:'diff(e([i],[]),x[k],1)=
 Gamma([i,k],[m])*e([m],[]);
ishow(%);
DEIJ2:'diff(f([],[j]),x[k],1)=
 -Gamma([m,k],[j])*f([],[m]);
ishow(%);
DT2:subst([DEIJ1,DEIJ2],DT1);
ishow(%);
```

混合テンソル：V を下記とし、後ろの $\overrightarrow{e^j}$ を $\overrightarrow{f^j}$ と表し、下記とする。

$$V = T_j^i\,\overrightarrow{e_i} \otimes \overrightarrow{e^j} = T_j^i\,\overrightarrow{e_i}\,\overrightarrow{f^j} \tag{4.6.256}$$

上式を x^k で微分すると、

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\,x^k}\,V =& \overrightarrow{f^j}\,\overrightarrow{e_i}\,\left(\frac{d}{d\,x^k}\,T_j^i\right) + \overrightarrow{f^j}\,\left(\frac{d}{d\,x^k}\,\overrightarrow{e_i}\right)\,T_j^i \\ &+ \left(\frac{d}{d\,x^k}\,\overrightarrow{f^j}\right)\,\overrightarrow{e_i}\,T_j^i\end{aligned} \tag{4.6.257}$$

反変ベクトルの基底ベクトル：$\overrightarrow{e_i}$ を x^j で微分した結果：(4.6.177) 式から、

$$\frac{d}{d\,x^j}\,\overrightarrow{e_i} = \Gamma_{ij}^m\,\overrightarrow{e_m}$$

上式で $j \rightarrow k$ の置き換えを行って、

$$\frac{d}{d\,x^k}\,\overrightarrow{e_i} = \Gamma_{ik}^m\,\overrightarrow{e_m} \tag{4.6.258}$$

共変ベクトルの双対基底ベクトル：$\overrightarrow{e^i}$ を x^j で微分した結果：(4.6.201) 式から、

$$\frac{d}{d\,x^j}\,\overrightarrow{e^i} = -\overrightarrow{e^m}\,\Gamma_{mj}^i$$

上式で $j \rightarrow k$、$i \rightarrow j$、$e \rightarrow f$ の置き換えを行って、

$$\frac{d}{d\,x^k}\,\overrightarrow{f^j} = -\overrightarrow{f^m}\,\Gamma_{mk}^j \tag{4.6.259}$$

(4.6.257) 式に (4.6.258) 式 (4.6.259) 式を代入し、

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\,x^k}\,V =& -\overrightarrow{f^m}\,\overrightarrow{e_i}\,T_j^i\,\Gamma_{mk}^j + \overrightarrow{f^j}\,\Gamma_{ik}^m\,T_j^i\,\overrightarrow{e_m} \\ &+ \overrightarrow{f^j}\,\overrightarrow{e_i}\,\left(\frac{d}{d\,x^k}\,T_j^i\right)\end{aligned} \tag{4.6.260}$$

```
DT21:last(DT2);
ishow(%);
DT22:DT2-DT21;
ishow(%);
DT221:first(DT22);
ishow(%);
DT222:last(DT22);
ishow(%);
DT30:sum(sum(sum(DT221,i,1,3),j,1,3),
 m,1,3);
ishow(%);
DT31:coeff(DT30,e([1],[]));
DT311:coeff(DT31,f([],[1]))*e([1],[])
 *f([],[1]);
ishow(DT311);
DT312:coeff(DT31,f([],[2]))*e([1],[])
 *f([],[2]);
ishow(DT312);
DT313:coeff(DT31,f([],[3]))*e([1],[])
 *f([],[3]);
ishow(DT313);
DT32:coeff(DT30,e([2],[]));
DT321:coeff(DT32,f([],[1]))*e([2],[])
 *f([],[1]);
ishow(DT321);
DT322:coeff(DT32,f([],[2]))*e([2],[])
 *f([],[2]);
ishow(DT322);
DT323:coeff(DT32,f([],[3]))*e([2],[])
 *f([],[3]);
ishow(DT323);
DT33:coeff(DT30,e([3],[]));
DT331:coeff(DT33,f([],[1]))*e([3],[])
 *f([],[1]);
ishow(DT331);
DT332:coeff(DT33,f([],[2]))*e([3],[])
 *f([],[2]);
ishow(DT332);
```

```
DT333:coeff(DT33,f([],[3]))*e([3],[])
 *f([],[3]);
ishow(DT333);
DT35:e([i],[])*f([],[j])*T([j],[m])
 *Gamma([m,k],[i]);
ishow(%);
subst([i=1,j=2],DT35);
sum(%,m,1,3);
factor(%-DT312);
subst([i=2,j=3],DT35);
sum(%,m,1,3);
factor(%-DT323);
subst([i=3,j=2],DT35);
sum(%,m,1,3);
factor(%-DT332);
```

(4.6.260) 式の下記の右辺第二項について、

$$f^j\,\Gamma^m_{ik}\,T^i_j\,e_m$$

(4.6.260) 式の右辺第三項と同じ $e_i\,f^j$ の項を求めるため、上式を $i,j,m=1\to 3$ で展開すると、

$$\begin{aligned}
&f^3\,e_3\,T^3_3\,\Gamma^3_{3k}+f^2\,T^3_2\,e_3\,\Gamma^3_{3k}+f^1\,T^3_1\,e_3\,\Gamma^3_{3k}\\
&+f^3\,e_2\,T^3_3\,\Gamma^2_{3k}+f^2\,e_2\,T^3_2\,\Gamma^2_{3k}+f^1\,T^3_1\,e_2\,\Gamma^2_{3k}\\
&+f^3\,e_1\,T^3_3\,\Gamma^1_{3k}+f^2\,e_1\,T^3_2\,\Gamma^1_{3k}+f^1\,e_1\,T^3_1\,\Gamma^1_{3k}\\
&+f^3\,\Gamma^3_{2k}\,e_3\,T^2_3+f^3\,e_2\,\Gamma^2_{2k}\,T^2_3+f^3\,e_1\,\Gamma^1_{2k}\,T^2_3\\
&+f^3\,\Gamma^3_{1k}\,e_3\,T^1_3+f^3\,\Gamma^2_{1k}\,e_2\,T^1_3+f^3\,e_1\,\Gamma^1_{1k}\,T^1_3\\
&+f^2\,T^2_2\,\Gamma^3_{2k}\,e_3+f^1\,T^2_1\,\Gamma^3_{2k}\,e_3+f^2\,\Gamma^3_{1k}\,T^1_2\,e_3\\
&+f^1\,T^1_1\,\Gamma^3_{1k}\,e_3+f^2\,e_2\,T^2_2\,\Gamma^2_{2k}+f^1\,T^2_1\,e_2\,\Gamma^2_{2k}\\
&+f^2\,e_1\,T^2_2\,\Gamma^1_{2k}+f^1\,e_1\,T^2_1\,\Gamma^1_{2k}+f^2\,\Gamma^2_{1k}\,e_2\,T^1_2\\
&+f^2\,e_1\,\Gamma^1_{1k}\,T^1_2+f^1\,T^1_1\,\Gamma^2_{1k}\,e_2+f^1\,e_1\,T^1_1\,\Gamma^1_{1k}
\end{aligned} \tag{4.6.261}$$

$e_i\,f^j \quad i,j=1\to 3$ の各項を求めると、

$$f^1\,e_1\,\left(T^3_1\,\Gamma^1_{3k}+T^2_1\,\Gamma^1_{2k}+T^1_1\,\Gamma^1_{1k}\right)$$

$$f^2\,e_1\,\left(T^3_2\,\Gamma^1_{3k}+T^2_2\,\Gamma^1_{2k}+\Gamma^1_{1k}\,T^1_2\right)$$

$$f^3\,e_1\,\left(T^3_3\,\Gamma^1_{3k}+\Gamma^1_{2k}\,T^2_3+\Gamma^1_{1k}\,T^1_3\right)$$

$$f^1\,e_2\,\left(T^3_1\,\Gamma^2_{3k}+T^2_1\,\Gamma^2_{2k}+T^1_1\,\Gamma^2_{1k}\right)$$

$$f^2\,e_2\,\left(T^3_2\,\Gamma^2_{3k}+T^2_2\,\Gamma^2_{2k}+\Gamma^2_{1k}\,T^1_2\right)$$

$$f^3\,e_2\,\left(T^3_3\,\Gamma^2_{3k}+\Gamma^2_{2k}\,T^2_3+\Gamma^2_{1k}\,T^1_3\right)$$

$$f^1\,e_3\,\left(T^3_1\,\Gamma^3_{3k}+T^2_1\,\Gamma^3_{2k}+T^1_1\,\Gamma^3_{1k}\right)$$

$$f^2\,e_3\,\left(T^3_2\,\Gamma^3_{3k}+T^2_2\,\Gamma^3_{2k}+\Gamma^3_{1k}\,T^1_2\right)$$

$$f^3\,e_3\,\left(T^3_3\,\Gamma^3_{3k}+\Gamma^3_{2k}\,T^2_3+\Gamma^3_{1k}\,T^1_3\right)$$

上式をまとめ、縮約表記すると、

$$f^j\,e_i\,T^m_j\,\Gamma^i_{mk} \tag{4.6.262}$$

```
DT30:sum(sum(sum(DT222,i,1,3),j,1,3),
 m,1,3);
ishow(%);
DT31:coeff(DT30,e([1],[]));
DT311:coeff(DT31,f([],[1]))*e([1],[])
 *f([],[1]);
ishow(DT311);
DT312:coeff(DT31,f([],[2]))*e([1],[])
 *f([],[2]);
ishow(DT312);
DT313:coeff(DT31,f([],[3]))*e([1],[])
 *f([],[3]);
ishow(DT313);
DT32:coeff(DT30,e([2],[]));
DT321:coeff(DT32,f([],[1]))*e([2],[])
 *f([],[1]);
ishow(DT321);
DT322:coeff(DT32,f([],[2]))*e([2],[])
 *f([],[2]);
ishow(DT322);
DT323:coeff(DT32,f([],[3]))*e([2],[])
 *f([],[3]);
ishow(DT323);
DT33:coeff(DT30,e([3],[]));
DT331:coeff(DT33,f([],[1]))*e([3],[])
 *f([],[1]);
ishow(DT331);
DT332:coeff(DT33,f([],[2]))*e([3],[])
 *f([],[2]);
ishow(DT332);
DT333:coeff(DT33,f([],[3]))*e([3],[])
 *f([],[3]);
ishow(DT333);
DT36:-e([i],[])*f([],[j])*T([m],[i])
 *Gamma([j,k],[m]);
ishow(%);
subst([i=1,j=2],DT36);
sum(%,m,1,3);
factor(%-DT312);
subst([i=2,j=3],DT36);
sum(%,m,1,3);
factor(%-DT323);
subst([i=3,j=2],DT36);
sum(%,m,1,3);
factor(%-DT332);
```

```
DT4:DT35+DT36+DT21;
ishow(%);
DT41:factor(DT4);
ishow(%);
DT41/(e([i],[])*f([],[j]));
ishow(%);
```

(4.6.260) 式の下記の右辺第一項について、

$$-f^m\,e_i\,T_j^i\,\Gamma_{mk}^j$$

(4.6.260) 式の右辺第三項と同じ $e_i\,f^j$ の項を求めるため、上式を $i,j,m=1\to 3$ で展開すると、

$$\begin{aligned}
&-f^3\,e_3\,T_3^3\,\Gamma_{3k}^3-f^3\,e_2\,T_3^2\,\Gamma_{3k}^3-f^3\,e_1\,T_3^1\,\Gamma_{3k}^3\\
&-f^3\,T_2^3\,e_3\,\Gamma_{3k}^2-f^3\,e_2\,T_2^2\,\Gamma_{3k}^2-f^3\,e_1\,T_2^1\,\Gamma_{3k}^2\\
&-f^3\,T_1^3\,e_3\,\Gamma_{3k}^1-f^3\,T_1^2\,e_2\,\Gamma_{3k}^1-f^3\,e_1\,T_1^1\,\Gamma_{3k}^1\\
&-f^2\,\Gamma_{2k}^3\,e_3\,T_3^3-f^1\,\Gamma_{1k}^3\,e_3\,T_3^3-f^2\,e_2\,\Gamma_{2k}^3\,T_3^2\\
&-f^1\,\Gamma_{1k}^3\,e_2\,T_3^2-f^2\,e_1\,\Gamma_{2k}^3\,T_3^1-f^1\,e_1\,\Gamma_{1k}^3\,T_3^1\\
&-f^2\,T_2^3\,\Gamma_{2k}^2\,e_3-f^2\,T_1^3\,\Gamma_{2k}^1\,e_3-f^1\,\Gamma_{1k}^2\,T_2^3\,e_3\\
&-f^1\,T_1^3\,\Gamma_{1k}^1\,e_3-f^2\,e_2\,T_2^2\,\Gamma_{2k}^2-f^2\,e_1\,T_2^1\,\Gamma_{2k}^2\\
&-f^2\,T_1^2\,e_2\,\Gamma_{2k}^1-f^2\,e_1\,T_1^1\,\Gamma_{2k}^1-f^1\,\Gamma_{1k}^2\,e_2\,T_2^2\\
&-f^1\,e_1\,\Gamma_{1k}^2\,T_2^1-f^1\,T_1^2\,\Gamma_{1k}^1\,e_2-f^1\,e_1\,T_1^1\,\Gamma_{1k}^1
\end{aligned}\tag{4.6.263}$$

$e_i\,f^j$　$i,j=1\to 3$ の各項を求めると、

$$\begin{aligned}
&f^1\,e_1\,\left(-\Gamma_{1k}^3\,T_3^1-\Gamma_{1k}^2\,T_2^1-T_1^1\,\Gamma_{1k}^1\right)\\
&f^2\,e_1\,\left(-\Gamma_{2k}^3\,T_3^1-T_2^1\,\Gamma_{2k}^2-T_1^1\,\Gamma_{2k}^1\right)\\
&f^3\,e_1\,\left(-T_3^1\,\Gamma_{3k}^3-T_2^1\,\Gamma_{3k}^2-T_1^1\,\Gamma_{3k}^1\right)\\
&f^1\,e_2\,\left(-\Gamma_{1k}^3\,T_3^2-\Gamma_{1k}^2\,T_2^2-T_1^2\,\Gamma_{1k}^1\right)\\
&f^2\,e_2\,\left(-\Gamma_{2k}^3\,T_3^2-T_2^2\,\Gamma_{2k}^2-T_1^2\,\Gamma_{2k}^1\right)\\
&f^3\,e_2\,\left(-T_3^2\,\Gamma_{3k}^3-T_2^2\,\Gamma_{3k}^2-T_1^2\,\Gamma_{3k}^1\right)\\
&f^1\,e_3\,\left(-\Gamma_{1k}^3\,T_3^3-\Gamma_{1k}^2\,T_2^3-T_1^3\,\Gamma_{1k}^1\right)\\
&f^2\,e_3\,\left(-\Gamma_{2k}^3\,T_3^3-T_2^3\,\Gamma_{2k}^2-T_1^3\,\Gamma_{2k}^1\right)\\
&f^3\,e_3\,\left(-T_3^3\,\Gamma_{3k}^3-T_2^3\,\Gamma_{3k}^2-T_1^3\,\Gamma_{3k}^1\right)
\end{aligned}$$

上式をまとめ、縮約表記すると、

$$-f^j\,e_i\,\Gamma_{jk}^m\,T_m^i \tag{4.6.264}$$

(4.6.260) 式の右辺第三項と (4.6.262) 式、(4.6.264) 式の和から、

$$\frac{d}{d\,x^k}\,V=f^j\,e_i\,\left(T_j^m\,\Gamma_{mk}^i-\Gamma_{jk}^m\,T_m^i+\frac{d}{d\,x^k}\,T_j^i\right)\tag{4.6.265}$$

また、次のように記述する。

$$T_{j,k}^i=T_j^m\,\Gamma_{mk}^i-\Gamma_{jk}^m\,T_m^i+\frac{d}{d\,x^k}\,T_j^i \tag{4.6.266}$$

以上から、混合テンソル共変微分係数は、

$$T_j^m\,\Gamma_{mk}^i-\Gamma_{jk}^m\,T_m^i+\frac{d}{d\,x^k}\,T_j^i \tag{4.6.267}$$

4.6.14.9 反変ベクトルの微分の座標変換

反変ベクトルの微分の座標変換の関係式を求める [1]。

```
kill(all);
load("vect")$
load(itensor)$
depends([u,v,w],[x,y,z]);
depends([fx,fy,fz],[x,y,z]);
depends([fu,fv,fw],[u,v,w]);
U1:del(u)=diff(u);
FU1:subst([del(u)=fu,del(x)=fx,del(y)=fy,
 del(z)=fz],U1);
subst([u=u[1],v=u[2],w=u[3]],%);
subst([fx=f[1],fy=f[2],fz=f[3],fu=fu[1]],
 %);
FU2:subst([x=x[1],y=x[2],z=x[3]],%);
FU3:fu[i]='diff(u[i],v[j],1)*f[j];
FUL1:diff(lhs(FU1),v,1);
DFUR1:first(rhs(FU1));
DFUR3:last(rhs(FU1));
DFUR2:rhs(FU1)-DFUR1-DFUR3;
DFUR1;
diff(DFUR1);
DDFUR1:subst([del(z)='diff(z,v,1),del(y)
 ='diff(y,v,1),del(x)='diff(x,v,1)],%);
DFUR2;
diff(DFUR2);
DDFUR2:subst([del(z)='diff(z,v,1),del(y)
 ='diff(y,v,1),del(x)='diff(x,v,1)],%);
DFUR3;
diff(DFUR3);
DDFUR3:subst([del(z)='diff(z,v,1),del(y)
 ='diff(y,v,1),del(x)='diff(x,v,1)],%);
FUL1=DDFUR1+DDFUR2+DDFUR3;
subst([u=u[1],v=u[2],w=u[3]],%);
subst([fx=f[1],fy=f[2],fz=f[3],fu=fu[1]],
 %);
FUL2:subst([x=x[1],y=x[2],z=x[3]],%);
FULK:'diff(fu[i],u[j],1)='diff(u[i],x[a],
 1)*'diff(x[b],u[j],1)*'diff(f[a],x[b],1)
 +'diff(u[i],x[a],1,x[b],1)
 *'diff(x[b],u[j],1)*f[a];
```

fu^i が、u^i の関数、f^j が x^j の関数、u^i が x^j の関数とすると、反変ベクトルの座標変換の関係式 : (4.6.131) 式から、次式となる。

$$fu^i = \left(\frac{d}{d\,v^j}\,u^i\right)\,f^j \tag{4.6.268}$$

上式を $i=1, j=1, \to 3$ として展開すると、

$$fu^1 = f^3\,\left(\frac{d}{d\,x^3}\,u^1\right) + f^2\,\left(\frac{d}{d\,x^2}\,u^1\right) + f^1\,\left(\frac{d}{d\,x^1}\,u^1\right)$$

上式を u_2 で微分すると、

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\,u^2}\,fu^1 =& \left(\frac{d}{d\,x^3}\,u^1\right)\left(\frac{d}{d\,x^3}\,f^3\right)\left(\frac{d}{d\,u^2}\,x^3\right) + \left(\frac{d}{d\,x^2}\,u^1\right)\left(\frac{d}{d\,x^3}\,f^2\right)\left(\frac{d}{d\,u^2}\,x^3\right) + f^3\,\left(\frac{d^2}{d\,{x^3}^2}\,u^1\right)\left(\frac{d}{d\,u^2}\,x^3\right)\\
&+ f^2\,\left(\frac{d^2}{d\,x^2\,d\,x^3}\,u^1\right)\left(\frac{d}{d\,u^2}\,x^3\right) + f^1\,\left(\frac{d^2}{d\,x^1\,d\,x^3}\,u^1\right)\left(\frac{d}{d\,u^2}\,x^3\right) + \left(\frac{d}{d\,x^3}\,f^1\right)\left(\frac{d}{d\,x^1}\,u^1\right)\left(\frac{d}{d\,u^2}\,x^3\right)\\
&+ \left(\frac{d}{d\,x^3}\,u^1\right)\left(\frac{d}{d\,u^2}\,x^2\right)\left(\frac{d}{d\,x^2}\,f^3\right) + \left(\frac{d}{d\,x^3}\,u^1\right)\left(\frac{d}{d\,u^2}\,x^1\right)\left(\frac{d}{d\,x^1}\,f^3\right)\\
&+ \left(\frac{d}{d\,x^2}\,u^1\right)\left(\frac{d}{d\,x^2}\,f^2\right)\left(\frac{d}{d\,u^2}\,x^2\right) + f^2\,\left(\frac{d^2}{d\,{x^2}^2}\,u^1\right)\left(\frac{d}{d\,u^2}\,x^2\right) + f^3\,\left(\frac{d^2}{d\,x^2\,d\,x^3}\,u^1\right)\left(\frac{d}{d\,u^2}\,x^2\right)\\
&+ f^1\,\left(\frac{d^2}{d\,x^1\,d\,x^2}\,u^1\right)\left(\frac{d}{d\,u^2}\,x^2\right) + \left(\frac{d}{d\,x^2}\,f^1\right)\left(\frac{d}{d\,x^1}\,u^1\right)\left(\frac{d}{d\,u^2}\,x^2\right)\\
&+ \left(\frac{d}{d\,x^2}\,u^1\right)\left(\frac{d}{d\,u^2}\,x^1\right)\left(\frac{d}{d\,x^1}\,f^2\right) + f^1\,\left(\frac{d^2}{d\,{x^1}^2}\,u^1\right)\left(\frac{d}{d\,u^2}\,x^1\right) + f^3\,\left(\frac{d^2}{d\,x^1\,d\,x^3}\,u^1\right)\left(\frac{d}{d\,u^2}\,x^1\right)\\
&+ f^2\,\left(\frac{d^2}{d\,x^1\,d\,x^2}\,u^1\right)\left(\frac{d}{d\,u^2}\,x^1\right) + \left(\frac{d}{d\,x^1}\,f^1\right)\left(\frac{d}{d\,x^1}\,u^1\right)\left(\frac{d}{d\,u^2}\,x^1\right)
\end{aligned}$$

上式を縮約すると、

$$\frac{d}{d\,u^j}\,fu^i = f^a\,\left(\frac{d}{d\,u^j}\,x^b\right)\left(\frac{d^2}{d\,x^a\,d\,x^b}\,u^i\right) + \left(\frac{d}{d\,x^b}\,f^a\right)\left(\frac{d}{d\,u^j}\,x^b\right)\left(\frac{d}{d\,x^a}\,u^i\right) \tag{4.6.269}$$

[1] F Nの高校物理　数学　曲面上の幾何学　http://fnorio.com

```
GMK1:Gm([i,j],[k])='diff(x[a],u[i],1)
 *'diff(x[b],u[j],1)*'diff(u[k],x[c],1)
 *\Gamma([a,b],[c])+'diff(x[b],u[i],1
 ,u[j],1)*'diff(u[k],x[b],1);
 ishow(%);
DL1:'diff(u[i],x[b],1)*'diff(x[b],u[j],1)
 =\delta([j],[i]);
ishow(%);
DL2:'diff(u[i],x[b],1,x[a],1)*'diff(x[b],
 u[j],1)+'diff(u[i],x[b],1)*'diff(x[b],
 u[j],1,u[c],1)*'diff(u[c],x[a],1)=0;
DL21:last(lhs(DL2))=-first(lhs(DL2));
FULK2:lhs(FULK)=f[a]*rhs(DL21)
 +last(rhs(FULK));
ishow(%);
subst([a=o,b=p,c=q],last(rhs(FULK2)));
subst([o=b,p=c,q=a],%);
FULK3:lhs(FULK2)=first(rhs(FULK2))+%;
ishow(%);
GMK1;
subst([k=o,i=p,c=q,a=r,b=s],%);
GMK3:subst([o=i,p=a,q=b,r=l,s=c],%);
GMK31:last(rhs(GMK3))=lhs(GMK3)
 -first(rhs(GMK3));
```

```
ishow(%);
FULK4:lhs(FULK3)=first(rhs(FULK3))
 -('diff(u[a],x[b],1))*f[b]*rhs(GMK31);
ishow(%);
FULK41:expand(%);
ishow(%);
FU4:fu[a]='diff(u[a],x[b],1)*f[b];
FU41:solve(%,f[b])[1];
lhs(FULK41)=subst([FU41],rhs(FULK4));
FULK41:expand(%);
ishow(%);
FU5:f[a]='diff(x[a],u[b],1)*fu[b];
solve(%,fu[b])[1];
FU51:subst([a=l,b=a],%);
lhs(FULK41)=subst([FU51],first(rhs(
 FULK41)))-first(rhs(FULK41))
 +rhs(FULK41);
FULK5:%-last(rhs(%));
ishow(%);
subst([l=o,c=p,b=q],first(rhs(FULK5)));
subst([o=c,p=b,q=a],%);
FULK51:lhs(FULK5)=%+last(rhs(FULK5));
factor(%);
ishow(%);
```

(4.6.269) 式の右辺第一項には $\left(\frac{d}{d\,u^j}\,x^b\right)$ の項があるが、次式の (4.6.218) 式のクリストフェル記号の座標変換では、右辺第二項に $\left(\frac{d}{d\,x^b}\,u^k\right)$ で、これを一致させ、(4.6.269) 式の $\left(\frac{d^2}{d\,u^i\,d\,u^j}\,x^b\right)$ の項を消去する。

$$\Gamma u_{ij}^{k}=\left(\frac{d}{d\,u^i}\,x^a\right)\,\Gamma_{ab}^{c}\,\left(\frac{d}{d\,u^j}\,x^b\right)\,\left(\frac{d}{d\,x^c}\,u^k\right)+\left(\frac{d^2}{d\,u^i\,d\,u^j}\,x^b\right)\,\left(\frac{d}{d\,x^b}\,u^k\right) \tag{4.6.270}$$

u_i と x_j の要素間の関数は、

$$\left(\frac{d}{d\,u^j}\,x^b\right)\,\left(\frac{d}{d\,x^b}\,u^i\right)=\delta_j^i$$

上式を x_a で微分すると、

$$\left(\frac{d^2}{d\,u^c\,d\,u^j}\,x^b\right)\,\left(\frac{d}{d\,x^a}\,u^c\right)\,\left(\frac{d}{d\,x^b}\,u^i\right)+\left(\frac{d}{d\,u^j}\,x^b\right)\,\left(\frac{d^2}{d\,x^a\,d\,x^b}\,u^i\right)=0$$

(4.6.269) 式に上式の関係を代入すると、

$$\frac{d}{d\,u^j}\,fu^i=\left(\frac{d}{d\,x^b}\,f^a\right)\,\left(\frac{d}{d\,u^j}\,x^b\right)\,\left(\frac{d}{d\,x^a}\,u^i\right)-f^a\,\left(\frac{d^2}{d\,u^c\,d\,u^j}\,x^b\right)\,\left(\frac{d}{d\,x^a}\,u^c\right)\,\left(\frac{d}{d\,x^b}\,u^i\right)$$

上式の右辺第二項で $a\to b,\,b\to c,\,c\to a$ の置き換えを行うと、

$$\frac{d}{d\,u^j}\,fu^i=\left(\frac{d}{d\,x^b}\,f^a\right)\,\left(\frac{d}{d\,u^j}\,x^b\right)\,\left(\frac{d}{d\,x^a}\,u^i\right)-\left(\frac{d}{d\,x^b}\,u^a\right)\,f^b\,\left(\frac{d^2}{d\,u^a\,d\,u^j}\,x^c\right)\,\left(\frac{d}{d\,x^c}\,u^i\right) \tag{4.6.271}$$

上式右辺第二項と (4.6.270) 式右辺第二項を一致させるため、(4.6.270) 式で $k\to i,\,i\to a,\,c\to b,\,a\to l,\,b\to c$ の置き換えを行うと、

$$\Gamma u_{aj}^{i}=\left(\frac{d}{d\,u^j}\,x^c\right)\,\left(\frac{d}{d\,x^b}\,u^i\right)\,\left(\frac{d}{d\,u^a}\,x^l\right)\,\Gamma_{lc}^{b}+\left(\frac{d^2}{d\,u^a\,d\,u^j}\,x^c\right)\,\left(\frac{d}{d\,x^c}\,u^i\right)$$

(4.6.271) 式に上式の関係を代入すると、

$$\frac{d}{d\,u^j}\,fu^i = \left(\frac{d}{d\,x^b}\,f^a\right)\left(\frac{d}{d\,u^j}\,x^b\right)\left(\frac{d}{d\,x^a}\,u^i\right) - \left(\frac{d}{d\,x^b}\,u^a\right)\,f^b\left(\Gamma u^i_{aj} - \left(\frac{d}{d\,u^j}\,x^c\right)\left(\frac{d}{d\,x^b}\,u^i\right)\left(\frac{d}{d\,u^a}\,x^l\right)\Gamma^b_{lc}\right) \tag{4.6.272}$$

(4.6.268) 式から、

$$fu^a = \left(\frac{d}{d\,x^b}\,u^a\right)\,f^b$$

(4.6.272) 式に上式の関係を代入すると、

$$\frac{d}{d\,u^j}\,fu^i = fu^a\left(\frac{d}{d\,u^j}\,x^c\right)\left(\frac{d}{d\,x^b}\,u^i\right)\left(\frac{d}{d\,u^a}\,x^l\right)\Gamma^b_{lc} + \left(\frac{d}{d\,x^b}\,f^a\right)\left(\frac{d}{d\,u^j}\,x^b\right)\left(\frac{d}{d\,x^a}\,u^i\right) - fu^a\,\Gamma u^i_{aj} \tag{4.6.273}$$

(4.6.268) 式から、

$$f^l = \left(\frac{d}{d\,u^a}\,x^l\right)\,fu^a$$

(4.6.273) 式に上式の関係を代入すると、

$$\frac{d}{d\,u^j}\,fu^i + fu^a\,\Gamma u^i_{aj} = \left(\frac{d}{d\,u^j}\,x^c\right)\left(\frac{d}{d\,x^b}\,u^i\right)\,f^l\,\Gamma^b_{lc} + \left(\frac{d}{d\,x^b}\,f^a\right)\left(\frac{d}{d\,u^j}\,x^b\right)\left(\frac{d}{d\,x^a}\,u^i\right)$$

上式の右辺第一項で $l \to c,\ c \to b,\ b \to a$ の置き換えを行うと、

$$\frac{d}{d\,u^j}\,fu^i + fu^a\,\Gamma u^i_{aj} = \left(\frac{d}{d\,u^j}\,x^b\right)\left(\frac{d}{d\,x^a}\,u^i\right)\left(f_c\,\Gamma^a_{cb} + \frac{d}{d\,x^b}\,f^a\right) \tag{4.6.274}$$

また、次のように記述できる。下記から、$(1,1)$ 型の混合テンソルである。

$$fu^i_{,j} = \left(\frac{d}{d\,u^j}\,x^b\right)\left(\frac{d}{d\,x^a}\,u^i\right)f^a_{,b} \tag{4.6.275}$$

4.6.14.10　共変ベクトルの微分の座標変換

共変ベクトルの微分の座標変換の関係式を求める [1]。

```
kill(all);
load("vect")$
load(itensor)$
depends([x,y,z],[u,v,w]);
depends([f,fx,fy,fz],[x,y,z]);
depends([fu,fv,fw],[u,v,w]);
DF1:'diff(f,u)=diff(f,u);
DF2:'diff(f,v)=diff(f,v);
DF3:'diff(f,w)=diff(f,w);
LF1:['diff(f,u)=fu[1],'diff(f,v)=fu[2],
 'diff(f,w)=fu[3]];
LF2:['diff(f,x)=f[1],'diff(f,y)=f[2],
 'diff(f,z)=f[3]];
LF3:[u=u[1],v=u[2],w=u[3],x=x[1],y=x[2],
 z=x[3]];
subst([LF1],DF1);
subst([LF2],%);
subst([LF3],%);
subst([LF1],DF2);
subst([LF2],%);
subst([LF3],%);
subst([LF1],DF3);
subst([LF2],%);
subst([LF3],%);
FT1:fu[i]='diff(x[j],u[i],1)*f[j];
FT2:subst([j=a],FT1);
FT5:f[j]='diff(u[i],x[j],1)*fu[i];
LF4:['diff(f,u)=fu,'diff(f,v)=fv,
 'diff(f,w)=fw];
LF5:['diff(f,x)=fx,'diff(f,y)=fy,
 'diff(f,z)=fz];
subst([LF4],DF1);
FT3:subst([LF5],%);
diff(FT3,v,1);
DFT3:expand(%);
LF6:[fu=fu[1],fx=f[1],fy=f[2],fz=f[3]];
subst([LF6],DFT3);
DFT31:subst([LF3],%);
DFT4:'diff(fu[i],u[j],1)='diff(x[a],u[i],
 1)*'diff(f[a],x[b],1)*'diff(x[b],u[j],1)
 +'diff(x[a],u[i],1,u[j],1)*f[a];
DFT41:first(rhs(DFT4));
DFT42:last(rhs(DFT4));
subst([i=1,j=2],DFT4);
sum(sum(first(rhs(%)),a,1,3),b,1,3)
 +sum(last(rhs(%)),a,1,3);
%-rhs(DFT31);
```

fu_i が、u_i の関数、f_j が x_j の関数、u_i が x_j の関数とすると、共変ベクトルの座標変換の関係式：(4.6.137) 式から、次式となる。

$$fu_i = f_j \left(\frac{d}{d\,u^i}\,x^j\right) \tag{4.6.276}$$

上式を $i = 1, j = 1, \to 3$ として展開すると、

$$fu_1 = f_3 \left(\frac{d}{d\,u^1}\,x^3\right) + f_2 \left(\frac{d}{d\,u^1}\,x^2\right) + f_1 \left(\frac{d}{d\,u^1}\,x^1\right)$$

上式を u_2 で微分すると、

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\,u^2}\,fu_1 = &\left(\frac{d}{d\,x^3}\,f_3\right)\left(\frac{d}{d\,u^1}\,x^3\right)\left(\frac{d}{d\,u^2}\,x^3\right) + \left(\frac{d}{d\,x^3}\,f_2\right)\left(\frac{d}{d\,u^1}\,x^2\right)\left(\frac{d}{d\,u^2}\,x^3\right)\\ &+ \left(\frac{d}{d\,x^3}\,f_1\right)\left(\frac{d}{d\,u^1}\,x^1\right)\left(\frac{d}{d\,u^2}\,x^3\right) + f_3\left(\frac{d^2}{d\,u^1\,d\,u^2}\,x^3\right) + \left(\frac{d}{d\,u^2}\,x^2\right)\left(\frac{d}{d\,x^2}\,f_3\right)\left(\frac{d}{d\,u^1}\,x^3\right)\\ &+ \left(\frac{d}{d\,u^2}\,x^1\right)\left(\frac{d}{d\,x^1}\,f_3\right)\left(\frac{d}{d\,u^1}\,x^3\right) + \left(\frac{d}{d\,x^2}\,f_2\right)\left(\frac{d}{d\,u^1}\,x^2\right)\left(\frac{d}{d\,u^2}\,x^2\right)\\ &+ \left(\frac{d}{d\,x^2}\,f_1\right)\left(\frac{d}{d\,u^1}\,x^1\right)\left(\frac{d}{d\,u^2}\,x^2\right) + f_2\left(\frac{d^2}{d\,u^1\,d\,u^2}\,x^2\right) + \left(\frac{d}{d\,u^2}\,x^1\right)\left(\frac{d}{d\,x^1}\,f_2\right)\left(\frac{d}{d\,u^1}\,x^2\right)\\ &+ \left(\frac{d}{d\,x^1}\,f_1\right)\left(\frac{d}{d\,u^1}\,x^1\right)\left(\frac{d}{d\,u^2}\,x^1\right) + f_1\left(\frac{d^2}{d\,u^1\,d\,u^2}\,x^1\right)\end{aligned}$$

上式を縮約すると、

$$\frac{d}{d\,u^j}\,fu_i = \left(\frac{d}{d\,x^b}\,f_a\right)\left(\frac{d}{d\,u^i}\,x^a\right)\left(\frac{d}{d\,u^j}\,x^b\right) + f_a\left(\frac{d^2}{d\,u^i\,d\,u^j}\,x^a\right) \tag{4.6.277}$$

---

[1] ＦＮの高校物理　数学　曲面上の幾何学　http://fnorio.com

```
GMK1:Gm([i,j],[k])='diff(x[a],u[i],1)
 *'diff(x[b],u[j],1)*'diff(u[k],x[c],1)
 *\Gamma([a,b],[c])+'diff(x[b],u[i],
 1,u[j],1)*'diff(u[k],x[b],1);
ishow(%);
DFT421:subst([a=b],DFT42);
subst([j=b,i=k],FT5);
DFT422:subst([%],DFT421);
DFT5:lhs(DFT4)=DFT41+DFT422;
ishow(%);
GMK2:last(rhs(GMK1))=lhs(GMK1)
 -first(rhs(GMK1));
```

```
GMK21:%*fu[k];
GMK22:expand(%);
ishow(%);
DFT51:lhs(DFT4)=rhs(GMK22)+DFT41;
ishow(%);
DFT52:DFT51-lhs(GMK1)*fu[k];
DFT53:lhs(DFT52)=subst([fu[k]=f[c]/
 ('diff(u[k],x[c],1))],rhs(DFT52));
ishow(%);
factor(DFT53);
ishow(%);
```

(4.6.218) 式のクリストフェル記号の座標変換から、

$$\Gamma u_{ij}^{k}=\left(\frac{d}{d\,u^{i}}\,x^{a}\right)\,\Gamma_{ab}^{c}\,\left(\frac{d}{d\,u^{j}}\,x^{b}\right)\,\left(\frac{d}{d\,x^{c}}\,u^{k}\right)+\left(\frac{d^{2}}{d\,u^{i}\,d\,u^{j}}\,x^{b}\right)\,\left(\frac{d}{d\,x^{b}}\,u^{k}\right) \tag{4.6.278}$$

(4.6.277) 式の右辺第二項の $\frac{d^{2}}{d\,u^{i}\,d\,u^{j}}\,x^{a}$ と (4.6.278) 式の右辺第二項の $\frac{d^{2}}{d\,u^{i}\,d\,u^{j}}\,x^{b}$ を一致させるため、(4.6.277) 式の右辺第二項で $a\to b$ の置き換えると、

$$\frac{d}{d\,u^{j}}\,fu_{i}=\left(\frac{d}{d\,x^{b}}\,f_{a}\right)\,\left(\frac{d}{d\,u^{i}}\,x^{a}\right)\,\left(\frac{d}{d\,u^{j}}\,x^{b}\right)+f_{b}\,\left(\frac{d^{2}}{d\,u^{i}\,d\,u^{j}}\,x^{b}\right) \tag{4.6.279}$$

(4.6.276) 式を変形し、

$$f_{b}=fu_{k}\,\left(\frac{d}{d\,x^{b}}\,u^{k}\right)$$

(4.6.279) 式に上式を代入すると、

$$\frac{d}{d\,u^{j}}\,fu_{i}=\left(\frac{d^{2}}{d\,u^{i}\,d\,u^{j}}\,x^{b}\right)\,fu_{k}\,\left(\frac{d}{d\,x^{b}}\,u^{k}\right)+\left(\frac{d}{d\,x^{b}}\,f_{a}\right)\,\left(\frac{d}{d\,u^{i}}\,x^{a}\right)\,\left(\frac{d}{d\,u^{j}}\,x^{b}\right) \tag{4.6.280}$$

(4.6.278) 式を変形し、

$$\left(\frac{d^{2}}{d\,u^{i}\,d\,u^{j}}\,x^{b}\right)\,fu_{k}\,\left(\frac{d}{d\,x^{b}}\,u^{k}\right)=\Gamma u_{ij}^{k}\,fu_{k}-\left(\frac{d}{d\,u^{i}}\,x^{a}\right)\,\Gamma_{ab}^{c}\,\left(\frac{d}{d\,u^{j}}\,x^{b}\right)\,fu_{k}\,\left(\frac{d}{d\,x^{c}}\,u^{k}\right)$$

(4.6.280) 式に上式を代入すると、

$$\frac{d}{d\,u^{j}}\,fu_{i}=-\left(\frac{d}{d\,u^{i}}\,x^{a}\right)\,\Gamma_{ab}^{c}\,\left(\frac{d}{d\,u^{j}}\,x^{b}\right)\,fu_{k}\,\left(\frac{d}{d\,x^{c}}\,u^{k}\right)+\Gamma u_{ij}^{k}\,fu_{k}+\left(\frac{d}{d\,x^{b}}\,f_{a}\right)\,\left(\frac{d}{d\,u^{i}}\,x^{a}\right)\,\left(\frac{d}{d\,u^{j}}\,x^{b}\right) \tag{4.6.281}$$

(4.6.276) 式を変形し、

$$fu_{k}=\frac{f_{c}}{\frac{d}{d\,x^{c}}\,u^{k}}$$

(4.6.281) 式に上式を代入し、上式右辺第二項を左辺に移動すると、

$$\frac{d}{d\,u^{j}}\,fu_{i}-\Gamma u_{ij}^{k}\,fu_{k}=\left(\frac{d}{d\,x^{b}}\,f_{a}\right)\,\left(\frac{d}{d\,u^{i}}\,x^{a}\right)\,\left(\frac{d}{d\,u^{j}}\,x^{b}\right)-\left(\frac{d}{d\,u^{i}}\,x^{a}\right)\,\Gamma_{ab}^{c}\,\left(\frac{d}{d\,u^{j}}\,x^{b}\right)\,f_{c}$$

上式を整理すると、

$$\frac{d}{d\,u^{j}}\,fu_{i}-\Gamma u_{ij}^{k}\,fu_{k}=\left(\frac{d}{d\,u^{i}}\,x^{a}\right)\,\left(\frac{d}{d\,u^{j}}\,x^{b}\right)\,\left(\frac{d}{d\,x^{b}}\,f_{a}-\Gamma_{ab}^{c}\,f_{c}\right) \tag{4.6.282}$$

また、次のように記述できる。下記から 2 階の共変テンソルである。

$$fu_{i,j}=\left(\frac{d}{d\,u^{i}}\,x^{a}\right)\,\left(\frac{d}{d\,u^{j}}\,x^{b}\right)\,f_{a,b} \tag{4.6.283}$$

4.6.14.11 反変ベクトルの 2 回の共変微分係数

反変ベクトルの 2 回の共変微分係数を求める [1]。

```
kill(all);
load("vect")$
load(itensor)$
depends([f],[x]);
DF0:f([],[i],j)='diff(f([],[i]),x[j],1)
 +f([],[k])*\Gamma([k,j],[i]);
ishow(%);
DF1:subst([k=a],DF0);
ishow(%);
DF2:subst([i=a,k=b],DF0);
ishow(%);
DF3:subst([j=a,k=b],DF0);
ishow(%);
DDF1:f([],[i],j,k)=f([],[a],j)*\Gamma([a,k]
 ,[i])-\Gamma([j,k],[a])*f([],[i],a)+
 'diff(f([],[i],j),x[k],1);
ishow(%);
DDF2:subst([DF1,DF2,DF3],DDF1);
ishow(%);
expand(DDF2);
DDF3:ev(%,diff);
ishow(%);
coeff(rhs(DDF3),f([],[b]));
CF3:expand(%*f([],[b]));
```

```
subst([a=o,b=p],%);
CF4:subst([o=b,p=a],%);
DDF4:lhs(DDF3)=rhs(DDF3)-CF3+CF4;
ishow(%);
partfrac(DDF4,f([],[a]));
ishow(%);
```

f^i が、x_j の関数とすると、反変ベクトルの共変微分係数は (4.6.225) 式から次式となる。

$$f^i_{,j} = f^k\,\Gamma^i_{kj} + \frac{d}{d\,x^j}\,f^i \tag{4.6.284}$$

また、反変ベクトルの微分の座標変換の (4.6.275) 式から、反変ベクトルの共変微分は $(1,1)$ 型の混合テンソルである。このことから反変ベクトルの 2 回の共変微分係数は、(4.6.266) 式の混合テンソル共変微分係数から、

$$f^i_{,jk} = -f^i_{,a}\,\Gamma^a_{jk} + f^a_{,j}\,\Gamma^i_{ak} + \frac{d}{d\,x^k}\,f^i_{,j} \tag{4.6.285}$$

上式の $f^i_{,j}$, $f^a_{,j}$, $f^i_{,a}$ を (4.6.284) 式から求めると、

$$f^i_{,j} = f^a\,\Gamma^i_{aj} + \frac{d}{d\,x^j}\,f^i$$

$$f^a_{,j} = f^b\,\Gamma^a_{bj} + \frac{d}{d\,x^j}\,f^a$$

$$f^i_{,a} = f^b\,\Gamma^i_{ba} + \frac{d}{d\,x^a}\,f^i$$

(4.6.285) 式に上式を代入すると、

$$f^i_{,jk} = -\left(f^b\,\Gamma^i_{ba} + \frac{d}{d\,x^a}\,f^i\right)\Gamma^a_{jk} + \Gamma^i_{ak}\,\left(f^b\,\Gamma^a_{bj} + \frac{d}{d\,x^j}\,f^a\right) + \frac{d}{d\,x^k}\,\left(f^a\,\Gamma^i_{aj} + \frac{d}{d\,x^j}\,f^i\right)$$

上式を展開すると、

$$f^i_{,jk} = -f^b\,\Gamma^i_{ba}\,\Gamma^a_{jk} - \left(\frac{d}{d\,x^a}\,f^i\right)\Gamma^a_{jk} + f^b\,\Gamma^i_{ak}\,\Gamma^a_{bj} + f^a\,\left(\frac{d}{d\,x^k}\,\Gamma^i_{aj}\right) + \left(\frac{d}{d\,x^j}\,f^a\right)\Gamma^i_{ak} + \left(\frac{d}{d\,x^k}\,f^a\right)\Gamma^i_{aj} + \frac{d^2}{d\,x^j\,d\,x^k}\,f^i$$

上式で f^b の項を f^a の項に統一するため、上式右辺第一項、第三項で $a \to b$, $b \to a$ に置き換えると、

$$f^i_{,jk} = -f^a\,\Gamma^i_{ab}\,\Gamma^b_{jk} - \left(\frac{d}{d\,x^a}\,f^i\right)\Gamma^a_{jk} + f^a\,\Gamma^b_{aj}\,\Gamma^i_{bk} + f^a\,\left(\frac{d}{d\,x^k}\,\Gamma^i_{aj}\right) + \left(\frac{d}{d\,x^j}\,f^a\right)\Gamma^i_{ak} + \left(\frac{d}{d\,x^k}\,f^a\right)\Gamma^i_{aj} + \frac{d^2}{d\,x^j\,d\,x^k}\,f^i$$

上式を f^a でまとめると、次式の反変ベクトルの 2 回の共変微分係数が得られた。

$$f^i_{,jk} = f^a\,\left(-\Gamma^i_{ab}\,\Gamma^b_{jk} + \Gamma^b_{aj}\,\Gamma^i_{bk} + \frac{d}{d\,x^k}\,\Gamma^i_{aj}\right) - \left(\frac{d}{d\,x^a}\,f^i\right)\Gamma^a_{jk} + \left(\frac{d}{d\,x^j}\,f^a\right)\Gamma^i_{ak} + \left(\frac{d}{d\,x^k}\,f^a\right)\Gamma^i_{aj} + \frac{d^2}{d\,x^j\,d\,x^k}\,f^i \tag{4.6.286}$$

[1] F N の高校物理 数学 曲面上の幾何学 http://fnorio.com

4.6.14.12 共変ベクトルの 2 回の共変微分係数

共変ベクトルの 2 回の共変微分係数を求める [1]。

```
kill(all);
load("vect")$
load(itensor)$
depends([f],[x]);
DF0:f([i],[],j)='diff(f([i],[]),x[j],1)
 -f([k],[])*\Gamma([i,j],[k]);
ishow(%);
DF1:subst([k=a],DF0);
ishow(%);
DF2:subst([i=a,k=b],DF0);
ishow(%);
DF3:subst([j=a,k=b],DF0);
ishow(%);
DDF1:f([i],[],j,k)=-f([a],[],j)*\Gamma([i,k]
 ,[a])-\Gamma([j,k],[a])*f([i],[],a)+
 'diff(f([i],[],j),x[k],1);
ishow(%);
DDF2:subst([DF1,DF2,DF3],DDF1);
ishow(%);
expand(DDF2);
DDF3:ev(%,diff);
ishow(%);
coeff(rhs(DDF3),f([b],[]));
CF3:expand(%*f([b],[]));
subst([a=o,b=p],%);
CF4:subst([o=b,p=a],%);
DDF4:lhs(DDF3)=rhs(DDF3)-CF3+CF4;
ishow(%);
partfrac(DDF4,f([a],[]));
ishow(%);
```

f^i が、x_j の関数とすると、共変ベクトルの共変微分係数は (4.6.231) 式から次式となる。

$$f_{i,j}=\frac{d}{d\,x^j}\,f_i-\Gamma_{ij}^{k}\,f_k \tag{4.6.287}$$

また、共変ベクトルの微分の座標変換の (4.6.282) 式から、共変ベクトルの共変微分は $(0,2)$ 型の共変テンソルである。このことから共変ベクトルの 2 回の共変微分係数は、(4.6.254) 式の共変テンソル共変微分係数から、

$$f_{i,jk}=-f_{i,a}\,\Gamma_{jk}^{a}+\frac{d}{d\,x^k}\,f_{i,j}-f_{a,j}\,\Gamma_{ik}^{a} \tag{4.6.288}$$

上式の $f_{i,j}$, $f_{a,j}$, $f_{i,a}$ を (4.6.287) 式から求めると、

$$f_{i,j}=\frac{d}{d\,x^j}\,f_i-f_a\,\Gamma_{ij}^{a}$$

$$f_{a,j}=\frac{d}{d\,x^j}\,f_a-\Gamma_{aj}^{b}\,f_b$$

$$f_{i,a}=\frac{d}{d\,x^a}\,f_i-f_b\,\Gamma_{ia}^{b}$$

(4.6.288) 式に上式を代入すると、

$$f_{i,jk}=-\left(\frac{d}{d\,x^a}\,f_i-f_b\,\Gamma_{ia}^{b}\right)\Gamma_{jk}^{a}+\frac{d}{d\,x^k}\,\left(\frac{d}{d\,x^j}\,f_i-f_a\,\Gamma_{ij}^{a}\right)-\left(\frac{d}{d\,x^j}\,f_a-\Gamma_{aj}^{b}\,f_b\right)\Gamma_{ik}^{a}$$

上式を展開すると、

$$f_{i,jk}=-\left(\frac{d}{d\,x^a}\,f_i\right)\Gamma_{jk}^{a}+f_b\,\Gamma_{ia}^{b}\,\Gamma_{jk}^{a}-f_a\,\left(\frac{d}{d\,x^k}\,\Gamma_{ij}^{a}\right)+\frac{d^2}{d\,x^j\,d\,x^k}\,f_i+\Gamma_{aj}^{b}\,f_b\,\Gamma_{ik}^{a}-\left(\frac{d}{d\,x^j}\,f_a\right)\Gamma_{ik}^{a}-\left(\frac{d}{d\,x^k}\,f_a\right)\Gamma_{ij}^{a}$$

上式で f^b の項を f^a の項に統一するため、上式右辺第一項、第三項で $a\to b$, $b\to a$ に置き換えると、

$$f_{i,jk}=f_a\,\Gamma_{ib}^{a}\,\Gamma_{jk}^{b}-\left(\frac{d}{d\,x^a}\,f_i\right)\Gamma_{jk}^{a}-f_a\,\left(\frac{d}{d\,x^k}\,\Gamma_{ij}^{a}\right)+\frac{d^2}{d\,x^j\,d\,x^k}\,f_i+f_a\,\Gamma_{bj}^{a}\,\Gamma_{ik}^{b}-\left(\frac{d}{d\,x^j}\,f_a\right)\Gamma_{ik}^{a}-\left(\frac{d}{d\,x^k}\,f_a\right)\Gamma_{ij}^{a}$$

上式を f^a でまとめると、次式の反変ベクトルの 2 回の共変微分係数が得られた。

$$f_{i,jk}=f_a\,\left(\Gamma_{ib}^{a}\,\Gamma_{jk}^{b}-\frac{d}{d\,x^k}\,\Gamma_{ij}^{a}+\Gamma_{bj}^{a}\,\Gamma_{ik}^{b}\right)-\left(\frac{d}{d\,x^a}\,f_i\right)\Gamma_{jk}^{a}+\frac{d^2}{d\,x^j\,d\,x^k}\,f_i-\left(\frac{d}{d\,x^j}\,f_a\right)\Gamma_{ik}^{a}-\left(\frac{d}{d\,x^k}\,f_a\right)\Gamma_{ij}^{a} \tag{4.6.289}$$

[1] F Nの高校物理　数学　曲面上の幾何学　http://fnorio.com

4.6.14.13 計量テンソルの共変微分

計量テンソル：g_{ij} の共変微分を求める。

```
kill(all);
load("vect")$
load(itensor)$
depends([g,e],[x[k]]);
DT1:diff(g([i,j],[]),x[k],1);
ishow(%);
DEIK1:'diff(e([i],[]),x[k],1)=
 Gamma([i,k],[m])*e([m],[]);
ishow(%);
DEJK1:'diff(e([j],[]),x[k],1)=
 Gamma([j,k],[m])*e([m],[]);
ishow(%);
DG0:DT1-Gamma([i,k],[m])*g([m,j],[])
 -Gamma([j,k],[m])*g([i,m],[]);
ishow(%);
G1:g([i,j],[])=e([i],[])*e([j],[]);
ishow(%);
DG1:diff(G1,x[k],1);
ishow(%);
DG2:subst([DEIK1,DEJK1],DG1);
ishow(%);
DG01:subst([DG2],DG0);
ishow(%);
subst([e([i],[])=g([i,m],[])/e([m],[]),
 e([j],[])=g([m,j],[])/e([m],[])],DG01);
factor(%);
```

(4.6.158) 式から計量テンソルが共変テンソルであるから、計量テンソル：g_{ij} の共変微分は、共変テンソル共変微分係数：(4.6.254) 式から、

$$g_{ij;k} = -\Gamma_{ik}^{m}\, g_{mj} - g_{im}\, \Gamma_{jk}^{m} + \frac{\partial}{\partial x^k}\, g_{ij} \qquad (4.6.290)$$

計量テンソルの定義：(4.6.30) 式から、

$$g_{ij} = e_i\, e_j$$

上式を x^k で微分すると、

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\, g_{ij} = e_i \left(\frac{\partial}{\partial x^k}\, e_j\right) + \left(\frac{d}{d x^k}\, e_i\right) e_j \qquad (4.6.291)$$

ここで、(4.6.177) 式から、

$$\frac{d}{d x^k}\, e_i = \Gamma_{ik}^{m}\, e_m, \quad \frac{d}{d x^k}\, e_j = \Gamma_{jk}^{m}\, e_m$$

(4.6.291) 式に上式を代入すると、

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\, g_{ij} = e_i\, \Gamma_{jk}^{m}\, e_m + \Gamma_{ik}^{m}\, e_j\, e_m \qquad (4.6.292)$$

(4.6.290) 式に上式を代入すると、

$$\begin{aligned} g_{ij;k} &= -\Gamma_{ik}^{m}\, g_{mj} + e_i\, \Gamma_{jk}^{m}\, e_m + \Gamma_{ik}^{m}\, e_j\, e_m - g_{im}\, \Gamma_{jk}^{m} \\ &= -\Gamma_{ik}^{m}\, g_{mj} + \Gamma_{jk}^{m}\, g_{im} + \Gamma_{ik}^{m}\, g_{mj} - g_{im}\, \Gamma_{jk}^{m} \\ &= 0 \end{aligned} \qquad (4.6.293)$$

4.6.14.14 クリストフェルの記号を計量テンソルで表現

クリストフェルの記号：Γ_{ij}^{l} の特殊な場合を計量テンソル：g_{ij} で表現する。

```
kill(all);
load("vect")$
load(itensor)$
depends([g,e],[x[i]]);
G1:matrix([g[11],g[12],g[13]],[g[21],g[22],g[23]],[g[31],g[32],g[33]]);
GI1:matrix([g^("11"),g^("12"),g^("13")], [g^("21"),g^("22"),g^("23")],
 [g^("31"),g^("32"),g^("33")]);
GAM1:Gamma([i,j],[l])=(g([],[k,l])* ('diff(g([k,i],[]),x[j],1)+'diff(g([j,k],[]),
 x[i],1)-'diff(g([i,j],[]),x[k],1)))/2;
ishow(%);
GAM2:lhs(%)=sum(rhs(%),k,1,3);
ishow(%);
GAM11:subst([l=j],GAM1);
ishow(%);
GAM21:lhs(GAM11)=sum(sum(rhs(GAM11),j,1,3),k,1,3);
expand(%);
ishow(%);
GAM22:lhs(GAM11)=
 -(g([],[3,3])* ('diff(g([i,3],[]),x[3],1)))/2-(g([],[2,3])*('diff(g([i,3],[]),x[2],1)))/2
 -(g([],[1,3])*('diff(g([i,3],[]),x[1],1)))/2-(g([],[3,2])*('diff(g([i,2],[]),x[3],1)))/2
 -(g([],[2,2])*('diff(g([i,2],[]),x[2],1)))/2-(g([],[1,2])*('diff(g([i,2],[]),x[1],1)))/2
 -(g([],[3,1])*('diff(g([i,1],[]),x[3],1)))/2-(g([],[2,1])*('diff(g([i,1],[]),x[2],1)))/2
 -(g([],[1,1])*('diff(g([i,1],[]),x[1],1)))/2+(g([],[3,3])*('diff(g([3,i],[]),x[3],1)))/2
 +(g([],[3,2])*('diff(g([3,i],[]),x[2],1)))/2+(g([],[3,1])*('diff(g([3,i],[]),x[1],1)))/2
 +(g([],[3,3])*('diff(g([3,3],[]),x[i],1)))/2+(g([],[2,3])*('diff(g([3,2],[]),x[i],1)))/2
 +(g([],[1,3])*('diff(g([3,1],[]),x[i],1)))/2+(g([],[2,3])*('diff(g([2,i],[]),x[3],1)))/2
 +(g([],[2,2])*('diff(g([2,i],[]),x[2],1)))/2+(g([],[2,1])*('diff(g([2,i],[]),x[1],1)))/2
 +(g([],[3,2])*('diff(g([2,3],[]),x[i],1)))/2+(g([],[2,2])*('diff(g([2,2],[]),x[i],1)))/2
 +(g([],[1,2])*('diff(g([2,1],[]),x[i],1)))/2+(g([],[1,3])*('diff(g([1,i],[]),x[3],1)))/2
 +(g([],[1,2])*('diff(g([1,i],[]),x[2],1)))/2+(g([],[1,1])*('diff(g([1,i],[]),x[1],1)))/2
 +(g([],[3,1])*('diff(g([1,3],[]),x[i],1)))/2+(g([],[2,1])*('diff(g([1,2],[]),x[i],1)))/2
 +(g([],[1,1])*('diff(g([1,1],[]),x[i],1)))/2;
GAM21-GAM22;
expand(%);
GAM23:lhs(GAM11)=
 +(g([],[3,3])*('diff(g([3,3],[]),x[i],1)))/2+(g([],[2,3])*('diff(g([3,2],[]),x[i],1)))/2
 +(g([],[1,3])*('diff(g([3,1],[]),x[i],1)))/2+(g([],[3,2])*('diff(g([2,3],[]),x[i],1)))/2
 +(g([],[2,2])*('diff(g([2,2],[]),x[i],1)))/2+(g([],[1,2])*('diff(g([2,1],[]),x[i],1)))/2
 +(g([],[3,1])*('diff(g([1,3],[]),x[i],1)))/2+(g([],[2,1])*('diff(g([1,2],[]),x[i],1)))/2
+(g([],[1,1])*('diff(g([1,1],[]),x[i],1)))/2;
ishow(%);
```

```
GAM24:lhs(GAM11)=
+(g([],[j,k])*('diff(g([k,j],[]),x[i],1)))/2;
ishow(%);
GAM25:lhs(GAM24)=sum(sum(rhs(GAM24),j,1,3),k,1,3);
expand(%);
ishow(%);
GAM23-GAM25;
```

クリストフェルの記号は (4.6.188) 式から下記である。

$$\Gamma_{ij}^{l} = \frac{g^{kl}\,\left(\frac{d}{d\,x^j}\,g_{ki} + \frac{d}{d\,x^i}\,g_{jk} - \frac{d}{d\,x^k}\,g_{ij}\right)}{2}$$

上式で、$l = j$ とすると、

$$\Gamma_{ij}^{j} = \frac{g^{kj}\,\left(\frac{d}{d\,x^j}\,g_{ki} + \frac{d}{d\,x^i}\,g_{jk} - \frac{d}{d\,x^k}\,g_{ij}\right)}{2} \tag{4.6.294}$$

上式を $j = 1 \to 3,\ k = 1 \to 3$ で展開すると、

$$\begin{aligned}\Gamma_{ij}^{j} = &- \frac{g^{33}\,\left(\frac{d}{d\,x^3}\,g_{i3}\right)}{2} - \frac{g^{23}\,\left(\frac{d}{d\,x^2}\,g_{i3}\right)}{2} - \frac{g^{13}\,\left(\frac{d}{d\,x^1}\,g_{i3}\right)}{2} - \frac{g^{32}\,\left(\frac{d}{d\,x^3}\,g_{i2}\right)}{2} - \frac{g^{22}\,\left(\frac{d}{d\,x^2}\,g_{i2}\right)}{2} - \frac{g^{12}\,\left(\frac{d}{d\,x^1}\,g_{i2}\right)}{2}\\
&- \frac{g^{31}\,\left(\frac{d}{d\,x^3}\,g_{i1}\right)}{2} - \frac{g^{21}\,\left(\frac{d}{d\,x^2}\,g_{i1}\right)}{2} - \frac{g^{11}\,\left(\frac{d}{d\,x^1}\,g_{i1}\right)}{2} + \frac{g^{33}\,\left(\frac{d}{d\,x^3}\,g_{3i}\right)}{2} + \frac{g^{32}\,\left(\frac{d}{d\,x^2}\,g_{3i}\right)}{2} + \frac{g^{31}\,\left(\frac{d}{d\,x^1}\,g_{3i}\right)}{2}\\
&+ \frac{g^{33}\,\left(\frac{d}{d\,x^i}\,g_{33}\right)}{2} + \frac{g^{23}\,\left(\frac{d}{d\,x^i}\,g_{32}\right)}{2} + \frac{g^{13}\,\left(\frac{d}{d\,x^i}\,g_{31}\right)}{2} + \frac{g^{23}\,\left(\frac{d}{d\,x^3}\,g_{2i}\right)}{2} + \frac{g^{22}\,\left(\frac{d}{d\,x^2}\,g_{2i}\right)}{2} + \frac{g^{21}\,\left(\frac{d}{d\,x^1}\,g_{2i}\right)}{2}\\
&+ \frac{g^{32}\,\left(\frac{d}{d\,x^i}\,g_{23}\right)}{2} + \frac{g^{22}\,\left(\frac{d}{d\,x^i}\,g_{22}\right)}{2} + \frac{g^{12}\,\left(\frac{d}{d\,x^i}\,g_{21}\right)}{2} + \frac{g^{13}\,\left(\frac{d}{d\,x^3}\,g_{1i}\right)}{2} + \frac{g^{12}\,\left(\frac{d}{d\,x^2}\,g_{1i}\right)}{2} + \frac{g^{11}\,\left(\frac{d}{d\,x^1}\,g_{1i}\right)}{2}\\
&+ \frac{g^{31}\,\left(\frac{d}{d\,x^i}\,g_{13}\right)}{2} + \frac{g^{21}\,\left(\frac{d}{d\,x^i}\,g_{12}\right)}{2} + \frac{g^{11}\,\left(\frac{d}{d\,x^i}\,g_{11}\right)}{2}\end{aligned}$$

$g_{ij} = g_{ji}$ の関係を使って上式を整理すると、

$$\begin{aligned}\Gamma_{ij}^{j} = &\frac{g^{33}\,\left(\frac{d}{d\,x^i}\,g_{33}\right)}{2} + \frac{g^{23}\,\left(\frac{d}{d\,x^i}\,g_{32}\right)}{2} + \frac{g^{13}\,\left(\frac{d}{d\,x^i}\,g_{31}\right)}{2} + \frac{g^{32}\,\left(\frac{d}{d\,x^i}\,g_{23}\right)}{2} + \frac{g^{22}\,\left(\frac{d}{d\,x^i}\,g_{22}\right)}{2} + \frac{g^{12}\,\left(\frac{d}{d\,x^i}\,g_{21}\right)}{2}\\
&+ \frac{g^{31}\,\left(\frac{d}{d\,x^i}\,g_{13}\right)}{2} + \frac{g^{21}\,\left(\frac{d}{d\,x^i}\,g_{12}\right)}{2} + \frac{g^{11}\,\left(\frac{d}{d\,x^i}\,g_{11}\right)}{2}\end{aligned}$$

上式を縮約すると、

$$\Gamma_{ij}^{j} = \frac{g^{jk}\,\left(\frac{d}{d\,x^i}\,g_{kj}\right)}{2} \tag{4.6.295}$$

```
DEG1:determinant(G1);
'diff(G1,x[i],1)=diff(DEG1,x[i],1);
DDEG1:factor(%);
ADG1:adjoint(G1);
G11:G[11]=ADG1[1][1];
G12:G[12]=ADG1[1][2];
G13:G[13]=ADG1[1][3];
G21:G[21]=ADG1[2][1];
G22:G[22]=ADG1[2][2];
G23:G[23]=ADG1[2][3];
G31:G[31]=ADG1[3][1];
G32:G[32]=ADG1[3][2];
G33:G[33]=ADG1[3][3];
'diff(matrix([g[11],g[12],g[13]],[g[21],g[22],g[23]],[g[31],g[32],g[33]]),x[i],1)
 =(G[33]*'diff(g[33],x[i],1)) +G[23]*('diff(g[32],x[i],1))+G[13]*('diff(g[31],
 x[i],1))+G[32]*('diff(g[23],x[i],1))+G[22]*('diff(g[22],x[i],1))+G[12]*
 ('diff(g[21],x[i],1))+G[31]*('diff(g[13],x[i],1))+G[21]*('diff(g[12],x[i],1))+
 G[11]*('diff(g[11],x[i],1));
DDEG2:'diff(matrix([g[11],g[12],g[13]], [g[21],g[22],g[23]],[g[31],g[32],g[33]]),
 x[i],1)=G[jk]*'diff(g[kj],x[i],1);
```

計量テンソル：g_{ij} を g と表す。

$$g=\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} \tag{4.6.296}$$

計量テンソルの行列式は、

$$|g|=\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}=g_{11}\,(g_{22}\,g_{33}-g_{23}\,g_{32})-g_{12}\,(g_{21}\,g_{33}-g_{23}\,g_{31})+g_{13}\,(g_{21}\,g_{32}-g_{22}\,g_{31}) \tag{4.6.297}$$

計量テンソルの行列式 $|g|$ を x_i で微分すると、

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\,x^i}\,|g|=&\frac{d}{d\,x^i}\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}\\
=&g_{11}\,g_{22}\left(\frac{d}{d\,x^i}\,g_{33}\right)-g_{12}\,g_{21}\left(\frac{d}{d\,x^i}\,g_{33}\right)-g_{11}\,g_{23}\left(\frac{d}{d\,x^i}\,g_{32}\right)+g_{13}\,g_{21}\left(\frac{d}{d\,x^i}\,g_{32}\right)\\
&+g_{12}\,g_{23}\left(\frac{d}{d\,x^i}\,g_{31}\right)-g_{13}\,g_{22}\left(\frac{d}{d\,x^i}\,g_{31}\right)-g_{11}\,g_{32}\left(\frac{d}{d\,x^i}\,g_{23}\right)+g_{12}\,g_{31}\left(\frac{d}{d\,x^i}\,g_{23}\right)\\
&+g_{11}\,g_{33}\left(\frac{d}{d\,x^i}\,g_{22}\right)-g_{13}\,g_{31}\left(\frac{d}{d\,x^i}\,g_{22}\right)-g_{12}\,g_{33}\left(\frac{d}{d\,x^i}\,g_{21}\right)+g_{13}\,g_{32}\left(\frac{d}{d\,x^i}\,g_{21}\right)\\
&+g_{21}\,g_{32}\left(\frac{d}{d\,x^i}\,g_{13}\right)-g_{22}\,g_{31}\left(\frac{d}{d\,x^i}\,g_{13}\right)-g_{21}\,g_{33}\left(\frac{d}{d\,x^i}\,g_{12}\right)+g_{23}\,g_{31}\left(\frac{d}{d\,x^i}\,g_{12}\right)\\
&+g_{22}\,g_{33}\left(\frac{d}{d\,x^i}\,g_{11}\right)-g_{23}\,g_{32}\left(\frac{d}{d\,x^i}\,g_{11}\right)\end{aligned} \tag{4.6.298}$$

計測テンソル：g_{ij} の余因子氏行列：G_{ij} は、

$$\begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} g_{22}\,g_{33}-g_{23}\,g_{32} & g_{13}\,g_{32}-g_{12}\,g_{33} & g_{12}\,g_{23}-g_{13}\,g_{22} \\ g_{23}\,g_{31}-g_{21}\,g_{33} & g_{11}\,g_{33}-g_{13}\,g_{31} & g_{13}\,g_{21}-g_{11}\,g_{23} \\ g_{21}\,g_{32}-g_{22}\,g_{31} & g_{12}\,g_{31}-g_{11}\,g_{32} & g_{11}\,g_{22}-g_{12}\,g_{21} \end{pmatrix} \tag{4.6.299}$$

(4.6.298) 式に上式の余因子氏行列：G_{ij} の関係を代入すると、

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\,x^i}\ |g| =&\frac{d}{d\,x^i}\ \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13}\\ g_{21} & g_{22} & g_{23}\\ g_{31} & g_{32} & g_{33}\end{pmatrix}\\ =&G_{33}\ \left(\frac{d}{d\,x^i}\,g_{33}\right)+G_{23}\ \left(\frac{d}{d\,x^i}\,g_{32}\right)+G_{13}\ \left(\frac{d}{d\,x^i}\,g_{31}\right)+G_{32}\ \left(\frac{d}{d\,x^i}\,g_{23}\right)+G_{22}\ \left(\frac{d}{d\,x^i}\,g_{22}\right)\\ &+G_{12}\ \left(\frac{d}{d\,x^i}\,g_{21}\right)+G_{31}\ \left(\frac{d}{d\,x^i}\,g_{13}\right)+G_{21}\ \left(\frac{d}{d\,x^i}\,g_{12}\right)+G_{11}\ \left(\frac{d}{d\,x^i}\,g_{11}\right)\end{aligned} \tag{4.6.300}$$

上式を縮約すると、

$$\frac{d}{d\,x^i}\ |g| = \frac{d}{d\,x^i}\ \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13}\\ g_{21} & g_{22} & g_{23}\\ g_{31} & g_{32} & g_{33}\end{pmatrix} = G_{jk}\ \left(\frac{d}{d\,x^i}\,g_{kj}\right) \tag{4.6.301}$$

```
ADG1G1:ADG1.G1;
ADG1G12:factor(%);
ADG1G12[1][1];
%-DEG1;
factor(%);
ADG1G12[2][2];
%-DEG1;
factor(%);
ADG1G12[3][3];
%-DEG1;
factor(%);
GG1:G([i,j],[])*g([j,k],[])=abs(g)*
 \delta([k],[i]);
ishow(%);
GG2:g([],[i,j])*g([j,k],[])=
 \delta([k],[i]);
ishow(%);
GG3:GG2*abs(g);
ishow(%);
lhs(GG1)=lhs(GG3);
GG4:%/g([j,k],[]);
ishow(%);
GG41:G([j,k],[])=g([],[j,k])*abs(g);
ishow(%);
'diff(abs(g),x[i],1)=G([j,k],[])*
 'diff(g([k,j],[]),x[i],1);
subst([GG41],%);
ishow(%);
GG42:%/abs(g);
ishow(%);
GAM24;
lhs(GAM24)=lhs(GG42)/2;
lhs(GAM24)='diff(log(abs(g)),x[i],1)/2;
lhs(GAM24)='diff(sqrt(abs(g)),x[i],1)/
 sqrt(abs(g));
```

余因子氏行列：G_{ij} の関係式：(4.6.299) 式の右辺の結果を使って、下記を求め、計量テンソルの行列式の関係式：(4.6.297) 式の結果から、

$$\begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13}\\ G_{21} & G_{22} & G_{23}\\ G_{31} & G_{32} & G_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13}\\ g_{21} & g_{22} & g_{23}\\ g_{31} & g_{32} & g_{33}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |g| & 0 & 0\\ & |g| & \\ 0 & 0 & |g|\end{pmatrix}$$

上式を縮約すると、

$$G_{ij}\,g_{jk} = |g|\ \delta^i_k \tag{4.6.302}$$

また、計量テンソルの関係式:(4.6.34) 式を縮約すると、

$$g^{ij}\,g_{jk} = \delta^i_k \tag{4.6.303}$$

上式に $|g|$ を掛けると、(4.6.302) 式から、

$$g^{ij}\ |g|\ g_{jk} = |g|\ \delta^i_k = G_{ij}\,g_{jk} \tag{4.6.304}$$

上式から、

$$G_{ij} = g^{ij}\ |g|$$

(4.6.301) 式の余因子氏行列の添え字と上式の添え字を合わせて、上式を、

$$G_{jk} = g^{jk}\ |g|$$

(4.6.301) 式に上式を代入し、

$$\frac{d}{d\,x^i}\ |g| = g^{jk}\ |g|\ \left(\frac{d}{d\,x^i}\,g_{kj}\right)$$

上式を変形し、

$$\frac{\frac{d}{d\,x^i}\ |g|}{|g|} = g^{jk}\ \left(\frac{d}{d\,x^i}\,g_{kj}\right)$$

(4.6.295) 式に上式を代入すると、

$$\Gamma^j_{ij} == \frac{\frac{d}{d\,x^i}\ |g|}{2\ |g|} = \frac{\frac{d}{d\,x^i}\log\left(|g|\right)}{2} = \frac{\frac{d}{d\,x^i}\sqrt{|g|}}{\sqrt{|g|}} \tag{4.6.305}$$

第5章　複素関数

5.1　複素演算

5.1.1　Maxima の複素数定義

Maxima の関数や変数の属性（整数、実数、複素数など）の宣言は下記の declare 関数で行う。属性としては、整数：integer、実数：real、複素数：complex などがある。

$$declare([変数_1, 変数_2, \cdots], 属性)$$

また、虚数：i を、Maxima では $\%i$ で表現する。

xy 座標表記

```
kill(all);
declare(z,complex);
declare(w,complex);
Z1:z[1]=x[1]+%i*y[1];
Z2:z[2]=x[2]+%i*y[2];
```

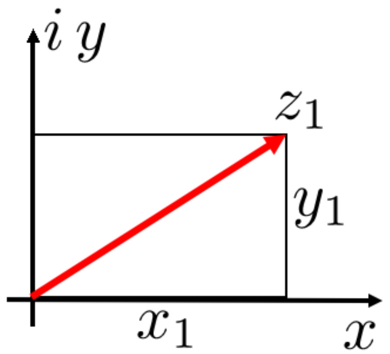


図 5.1.1: xy 座標表記

複素数を xy 座標表記すると下記となる。

$$z_1 = i\,y_1 + x_1 \tag{5.1.1}$$

$$z_2 = i\,y_2 + x_2 \tag{5.1.2}$$

極座標表記

```
assume(r[1]>0);
assume(r[2]>0);
Z3:z[1]=r[1]*%e^(%i*\theta[1]);
Z4:z[2]=r[2]*%e^(%i*\theta[2]);
```

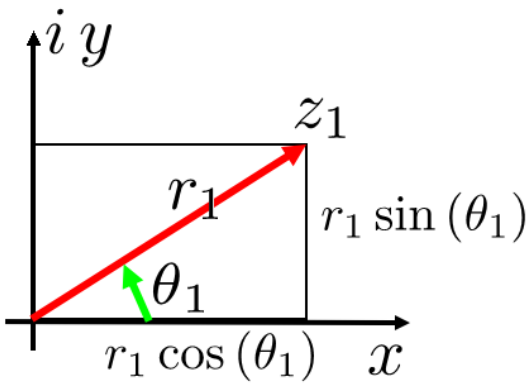


図 5.1.2: 極座標表記

複素数を極座標表記すると下記となる。

$$z_1 = e^{i\,\theta_1}\,r_1 \tag{5.1.3}$$

$$z_2 = e^{i\,\theta_2}\,r_2 \tag{5.1.4}$$

ここで、$r_1 > 0,\, r_2 > 0$ とする。

実部、虚部

```
realpart(rhs(Z1));
imagpart(rhs(Z1));
realpart(rhs(Z3));
imagpart(rhs(Z3));
```

Maxima で複素数の記述の実部は下記の $realpart$ 関数で得られる。

$$realpart(複素数の記述)$$

Maxima で複素数の記述の虚部は下記の $imagpart$ 関数で得られる。

$$imagpart(複素数の記述)$$

(5.1.1) 式の実部は、

$$x_1$$

(5.1.1) 式の虚部は、

$$y_1$$

(5.1.3) 式の実部は、

$$r_1 \cos(\theta_1)$$

(5.1.3) 式の虚部は、

$$r_1 \sin(\theta_1)$$

xy 座標、極座標出力

```
z=polarform(rhs(Z1));
z=rectform(rhs(Z3));
```

Maxima で複素数の記述の xy 座標表記は下記の $rectform$ 関数で得られる。

$$rectform(\text{複素数の記述})$$

Maxima で複素数の記述の極座標表記は下記の $polarform$ 関数で得られる。

$$polarform(\text{複素数の記述})$$

(5.1.1) 式の極座標表記は、

$$z = \sqrt{y_1^2 + x_1^2}\, e^{i\,\operatorname{atan2}(y_1, x_1)}$$

(5.1.3) 式の xy 座標表記は、

$$z = i\, r_1 \sin(\theta_1) + r_1 \cos(\theta_1)$$

絶対値

```
abs(lhs(Z1))=cabs(rhs(Z1));
abs(lhs(Z3))=cabs(rhs(Z3));
```

Maxima で複素数の絶対値は下記の $cabs$ 関数で得られる。

$$cabs(\text{複素数の記述})$$

(5.1.1) 式の絶対値は、

$$|z_1| = \sqrt{y_1^2 + x_1^2}$$

(5.1.3) 式の絶対値は、

$$|z_1| = r_1$$

角度

```
arg(lhs(Z1))=carg(rhs(Z1));
arg(lhs(Z3))=carg(rhs(Z3));
arg(lhs(Z3))=imagpart(radcan(log(rhs(Z3))));
```

Maxima で複素数の角度は下記の $carg$ 関数で得られる。

$$carg(\text{複素数の記述})$$

(5.1.1) 式の角度は、

$$\arg(z_1) = \operatorname{atan2}(y_1, x_1)$$

(5.1.3) 式の角度は、

$$\arg(z_1) = \operatorname{atan2}(\sin(\theta_1), \cos(\theta_1))$$

また、log の虚部でも得られ、(5.1.3) 式の角度は、

$$\arg(z_1) = \theta_1$$

共役複素数

```
ZC1:conjugate(Z1);
conjugate(Z3);
expand(Z1*ZC1);
```

Maxima で複素数の共役複素数は下記の $conjugate$ 関数で得られる。

$$conjugate(\text{複素数の記述})$$

(5.1.1) 式の共役複素数は、

$$\overline{z_1} = \operatorname{conjugate}(z_1) = x_1 - i\, y_1$$

(5.1.3) 式の共役複素数は、

$$\overline{z_1} = \operatorname{conjugate}(z_1) = e^{-i\,\theta_1}\, r_1$$

また、下記の関係がある。

$$z_1\, \overline{z_1} = z_1 \operatorname{conjugate}(z_1) = y_1^2 + x_1^2$$

5.1.2 複素演算例

複素演算例を下記に示す。

和

```
Z1+Z2;
Z3+Z4;
```

和の xy 座標表記は下記となる。

$$z_2+z_1=i\,y_2+x_2+i\,y_1+x_1$$

和の極座標表記は下記となる。

$$z_2+z_1=e^{i\,\theta_2}\,r_2+e^{i\,\theta_1}\,r_1$$

積と商

```
MP1:Z1*Z2;
lhs(MP1)=polarform(rhs(MP1));
lhs(MP1)=rectform(rhs(MP1));
MP3:Z3*Z4;
lhs(MP3)=polarform(rhs(MP3));
lhs(MP3)=rectform(rhs(MP3));
MP1:Z1/Z2;
lhs(MP1)=polarform(rhs(MP1));
lhs(MP1)=rectform(rhs(MP1));
MP3:Z3/Z4;
lhs(MP3)=polarform(rhs(MP3));
lhs(MP3)=rectform(rhs(MP3));
```

xy 座標表記式の積の極座標表記と xy 座標表記は下記となる。

$$\begin{aligned}z_1\,z_2=&\left(i\,y_1+x_1\right)\,\left(i\,y_2+x_2\right)\\=&\sqrt{y_1^2+x_1^2}\,\sqrt{y_2^2+x_2^2}\,e^{i\,(\mathrm{atan2}(y_2,x_2)+\mathrm{atan2}(y_1,x_1))}\\=&i\,\left(x_1\,y_2+y_1\,x_2\right)-y_1\,y_2+x_1\,x_2\end{aligned}$$

極座標表記式の積の極座標表記と xy 座標表記は下記となる。

$$\begin{aligned}z_1\,z_2=&e^{i\,\theta_2+i\,\theta_1}\,r_1\,r_2\\=&r_1\,r_2\,e^{i\,\mathrm{atan2}(\sin(\theta_2+\theta_1),\cos(\theta_2+\theta_1))}\\=&i\,r_1\,r_2\,\sin\left(\theta_2+\theta_1\right)+r_1\,r_2\,\cos\left(\theta_2+\theta_1\right)\end{aligned}$$

xy 座標表記式の商の極座標表記と xy 座標表記は下記となる。

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2}=&\frac{i\,y_1+x_1}{i\,y_2+x_2}\\=&\frac{\sqrt{y_1^2+x_1^2}\,e^{i\,\left(\mathrm{atan2}(y_1,x_1)-\mathrm{atan2}\left(\frac{y_2}{\sqrt{y_2^2+x_2^2}},\frac{x_2}{\sqrt{y_2^2+x_2^2}}\right)\right)}}{\sqrt{y_2^2+x_2^2}}\\=&\frac{y_1\,y_2+x_1\,x_2}{y_2^2+x_2^2}+\frac{i\,\left(y_1\,x_2-x_1\,y_2\right)}{y_2^2+x_2^2}\end{aligned}$$

極座標表記式の商の極座標表記と xy 座標表記は下記となる。

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2}=&\frac{e^{i\,\theta_1-i\,\theta_2}\,r_1}{r_2}\\=&\frac{r_1\,e^{-i\,\mathrm{atan2}(\sin(\theta_2-\theta_1),\cos(\theta_2-\theta_1))}}{r_2}\\=&\frac{r_1\,\cos\left(\theta_2-\theta_1\right)}{r_2}-\frac{i\,r_1\,\sin\left(\theta_2-\theta_1\right)}{r_2}\end{aligned}$$

直線

```
z=a*(z[2]-z[1])+z[1];
subst([Z1,Z2],%);
```

z_1 と z_2 を通る直線は次式で表現できる。

$$\begin{aligned}z=&\left(z_2-z_1\right)\,a+z_1\\=&\left(i\,y_2+x_2-i\,y_1-x_1\right)\,a+i\,y_1+x_1\end{aligned}$$

円

```
z=z[1]+R*%e^(%i*\theta);
```

中心が z_1 で半径：R の円は次式で表現できる。

$$z=e^{i\,\theta}\,R+z_1$$

複素数積とベクトル積

```
conjugate(rhs(Z1))*rhs(Z2);
VZ0:expand(%);
realpart(VZ0);
imagpart(VZ0);
VZ1:matrix([x[1]],[y[1]],[0]);
VZ2:matrix([x[2]],[y[2]],[0]);
VZ11:VZ1.VZ2;
VZ12:col(adjoint(transpose(addcol(VZ1,VZ2,
 matrix([1],[1],[1])))),3);
```

z_1 の共役複素数：$\overline{z_1}$ と z_2 の積は、

$$\begin{aligned}\overline{z_1}\,z_2=&\left(x_1-i\,y_1\right)\,\left(i\,y_2+x_2\right)\\=&y_1\,y_2+i\,x_1\,y_2-i\,y_1\,x_2+x_1\,x_2\end{aligned}$$

上式の実部は、

$$y_1\,y_2+x_1\,x_2$$

虚部は、

$$x_1\,y_2-y_1\,x_2$$

複素数：z_1 と z_2 に対応した下記のベクトルを導入する。

$$\overrightarrow{Z_1}=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\0\end{pmatrix},\ \overrightarrow{Z_2}=\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\0\end{pmatrix}$$

上記ベクトルの内積は下記となり、z_1 の共役複素数：$\overline{z_1}$ と z_2 の積の実部となっている。

$$\overrightarrow{Z_1}\cdot\overrightarrow{Z_2}=y_1\,y_2+x_1\,x_2$$

また、上記ベクトルの外積は下記となり、z_1 の共役複素数：$\overline{z_1}$ と z_2 の積の虚部となっている。

$$\overrightarrow{Z_1} \times \overrightarrow{Z_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_1\,y_2 - y_1\,x_2 \end{pmatrix}$$

z^n

```
Z1^n;
lhs(%)=rhs(Z1)^n;
lhs(%)=rhs(Z3)^n;
```

z^n の xy 座標表記と極座標表記は下記となる。

$$\begin{aligned} z_1^n =& (i\,y_1 + x_1)^n \\ =& r_1^n\,e^{i\,\theta_1\,n} \end{aligned}$$

$\log(z)$

```
log(Z1);
lhs(%)=rectform(rhs(%));
log(Z3);
radcan(%);
```

$\log(z)$ の xy 座標表記は下記となる。

$$\begin{aligned} \log(z_1) =& \log(i\,y_1 + x_1) \\ =& \frac{\log\left(y_1^2 + x_1^2\right)}{2} + i\,\mathrm{atan2}(y_1, x_1) \end{aligned}$$

$\log(z)$ の極座標表記は下記となる。

$$\begin{aligned} \log(z_1) =& \log\left(e^{i\,\theta_1}\,r_1\right) \\ =& \log(r_1) + i\,\theta_1 \end{aligned}$$

e^z

```
EZ1:%e^z=%e^(rhs(Z1));
lhs(%)=rectform(rhs(%));
```

e^z の xy 座標表記は下記となる。

$$\begin{aligned} e^z =& e^{i\,y_1 + x_1} \\ =& i\,e^{x_1}\sin(y_1) + e^{x_1}\cos(y_1) \end{aligned}$$

オイラーの公式

```
(%e^(%i*x)+%e^(-%i*x))/2;
%=rectform(%);
(%e^(%i*x)-%e^(-%i*x))/2;
%=rectform(%);
```

オイラーの公式は左辺の xy 座標表記で得られる。

$$\frac{e^{i\,x} + e^{-i\,x}}{2} = \cos(x)$$

$$\frac{e^{i\,x} - e^{-i\,x}}{2} = i\sin(x)$$

$\cos(z)$ $\sin(z)$

```
cos(Z1);
lhs(%)=rectform(rhs(%));
sin(Z1);
lhs(%)=rectform(rhs(%));
```

$\cos(z)$ の xy 座標表記は下記となる。

$$\begin{aligned} \cos(z_1) =& \cos(i\,y_1 + x_1) \\ =& \cos(x_1)\cosh(y_1) - i\sin(x_1)\sinh(y_1) \end{aligned}$$

$\sin(z)$ の xy 座標表記は下記となる。

$$\begin{aligned} \sin(z_1) =& \sin(i\,y_1 + x_1) \\ =& i\cos(x_1)\sinh(y_1) + \sin(x_1)\cosh(y_1) \end{aligned}$$

5.2 複素微分

5.2.1 複素関数の微分

```
kill(all);
load("vect")$
declare(z,complex);
declare(w,complex);
declare(F,complex);
depends(z,[x,y]);
depends(w,[x,y]);
depends(F,[z,w]);
Z1:z=x+%i*y;
CZ1:w=rhs(conjugate(Z1));
XY1:solve([Z1,CZ1],[x,y]);
X1:XY1[1][1];
Y1:XY1[1][2];
Z1DX:diff(Z1,x);
CZ1DX:diff(CZ1,x);
Z1DY:diff(Z1,y);
CZ1DY:diff(CZ1,y);
'diff(F,x,1)=diff(F,x,1);
FDX:subst([Z1DX,CZ1DX],%);
'diff(F,y,1)=diff(F,y,1);
FDY:subst([Z1DY,CZ1DY],%);
FDZW:solve([FDX,FDY],['diff(F,z,1),
 'diff(F,w,1)]);
FDZ:FDZW[1][1];
FDW:FDZW[1][2];
```

複素数：z を下記のように定義する。その複素共役：$\overline{z}=w$ とする。

$$z=i\,y+x,\quad \overline{z}=w=x-i\,y \tag{5.2.1}$$

x,y を z,w で表現すると、

$$x=\frac{z+w}{2},\quad y=-\frac{i\,z-i\,w}{2} \tag{5.2.2}$$

(5.2.1) 式から、

$$\frac{d}{d\,x}\,z=1,\quad \frac{d}{d\,x}\,w=1,\quad \frac{d}{d\,y}\,z=i,\quad \frac{d}{d\,y}\,w=-i \tag{5.2.3}$$

複素関数：F とし、x,y で微分すると、

$$\frac{d}{d\,x}\,F=\left(\frac{d}{d\,x}\,z\right)\left(\frac{d}{d\,z}\,F\right)+\left(\frac{d}{d\,x}\,w\right)\left(\frac{d}{d\,w}\,F\right)$$
$$\frac{d}{d\,y}\,F=\left(\frac{d}{d\,y}\,z\right)\left(\frac{d}{d\,z}\,F\right)+\left(\frac{d}{d\,y}\,w\right)\left(\frac{d}{d\,w}\,F\right)$$

上式に (5.2.3) 式を代入し、

$$\frac{d}{d\,x}\,F=\frac{d}{d\,z}\,F+\frac{d}{d\,w}\,F$$
$$\frac{d}{d\,y}\,F=i\left(\frac{d}{d\,z}\,F\right)-i\left(\frac{d}{d\,w}\,F\right)$$

$\frac{d}{d\,z},\frac{d}{d\,w}$ で整理すると、

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\,z}\,F&=\frac{\frac{d}{d\,x}\,F-i\left(\frac{d}{d\,y}\,F\right)}{2}\\ \frac{d}{d\,w}\,F&=\frac{d}{d\,\overline{z}}\,F=\frac{i\left(\frac{d}{d\,y}\,F\right)+\frac{d}{d\,x}\,F}{2}\end{aligned} \tag{5.2.4}$$

```
depends(u,[x,y]);
depends(v,[x,y]);
F1:F=u+%i*v;
UX1:'diff(u,x,1)='diff(v,y,1);
UX2:solve(%,'diff(v,y,1))[1];
UY1:'diff(u,y,1)=-'diff(v,x,1);
UY2:solve(%,'diff(v,x,1))[1];
lhs(FDZ)=subst([F1],rhs(FDZ));
ev(%,diff);
FD1:expand(%);
subst([UX2,UY1],FD1);
subst([UX1,UY2],FD1);
lhs(FDW)=subst([F1],rhs(FDW));
ev(%,diff);
FD2:expand(%);
subst([UX2,UY1],FD2);
subst([UX1,UY2],FD2);
```

複素関数：F を実部：u と虚部：v で下記のように定義する。

$$F=i\,v+u \tag{5.2.5}$$

(5.2.4) 式から $\frac{d}{d\,z}\,F$ を求めると、

$$\frac{d}{d\,z}\,F=\frac{-i\left(i\left(\frac{d}{d\,y}\,v\right)+\frac{d}{d\,y}\,u\right)+i\left(\frac{d}{d\,x}\,v\right)+\frac{d}{d\,x}\,u}{2} \tag{5.2.6}$$

また、同様に (5.2.4) 式から $\frac{d}{d\,\overline{z}}\,F$ を求めると、

$$\frac{d}{d\,w}\,F=\frac{i\left(i\left(\frac{d}{d\,y}\,v\right)+\frac{d}{d\,y}\,u\right)+i\left(\frac{d}{d\,x}\,v\right)+\frac{d}{d\,x}\,u}{2} \tag{5.2.7}$$

次節の (5.2.14) 式から、

$$\frac{d}{d\,x}\,u=\frac{d}{d\,y}\,v,\quad \frac{d}{d\,y}\,u=-\frac{d}{d\,x}\,v \tag{5.2.8}$$

(5.2.8) 式を (5.2.6) 式に代入すると下記の関係が得られる。

$$\frac{d}{d\,z}\,F=i\left(\frac{d}{d\,x}\,v\right)+\frac{d}{d\,x}\,u=\frac{d}{d\,y}\,v-i\left(\frac{d}{d\,y}\,u\right) \tag{5.2.9}$$

(5.2.8) 式を (5.2.7) 式に代入すると下記の関係が得られる。

$$\frac{d}{d\,w}\,F=\frac{d}{d\,\overline{z}}\,F=0 \tag{5.2.10}$$

5.2.2 Cauchy-Rieman の関係式

```
kill(all);
depends(u,[x,y]);
depends(v,[x,y]);
z=x+%i*y;
F1:F(z)=u(z)+%i*v(z);
F0:F(z[0])=u(z[0])+%i*v(z[0]);
DFZ:(F(z)-F(z[0]))/(z-z[0]);
DFZ1:'diff(F(z),z,1)='limit(DFZ,z,z[0]);
Z1:z=x+%i*y[0];
Z0:z[0]=x[0]+%i*y[0];
subst([F1,F0,Z0,Z1],DFZ);
partfrac(%,%i);
'diff(F(z),z,1)='limit(%,x,x[0]);
DFZ1X:lhs(DFZ1)='diff(u,x,1)
 +%i*'diff(v,x,1);
Z1:z=x[0]+%i*y;
Z0:z[0]=x[0]+%i*y[0];
subst([F1,F0,Z0,Z1],DFZ);
partfrac(%,%i);
'diff(F(z),z,1)='limit(%,y,y[0]);
```

```
DFZ1Y:lhs(DFZ1)=-%i*'diff(u,y,1)
 +'diff(v,y,1);
RE1:realpart(rhs(DFZ1X))
 =realpart(rhs(DFZ1Y));
IM1:imagpart(rhs(DFZ1Y))
 =imagpart(rhs(DFZ1X));
diff(RE1,x,1)-diff(IM1,y);
diff(RE1,y,1)+diff(IM1,x);
```

複素変数：z、複素関数：$F(z)$ とし、下記に示す。

$$z = i\,y + x$$

$$\mathrm{F}(z) = i\,\mathrm{v}(z) + \mathrm{u}(z)$$

$$\mathrm{F}(z_0) = i\,\mathrm{v}(z_0) + \mathrm{u}(z_0)$$

$F(z)$ が z_0 で連続で、微分可能とする。

$$\frac{d}{d\,z}\,\mathrm{F}(z) = \lim_{z\to z_0}\frac{\mathrm{F}(z)-\mathrm{F}(z_0)}{z-z_0} \tag{5.2.11}$$

y_0 で固定し、$x \to x_0$ として次式を (5.2.11) 式に代入し、

$$z = x + i\,y_0,\quad z_0 = i\,y_0 + x_0$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\,z}\,\mathrm{F}(z) =& \lim_{x\to x_0}\frac{i\,(\mathrm{v}(x+i\,y_0)-\mathrm{v}(i\,y_0+x_0))+\mathrm{u}(x+i\,y_0)-\mathrm{u}(i\,y_0+x_0)}{x-x_0}\\ =& i\left(\frac{d}{d\,x}\,v\right)+\frac{d}{d\,x}\,u\end{aligned} \tag{5.2.12}$$

また、x_0 で固定し、$y \to y_0$ として次式を (5.2.11) 式に代入し、

$$z = i\,y + x_0,\quad z_0 = i\,y_0 + x_0$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\,z}\,\mathrm{F}(z) =& \lim_{y\to y_0}\frac{\mathrm{v}(i\,y+x_0)-\mathrm{v}(i\,y_0+x_0)}{y-y_0}-\frac{i\,(\mathrm{u}(i\,y+x_0)-\mathrm{u}(i\,y_0+x_0))}{y-y_0}\\ =& \frac{d}{d\,y}\,v - i\left(\frac{d}{d\,y}\,u\right)\end{aligned} \tag{5.2.13}$$

(5.2.12) 式、(5.2.13) 式の左辺は同じであるから、右辺も等しいとして下記の Cauchy-Rieman の関係式を得る。

$$\frac{d}{d\,x}\,u = \frac{d}{d\,y}\,v,\quad -\frac{d}{d\,y}\,u = \frac{d}{d\,x}\,v \tag{5.2.14}$$

上式を変形して、同様に下記の関係式が得られる。

$$\frac{d^2}{d\,y^2}\,u + \frac{d^2}{d\,x^2}\,u = 0$$

$$0 = \frac{d^2}{d\,y^2}\,v + \frac{d^2}{d\,x^2}\,v$$

5.3 複素積分

5.3.1 Cauchy の積分定理

Gauss の定理 は下記である。

$$\iint F\vec{n}\,dS = \iiint grad(F)dV$$

上式を二次元表記すると、

$$\oint F n_x ds = \iint \frac{d}{d\,x} F dS, \quad \oint F n_y ds = \iint \frac{d}{d\,y} F dS \tag{5.3.1}$$

```
kill(all);
declare(z,complex);
declare(w,complex);
declare(F,complex);
'diff(F,z,1)=('diff(F,x,1)
 -%i*('diff(F,y,1)))/2;
'diff(F,w,1)=(%i*('diff(F,y,1))
 +'diff(F,x,1))/2;
integrate(%i*('diff(F,y,1))+'diff(F,x,1),S)
 =integrate(F*(n[x]+%i*n[y]),s);
NXY1:(n[x]+%i*n[y])=%e^(%i*\theta);
NXY2:lhs(NXY1)=rectform(rhs(NXY1));
DZ1:dz=ds*%e^(%i*(\theta+%pi/2));
```

(5.2.4) 式から

$$\frac{d}{d\,w} F = \frac{d}{d\,\bar{z}} F = \frac{i\left(\frac{d}{d\,y} F\right) + \frac{d}{d\,x} F}{2} \tag{5.3.2}$$

上式右辺は、

$$\iint \frac{d}{d\,\bar{z}} F dS = \frac{1}{2}\left(\iint \frac{\partial}{\partial\,x} F dS + i \iint \frac{\partial}{\partial\,y} F dS\right)$$

上式に (5.3.1) 式を代入すると、

$$\iint \frac{d}{d\,w} F dS = \frac{1}{2}\left(\oint F n_x ds + i \oint F n_y ds\right)$$

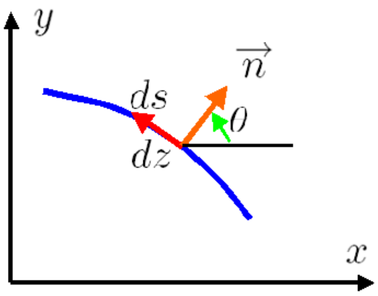


図 5.3.1: dz 表現

法線ベクトルの各要素：n_x, n_y を複素表示すると下記となる。

$$i\,n_y + n_x = e^{i\,\theta} = i \sin(\theta) + \cos(\theta)$$

この法線法線ベクトルを $\pi/2$ 回転させたものが境界に沿った dz となり下記の関係を得る。

$$dz = ds\,e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)} = i\,ds\,e^{i\,\theta} = i\,ds\,(i\,n_y + n_x)$$

上式を代入し、二次元 Gauss の定理の複素表示として下記を得る。

$$\iint \frac{d}{d\,\bar{z}} F dS = \frac{1}{2i} \oint F\,dz \tag{5.3.3}$$

(5.2.10) 式から、

$$\frac{d}{d\,\bar{z}} \mathrm{F} = 0$$

上式を (5.3.3) 式に代入すると、下記の Cauchy の積分定理が得られる。$F = f(z)$ が閉曲線 C で囲まれた領域で正則であれば、

$$\oint_C F\,dz = 0 \tag{5.3.4}$$

(1) 簡単な例 (楕円の面積)

軸径：a、b の楕円の面積を上記、二次元 Gauss の定理の複素表示を用いて求める。(5.3.3) 式から、$F=\overline{z}$ とすると、

$$\iint dS = S = \frac{1}{2i}\oint F\,dz$$

```
depends(z,[\theta]);
F1:F=w;
Z2:z=a*cos(\theta)+%i*b*sin(\theta);
F2:F=conjugate(rhs(Z2));
DZ2:diff(Z2,\theta,1);
Z2DT:'diff(z,\theta,1)=diff(rhs(Z2),
 \theta,1);
S=1/(2*%i)*'integrate(rhs(F2)*rhs(DZ2),
 \theta,0,2*%pi);
ev(%,integrate);
```

楕円形状を複素表示すると、

$$z = i\,b\sin(\theta)+a\cos(\theta)$$

また、

$$\frac{d}{d\,\theta}\,z = i\,b\cos(\theta)-a\sin(\theta)$$

複素関数：F は、$F=\overline{z}$ とすると、

$$F=\overline{z}=a\cos(\theta)-i\,b\sin(\theta)$$

これらの関係式を上式に代入すると、

$$\begin{aligned}S =& \frac{1}{2i}\int_0^{2\,\pi} F\,\frac{d}{d\,\theta}\,z\,d\theta\\ =& -\frac{i}{2}\int_0^{2\,\pi}(i\,b\cos(\theta)-a\sin(\theta))\\ &\quad\times\ (a\cos(\theta)-i\,b\sin(\theta))\,d\theta\\ =& \pi\,a\,b\end{aligned}$$

楕円の面積が得られた。

(2) 簡単な例 (半円の重心位置)

原点からのモーメント：M は、上記の面積を求める式：$F=\overline{z}$ を基にレバー：z を掛けて $F=z\,\overline{z}$ として、下記で表せる。

$$M = \iint z\,dS = \frac{1}{2i}\oint z\,\overline{z}\,dz$$

```
depends(z,[\theta]);
Z3:z=R*%e^(%i*\theta);
Z31:conjugate(Z3);
Z4:z=x+%i*y;
Z41:conjugate(Z4);
Z4:z=x;
DZ3:diff(Z3,\theta,1);
S1:S=1/(2*%i)*integrate(rhs(Z31)*rhs(DZ3),
 \theta,0,%pi);
SH1:H[1]=1/(2*%i)*integrate(rhs(Z31)
 *rhs(Z3)*rhs(DZ3),\theta,0,%pi);
SH2:H[2]=factor(1/(2*%i)*integrate(
 rhs(Z41)*rhs(Z4),x,-R,R));
(SH1+SH2)/S1;
```

半径：R の円を複素表示すると、z と $\overline{z}$ は下記のように表せる。

$$z=e^{i\,\theta}\,R,\quad \overline{z}=e^{-i\,\theta}\,R$$

z を θ で微分すると、

$$\frac{d}{d\,\theta}\,z = i\,e^{i\,\theta}\,R$$

半円の面積は、

$$\begin{aligned}S =& \frac{1}{4i}\int_0^{2\,\pi}\overline{z}\,\frac{d}{d\,\theta}\,z\,d\theta = \frac{1}{4i}\int_0^{2\,\pi} e^{-i\,\theta}\,R\,i\,e^{i\,\theta}\,R\,d\theta\\ =& \frac{\pi\,R^2}{2}\end{aligned}$$

上記の線積分を角度：$0\sim\pi$ の半円の積分：H_1 と x 軸上の積分：H_2 に分ける。H_1 は、

$$\begin{aligned}H_1 =& \frac{1}{2i}\int_0^{\pi} z\,\overline{z}\,\frac{d}{d\,\theta}\,z\,d\theta = \frac{1}{2i}\int_0^{\pi} e^{-i\,\theta}\,R\,e^{-i\,\theta}\,R\,i\,e^{i\,\theta}\,R\,d\theta\\ =& \frac{\int_0^{\pi} e^{i\,\theta}d\theta\,R^3}{2} = i\,R^3\end{aligned}$$

H_2 では、z と $\overline{z}$ は下記のように表せる。

$$z=i\,y+x,\quad \overline{z}=x-i\,y$$

$$\begin{aligned}H_2 =& \frac{1}{2i}\int_{-R}^{R} z\,\overline{z}\,dx = \frac{i}{2}\int_{-R}^{R} x\,(-x)\,dx\\ =& -\frac{i\,R^3}{3}\end{aligned}$$

以上から重心位置は、

$$\frac{H_2+H_1}{S} = \frac{4\,i\,R}{3\,\pi}$$

5.3.2 Cauchy の積分公式

下記の複素関数：$F(z)$ を考える。ここで $f(z)$ は検討する領域内で正則とする。$F(z)$ は z_0 で正則でない。

$$F(z) = \frac{f(z)}{z - z_0}$$

z_0 を含む周：C と周：C 内の z_0 を囲む小さな円：K を考え、C の内側と K の外側の領域では正則である。この領域に Cauchy の積分定理：(5.3.4) 式を適用すると、

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz - \oint_K \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 0$$

ここで、K の積分は、C と逆方向に積分するため、負の符号を付ける。上記から、

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \oint_K \frac{f(z)}{z - z_0} dz \tag{5.3.5}$$

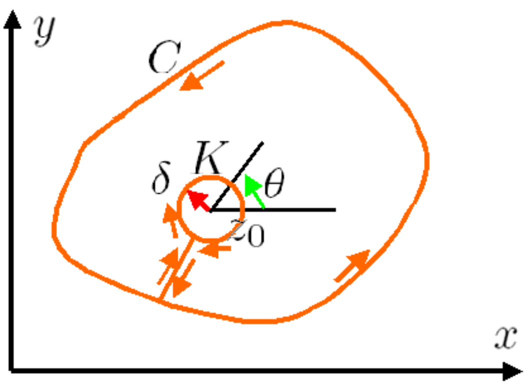


図 5.3.2: Cauchy の積分公式

```
kill(all);
declare(z,complex);
Z2:z=x+%i*y;
F2:F(z)=f(z)/(z-z[0]);
Z2:z-z[0]=\delta*%e^(%i*\theta);
Z3:solve(Z2,z)[1];
Z2D:'diff(z,\theta,1)=diff(rhs(Z2),
 \theta,1);
CIF2:'integrate(F(z),z);
CIF3:subst([F2],CIF2);
CIF4:subst([f(z)=f(z[0])],%)='f(z[0])
  *'integrate(1/(z-z[0]),z);
CIF5:CIF3=f(z[0])*'integrate(1/rhs(Z2)
  *rhs(Z2D),\theta,0,2*%pi);
%/2/%i/%pi;
lhs(%)=rhs(%);
```

小さな円：K を複素表示すると、

$$z - z_0 = \delta\, e^{i\,\theta}, \quad \frac{d}{d\,\theta} z = i\,\delta\, e^{i\,\theta} \tag{5.3.6}$$

また、小さな円：K 上では $f(z) = f(z_0)$ と考えられるので、

$$\oint_K \frac{f(z)}{z - z_0} dz = f(z_0) \oint_K \frac{1}{z - z_0} dz \tag{5.3.7}$$

(5.3.6) 式、(5.3.7) 式を (5.3.5) 式に代入すると、

$$\begin{aligned}\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \oint_K \frac{f(z)}{z - z_0} dz = f(z_0) \oint_K \frac{1}{z - z_0} dz \\ = f(z_0) \int_0^{2\pi} \frac{1}{\delta\, e^{i\,\theta}} \left(i\,\delta\, e^{i\,\theta}\right) d\theta \\ = 2\,i\,\pi\, f(z_0)\end{aligned}$$

以上から下記の Cauchy の積分公式が得られた。

$$f(z_0) = -\frac{i}{2\,\pi} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz \tag{5.3.8}$$

5.3.3 留数定理と Maxima の留数関数

下記の複素関数 : $F(z)$ を考える。ここで $f(z)$ は下記の級数和で表現され、z_0 以外の領域で正則とする。

$$F(z)=\oint_C f(z)\,dz,\quad f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\,(z-z_0)^n$$

```
kill(all);
declare(z,complex);
FZ1:f[n](z)=a[n]*(z-z[0])^n;
F1:f(z)=sum(rhs(FZ1),n,minf,inf);
INF1:'integrate(rhs(FZ1),z);
Z2:z-z[0]=\delta*%e^(%i*\theta);
Z3:solve(Z2,z)[1];
Z2D:'diff(z,\theta,1)=diff(rhs(Z2),
 \theta,1);
FZ2:subst([Z2],rhs(FZ1));
INF2:'integrate(FZ2*rhs(Z2D),\theta,0,
 2*%pi);
assume(n>=0);
INF1=ev(INF2,integrate);
forget(n>=0);
assume(n<-1);
INF1=ev(INF2,integrate);
subst([n=-1],INF2);
subst([n=-1],INF1)=ev(%,integrate);
```

z_0 を含む周 : C と周 : C 内の z_0 を囲む小さな円 : K を考え、C の内側と K の外側の領域では正則である。この領域に Cauchy の積分定理 : (5.3.4) 式を適用すると、

$$\oint_C f(z)\,dz=\oint_K \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\,(z-z_0)^n dz$$

ここで級数和の各項は、

$$f_n(z)=a_n\,(z-z_0)^n$$

$$\oint_K f_n(z)\,dz=\oint_K a_n\,(z-z_0)^n dz$$

小さな円 : K を複素表示すると、

$$z-z_0=\delta\,e^{i\,\theta},\quad \frac{d}{d\,\theta}\,z=i\,\delta\,e^{i\,\theta}$$

上式を代入すると、

$$\oint_K f_n(z)\,dz=i\,\delta\,a_n\int_0^{2\,\pi} e^{i\,\theta}\left(\delta\,e^{i\,\theta}\right)^n d\theta$$

この積分は、$n\ge 0$ では、

$$\oint_K f_n(z)\,dz=0$$

$n<-1$ では、

$$\oint_K f_n(z)\,dz=0$$

$n=-1$ では、

$$\oint_K f_n(z)\,dz=a_{-1}\int\frac{1}{z-z_0}dz=2\,i\,\pi\,a_{-1}$$

以上から、$n=-1$ の場合のみ積分の値を持ち、

$$F(z)=\oint_C f(z)\,dz=\oint_C\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\,(z-z_0)^n dz \\ =2\,i\,\pi\,a_{-1} \tag{5.3.9}$$

Maxima の留数関数

Maxima で留数を求める関数は下記の $residue$ で得られる。極は予め求めておき、指定する必要がある。

$$residue(\text{留数を求める関数}, \text{変数}, \text{極})$$

例を下記に示す。

```
FZ1:f(z)=z/(z**2+a**2);
residue(rhs(FZ1), z, a*%i);
```

下記の関数で、

$$\mathrm{f}(z)=\frac{z}{z^2+a^2}$$

極が $a\,i$ の留数は、

$$Res\,(\mathrm{f}(z)\,,z=a)=\frac{1}{2}$$

```
FZ1:f(z)=sin(a*z)/z**4;
residue(rhs(FZ1), z, 0);
```

下記の関数で、

$$\mathrm{f}(z)=\frac{\sin(a\,z)}{z^4}$$

極が 0 の留数は、

$$Res\,(\mathrm{f}(z)\,,z=0)=-\frac{a^3}{6}$$

5.3.4 留数を使った実積分

$\int_0^{2\pi} F(\cos(\theta), \sin(\theta))\, d\theta$ の計算

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{-2\,c\cos(\theta) + c^2 + 1} d\theta \quad |c| < 1 \tag{5.3.10}$$

```
kill(all);
declare(z,complex);
depends(z,[\theta]);
FZ1:1/(1-2*c*cos(\theta)+c^2);
I1:I='integrate(FZ1,\theta,0,2*%pi);
Z1:z=%e^(%i*\theta);
Z2:%e^(%i*\theta)=z;
DZ1:diff(Z1,\theta,1);
DZ2:subst([Z2],DZ1);
CO1:cos(\theta)=(%e^(%i*\theta)
 +%e^(-%i*\theta))/2;
CO2:subst([Z2],CO1);
FZ2:subst([CO2],FZ1/(rhs(DZ2)));
factor(%);
denom(%)=0;
solve(%,z);
Z01:%[2];
RE1:residue (FZ2, z, rhs(Z01));
rhs(I1)=2*%pi*%i*%;
```

上式の積分について検討する。被積分関数：$\mathrm{f}(z)$ は、

$$\mathrm{f}(z) = \frac{1}{-2\,c\cos(\theta) + c^2 + 1} \tag{5.3.11}$$

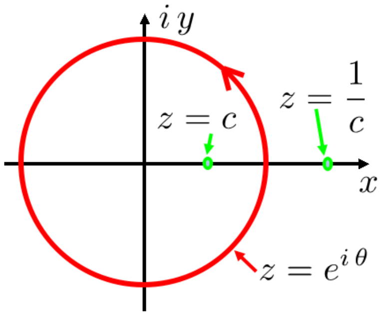


図 5.3.3: 閉積分

半径：$R = 1$ の円は複素関数で次式で表現できる。

$$z = e^{i\,\theta}, \quad e^{i\,\theta} = z$$

上式を θ で微分すると、

$$\frac{d}{d\,\theta} z = i\,e^{i\,\theta}$$

上式を z で表現し、

$$\frac{d}{d\,\theta} z = i\,z, \quad d\theta = \frac{1}{i\,z} dz$$

また、オイラーの公式から、上式の関係を代入し、

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\,\theta} + e^{-i\,\theta}}{2} = \frac{z + \frac{1}{z}}{2}$$

以上の結果を (5.3.11) 式の被積分関数に代入し、積分変数を $\theta \to z$ に変更して、被積分関数を複素関数で表すと、

$$\begin{aligned} \mathrm{f}(z) &= -\frac{i}{z\left(-c\left(z + \frac{1}{z}\right) + c^2 + 1\right)} \\ &= \frac{i}{(z - c)\,(c\,z - 1)} \end{aligned}$$

上式から (5.3.10) 式の積分は、

$$I = \oint \frac{i}{(z - c)\,(c\,z - 1)} dz$$

上式の極は次式から得られ、

$$(z - c)\,(c\,z - 1) = 0$$

極は、

$$[z = \frac{1}{c}, z = c]$$

$|c| < 1$ とすると、積分経路の内の極は $z = c$ で、この極の留数は、Maxima の留数関数から得られ、

$$Res(\mathrm{f}(z), z = c) = \frac{i}{c^2 - 1}$$

以上から、(5.3.10) 式の積分結果は、

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{-2\,c\cos(\theta) + c^2 + 1} d\theta \\ &= 2\pi\,i\,Res(F, z = c) \\ &= -\frac{2\,\pi}{c^2 - 1} \end{aligned}$$

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{1}{p\cos(\theta)+1}d\theta \quad |p|<1 \quad (5.3.12)$$

```
kill(all);
declare(z,complex);
depends(z,[\theta]);
assume(p>0 and p<1);
FZ1:1/(1+p*cos(\theta));
I1:I='integrate(FZ1,\theta,0,2*%pi);
Z1:z=%e^(%i*\theta);
Z2:%e^(%i*\theta)=z;
DZ1:diff(Z1,\theta,1);
DZ2:subst([Z2],DZ1);
CO1:cos(\theta)=(%e^(%i*\theta)
 +%e^(-%i*\theta))/2;
CO2:subst([Z2],CO1);
FZ2:subst([CO2],FZ1/(rhs(DZ2)));
factor(%);
denom(%)=0;
solve(%,z);
Z01:%[2];
RE1:residue (FZ2, z, rhs(Z01));
rhs(I1)=2*%pi*%i*%;
```

上式の積分について検討する。被積分関数：$\mathrm{f}(z)$ は、

$$\mathrm{f}(z)=\frac{1}{p\cos(\theta)+1} \qquad (5.3.13)$$

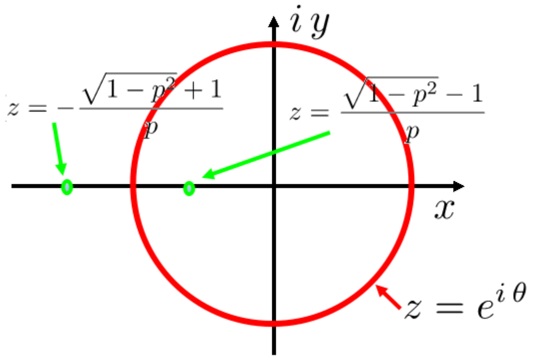


図 5.3.4: 閉積分

半径：$R=1$ の円は複素関数で次式で表現できる。

$$z=e^{i\,\theta},\quad e^{i\,\theta}=z$$

上式を θ で微分すると、

$$\frac{d}{d\,\theta}\,z=i\,e^{i\,\theta}$$

上式を z で表現し、

$$\frac{d}{d\,\theta}\,z=i\,z,\quad d\theta=\frac{1}{i\,z}\,dz$$

また、オイラーの公式から、上式の関係を代入し、

$$\cos(\theta)=\frac{e^{i\,\theta}+e^{-i\,\theta}}{2}=\frac{z+\frac{1}{z}}{2}$$

以上の結果を (5.3.13) 式の被積分関数に代入し、積分変数を $\theta\to z$ に変更して、被積分関数を複素関数で表すと、

$$\begin{aligned}\mathrm{f}(z)&=-\frac{i}{z\left(\frac{p\left(z+\frac{1}{z}\right)}{2}+1\right)}\\&=-\frac{2\,i}{p\,z^2+2\,z+p}\end{aligned}$$

上式から (5.3.12) 式の積分は、

$$I=\oint-\frac{2\,i}{p\,z^2+2\,z+p}\,dz$$

上式の極は次式から得られ、

$$p\,z^2+2\,z+p=0$$

極は、

$$[z=-\frac{\sqrt{1-p^2}+1}{p},z=\frac{\sqrt{1-p^2}-1}{p}]$$

$|p|<1$ とすると、積分経路の内の極は、

$$z=\frac{\sqrt{1-p^2}-1}{p}$$

この極の留数は、Maxima の留数関数から得られ、

$$Res\left(\mathrm{f}(z),z=\frac{\sqrt{1-p^2}-1}{p}\right)=\frac{i\sqrt{1-p^2}}{p^2-1}$$

以上から、(5.3.12) 式の積分結果は、

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{2\pi}\frac{1}{p\cos(\theta)+1}d\theta\\&=2\pi\,i\,Res\left(\mathrm{f}(z),z=\frac{\sqrt{1-p^2}-1}{p}\right)\\&=-\frac{2\,\pi\sqrt{1-p^2}}{p^2-1}\end{aligned}$$

$$I=\int_{0}^{\pi}\frac{1}{b^2\sin\left(\theta\right)^2+a^2\cos\left(\theta\right)^2}d\theta\quad a>b>0 \tag{5.3.14}$$

```
kill(all);
declare(z,complex);
depends(z,[\phi]);
FZ1:1/(a^2*cos(\theta)^2
 +b^2*sin(\theta)^2);
I1:I='integrate(FZ1,\theta,0,%pi);
CO3:cos(\theta)^2;
CO4:%=trigrat(%);
SI3:sin(\theta)^2;
SI4:%=trigrat(%);
FZ11:subst([CO4,SI4],FZ1);
\theta=\phi/2;
FZ12:subst([%],FZ11/2);
I11:I='integrate(FZ12,\phi,0,2*%pi);
Z1:z=%e^(%i*\phi);
Z2:%e^(%i*\phi)=z;
DZ1:diff(Z1,\phi,1);
DZ2:subst([Z2],DZ1);
CO1:cos(\phi)=(%e^(%i*\phi)
 +%e^(-%i*\phi))/2;
CO2:subst([Z2],CO1);
FZ2:factor(subst([CO2],FZ12/(rhs(DZ2))));
factor(%);
denom(%)=0;
solve(%,z);
Z01:%[1];
RE1:residue (FZ2, z, rhs(Z01));
rhs(I1)=2*%pi*%i*%;
```

上式の積分について検討する。被積分関数：$\mathrm{f}\left(z\right)$ は、

$$\mathrm{f}\left(z\right)=\frac{1}{b^2\sin\left(\theta\right)^2+a^2\cos\left(\theta\right)^2} \tag{5.3.15}$$

ここで下記の関係があり、

$$\cos\left(\theta\right)^2=\frac{\cos\left(2\,\theta\right)+1}{2},\quad \sin\left(\theta\right)^2=-\frac{\cos\left(2\,\theta\right)-1}{2}$$

これを (5.3.15) 式の被積分関数：F に代入すると、

$$\mathrm{f}\left(z\right)=\frac{1}{\frac{a^2\,(\cos(2\,\theta)+1)}{2}-\frac{b^2\,(\cos(2\,\theta)-1)}{2}}$$

下記の変数変換を行うと、

$$\theta=\frac{\phi}{2}$$

上式の被積分関数：F は、

$$\mathrm{f}\left(z\right)=\frac{1}{2\left(\frac{a^2\,(\cos(\phi)+1)}{2}-\frac{b^2\,(\cos(\phi)-1)}{2}\right)} \tag{5.3.16}$$

(5.3.14) 式の積分は、

$$I=\frac{1}{2}\int_{0}^{2\,\pi}\frac{1}{\frac{a^2\,(\cos(\phi)+1)}{2}-\frac{b^2\,(\cos(\phi)-1)}{2}}d\phi \tag{5.3.17}$$

半径：$R=1$ の円は複素関数で次式で表現できる。

$$z=e^{i\,\phi},\quad e^{i\,\phi}=z$$

上式を ϕ で微分すると、

$$\frac{d}{d\,\phi}\,z=i\,e^{i\,\phi}=i\,z$$

また、オイラーの公式から、上式の関係を代入し、

$$\cos\left(\phi\right)=\frac{e^{i\,\phi}+e^{-i\,\phi}}{2}=\frac{z+\frac{1}{z}}{2}$$

以上の結果を (5.3.16) 式の被積分関数に代入し、積分変数を $\theta\to z$ に変更して、被積分関数を複素関数で表すと、

$$\mathrm{f}\left(z\right)=\frac{2\,i}{\left(b\,z-a\,z-b-a\right)\,\left(b\,z+a\,z-b+a\right)}$$

上式から (5.3.17) 式の積分は、、

$$I=\oint\frac{2\,i}{\left(b\,z-a\,z-b-a\right)\,\left(b\,z+a\,z-b+a\right)}\,dz$$

上式の極は次式から得られ、

$$\left(b\,z-a\,z-b-a\right)\,\left(b\,z+a\,z-b+a\right)=0$$

極は、

$$[z=\frac{b-a}{b+a},z=\frac{b+a}{b-a}]$$

積分経路の半径：$R=1$ 内の極は、

$$z=\frac{b-a}{b+a}$$

この極の留数は、Maxima の留数関数から得られ、

$$Res\left(\mathrm{f}\left(z\right),z=\frac{b-a}{b+a}\right)=-\frac{i}{2\,a\,b}$$

以上から、(5.3.14) 式の積分結果は、

$$\begin{aligned}I=&\int_{0}^{\pi}\frac{1}{b^2\sin\left(\theta\right)^2+a^2\cos\left(\theta\right)^2}d\theta\\=&2\pi\,i\,Res\left(\mathrm{f}\left(z\right),z=\frac{b-a}{b+a}\right)\\=&\frac{\pi}{a\,b}\end{aligned}$$

$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{p(x)}{q(x)}\,dx$ の計算

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2+1}dx \tag{5.3.18}$$

```
kill(all);
declare(z,complex);
depends(z,[\theta]);
I1:I='integrate(1/(1+x^2),x,-inf,inf);
FZ1:f(z)=1/(1+z^2);
denom(rhs(%))=0;
solve(%,z);
Z01:%[2];
RE1:residue (rhs(FZ1), z, rhs(Z01));
RZ1:z=R*%e^(%i*\theta);
DRZ1:diff(RZ1,\theta,1);
RFZ1:subst([RZ1],rhs(FZ1)*rhs(DRZ1));
'limit(%,R,inf);
%=ev(%,limit);
rhs(I1)=2*%pi*%i*RE1;
```

上式の積分について検討する。上式の被積分関数を複素関数：$\mathrm{f}(z)$ で表すと、

$$\mathrm{f}(z)=\frac{1}{z^2+1} \tag{5.3.19}$$

これを基に下記の積分を考える。

$$I_C=\oint\frac{1}{z^2+1}\,dz \tag{5.3.20}$$

この積分で下図の積分経路：I_1, I_2 を考える。(5.3.18)

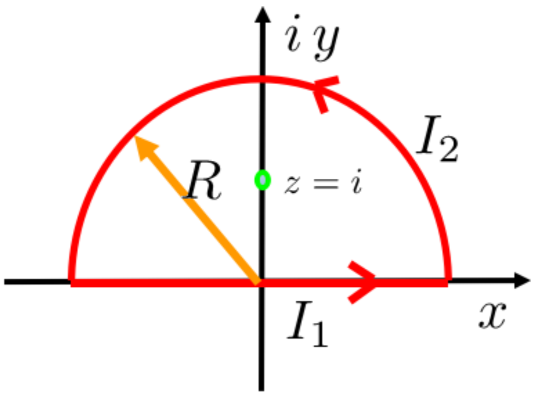


図 5.3.5: 閉積分

式の積分は (5.3.20) 式の x 軸上の積分で、経路：I_1 は x 軸上の $-R$〜R の積分となる。

$$I_1=\int_{-R}^{R}\frac{1}{x^2+1}dx$$

経路：I_2 は半径：R の円上で $\theta=0$〜π の積分となる。半径：R の円は次式で表現でき、

$$z=e^{i\,\theta}\,R,\quad \frac{d}{d\,\theta}\,z=i\,e^{i\,\theta}\,R$$

経路：I_2 の積分は上記の結果と積分変数を $z\to\theta$ に変更して、$R\to\infty$ とすると、

$$I_2=\lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{i\,e^{i\,\theta}\,R}{e^{2\,i\,\theta}\,R^2+1}\,d\theta=0 \tag{5.3.21}$$

(5.3.19) 式の極は次式から得られ、

$$z^2+1=0$$

極は、

$$[z=-i,z=i]$$

積分経路：I_1, I_2 内の極は、R が十分大きいとすると、

$$z=i$$

この極の留数は、Maxima の留数関数から得られ、

$$Res\left(\mathrm{f}(z),z=i\right)=-\frac{i}{2}$$

以上から、(5.3.20) 式の積分結果は、

$$\begin{aligned}I_C=&I_1+I_2=\oint\frac{1}{z^2+1}\,dz\\=&2\pi\,i\,Res\left(\mathrm{f}(z),z=i\right)=\pi\end{aligned} \tag{5.3.22}$$

上式と (5.3.21) 式から I_1 は、

$$I=I_1=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2+1}dx=\pi$$

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^4+a^4}dx \qquad a>0 \qquad (5.3.23)$$

```
kill(all);
declare(z,complex);
depends(z,[\theta]);
assume(a>0);
I1:I='integrate(1/(x^4+a^4),x,-inf,inf);
FZ1:1/(z^4+a^4);
z^4+a^4=0;
solve(%,z);
SZ1:rectform(%);
Z01:z[1]=rhs(SZ1[1]);
Z02:z[2]=rhs(SZ1[4]);
RE1:residue (FZ1, z, rhs(Z01));
RE2:residue (FZ1, z, rhs(Z02));
RZ1:z=R*%e^(%i*\theta);
DRZ1:diff(RZ1,\theta,1);
RFZ1:subst([RZ1],FZ1*rhs(DRZ1));
'limit(%,R,inf);
%=ev(%,limit);
rhs(I1)=2*%pi*%i*(RE1+RE2);
I11:factor(%);
```

上式の積分について検討する。上式の被積分関数を複素関数：$\mathrm{f}(z)$ で表すと、

$$\mathrm{f}(z)=\frac{1}{z^4+a^4} \qquad (5.3.24)$$

これを基に下記の積分を考える。

$$I_C=\oint\frac{1}{z^4+a^4}dz \qquad (5.3.25)$$

この積分で下図の積分経路：I_1, I_2 を考える。(5.3.23) 式の積分は (5.3.25) 式の x 軸上の積分で、経

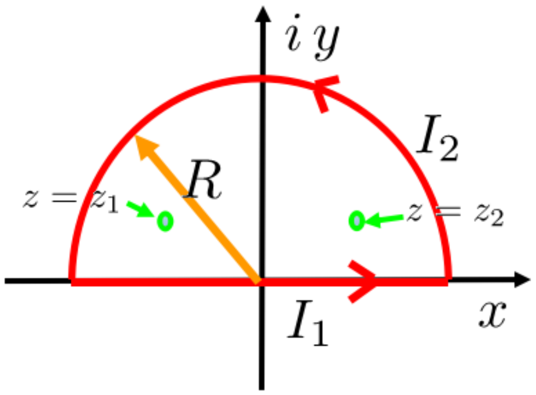


図 5.3.6: 閉積分

路：I_1 は x 軸上の $-\infty$〜∞ の積分となる。

$$I_1=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^4+a^4}dx$$

経路：I_2 は半径：R の円上で $\theta=0$〜π の積分となる。半径：R の円は次式で表現でき、

$$z=e^{i\,\theta}R, \quad \frac{d}{d\,\theta}z=i\,e^{i\,\theta}R$$

経路：I_2 の積分は上記の結果と積分変数を $z\to\theta$ に変更して、$R\to\infty$ とすると、

$$I_2=\lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{i\,e^{i\,\theta}R}{e^{4\,i\,\theta}R^4+a^4}d\theta=0 \qquad (5.3.26)$$

(5.3.24) 式の極は次式から得られ、

$$z^4+a^4=0$$

極は、

$$z=(-1)^{\frac{1}{4}}\,i\,a, \quad z=-(-1)^{\frac{1}{4}}\,a,$$
$$z=-(-1)^{\frac{1}{4}}\,i\,a, \quad z=(-1)^{\frac{1}{4}}\,a$$

上式を $rectform$ 関数で表すと、

$$z=\frac{i\,a}{\sqrt{2}}-\frac{a}{\sqrt{2}}, \quad z=-\frac{i\,a}{\sqrt{2}}-\frac{a}{\sqrt{2}},$$
$$z=\frac{a}{\sqrt{2}}-\frac{i\,a}{\sqrt{2}}, \quad z=\frac{i\,a}{\sqrt{2}}+\frac{a}{\sqrt{2}}$$

積分経路：I_1, I_2 内の極は、R が十分大きいとすると、

$$z_1=\frac{i\,a}{\sqrt{2}}-\frac{a}{\sqrt{2}}, \quad z_2=\frac{i\,a}{\sqrt{2}}+\frac{a}{\sqrt{2}}$$

この極の留数は、Maxima の留数関数から得られ、

$$Res\left(\mathrm{f}(z),z=z_1\right)=-\frac{i-1}{2^{\frac{5}{2}}\,a^3}$$

$$Res\left(\mathrm{f}(z),z=z_2\right)=-\frac{i+1}{2^{\frac{5}{2}}\,a^3}$$

以上から、(5.3.25) 式の積分結果は、

$$\begin{aligned}I_C=&I_1+I_2=\oint\frac{1}{z^4+a^4}dz\\=&2\pi\,i\,\left(Res\left(\mathrm{f}(z),z=z_1\right)+Res\left(\mathrm{f}(z),z=z_2\right)\right)\\=&2\,i\,\pi\left(-\frac{i+1}{2^{\frac{5}{2}}\,a^3}-\frac{i-1}{2^{\frac{5}{2}}\,a^3}\right)\\=&\frac{\pi}{\sqrt{2}\,a^3}\end{aligned} \qquad (5.3.27)$$

上式と (5.3.26) 式から I_1 は、

$$I=I_1=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^4+a^4}dx=\frac{\pi}{\sqrt{2}\,a^3}$$

$$I=\int_{0}^{\infty}\frac{\cos\left(m\,x\right)}{x^2+a^2}dx \qquad a>0,m>0 \tag{5.3.28}$$

$$I=\int_{0}^{\infty}\frac{x\sin\left(m\,x\right)}{x^2+a^2}dx \qquad a>0,m>0 \tag{5.3.29}$$

```
kill(all);
declare(z,complex);
depends(z,[\theta]);
assume(m>0);
assume(R>0);
assume(sin(\theta)>0);
I1:I='integrate(cos(m*x)/(x^2+a^2),x,0,
 inf);
I2:I[1]='integrate(cos(m*x)/(x^2+a^2),x,
 -inf,inf);
FZ1:%e^(%i*m*z)/(z^2+a^2);
z^2+a^2=0;
solve(%,z);
Z01:z[1]=rhs(%[2]);
RE1:residue (FZ1, z, rhs(Z01));
RZ1:z=R*%e^(%i*\theta);
DRZ1:diff(RZ1,\theta,1);
RFZ1:subst([RZ1],FZ1*rhs(DRZ1));
subst([a=0],%);
rectform(%);
'limit(%,R,inf);
ev(%,limit);
'integrate(subst([z=x],FZ1),x,-inf,inf);
%=2*%pi*%i*(RE1);
realpart(%);
rhs(I1)=rhs(%)/2;
/* [41]-(2) */
diff(%,m,1);
-%;
```

上式の積分について検討する。(5.3.28) 式の被積分関数は偶関数であるから、積分範囲を $-\infty$ から ∞ としてもよいので、改めて、

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\left(m\,x\right)}{x^2+a^2}dx \tag{5.3.30}$$

積分は上式の被積分関数を複素関数：$\mathrm{f}\left(z\right)$ で表すと、

$$\mathrm{f}\left(z\right)=\frac{e^{i\,m\,z}}{z^2+a^2} \tag{5.3.31}$$

これを基に下記の積分を考える。

$$I_C=\oint\frac{e^{i\,m\,z}}{z^2+a^2}dz \tag{5.3.32}$$

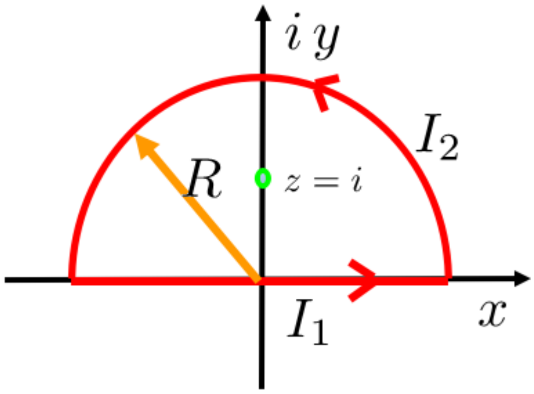


図 5.3.7: 閉積分

この積分で下図の積分経路：I_1, I_2 を考える。(5.3.30) 式の積分は (5.3.32) 式の x 軸上の積分経路：I_1 で、x 軸上の $-\infty$〜∞ の積分となる。

$$I_1=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\,m\,x}}{x^2+a^2}dx$$

経路：I_2 は半径：R の円上で $\theta=0$〜π の積分となる。半径：R の円は次式で表現でき、

$$z=e^{i\,\theta}\,R,\qquad \frac{d}{d\,\theta}\,z=i\,e^{i\,\theta}\,R$$

経路：I_2 の積分は上記の結果と積分変数を $z\to\theta$ に変更して、積分範囲では $\sin\left(\theta\right)>0$ であるから、$R\to\infty$ とすると、

$$\begin{aligned}
I_2&=\lim_{R\to\infty}\int_{0}^{\pi}\frac{i\,R\,e^{i\,m\,e^{i\,\theta}\,R+i\,\theta}}{e^{2\,i\,\theta}\,R^2+a^2}\,d\theta\\
&\approx\lim_{R\to\infty}\int_{0}^{\pi}\frac{i\,e^{i\,m\,e^{i\,\theta}\,R-i\,\theta}}{R}\,d\theta\\
&=\lim_{R\to\infty}\int_{0}^{\pi}\frac{i\,e^{-m\sin(\theta)\,R}\cos\left(m\cos\left(\theta\right)\,R-\theta\right)}{R}\\
&\qquad-\frac{e^{-m\sin(\theta)\,R}\sin\left(m\cos\left(\theta\right)\,R-\theta\right)}{R}\,d\theta\\
&=0
\end{aligned} \tag{5.3.33}$$

(5.3.31) 式の極は次式から得られ、

$$z^2+a^2=0$$

極は、

$$\left[z=-i\,a,z=i\,a\right]$$

積分経路：I_1, I_2 内の極は、R が十分大きいとすると、

$$z_1=i\,a$$

この極の留数は、Maxima の留数関数から得られ、

$$Res\left(\mathrm{f}\left(z\right),z=z_1\right)=-\frac{i\,e^{-a\,m}}{2\,a}$$

以上から、(5.3.32) 式の積分結果は、

$$\begin{aligned} I_C =& I_1 + I_2 = \oint \frac{e^{i\,m\,z}}{z^2+a^2}\,dz \\ =& 2\pi\, i\, Res\,(\mathrm{f}\,(z)\,, z=i) = \frac{\pi\, e^{-a\,m}}{2\,a} \end{aligned} \tag{5.3.34}$$

上式と (5.3.33) 式から I_1 は、

$$I = I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\,m\,x}}{x^2+a^2} dx = \frac{\pi\, e^{-a\,m}}{a}$$

上式の実部をとると、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\,(m\,x)}{x^2+a^2} dx = \frac{\pi\, e^{-a\,m}}{a}$$

積分範囲を 0〜∞ では、上式の 1/2 として、

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\cos\,(m\,x)}{x^2+a^2} dx = \frac{\pi\, e^{-a\,m}}{2\,a}$$

上式を m で微分して、

$$\int_{0}^{\infty} \frac{x\sin\,(m\,x)}{x^2+a^2} dx = \frac{\pi\, e^{-a\,m}}{2}$$

$$I=\int_{0}^{\infty}\frac{\sin\left(x\right)}{x}dx \tag{5.3.35}$$

```
kill(all);
declare(z,complex);
depends(z,[\theta]);
assume(R>0);
assume(sin(\theta)>0);
I1:I='integrate(sin(x)/x,x,0,inf);
FZ1:%e^(%i*z)/z;
I1:I[1]='integrate(subst([z=x],FZ1),x,0,
 inf);
I3:I[3]='integrate(subst([z=x],FZ1),x
 ,-inf,0);
I3:I[3]='integrate(subst([z=-x],FZ1),x,0,
 inf);
I13:I[1]+I[3]=integrate(%e^(%i*x)/x
 -%e^(-%i*x)/x,x,0,inf);
I131:lhs(%)=2*%i*'integrate(sin(x)/x,x,0,
 inf);
RZ1:z=R*%e^(%i*\theta);
DRZ1:diff(RZ1,\theta,1);
RFZ1:subst([RZ1],FZ1*rhs(DRZ1));
rectform(%);
I4:I[4]=limit(%,R,inf);
RE1:residue (FZ1, z, 0);
I2:I[2]=-2*%pi*%i*RE1/2;
I131+I4+I2;
rhs(%)=0;
%+%pi*%i;
%/2/%i;
```

積分は次式の被積分関数を複素関数：$\mathrm{f}\left(z\right)$ で表すと、

$$\mathrm{f}\left(z\right)=\frac{e^{i\,z}}{z} \tag{5.3.36}$$

これを基に下記の積分を考える。

$$I_C=\oint\frac{e^{i\,z}}{z}\,dz \tag{5.3.37}$$

この積分で下図の積分経路：I_1, I_2, I_3, I_4 を考える。

(5.3.35) 式の積分は (5.3.37) 式の x 軸上の積分経路：I_1 で x 軸上の 0〜∞ の積分、経路：I_3 で x 軸上の $-\infty$〜0 の積分となる。

$$I_1=\int_{0}^{\infty}\frac{e^{i\,x}}{x}dx$$

$$I_3=\int_{-\infty}^{0}\frac{e^{i\,x}}{x}dx=-\int_{0}^{\infty}\frac{e^{-i\,x}}{x}dx$$

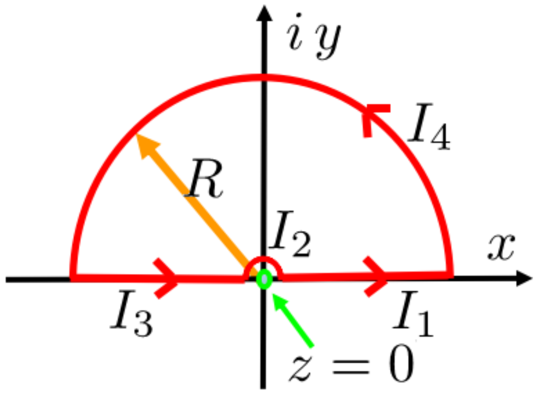


図 5.3.8: 閉積分

上式から、

$$I_3+I_1=\int_{0}^{\infty}\frac{e^{i\,x}}{x}-\frac{e^{-i\,x}}{x}dx=2\,i\int_{0}^{\infty}\frac{\sin\left(x\right)}{x}dx \tag{5.3.38}$$

経路：I_4 は半径：R の円上で $\theta=0$〜π の積分となる。半径：R の円は次式で表現でき、

$$z=e^{i\,\theta}\,R,\quad \frac{d}{d\,\theta}\,z=i\,e^{i\,\theta}\,R$$

経路：I_4 の積分は上記の結果と積分変数を $z\to\theta$ に変更して、積分範囲では $\sin\left(\theta\right)>0$ であるから、$R\to\infty$ とすると、

$$\begin{aligned}I_4=&\lim_{R\to\infty}\int_{0}^{\pi}i\,e^{i\,e^{i\,\theta}\,R}\,d\theta\\=&\lim_{R\to\infty}\int_{0}^{\pi}i\,e^{-\sin(\theta)\,R}\cos\left(\cos\left(\theta\right)\,R\right)\\&-e^{-\sin(\theta)\,R}\sin\left(\cos\left(\theta\right)\,R\right)\,d\theta\\=&0\end{aligned} \tag{5.3.39}$$

(5.3.36) 式の極は、

$$[z=0]$$

この極の留数は、Maxima の留数関数から得られ、

$$Res\left(\mathrm{f}\left(z\right),z=0\right)=1$$

$z=0$ まわりの積分：I_2 は積分の向きが反対で半周であるから、

$$I_2=-\frac{1}{2}\,2\,\pi\,i\,Res\left(\mathrm{f}\left(z\right),z=0\right)=-i\,\pi \tag{5.3.40}$$

積分経路内は正則であるから、$I_C=0$ として、(5.3.38) 式、(5.3.39) 式、(5.3.40) 式から、

$$I_C=I_4+I_3+I_2+I_1=2\,i\int_{0}^{\infty}\frac{\sin\left(x\right)}{x}dx-i\,\pi=0$$

以上から、

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\sin\left(x\right)}{x}dx=\frac{\pi}{2}$$

$$I=\int_{0}^{\infty}\frac{x^{a-1}}{x+1}dx\quad 0<a<1 \qquad (5.3.41)$$

```
kill(all);
declare(z,complex);
depends(z,[\theta]);
assume(R>0);
assume(a>0 and a<1);
I1:I='integrate(x^(a-1)/(x+1),x,0,inf);
FZ1:z^(a-1)/(z+1);
I1:I[1]='integrate(subst([z=r*%e^(%i*0)],
 FZ1),r,0,inf);
I2:I[2]='integrate(subst([z=r*%e^(%i*p)],
 FZ1),r,inf,0);
radcan(%);
subst([p=2*%pi],%);
I21:lhs(%)=-%e^(2*%i*%pi*a)*I[1];
RZ1:z=R*%e^(%i*\theta);
DRZ1:diff(RZ1,\theta,1);
RFZ1:subst([RZ1],FZ1*rhs(DRZ1));
I[3]='limit(%,R,inf);
I3:ev(%,limit);
I4:I[4]=limit(RFZ1,R,0);
RE2:residue (FZ1, z, -1);
I[0]=2*%pi*%i*RE2;
I0:%;
I1+I21+I3+I4;
lhs(%)=subst([I1],rhs(%));
rhs(%)=rhs(I0);
%/(1-%e^(2*%i*%pi*a));
factor(%);
lhs(%)=trigrat(rhs(%));
subst([r=x],lhs(%))=trigsimp(rhs(%));
```

積分は次式の被積分関数を複素関数：$\mathrm{f}(z)$ で表すと、

$$\mathrm{f}(z)=\frac{z^{a-1}}{z+1} \qquad (5.3.42)$$

これを基に下記の積分を考える。

$$I_C=\oint\frac{z^{a-1}}{z+1}dz \qquad (5.3.43)$$

この積分で下図の積分経路：I_1, I_2, I_3, I_4 を考える。

(5.3.41) 式の積分は (5.3.43) 式の経路：I_1 で x 軸上の $0\sim\infty$ の積分、$z=r$ として、

$$I_1=\int_{0}^{\infty}\frac{r^{a-1}}{r+1}dr \qquad (5.3.44)$$

また、経路：I_2 では x 軸上の $\infty\sim 0$ の積分で、$z=r\,e^{i\,p}$

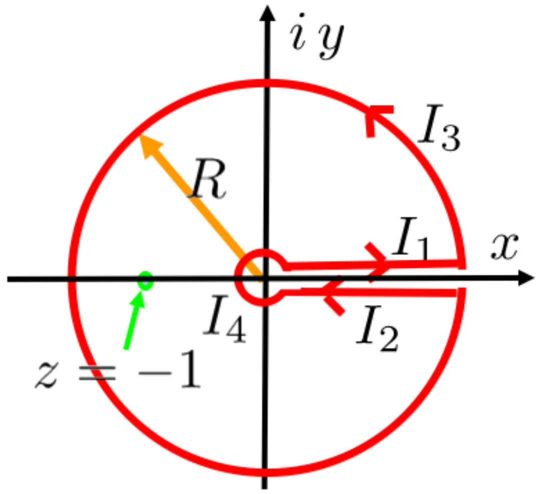


図 5.3.9: 閉積分

として、角度：p を 2π とすると、

$$\begin{aligned}I_2&=-\int_{0}^{\infty}\frac{\left(e^{i\,p}\,r\right)^{a-1}}{e^{i\,p}\,r+1}dr\\&=-\,e^{i\,a\,p}\int_{0}^{\infty}\frac{r^a}{e^{2\,i\,p}\,r^2+e^{i\,p}\,r}dr\\&=-\,e^{2\,i\,\pi\,a}\int_{0}^{\infty}\frac{r^a}{r^2+r}dr\\&=-\,I_1\,e^{2\,i\,\pi\,a}\end{aligned} \qquad (5.3.45)$$

経路：I_3 は半径：R の円上で $\theta=0\sim 2\,\pi$ の積分となる。半径：R の円は次式で表現でき、

$$z=e^{i\,\theta}\,R,\qquad \frac{d}{d\,\theta}\,z=i\,e^{i\,\theta}\,R$$

経路：I_3 の積分は上記の結果と積分変数を $z\to\theta$ に変更して、$R\to\infty$ とすると、

$$I_3=\lim_{R\to\infty}\int_{0}^{2\,\pi}\frac{i\,e^{i\,(a-1)\,\theta+i\,\theta}\,R^a}{e^{i\,\theta}\,R+1}\,d\theta=0 \qquad (5.3.46)$$

経路：I_4 の積分は上式を参考に半径：δ の円上で $\theta=2\,\pi\sim 0$ の積分となり、$\delta\to 0$ とすると、

$$I_4=\lim_{\delta\to 0}\int_{2\,\pi}^{0}\frac{i\,e^{i\,(a-1)\,\theta+i\,\theta}\,\delta^a}{e^{i\,\theta}\,\delta+1}\,d\theta=0 \qquad (5.3.47)$$

(5.3.42) 式の極は、

$$[z=-1]$$

この極の留数は、Maxima の留数関数から得られ、

$$Res\left(\mathrm{f}(z),z=-1\right)=-(-1)^a$$

I_C の積分は、上記留数から得られ、

$$I_C=2\,\pi\,i\,Res\left(\mathrm{f}(z),z=-1\right)=-2\,i\,\pi\,(-1)^a \qquad (5.3.48)$$

(5.3.44) 式、(5.3.45) 式、(5.3.46) 式、(5.3.47) 式から、

$$I_C=[I_4+I_3+I_2+I_1=\int_{0}^{\infty}\frac{r^{a-1}}{r+1}dr-I_1\,e^{2\,i\,\pi\,a}$$

上式と (5.3.44) 式、(5.3.48) 式から、

$$\int_0^{\infty} \frac{r^{a-1}}{r+1} dr - e^{2\,i\,\pi\,a} \int_0^{\infty} \frac{r^{a-1}}{r+1} dr = -2\,i\,\pi\,(-1)^a$$

上式を $1-e^{2\,i\,\pi\,a}$ で割り、

$$\frac{\int_0^{\infty} \frac{r^{a-1}}{r+1} dr - e^{2\,i\,\pi\,a} \int_0^{\infty} \frac{r^{a-1}}{r+1} dr}{1-e^{2\,i\,\pi\,a}} = -\frac{2\,i\,\pi\,(-1)^a}{1-e^{2\,i\,\pi\,a}}$$

整理すると、

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} \frac{r^{a-1}}{r+1} dr &= \frac{2\,i\,\pi\,(-1)^a}{\left(e^{i\,\pi\,a}-1\right)\,\left(e^{i\,\pi\,a}+1\right)} \\ &= \frac{\pi\sin(\pi\,a)^2 + \pi\cos(\pi\,a)^2}{\sin(\pi\,a)}\end{aligned}$$

上式を $r \to x$ に変換すると、

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{x+1} dx = \frac{\pi}{\sin(\pi\,a)}$$

$$I = \int_0^{\infty} \cos\left(x^2\right) dx \qquad (5.3.49)$$

```
kill(all);
declare(z,complex);
depends(z,[r,\theta]);
assume(R>0);
assume(cos(2*\theta)>0);
I1:I='integrate(cos(x^2),x,0,inf);
FZ1:%e^(-z^2);
I1:I[1]='integrate(subst([z=r],FZ1),r,0,
 inf);
I11:ev(%,integrate);
Z1:z=r*%e^(%i*%pi/4);
DZ1:diff(Z1,r,1);
I2:I[2]='integrate(subst([Z1],
 FZ1*rhs(DZ1)),r,inf,0);
DI2:%e^(-(%i/sqrt(2)+1/sqrt(2))^2*r^2);
DI21:%=trigrat(%);
I21:subst([DI21],I2);
RZ1:z=R*%e^(%i*\theta);
DRZ1:diff(RZ1,\theta,1);
RFZ1:subst([RZ1],FZ1*rhs(DRZ1));
factor(trigrat(%));
trigrat(%);
I[3]='limit(%,R,inf);
I3:ev(%,limit);
I11+I21+I3;
rhs(%)=0;
%-sqrt(%pi)/2;
factor(%/(-(%i/sqrt(2)+1/sqrt(2))));
subst([r=x],%);
I4:lhs(%)=rectform(rhs(%));
realpart(I4);
-imagpart(I4);
```

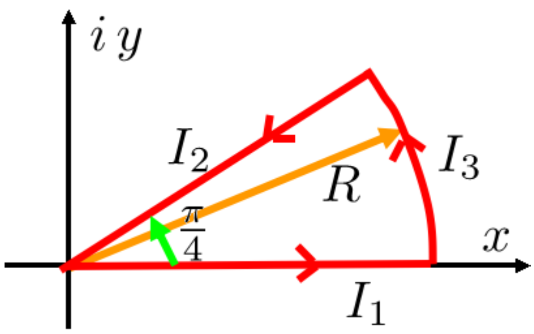


図 5.3.10: 閉積分

積分は次式の被積分関数を複素関数：f (z) で表すと、

$$\mathrm{f}(z) = e^{-z^2} \tag{5.3.50}$$

これを基に下記の積分を考える。

$$I_C = \oint e^{-z^2}\,dz \tag{5.3.51}$$

この積分で上図の積分経路:I_1, I_2, I_3 を考える。(5.3.51) 式の経路：I_1 では x 軸上の 0〜∞ の積分、$z = r$ として、積分値が得られ、

$$I_1 = \int_0^{\infty} e^{-r^2} dr = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \tag{5.3.52}$$

経路:I_2 では $\theta = \frac{\pi}{4}$ 上の $r = \infty$〜0 の積分で、$z = r\,e^{i\,\frac{\pi}{4}}$ として、

$$z = \left(\frac{i}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) r, \quad \frac{d}{d\,r}\,z = \frac{i}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

上記の結果から、

$$\begin{aligned} I_2 &= -\left(\frac{i}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \int_0^{\infty} e^{-\left(\frac{i}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 r^2} dr \\ &= -\left(\frac{i}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \int_0^{\infty} \cos\left(r^2\right) - i \sin\left(r^2\right) dr \end{aligned} \tag{5.3.53}$$

経路：I_3 は半径：R の円上で $\theta = 0$〜$\frac{\pi}{4}$ の積分となる。半径：R の円は次式で表現でき、

$$z = e^{i\,\theta}\,R, \quad \frac{d}{d\,\theta}\,z = i\,e^{i\,\theta}\,R$$

経路：I_3 の積分は上記の結果と積分変数を $z \to \theta$ に変更して、積分範囲では $\cos(2\,\theta) > 0$ で、$R \to \infty$ とすると、

$$\begin{aligned} I_3 &= \lim_{R\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{4}} i\,R\,e^{i\,\theta - e^{2\,i\,\theta}\,R^2}\,d\theta \\ &= \lim_{R\to\infty} \frac{i\,\left(\sin(\theta)\ R \sin\left(\sin(2\,\theta)\ R^2\right) + \cos(\theta)\ R \cos\left(\sin(2\,\theta)\ R^2\right)\right) + \cos(\theta)\ R \sin\left(\sin(2\,\theta)\ R^2\right) - \sin(\theta)\ R \cos\left(\sin(2\,\theta)\ R^2\right)}{e^{\cos(2\,\theta)\,R^2} \sin\left(\sin(2\,\theta)\ R^2\right)^2 + e^{\cos(2\,\theta)\,R^2} \cos\left(\sin(2\,\theta)\ R^2\right)^2} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{5.3.54}$$

積分経路内は正則であるから、$I_C = 0$ として、(5.3.52) 式、(5.3.53) 式、(5.3.54) 式から、

$$I_3 + I_2 + I_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \left(\frac{i}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \int_0^{\infty} \cos\left(r^2\right) - i \sin\left(r^2\right) dr = 0$$

上式を整理して、

$$-\left(\frac{i}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \int_0^{\infty} \cos\left(r^2\right) - i \sin\left(r^2\right) dr = -\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

上式から、$r \to x$ に変換して、

$$\int_0^{\infty} \cos\left(x^2\right) - i \sin\left(x^2\right) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{\frac{3}{2}}} - \frac{\sqrt{\pi}\,i}{2^{\frac{3}{2}}}$$

上式の実部から、

$$\int_0^{\infty} \cos\left(x^2\right) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{\frac{3}{2}}}$$

虚部から、

$$\int_0^{\infty} \sin\left(x^2\right) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{\frac{3}{2}}}$$

$$I=\int_{0}^{\infty }\frac{\sin \left({x}^{2}\right) }{x}dx \tag{5.3.55}$$

```
kill(all);
declare(z,complex);
depends(z,[x,y,\theta]);
assume(sin(2*\theta)>0);
assume(R>0);
I1:I='integrate(sin(x^2)/x,x,0,inf);
FZ1:%e^(%i*z^2)/z;
I1:I[1]='integrate(subst([z=x],FZ1),x,0,
 inf);
Z1:z=%i*y;
DZ1:diff(Z1,y,1);
I2:I[2]='integrate(subst([Z1],
 FZ1*rhs(DZ1)),y,inf,0);
I21:subst([y=x],%);
RZ1:z=R*%e^(%i*\theta);
DRZ1:diff(RZ1,\theta,1);
RFZ1:subst([RZ1],FZ1*rhs(DRZ1));
trigrat(%);
I[3]='limit(%,R,inf);
I3:ev(%,limit);
RE1:residue (FZ1, z, 0);
I4:I[4]=-2*%pi*%i*RE1/4;
I1+I21+I3+I4;
rhs(%)=0;
%+(%i*%pi)/2;
2*%i*integrate(sin(x^2)/x,x,0,inf)=rhs(%);
%/2/%i;
```

積分は次式の被積分関数を複素関数：$\mathrm{f}\left(z\right)$ で表すと、

$$\mathrm{f}\left(z\right) =\frac{{e}^{i\,{z}^{2}}}{z} \tag{5.3.56}$$

これを基に下記の積分を考える。

$$I_C=\oint \frac{{e}^{i\,{z}^{2}}}{z}\,dz \tag{5.3.57}$$

この積分で下図の積分経路：I_1, I_2, I_3, I_4 を考える。

(5.3.57) 式の経路：I_1 では x 軸上の 0〜∞ の積分で、$z=x$ として、

$$I_1=\int_{0}^{\infty }\frac{{e}^{i\,{x}^{2}}}{x}dx \tag{5.3.58}$$

経路：I_2 では y 軸上の ∞〜0 の積分で、$z=i\,y$ として、

$$z=i\,y,\quad \frac{d}{d\,y}\,z=i$$

経路：I_2 の積分は上記の結果と積分変数を $z\rightarrow y$ に変更し、更に y を x に変更し、

$$I_2=\int_{\infty }^{0}\frac{{e}^{-i\,{y}^{2}}}{y}dy=-\int_{0}^{\infty }\frac{{e}^{-i\,{x}^{2}}}{x}dx \tag{5.3.59}$$

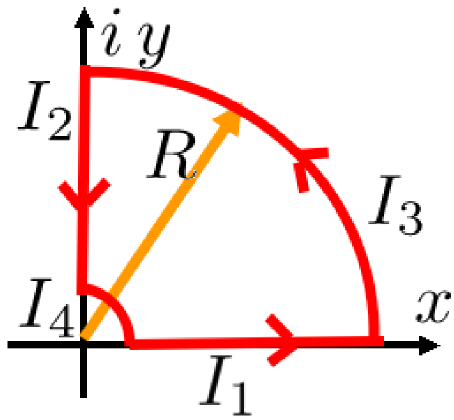


図 5.3.11: 閉積分

経路：I_3 は半径：R の円上で $\theta=0$〜$\frac{\pi}{2}$ の積分となる。半径：R の円は次式で表現でき、

$$z={e}^{i\,\theta }\,R,\quad \frac{d}{d\,\theta }\,z=i\,{e}^{i\,\theta }\,R$$

経路：I_3 の積分は上記の結果と積分変数を $z\rightarrow \theta$ に変更して、積分範囲では $\sin\left(2\,\theta\right)>0$ で、$R\rightarrow\infty$ とすると、

$$\begin{aligned}I_3&=\lim_{R\rightarrow \infty }\int_{0}^{\frac{\pi }{2}}i\,{e}^{i\,{e}^{2\,i\,\theta }\,{R}^{2}}\,d\theta \\ &=\lim_{R\rightarrow \infty }\int_{0}^{\frac{\pi }{2}}{e}^{-\sin \left(2\,\theta\right) \,{R}^{2}}\,\Big(i\cos \left(\cos \left(2\,\theta\right) \,{R}^{2}\right) \\ &\qquad -\sin \left(\cos \left(2\,\theta\right) \,{R}^{2}\right) \Big) \,d\theta \\ &=0\end{aligned} \tag{5.3.60}$$

経路：I_4 の積分は極：$z=0$ の留数から得られ、極：$z=0$ の留数は、Maxima の留数関数から得られ、

$$Res\left(\mathrm{f}\left(z\right) ,z=0\right) =1$$

$z=0$ まわりの積分：I_4 は積分の向きが反対で $\frac{1}{4}$ 周であるから、

$$I_4=-\frac{1}{4}\,2\,\pi \,i\,Res\left(\mathrm{f}\left(z\right) ,z=0\right) =-\frac{i\,\pi }{2} \tag{5.3.61}$$

積分経路内は正則であるから、$I_C=0$ として、(5.3.58) 式、(5.3.59) 式、(5.3.60) 式、(5.3.61) 式から、

$$I_4+I_3+I_2+I_1=\int_{0}^{\infty }\frac{{e}^{i\,{x}^{2}}}{x}dx-\int_{0}^{\infty }\frac{{e}^{-i\,{x}^{2}}}{x}dx-\frac{i\,\pi }{2}=0$$

上式を整理して、

$$\int_{0}^{\infty }\frac{{e}^{i\,{x}^{2}}}{x}dx-\int_{0}^{\infty }\frac{{e}^{-i\,{x}^{2}}}{x}dx=\frac{i\,\pi }{2}$$

上式から、

$$\int_{0}^{\infty }\frac{\sin \left({x}^{2}\right) }{x}dx=\frac{\pi }{4}$$

$$I=\int_{0}^{\infty}e^{-x^2}\cos\left(2\,a\,x\right)dx \quad a>0,b>0 \tag{5.3.62}$$

```
kill(all);
declare(z,complex);
depends(z,[x,y]);
assume(a>0);
assume(b>0);
I1:I='integrate(%e^(-x^2)*cos(2*a*x),x,0,
 inf);
FZ1:%e^(-z^2);
I1:I[1]='integrate(subst([z=x],FZ1),x,
 -inf,inf);
I11:ev(%,integrate);
Z1:z=x+%i*a;
I2:I[2]='integrate(subst([Z1],FZ1),x,
 inf,-inf);
trigrat(%);
subst([sin(2*a*x)=0],%);
I21:I[2]=-2*%e^(a^2)*'integrate(%e^(-x^2)
 *cos(2*a*x),x,0,inf);
Z3:z=b+%i*y;
I3:I[3]='integrate(subst([Z3],FZ1*%i),y,
 0,a);
rectform(%);
lhs(%)=limit(rhs(%),b,inf);
I31:I[3]=0;
Z4:z=-b+%i*y;
I4:I[4]='integrate(subst([Z4],FZ1*%i),y,
 a,0);
rectform(%);
lhs(%)=limit(rhs(%),b,inf);
I41:I[4]=0;
I11+I21+I31+I41;
rhs(%)=0;
%-sqrt(%pi);
%/(-2*%e^a^2);
```

積分は次式の被積分関数を複素関数：$\mathrm{f}\left(z\right)$ で表すと、

$$\mathrm{f}\left(z\right)=e^{-z^2} \tag{5.3.63}$$

これを基に下記の積分を考える。

$$I_C=\oint e^{-z^2}\,dz \tag{5.3.64}$$

この積分で下図の積分経路：I_1, I_2, I_3, I_4 を考える。(5.3.64) 式の経路：I_1 では x 軸上で、$z=x$ として、

$$I_1=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi} \tag{5.3.65}$$

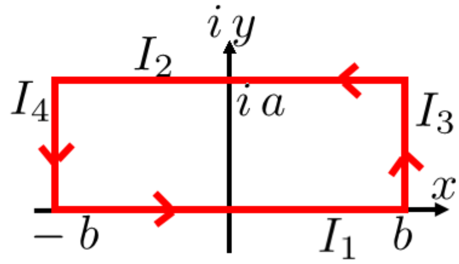


図 5.3.12: 閉積分

経路：I_2 では $y=i\,a$ 上の積分で、$z=x+i\,a$ として、

$$\begin{aligned}I_2=&\int_{\infty}^{-\infty}e^{-(x+i\,a)^2}dx\\ =&i\int_{-\infty}^{\infty}e^{a^2-x^2}\sin\left(2\,a\,x\right)dx\\ &-\int_{-\infty}^{\infty}e^{a^2-x^2}\cos\left(2\,a\,x\right)dx\end{aligned}$$

上式右辺第一項は奇関数の積分であるから零となり、

$$\begin{aligned}I_2&=-\int_{-\infty}^{\infty}e^{a^2-x^2}\cos\left(2\,a\,x\right)dx\\ &=-2\,e^{a^2}\int_{0}^{\infty}e^{-x^2}\cos\left(2\,a\,x\right)dx\end{aligned} \tag{5.3.66}$$

経路：I_3 では $x=b$ 上の積分で、$z=i\,y+b$ として、$b\to\infty$ とすると、

$$\begin{aligned}I_3&=\lim_{b\to\infty}i\int_{0}^{a}e^{-(i\,y+b)^2}dy\\ &=\lim_{b\to\infty}\int_{0}^{a}e^{y^2-b^2}\sin\left(2\,b\,y\right)dy\\ &\quad+i\int_{0}^{a}e^{y^2-b^2}\cos\left(2\,b\,y\right)dy=0\end{aligned} \tag{5.3.67}$$

経路：I_4 では $x=-b$ 上の積分で、$z=i\,y-b$ として、$b\to\infty$ とすると、

$$\begin{aligned}I_4&=\lim_{b\to\infty}i\int_{a}^{0}e^{-(i\,y-b)^2}dy\\ &=\lim_{b\to\infty}\int_{0}^{a}e^{y^2-b^2}\sin\left(2\,b\,y\right)dy\\ &\quad-i\int_{0}^{a}e^{y^2-b^2}\cos\left(2\,b\,y\right)dy=0\end{aligned} \tag{5.3.68}$$

積分経路内は正則であるから、$I_C=0$ として、(5.3.65) 式、(5.3.66) 式、(5.3.67) 式、(5.3.68) 式から、

$$I_4+I_3+I_2+I_1=\sqrt{\pi}-2\,e^{a^2}\int_{0}^{\infty}e^{-x^2}\cos\left(2\,a\,x\right)dx=0$$

上式を整理して、

$$-2\,e^{a^2}\int_{0}^{\infty}e^{-x^2}\cos\left(2\,a\,x\right)dx=-\sqrt{\pi}$$

上式から、

$$\int_{0}^{\infty}e^{-x^2}\cos\left(2\,a\,x\right)dx=\frac{\sqrt{\pi}\,e^{-a^2}}{2}$$

5.4　複素解析 (流体力学への応用)

ここでは複素解析の基本の例を示す。他の多くの例については、「Maxima を使った流体力学基礎演習[1]」を参照願います。

5.4.1　2 次元速度ポテンシャルと流れ関数

(1) 流れ関数の関係式

下図点 A から点 P までの任意の面を考える。この面を左から右に通過する流量は $\Psi = \int_A^P v_n ds$ で、検査面によって変化しない。Ψ は点 P の位置の関数で、流線に沿って点 P を移動させても、流線を通過して流れる流れはないので、Ψ は一定である。これから $\Psi =$ 一定は流線を表す。

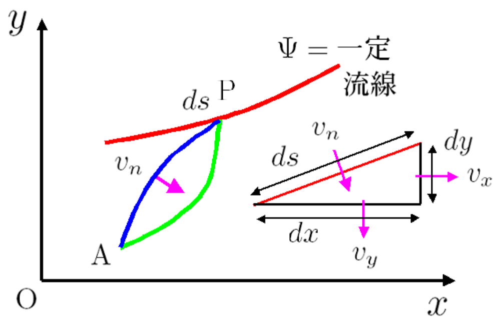


図 5.4.1: 2 次元流れ関数

```
/* 二次元の流れの関数  */
kill(all);
load("vect")
depends(\Psi,[x,y]);
depends(\Phi,[x,y]);
STF1:\Psi='integrate(v[n],s,A,P);
\Psi+v[n]*ds=\Psi+'diff(\Psi,s,1)*ds;
STFN:solve(%,v[n])[1];
\Psi+v[x]*dy=\Psi+'diff(\Psi,y,1)*dy;
STFX:solve(%,v[x])[1];
\Psi-v[y]*dx=\Psi+'diff(\Psi,x,1)*dx;
STFY:solve(%,v[y])[1];
\Psi+v[r]*r*dt=\Psi+'diff(\Psi,t,1)/r*dt*r;
solve(%,v[r])[1];
STFR:subst([t=\theta,y=r*sin(\theta)],%);
\Psi-v[\theta]*dr=\Psi+'diff(\Psi,r,1)*dr;
solve(%,v[\theta])[1];
STFT:subst([y=r*sin(\theta)],%);
```

Ψ が流量を表すので、dy、dx 間での流量変化の関係は、

$$dy\, v_x + \Psi = dy \left(\frac{d}{d\,y}\,\Psi\right) + \Psi$$

$$\Psi - dx\, v_y = dx \left(\frac{d}{d\,x}\,\Psi\right) + \Psi$$

上記から、

$$v_x = \frac{d}{d\,y}\,\Psi, \quad v_y = -\frac{d}{d\,x}\,\Psi \tag{5.4.1}$$

極座標：r, θ の流れ関数と流速の関係は、

$$dt\, r\, v_r + \Psi = dt \left(\frac{d}{d\,t}\,\Psi\right) + \Psi$$

$$\Psi - dr\, v_\theta = dr \left(\frac{d}{d\,r}\,\Psi\right) + \Psi$$

上記から、

$$v_r = \frac{\frac{d}{d\,\theta}\,\Psi}{r}, \quad v_\theta = -\frac{d}{d\,r}\,\Psi \tag{5.4.2}$$

```
CIR1:\omega='diff(v[y],x,1)
 -'diff(v[x],y,1);
subst([STFX,STFY,\omega=0],CIR1);
ev(%,diff);
-rhs(%)=lhs(%);
```

渦度：ω は次式で表現でき、完全流体では $\omega = 0$ である。

$$\omega = \frac{d}{d\,x}\,v_y - \frac{d}{d\,y}\,v_x$$

上式に (5.4.1) 式を代入し流れ関数の関係式を得る。

$$\frac{d^2}{d\,y^2}\,\Psi + \frac{d^2}{d\,x^2}\,\Psi = 0 \tag{5.4.3}$$

(1) 速度ポテンシャルの関係式

```
PODX:v[x]=diff(\Phi,x,1);
PODY:v[y]=diff(\Phi,y,1);
rhs(PODX)=rhs(STFX);
rhs(PODY)=rhs(STFY);
```

速度ポテンシャルの定義から、

$$v_x = \frac{d}{d\,x}\,\Phi, \quad v_y = \frac{d}{d\,y}\,\Phi \tag{5.4.4}$$

速度ポテンシャルの関係式は質量保存の式から、

$$\frac{d^2}{d\,y^2}\,\Phi + \frac{d^2}{d\,x^2}\,\Phi = 0 \tag{5.4.5}$$

(5.4.1) 式と (5.4.4) 式から速度ポテンシャルと流れ関数の関係は、

$$\frac{d}{d\,x}\,\Phi = \frac{d}{d\,y}\,\Psi, \quad \frac{d}{d\,y}\,\Phi = -\frac{d}{d\,x}\,\Psi \tag{5.4.6}$$

極座標：r, θ の速度ポテンシャルと流速の関係は、

[1]溝口純敏：Maxima を使った流体力学基礎演習ノート 、http://www9.plala.or.jp/alcwitchery/

```
/*座標変換　二次元極座標へ*/
/*r-theta co-ordinate*/
kill(all);
load("vect")
depends(r,[t,x,y]);
depends(\theta,[t,x,y]);
XR:x=r*cos(\theta);
YR:y=r*sin(\theta);
LXR1:diff(XR,x,1);
LYR1:diff(YR,x,1);
solve([LXR1,LYR1],['diff(r,x,1),
  'diff(\theta,x,1)]);
LXYR1:trigrat(%)[1];
LXR2:diff(XR,y,1);
LYR2:diff(YR,y,1);
solve([LXR2,LYR2],['diff(r,y,1),
  'diff(\theta,y,1)]);
LXYR2:trigrat(%)[1];
TR:matrix([cos(\theta),sin(\theta)],
  [-sin(\theta),cos(\theta)]);
depends(\Phi,[r,\theta]);
ADFX1:'diff(\Phi,x,1)=diff(\Phi,x,1);
ADFX2:subst(LXYR1,%);
ADFY1:'diff(\Phi,y,1)=diff(\Phi,y,1);
ADFY2:subst(LXYR2,%);
expand(TR.matrix([rhs(ADFX2)],
 [rhs(ADFY2)]));
GRADA:trigrat(%);
```

上記で$が記入できないので、Maxima 実行時には load(”vect”) →load(”vect”)$として実行願う。

二次元の xy 座標と極座標の関係は、

$$x = r\cos(\theta), \quad y = r\sin(\theta)$$

上記の関係から、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\,r =& \cos(\theta), \frac{d}{dx}\,\theta = -\frac{\sin(\theta)}{r} \\ \frac{d}{dy}\,r =& \sin(\theta), \frac{d}{dy}\,\theta = \frac{\cos(\theta)}{r} \end{aligned} \tag{5.4.7}$$

速度の xy 成分は、

$$\begin{aligned} v_x =& \frac{d}{dx}\,\Phi = \left(\frac{d}{d\theta}\,\Phi\right)\left(\frac{d}{dx}\,\theta\right) + \left(\frac{d}{dr}\,\Phi\right)\left(\frac{d}{dx}\,r\right) \\ v_y =& \frac{d}{dy}\,\Phi = \left(\frac{d}{d\theta}\,\Phi\right)\left(\frac{d}{dy}\,\theta\right) + \left(\frac{d}{dr}\,\Phi\right)\left(\frac{d}{dy}\,r\right) \end{aligned} \tag{5.4.8}$$

座標から極座標に変換する下記の変換マトリックスを掛けることにより、速度の円柱座標表示を得ることができる。

$$TR = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

上式に (5.4.7) 式および (5.4.8) 式を代入し、変換マトリックスを掛けることにより、下記の極座標表記が得られる。

$$\begin{pmatrix} v_r \\ v_\theta \end{pmatrix} = \left(TR\right)\begin{pmatrix} \frac{d}{dx}\,\Phi \\ \frac{d}{dy}\,\Phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{dr}\,\Phi \\ \frac{\frac{d}{d\theta}\,\Phi}{r} \end{pmatrix} \tag{5.4.9}$$

5.4.2　一様な流れ

流速：U で x 軸と θ の角度を持つ一様な流れの複素速度ポテンシャル：$F(z)$ を求める。

```
/* 一様な流れ */
kill(all);
declare(z,complex);
assume(U>0);
F1:F(z)=\Phi+%i*\Psi;
FD1:diff(F(z),z,1)=v[x]-%i*v[y];
VX:v[x]=U*cos(\theta);
VY:v[y]=U*sin(\theta);
subst([VX,VY],FD1);
FD2:lhs(%)=polarform(rhs(%));
subst([atan2(sin(theta)*U,cos(theta)*U)
  =\theta],%);
trigsimp(%);
ode2(%,F(z),z);
subst([%c=0],%);
```

(5.2.5) 式から複素速度ポテンシャルは、

$$F(z) = i\,\Psi + \Phi$$

(5.2.9) 式から複素速度ポテンシャルと流速の関係は、

$$\frac{d}{d\,z}\,F(z) = v_x - i\,v_y$$

流速:U で x 軸と θ の角度を持つ x, y 軸の流速の関係は、

$$v_x = \cos(\theta)\,U, \quad v_y = \sin(\theta)\,U$$

上式を代入し、

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\,z}\,\mathrm{F}(z) =& \cos(\theta)\,U - i\sin(\theta)\,U \\ =& e^{-i\,\theta}\sqrt{\sin(\theta)^2\,U^2 + \cos(\theta)^2\,U^2} \\ =& e^{-i\,\theta}\,U\end{aligned}$$

上式を解いて、一様流の複素速度ポテンシャルは下記となる。

$$\mathrm{F}(z) = e^{-i\,\theta}\,z\,U \tag{5.4.10}$$

5.4.3　わき出し

(1) 速度ポテンシャルの二次元質量保存の式から

原点にわき出しを置いた場合、流れは下図のように原点対称となる。この流れを速度ポテンシャルの二次元質量保存の式から求める。

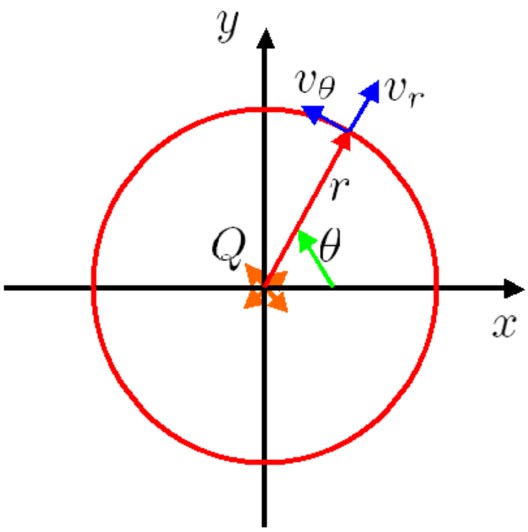


図 5.4.2: 2 次元わき出し

```
/*座標変換　二次元極座標へ → わき出し*/
kill(all);
load("vect")
depends(r,[t,x,y]);
depends(\theta,[t,x,y]);
XR:x=r*cos(\theta);
YR:y=r*sin(\theta);
LXR1:diff(XR,x,1);
LYR1:diff(YR,x,1);
```

二次元の xy 座標と極座標の関係は、

$$x = r\cos(\theta), \quad y = r\sin(\theta)$$

上記の関係から、

$$\frac{d}{d\,x}\,r = \cos(\theta), \; \frac{d}{d\,x}\,\theta = -\frac{\sin(\theta)}{r}$$

$$\frac{d}{d\,y}\,r = \sin(\theta), \; \frac{d}{d\,y}\,\theta = \frac{\cos(\theta)}{r}$$

$$\frac{d^2}{d\,x^2}\,r = \frac{\sin(\theta)^2}{r}, \; \frac{d^2}{d\,x^2}\,\theta = \frac{2\cos(\theta)\,\sin(\theta)}{r^2}$$

$$\frac{d^2}{d\,y^2}\,r = \frac{\cos(\theta)^2}{r}, \; \frac{d^2}{d\,y^2}\,\theta = -\frac{2\cos(\theta)\,\sin(\theta)}{r^2}$$

速度ポテンシャルの二次元質量保存の式は、

$$\frac{d^2}{d\,y^2}\,\Phi + \frac{d^2}{d\,x^2}\,\Phi = 0$$

上記の各項を展開する。$\frac{d^2}{d\,x^2}\,\Phi$ の展開は下記となる。

$$\frac{d^2}{d\,x^2}\,\Phi=\left(\frac{d}{d\,\theta}\,\Phi\right)\,\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,\theta\right)+\left(\frac{d}{d\,x}\,\theta\right)\,\left(\left(\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,\Phi\right)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\theta\right)\right.$$
$$\left.+\left(\frac{d^2}{d\,r\,d\,\theta}\,\Phi\right)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,r\right)\right)+\left(\frac{d}{d\,x}\,r\right)\,\left(\left(\frac{d^2}{d\,r\,d\,\theta}\,\Phi\right)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\theta\right)\right.$$
$$\left.+\left(\frac{d^2}{d\,r^2}\,\Phi\right)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,r\right)\right)+\left(\frac{d}{d\,r}\,\Phi\right)\,\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,r\right)$$

```
solve([LXR1,LYR1],['diff(r,x,1),
 'diff(\theta,x,1)]);
LXYR1:trigrat(%)[1];
LXR2:diff(XR,y,1);
LYR2:diff(YR,y,1);
solve([LXR2,LYR2],['diff(r,y,1),
 'diff(\theta,y,1)]);
LXYR2:trigrat(%)[1];
depends(\Phi,[r,\theta]);
/* nabla^2 */
NABA:'diff(\Phi,x,2)+'diff(\Phi,y,2)=0;
ADDFX1:'diff(\Phi,x,2)=diff(\Phi,x,2);
ADFDX2:subst(LXYR1,%);
ADFDY1:'diff(\Phi,y,2)=diff(\Phi,y,2);
ADFDY2:subst(LXYR2,%);
LXDDR1:diff(XR,x,2);
LXDDR2:subst(LXYR1,%);
LYDDR1:diff(YR,x,2);
LYDDR2:subst(LXYR1,%);
solve([LXDDR2,LYDDR2],['diff(r,x,2),
 'diff(\theta,x,2)])[1];
NABRAX:subst(%,ADFDX2);
LXDDR11:diff(XR,y,2);
LXDDR21:subst(LXYR2,%);
LYDDR11:diff(YR,y,2);
LYDDR21:subst(LXYR2,%);
solve([LXDDR21,LYDDR21],['diff(r,y,2),
 'diff(\theta,y,2)])[1];
NABRAY:subst(%,ADFDY2);
NABRA1:subst([NABRAX,NABRAY],NABA);
NABRA2:expand(trigrat(expand(%)));
NABRA3:first(lhs(NABRA2))+last(lhs(NABRA2))
  =0;
ode2(NABRA3,\Phi,r);
```

上式を整理し、原点対象とすると、二次元質量保存の式は下記となり、速度ポテンシャル：Φ は、

$$\frac{\frac{d}{d\,r}\,\Phi}{r}+\frac{d^2}{d\,r^2}\,\Phi=0,\quad \Phi=\%k1\log\left(r\right)+\%k2$$

(2) 複素ポテンシャル

(5.4.2) 式、(5.4.9) 式から流速と速度ポテンシャル、流れ関数の関係は、

$$v_r=\frac{d}{d\,r}\,\Phi,\quad v_\theta=\frac{\frac{d}{d\,\theta}\,\Phi}{r},\quad v_r=\frac{\frac{d}{d\,\theta}\,\Psi}{r},\quad v_\theta=-\frac{d}{d\,r}\,\Psi$$

```
/* わき出し  */
kill(all);
depends(\Phi,[r,\theta]);
depends(\Psi,[r,\theta]);
declear(z,complex);
declear(F,complex);
VRP:v[r]=diff(\Phi,r,1);
VTP:v[\theta]=diff(\Phi,\theta,1)/r;
VRS:v[r]=diff(\Psi,\theta,1)/r;
VTS:v[\theta]=-diff(\Psi,r,1);
Q1:Q=2*%pi*r*v[r];
VR:solve(%,v[r])[1];
VT:v[\theta]=0;
PH1:subst([VRP],VR);
ode2(PH1,\Phi,r);
PH2:subst([%c=0],%);
PS1:expand(subst([VRS],VR)*r);
PS2:\Psi=integrate(rhs(PS1),\theta);
F=\Phi+%i*\Psi;
F1:subst([PH2,PS2],%);
Z1:z=r*%e^(%i*\theta);
Z2:solve(Z1,r)[1];
subst([Z2],F1);
radcan(%);
subst([Q=m*2*%pi],%);
```

わき出しの流量：Q と半径：r における v_r, v_θ の関係は、

$$Q=2\,\pi\,r\,v_r,\quad v_\theta=0$$

速度ポテンシャル：Φ と流速：v_r の関係から、

$$\frac{d}{d\,r}\,\Phi=\frac{Q}{2\,\pi\,r},\quad \Phi=\frac{\log\left(r\right)\,Q}{2\,\pi}$$

流れ関数：Ψ と流速：v_r の関係から、

$$\frac{d}{d\,\theta}\,\Psi=\frac{Q}{2\,\pi},\quad \Psi=\frac{\theta\,Q}{2\,\pi}$$

複素速度ポテンシャルは、

$$F=i\,\Psi+\Phi,\quad z=r\,e^{i\,\theta}$$

上記の関係から、

$$\begin{aligned}F=&\frac{i\,\theta\,Q}{2\,\pi}+\frac{\log\left(r\right)\,Q}{2\,\pi}=\frac{\log\left(e^{-i\,\theta}\,z\right)\,Q}{2\,\pi}+\frac{i\,\theta\,Q}{2\,\pi}\\=&\frac{\log\left(z\right)\,Q}{2\,\pi}\end{aligned}$$

上記からわき出し強さ：m とすると、わき出しの複素速度ポテンシャル：F は、

$$F=m\log\left(z\right),\quad m=\frac{Q}{2\,\pi}\tag{5.4.11}$$

5.4.4 二重わき出し

x 軸から角度：α の位置：z_0 に強さ：m のわき出しを置き、原点に $-m$ のわき出しを置く。z_0 を原点に近づけることにより二重わき出しの複素ポテンシャルを求める。

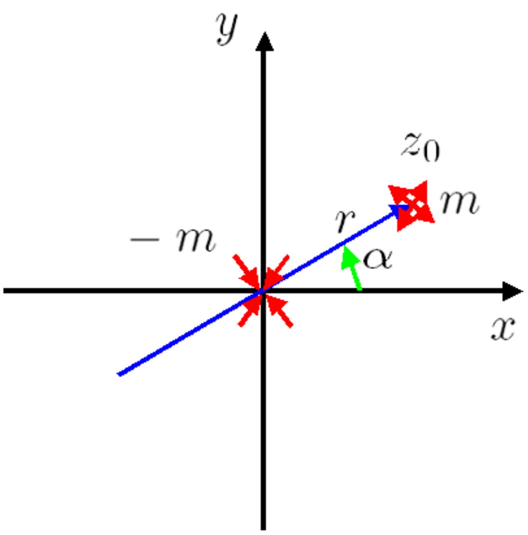


図 5.4.3: 2 次元二重わき出し

```
/*  二重わき出し  */
kill(all);
declare(z,complex);
F1:F=m*log(z-z[0])-m*log(z);
logcontract(F1);
F2:expand(%);
subst([z[0]=z[1]*z],%);
lhs(%)=taylor(rhs(%),z[1],0,5);
subst([z[1]=z[0]/z],%);
subst([z[0]=r*%e^(%i*\alpha)],%);
subst([m=\mu/r],%);
limit(%,r,0);
```

(5.4.11) 式から二重わき出しの複素ポテンシャル：F は下記となる。

$$\begin{aligned} F =& m\log\left(z-z_0\right) - m\log\left(z\right) \\ =& m\log\left(1-\frac{z_0}{z}\right) \end{aligned}$$

$\frac{z_0}{z}$ で Taylor 展開すると、

$$F = -\frac{z_0\,m}{z} - \frac{z_0^2\,m}{2\,z^2} - \frac{z_0^3\,m}{3\,z^3} - \frac{z_0^4\,m}{4\,z^4} - \frac{z_0^5\,m}{5\,z^5} + \ldots$$

ここで、

$$z_0 = r\,e^{i\,\alpha}$$

これを上式に代入し、

$$\begin{aligned} F = &-\frac{e^{i\,\alpha}\,m\,r}{z} - \frac{e^{2\,i\,\alpha}\,m\,r^2}{2\,z^2} - \frac{e^{3\,i\,\alpha}\,m\,r^3}{3\,z^3} \\ &- \frac{e^{4\,i\,\alpha}\,m\,r^4}{4\,z^4} - \frac{e^{5\,i\,\alpha}\,m\,r^5}{5\,z^5} + \ldots \end{aligned}$$

$m \to \infty, r \to 0$ の時、$mr \to \mu$ とすると、

$$\begin{aligned} F = &-\frac{e^{i\,\alpha}\,\mu}{z} - \frac{e^{2\,i\,\alpha}\,\mu\,r}{2\,z^2} - \frac{e^{3\,i\,\alpha}\,\mu\,r^2}{3\,z^3} - \frac{e^{4\,i\,\alpha}\,\mu\,r^3}{4\,z^4} \\ &- \frac{e^{5\,i\,\alpha}\,\mu\,r^4}{5\,z^5} + \ldots \\ &\to \quad -\frac{e^{i\,\alpha}\,\mu}{z} \end{aligned}$$

以上から、二重わき出し強さ：μ とすると、二重わき出しの複素ポテンシャル：F は下記となる。

$$F = -\frac{e^{i\,\alpha}\,\mu}{z} \tag{5.4.12}$$

5.4.5 渦糸

原点に渦循環強さ：Γ の渦糸を置いた場合の複素ポテンシャルを求める。

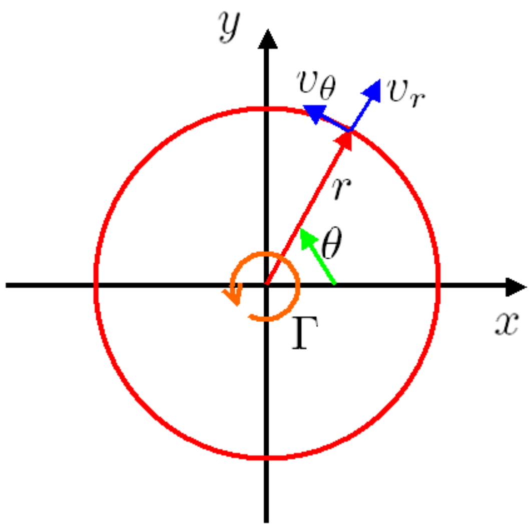


図 5.4.4: 渦糸

```
/*  渦糸  */
kill(all);
depends(\Phi,[r,\theta]);
depends(\Psi,[r,\theta]);
declear(z,complex);
declear(F,complex);
VRP:v[r]=diff(\Phi,r,1);
VTP:v[\theta]=diff(\Phi,\theta,1)/r;
VRS:v[r]=diff(\Psi,\theta,1)/r;
VTS:v[\theta]=-diff(\Psi,r,1);
G1:\gamma=2*%pi*r*v[\theta];
VT:solve(G1,v[\theta])[1];
PH1:subst([VTP],VT);
PH2:\Phi=integrate(rhs(PH1)*r,\theta);
PS1:subst([VTS],VT);
ode2(PS1,\Psi,r);
PS2:subst([%c=0],%);
F=\Phi+%i*\Psi;
F1:subst([PH2,PS2],%);
Z1:z=r*%e^(%i*\theta);
Z2:solve(Z1,r)[1];
subst([Z2],F1);
radcan(%);
subst([\gamma=\kappa*2*%pi],%);
```

(5.4.2) 式、(5.4.9) 式から流速と速度ポテンシャル、流れ関数の関係は、

$$v_r = \frac{d}{d\,r}\,\Phi,\quad v_\theta = \frac{\frac{d}{d\,\theta}\,\Phi}{r},\quad v_r = \frac{\frac{d}{d\,\theta}\,\Psi}{r},\quad v_\theta = -\frac{d}{d\,r}\,\Psi$$

渦循環：Γ と半径：r における v_r, v_θ の関係は、

$$v_r = 0,\quad \Gamma = 2\,\pi\,r\,v_\theta$$

速度ポテンシャル：Φ と流速：v_θ の関係から、

$$\frac{\frac{d}{d\,\theta}\,\Phi}{r} = \frac{\Gamma}{2\,\pi\,r}$$

$$\Phi = \frac{\theta\,\Gamma}{2\,\pi}$$

流れ関数：Ψ と流速：v_θ の関係から、

$$-\frac{d}{d\,r}\,\Psi = \frac{\Gamma}{2\,\pi\,r}$$

$$\Psi = -\frac{\log(r)\,\Gamma}{2\,\pi}$$

複素速度ポテンシャルは、

$$F = i\,\Psi + \Phi,\quad z = r\,e^{i\,\theta}$$

上記の関係から、

$$F = -\frac{i\log(r)\,\Gamma}{2\,\pi} + \frac{\theta\,\Gamma}{2\,\pi} = -\frac{i\log\left(e^{-i\,\theta}\,z\right)\,\Gamma}{2\,\pi} + \frac{\theta\,\Gamma}{2\,\pi}$$
$$= -\frac{i\log(z)\,\Gamma}{2\,\pi}$$

上記から渦糸の複素速度ポテンシャル：F は、

$$F = -i\,\kappa\log(z)\,,\quad \kappa = \frac{\Gamma}{2\,\pi} \tag{5.4.13}$$

5.4.6　写像：角を曲がる流れ

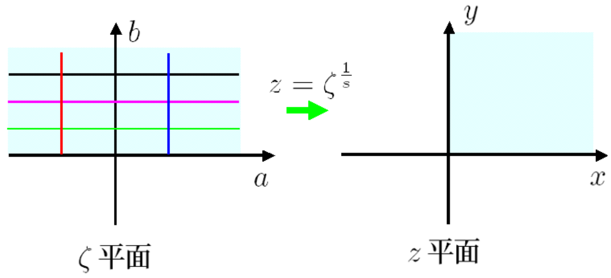


図 5.4.5: 角を曲がる流れ

```
/*  角を曲がる流れ  */
kill(all);
declare(z,complex);
declare(\zeta,complex);
assume(s>0);
assume(\zeta>0);
G0:\zeta=a+%i*b;
G1:\zeta=z^s;
Z1:solve(G1,z)[1];
Z2:subst([G0],Z1);
X1:x=realpart(rhs(Z2));
Y1:y=imagpart(rhs(Z2));
```

ζ 平面から z 平面への変換関数として、下記を考える、

$$\zeta=z^s,\quad z=\zeta^{\frac{1}{s}} \tag{5.4.14}$$

ζ 平面では、下記のように表現できる。

$$\zeta=i\,b+a$$

上式を (5.4.14) 式に代入し、ζ 平面の座標：(a,b) が z 平面でどのように変換されるかを求める。

$$z=(i\,b+a)^{\frac{1}{s}}$$

上式の実数部と虚数部から x,y 座標が得られる。

$$x=\left(b^2+a^2\right)^{\frac{1}{2\,s}}\cos\left(\frac{\operatorname{atan2}(b,a)}{s}\right)$$

$$y=\left(b^2+a^2\right)^{\frac{1}{2\,s}}\sin\left(\frac{\operatorname{atan2}(b,a)}{s}\right)$$

図 5.4.5 の ζ 平面上で、$a=$ 一定、$b=$ 一定の直線が z 平面でどのように変換されるかの例を下記に示す。

```
X21:subst([s=2,b=2],rhs(X1));
Y21:subst([s=2,b=2],rhs(Y1));
X22:subst([s=2,b=4],rhs(X1));
Y22:subst([s=2,b=4],rhs(Y1));
X23:subst([s=2,b=6],rhs(X1));
Y23:subst([s=2,b=6],rhs(Y1));
X24:subst([s=2,a=0],rhs(X1));
Y24:subst([s=2,a=0],rhs(Y1));
X25:subst([s=2,a=4],rhs(X1));
Y25:subst([s=2,a=4],rhs(Y1));
X26:subst([s=2,a=-4],rhs(X1));
Y26:subst([s=2,a=-4],rhs(Y1));
XY1:[[0,0],[10,0]];
XY2:[[0,0],[10*cos(%pi/2),10*sin(%pi/2)]];
plot2d([[discrete,XY1],[discrete,XY2],
 [parametric,X21,Y21,[a,-100,100],
  [nticks,300]],
 [parametric,X22,Y22,[a,-100,100],
  [nticks,300]],
 [parametric,X23,Y23,[a,-100,100],
  [nticks,300]],
 [parametric,X24,Y24,[b,0.01,100],
  [nticks,300]],
 [parametric,X25,Y25,[b,0.01,100],
  [nticks,300]],
 [parametric,X26,Y26,[b,0.01,100],
  [nticks,300]]],
 [x,-1,10],[y,-1,5]);
```

下記に、$s=2,4,3/2,2/3$ とした場合の変換結果を以下に示す。各変換のプログラムは上記プログラムの数字を変えるだけなので、省略する。

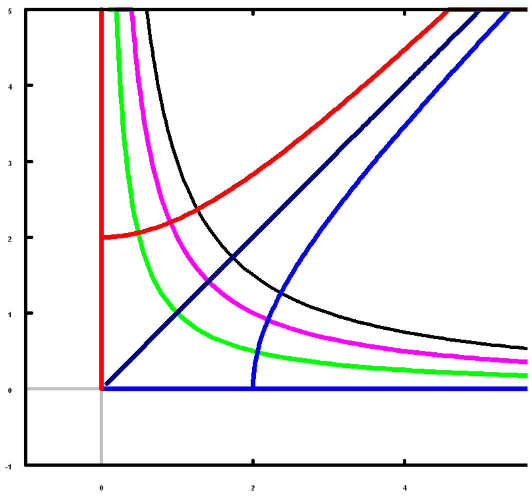


図 5.4.6: z 平面 (s=2)

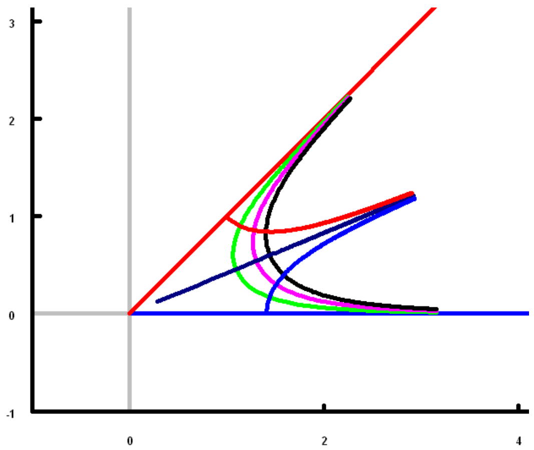


図 5.4.7: z 平面 (s=4)

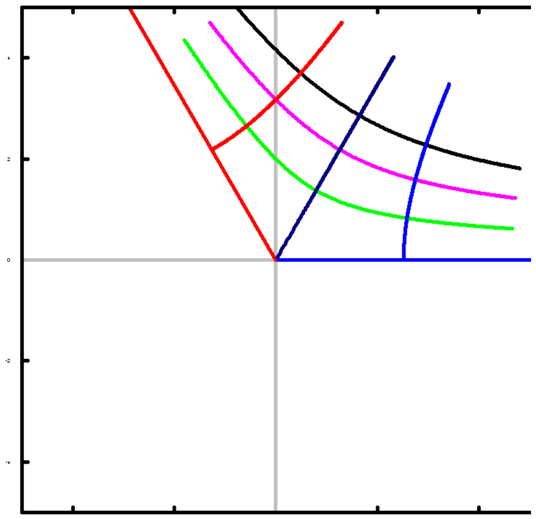


図 5.4.8: z 平面 (s=3/2)

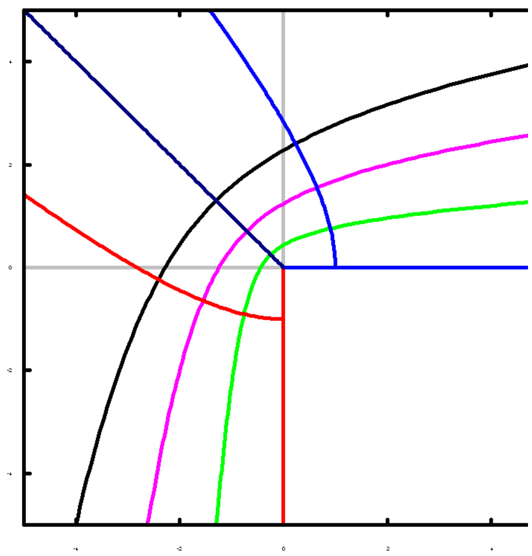


図 5.4.9: z 平面 (s=2/3)

5.4.7　写像:平板･楕円変換 (Joukowski 変換)

```
/*  円→楕円変換(Joukowski 変換)  */
kill(all);
declare(z,complex);
declare(\zeta,complex);
assume(A>0);
Z1:z=\zeta+A^2/\zeta;
G0:\zeta=R*%e^(%i*\theta);
Z2:subst([G0],Z1);
E10:%e^(%i*\theta);
E11:E10=rectform(E10);
E20:%e^(-%i*\theta);
E21:E20=rectform(E20);
subst([E21],Z2);
Z3:subst([E11],%);
X1:x=factor(realpart(rhs(Z3)));
Y1:y=factor(imagpart(rhs(Z3)));
C1:solve(X1,cos(\theta))[1];
S1:solve(Y1,sin(\theta))[1];
CS1:C1^2+S1^2;
CS2:trigsimp(lhs(CS1))=rhs(CS1);
```

変換関数として、下記を考える。

$$z=\zeta+\frac{A^2}{\zeta} \tag{5.4.15}$$

ζ 平面上で半径 : R の円が z 平面でどうなるかを調べる。ζ 平面上の点を下記の関数で表現する。

$$\zeta=e^{i\,\theta}\,R \tag{5.4.16}$$

このとき、a,b 座標は下記となる。

$$a=\cos\left(\theta\right)\,R,\quad b=\sin\left(\theta\right)\,R$$

(5.4.16) 式を (5.4.15) 式に代入し、ζ 平面上の点を z 平面上に変換する。

$$z=e^{i\,\theta}\,R+\frac{e^{-i\,\theta}\,A^2}{R}$$

ところで、下記の関係が成り立つので、

$$e^{i\,\theta}=i\sin\left(\theta\right)+\cos\left(\theta\right),\quad e^{-i\,\theta}=\cos\left(\theta\right)-i\sin\left(\theta\right)$$

上式に代入し、

$$z=\left(i\sin\left(\theta\right)+\cos\left(\theta\right)\right)\,R+\frac{\left(\cos\left(\theta\right)-i\sin\left(\theta\right)\right)\,A^2}{R}$$

x,y 座標は、

$$x=\frac{\cos\left(\theta\right)\,\left(R^2+A^2\right)}{R}$$

$$y=\frac{\sin\left(\theta\right)\,\left(R-A\right)\,\left(R+A\right)}{R}$$

x,y 座標を次式のように変換する。

$$\sin\left(\theta\right)^2+\cos\left(\theta\right)^2=\frac{x^2\,R^2}{\left(R^2+A^2\right)^2}+\frac{y^2\,R^2}{\left(R^2-A^2\right)^2}$$

$$1=\frac{x^2\,R^2}{\left(R^2+A^2\right)^2}+\frac{y^2\,R^2}{\left(R^2-A^2\right)^2}$$

上式は明らかに楕円を表す式であり、ζ 平面上で半径 : R の円が z 平面で楕円に変換される。

ζ 平面上で半径 : R の円および、θ : 一定の線を描くプログラムを下記に示す。

```
A1:a=realpart(rhs(G0));
B1:b=imagpart(rhs(G0));
AA:subst([\theta=t],A1);
BB:subst([\theta=t],B1);
X21:subst([R=1],rhs(AA));
Y21:subst([R=1],rhs(BB));
X22:subst([R=2],rhs(AA));
Y22:subst([R=2],rhs(BB));
X23:subst([R=4],rhs(AA));
Y23:subst([R=4],rhs(BB));
X24:subst([t=%pi/4],rhs(AA));
Y24:subst([t=%pi/4],rhs(BB));
X25:subst([t=%pi/2],rhs(AA));
Y25:subst([t=%pi/2],rhs(BB));
X26:subst([t=3*%pi/4],rhs(AA));
Y26:subst([t=3*%pi/4],rhs(BB));
plot2d([
 [parametric,X21,Y21,[t,0.01,6.28],
  [nticks,300]],
 [parametric,X22,Y22,[t,0.01,6.28],
  [nticks,300]],
 [parametric,X23,Y23,[t,0.01,6.28],
  [nticks,300]],
 [parametric,X24,Y24,[R,1,6],[nticks,300]],
 [parametric,X25,Y25,[R,1,6],[nticks,300]],
 [parametric,X26,Y26,[R,1,6],[nticks,300]]
 ],[x,-5,5],[y,-5,5]);
```

z 平面で R の円および、θ : 一定の線がどのようにな
るかのプログラムを下記に示す。。

```
XX:subst([\theta=t],X1);
YY:subst([\theta=t],Y1);
X21:subst([A=1,R=1],rhs(XX));
Y21:subst([A=1,R=1],rhs(YY));
X22:subst([A=1,R=2],rhs(XX));
Y22:subst([A=1,R=2],rhs(YY));
X23:subst([A=1,R=4],rhs(XX));
Y23:subst([A=1,R=4],rhs(YY));
X24:subst([A=1,t=%pi/4],rhs(XX));
Y24:subst([A=1,t=%pi/4],rhs(YY));
X25:subst([A=1,t=%pi/2],rhs(XX));
Y25:subst([A=1,t=%pi/2],rhs(YY));
X26:subst([A=1,t=3*%pi/4],rhs(XX));
Y26:subst([A=1,t=3*%pi/4],rhs(YY));
plot2d([
 [parametric,X21,Y21,[t,0.01,6.28],
  [nticks,300]],
 [parametric,X22,Y22,[t,0.01,6.28],
  [nticks,300]],
 [parametric,X23,Y23,[t,0.01,6.28],
  [nticks,300]],
 [parametric,X24,Y24,[R,1,6],[nticks,300]],
 [parametric,X25,Y25,[R,1,6],[nticks,300]],
 [parametric,X26,Y26,[R,1,6],[nticks,300]]
 ],[x,-5,5],[y,-5,5]);
```

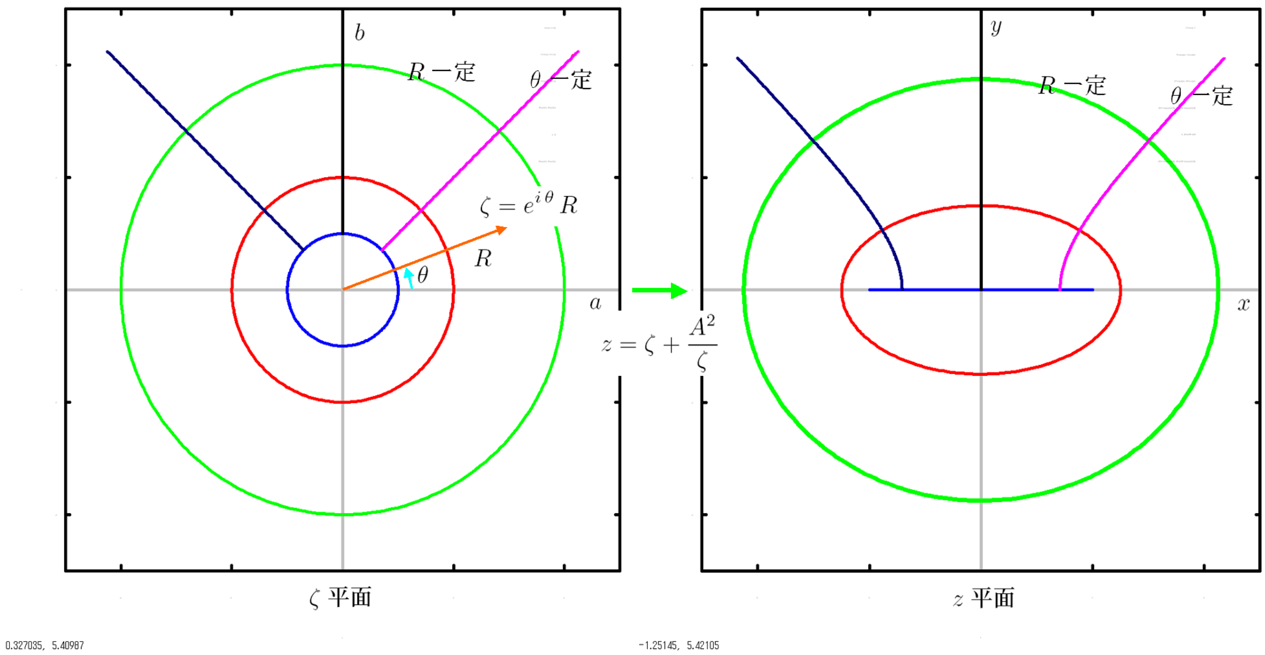


図 5.4.10: 円→楕円変換

5.4.8　円定理

円柱がないときの複素ポテンシャル : $f(z)$ とする。速度ポッテンシャルを Φ、流れ関数を Ψ とすると、

$$f(z)=i\,\Psi(z)+\Phi(z) \tag{5.4.17}$$

原点に中心がある半径 : R の円柱を考える。円上では次の関係がある。

$$R^2=z\overline{z} \tag{5.4.18}$$

次に示す関数を考える。

$$F(z)=f(z)+\overline{f}\left(\frac{R^2}{z}\right) \tag{5.4.19}$$

ここで下記の関係から、

$$\overline{f}(z)=\overline{f(\overline{z})} \tag{5.4.20}$$

(5.4.19) 式は、(5.4.18) 式、上式から、

$$F(z)=f(z)+\overline{f(z)}=2\,\Phi \tag{5.4.21}$$

上式から $\Psi=0$ となり、原点に中心がある半径 : R の円が流線となる。

5.4.9　Blasius の定理

二次元完全流体中の物体に作用する力およびモーメントを求める。

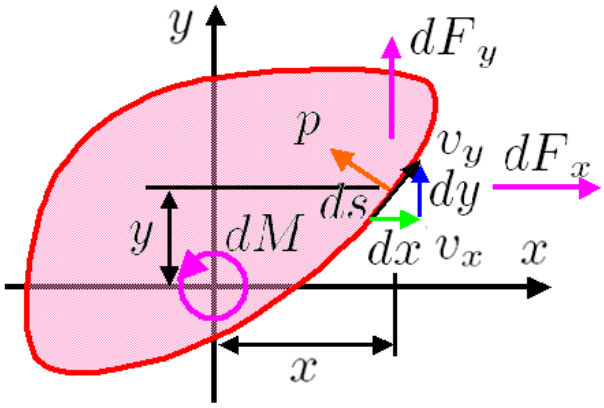


図 5.4.11: Blasius の定理

```
/* Blasius の定理  */
kill(all);
declear(z,complex);
declear(F,complex);
DFX:dF[x]=-p*dy;
DFY:dF[y]=p*dx;
DF:DFX-%i*DFY;
lhs(%)=factor(rhs(%));
lhs(%)=factor(subst([dy=%i*dy],rhs(%)));
DF1:subst([dy=-%i*dy],%);
P1:p=-1/2*\rho*(v[x]^2+v[y]^2);
V2:(v[x]-%i*v[y])*(v[x]+%i*v[y]);
V21:expand(V2)=V2;
P11:subst([V21],P1);
DF1:subst([P11],DF);
VXY:v[xy]=v[x]-%i*v[y];
DF2:subst([-%i*v[y]=v[xy]-v[x]],DF1);
DF3:lhs(DF2)=factor(expand(rhs(DF2)));
```

物体表面 : x,y における圧力を p とすると、物体表面要素長さ : ds に作用する力の x,y 成分は下記となる。

$$dF_x=-dy\,p,\quad dF_y=dx\,p$$

これをまとめて、

$$dF_x-i\,dF_y=-(dy+i\,dx)\,p \tag{5.4.22}$$

圧力 : p は物体表面流速 : v_x,v_y から下記で表現できる。

$$\begin{aligned}p&=-\frac{\rho\,\left(v_y^2+v_x^2\right)}{2}\\&=-\frac{\rho\,\left(v_x-i\,v_y\right)\,\left(i\,v_y+v_x\right)}{2}\end{aligned}$$

一時的に下記に定義した v_{xy} を導入する。

$$v_{xy}=v_x-i\,v_y$$

上式を作用する力に代入し、

$$dF_x - i\,dF_y = \frac{\rho\, v_{xy}\,\left(i\,dy\,v_y - dx\,v_y + dy\,v_x + i\,dx\,v_x\right)}{2} \tag{5.4.23}$$

```
DF4:subst([dx*v[y]=-dx*v[y],dy*v[x]
  =-dy*v[x]],DF3);
VXY1:v[xy1]=%i*(v[x]-%i*v[y])*(dx+%i*dy);
VXY2:expand(%);
VX1:solve(VXY2,v[x])[1];
DF5:subst([VX1],DF4);
lhs(DF5)=factor(expand(rhs(DF5)));
DF6:subst([VXY1,VXY],%);
DZ1:dz=dx+%i*dy;
DZ2:solve(DZ1,dx)[1];
DFZ1:'diff(F,z,1)=v[x]-%i*v[y];
DFZ2:solve(DFZ1,v[x])[1];
DF7:subst([DZ2,DFZ2],DF6);
F1:F[x]-%i*F[y]='integrate(rhs(DF7)/dz,z);
```

境界も流線であるため、境界に沿った流れとなる。このため $dx/v_x = dy/v_y$ の関係が成り立つ。(5.4.23) 式に $dy\,v_x = dx\,v_y$ の関係から下記とする。

$$dF_x - i\,dF_y = \frac{\rho\, v_{xy}\,\left(i\,dy\,v_y + dx\,v_y - dy\,v_x + i\,dx\,v_x\right)}{2} \tag{5.4.24}$$

下記に定義した v_{xy1} を導入する。

$$\begin{aligned} v_{xy1} =& i\,\left(i\,dy + dx\right)\,\left(v_x - i\,v_y\right)\\ =& i\,dy\,v_y + dx\,v_y - dy\,v_x + i\,dx\,v_x \end{aligned}$$

(5.4.24) 式に上式を代入し、

$$\begin{aligned} dF_x - i\,dF_y =& \frac{\rho\, v_{xy}\, v_{xy1}}{2}\\ =& \frac{i\,\left(i\,dy + dx\right)\,\rho\left(v_x - i\,v_y\right)^2}{2} \end{aligned} \tag{5.4.25}$$

(5.2.9) 式などから、

$$dz = i\,dy + dx, \quad \frac{d}{d\,z}\,F = v_x - i\,v_y$$

(5.4.25) 式に上式を代入し、

$$dF_x - i\,dF_y = \frac{i\,dz\,\rho\left(\frac{d}{d\,z}\,F\right)^2}{2} \tag{5.4.26}$$

上式を積分し、

$$F_x - i\,F_y = \frac{i\,\rho}{2}\,\oint \left(\frac{d}{d\,z}\,F\right)^2 dz \tag{5.4.27}$$

```
DF10:dF=lhs(DF7);
DF11:dF=rhs(DF7);
DM1:dM=x*dF[y]-dF[x]*y;
DF10*z;
lhs(%)=subst([z=x+%i*y],rhs(%));
DM2:lhs(%)=expand(rhs(%));
DM3:'imagpart(lhs(DM2))=imagpart(rhs(DM2));
solve(DM1,dF[y])[1];
subst([%],DM3);
solve(%,dM)[1];
DM4:lhs(%)=(subst([DF11],rhs(%)));
DM5:lhs(%)='realpart(rhs(DM4));
M1:M='realpart('integrate(rhs(DM4)/dz,z));
```

下記に定義した dF を導入する。

$$\begin{aligned} dF =& dF_x - i\,dF_y\\ =& \frac{i\,dz\,\rho\left(\frac{d}{d\,z}\,F\right)^2}{2} \end{aligned}$$

上式に z を掛け、整理すると、

$$\begin{aligned} z\,dF =& \left(dF_x - i\,dF_y\right)\,z\\ =& \left(i\,y + x\right)\,\left(dF_x - i\,dF_y\right)\\ =& y\,dF_y - i\,x\,dF_y + i\,dF_x\,y + x\,dF_x \end{aligned}$$

物体表面要素長さ：ds に作用する原点まわりのモーメントは、

$$dM = x\,dF_y - dF_x\,y$$

上の二式から、

$$\Im_m\left(z\,dF\right) = dF_x\,y - x\,dF_y$$

原点まわりのモーメントは、

$$\begin{aligned} dM =& -\Im_m\left(z\,dF\right)\\ =& \Re_e\left(-\frac{dz\,\rho\,z\left(\frac{d}{d\,z}\,F\right)^2}{2}\right) \end{aligned}$$

上式を積分し、

$$M = \Re_e\left(-\frac{\rho}{2}\,\oint z\left(\frac{d}{d\,z}\,F\right)^2 dz\right) \tag{5.4.28}$$

5.4.10　Lagally の定理

流速：U、流向：α の一様流中の中に座標原点に柱状体 C を置き、その原点に渦循環強さ：Γ の渦糸を、その外部の $z=a$ の位置に、わき出し強さ：m のわき出しを置いたとき、柱状体 C に作用する力、モーメントを求める。

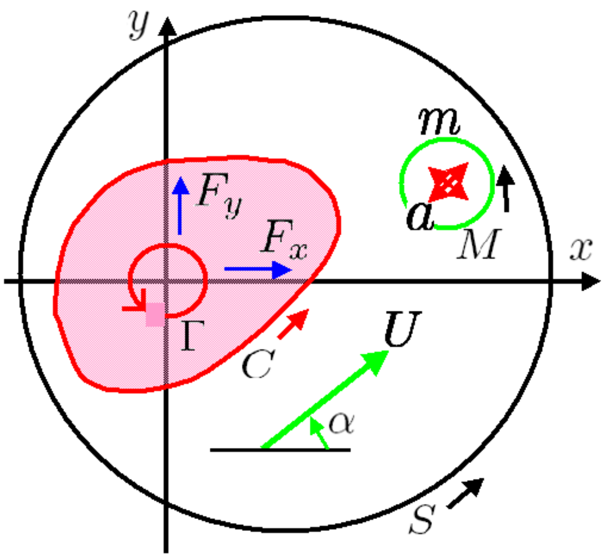


図 5.4.12: Lagally の定理

```
/* Lagally's 定理 */
kill(all);
declare(z,complex);
declare(F,complex);
declare(a,complex);
assume(r>0);
F0:U*%e^(-%i*\alpha)*z;
F1:m*log(z-a);
F2:-%i*\Gamma/2/%pi*log(z);
F3:A[1]/z+A[2]/z^2+A[3]/z^3+A[4]/z^4;
F4:F=F0+F1+F2+F3;
```

一様流の複素ポテンシャルは、

$$F_0 = e^{-i\,\alpha}\,z\,U$$

$z=a$ に置いたわき出しの複素ポテンシャルは、

$$F_1 = m\log(z-a)$$

原点に置いた渦糸の複素ポテンシャルは、

$$F_2 = -\frac{i\,\Gamma\log(z)}{2\,\pi}$$

柱状体による撹乱の複素ポテンシャルは、

$$F_3 = \frac{A_1}{z}+\frac{A_2}{z^2}+\frac{A_3}{z^3}+\frac{a_4}{z^4}$$

上記流場の複素ポテンシャルは、下記のように表せる。

$$F = e^{-i\,\alpha}\,z\,U + m\log(z-a) - \frac{i\,\Gamma\log(z)}{2\,\pi} + \frac{A_1}{z}+\frac{A_2}{z^2}+\frac{A_3}{z^3}+\frac{A_4}{z^4}+\ldots$$

(5.4.27) 式の Blasius の定理の定理から、物体に作用する力は下記となる。

$$F_x - i\,F_y = \frac{i\,\rho}{2}\oint_C\left(\frac{d}{d\,z}F\right)^2 dz$$

上図から物体境界：C、物体、わき出しを含む大きな円：S、わき出しを囲む小さな円：M とすると下記の関係がある。

$$\frac{i\,\rho}{2}\oint_S\left(\frac{d}{d\,z}F\right)^2 dz - \frac{i\,\rho}{2}\oint_C\left(\frac{d}{d\,z}F\right)^2 dz - \frac{i\,\rho}{2}\oint_M\left(\frac{d}{d\,z}F\right)^2 dz = 0$$

上記から、物体に作用する力は下記となる。

$$F_x - i\,F_y = \frac{i\,\rho}{2}\oint_S\left(\frac{d}{d\,z}F\right)^2 dz - \frac{i\,\rho}{2}\oint_M\left(\frac{d}{d\,z}F\right)^2 dz \tag{5.4.29}$$

```
FD1:'diff(F,z,1)=diff(rhs(F4),z,1);
F[x]-%i*F[y]=%i*\rho/2*integrate((
  'diff(F,z,1))^2,z);
F1D1:diff(F1,z,1);
F1D1=taylor(F1D1,a,0,3);
F1D2:F1D1=rest(rhs(%),-1);
FD2:subst([F1D2],FD1);
FD22:lhs(FD2)^2=expand(rhs(FD2)^2);
RFD22:coeff(rhs(FD22),z,-1);
FCS:F[xs]-%i*F[ys]=%i*\rho/2*(2*%pi*%i)
  *RFD22;
lhs(%)=expand(rectform(rhs(%)));
```

物体、わき出しを含む大きな円：S の積分について考える。

$$\frac{d}{d\,z}F = e^{-i\,\alpha}\,U + \frac{m}{z-a} - \frac{i\,\Gamma}{2\,\pi\,z} - \frac{A_1}{z^2} - \frac{2\,A_2}{z^3} - \frac{3\,A_3}{z^4} - \frac{4\,A_4}{z^5}+\ldots \tag{5.4.30}$$

右辺第 2 項を Taylor 展開して、

$$\frac{m}{z-a} = \frac{m}{z}+\frac{m\,a}{z^2}+\frac{m\,a^2}{z^3}+\frac{m\,a^3}{z^4}+\ldots$$

これを上式に代入し、

$$\frac{d}{d\,z}F = e^{-i\,\alpha}\,U + \frac{m}{z} - \frac{i\,\Gamma}{2\,\pi\,z} + \frac{a\,m}{z^2} - \frac{A_1}{z^2} + \frac{a^2\,m}{z^3} - \frac{2\,A_2}{z^3} - \frac{3\,A_3}{z^4} - \frac{4\,A_4}{z^5}+\ldots$$

$$\left(\frac{d}{d\,z}\,F\right)^2 = e^{-2\,i\,\alpha}\,U^2 + \frac{2\,e^{-i\,\alpha}\,m\,U}{z} - \frac{i\,e^{-i\,\alpha}\,\Gamma\,U}{\pi\,z} + \frac{2\,a\,e^{-i\,\alpha}\,m\,U}{z^2} - \frac{2\,A_1\,e^{-i\,\alpha}\,U}{z^2} + \ldots$$

(5.4.29) 式の大きな円：S の積分項は、留数の定理から、

$$\begin{aligned} F_{xs} - i\,F_{ys} &= \frac{i\,\rho}{2}\oint_S \left(\frac{d}{d\,z}\,F\right)^2 dz \\ &= \frac{i\,\rho}{2}(2\pi i\,)\left(2\,e^{-i\,\alpha}\,m\,U - i\,e^{-i\,\alpha}\,\Gamma\,U\right) \\ &= -\,\pi\,\rho\left(2\,e^{-i\,\alpha}\,m\,U - \frac{i\,e^{-i\,\alpha}\,\Gamma\,U}{\pi}\right) \end{aligned} \tag{5.4.31}$$

```
FD3:rhs(FD1)=F1D1+f(z);
FD31:expand(solve(FD3,f(z))[1]);
FD32:lhs(FD1)^2=expand(rhs(FD3)^2);
FZ1:f(z)=taylor(f(z),z,a,3);
FZ2:f(a)=u[m]-%i*v[m];
FD33:subst([FZ1],FD32);
FCM:F[xm]-%i*F[ym]=-%i*\rho/2*(2*%pi*%i)
  *coeff(rhs(FD33),z-a,-1);
FC1:F[x]-%i*F[y]=rhs(FCS)+rhs(FCM);
subst([FZ2],FC1);
```

わき出しを囲む小さな円：M の積分について考える。(5.4.30) 式のわき出しの項以外を $f(z)$ と置き換えて、

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\,z}\,F &= e^{-i\,\alpha}\,U + \frac{m}{z-a} - \frac{i\,\Gamma}{2\,\pi\,z} - \frac{A_1}{z^2} - \frac{2\,A_2}{z^3} - \frac{3\,A_3}{z^4} - \frac{4\,A_4}{z^5} + \ldots \\ &= f\,(z) + \frac{m}{z-a} \end{aligned}$$

$$\left(\frac{d}{d\,z}\,F\right)^2 = f\,(z)^2 + \frac{2\,m\,f\,(z)}{z-a} + \frac{m^2}{z^2 - 2\,a\,z + a^2} + \ldots$$

$f(z)$ を $z=a$ で Taylor 展開すると、

$$\begin{aligned} f\,(z) &= f\,(a) + \left(\frac{d}{d\,z}\,f\,(z)\Big|_{z=a}\right)(z-a) \\ &+ \frac{\left(\frac{d^2}{d\,z^2}\,f\,(z)\Big|_{z=a}\right)(z-a)^2}{2} \\ &+ \frac{\left(\frac{d^3}{d\,z^3}\,f\,(z)\Big|_{z=a}\right)(z-a)^3}{6} + \ldots \end{aligned}$$

また、$z=a$ では、わき出しの項以外による流速：u_m, v_m となり、

$$f\,(a) = u_m - i\,v_m$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{d\,z}\,F\right)^2 &= \frac{m^2}{(z-a)^2} + \frac{2\,m\,f\,(a)}{z-a} \\ &+ \left(f\,(a)^2 + 2\left(\frac{d}{d\,z}\,f\,(z)\Big|_{z=a}\right)m \right. \\ &+ \left(2\left(\frac{d}{d\,z}\,f\,(z)\Big|_{z=a}\right)f\,(a)\right. \\ &+ \left.\left.\left(\frac{d^2}{d\,z^2}\,f\,(z)\Big|_{z=a}\right)m\right)(z-a)\right) \end{aligned}$$

(5.4.29) 式のわき出しを囲む小さな円：M の積分項は、留数の定理から、

$$\begin{aligned} F_{xm} - i\,F_{ym} &= -\,\frac{i\,\rho}{2}\oint_M \left(\frac{d}{d\,z}\,F\right)^2 dz \\ &= -\,\frac{i\,\rho}{2}(2\pi i\,)\,(2\,m\,f\,(a)) \\ &= 2\,\pi\,f\,(a)\;m\,\rho \end{aligned} \tag{5.4.32}$$

(5.4.31) 式と (5.4.32) 式の和から、物体に作用する力は、

$$\begin{aligned} F_x - i\,F_y &= 2\,\pi\,f\,(a)\;m\,\rho \\ &\quad -\,\pi\,\rho\left(2\,e^{-i\,\alpha}\,m\,U - \frac{i\,e^{-i\,\alpha}\,\Gamma\,U}{\pi}\right) \\ &= 2\,\pi\,m\,(u_m - i\,v_m)\;\rho \\ &\quad -\,\pi\,\rho\left(2\,e^{-i\,\alpha}\,m\,U - \frac{i\,e^{-i\,\alpha}\,\Gamma\,U}{\pi}\right) \end{aligned} \tag{5.4.33}$$

```
MD2:expand(FD22*z);
MCS:M[xs]+%i*N[xs]=-\rho/2*(2*%pi*%i)
  *coeff(rhs(MD2),z,-1);
MD3:expand(FD33*z);
MCM:M[xm]+%i*N[xm]=\rho/2*(2*%pi*%i)
  *coeff(rhs(MD3),z-a,-1);
MC:M+%iN=rhs(MCS)+rhs(MCM);
subst([FZ2],MC);
```

物体に作用するモーメントは、(5.4.28) 式で与えられる。物体、わき出しを含む大きな円：S の積分について、

$$
\begin{aligned}
z\left(\frac{d}{d\,z}\,F\right)^{2} =& e^{-2\,i\,\alpha}\,z\,U^{2}+\underline{\frac{2\,a\,e^{-i\,\alpha}\,m\,U}{z}-\frac{2\,A_{1}\,e^{-i\,\alpha}\,U}{z}}+\frac{2\,a^{2}\,e^{-i\,\alpha}\,m\,U}{z^{2}}-\frac{4\,A_{2}\,e^{-i\,\alpha}\,U}{z^{2}}\\
&-\frac{6\,A_{3}\,e^{-i\,\alpha}\,U}{z^{3}}-\frac{8\,a_{4}\,e^{-i\,\alpha}\,U}{z^{4}}+2\,e^{-i\,\alpha}\,m\,U-\frac{i\,e^{-i\,\alpha}\,\Gamma\,U}{\pi}+\underline{\frac{m^{2}}{z}-\frac{i\,\Gamma\,m}{\pi\,z}-\frac{\Gamma^{2}}{4\,\pi^{2}\,z}}\\
&+\frac{2\,a\,m^{2}}{z^{2}}-\frac{i\,a\,\Gamma\,m}{\pi\,z^{2}}-\frac{2\,A_{1}\,m}{z^{2}}+\frac{i\,A_{1}\,\Gamma}{\pi\,z^{2}}
\end{aligned}
$$

大きな円：S の積分項は、

$$
i\,N_{xs}+M_{xs}=-i\,\pi\,\rho\left(2\,a\,e^{-i\,\alpha}\,m\,U-2\,A_{1}\,e^{-i\,\alpha}\,U+m^{2}-\frac{i\,\Gamma\,m}{\pi}-\frac{\Gamma^{2}}{4\,\pi^{2}}\right)
$$

わき出しを囲む小さな円：M の積分について、

$$
\begin{aligned}
z\left(\frac{d}{d\,z}\,F\right)^{2} =& \frac{m^{2}\,a}{\left(z-a\right)^{2}}+\frac{2\,f\left(a\right)\,m\,a+m^{2}}{z-a}+\left(\left(2\,\left(\frac{d}{d\,z}\,f\left(z\right)\Big|_{z=a}\right)\,m+f\left(a\right)^{2}\right)\,a+2\,f\left(a\right)\,m\right)\\
&+\left(\left(\left(\left(\frac{d^{2}}{d\,z^{2}}\,f\left(z\right)\Big|_{z=a}\right)\,m+2\,\left(\frac{d}{d\,z}\,f\left(z\right)\Big|_{z=a}\right)\,f\left(a\right)\right)\,a\right.\right.\\
&\left.+2\,\left(\frac{d}{d\,z}\,f\left(z\right)\Big|_{z=a}\right)m+f\left(a\right)^{2}\right)\,\left(z-a\right)
\end{aligned}
$$

わき出しを囲む小さな円：M の積分項は、

$$
i\,N_{xm}+M_{xm}=i\,\pi\,\left(m^{2}+2\,a\,f\left(a\right)\,m\right)\,\rho
$$

積分項の和から、物体に作用するモーメントは、

$$
\begin{aligned}
M+\%iN =& i\,\pi\,\left(m^{2}+2\,a\,f\left(a\right)\,m\right)\,\rho-i\,\pi\,\rho\,\left(2\,a\,e^{-i\,\alpha}\,m\,U-2\,A_{1}\,e^{-i\,\alpha}\,U+m^{2}-\frac{i\,\Gamma\,m}{\pi}-\frac{\Gamma^{2}}{4\,\pi^{2}}\right)\\
=& i\,\pi\,\left(2\,a\,m\,\left(u_{m}-i\,v_{m}\right)+m^{2}\right)\,\rho-i\,\pi\,\rho\,\left(2\,a\,e^{-i\,\alpha}\,m\,U-2\,A_{1}\,e^{-i\,\alpha}\,U+m^{2}-\frac{i\,\Gamma\,m}{\pi}-\frac{\Gamma^{2}}{4\,\pi^{2}}\right)
\end{aligned}
\tag{5.4.34}
$$

5.4.11 特異点に作用する力 (Blasius の定理の例)

流れの複素ポテンシャル：F_0 の中で、座標原点に置いた、わき出し、渦糸、二重わき出しに作用する力を求める。

```
/* 特異点に作用する力 */
kill(all);
declare(z,complex);
declare(F,complex);
F0:U*%e^(-%i*\alpha)*z;
F1:m*log(z);
F2:%i*\Gamma/2/%pi*log(z);
F3:-%e^(%i*\beta)*\mu/z;
F4:A[2]*z^2+A[3]*z^3+A[4]*z^4;
F5:F=F0+F1+F2+F3+F4;
```

特異点を除いた流れの複素ポテンシャル：F_0 を下記とする

$$F_0 = e^{-i\,\alpha}\,z\,U + A_4\,z^4 + A_3\,z^3 + A_2\,z^2$$

```
/* 特異点に作用する力 (f(z) での表現) */
kill(all);
declare(z,complex);
declare(F,complex);
F00:f(z);
F01:taylor(F00,z,0,5);
F02:rest(F01,-1);
F0:coeff(F02,z,1)*z;
F1:m*log(z);
F2:-%i*\Gamma/2/%pi*log(z);
F3:-%e^(%i*\beta)*\mu/z;
F4:F02-F0;
F5:F=F0+F1+F2+F3+F4;
```

また、特異点を除いた流れの複素ポテンシャルを $F_0 = f(z)$ の形で表現し、$z=0$ に特異点があるとき、この点で Taylor 展開すると、

$$\begin{aligned}F_0 =& f(0) + \left(\frac{d}{d\,z}\,f(z)\Big|_{z=0}\right)z + \frac{\left(\frac{d^2}{d\,z^2}\,f(z)\Big|_{z=0}\right)z^2}{2}\\ &+ \frac{\left(\frac{d^3}{d\,z^3}\,f(z)\Big|_{z=0}\right)z^3}{6} + \frac{\left(\frac{d^4}{d\,z^4}\,f(z)\Big|_{z=0}\right)z^4}{24}\\ &+ \frac{\left(\frac{d^5}{d\,z^5}\,f(z)\Big|_{z=0}\right)z^5}{120} + \ldots\end{aligned}$$

とも表現できる。上記のプログラム部分を入れ替えるだけでこの表現での結果が得られる。以下の結果では、結論のみの標記とした。

(1) わき出しに作用する力

```
/* わき出しに作用する力 */
F=F0+F1+F4;
FD1:'diff(F,z,1)=diff((rhs(%)),z,1);
F[x]-%i*F[y]=%i*\rho/2*integrate(
  ('diff(F,z,1))^2,z);
FD21:lhs(FD1)^2=expand(rhs(FD1)^2);
FCS:F[xs]-%i*F[ys]=%i*\rho/2*(2*%pi*%i)
  *coeff(rhs(FD21),z,-1);
FXS1:F[x]=expand(realpart(rhs(FCS)));
FYS1:F[y]=expand(-imagpart(rhs(FCS)));
MD1:FD21*z;
MD2:expand(rhs(MD1));
MCS:M[xs]+%i*N[xs]=-\rho/2*(2*%pi*%i)
  *coeff(MD2,z,-1);
MXS:M[xs]=expand(realpart(rhs(MCS)));
```

流れの複素ポテンシャル：F_0 に、強さ：m のわき出しを加えた複素ポテンシャルは下記となる。

$$F = e^{-i\,\alpha}\,z\,U + m\log(z) + A_4\,z^4 + A_3\,z^3 + A_2\,z^2$$

$$\frac{d}{d\,z}\,F = e^{-i\,\alpha}\,U + 4\,A_4\,z^3 + 3\,A_3\,z^2 + 2\,A_2\,z + \frac{m}{z}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{d}{d\,z}\,F\right)^2 =& e^{-2\,i\,\alpha}\,U^2 + 8\,A_4\,e^{-i\,\alpha}\,z^3\,U\\ &+ 6\,A_3\,e^{-i\,\alpha}\,z^2\,U\\ &+ 4\,A_2\,e^{-i\,\alpha}\,z\,U + \frac{2\,e^{-i\,\alpha}\,m\,U}{z} + 16\,A_4^2\,z^6\\ &+ 24\,A_3\,A_4\,z^5 + 16\,A_2\,A_4\,z^4 + 9\,A_3^2\,z^4\\ &+ 12\,A_2\,A_3\,z^3 + 8\,A_4\,m\,z^2 + 4\,A_2^2\,z^2\\ &+ 6\,A_3\,m\,z + \frac{m^2}{z^2} + 4\,A_2\,m\end{aligned}$$

Blasius の定理：(5.4.27) 式と留数定理から、

$$\begin{aligned}F_x - i\,F_y =& \frac{i\,\rho}{2}\oint\left(\frac{d}{d\,z}\,F\right)^2 dz\\ =& -2\,\pi\,e^{-i\,\alpha}\,m\,\rho\,U\\ =& -2\,\pi\,m\,\rho\left(\frac{d}{d\,z}\,f(z)\Big|_{z=0}\right)\end{aligned} \tag{5.4.35}$$

わき出しに作用する力は、

$$F_x = -2\,\pi\cos(\alpha)\,m\,\rho\,U,\quad F_y = -2\,\pi\sin(\alpha)\,m\,\rho\,U$$

原点まわりのモーメントについて、Blasius の定理:(5.4.28) 式と留数定理から、

$$M = \Re_e\left(-\frac{\rho}{2}\oint z\left(\frac{d}{d\,z}\,F\right)^2 dz\right)$$

$$i\,N + M = -i\,\pi\,m^2\,\rho$$

わき出しに作用する原点まわりのモーメントは、

$$M = 0 \tag{5.4.36}$$

(2) 渦糸に作用する力

```
/* 渦糸に作用する力 */
F=F0+F2+F4;
FD1:'diff(F,z,1)=diff((rhs(%)),z,1);
F[x]-%i*F[y]=%i*\rho/2*integrate(
  ('diff(F,z,1))^2,z);
FD21:lhs(FD1)^2=expand(rhs(FD1)^2);
FCS:F[xs]-%i*F[ys]=%i*\rho/2*(2*%pi*%i)
  *coeff(rhs(FD21),z,-1);
FXS1:F[xs]=expand(realpart(rhs(FCS)));
FYS1:F[ys]=expand(-imagpart(rhs(FCS)));
MD1:FD21*z;
MD2:expand(rhs(MD1));
MCS:M[xs]+%i*N[xs]=-\rho/2*(2*%pi*%i)
  *coeff(MD2,z,-1);
MXS:M[xs]=expand(realpart(rhs(MCS)));
```

流れの複素ポテンシャル : F_0 に、渦循環 : Γ の渦糸を加えた複素ポテンシャルは下記となる。

$$F = e^{-i\,\alpha}\,z\,U - \frac{i\,\Gamma\log(z)}{2\,\pi} + A_4\,z^4 + A_3\,z^3 + A_2\,z^2$$

上記と同様の方法（プログラムも 1 行目のみ異なり、他は上記と同じ）で求めると、渦糸に作用する力は、

$$\begin{aligned} F_x - i\,F_y =& i\,e^{-i\,\alpha}\,\Gamma\,\rho\,U \\ =& i\,\Gamma\,\rho\left(\frac{d}{d\,z}\,f(z)\bigg|_{z=0}\right) \end{aligned} \tag{5.4.37}$$

$$F_x = \sin(\alpha)\,\Gamma\,\rho\,U, \quad F_y = -\cos(\alpha)\,\Gamma\,\rho\,U$$

原点まわりのモーメントについて、

$$i\,N + M = \frac{i\,\Gamma^2\,\rho}{4\,\pi}$$

$$M = 0 \tag{5.4.38}$$

(3) 二重わき出しに作用する力

```
/* 二重わき出しに作用する力 */
F=F0+F3+F4;
FD1:'diff(F,z,1)=diff((rhs(%)),z,1);
F[x]-%i*F[y]=%i*\rho/2*integrate(
  ('diff(F,z,1))^2,z);
FD21:lhs(FD1)^2=expand(rhs(FD1)^2);
FCS:F[xs]-%i*F[ys]=%i*\rho/2*(2*%pi*%i)
  *coeff(rhs(FD21),z,-1);
FXS1:F[xs]=expand(realpart(rhs(FCS)));
FYS1:F[ys]=expand(-imagpart(rhs(FCS)));
MD1:FD21*z;
MD2:expand(rhs(MD1));
MCS:M[xs]+%i*N[xs]=-\rho/2*(2*%pi*%i)
  *coeff(MD2,z,-1);
MXS:M[xs]=expand(realpart(rhs(MCS)));
```

流れの複素ポテンシャル : F_0 に、強さ : μ の二重わき出しを加えた複素ポテンシャルは下記となる。

$$F = e^{-i\,\alpha}\,z\,U + A_4\,z^4 + A_3\,z^3 + A_2\,z^2 - \frac{e^{i\beta}\,\mu}{z}$$

上記と同様の方法（プログラムも 1 行目のみ異なり、他は上記と同じ）で求めると、二重わき出しに作用する力は、下記に示すように A_2 に比例している。これは速度勾配に関連したものである。

$$\begin{aligned} F_x - i\,F_y =& -4\,\pi\,A_2\,e^{i\beta}\,\mu\,\rho \\ =& -2\,\pi\,e^{i\,\beta}\,\mu\,\rho\left(\frac{d^2}{d\,z^2}\,f(z)\bigg|_{z=0}\right) \end{aligned} \tag{5.4.39}$$

$$F_x = -4\,\pi\,A_2\cos(\beta)\,\mu\,\rho, \quad F_y = 4\,\pi\,A_2\sin(\beta)\,\mu\,\rho$$

原点まわりのモーメントについて、

$$\begin{aligned} i\,N + M =& -2\,i\,\pi\,e^{i\beta - i\,\alpha}\,\mu\,\rho\,U \\ =& -2\,i\,\pi\,e^{i\,\beta}\,\mu\,\rho\left(\frac{d}{d\,z}\,f(z)\bigg|_{z=0}\right) \end{aligned} \tag{5.4.40}$$

$$M = 2\,\pi\sin(\beta - \alpha)\,\mu\,\rho\,U$$

5.4.12 一様流中のわき出しと吸い込み

流速：U の一様な流れの中で、x 軸上の $x=-a$ に強さ：m のわき出しを、$x=a$ に強さ：$-m$ の吸い込みを、置いたときの流れを求める。

```
/*  一様流中のわき出しと吸い込み  */
kill(all);
declare(z,complex);
declare(F,complex);
assume(r>0);
assume(U>0);
assume(m>0);
assume(a>0);
assume(b>0);
assume(b>a);
F1:F=U*z+m*log(z+a)-m*log(z-a);
FD1:'diff(F,z,1)=diff(rhs(F1),z,1);
FD2:rhs(FD1)=0;
Z1:solve(FD2,z)[1];
Z11:subst([z=x[0]+%i*y[0]],Z1);
Z12:realpart(Z11);
B1:b^2=rhs(Z12)^2;
Z13:imagpart(Z11);
F2:subst([z=x+%i*y],F1);
PS1:\Psi=imagpart(rhs(F2));
PS10:subst([x=b,y=0],PS1);
PS11:subst([U=1,m=1,a=1],PS1);
```

一様な流れの複素ポテンシャルは (5.4.10) 式から、わき出しの複素ポテンシャルは (5.4.11) 式から一様な流れに中のわき出しと吸い込みの流れの複素ポテンシャルとして下記を得る。

$$F=z\,U+m\log(z+a)-m\log(z-a)$$

先端のよどみ点では、流速が零であるから、

$$\frac{d}{d\,z}F=U+\frac{m}{z+a}-\frac{m}{z-a}=0$$

よどみ点の位置：x_0,y_0 は、

$$z=-\frac{\sqrt{a}\,\sqrt{a\,U+2\,m}}{\sqrt{U}}$$

$$i\,y_0+x_0=-\frac{\sqrt{a}\,\sqrt{a\,U+2\,m}}{\sqrt{U}}$$

$$x_0=-\frac{\sqrt{a}\,\sqrt{a\,U+2\,m}}{\sqrt{U}},\quad y_0=0$$

$$b^2=\frac{a\,(a\,U+2\,m)}{U}$$

流れ関数：Ψ を x,y 座標で表記すると、

$$\begin{aligned}F=&\Phi+i\,\Psi=(i\,y+x)\,U+m\log(i\,y+x+a)\\&-m\log(i\,y+x-a)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Psi=&y\,U+m\,\mathrm{atan2}(y,x+a)\\&-m\,\mathrm{atan2}(y,x-a)\end{aligned}$$

よどみ点の上記の位置を代入すると、物体表面の流れ関数の値が得られ、

$$\Psi=0$$

上記の結果から、$U=1,m=1,a=1$ として、gnuplot を用いて流線を求めた結果を下記に示す。

```
#!/gnuplot
set xrange [-4:4]
set yrange [-3:3]
set isosamples 150,150
set contour base
set cntrparam levels incremental -10,0.2,10
unset key
unset surface
set view map
splot atan2(y,x+1)-atan2(y,x-1)+y
#    EOF
```

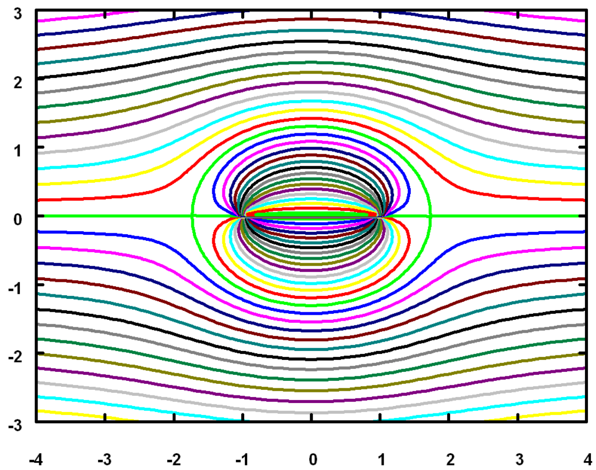


図 5.4.13: 一様流中のわき出しと吸い込みまわりの流れ

5.4.13　一様流中の円柱まわりの流れ

x 軸と α の角度を持ち、流速：U の一様な流れに中に、半径：A の円柱を置いたときの流れを求める。また、円の中心に渦循環：$-\Gamma$ を置いた場合の円柱まわりの流れ、円柱に作用する力を求める。

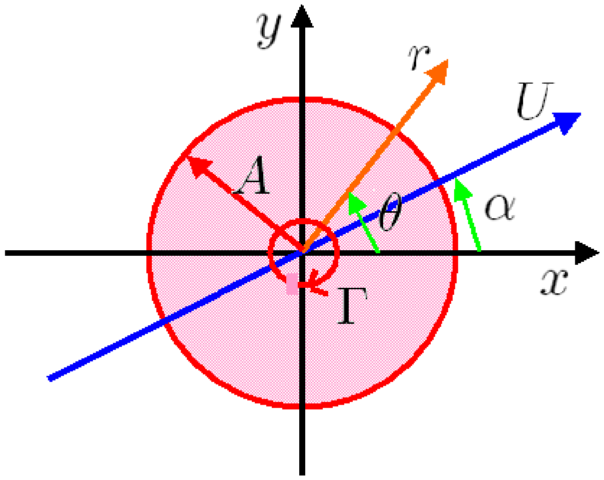


図 5.4.14: 一様流中の円柱まわりの流れ

```
/* 円柱まわりの流れと作用力 (xmaxima) */
kill(all);
load("plotdf")
declare(z,complex);
declare(F,complex);
assume(r>0);
F0:U*%e^(-%i*\alpha)*z;
subst([z=A^2/conjugate(z)],F0);
F1:conjugate(%);
F2:%i*\Gamma/2/%pi*log(z);
F3:F=F0+F1+F2;
F4:subst([z=r*%e^(%i*\theta)],F3);
PH1:\Phi=realpart(rhs(F4));
PS1:\Psi=imagpart(rhs(F4));
F5:F4:subst([z=x+%i*y],F3);
PH2:\Phi=realpart(rhs(F5));
PS2:\Psi=imagpart(rhs(F5));
```

一様流の複素関数：F_0 は下記となる。

$$F_0 = e^{-i\,\alpha}\, z\, U$$

この流れの中に円柱を置いたときの複素関数：F_1 は、円定理の (5.4.19) 式から、

$$F_1 = \bar{f}\left(\frac{R^2}{z}\right) = \overline{f\left(\frac{R^2}{\bar{z}}\right)}$$

一様流の複素関数：F_0 で

$$z \to \frac{A^2}{\mathrm{conjugate}\,(z)}$$

に置き換えて、

$$F_1 = \overline{\left(\frac{e^{-i\,\alpha}\, A^2\, U}{\mathrm{conjugate}\,(z)}\right)} = \frac{e^{i\,\alpha}\, A^2\, U}{z}$$

渦循環の複素関数：F_2 は (5.4.13) 式から

$$F_2 = \frac{i\,\Gamma \log(z)}{2\,\pi}$$

以上から、全体の流れの複素関数：F は、

$$\begin{aligned} F =& F_0 + F_1 + F_2 = \frac{e^{i\,\alpha}\, A^2\, U}{z} + e^{-i\,\alpha}\, z\, U + \frac{i\,\Gamma \log(z)}{2\,\pi} \\ =& \Phi + i\Psi \end{aligned} \tag{5.4.41}$$

極座標表記：$z = r\, e^{i\theta}$ を上式に代入し、実部および虚部を取り、速度ポテンシャル：Φ、流れ関数：Ψ は、

$$\Phi = \frac{\cos(\theta-\alpha)\ A^2\, U}{r} + r\cos(\theta-\alpha)\ U - \frac{\Gamma\,\theta}{2\,\pi} \tag{5.4.42}$$

$$\Psi = -\frac{\sin(\theta-\alpha)\ A^2\, U}{r} + r\sin(\theta-\alpha)\ U + \frac{\Gamma \log(r)}{2\,\pi} \tag{5.4.43}$$

xy 座標表記：$z = i\,y + x$ を (5.4.41) 式に代入し、実部および虚部を取り、速度ポテンシャル：Φ、流れ関数：Ψ は、

$$\begin{aligned} \Phi =& \frac{(\sin(\alpha)\ y + \cos(\alpha)\ x)\ A^2\, U}{y^2+x^2} \\ &+ (\sin(\alpha)\ y + \cos(\alpha)\ x)\ U - \frac{\Gamma\, \mathrm{atan2}\,(y,x)}{2\,\pi} \end{aligned} \tag{5.4.44}$$

$$\begin{aligned} \Psi =& \frac{(\sin(\alpha)\ x - \cos(\alpha)\ y)\ A^2\, U}{y^2+x^2} \\ &+ (\cos(\alpha)\ y - \sin(\alpha)\ x)\ U + \frac{\Gamma \log\left(y^2+x^2\right)}{4\,\pi} \end{aligned} \tag{5.4.45}$$

```
VT1:v[\theta]='diff(\Phi,\theta,1)/r;
subst([PH1],VT1);
ev(%,diff);
VT2:expand(subst([r=A],%));
P0:p[0]+\rho/2*U^2=p+\rho/2*v[\theta]^2;
solve(P0,p)[1];
P1:subst([VT2],%);
FX1:F[x]=-'integrate(rhs(P1)*cos(\theta)*A,
  \theta,0,2*%pi);
FY1:F[y]=-'integrate(rhs(P1)*sin(\theta)*A,
  \theta,0,2*%pi);
factor(ev(FX1,integrate));
factor(ev(FY1,integrate));
P2:(lhs(P1)-p[0])/(1/2*\rho*U^2)=(rhs(P1)
  -p[0])/(1/2*\rho*U^2);
P3:lhs(P2)=expand(rhs(P2));
P4:subst([\Gamma=0],P3);
```

円柱に作用する力を求める。$r=A$ における円柱表面の流速 v_θ は、

$$
\begin{aligned}
v_\theta =& \frac{\frac{d}{d\,\theta}\,\Phi}{r} \\
=& \frac{-\frac{\sin(\theta-\alpha)\,A^2\,U}{r} - r\sin(\theta-\alpha)\,U - \frac{\Gamma}{2\,\pi}}{r} \\
=& -2\sin(\theta-\alpha)\,U - \frac{\Gamma}{2\,\pi\,A}
\end{aligned}
\tag{5.4.46}
$$

下記に Bernoulli の定理から、

$$
\frac{\rho\,U^2}{2} + p_0 = \frac{\rho\,v_\theta^2}{2} + p
$$

円柱表面の圧力：p は

$$
\begin{aligned}
p =& \frac{\rho\,U^2 - \rho\,v_\theta^2 + 2\,p_0}{2} \\
=& \frac{-\rho\left(-2\sin(\theta-\alpha)\,U - \frac{\Gamma}{2\,\pi\,A}\right)^2 + \rho\,U^2 + 2\,p_0}{2}
\end{aligned}
$$

円柱に作用する力は、圧力：p を円周方向に積分して、

$$
F_x = -\int_0^{2\,\pi} \mathrm{p}\cos(\theta)\,A d\theta, \quad F_y = -\int_0^{2\,\pi} \mathrm{p}\sin(\theta)\,A d\theta
$$

上式に圧力：p を代入し、まとめ、円柱に作用するとからは下記となる。

$$
F_x = -\sin(\alpha)\,\Gamma\,\rho\,U, \quad F_y = \cos(\alpha)\,\Gamma\,\rho\,U
$$

円柱の圧力分布は、

$$
\begin{aligned}
\frac{2\,(p-p_0)}{\rho\,U^2} =& -\frac{2\,\Gamma\sin(\theta-\alpha)}{\pi\,A\,U} - \frac{\Gamma^2}{4\,\pi^2\,A^2\,U^2} \\
& - 4\sin(\theta-\alpha)^2 + 1
\end{aligned}
$$

渦循環がない場合の円柱の圧力分布は、

$$
\frac{2\,(p-p_0)}{\rho\,U^2} = 1 - 4\sin(\theta-\alpha)^2
$$

```
FD1:diff(rhs(F3),z,1);
FD2:subst([z=x+%i*y],FD1);
VX1:realpart(FD2);
VY1:-imagpart(FD2);
VX2:subst([\alpha=0,A=1,U=1,\Gamma=14,
  \theta=t],VX1);
VY2:subst([\alpha=0,A=1,U=1,\Gamma=14,
  \theta=t],VY1);
plotdf([VX2,VY2],[x,-4,4],[y,-4,4])
PS31:subst([\alpha=0,A=1,U=1,\Gamma=0],
 PS2);
PS32:subst([\alpha=0,A=1,U=1,\Gamma=7],
 PS2);
PS33:subst([\alpha=0,A=1,U=1,\Gamma=14],
 PS2);
```

流速は複素関数を微分して、下記のように得られる。この結果から Maxima の流向を表示できる plotdf では、xy 座標表記が要求されるので、表現式も xy 座標表記とした。

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{d\,z}\,F =& -\frac{e^{i\,\alpha}\,A^2\,U}{z^2} + e^{-i\,\alpha}\,U + \frac{i\,\Gamma}{2\,\pi\,z} \\
=& -\frac{e^{i\,\alpha}\,A^2\,U}{(i\,y+x)^2} + e^{-i\,\alpha}\,U + \frac{i\,\Gamma}{2\,\pi\,(i\,y+x)} \\
=& v_x - i\,v_y
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
v_x =& -\frac{\left(\cos(\alpha)\,\left(x^2-y^2\right) + 2\sin(\alpha)\,x\,y\right)\,A^2\,U}{\left(y^2+x^2\right)^2} \\
& + \cos(\alpha)\,U + \frac{\Gamma\,y}{2\,\pi\,(y^2+x^2)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
v_y =& \frac{\left(\sin(\alpha)\,\left(x^2-y^2\right) - 2\cos(\alpha)\,x\,y\right)\,A^2\,U}{\left(y^2+x^2\right)^2} \\
& + \sin(\alpha)\,U - \frac{\Gamma\,x}{2\,\pi\,(y^2+x^2)}
\end{aligned}
$$

流線については、各点における流れ関数の値を求め、同じ値のところを結ぶ：等高線図を求めると流線となる。しかし、Maxima の作図機能ではうまく描けなかったので、gnuplot を使用して描いた。下記は gnuplot で使用する流れ関数を求めた。

$$
\Psi = y - \frac{y}{y^2+x^2} \qquad (\Gamma=0)
$$

$$
\Psi = \frac{7\log\left(y^2+x^2\right)}{4\,\pi} - \frac{y}{y^2+x^2} + y \qquad (\Gamma=7)
$$

$$
\Psi = \frac{7\log\left(y^2+x^2\right)}{2\,\pi} - \frac{y}{y^2+x^2} + y \qquad (\Gamma=14)
$$

gnuplot を起動させ、下記を入力すると流れ関数の等高線図：流線が得られる。

```
#!/gnuplot
set xrange [-3:3]
set yrange [-3:3]
set isosamples 150,150
set contour base
set cntrparam levels incremental -3,0.2,4
unset key
unset surface
set view map
splot (7*log(y**2+x**2))/(2*pi)
  -y/(y**2+x**2)+y
#    EOF
```

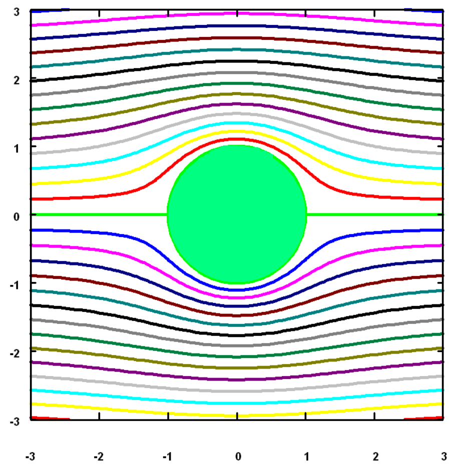


図 5.4.15: 一様流中の円柱まわりの流れ関数:$\alpha = 0, A = 1, U = 1, \Gamma = 0$

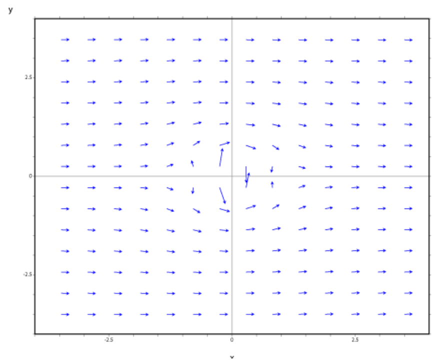


図 5.4.16: 一様流中の円柱まわりの流向：$\alpha = 0, A = 1, U = 1, \Gamma = 0$

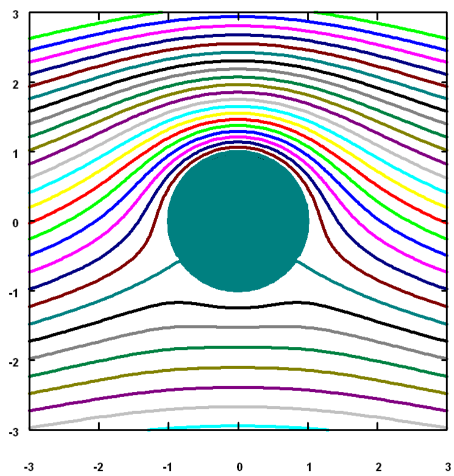


図 5.4.17: 一様流中の円柱まわりの流れ関数:$\alpha = 0, A = 1, U = 1, \Gamma = 7$

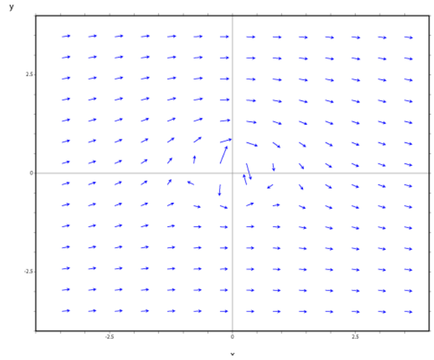


図 5.4.18: 一様流中の円柱まわりの流向：$\alpha = 0, A = 1, U = 1, \Gamma = 7$

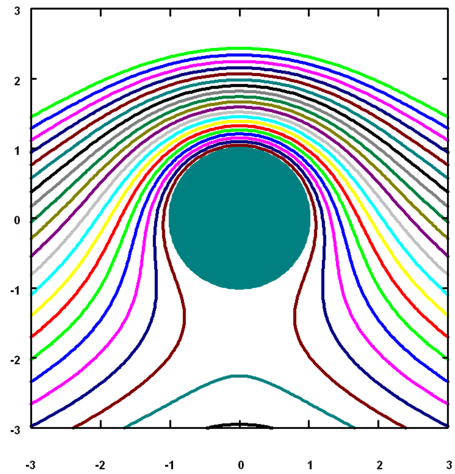


図 5.4.19: 一様流中の円柱まわりの流れ関数:$\alpha = 0, A = 1, U = 1, \Gamma = 14$

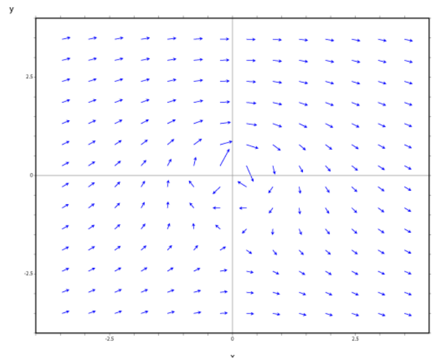


図 5.4.20: 一様流中の円柱まわりの流向：$\alpha = 0, A = 1, U = 1, \Gamma = 14$

5.4.14 一様流中の楕円柱まわりの流れ・作用力・運動エネルギー (Joukowski 変換)

x 軸と α の角度を持ち、流速：U の一様な流れに中に、半軸：a, b の楕円柱を置いたときの流れを z 平面の楕円外部領域を ζ 平面の半径：R の円外部領域に写像変換：Joukowski 変換することにより求める。

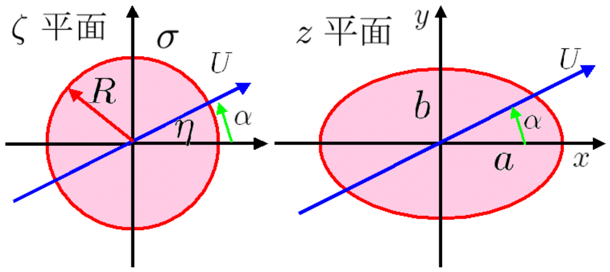


図 5.4.21: 一様流中の楕円柱まわりの流れ (Joukowski 変換)

```
/* 楕円柱まわりの流れ (Joukowski 変換) */
kill(all);
declare(z,complex);
declare(F,complex);
declare(\zeta,complex);
assume(a>0);
assume(b>0);
assume(\sigma>0);
assume(z^2>A^2);
Z0:z=x+%i*y;
Z1:z=\zeta+A^2/\zeta;
ZT1:\zeta=\sigma*%e^(%i*\eta);
ZT2:\zeta=R*%e^(%i*\eta);
F0:U*%e^(-%i*\alpha)*\zeta;
subst([\zeta=R^2/conjugate(\zeta)],F0);
F1:conjugate(%);
F3:F=F0+F1;
F4:subst([ZT1],F3);
```

写像関数を下記とする。

$$z = \zeta + \frac{A^2}{\zeta} \tag{5.4.47}$$

(5.4.41) 式から ζ 平面で流速：U の一様な流れに中に半径：R の円柱を置いたときの複素ポテンシャルは下記となる。

$$F = e^{-i\,\alpha}\,U\,\zeta + \frac{e^{i\,\alpha}\,R^2\,U}{\zeta} \tag{5.4.48}$$

```
Z2:subst([ZT2,Z0],Z1);
X1:realpart(Z2);
Y1:imagpart(Z2);
CO1:solve(X1,cos(\eta))[1];
SI1:solve(Y1,sin(\eta))[1];
COSI1:cos(\eta)^2+sin(\eta)^2=1;
COSI2:subst([CO1,SI1],COSI1);
COSI3:x^2/a^2+y^2/b^2=1;
A1:first(lhs(COSI2))=last(lhs(COSI3));
B1:last(lhs(COSI2))=first(lhs(COSI3));
A2:solve(A1,a)[2];
B2:solve(B1,b)[2];
AB1:solve([A1,B1],[R,A])[2];
R2:AB1[1];
A2:AB1[2];
```

R, A と a, b の関係式を求める。(5.4.47) 式に下記の関係式を代入し、

$$\zeta = e^{i\,\eta}\,\sigma, \quad z = i\,y + x$$

境界である $\sigma = R$ とし下記を得る。

$$i\,y + x = e^{i\,\eta}\,R + \frac{e^{-i\,\eta}\,A^2}{R}$$

上式の実部、虚部から、

$$x = \cos(\eta)\ R + \frac{\cos(\eta)\ A^2}{R}$$

$$y = \sin(\eta)\ R - \frac{\sin(\eta)\ A^2}{R}$$

下記の関係式に代入し、

$$\sin(\eta)^2 + \cos(\eta)^2 = 1$$

下記の楕円の関係式を得る。

$$\frac{x^2\,R^2}{(R^2 + A^2)^2} + \frac{y^2\,R^2}{(R^2 - A^2)^2} = 1$$

半軸：a, b の楕円の関係式から、

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1$$

R, A と a, b の関係は下記となる。

$$R = \frac{b + a}{2}, \quad A = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{2} \tag{5.4.49}$$

(1) 複素ポテンシャルと流れ関数

```
ZT20:solve(Z1,\zeta);
ZT21:ZT20[1];
ZT22:ZT20[2];
ZT23:(rhs(ZT21)*rhs(ZT22));
ZT23=expand(ZT23);
ZT24:%/rhs(ZT21)*2;
F40:subst([ZT22],F0);
F41:subst([ZT22],F1);
F42:subst([ZT24],%);
F43:F=F40+F41;
F44:F=F40+F42;
SQ1:sqrt(z^2-4*A^2)+z;
SQ11:SQ1=z*(1+sqrt(1-4*A^2/z^2));
SQ3:1/SQ1;
SQ5:sqrt(z^2-4*A^2)-z;
SQ51:SQ5=z*(sqrt(1-4*A^2/z^2)-1);
F401:subst([SQ11],F40);
F411:subst([SQ11],F41);
F421:subst([SQ51],F42);
F431:F=F401+F411;
F441:F=F401+F421;
PS1:\Psi=imagpart(subst([z=x+%i*y,R2,A2]
  ,rhs(F431)));
subst([a=2,b=1,U=1,\alpha=%pi/6],PS1);
trigsimp(%);
PS2:\Psi=imagpart(subst([z=x+%i*y,R2,A2]
  ,rhs(F441)));
trigsimp(%);
subst([a=2,b=1,U=1,\alpha=%pi/6],PS2);
trigsimp(%);
```

(5.4.47) 式を ζ で解くと、

$$\zeta = -\frac{\sqrt{z^2-4\,A^2}-z}{2} \tag{5.4.50}$$

$$\zeta = \frac{\sqrt{z^2-4\,A^2}+z}{2} \tag{5.4.51}$$

外部領域である $z^2 >> A^2$ では、(5.4.51) 式が外部領域に対応していることが明らかで、この式を (5.4.48) 式の ζ 平面の複素ポテンシャルに代入し、z 平面の複素ポテンシャルを下記に得る。

$$F = \frac{2\,e^{i\,\alpha}\,R^2\,U}{\sqrt{z^2-4\,A^2}+z} + \frac{e^{-i\,\alpha}\,\left(\sqrt{z^2-4\,A^2}+z\right)\,U}{2} \tag{5.4.52}$$

下記に関係から、

$$-\frac{\left(\sqrt{z^2-4\,A^2}-z\right)\,\left(\sqrt{z^2-4\,A^2}+z\right)}{4} = A^2$$

次式が得られる。

$$\sqrt{z^2-4\,A^2}+z = -\frac{4\,A^2}{\sqrt{z^2-4\,A^2}-z}$$

上式を (5.4.52) 式に代入し、別の z 平面の複素ポテンシャルを得る。

$$F = \frac{e^{-i\,\alpha}\,\left(\sqrt{z^2-4\,A^2}+z\right)\,U}{2} - \frac{e^{i\,\alpha}\,\left(\sqrt{z^2-4\,A^2}-z\right)\,R^2\,U}{2\,A^2} \tag{5.4.53}$$

級数展開するのに便利なように、下記の関係式を

$$\sqrt{z^2-4\,A^2}+z = z\left(\sqrt{1-\frac{4\,A^2}{z^2}}+1\right)$$

$$\sqrt{z^2-4\,A^2}-z = z\left(\sqrt{1-\frac{4\,A^2}{z^2}}-1\right)$$

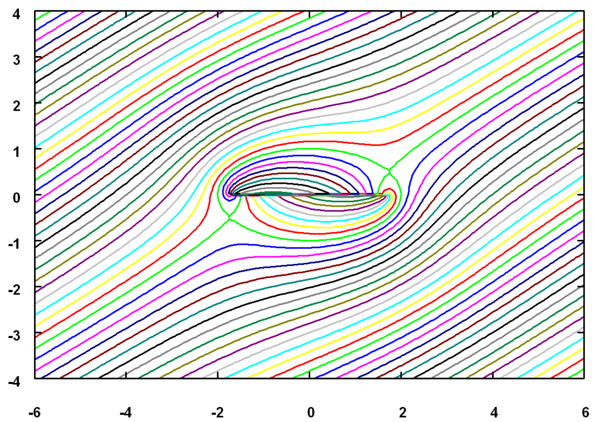


図 5.4.22: 一様流中の楕円柱まわりの流れ (Joukowski 変換)(5.4.54) 式による：$\alpha = 30°, a = 2, b = 1, U = 1$

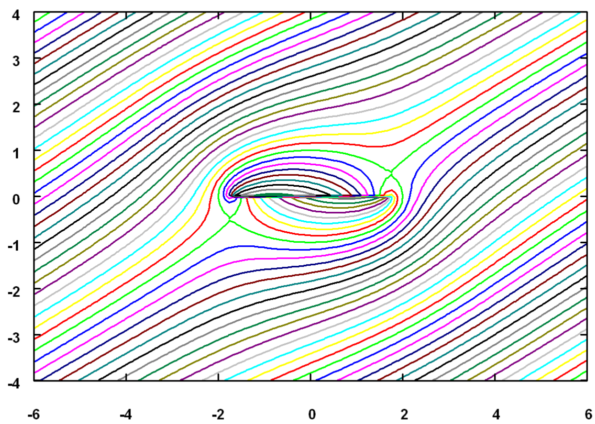


図 5.4.23: 一様流中の楕円柱まわりの流れ (Joukowski 変換)(5.4.55) 式による：$\alpha = 30°, a = 2, b = 1, U = 1$

(5.4.52) 式に代入し、

$$F=\frac{2\,e^{i\,\alpha}\,R^2\,U}{z\,\left(\sqrt{1-\frac{4\,A^2}{z^2}}+1\right)}+\frac{e^{-i\,\alpha}\,z\,\left(\sqrt{1-\frac{4\,A^2}{z^2}}+1\right)\,U}{2} \tag{5.4.54}$$

(5.4.53) 式に代入し、

$$F=\frac{e^{-i\,\alpha}\,z\,\left(\sqrt{1-\frac{4\,A^2}{z^2}}+1\right)\,U}{2}-\frac{e^{i\,\alpha}\,z\,\left(\sqrt{1-\frac{4\,A^2}{z^2}}-1\right)\,R^2\,U}{2\,A^2} \tag{5.4.55}$$

流れ関数は $z=i\,y+x$ を複素ポテンシャルの式に代入し、その虚部として得られる。(5.4.54) 式の複素ポテンシャルから得られる流れ関数は記述が長いため省く。(5.4.55) 式の複素ポテンシャルから得られる流れ関数を下記に示す。

$$\begin{aligned}\Psi=&\Bigg(\left(y^4+\left(2\,x^2-2\,b^2+2\,a^2\right)\,y^2+x^4+\left(2\,b^2-2\,a^2\right)\,x^2+b^4-2\,a^2\,b^2+a^4\right)^{\frac{1}{4}}\\&\times\Bigg(\left(a\sin\left(\alpha\right)\,y-\cos\left(\alpha\right)\,b\,x\right)\,\sin\left(\frac{\mathrm{atan2}\left(\frac{\left(2\,b^2-2\,a^2\right)\,x\,y}{y^4+2\,x^2\,y^2+x^4},\frac{y^4+\left(2\,x^2-b^2+a^2\right)\,y^2+x^4+\left(b^2-a^2\right)\,x^2}{y^4+2\,x^2\,y^2+x^4}\right)}{2}\right)\\&+\left(\cos\left(\alpha\right)\,b\,y+a\sin\left(\alpha\right)\,x\right)\,\cos\left(\frac{\mathrm{atan2}\left(\frac{\left(2\,b^2-2\,a^2\right)\,x\,y}{y^4+2\,x^2\,y^2+x^4},\frac{y^4+\left(2\,x^2-b^2+a^2\right)\,y^2+x^4+\left(b^2-a^2\right)\,x^2}{y^4+2\,x^2\,y^2+x^4}\right)}{2}\right)\Bigg)U\\&+\left(-a\cos\left(\alpha\right)\,y-\sin\left(\alpha\right)\,b\,x\right)\,\left(y^4+2\,x^2\,y^2+x^4\right)^{\frac{1}{4}}\,U\Bigg)\Big/\left(\left(b-a\right)\,\left(y^4+2\,x^2\,y^2+x^4\right)^{\frac{1}{4}}\right)\end{aligned}$$

上記の流れ関数から得られる流線を前頁に示す。

(2) 楕円柱に作用する力

```
/* 作用する力 */
DF43:'diff(F,z,1)=diff(rhs(F431),z,1);
DF431:first(rhs(DF43));
DF432:last(rest(rhs(DF43),-2));
DF433:first(rest(rhs(DF43),2));
DF434:last(rhs(DF43));
SQR1:1/(sqrt(1-(4*A^2)/z^2)+1);
SQR1=rest(taylor(SQR1,A,0,8),-1);
SQR11:1/%;
DF4311:expand(subst([SQR11],DF431));
SQR2:1/(sqrt(1-(4*A^2)/z^2)*(sqrt(1-(4*A^2)
  /z^2)+1)^2);
SQR2=rest(taylor(SQR2,A,0,8),-1);
DF4321:expand(num(DF432)*rhs(%)/z^4);
SQR3:sqrt(1-(4*A^2)/z^2)+1;
SQR31:SQR3=rest(taylor(SQR3,A,0,8),-1);
DF4331:expand(subst([SQR31],DF433));
SQR4:1/(sqrt(1-(4*A^2)/z^2));
SQR4=rest(taylor(SQR4,A,0,8),-1);
SQR41:1/%;
DF4341:expand(subst([SQR41],DF434));
```

```
DF435:'diff(F,z,1)=DF4311+DF4321+DF4331
  +DF4341;
DF436:expand(rhs(DF435)^2);
F[x]-%i*F[Y]=%i*\rho/2*(2*%pi*%i)
  *residue(%,z,0);
DF437:expand(rhs(DF435)^2*z);
M+%i*N=-\rho/2*(2*%pi*%i)*residue(%,z,0);
realpart(%);
factor(trigexpand(%));
subst([A2],%);
```

(5.4.54) 式の複素ポテンシャルを z で微分し、

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\,z}\,F=&-\frac{2\,e^{i\,\alpha}\,R^2\,U}{z^2\,\left(\sqrt{1-\frac{4\,A^2}{z^2}}+1\right)}\\&-\frac{8\,e^{i\,\alpha}\,A^2\,R^2\,U}{z^4\,\sqrt{1-\frac{4\,A^2}{z^2}}\,\left(\sqrt{1-\frac{4\,A^2}{z^2}}+1\right)^2}\\&+\frac{e^{-i\,\alpha}\,\left(\sqrt{1-\frac{4\,A^2}{z^2}}+1\right)\,U}{2}+\frac{2\,e^{-i\,\alpha}\,A^2\,U}{z^2\,\sqrt{1-\frac{4\,A^2}{z^2}}}\end{aligned}$$

上式の下記の部分を級数展開し、

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{4\,A^2}{z^2}}+1}=\frac{5\,A^6}{2\,z^6}+\frac{A^4}{z^4}+\frac{A^2}{2\,z^2}+\frac{1}{2},\quad \frac{1}{\sqrt{1-\frac{4\,A^2}{z^2}}\left(\sqrt{1-\frac{4\,A^2}{z^2}}+1\right)^2}=\frac{14\,A^6}{z^6}+\frac{15\,A^4}{4\,z^4}+\frac{A^2}{z^2}+\frac{1}{4}$$

$$\sqrt{1-\frac{4\,A^2}{z^2}}+1=-\frac{4\,A^6}{z^6}-\frac{2\,A^4}{z^4}-\frac{2\,A^2}{z^2}+2,\quad \frac{1}{\sqrt{1-\frac{4\,A^2}{z^2}}}=\frac{20\,A^6}{z^6}+\frac{6\,A^4}{z^4}+\frac{2\,A^2}{z^2}+1$$

上記展開式を代入し、

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\,z}\,F=&-\frac{112\,e^{i\,\alpha}\,A^8\,R^2\,U}{z^{10}}-\frac{35\,e^{i\,\alpha}\,A^6\,R^2\,U}{z^8}-\frac{10\,e^{i\,\alpha}\,A^4\,R^2\,U}{z^6}-\frac{3\,e^{i\,\alpha}\,A^2\,R^2\,U}{z^4}-\frac{e^{i\,\alpha}\,R^2\,U}{z^2}\\&+\frac{40\,e^{-i\,\alpha}\,A^8\,U}{z^8}+\frac{10\,e^{-i\,\alpha}\,A^6\,U}{z^6}+\frac{3\,e^{-i\,\alpha}\,A^4\,U}{z^4}+\frac{e^{-i\,\alpha}\,A^2\,U}{z^2}+e^{-i\,\alpha}\,U\end{aligned}\tag{5.4.56}$$

(5.4.27) 式に (5.4.56) 式を代入し、楕円柱に作用する力：F_x, F_y は、

$$F_x-i\,F_y=\frac{i\,\rho}{2}\oint\left(\frac{d}{d\,z}\,F\right)^2dz=0\tag{5.4.57}$$

(5.4.28) 式に (5.4.56) 式を代入し、楕円柱に作用するモーメント：M は、

$$\begin{aligned}M=&\Re_e\left(-\frac{\rho}{2}\oint z\left(\frac{d}{d\,z}\,F\right)^2dz\right)\\=&-\pi\cos(\alpha)\,\sin(\alpha)\,\left(a^2-b^2\right)\,\rho U^2\end{aligned}\tag{5.4.58}$$

```
DF44:'diff(F,z,1)=diff(rhs(F441),z,1);
DF441:first(rhs(DF44));
DF442:last(rest(rhs(DF44),-2));
DF443:first(rest(rhs(DF44),2));
DF444:last(rhs(DF44));
SQR5:sqrt(1-(4*A^2)/z^2);
SQR51:SQR5=rest(taylor(SQR5,A,0,8),-1);
DF4411:expand(subst([SQR51],DF441));
DF4421:expand(subst([SQR41],DF442));
DF4431:expand(subst([SQR51],DF443));
DF4441:expand(subst([SQR41],DF444));
DF445:'diff(F,z,1)=DF4411+DF4421+DF4431
  +DF4441;
DF446:expand(rhs(DF445)^2);
F[x]-%i*F[Y]=%i*\rho/2*(2*%pi*%i)
  *residue(%,z,0);
DF447:expand(rhs(DF445)^2*z);
M+%i*N=-\rho/2*(2*%pi*%i)*residue(%,z,0);
realpart(%);
factor(trigexpand(%));
subst([A2],%);
```

(5.4.55) 式の複素ポテンシャルを z で微分し、

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\,z}\,F=&-\frac{e^{i\,\alpha}\left(\sqrt{1-\frac{4\,A^2}{z^2}}-1\right)\,R^2\,U}{2\,A^2}\\&-\frac{2\,e^{i\,\alpha}\,R^2\,U}{z^2\,\sqrt{1-\frac{4\,A^2}{z^2}}}\\&+\frac{e^{-i\,\alpha}\left(\sqrt{1-\frac{4\,A^2}{z^2}}+1\right)\,U}{2}\\&+\frac{2\,e^{-i\,\alpha}\,A^2\,U}{z^2\,\sqrt{1-\frac{4\,A^2}{z^2}}}\end{aligned}$$

上式の下記の部分を級数展開し、

$$\sqrt{1-\frac{4\,A^2}{z^2}}=-\frac{4\,A^6}{z^6}-\frac{2\,A^4}{z^4}-\frac{2\,A^2}{z^2}+1$$

上記展開式および前述の展開式を代入し、

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\,z}\,F=&-\frac{40\,e^{i\,\alpha}\,A^6\,R^2\,U}{z^8}-\frac{10\,e^{i\,\alpha}\,A^4\,R^2\,U}{z^6}\\&-\frac{3\,e^{i\,\alpha}\,A^2\,R^2\,U}{z^4}-\frac{e^{i\,\alpha}\,R^2\,U}{z^2}\\&+\frac{40\,e^{-i\,\alpha}\,A^8\,U}{z^8}+\frac{10\,e^{-i\,\alpha}\,A^6\,U}{z^6}\\&+\frac{3\,e^{-i\,\alpha}\,A^4\,U}{z^4}+\frac{e^{-i\,\alpha}\,A^2\,U}{z^2}+e^{-i\,\alpha}\,U\end{aligned}\tag{5.4.59}$$

(5.4.27) 式に (5.4.59) 式を代入し、楕円柱に作用する力：F_x, F_y および (5.4.28) 式に (5.4.59) 式を代入し、楕円柱に作用するモーメント：M は前述の結果と一致する。この結果から、楕円柱に作用する力は零で、モーメントは時計回りで迎角をさらにつける方向に作用している。

(3) 運動エネルギー

```
/* 運動エネルギー */
F11:F=F0+F1-U*%e^(-%i*\alpha)*z;
expand(subst([Z1],F11));
F12:expand(subst([ZT1],%));
PH1:\Phi=realpart(rhs(F12));
PS1:\Psi=imagpart(rhs(F12));
DPS1:'diff(\Psi,\eta)=diff(rhs(PS1),
 \eta,1);
PHS1:rhs(PH1)*rhs(DPS1);
PHS2:subst([\sigma=R],PHS1);
T1:T=-\rho/2*integrate(PHS2,\eta,0,2*%pi);
subst([A2,R2],T1);
trigexpand(%);
T2:factor(%);
T3:factor(subst([cos(\alpha)=V[x]/U,
 sin(\alpha)=V[y]/U,U^2=V[x]^2+V[y]^2],
  T2));
```

運動エネルギーは次式で得られる。ここで $\frac{d}{d\,n}\,\Phi=-\frac{d}{d\,s}\,\Psi$ から次式となる。ここで流体を囲む、無限遠の積分：∞ と物体表面の積分：B になるが、無限遠の積分は零となるので、物体表面の積分のみが残る。

$$\begin{aligned} T=&\frac{\rho}{2}\iint\left(\frac{d}{d\,y}\,\Phi\right)^2+\left(\frac{d}{d\,x}\,\Phi\right)^2 dxdy\\ =&-\frac{\rho}{2}\oint\Phi\frac{d}{d\,n}\,\Phi\,ds\\ =&\frac{\rho}{2}\oint_{\infty}\Phi d\,\Psi-\frac{\rho}{2}\oint_{B}\Phi d\,\Psi \end{aligned} \tag{5.4.60}$$

積分の容易さから、ζ 平面の複素ポテンシャルを使用する。上式から運動エネルギーの計算に使用する複素ポテンシャルは一様流成分を除く必要があり、(5.4.48) 式にその成分を引き、次式となる。さらに写像関数 : (5.4.47) 式から、

$$F=e^{-i\,\alpha}\,U\,\zeta+\frac{e^{i\,\alpha}\,R^2\,U}{\zeta}-e^{-i\,\alpha}\,z\,U=\frac{e^{i\,\alpha}\,R^2\,U}{\zeta}-\frac{e^{-i\,\alpha}\,A^2\,U}{\zeta}$$

$\zeta=e^{i\,\eta}\,\sigma$, を代入し、

$$F=\Phi+i\,\Psi=\frac{e^{i\,\alpha-i\,\eta}\,R^2\,U}{\sigma}-\frac{e^{-i\,\eta-i\,\alpha}\,A^2\,U}{\sigma}$$

上式から、速度ポテンシャル：Φ、流れ関数：Ψ は、

$$\Phi=\frac{\cos\left(\eta-\alpha\right)\,R^2\,U}{\sigma}-\frac{\cos\left(\eta+\alpha\right)\,A^2\,U}{\sigma},\quad \Psi=\frac{\sin\left(\eta+\alpha\right)\,A^2\,U}{\sigma}-\frac{\sin\left(\eta-\alpha\right)\,R^2\,U}{\sigma}$$

$$\frac{d}{d\,\eta}\,\Psi=\frac{\cos\left(\eta+\alpha\right)\,A^2\,U}{\sigma}-\frac{\cos\left(\eta-\alpha\right)\,R^2\,U}{\sigma}$$

運動エネルギーは上式を (5.4.60) 式に代入し、

$$T=-\frac{\rho}{2}\int_0^{2\pi}\Phi\frac{d}{d\,\eta}\,\Psi d\eta=-\frac{\pi\,\left(\sin\left(\alpha\right)^2 b^2-\cos\left(\alpha\right)^2 b^2-b^2-a^2\sin\left(\alpha\right)^2+a^2\cos\left(\alpha\right)^2-a^2\right)\,\rho\,U^2}{4}$$

一様流速：U の x 成分：V_x、y 成分：V_y とすると、下記の関係から、

$$\cos\left(\alpha\right)=\frac{V_x}{U},\sin\left(\alpha\right)=\frac{V_y}{U},U^2=V_y^2+V_x^2$$

運動エネルギーは

$$T=\frac{\pi\,\rho\,\left(a^2\,V_y^2+b^2\,V_x^2\right)}{2} \tag{5.4.61}$$

5.4.15 平板をすぎる流れ (Joukowski 変換)

ζ 平面上で円に対し流向：α の流場を x 軸上 $-1 \to 1$ の平板および y 軸上 $-i \to i$ に変換する写像関数とそれらの流場を求める。

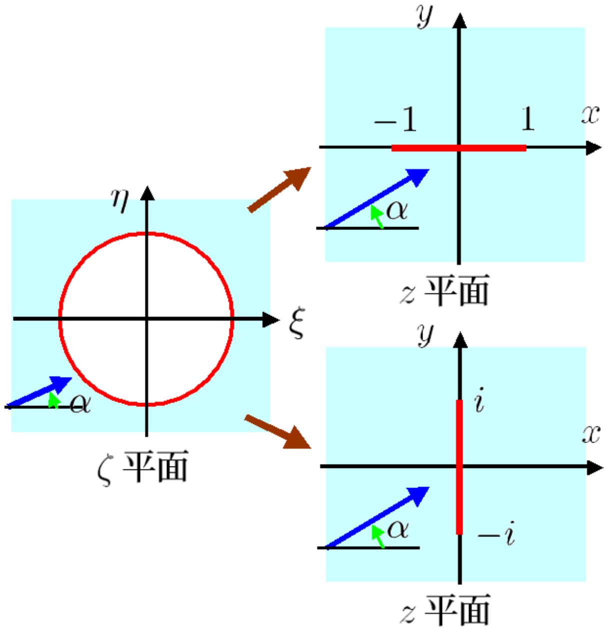


図 5.4.24: 平板をすぎる流れ

```
/* 平板をすぎる流れ (Joukowski 変換) */
kill(all);
declare(z,complex);
declare(F,complex);
declare(\zeta,complex);
assume(a>0);
assume(b>0);
assume(\sigma>0);
assume(z^2>A^2);
Z0:z=x+%i*y;
Z1:z=\zeta+A^2/\zeta;
ZT1:\zeta=\sigma*%e^(%i*\eta);
ZT2:\zeta=R*%e^(%i*\eta);
F0:U*%e^(-%i*\alpha)*\zeta;
subst([\zeta=R^2/conjugate(\zeta)],F0);
F1:conjugate(%);
F3:F=F0+F1;
F4:subst([ZT1],F3);
Z2:subst([ZT2,Z0],Z1);
X1:realpart(Z2);
Y1:imagpart(Z2);
CO1:solve(X1,cos(\eta))[1];
SI1:solve(Y1,sin(\eta))[1];
```

```
COSI1:cos(\eta)^2+sin(\eta)^2=1;
COSI2:subst([CO1,SI1],COSI1);
COSI3:x^2/a^2+y^2/b^2=1;
A1:first(lhs(COSI2))=last(lhs(COSI3));
B1:last(lhs(COSI2))=first(lhs(COSI3));
A2:solve(A1,a)[2];
B2:solve(B1,b)[2];
AB1:solve([A1,B1],[R,A])[2];
R2:AB1[1];
A2:AB1[2];
```

例題 5.4.14 の結果を基に解く。(5.4.47) 式から写像関数を下記とする。

$$z = \zeta + \frac{A^2}{\zeta}$$

ζ 平面で流速：U の一様な流れに中に半径：R の円柱を置いたときの複素ポテンシャルは (5.4.48) 式から下記となる。

$$F = e^{-i\,\alpha}\,U\,\zeta + \frac{e^{i\,\alpha}\,R^2\,U}{\zeta}$$

半軸：a, b の楕円の関係式から、

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1$$

R, A と a, b の関係は (5.4.49) 式から下記となる。

$$R = \frac{b+a}{2}, \quad A = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{2}$$

```
F442:F=(%e^(-%i*alpha)*(sqrt(1-(a^2-b^2)
  /z^2)+1)*z*U)/2-(%e^(%i*alpha)*(b+a)^2
  *(sqrt(1-(a^2-b^2)/z^2)-1)*z*U)
  /(2*(a^2-b^2));
AB2:subst([b=0],AB1);
R3:AB2[1];
A3:AB2[2];
Z3:subst([R3,A3,a=2],Z1);
PS2:\Psi=imagpart(subst([z=x+%i*y],
  rhs(F442)));
subst([a=2,b=0,U=1,\alpha=%pi/2],PS2);
trigsimp(%);
subst([a=2,b=0,U=1,\alpha=%pi/4],PS2);
trigsimp(%);
AB3:subst([a=0],AB1);
R4:AB3[1];
A4:AB3[2];
Z4:subst([R4,A4,b=2],Z1);
subst([a=0,b=2,U=1,\alpha=0],PS2);
trigsimp(%);
subst([a=0,b=2,U=1,\alpha=%pi/4],PS2);
trigsimp(%);
```

z 平面の複素ポテンシャルは (5.4.55) 式から下記となる。

$$F=\frac{e^{-i\,\alpha}\,\left(\sqrt{1-\frac{a^2-b^2}{z^2}}+1\right)\,z\,U}{2}-\frac{e^{i\,\alpha}\,(b+a)^2\,\left(\sqrt{1-\frac{a^2-b^2}{z^2}}-1\right)\,z\,U}{2\,(a^2-b^2)}$$

$b=0$ を代入し、x 軸上の平板の写像関数は下記を代入し、

$$R=\frac{a}{2},\quad A=\frac{a}{2}$$

$$z=\zeta+\frac{1}{\zeta} \tag{5.4.62}$$

$a=2,b=0,U=1,\alpha=\frac{\pi}{2},\quad \alpha=\frac{\pi}{4}$ のときの流場を下記の gnupot を用いて求めた。その結果を下記に示す。

```
#!/gnuplot
set xrange [-4:4]
set yrange [-3:3]
set isosamples 150,150
set contour base
set cntrparam levels incremental -20,0.1,20
unset key
unset surface
set view map
splot ((y**4+(2*x**2+8)*y**2+x**4-8*x**2
 +16)**(0.25)*(1.4142135*y*sin(atan2((
 8*x*y)/(y**4+2*x**2*y**2+x**4),(y**4
 +(2*x**2+4)*y**2+x**4-4*x**2)/(y**4
 +2*x**2*y**2+x**4))/2)-1.4142135*x
 *cos(atan2((8*x*y)/(y**4+2*x**2*y**2
 +x**4),(y**4+(2*x**2+4)*y**2+x**4
  -4*x**2)/(y**4+2*x**2*y**2+x**4))/2))
  +1.4142135*y*(y**4+2*x**2*y**2+x**4)
  **(0.25))/(2*(y**4+2*x**2*y**2+x**4)
  **(0.25))
#    EOF
```

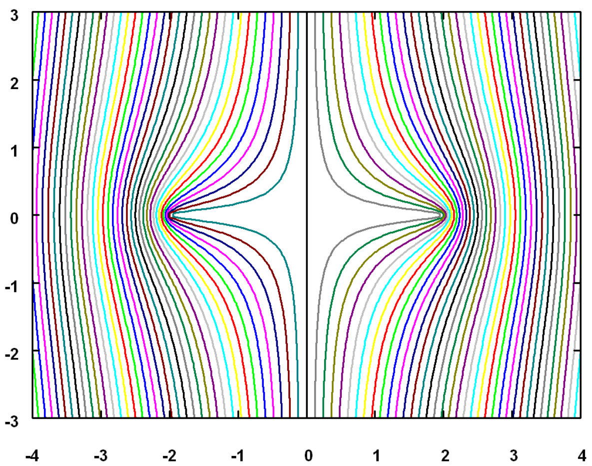


図 5.4.25: 平板をすぎる流れ $a=2,b=0,U=1,\alpha=\frac{\pi}{2}$

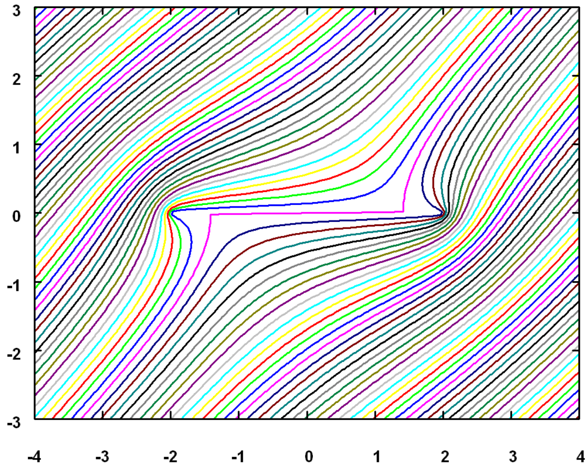


図 5.4.26: 平板をすぎる流れ $a=2,b=0,U=1,\alpha=\frac{\pi}{4}$

$a=0$ を代入し、y 軸上の平板の写像関数は下記を代入し、

$$a=0$$

$$R=\frac{b}{2},\quad A=\frac{i\,b}{2}$$

$$z=\zeta-\frac{1}{\zeta} \tag{5.4.63}$$

$a=0,b=2,U=1,\alpha=0$ のときの流場を下記の gnupot を用いて求めた。その結果を下記に示す。

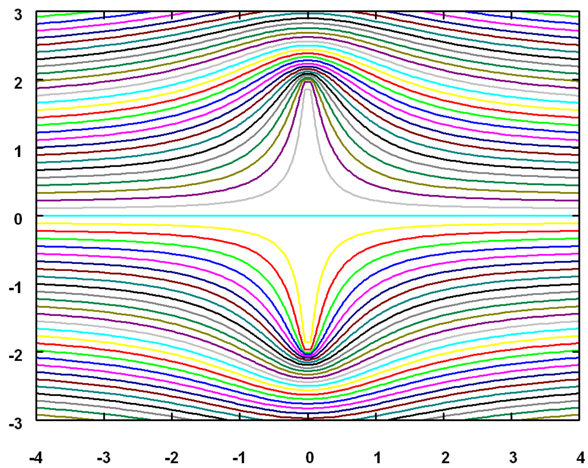


図 5.4.27: 平板をすぎる流れ $a=0,b=2,U=1,\alpha=0$

5.4.16　円柱の外に置いたわき出し

半径：A の円の外の、$z = R\,e^{i\,\theta}$ に強さ：m のわき出しを置いたときの流れを求める。

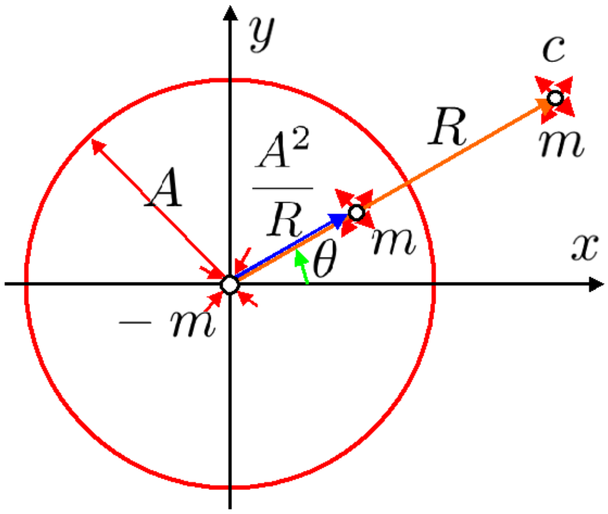


図 5.4.28: 円柱の外に置いたわき出し

```
/*  円柱の外に置いたわき出し  */
kill(all);
declare(z,complex);
declare(F,complex);
declare(c,complex);
F0:m*log(z-c);
subst([z=A^2/conjugate(z)],F0);
conjugate(%);
F1:m*log(A^2/z-conjugate(c));
FF1:F=F0+F1;
factor(logcontract(%));
F11:factor(F1);
F2:-m*log(z);
F12:F11-F2;
F13:logcontract(F12);
F3:-m*log(-1/(conjugate(c)));
F14:F13-F3;
F15:expand(logcontract(F14));
F4:F=F0+F15+F2+F3;
F5:F=F0+F15+F2;
subst([c=R*%e^(%i*\theta)],F5);
subst([z=x+%i*y,c=R*%e^(%i*\theta)
  ,\theta=0],F5);
PS1:\Psi=imagpart(rhs(%));
PS10:subst([x=-A,y=0],PS1);
subst([m=1,A=1,R=1.5],PS1);
subst([m=1,A=1,R=1.5],PS10);
```

$z = c = R\,e^{i\,\theta}$ に強さ：m のわき出しの複素ポテンシャル：F_0 は (5.4.11) 式から、

$$F_0 = m\log(z-c)$$

5.4.8 円定理 (294 ページ) から、半径：A の円が境界となるための複素ポテンシャル：F_1 は、

$$F_1 = m\,\overline{\left(\log\left(\frac{A^2}{\overline{(z)}} - c\right)\right)} = m\log\left(\frac{A^2}{z} - \bar{c}\right) \tag{5.4.64}$$

以上から、全体の複素ポテンシャルは、下記となり、展開すると、

$$\begin{aligned} F =& m\log\left(\frac{A^2}{z} - \bar{c}\right) + m\log(z-c) \\ =& m\log\left(z - \frac{A^2}{\bar{c}}\right) + m\log(z-c) - m\log(z) \\ & - \log\left(-\frac{1}{\bar{c}}\right)\,m \end{aligned} \tag{5.4.65}$$

右辺最終項は常数であるため、省くことができるため、全体の複素ポテンシャルは下記となる。この結果から、円の境界となるためには、円内で原点と外に置いたわき出しを結んだ線上で原点から $\frac{A^2}{R}$ の位置に同じ強さのわき出しを、原点に同じ強さの吸い込みを置けばよい。

$$\begin{aligned} F =& m\log\left(z - \frac{A^2}{\bar{c}}\right) + m\log(z-c) - m\log(z) \\ =& m\log\left(z - e^{i\,\theta}\,R\right) + m\log\left(z - \frac{e^{i\,\theta}\,A^2}{R}\right) - m\log(z) \end{aligned} \tag{5.4.66}$$

流れ関数：Ψ は上式の虚部であり、$\theta = 0$ としたとき、次式となる。

$$\begin{aligned} \Psi =& m\,\mathrm{atan2}(y, x-R) + m\,\mathrm{atan2}\left(y, x - \frac{A^2}{R}\right) \\ & - m\,\mathrm{atan2}(y,x) \end{aligned}$$

円柱の左端における流れ関数の値は、$x = -A, y = 0, m = 1, A = 1, R = 1.5$ を代入すると、$\Psi = 6.283185307179586 - \pi$ を得る。これをもとに流線を gnuplot を用いて描く。$m = 1, A = 1, a = 1.5$ として、gnuplot を用いて流線を求めた結果を下記に示す。下記の図から、$x = 0, x = A^2/a = 0.6666, x = 1.5$ にわき出しがあるのがわかり、境界が円になっている。

```
#!/gnuplot
set xrange [-2:3]
set yrange [-2:2]
set isosamples 150,150
set contour base
set cntrparam levels incremental
 -12.566368,0.12566368,12.5
unset key
unset surface
set view map
splot -atan2(y,x)
 +atan2(y,x-0.66666666666667)
 +atan2(y,x-1.5)
#    EOF
```

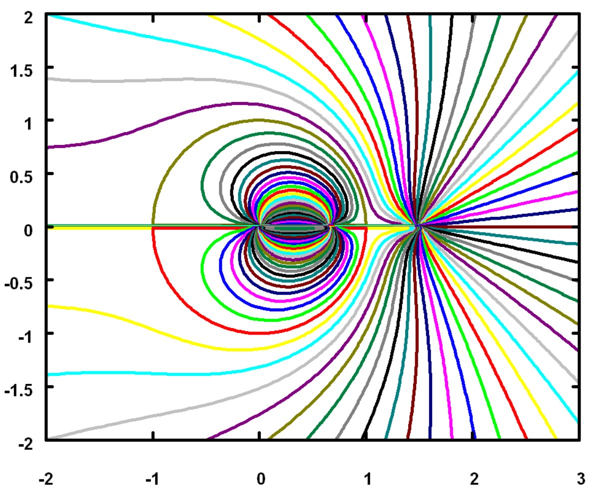


図 5.4.29: 円柱の外に置いたわき出しの流線

```
DF5:'diff(F,z,1)=diff(rhs(F5),z,1);
subst([c=R*%e^(%i*\theta),\theta=0],%);
DF52:lhs(DF5)^2=expand(rhs(%)^2);
FXY1:F[x]-%i*F[y]=-\rho*%i/2*(2*%pi*%i)
  *residue(rhs(DF52),z,R);
```

円柱および円柱外部のわき出しを含む大きな円：S、円柱外部のわき出しを囲む小さな円：M とすると物体に作用する力は (5.4.29) 式から下記となる。

$$F_x - i\,F_y = \frac{i\,\rho}{2}\oint_S \left(\frac{d}{d\,z}\,F\right)^2 dz - \frac{i\,\rho}{2}\oint_M \left(\frac{d}{d\,z}\,F\right)^2 dz$$

大きな円：S の積分は零となり、円柱外部のわき出しを囲む小さな円：M の積分が残る。(5.4.66) 式から、

$$\frac{d}{d\,z}\,F = \frac{m}{z - \frac{A^2}{R}} + \frac{m}{z - R} - \frac{m}{z}$$

$$\left(\frac{d}{d\,z}\,F\right)^2 = \frac{m^2}{\frac{A^4}{R^2} - \frac{2\,z\,A^2}{R} + z^2} + \frac{2\,m^2}{-\frac{z\,A^2}{R} + A^2 + z^2 - R\,z} - \frac{2\,m^2}{z^2 - \frac{z\,A^2}{R}} - \frac{2\,m^2}{z^2 - R\,z} + \frac{m^2}{z^2 - 2\,a\,z + R^2} + \frac{m^2}{z^2}$$

留数定理から下記積分は得られる。

$$F_x - i\,F_y = -\frac{i\,\rho}{2}\oint_M \left(\frac{d}{d\,z}\,F\right)^2 dz = \frac{2\,\pi\,m^2\,\rho\,A^2}{R^3 - A^2\,R}$$

ここで $A < R$ であるから、物体は円柱外部のわき出しと引き合っている。

5.4.17　Kutta-Joukowski の定理

二次元の流場で、物体内にわき出し、二重わき出しや渦循環がある場合に物体に作用する力を求める

```
/* Kutta-Joukowski の定理＋平板翼　*/
kill(all);
declare(z,complex);
declare(F,complex);
declare(c,complex);
declare(\zeta,complex);
assume(a>0);
assume(b>0);
assume(z^2>A^2);
assume(A>0);
assume(\rho>0);
assume(U>0);
assume(\gamma>0);
M1:m*log(z-c);
G1:%i*\gamma/2/%pi*log(z-c);
LOG1:A[1]*log(z-c);
LOG2:A[1]*log(z*(1-c/z));
taylor(%,c,0,5);
MU1:\mu/(z-c);
MU2:\mu/z/(1-c/z);
taylor(%,c,0,5);
```

二次元流場で、c に位置するわき出しの複素ポテンシャルは (5.4.11) 式から、渦循環の複素ポテンシャルは (5.4.13) 式から、二重わき出しの複素ポテンシャルは (5.4.12) 式から、一般的に次式で表現できる。

$$\text{わき出し}: m\log(z-c) \qquad (m: \text{わき出し強さ})$$

$$\text{渦循環}: \frac{i\log(z-c)\,\Gamma}{2\pi} \qquad (\Gamma: \text{渦循環強さ})$$

$$\text{二重わき出し}: \frac{\mu}{z-c} \qquad (\mu: \text{二重わき出し強さ})$$

c が遠方の流場に比べ、小さいとして Taylor 展開すると、

$$A_1\log(z-c) = \log(z)\,A_1 - \frac{A_1\,c}{z} - \frac{A_1\,c^2}{2\,z^2} - \frac{A_1\,c^3}{3\,z^3} - \frac{A_1\,c^4}{4\,z^4} - \frac{A_1\,c^5}{5\,z^5} + \ldots$$

$$\frac{\mu}{z-c} = \frac{\mu}{z} + \frac{\mu\,c}{z^2} + \frac{\mu\,c^2}{z^3} + \frac{\mu\,c^3}{z^4} + \frac{\mu\,c^4}{z^5} + \frac{\mu\,c^5}{z^6} + \ldots$$

```
F0:F=U*%e^(-%i*\alpha)*z+A[0]+m*log(z)
  +%i*\gamma/2/%pi*log(z)+A[2]/z
  +A[3]/z^2+A[4]/z^3;
DF0:'diff(F,z,1)=diff(rhs(F0),z,1);
DF02:lhs(DF0)^2=expand(rhs(DF0)^2);
FXY1:F[x]-%i*F[y]=%i*\rho/2
  *'integrate(lhs(DF02),z);
COFF1:coeff(rhs(DF02),z,-1);
lhs(FXY1)=%i*\rho/2*2*%pi*%i*COFF1;
FXY2:lhs(FXY1)=rectform(rhs(%));
FX1:F[x]=realpart(rhs(FXY2));
FY1:F[y]=-imagpart(rhs(FXY2));
FX2:subst([m=0],FX1);
FY2:subst([m=0],FY1);
L1:L=sqrt(rhs(FX2)^2+rhs(FY2)^2);
trigsimp(%);
ZDF02:expand(z*DF02);
MXY1:M+%i*N=-\rho/2*'integrate(lhs(ZDF02),
 z);
COFF2:coeff(rhs(ZDF02),z,-1);
MXY1:M+%i*N=-\rho/2*2*%pi*%i*COFF2;
MXY2:lhs(MXY1)=rectform(rhs(%));
M1:M=realpart(realpart(rhs(MXY2)));
subst([m=0],M1);
```

以上から、物体内にわき出し、二重わき出しや渦循環がある場合の複素ポテンシャルは下記のように表現できる。

$$F = \frac{i\log(z)\,\Gamma}{2\pi} + e^{-i\,\alpha}\,z\,U + m\log(z) + \frac{A_2}{z} + \frac{A_3}{z^2} + \frac{A_4}{z^3} + A_0 + \ldots \tag{5.4.67}$$

上式を z で微分し、その二乗を求めると、

$$\frac{d}{d\,z}\,F=\frac{i\,\Gamma}{2\,\pi\,z}+e^{-i\,\alpha}\,U+\frac{m}{z}-\frac{A_2}{z^2}-\frac{2\,A_3}{z^3}-\frac{3\,A_4}{z^4}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{d}{d\,z}\,F\right)^2=&-\frac{\Gamma^2}{4\,\pi^2\,z^2}+\frac{i\,e^{-i\,\alpha}\,U\,\Gamma}{\pi\,z}+\frac{i\,m\,\Gamma}{\pi\,z^2}-\frac{i\,A_2\,\Gamma}{\pi\,z^3}-\frac{2\,i\,A_3\,\Gamma}{\pi\,z^4}-\frac{3\,i\,A_4\,\Gamma}{\pi\,z^5}+e^{-2\,i\,\alpha}\,U^2\\&+\frac{2\,e^{-i\,\alpha}\,m\,U}{z}-\frac{2\,A_2\,e^{-i\,\alpha}\,U}{z^2}-\frac{4\,A_3\,e^{-i\,\alpha}\,U}{z^3}-\frac{6\,A_4\,e^{-i\,\alpha}\,U}{z^4}+\frac{m^2}{z^2}+\ldots\end{aligned}$$

物体に作用する力：F_x, F_y は、Blasius の定理：(5.4.27) 式から、積分を留数定理を用いて解き、

$$\begin{aligned}F_x-i\,F_y=&\frac{i\,\rho}{2}\int\left(\frac{d}{d\,z}\,F\right)^2dz\\=&-\pi\,\rho\left(\frac{i\,e^{-i\,\alpha}\,U\,\Gamma}{\pi}+2\,e^{-i\,\alpha}\,m\,U\right)\\=&-\pi\,\rho\left(\frac{\sin(\alpha)\;U\,\Gamma}{\pi}+2\cos(\alpha)\;m\,U\right)-i\,\pi\,\rho\left(\frac{\cos(\alpha)\;U\,\Gamma}{\pi}-2\sin(\alpha)\;m\,U\right)\end{aligned}\tag{5.4.68}$$

上式より、

$$F_x=-\pi\,\rho\left(\frac{\sin(\alpha)\;U\,\Gamma}{\pi}+2\cos(\alpha)\;m\,U\right)$$

$$F_y=\pi\,\rho\left(\frac{\cos(\alpha)\;U\,\Gamma}{\pi}-2\sin(\alpha)\;m\,U\right)$$

わき出しの総和は一般に物体の外に出ないので、$m=0$ として、物体に作用する力：F_x, F_y は、

$$F_x=-\sin(\alpha)\;\rho\,U\,\Gamma,\quad F_y=\cos(\alpha)\;\rho\,U\,\Gamma,\quad L=\rho\,U\,\Gamma\tag{5.4.69}$$

物体に作用するモーメントについて、下記を求め、

$$\begin{aligned}z\left(\frac{d}{d\,z}\,F\right)^2=&-\frac{\Gamma^2}{4\,\pi^2\,z}+\frac{i\,e^{-i\,\alpha}\,U\,\Gamma}{\pi}+\frac{i\,m\,\Gamma}{\pi\,z}-\frac{i\,A_2\,\Gamma}{\pi\,z^2}-\frac{2\,i\,A_3\,\Gamma}{\pi\,z^3}-\frac{3\,i\,A_4\,\Gamma}{\pi\,z^4}+e^{-2\,i\,\alpha}\,z\,U^2\\&-\frac{2\,A_2\,e^{-i\,\alpha}\,U}{z}-\frac{4\,A_3\,e^{-i\,\alpha}\,U}{z^2}-\frac{6\,A_4\,e^{-i\,\alpha}\,U}{z^3}+2\,e^{-i\,\alpha}\,m\,U+\frac{m^2}{z}\\&-\frac{2\,A_2\,m}{z^2}-\frac{4\,A_3\,m}{z^3}+\frac{A_2^2}{z^3}+\ldots\end{aligned}$$

物体に作用するモーメント：M は、Blasius の定理：(5.4.28) 式から、積分を留数定理を用いて解き、

$$\begin{aligned}i\,N+M=&-\frac{\rho}{2}\int z\left(\frac{d}{d\,z}\,F\right)^2dz\\=&-i\,\pi\,\rho\left(-\frac{\Gamma^2}{4\,\pi^2}+\frac{i\,m\,\Gamma}{\pi}-2\,A_2\,e^{-i\,\alpha}\,U+m^2\right)\end{aligned}$$

以上から、物体に作用するモーメント：M は、

$$M=-\pi\,\rho\left(-\frac{m\,\Gamma}{\pi}-2\,A_2\sin(\alpha)\;U\right)$$

上記同様、$m=0$ として、

$$M=2\,\pi\,A_2\sin(\alpha)\;\rho\,U\tag{5.4.70}$$

5.4.18 二次元翼に作用する揚力 (写像関数を用いた)

写像関数を用いて、二次元翼形状を円写像する場合、一様流中の翼の揚力性能について調べる。

なお、下記のプログラムは、前前項、前項に続いて実行する。

```
ZT1:z=\zeta+B[1]/\zeta+B[2]/\zeta^2
  +B[3]/\zeta^3+B[4]/\zeta^4;
ZT2:lhs(ZT1)=rhs(ZT1)-\zeta+Z;
solve(ZT2,Z)[1];
ZT3:expand(subst([Z=\zeta],%));
ZT30:rhs(ZT3)-z;
ZT301:-B[1]/zeta-B[2]/zeta^2-B[3]/zeta^3
  -B[4]/zeta^4=b;
ZT302:b=-B[1]/zeta-B[2]/zeta^2-B[3]/zeta^3
  -B[4]/zeta^4;
ZT31:1/\zeta;
ZT32:1/\zeta^2;
ZT33:1/\zeta^3;
subst([\zeta=b+z],ZT31);
taylor(%,b,0,2);
subst([ZT302],%);
expand(%);
ZT4:\zeta=z-B[1]/z-sum(C[n]/z^n,n,2,inf);
ZT41:\zeta=z-B[1]/z-C[2]/z^2-C[3]/z^3;
ZT42:\zeta=z*(1-B[1]/z^2-C[2]/z^3-C[3]
 /z^4);
ZT43:d=-B[1]/z^2-C[2]/z^3-C[3]/z^4;
ZT44:\zeta=z*(1+d);
```

翼より十分遠方では、翼を表す z 平面と写像円を表す ζ 平面とで $z\sim\zeta$ でなければならない。そこで円に写像する関数は、一般的に下記で表すことができる。

$$z=\zeta+\frac{B_1}{\zeta}+\frac{B_2}{\zeta^2}+\frac{B_3}{\zeta^3}+\frac{B_4}{\zeta^4}+... \tag{5.4.71}$$

ζ を z で表す式を求める。まず、上式から ζ を求め、右辺の z 以外を b とする。

$$\begin{aligned}\zeta&=-\frac{B_1}{\zeta}-\frac{B_2}{\zeta^2}-\frac{B_3}{\zeta^3}-\frac{B_4}{\zeta^4}+z\\ b&=-\frac{B_1}{\zeta}-\frac{B_2}{\zeta^2}-\frac{B_3}{\zeta^3}-\frac{B_4}{\zeta^4}\end{aligned} \tag{5.4.72}$$

$b<<z$ であるので、b で Taylor 展開し、展開すると、

$$\begin{aligned}\frac{1}{\zeta}=&\frac{1}{z+b}\\ =&-\frac{-\frac{B_1}{\zeta}-\frac{B_2}{\zeta^2}-\frac{B_3}{\zeta^3}-\frac{B_4}{\zeta^4}}{z^2}\\ &+\frac{\left(-\frac{B_1}{\zeta}-\frac{B_2}{\zeta^2}-\frac{B_3}{\zeta^3}-\frac{B_4}{\zeta^4}\right)^2}{z^3}+\frac{1}{z}\\ =&\frac{B_1}{z^2\,\zeta}+\frac{B_2}{z^2\,\zeta^2}+\frac{B_1^2}{z^3\,\zeta^2}+\frac{B_3}{z^2\,\zeta^3}+\frac{2\,B_1\,B_2}{z^3\,\zeta^3}+\frac{1}{z}+...\end{aligned}$$

上式を (5.4.72) 式に代入し、更に、この作業を繰り返すと次の関係式が得られる。後にわかるが、ここの問題では C_n を明らかにする必要はない。

$$\zeta=-\left(\sum_{n=2}^{\infty}\frac{C_n}{z^n}\right)+z-\frac{B_1}{z} \tag{5.4.73}$$

上式で、C_3 までとし、

$$\zeta=z-\frac{B_1}{z}-\frac{C_2}{z^2}-\frac{C_3}{z^3}$$

下記のように表現する。

$$\zeta=(d+1)\,z,\quad (d=-\frac{B_1}{z^2}-\frac{C_2}{z^3}-\frac{C_3}{z^4}) \tag{5.4.74}$$

```
F1:%e^(-%i*\alpha)*U*\zeta;
F2:%e^(%i*\alpha)*U*R^2/\zeta;
F3:%i*\gamma/2/%pi*log(\zeta);
F0:F=F1+F2+F3;
F11:subst([ZT41],F1);
F12:expand(%);
F21:subst([ZT44],F2);
taylor(%,d,0,3);
subst([ZT43],%);
F22:expand(%);
F31:subst([ZT44],F3);
%i*\gamma/2/%pi*log(z)+%i*\gamma/2/%pi
  *log(1+d);
taylor(%,d,0,3);
subst([ZT43],%);
F32:expand(%);
```

渦循環がある一様流中の半径：R の円柱まわりの流れの複素ポテンシャルは、(5.4.41) 式から、

$$F=\frac{i\,\Gamma\log\left(\zeta\right)}{2\,\pi}+e^{-i\,\alpha}\,U\,\zeta+\frac{e^{i\,\alpha}\,R^2\,U}{\zeta} \tag{5.4.75}$$

(5.4.75) 式の右辺第二項に (5.4.74) 式の関係を代入し、展開すると、

$$\begin{aligned}e^{-i\,\alpha}\,U\,\zeta=&e^{-i\,\alpha}\,\left(z-\frac{B_1}{z}-\frac{C_2}{z^2}-\frac{C_3}{z^3}\right)\,U\\ =&e^{-i\,\alpha}\,z\,U-\frac{B_1\,e^{-i\,\alpha}\,U}{z}\\ &-\frac{C_2\,e^{-i\,\alpha}\,U}{z^2}-\frac{C_3\,e^{-i\,\alpha}\,U}{z^3}\end{aligned}$$

(5.4.75) 式の右辺第三項に (5.4.74) 式の関係を代入し、展開すると、

$$\begin{aligned}\frac{e^{i\,\alpha}\,R^2\,U}{\zeta} =&\frac{e^{i\,\alpha}\,R^2\,U}{(d+1)\;z}\\ =&\frac{e^{i\,\alpha}\,R^2\,U}{z}-\frac{e^{i\,\alpha}\,R^2\,U\,d}{z}+\frac{e^{i\,\alpha}\,R^2\,U\,d^2}{z}-\frac{e^{i\,\alpha}\,R^2\,U\,d^3}{z}+...\\ =&-\frac{e^{i\,\alpha}\,\left(-\frac{B_1}{z^2}-\frac{C_2}{z^3}-\frac{C_3}{z^4}\right)\,R^2\,U}{z}-\frac{e^{i\,\alpha}\,\left(-\frac{B_1}{z^2}-\frac{C_2}{z^3}-\frac{C_3}{z^4}\right)^3\,R^2\,U}{z}\\ &+\frac{e^{i\,\alpha}\,\left(-\frac{B_1}{z^2}-\frac{C_2}{z^3}-\frac{C_3}{z^4}\right)^2\,R^2\,U}{z}+\frac{e^{i\,\alpha}\,R^2\,U}{z}\\ =&\frac{e^{i\,\alpha}\,R^2\,U}{z}+\frac{B_1\,e^{i\,\alpha}\,R^2\,U}{z^3}+\frac{C_2\,e^{i\,\alpha}\,R^2\,U}{z^4}+\frac{C_3\,e^{i\,\alpha}\,R^2\,U}{z^5}+\frac{B_1^2\,e^{i\,\alpha}\,R^2\,U}{z^5}+...\end{aligned}$$

(5.4.75) 式の右辺第一項に (5.4.74) 式の関係を代入し、展開すると、

$$\begin{aligned}\frac{i\log\left((d+1)\;z\right)\,\Gamma}{2\,\pi} =&\frac{i\log\left(z\right)\,\Gamma}{2\,\pi}+\frac{i\log\left(d+1\right)\,\Gamma}{2\,\pi}\\ =&\frac{i\log\left(z\right)\,\Gamma}{2\,\pi}+\frac{i\,\Gamma\,d}{2\,\pi}-\frac{i\,\Gamma\,d^2}{4\,\pi}+\frac{i\,\Gamma\,d^3}{6\,\pi}+...\\ =&\frac{i\log\left(z\right)\,\Gamma}{2\,\pi}+\frac{i\,\left(-\frac{B_1}{z^2}-\frac{C_2}{z^3}-\frac{C_3}{z^4}\right)\,\Gamma}{2\,\pi}+\frac{i\,\left(-\frac{B_1}{z^2}-\frac{C_2}{z^3}-\frac{C_3}{z^4}\right)^3\,\Gamma}{6\,\pi}-\frac{i\,\left(-\frac{B_1}{z^2}-\frac{C_2}{z^3}-\frac{C_3}{z^4}\right)^2\,\Gamma}{4\,\pi}+...\\ =&\frac{i\log\left(z\right)\,\Gamma}{2\,\pi}-\frac{i\,B_1\,\Gamma}{2\,\pi\,z^2}-\frac{i\,C_2\,\Gamma}{2\,\pi\,z^3}-\frac{i\,C_3\,\Gamma}{2\,\pi\,z^4}+...\end{aligned}$$

```
F4:F=F12+F22+F32;
F41:coeff(rhs(F4),z,1);
F42:coeff(rhs(F4),log(z),1);
F43:coeff(rhs(F4),z,-1);
F44:coeff(rhs(F4),z,-2);
F45:F=F41*z+F42*log(z)+F43/z+F44/z^2;
DF45:'diff(F,z)=diff(rhs(F45),z,1);
DF451:expand(DF45^2);
COFF4:coeff(rhs(DF451),z,-1);
F[x]-%i*F[y]=%i*\rho/2*2*%pi*%i*COFF4;
FXY4:lhs(%)=rectform(rhs(%));
```

```
FX4:F[x]=realpart(rhs(FXY4));
FY4:F[y]=-imagpart(rhs(FXY4));
L=sqrt(rhs(FX2)^2+rhs(FY2)^2);
L1:trigsimp(%);
ZDF451:expand(z*DF451);
MXY1:M+%i*N=-\rho/2*'integrate(lhs(ZDF451)
  ,z);
COFF2:coeff(rhs(ZDF451),z,-1);
MXY1:M+%i*N=-\rho/2*2*%pi*%i*COFF2;
MXY2:lhs(MXY1)=rectform(rhs(%));
M1:M=realpart(realpart(rhs(MXY2)));
```

上式をまとめ、$1/z^2$ の項までを整理すると、

$$F=\frac{-\frac{i\,B_1\,\Gamma}{2\,\pi}-C_2\,e^{-i\,\alpha}\,U}{z^2}+\frac{i\log\left(z\right)\,\Gamma}{2\,\pi}+\frac{e^{i\,\alpha}\,R^2\,U-B_1\,e^{-i\,\alpha}\,U}{z}+e^{-i\,\alpha}\,z\,U \tag{5.4.76}$$

上式を微分し、その二乗は、

$$\frac{d}{d\,z}\,F=-\frac{2\,\left(-\frac{i\,B_1\,\Gamma}{2\,\pi}-C_2\,e^{-i\,\alpha}\,U\right)}{z^3}+\frac{i\,\Gamma}{2\,\pi\,z}-\frac{e^{i\,\alpha}\,R^2\,U-B_1\,e^{-i\,\alpha}\,U}{z^2}+e^{-i\,\alpha}\,U$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{d}{d\,z}\,F\right)^2 =&-\frac{\Gamma^2}{4\,\pi^2\,z^2}-\frac{B_1\,\Gamma^2}{\pi^2\,z^4}-\frac{B_1^2\,\Gamma^2}{\pi^2\,z^6}-\frac{i\,e^{i\,\alpha}\,R^2\,U\,\Gamma}{\pi\,z^3}-\frac{2\,i\,B_1\,e^{i\,\alpha}\,R^2\,U\,\Gamma}{\pi\,z^5}+\frac{i\,e^{-i\,\alpha}\,U\,\Gamma}{\pi\,z}\\ &+\frac{3\,i\,B_1\,e^{-i\,\alpha}\,U\,\Gamma}{\pi\,z^3}+...+e^{-2\,i\,\alpha}\,U^2\end{aligned}$$

翼に作用する力：F_x, F_y は、Blasius の定理：(5.4.27) 式から、積分を留数定理を用いて解き、

$$F_x-i\,F_y=\frac{i\,\rho}{2}\int\left(\frac{d}{d\,z}\,F\right)^2 dz=-i\,e^{-i\,\alpha}\,\rho\,U\,\Gamma=-\sin\left(\alpha\right)\,\rho\,U\,\Gamma-i\cos\left(\alpha\right)\,\rho\,U\,\Gamma \tag{5.4.77}$$

上式から、揚力：L は、

$$F_x=-\sin\left(\alpha\right)\,\rho\,U\,\Gamma,\quad F_y=\cos\left(\alpha\right)\,\rho\,U\,\Gamma,\quad L=\rho\,U\,\Gamma \tag{5.4.78}$$

翼に作用するモーメントについて、下記を求め、

$$
\begin{aligned}
z\left(\frac{d}{d\,z}\,F\right)^2 =& -\frac{\Gamma^2}{4\,\pi^2\,z}-\frac{B_1\,\Gamma^2}{\pi^2\,z^3}-\frac{B_1^2\,\Gamma^2}{\pi^2\,z^5}-\frac{i\,e^{i\,\alpha}\,R^2\,U\,\Gamma}{\pi\,z^2}-\frac{2\,i\,B_1\,e^{i\,\alpha}\,R^2\,U\,\Gamma}{\pi\,z^4}+\frac{3\,i\,B_1\,e^{-i\,\alpha}\,U\,\Gamma}{\pi\,z^2}+\frac{2\,i\,C_2\,e^{-i\,\alpha}\,U\,\Gamma}{\pi\,z^3}\\
&+\frac{2\,i\,B_1^2\,e^{-i\,\alpha}\,U\,\Gamma}{\pi\,z^4}+\frac{4\,i\,B_1\,C_2\,e^{-i\,\alpha}\,U\,\Gamma}{\pi\,z^5}+\frac{i\,e^{-i\,\alpha}\,U\,\Gamma}{\pi}+\frac{e^{2\,i\,\alpha}\,R^4\,U^2}{z^3}-\frac{2\,R^2\,U^2}{z}-\frac{2\,B_1\,R^2\,U^2}{z^3}\\
&-\frac{4\,C_2\,R^2\,U^2}{z^4}+e^{-2\,i\,\alpha}\,z\,U^2+\frac{2\,B_1\,e^{-2\,i\,\alpha}\,U^2}{z}+\frac{4\,C_2\,e^{-2\,i\,\alpha}\,U^2}{z^2}+\frac{B_1^2\,e^{-2\,i\,\alpha}\,U^2}{z^3}+\frac{4\,B_1\,C_2\,e^{-2\,i\,\alpha}\,U^2}{z^4}\\
&+\frac{4\,C_2^2\,e^{-2\,i\,\alpha}\,U^2}{z^5}
\end{aligned}
$$

翼に作用するモーメント：M は、Blasius の定理：(5.4.28) 式から、積分を留数定理を用いて解き、

$$
\begin{aligned}
i\,N+M &= -\,i\,\pi\,\rho\left(-\frac{\Gamma^2}{4\,\pi^2}-2\,R^2\,U^2+2\,B_1\,e^{-2\,i\,\alpha}\,U^2\right)\\
&= -\,i\,\pi\,\rho\left(-\frac{\Gamma^2}{4\,\pi^2}-2\,R^2\,U^2+2\,B_1\cos\left(2\,\alpha\right)\,U^2\right)-2\,\pi\,B_1\sin\left(2\,\alpha\right)\,\rho U^2
\end{aligned}
\tag{5.4.79}
$$

翼に作用するモーメント：M は、

$$
M=-2\,\pi\,B_1\sin\left(2\,\alpha\right)\,\rho U^2 \tag{5.4.80}
$$

5.4.19 二次元平板翼

二次元平板翼の揚力特性を求める。

なお、下記のプログラムは、前前項、前項に続いて実行する。

```
B11:B[1]=A^2;
Z0:z=x+%i*y;
Z1:z=\zeta+A^2/\zeta;
ZT1:\zeta=\sigma*%e^(%i*\eta);
ZT2:\zeta=R*%e^(%i*\eta);

Z2:subst([ZT2,Z0],Z1);
X1:realpart(Z2);
Y1:imagpart(Z2);
CO1:solve(X1,cos(\eta))[1];
SI1:solve(Y1,sin(\eta))[1];
COSI1:cos(\eta)^2+sin(\eta)^2=1;
COSI2:subst([CO1,SI1],COSI1);
COSI3:x^2/a^2+y^2/b^2=1;
A1:first(lhs(COSI2))=last(lhs(COSI3));
B1:last(lhs(COSI2))=first(lhs(COSI3));
A2:solve(A1,a)[2];
B2:solve(B1,b)[2];
AB1:solve([A1,B1],[R,A])[2];
R2:AB1[1];
A2:AB1[2];
R3:subst([b=0],R2);
A3:subst([b=0],A2);
M2:subst([B11,A2],M1);
```

Joukowski 変換：(5.4.15) 式を用いて、半径：R の円を半軸：a,b の楕円 (平板を含む) に変換する。変換関数は下記となる。

$$z=\zeta+\frac{A^2}{\zeta} \tag{5.4.81}$$

ここで (5.4.71) 式の一般的な変換関数との関係は、

$$B_1=A^2,\quad B_n=0\quad (n=2\to\infty) \tag{5.4.82}$$

形状を求めるため、次式を上式に代入し、

$$z=i\,y+x,\quad \zeta=e^{i\,\eta}\,R$$

$$i\,y+x=e^{i\,\eta}\,R+\frac{e^{-i\,\eta}\,A^2}{R}$$

上式から、

$$x=\cos(\eta)\;R+\frac{\cos(\eta)\;A^2}{R}$$

$$y=\sin(\eta)\;R-\frac{\sin(\eta)\;A^2}{R}$$

また、下記の関係から、

$$\sin(\theta)^2+\cos(\theta)^2=1$$

次式の楕円の式と対照し、

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{x^2}{a^2}=1$$

次式の関係が得られる。

$$a=\frac{R^2+A^2}{R},\quad b=\frac{R^2-A^2}{R}$$

また、

$$R=\frac{b+a}{2},\quad A=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{2} \tag{5.4.83}$$

平板では、

$$R=\frac{a}{2},\quad A=\frac{a}{2} \tag{5.4.84}$$

```
F0;
DFZT1:'diff(F,\zeta,1)=diff(rhs(F0),\zeta,
 1);
DZZT1:'diff(z,\zeta,1)=diff(rhs(Z1),\zeta,
 1);
DFZ1:'diff(F,z,1)=rhs(DFZT1)/rhs(DZZT1);
DDFZ1:denom(rhs(DFZ1))=0;
solve(%,\zeta);
AZT1:%[2];
NDFZ1:num(rhs(DFZ1))=0;
subst([AZT1,R3,A3],%);
GM1:trigrat(solve(%,\gamma)[1]);
L2:subst([GM1],L1);
M3:subst([b=0],M2);
d=trigrat(rhs(M3)/rhs(L2)/cos(\alpha));
C[L]=rhs(L2)/(1/2*\rho*U^2*2*a);
```

渦循環がある一様流中の半径：R の円柱まわりの流れの複素ポテンシャルは、(5.4.41) 式から、

$$F=\frac{i\,\Gamma\log(\zeta)}{2\,\pi}+e^{-i\,\alpha}\,U\,\zeta+\frac{e^{i\,\alpha}\,R^2\,U}{\zeta} \tag{5.4.85}$$

翼まわりの流速を求めるため、下記の関係から、

$$\frac{d}{d\,\zeta}\,F=\frac{i\,\Gamma}{2\,\pi\,\zeta}-\frac{e^{i\,\alpha}\,R^2\,U}{\zeta^2}+e^{-i\,\alpha}\,U$$

$$\frac{d}{d\,\zeta}\,z=1-\frac{A^2}{\zeta^2}$$

翼まわりの流速は、

$$\frac{d}{d\,z}\,F=v_x-i\,v_y=\frac{\frac{i\,\Gamma}{2\,\pi\,\zeta}-\frac{e^{i\,\alpha}\,R^2\,U}{\zeta^2}+e^{-i\,\alpha}\,U}{1-\frac{A^2}{\zeta^2}} \tag{5.4.86}$$

上式は分母が零のとき、発散し、

$$1-\frac{A^2}{\zeta^2}=0$$

その場所は、下記で前縁と、後縁である。

$$\zeta=-A,\zeta=A$$

後縁で流速が有限であるように、分子も零とすると

$$\frac{i\,\Gamma}{2\,\pi\,\zeta}-\frac{e^{i\,\alpha}\,R^2\,U}{\zeta^2}+e^{-i\,\alpha}\,U=0$$

$\zeta = A$ を上記に代入し、

$$\frac{i\,\Gamma}{\pi\,a}-e^{i\,\alpha}\,U+e^{-i\,\alpha}\,U=0$$

以上から、後縁で流速が有限となる渦循環強さ：Γ が得られた。

$$\Gamma = 2\,\pi\,a\sin(\alpha)\,U \tag{5.4.87}$$

(5.4.78) 式から、二次元平板翼の揚力：L は、

$$L = 2\,\pi\,a\sin(\alpha)\,\rho\,U^2 \tag{5.4.88}$$

(5.4.80) 式に (5.4.82) 式、(5.4.84) 式を代入し、二次元平板翼のモーメントは、

$$M=-\frac{\pi\,a^2\sin(2\,\alpha)\,\rho\,U^2}{2}$$

揚力の翼に垂直な成分は $L\cos(\alpha)$ であるから、翼の作用点：d は

$$d=-\frac{a}{2}$$

前縁から 1/4 コード長さの位置である。揚力を無次元化すると、

$$C_L=\frac{L}{\frac{\rho\,U^2\,2\,a}{2}}=2\,\pi\sin(\alpha) \tag{5.4.89}$$

```
P1:p=1-rhs(DFZ1)^2/U^2;
P2:subst([GM1,\zeta=R*%e^(%i*\theta),R3,A3,
  \theta=t],P1);
YT1:trigrat(%);
X1:subst([Z0,\zeta=R*%e^(%i*\theta),R3,A3,
  \theta=t],Z1);
X2:realpart(%);
YT3:subst([\alpha=%pi/6,a=1],rhs(YT1));
X3:subst([\alpha=%pi/6,a=1],rhs(X2));
plot2d([parametric,X3,-YT3,[t,0,%pi*2],
  [nticks,100]],[x,-2,2],[y,-2,10]);
```

翼まわりの圧力分布は、(5.4.86) 式の流速から、

$$\begin{aligned}p=&1-\frac{\mathrm{rhs}\left(\frac{d}{d\,z}\,F\right)^2}{U^2}\\=&1-\frac{\left(\frac{i\,\gamma}{2\,\pi\,\zeta}-\frac{e^{i\,\alpha}\,R^2\,U}{\zeta^2}+e^{-i\,\alpha}\,U\right)^2}{U^2\left(1-\frac{A^2}{\zeta^2}\right)^2}\\=&-\frac{\cos(t-2\,\alpha)-\cos(t)}{\cos(t)+1}\end{aligned}$$

$\alpha=\frac{\pi}{6}, a=1$ で圧力分布を描くと、

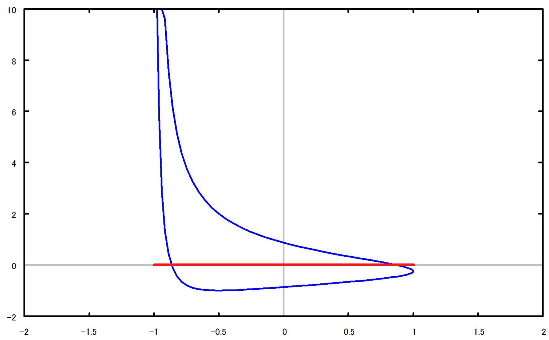


図 5.4.30: 二次元平板翼まわりの圧力分布

```
ZT20:solve(Z1,\zeta);
ZT21:ZT20[1];
ZT22:ZT20[2];
ZT23:(rhs(ZT21)*rhs(ZT22));
ZT23=expand(ZT23);
ZT24:%/rhs(ZT21)*2;
F40:subst([ZT22],F1);
F41:subst([ZT22],F2);
F42:subst([ZT24],%);
F45:subst([ZT22],F3);
F44:F=F40+F42+F45;
SQ1:sqrt(z^2-4*A^2)+z;
SQ11:SQ1=z*(1+sqrt(1-4*A^2/z^2));
SQ3:1/SQ1;
SQ5:sqrt(z^2-4*A^2)-z;
SQ51:SQ5=z*(sqrt(1-4*A^2/z^2)-1);
F401:subst([SQ11],F40);
F411:subst([SQ11],F41);
F421:subst([SQ51],F42);
F451:subst([SQ11],F45);
F441:F=F401+F421+F451;
PS2:\Psi=imagpart(subst([z=x+%i*y,R2,A2,
 GM1],rhs(F441)));
trigsimp(%);
subst([a=1,b=0,U=1,\alpha=%pi/6],PS2);
trigsimp(%);
```

(5.4.81) 式を ζ で解くと、

$$\zeta=-\frac{\sqrt{z^2-4\,A^2}-z}{2},\zeta=\frac{\sqrt{z^2-4\,A^2}+z}{2}$$

翼より十分遠方で $z\sim\zeta$ でなければならないので、次式を用いる。

$$\zeta=\frac{\sqrt{z^2-4\,A^2}+z}{2}$$

また、次式の関係式から、

$$-\frac{\left(\sqrt{z^2-4\,A^2}-z\right)\,\left(\sqrt{z^2-4\,A^2}+z\right)}{4}=A^2$$

次式が得られる。

$$\sqrt{z^2-4\,A^2}+z=-\frac{4\,A^2}{\sqrt{z^2-4\,A^2}-z}$$

これらの式を (5.4.81) 式に代入し、

$$F=\frac{i\log\left(\frac{\sqrt{z^2-4\,A^2}+z}{2}\right)\,\Gamma}{2\,\pi}-\frac{e^{i\,\alpha}\,\left(\sqrt{z^2-4\,A^2}-z\right)\,R^2\,U}{2\,A^2}+\frac{e^{-i\,\alpha}\,\left(\sqrt{z^2-4\,A^2}+z\right)\,U}{2}$$

z で整理し、

$$\sqrt{z^2-4\,A^2}+z=z\left(\sqrt{1-\frac{4\,A^2}{z^2}}+1\right)$$

$$\sqrt{z^2-4\,A^2}-z=z\left(\sqrt{1-\frac{4\,A^2}{z^2}}-1\right)$$

代入すると、

$$F=\frac{i\log\left(\frac{z\left(\sqrt{1-\frac{4\,A^2}{z^2}}+1\right)}{2}\right)\,\Gamma}{2\,\pi}-\frac{e^{i\,\alpha}\,z\,\left(\sqrt{1-\frac{4\,A^2}{z^2}}-1\right)\,R^2\,U}{2\,A^2}+\frac{e^{-i\,\alpha}\,z\,\left(\sqrt{1-\frac{4\,A^2}{z^2}}+1\right)\,U}{2}$$

上記の流れ関数は式が長くなるので省略する。上式から $a=1, b=0, U=1, \alpha=\pi/6$ における流線を下記に示す。

```
#!/gnuplot
set xrange [-3:3]
set yrange [-2:2]
set isosamples 150,150
set contour base
set cntrparam levels incremental -20,0.1,20
unset key
unset surface
set view map
splot ((y**4+2*x**2*y**2+x**4)**(0.25)*
 (log((sqrt(y**2+x**2)*sqrt(2*(y**4+2*
 x**2*y**2+x**4)**(0.75)*(y**4+(2*x**2
 +2)*y**2+x**4-2*x**2+1)**(0.25)*cos(
 atan2((2*x*y)/(y**4+2*x**2*y**2+x**4),
 (y**4+(2*x**2+1)*y**2+x**4-x**2)/(y**4
 +2*x**2*y**2+x**4))/2)+sqrt(y**4+2*x**2
 *y**2+x**4)*sqrt(y**4+(2*x**2+2)*y**2
 +x**4-2*x**2+1)+y**4+2*x**2*y**2+x**4))
 /(2*sqrt(y**4+2*x**2*y**2+x**4)))
 +1.7320508*y)+(y**4+(2*x**2+2)*y**2+x**4
 -2*x**2+1)**(0.25)*(y*sin(atan2((2*x*y)/(y
 **4+2*x**2*y**2+x**4),(y**4+(2*x**2+1)*
 y**2+x**4-x**2)/(y**4+2*x**2*y**2+x**4))
 /2)-x*cos(atan2((2*x*y)/(y**4+2*x**2*y**2
 +x**4),(y**4+(2*x**2+1)*y**2+x**4-x**2)/
 (y**4+2*x**2*y**2+x**4))/2)))/(2*(y**4
 +2*x**2*y**2+x**4)**(0.25))
#    EOF
```

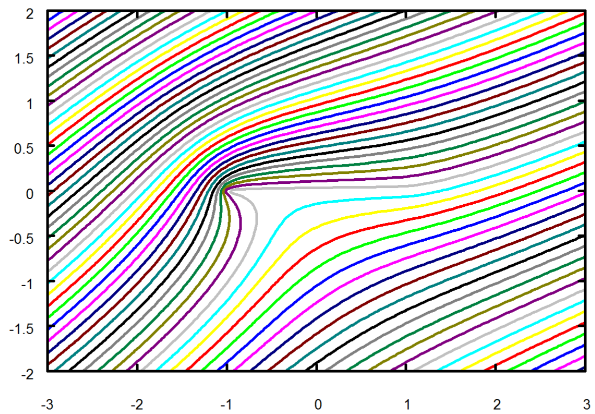


図 5.4.31: 二次元平板翼まわりの流れ

第6章　フーリエ解析

6.1　フーリエ級数

6.1.1　フーリエ級数

```
kill(all);
FX1:f(x)=1/2*a[0]+sum(a[n]*cos(n*x)
 +b[n]*sin(n*x),n,1,inf);
AN1:a[n]=1/%pi*integrate(f(s)*cos(n*s),s,
 -%pi,%pi);
BN1:b[n]=1/%pi*integrate(f(s)*sin(n*s),s,
 -%pi,%pi);
subst([AN1,BN1],FX1);
f(x)=(sum('integrate(f(s)*sin(n*s)*sin(n*x)
 +f(s)*cos(n*s)*cos(n*x),s,-%pi,%pi)
 /%pi,n,1,inf))+a[0]/2;
FX11:factor(%);
(sin(n*s)*sin(n*x)+cos(n*s)*cos(n*x));
CSI1:%=trigrat(%);
expand(subst([CSI1],FX11));
FX2:f(x)=1/2*a[0]+sum(a[n]*cos(2*%pi
 *n*x/L)+b[n]*sin(2*%pi*n*x/L),n,1,inf);
AN2:a[n]=2/L*integrate(f(s)*cos(2*%pi
 *n*s/L),s,-L/2,L/2);
BN2:b[n]=2/L*integrate(f(s)*sin(2*%pi
 *n*s/L),s,-L/2,L/2);
```

$\mathrm{f}(x)$ のフーリエ級数は下記のように表現される。

$$\mathrm{f}(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\,x)+a_n\cos(n\,x)\right)+\frac{a_0}{2} \tag{6.1.1}$$

ここで、

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{f}(s)\,\cos(n\,s)\,ds \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{f}(s)\,\sin(n\,s)\,ds \end{aligned} \tag{6.1.2}$$

上式を (6.1.1) 式に代入すると、

$$\begin{aligned} \mathrm{f}(x) =& \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{f}(s)\,\sin(n\,s)\,ds\sin(n\,x)\right. \\ &\left.+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{f}(s)\,\cos(n\,s)\,ds\cos(n\,x)\right)+\frac{a_0}{2} \end{aligned}$$

下記の関係があり、

$$\sin(n\,s)\,\sin(n\,x)+\cos(n\,s)\,\cos(n\,x)=\cos(n\,x-n\,s)$$

上式を代入して、整理すると、

$$\mathrm{f}(x)=\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{f}(s)\,\cos(n\,x-n\,s)\,ds+\frac{a_0}{2} \tag{6.1.3}$$

また、任意の区間:L では、

$$\begin{aligned} \mathrm{f}(x) =& \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2\,\pi\,n\,x}{L}\right)+a_n\cos\left(\frac{2\,\pi\,n\,x}{L}\right)\right) \\ &+\frac{a_0}{2} \end{aligned} \tag{6.1.4}$$

ここで、

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\mathrm{f}(s)\,\cos\left(\frac{2\,\pi\,n\,s}{L}\right)ds \\ b_n &= \frac{2}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\mathrm{f}(s)\,\sin\left(\frac{2\,\pi\,n\,s}{L}\right)ds \end{aligned} \tag{6.1.5}$$

```
declare(n,integer);
declare(m,integer);
CC0:'integrate(cos(m*x)*cos(n*x),x,
 -%pi,%pi);
CC1:%=ev(%,integrate);
subst([n=m],CC0);
CC2::%=ev(%,integrate);
SS0:'integrate(sin(m*x)*sin(n*x),x,
 -%pi,%pi);
SS1:%=ev(%,integrate);
subst([n=m],SS0);
SS2::%=ev(%,integrate);
CS0:'integrate(cos(m*x)*sin(n*x),x,
 -%pi,%pi);
CS1:%=ev(%,integrate);
subst([n=m],CS0);
CS2::%=ev(%,integrate);
'integrate(lhs(FX1)*cos(m*x),x,-%pi,%pi)=
 'integrate(rhs(FX1)*cos(m*x),x,-%pi,%pi);
lhs(%)=sum('integrate(cos(m*x)*b[n]*
 sin(n*x),x,-%pi,%pi)+'integrate(cos(m*x)
 *a[n]*cos(n*x),x,-%pi,%pi),n,1,inf)
 +'integrate(cos(m*x)*a[0]/2,x,-%pi,%pi);
subst([b[n]=0,a[0]=0,1=m,inf=m],%);
ev(%,sum);
ev(%,integrate);
solve(%,a[m])[1];
```

```
'integrate(lhs(FX1)*sin(m*x),x,-%pi,%pi)=
 'integrate(rhs(FX1)*sin(m*x),x,-%pi,%pi);
lhs(%)=sum('integrate(sin(m*x)*b[n]*
sin(n*x),x,-%pi,%pi)+'integrate(sin(m*x)
*a[n]*cos(n*x),x,-%pi,%pi),n,1,inf)
+'integrate(sin(m*x)*a[0]/2,x,-%pi,%pi);
subst([a[n]=0,a[0]=0,1=m,inf=m],%);
ev(%,sum);
ev(%,integrate);
solve(%,b[m])[1];
```

以下で、係数：a_m, b_m を求める。いま、m, n が正の整数とすると、下記の関係が得られる。

$$\begin{aligned}&\int_{-\pi}^{\pi}\cos(m\,x)\,\cos(n\,x)\,dx=0\\&\int_{-\pi}^{\pi}\cos(m\,x)^2dx=\pi\quad m\neq 0\\&\int_{-\pi}^{\pi}\cos(m\,x)^2dx=2\,\pi\quad m=0\end{aligned}\tag{6.1.6}$$

$$\begin{aligned}&\int_{-\pi}^{\pi}\sin(m\,x)\,\sin(n\,x)\,dx=0\\&\int_{-\pi}^{\pi}\sin(m\,x)^2dx=\pi\quad m\neq 0\\&\int_{-\pi}^{\pi}\sin(m\,x)^2dx=0\quad m=0\end{aligned}\tag{6.1.7}$$

$$\begin{aligned}&\int_{-\pi}^{\pi}\cos(m\,x)\,\sin(n\,x)\,dx=0\\&\int_{-\pi}^{\pi}\cos(m\,x)\,\sin(m\,x)\,dx=0\end{aligned}\tag{6.1.8}$$

$\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{f}(x)\,\cos(m\,x)\,dx$、$\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{f}(x)\,\sin(m\,x)\,dx$ に (6.1.1) 式を代入し、上記の関係式から、

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{f}(x)\cos(m\,x)\,dx&=\int_{-\pi}^{\pi}\cos(m\,x)\,\left(\left(\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(n\,x)+a_n\cos(n\,x)\right)+\frac{a_0}{2}\right)dx\\&=\left(\sum_{n=1}^{\infty}b_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos(m\,x)\,\sin(n\,x)\,dx+a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos(m\,x)\,\cos(n\,x)\,dx\right)+\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(m\,x)\,dx\\&=a_m\int_{-\pi}^{\pi}\cos(m\,x)^2dx=\pi\,a_m\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{f}(x)\sin(m\,x)\,dx&=\int_{-\pi}^{\pi}\sin(m\,x)\,\left(\left(\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(n\,x)+a_n\cos(n\,x)\right)+\frac{a_0}{2}\right)dx\\&=\left(\sum_{n=1}^{\infty}b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin(m\,x)\,\sin(n\,x)\,dx+a_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin(m\,x)\,\cos(n\,x)\,dx\right)+\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(m\,x)\,dx\\&=b_m\int_{-\pi}^{\pi}\sin(m\,x)^2dx=\pi\,b_m\end{aligned}$$

上式から、(6.1.2) 式が得られる。

$$a_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{f}(x)\,\cos(m\,x)\,dx,\quad b_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{f}(x)\,\sin(m\,x)\,dx\tag{6.1.9}$$

6.1.2　Maxima のフーリエ級数関数

Maxima の関数で、フーリエ級数展開の実行は $fourier$ 関数で行える。実行方法は下記の要領で行う。まず、$fourie$ を load しておく。

$$fourier(\text{関数}, \text{変数}, \text{積分範囲})$$

係数 a_0, a_n, b_n および引継情報が出力される。下記を実行すると、フーリエ級数展開の式が表示される。

$$fourexpand(\text{引継情報}, \text{変数}, \text{積分範囲}, \text{級数の終項})$$

フーリエ級数展開の例題を以降に示す。

6.1.3　フーリエ級数展開例

$f(x) = x$

```
kill(all);
load("fourie");
fourier(x,x,1);
FA0:%t2;
FAN:%t3;
FBN:%t4;
FX11:f(x)=fourexpand(%o4,x,1,inf);
FX13:subst([FA0,FAN,FBN,inf=3],FX11);
FX19:subst([FA0,FAN,FBN,inf=9],FX11);
FX130:subst([FA0,FAN,FBN,inf=30],FX11);
plot2d([x,rhs(FX13),rhs(FX19),rhs(FX130)],
 [x,-1,1],[y,-1.5,2],[legend,"x","N=3",
 "N=9","N=30"],[style,[lines,3,1],
 [lines,3,2],[lines,3,3],[lines,3,4]]);
```

$f(x) = x$ のフーリエ級数展開を範囲:-1〜1 で $fourier$ を実行すると、下記が出力される。

$$(\%t8) \quad a_0 = 0$$

$$(\%t9) \quad a_n = 0$$

$$(\%t10) \quad b_n = 2\left(\frac{\sin(\pi\, n)}{\pi^2\, n^2} - \frac{\cos(\pi\, n)}{\pi\, n}\right)$$

$$(\%o10) \quad [\%t8, \%t9, \%t10]$$

一行目から 3 行目が係数 a_0, a_n, b_n で 4 行目は引継情報である。t の後の数字は Maxima の行数を表す。以上から係数は、

$$a_0 = 0, \quad a_n = 0, \quad b_n = 2\left(\frac{\sin(\pi\, n)}{\pi^2\, n^2} - \frac{\cos(\pi\, n)}{\pi\, n}\right)$$

範囲：-1〜1 で、項数：∞ でフーリエ級数展開の式は $fourexpand$ に引継情報；$\%o10$ を入力すると、下記となる。

$$\mathrm{f}(x) = -\frac{2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n \sin(\pi\, n\, x)}{n}}{\pi}$$

上式で項数：$N = 3,\ N = 9,\ N = 30$ で $\mathrm{f}(x)$ を表現すると下記となる。

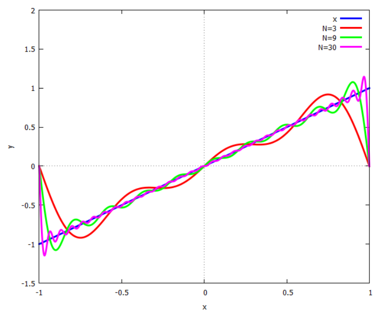


図 6.1.1: $f(x) = x$ のフーリエ級数展開

$f(x) = |x|$

```
kill(all);
load("fourie");
fourier(abs(x),x,1);
FA0:%t2;
FAN:%t3;
FBN:%t4;
FX12:f(x)=fourexpand(%o4,x,1,inf);
FX13:subst([FA0,FAN,FBN,inf=3],FX12);
FX19:subst([FA0,FAN,FBN,inf=9],FX12);
FX130:subst([FA0,FAN,FBN,inf=30],FX12);
plot2d([abs(x),rhs(FX13),rhs(FX19),
 rhs(FX130)],[x,-1,1],[y,-0.5,2],
 [legend,"x","N=3","N=9","N=30"],
 [style,[lines,3,1],[lines,3,2],[lines,3,3]
 ,[lines,3,4]]);
```

$f(x) = |x|$ のフーリエ級数展開を $fourier$ を実行すると係数は、

$$a_0 = \frac{1}{2}$$
$$a_n = 2\left(\frac{\sin(\pi n)}{\pi n} + \frac{\cos(\pi n)}{\pi^2 n^2} - \frac{1}{\pi^2 n^2}\right)$$
$$b_n = 0$$

フーリエ級数展開の式は $fourexpand$ に引継情報を入力すると、下記となる。

$$\mathrm{f}(x) = 2\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{\pi^2 n^2} - \frac{1}{\pi^2 n^2}\right)\cos(\pi n x)\right) + \frac{1}{2}$$

上式で項数：$N = 3$, $N = 9$, $N = 30$ で $\mathrm{f}(x)$ を表現すると下記となる。

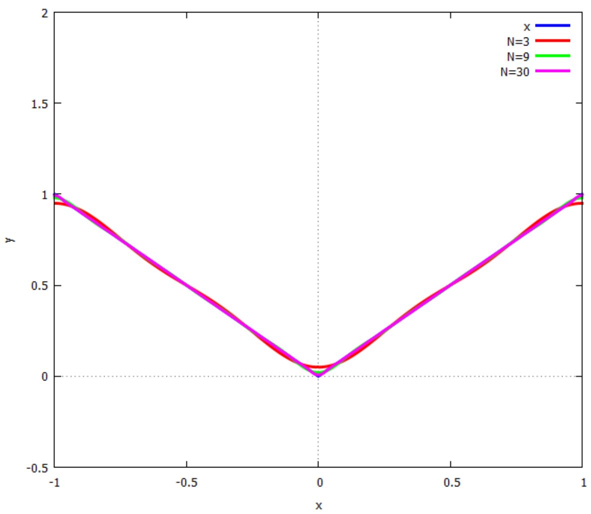


図 6.1.2: $f(x) = |x|$ のフーリエ級数展開

$f(x) = x^2$

```
kill(all);
load("fourie");
fourier(x^2,x,1);
FA0:%t2;
FAN:%t3;
FBN:%t4;
FX12:f(x)=fourexpand(%o4,x,1,inf);
FX13:subst([FA0,FAN,FBN,inf=3],FX12);
FX19:subst([FA0,FAN,FBN,inf=9],FX12);
FX130:subst([FA0,FAN,FBN,inf=30],FX12);
plot2d([x^2,rhs(FX13),rhs(FX19),
 rhs(FX130)],[x,-1,1],[y,-0.5,2],
 [legend,"x","N=3","N=9","N=30"],
 [style,[lines,3,1],[lines,3,2],[lines,3,3]
 ,[lines,3,4]]);
```

$f(x) = x^2$ のフーリエ級数展開を $fourier$ を実行すると係数は、

$$a_0 = \frac{1}{3}$$
$$a_n = 2\left(\frac{\sin(\pi n)}{\pi n} - \frac{2\sin(\pi n)}{\pi^3 n^3} + \frac{2\cos(\pi n)}{\pi^2 n^2}\right)$$
$$b_n = 0$$

フーリエ級数展開の式は $fourexpand$ に引継情報を入力すると、下記となる。

$$\mathrm{f}(x) = \frac{4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n \cos(\pi n x)}{n^2}}{\pi^2} + \frac{1}{3}$$

上式で項数：$N = 3$, $N = 9$, $N = 30$ で $\mathrm{f}(x)$ を表現すると下記となる。

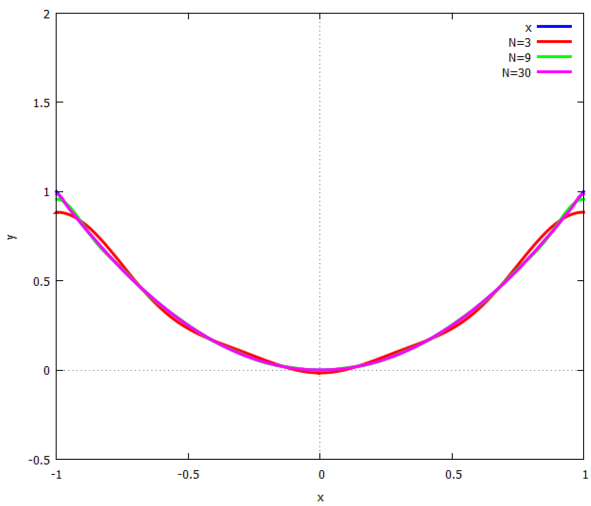


図 6.1.3: $f(x) = x^2$ のフーリエ級数展開

6.1.4　Maxima の高速フーリエ変換 (FFT) 関数

フーリエ変換するデータの数が'2 の n 乗の場合には、高速フーリエ変換 (FFT) が使用でき、変換が高速で行える。高速フーリエ変換 (FFT) する関数は、fft である。2 の n 乗個のリストデータを用意し、下記の要領で実行する。まず、fft を load しておく。

fft(リストデータのファイル名)

高速フーリエ変換

```
kill(all);
load("fft");
N:32;
M:3;
L:6;
A:2;
B:1;
for J:1 thru N do (
if J=1 then listfft:[ float(A*sin((J-1)*M/
 N*2*%pi)+B*cos((J-1)*L/N*2*%pi)  ) ]
else listfft:append(listfft, [ float(A*
 sin((J-1)*M/N*2*%pi)+B*cos((J-1)
 *L/N*2*%pi)  ) ]));
```

例として、次式のデータのリストを作成する。

$$A\sin\left(\frac{2\pi\ (J-1)\ M}{N}\right)+B\cos\left(\frac{2\pi\ (J-1)\ L}{N}\right)$$

上式で、$M=3, L=6, A=2, B=1$ でデータ数：$N=32$ とすると、作成したリストデータは下記となる。

$$[1.0, 1.493823898404294, 1.140652283836026, 1.037691028295174, 1.414213562373095, 1.314060176543544, -0.058260083543632, -2.04562265697018, -3.0, -2.045622656970182, -0.058260083543633, 1.314060176543543, 1.414213562373095, 1.037691028295174, 1.140652283836026, 1.493823898404294, 1.0, -0.72845703367411, -2.55486584620912, -2.885450093317749, -1.414213562373095, 0.53369888847903, 1.472473645916727, 1.280255792240001, 1.0, 1.28025579224, 1.472473645916729, 0.53369888847903, -1.414213562373095, -2.885450093317746, -2.554865846209121, -0.72845703367412]$$

上記リストの名前を listfft として、格納し fft 関数を実行する。

```
L01:fft(listfft);
for J:1 thru N do (
if J=1 then L01R:[[ float(J-1),
 realpart(L01[J])] ]
else L01R:append(L01R, [ [float(J-1),
 realpart(L01[J])]]));
for J:1 thru N do (
if J=1 then L01I:[[ float(J-1),
 imagpart(L01[J]) ]]
else L01I:append(L01I, [[float(J-1),
 imagpart(L01[J])]]));
plot2d([[discrete, L01R],[discrete,L01I]],
 [legend,"cos","sin"],[style,[lines,4,1],
 [lines,4,2]]);
```

高速フーリエ変換 (FFT) 結果のリストは下記となる。

$$[-2.0816681711721685\,10^{-17}, -1.5959455978986625\,10^{-16}\,i-1.6653345369377348\,10^{-16}, -4.163336342344337\,10^{-17}\,i-1.457167719820518\,10^{-16}, 1.0\,i-3.9551695252271202\,10^{-16}, 2.0558150319572812\,10^{-16}\,i-2.8457925813643421\,10^{-16}, 2.3592239273284576\,10^{-16}\,i-9.0205620750793969\,10^{-17}, 3.7470027081099033\,10^{-16}\,i+0.5, 6.0706560206022249\,10^{-17}\,i+1.0654906859119542\,10^{-17}, 2.7755575615628914\,10^{-16}\,i-4.8572257327350599\,10^{-17}, 2.151057110211240\,8\,10^{-16}\,i+8.3266726846886741\,10^{-17}, 4.2327252813834093\,10^{-16}\,i-5.5511151231257827\,10^{-17}, 1.8735013540549517\,10^{-16}\,i+2.9143354396410359\,10^{-16}, 1.0843698854102689\,10^{-16}\,i+2.8457925813643426\,10^{-16}, 2.7061686225238191\,10^{-16}, 1.6653345369377348\,10^{-16}-1.3877787807814457\,10^{-17}\,i, 1.3822491912717625\,10^{-16}-1.1641170872154277\,10^{-17}\,i, 1.1796119636642288\,10^{-16}, 1.9428902930940239\,10^{-16}-2.0816681711721685\,10^{-17}\,i, 6.9388939039072284\,10^{-17}\,i+1.7347234759768071\,10^{-16}, 3.1225022567582528\,10^{-16}-1.1102230246251565\,10^{-16}\,i, 2.8457925813643421\,10^{-16}-1.0843698854102692\,10^{-16}\,i, 2.9837243786801082\,10^{-16}-2.3592239273284576\,10^{-16}\,i, -4.0245584642661925\,10^{-16}\,i, -2.8275116513105356\,10^{-16}\,i-3.8410482474748455\,10^{-17}, -2.7755575615628914\,10^{-16}\,i-4.8572257327350599\,10^{-17}, -3.4694469519536142\,10^{-17}\,i-5.5511151231257827\,10^{-17}, 0.5-4.5102810375396984\,10^{-16}\,i, -1.8735013540549517\,10^{-16}\,i-1.5265566588595902\,10^{-16}, -2.0558150319572809\,10^{-16}\,i-2.8457925813643426\,10^{-16}, -1.0\,i-5.3429483060085659\,10^{-16}, 4.163336342344337\,10^{-17}\,i-1.3877787807814457\,10^{-16}, 2.3368577579718559\,10^{-16}\,i-1.6598049474280516\,10^{-16}]$$

結果は複素数で出力され、実数は cos 項を、虚数は sin 項を表している。結果を図に表すと下図となる。

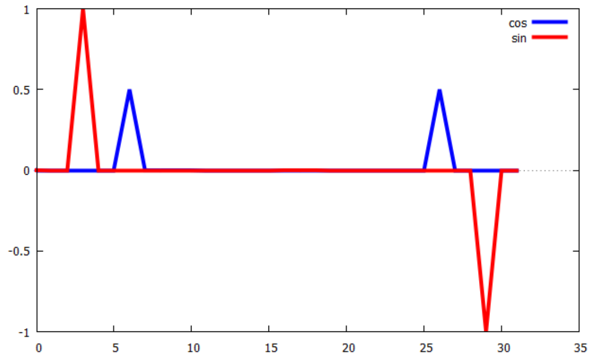


図 6.1.4: 高速フーリエ変換 (FFT) 結果

最初からデータ数の 1/2 までが結果で、以降は前述の対称結果となっている。また、振幅は 1/2 である。

高速逆フーリエ変換

```
L011:inverse_fft(L01);
for J:1 thru N do (
if J=1 then L011R:[ [float(J-1),
 realpart(L011[J]) ]]
else L011R:append(L011R, [[ float(J-1),
 realpart(L011[J])]]));
for J:1 thru N do (
if J=1 then L011I:[ [float(J-1),
 realpart(listfft[J]) ]]
else L011I:append(L011I, [[ float(J-1),
 realpart(listfft[J])]]));
plot2d([[discrete, L011R],[discrete,L011I]],
 [legend,"inverse fft","orig."],
 [style,[lines,4,1],[lines,4,2]]);
```

逆フーリエ変換するデータの数が'2 の n 乗の場合には、高速逆フーリエ変換が使用でき、変換が高速で行える。逆高速フーリエ変換する関数は、*inverse_fft* である。実行方法は下記の要領で行う。まず、fft を load しておく。

$$inverse\_fft(\text{リストデータのファイル名})$$

逆変換するリストデータは複素数で与え、前述の高速フーリエ変換結果を参考に与える。例として、前述の高速フーリエ変換結果を与え、逆変換した結果は下記となり、元のデータと一致している。

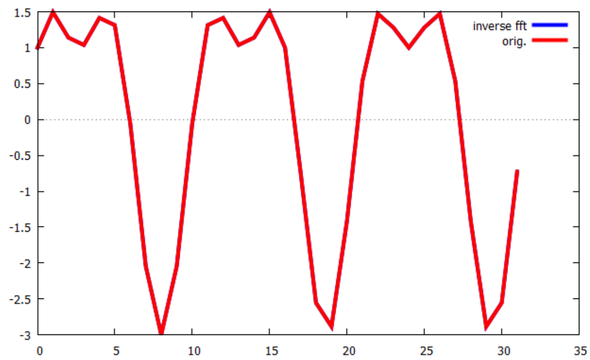


図 6.1.5: 逆高速フーリエ変換 (FFT) 結果

6.2 フーリエ積分

6.2.1 フーリエ積分

関数 : $\mathrm{f}(x)$ のフーリエ級数は (6.1.4) 式で表現できる。

$$\mathrm{f}(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) + a_n \cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) \right) + \frac{a_0}{2} \tag{6.2.1}$$

ここで、

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \mathrm{f}(x) \cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) dx \\ b_n &= \frac{2}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \mathrm{f}(x) \sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) dx \end{aligned} \tag{6.2.2}$$

```
kill(all);
FX2:f(x)=1/2*a[0]+sum(a[n]*cos(2*%pi*n*x/L)
 +b[n]*sin(2*%pi*n*x/L),n,1,inf);
AN2:a[n]=2/L*integrate(f(x)
 *cos(2*%pi*n*x/L),x,-L/2,L/2);
BN2:b[n]=2/L*integrate(f(x)
 *sin(2*%pi*n*x/L),x,-L/2,L/2);
FX5:f(x)=1/2*a[0]+sum(a[n]*cos(2*%pi*n*x/L)
 ,n,1,inf)+sum(b[n]*sin(2*%pi*n*x/L),n,1
 ,inf);
FX51:subst([AN2,BN2],FX5);
K1:(2*%pi*n*x)/L=k[n]*x;
DK1:subst([n=1,x=1],lhs(K1))=dk[n];
%/%pi;
subst([K1],FX51);
f(x)=(sum(sin(k[n]*x)*dk[n]*integrate(f(x)
 *sin(k[n]*x),x,-L/2,L/2),n,1,inf))/%pi
 +(sum(cos(k[n]*x)*dk[n]*integrate(f(x)
 *cos(k[n]*x),x,-L/2,L/2),n,1,inf))/%pi
 +a[0]/2;
FX52:f(x)=(integrate(sin(k*x)*integrate(
 f(x)*sin(k*x),x,-inf,inf),k,0,inf))/%pi
 +(integrate(cos(k*x)*integrate(f(x)
 *cos(k*x),x,-inf,inf),k,0,inf))/%pi;
AK1:A(k)='integrate(f(x)*cos(k*x),x,
 -inf,inf);
AK11:rhs(%)=lhs(%);
BK1:B(k)='integrate(f(x)*sin(k*x),x,
 -inf,inf);
BK11:rhs(%)=lhs(%);
subst([AK11,BK11],FX52);
subst([AK11,BK11],FX52);
```

(6.2.1) 式に (6.2.2) 式を代入し、

$$\begin{aligned} \mathrm{f}(x) =& \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \mathrm{f}(x) \sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) dx \sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) \\ &+ \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \mathrm{f}(x) \cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) dx \cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) \\ &+ \frac{a_0}{2} \end{aligned} \tag{6.2.3}$$

次式の k_n を導入する。k_n の間隔 : dk_n は、

$$\frac{2\pi n x}{L} = k_n x, \quad \frac{2\pi}{L} = dk_n$$

上式を (6.2.3) 式に代入し、積分範囲 : $L \to \infty$ とすると、

$$\begin{aligned} \mathrm{f}(x) =& \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} dk_n \sin(k_n x) \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \mathrm{f}(x) \sin(k_n x)\, dx \\ &+ \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} dk_n \cos(k_n x) \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \mathrm{f}(x) \cos(k_n x)\, dx \\ =& \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \sin(k x) \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{f}(x) \sin(k x)\, dxdk \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \cos(k x) \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{f}(x) \cos(k x)\, dxdk \end{aligned}$$

上式を整理すると、

$$\begin{aligned} \mathrm{f}(x) =& \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \mathrm{B}(k) \sin(k x)\, dk \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \mathrm{A}(k) \cos(k x)\, dk \end{aligned} \tag{6.2.4}$$

ここで、

$$\begin{aligned} \mathrm{A}(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{f}(x) \cos(k x)\, dx \\ \mathrm{B}(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{f}(x) \sin(k x)\, dx \end{aligned} \tag{6.2.5}$$

```
COS1:cos(x)=(%e^(%i*x)+%e^(-%i*x))/2;
SIN1:sin(x)=(%e^(%i*x)-%e^(-%i*x))/(2*%i);
COS2:subst([x=2*%pi*n*x/L],COS1);
SIN2:subst([x=2*%pi*n*x/L],SIN1);
subst([COS2,SIN2],FX2);
FX21:expand(%);
-(%i*b[n]*%e^((2*%i*%pi*n*x)/L))/2+(a[n]
 *%e^((2*%i*%pi*n*x)/L))/2;
DFX31:factor(%);
(%i*b[n]*%e^(-(2*%i*%pi*n*x)/L))/2+(a[n]
 *%e^(-(2*%i*%pi*n*x)/L))/2;
DFX32:factor(%);
CN1:(-%i*b[n]+a[n])/2=c[n];
CN2:(%i*b[n]+a[n])/2=c[n];
CN0:a[0]/2=c[0];
FX3:f(x)=sum(c[n]*%e^((2*%i*%pi*n*x)/L),
 n,1,inf)+sum(c[n]*%e^(-(2*%i*%pi*n*x)/L),
 n,1,inf)+c[0];
FX31:f(x)=sum(c[n]*%e^((2*%i*%pi*n*x)/L),
 n,minf,inf);
```

上式の複素表示を行う。cos, sin を複素表現すると、

$$\cos(x)=\frac{e^{i\,x}+e^{-i\,x}}{2}$$

$$\sin(x)=-\frac{i\,\left(e^{i\,x}-e^{-i\,x}\right)}{2}$$

上式をフーリエ級数の (6.2.1) 式の cos, sin 項の形に変更し、

$$\cos\left(\frac{2\,\pi\,n\,x}{L}\right)=\frac{e^{\frac{2\,i\,\pi\,n\,x}{L}}+e^{-\frac{2\,i\,\pi\,n\,x}{L}}}{2}$$

$$\sin\left(\frac{2\,\pi\,n\,x}{L}\right)=-\frac{i\,\left(e^{\frac{2\,i\,\pi\,n\,x}{L}}-e^{-\frac{2\,i\,\pi\,n\,x}{L}}\right)}{2}$$

上式を (6.2.1) 式に代入すると、

$$\begin{aligned}
\mathrm{f}(x)=&\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\,\left(e^{\frac{2\,i\,\pi\,n\,x}{L}}+e^{-\frac{2\,i\,\pi\,n\,x}{L}}\right)}{2}\right.\\
&\left.-\frac{i\,b_n\,\left(e^{\frac{2\,i\,\pi\,n\,x}{L}}-e^{-\frac{2\,i\,\pi\,n\,x}{L}}\right)}{2}\right)+\frac{a_0}{2}\\
=&\left(\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{i\,b_n\,e^{\frac{2\,i\,\pi\,n\,x}{L}}}{2}+\frac{a_n\,e^{\frac{2\,i\,\pi\,n\,x}{L}}}{2}\right.\\
&\left.+\frac{i\,b_n\,e^{-\frac{2\,i\,\pi\,n\,x}{L}}}{2}+\frac{a_n\,e^{-\frac{2\,i\,\pi\,n\,x}{L}}}{2}\right)+\frac{a_0}{2}
\end{aligned}\tag{6.2.6}$$

$e^{\frac{2\,i\,\pi\,n\,x}{L}}$ の項を整理すると、

$$-\frac{(i\,b_n-a_n)\,e^{\frac{2\,i\,\pi\,n\,x}{L}}}{2}$$

$e^{-\frac{2\,i\,\pi\,n\,x}{L}}$ の項を整理すると、

$$\frac{(i\,b_n+a_n)\,e^{-\frac{2\,i\,\pi\,n\,x}{L}}}{2}$$

そこで、下記のように係数：c_n 定義し、

$$\frac{i\,b_n-a_n}{2}=c_n\quad n>0$$

$$\frac{i\,b_n+a_n}{2}=c_n\quad n<0$$

$$\frac{a_0}{2}=c_0\quad n=0$$

上式の関係を (6.2.6) 式に代入すると、

$$\begin{aligned}
\mathrm{f}(x)=&\left(\sum_{n=1}^{\infty}c_n\,e^{\frac{2\,i\,\pi\,n\,x}{L}}\right)+\left(\sum_{n=-1}^{-\infty}c_n\,e^{-\frac{2\,i\,\pi\,n\,x}{L}}\right)+c_0\\
=&\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\,e^{\frac{2\,i\,\pi\,n\,x}{L}}\right)
\end{aligned}\tag{6.2.7}$$

```
solve(CN1,c[n])[1];
subst([AN2,BN2],%);
subst([COS2,SIN2],%);
expand(%);
c[n]=integrate(f(x)*(%e^(-(2*%i*%pi*n*x)
 /L)),x,-L/2,L/2)/L;
subst([%],FX31);
solve(CN2,c[n])[1];
subst([AN2,BN2],%);
lhs(%)=subst([COS2,SIN2,n=-n],rhs(%));
expand(%);
c[n]=integrate(f(x)*(+%e^(-(2*%i*%pi*n*x)
 /L)),x,-L/2,L/2)/L;
FX41:subst([%],FX31);
K1:2*%pi*n*x/L=k[n]*x;
f(x)=sum(%e^(%i*k[n]*x)*'integrate(f(x)
 *%e^(-(%i*k[n]*x)),x,-L/2,L/2),
 n,-inf,inf)/L;
f(x)='integrate(%e^(%i*k*x)*'integrate(
 f(x)*%e^(-(%i*k*x)),x,-inf,inf),
 k,-inf,inf)/(2*%pi);
FK1:F(k)='integrate(%e^(-%i*k*x)*f(x),
 x,-inf,inf)/(2*%pi);
FX1:f(x)='integrate(%e^(%i*k*x)*F(k),
 k,-inf,inf);
```

```
FK2:F(k)='integrate(%e^(-%i*k*x)*f(x),
 x,-inf,inf)/sqrt(2*%pi);
FX2:f(x)='integrate(%e^(%i*k*x)*F(k),
 k,-inf,inf)/sqrt(2*%pi);
FK3:F(k)='integrate(%e^(-%i*k*x)*f(x)
 ,x,-inf,inf);
FX3:f(x)='integrate(%e^(%i*k*x)*F(k)
 ,k,-inf,inf)/(2*%pi);
```

係数：c_n について、

$$\begin{aligned} c_n =& -\frac{i\,b_n - a_n}{2} \\ =& -\left(\frac{2\,i\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \mathrm{f}(x)\,\sin\left(\frac{2\,\pi\,n\,x}{L}\right)dx}{2\,L} \right. \\ & \left. - \frac{2\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \mathrm{f}(x)\,\cos\left(\frac{2\,\pi\,n\,x}{L}\right)dx}{2\,L}\right) \\ =& -\left(\frac{\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \mathrm{f}(x)\,\left(e^{\frac{2\,i\,\pi\,n\,x}{L}} - e^{-\frac{2\,i\,\pi\,n\,x}{L}}\right)dx}{2\,L} \right. \\ & \left. - \frac{\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \mathrm{f}(x)\,\left(e^{\frac{2\,i\,\pi\,n\,x}{L}} + e^{-\frac{2\,i\,\pi\,n\,x}{L}}\right)dx}{2\,L}\right) \\ =& \frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \mathrm{f}(x)\,e^{-\frac{2\,i\,\pi\,n\,x}{L}}dx \end{aligned} \tag{6.2.8}$$

また、別の係数：c_n について、

$$\begin{aligned} c_n =& \frac{i\,b_n + a_n}{2} \\ =& \frac{2\,i\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \mathrm{f}(x)\,\sin\left(\frac{2\,\pi\,n\,x}{L}\right)dx}{2\,L} \\ & + \frac{2\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \mathrm{f}(x)\,\cos\left(\frac{2\,\pi\,n\,x}{L}\right)dx}{2\,L} \\ =& \frac{\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \mathrm{f}(x)\,\left(e^{\frac{2\,i\,\pi\,n\,x}{L}} + e^{-\frac{2\,i\,\pi\,n\,x}{L}}\right)dx}{2\,L} \\ & + \frac{\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \mathrm{f}(x)\,\left(e^{-\frac{2\,i\,\pi\,n\,x}{L}} - e^{\frac{2\,i\,\pi\,n\,x}{L}}\right)dx}{2\,L} \\ =& \frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \mathrm{f}(x)\,e^{-\frac{2\,i\,\pi\,n\,x}{L}}dx \end{aligned} \tag{6.2.9}$$

(6.2.8) 式、(6.2.9) 式を (6.2.7) 式に代入すると、

$$\begin{aligned} \mathrm{f}(x) =& \frac{1}{L}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\frac{2\,i\,\pi\,n\,x}{L}} \\ & \times \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \mathrm{f}(x)\,e^{-\frac{2\,i\,\pi\,n\,x}{L}}dx \end{aligned} \tag{6.2.10}$$

次式の k_n を導入する。k_n の間隔：dk_n は、

$$\frac{2\,\pi\,n\,x}{L} = k_n\,x, \quad \frac{2\,\pi}{L} = dk_n$$

上式を (6.2.10) 式に代入し、積分範囲：$L \to \infty$ とすると、

$$\begin{aligned} \mathrm{f}(x) =& \frac{1}{2\,\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\,k_n\,x}\,dk_n \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} e^{-i\,k_n\,x}\,\mathrm{f}(x)\,dx \\ =& \frac{1}{2\,\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\,k\,x}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\,k\,x}\,\mathrm{f}(x)\,dxdk \end{aligned}$$

上式から下記のフーリエ積分の関係式が得られる。

$$\begin{aligned} \mathrm{F}(k) =& \frac{1}{2\,\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\,k\,x}\,\mathrm{f}(x)\,dx \\ \mathrm{f}(x) =& \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{F}(k)\,e^{i\,k\,x}dk \end{aligned} \tag{6.2.11}$$

また、下記のようにも表現できる。

$$\begin{aligned} \mathrm{F}(k) =& \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\,k\,x}\,\mathrm{f}(x)\,dx \\ \mathrm{f}(x) =& \frac{1}{2\,\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{F}(k)\,e^{i\,k\,x}dk \end{aligned} \tag{6.2.12}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{F}(k) =& \frac{1}{\sqrt{2}\,\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\,k\,x}\,\mathrm{f}(x)\,dx \\ \mathrm{f}(x) =& \frac{1}{\sqrt{2}\,\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{F}(k)\,e^{i\,k\,x}dk \end{aligned} \tag{6.2.13}$$

6.2.2 畳み込み積分 (インパルス応答)

次式に示す積分を畳み込み積分という。

$$\mathrm{h}(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{f}(\tau)\ \mathrm{g}(x-\tau)\,d\tau \tag{6.2.14}$$

入力：$\mathrm{f}(x)$ とし、それに対するインパルス応答：$\mathrm{g}(x)$ とする。原点において、入力：f(0) のインパルスが与えられたときの出力は $\mathrm{f}(0)\times\mathrm{g}(x)$ となる。入力：$\mathrm{f}(x)$ に対する出力は、ずらした位置における出力を足し合わせることにより得られ、式で記述すると上式となる。

```
kill(all);
FK1:F(k)='integrate(%e^(-%i*k*x)*f(x),x,
 -inf,inf)/(2*%pi);
FX1:f(x)='integrate(%e^(%i*k*x)*F(k),k,
 -inf,inf);
HX1:h(x)='integrate(f(\tau)*g(x-\tau),
 \tau,minf,inf);
HK11:H(k)='integrate(%e^(-%i*k*x)*h(x),x,
 -inf,inf)/(2*%pi);
HK2:subst([HX1],HK11);
Y1:y=x-\tau;
solve(%,x)[1];
H(k)='integrate('integrate(f(tau)*g(y)
 *%e^(-%i*k*(y+tau)),tau,-inf,inf),y,
 -inf,inf)/(2*%pi);
H(k)='integrate('integrate(f(tau)
 *%e^(-%i*k*(tau)),tau,-inf,inf)*
 %e^(-%i*k*(y))*g(y),y,-inf,inf)/(2*%pi);
H(k)=2*%pi*F(k)*G(k);
```

(6.2.11) 式のフーリエ積分の関係式：次式をここで使用する。

$$\mathrm{F}(k)=\frac{1}{2\,\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\,k\,x}\,\mathrm{f}(x)\,dx \tag{6.2.15}$$

$$\mathrm{f}(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{F}(k)\ e^{i\,k\,x}dk \tag{6.2.16}$$

畳み込み積分の出力：$\mathrm{h}(x)$ を (6.2.15) 式にならってフーリエ積分し、(6.2.14) 式を代入すると次式となる。

$$\begin{aligned}\mathrm{H}(k)=&\frac{1}{2\,\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\,k\,x}\,\mathrm{h}(x)\,dx\\ =&\frac{1}{2\,\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\,k\,x}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{f}(\tau)\ \mathrm{g}(x-\tau)\,d\tau dx\end{aligned} \tag{6.2.17}$$

次式の y を導入し、

$$y=x-\tau,\quad x=y+\tau$$

上式を (6.2.17) 式に代入し、下記を得る。

$$\begin{aligned}\mathrm{H}(k)=&\frac{1}{2\,\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{g}(y)\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{f}(\tau)\ e^{-i\,k\,(y+\tau)}d\tau dy\\ =&\frac{1}{2\,\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\,k\,\tau}\,\mathrm{f}(\tau)\,d\tau\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\,k\,y}\,\mathrm{g}(y)\,dy\\ =&2\,\pi\,\mathrm{F}(k)\ \mathrm{G}(k)\end{aligned} \tag{6.2.18}$$

```
FK3:F(k)='integrate(%e^(-%i*k*x)*f(x),x,
 -inf,inf);
FX3:f(x)='integrate(%e^(%i*k*x)*F(k),k,
 -inf,inf)/(2*%pi);
HK1:H(k)='integrate(%e^(-%i*k*x)*h(x),x,
 -inf,inf);
HK2:subst([HX1],HK1);
Y1:y=x-\tau;
solve(%,x)[1];
H(k)='integrate('integrate(f(tau)*g(y)
 *%e^(-%i*k*(y+tau)),tau,-inf,inf),y,
 -inf,inf);
H(k)='integrate('integrate(f(tau)
 *%e^(-%i*k*(tau)),tau,-inf,inf)*
  %e^(-%i*k*(y))*g(y),y,-inf,inf);
H(k)=F(k)*G(k);
```

(6.2.12) 式のフーリエ積分の関係式：次式をここで使用する。

$$\mathrm{F}(k)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\,k\,x}\,\mathrm{f}(x)\,dx \tag{6.2.19}$$

$$\mathrm{f}(x)=\frac{1}{2\,\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{F}(k)\ e^{i\,k\,x}dk \tag{6.2.20}$$

畳み込み積分の出力：$\mathrm{h}(x)$ を (6.2.19) 式にならってフーリエ積分し、(6.2.14) 式を代入すると次式となる。

$$\begin{aligned}\mathrm{H}(k)&=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\,k\,x}\,\mathrm{h}(x)\,dx\\ &=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\,k\,x}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{f}(\tau)\ \mathrm{g}(x-\tau)\,d\tau dx\end{aligned} \tag{6.2.21}$$

次式の y を導入し、

$$y=x-\tau,\quad x=y+\tau$$

上式を (6.2.17) 式に代入し、下記を得る。

$$\begin{aligned}\mathrm{H}(k)=&\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{g}(y)\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{f}(\tau)\ e^{-i\,k\,(y+\tau)}d\tau dy\\ =&\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\,k\,\tau}\,\mathrm{f}(\tau)\,d\tau\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\,k\,y}\,\mathrm{g}(y)\,dy\\ =&\mathrm{F}(k)\ \mathrm{G}(k)\end{aligned} \tag{6.2.22}$$

上式から出力のフーリエ変換結果：$\mathrm{H}(k)$ は、入力のフーリエ変換結果：$\mathrm{F}(k)$ とインパルス応答のフーリエ変換結果：$\mathrm{G}(k)$ の積で得られる。

6.2.3　フーリエ積分例

矩形のフーリエ積分

```
kill(all);
FK1:F(k)='integrate(%e^(-%i*k*x)*f(x),x,
 -inf,inf)/(2*%pi);
FK2:F(k)='integrate(%e^(-%i*k*x)*1,x,
 -T/2,T/2)/(2*%pi);
ev(%,integrate);
FK21:lhs(%)=trigrat(rhs(%));
subst([T=1],rhs(FK21));
plot2d(%,[k,-50,50],[style,[lines,3,1]]);
plot2d([parametric, t,1, [t, -0.5,0.5],
  [nticks, 100]],[x,-1,1],[y,-1,2],
  [style,[lines,3,1]]);
```

矩形：$f(x) = 1,\ -T/2 < x < T/2$ のフーリエ積分結果は、

$$
\begin{aligned}
\mathrm{F}\,(k) &= \frac{\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-i\,k\,x} dx}{2\,\pi} \\
&= \frac{\sin\left(\frac{k\,T}{2}\right)}{\pi\,k}
\end{aligned}
$$

$T = 1$ とすると、下図となる。

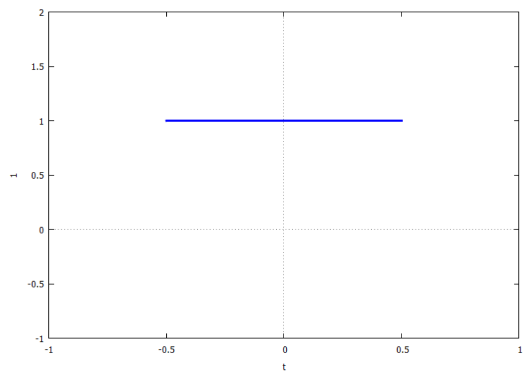


図 6.2.1: [矩形の波形

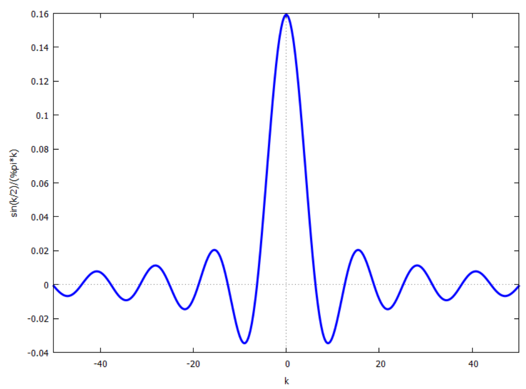


図 6.2.2: 矩形のフーリエ積分結果

指数関数のフーリエ積分

```
assume(a>0);
assume(k>0);
FK3:F(k)='integrate(%e^(-%i*k*x)
 *%e^(-a*x),x,0,inf)/(2*%pi);
ev(%,integrate);
factor(%);
forget(k>0);
assume(k<0);
FK3:F(k)='integrate(%e^(-%i*k*x)
 *%e^(-a*x),x,0,inf)/(2*%pi);
ev(%,integrate);
FK31:factor(%);
subst([a=1],rhs(FK31));
plot2d([realpart(%),imagpart(%)],[k,-5,5],
  [legend,"realpart F(k)","imagpart F(k)"],
  [style,[lines,3,1],[lines,3,2]]);
plot2d([parametric, t,%e^(-t), [t, 0,5],
  [nticks, 100]],[x,-5,5],[y,-1,2],
  [style,[lines,3,1]]);
```

指数関数：$f(x) = e^{-a\,x},\ x > 0$ のフーリエ積分結果は、$a > 0, k > 0$ とすると、

$$
\begin{aligned}
\mathrm{F}\,(k) &= \frac{\int_0^{\infty} e^{-i\,k\,x-a\,x} dx}{2\,\pi} \\
&= -\frac{i\,k+a}{2\,\pi\,(k^2-2\,i\,a\,k-a^2)}
\end{aligned}
$$

$k < 0$ でも同じ結果となる。$a = 1$ とすると、下図となる。

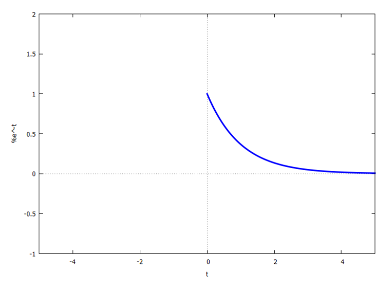


図 6.2.3: 指数関数の波形

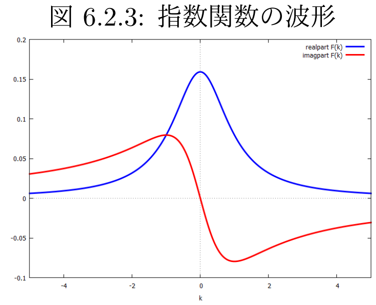


図 6.2.4: 指数関数のフーリエ積分結果

ガウス関数のフーリエ積分

```
assume(a>0);
FK4:F(k)='integrate(%e^(-%i*k*x)*
 %e^(-a^2*x^2),x,-inf,inf)/(2*%pi);
ev(%,integrate);
subst([a=1],rhs(%));
plot2d(%,[k,-10,10],[style,[lines,3,1]]);
plot2d(%e^(-x^2),[x,-5,5],[style,
 [lines,3,1]]);
```

指数関数 : $f(x) = e^{-a^2 x^2}$ のフーリエ積分結果は、$a > 0$ とすると、

$$
\begin{aligned}
\mathrm{F}(k) &= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 x^2 - i k x} dx}{2\pi} \\
&= \frac{e^{-\frac{k^2}{4a^2}}}{2\sqrt{\pi}\, a}
\end{aligned}
$$

$a = 1$ とすると、下図となる。

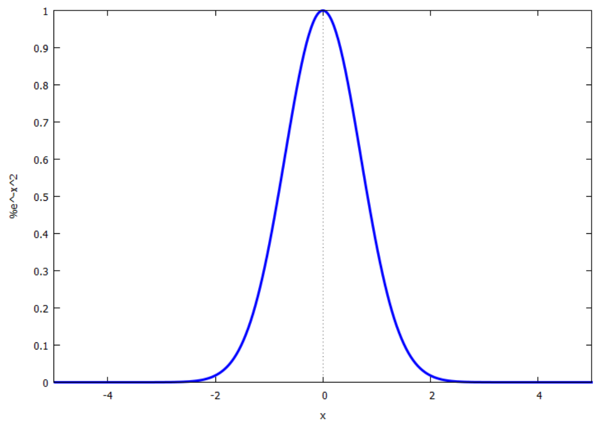


図 6.2.5: ガウス関数の波形

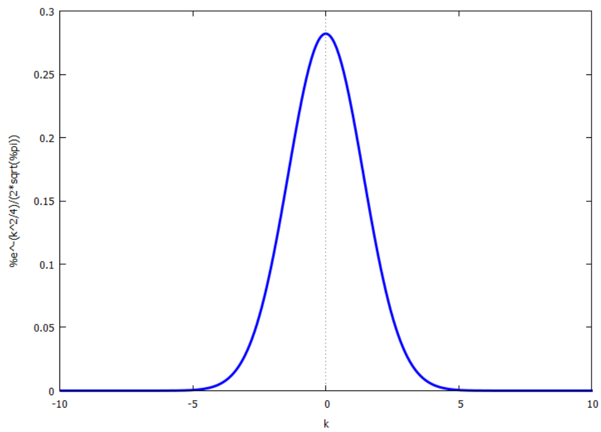


図 6.2.6: ガウス関数のフーリエ積分結果

6.2.4 Hunkel 変換（Hunkel Transform）

(7.1.2) 式、(7.1.3) 式のフーリエ・ベッセル展開は下記である。

$$
\mathrm{f}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \,\mathrm{bessel\_j}(\nu, \alpha_n x)
$$

ここで、

$$
\begin{aligned}
A_n &= \frac{2}{\mathrm{bessel\_j}(\nu+1, \alpha_n)^2} \\
&\quad \times \int_0^1 \mathrm{bessel\_j}(\nu, \alpha_n x)\, x\, \mathrm{f}(x)\, dx
\end{aligned}
$$

```
kill(all);
FR1:f(r)=integrate(k*F[\nu](k)*bessel_j
 (\nu,k*r),k,0,inf);
FK1:F[\nu](k)=integrate(x*f(x)*bessel_j
 (\nu,k*x),x,0,inf);
FR2:subst([FK1],FR1);
```

上式のフーリエ・ベッセル展開に対応した無限積分のフーリエ積分は次式に示す Hunkel 変換である。

$$
\mathrm{f}(r) = \int_0^{\infty} k\, F_\nu(k)\, \mathrm{bessel\_j}(\nu, k\, r)\, dk \qquad (6.2.23)
$$

ここで、

$$
F_\nu(k) = \int_0^{\infty} \mathrm{bessel\_j}(\nu, k\, x)\, x\, \mathrm{f}(x)\, dx \qquad (6.2.24)
$$

上式を (6.2.23) 式に代入すると、

$$
\begin{aligned}
\mathrm{f}(r) &= \int_0^{\infty} k\, \mathrm{bessel\_j}(\nu, k\, r) \\
&\quad \times \int_0^{\infty} \mathrm{bessel\_j}(\nu, k\, x)\, x\, \mathrm{f}(x)\, dx dk
\end{aligned}
$$

6.3 Parseval の等式

(1) フーリエ級数

関数 : $\mathrm{f}(x)$ のフーリエ級数は (6.1.4) 式で表現できる。

$$\mathrm{f}(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2\,\pi\,n\,x}{L}\right)+a_n \cos\left(\frac{2\,\pi\,n\,x}{L}\right)\right)+\frac{a_0}{2} \tag{6.3.1}$$

ここで、

$$\begin{aligned} a_n =& \frac{2\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \mathrm{f}(x)\,\cos\left(\frac{2\,\pi\,n\,x}{L}\right)dx}{L} \\ b_n =& \frac{2\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \mathrm{f}(x)\,\sin\left(\frac{2\,\pi\,n\,x}{L}\right)dx}{L} \end{aligned} \tag{6.3.2}$$

```
kill(all);
f(x)=a[0]/2+sum(a[n]*cos(n*%pi*x/L)+b[n]
 *sin(n*%pi*x/L),n,1,inf);
AN1:a[n]=1/L*integrate(f(x)*cos(n*%pi*x/L),
  x,-L,L);
AN0:subst([n=0],%);
BN1:b[n]=1/L*integrate(f(x)*sin(n*%pi*x/L),
  x,-L,L);
AN01:rhs(AN0)*L=lhs(AN0)*L;
AN11:rhs(AN1)*L=lhs(AN1)*L;
BN11:rhs(BN1)*L=lhs(BN1)*L;
integrate(f(x)^2,x,-L,L)=integrate(f(x)*(
 a[0]/2+sum(a[n]*cos(n*%pi*x/L)+b[n]
  *sin(n*%pi*x/L),n,1,inf)),x,-L,L);
integrate(f(x)^2,x,-L,L)=integrate(f(x)*
 a[0]/2,x,-L,L)+sum(a[n]*integrate(f(x)*
 cos(n*%pi*x/L),x,-L,L)+b[n]*integrate(
 f(x)*sin(n*%pi*x/L),x,-L,L),n,1,inf);
subst([AN01,AN11,BN11],%);
integrate(f(x)^2,x,-L,L)/L=sum(b[n]^2
 +a[n]^2,n,1,inf)+a[0]^2/2;
```

次式の $\mathrm{f}(x)^2$ の一部に (6.3.1) 式を代入すると、

$$\begin{aligned} \int_{-L}^{L} \mathrm{f}(x)^2 dx =& \int_{-L}^{L} \mathrm{f}(x)\left(\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{\pi\,n\,x}{L}\right)\right.\right. \\ & \left.\left. + a_n \cos\left(\frac{\pi\,n\,x}{L}\right)\right)+\frac{a_0}{2}\right)dx \\ =& \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-L}^{L} \mathrm{f}(x)\,\sin\left(\frac{\pi\,n\,x}{L}\right)dx\right. \\ & \left. + a_n \int_{-L}^{L} \mathrm{f}(x)\,\cos\left(\frac{\pi\,n\,x}{L}\right)dx\right) \\ & + \frac{a_0 \int_{-L}^{L} \mathrm{f}(x)\,dx}{2} \end{aligned}$$

上式に (6.3.2) 式を代入すると、

$$\int_{-L}^{L} \mathrm{f}(x)^2 dx = \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2\,L + a_n^2\,L\right) + \frac{a_0^2\,L}{2}$$

上式を整理し、

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \mathrm{f}(x)^2 dx = \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 + a_n^2\right) + \frac{a_0^2}{2} \tag{6.3.3}$$

(2) フーリエ積分

```
FK1:F(k)='integrate(%e^(-%i*k*x)*f(x),
 x,-inf,inf)/(2*%pi);
FX1:f(x)='integrate(%e^(%i*k*x)*F(k),
 k,-inf,inf);
subst([k=-k],FK1);
FK11:rhs(%)*2*%pi=lhs(%)*2*%pi;
integrate(f(x)^2,x,-inf,inf)=integrate(
 integrate(f(x)*F(k)*%e^(%i*k*x),x,
 -inf, inf),k,-inf,inf);
subst([FK11],%);
```

フーリエ積分の (6.2.11) 式から、

$$\mathrm{F}(k)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\,k\,x}\,\mathrm{f}(x)\,dx \tag{6.3.4}$$

$$\mathrm{f}(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{F}(k)\;e^{i\,k\,x}dk \tag{6.3.5}$$

(6.3.4) 式において $k\to -k$ に置き換えて、

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\,k\,x}\,\mathrm{f}(x)\,dx=2\,\pi\,\mathrm{F}(-k) \tag{6.3.6}$$

次式の $\mathrm{f}(x)^2$ の一部に (6.3.5) 式を代入すると、

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{f}(x)^2dx=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{F}(k)\;\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\,k\,x}\,\mathrm{f}(x)\,dxdk$$

上式に (6.3.6) 式を代入すると、

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{f}(x)^2dx&=2\,\pi\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{F}(-k)\;\mathrm{F}(k)\,dk\\&=2\,\pi\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{F}(k)\;\overline{\mathrm{F}(k)}dk\end{aligned} \tag{6.3.7}$$

```
FK3:F(k)='integrate(%e^(-%i*k*x)*f(x),
 x,-inf,inf);
FX3:f(x)='integrate(%e^(%i*k*x)*F(k),
 k,-inf,inf)/(2*%pi);
subst([k=-k],FK3);
FK31:rhs(%)=lhs(%);
integrate(f(x)^2,x,-inf,inf)=integrate(
 integrate(f(x)*F(k)*%e^(%i*k*x)/(2*%pi),
 x,-inf, inf),k,-inf,inf);
subst([FK31],%);
```

フーリエ積分の (6.2.12) 式の表現を使用すると、

$$\mathrm{F}(k)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\,k\,x}\,\mathrm{f}(x)\,dx \tag{6.3.8}$$

$$\mathrm{f}(x)=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{F}(k)\;e^{i\,k\,x}dk}{2\,\pi} \tag{6.3.9}$$

(6.3.4) 式において $k\to -k$ に置き換えて、

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\,k\,x}\,\mathrm{f}(x)\,dx=\mathrm{F}(-k) \tag{6.3.10}$$

次式の $\mathrm{f}(x)^2$ の一部に (6.3.9) 式を代入すると、

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{f}(x)^2dx=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{F}(k)\;\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\,k\,x}\,\mathrm{f}(x)\,dxdk}{2\,\pi}$$

上式に (6.3.10) 式を代入すると、

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{f}(x)^2dx&=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{F}(-k)\;\mathrm{F}(k)\,dk}{2\,\pi}\\&=\frac{1}{2\,\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{F}(k)\;\overline{\mathrm{F}(k)}dk\end{aligned} \tag{6.3.11}$$

6.4　時系列解析

6.4.1　自己相関とパワースペクトル

```
kill(all);
XFT1:x(t)=integrate(X(\omega)*%e^(%i*
 \omega*t),\omega,-inf,inf);
XFT2:X(\omega)=1/2/%pi*'integrate(x(t)*
 %e^(-%i*\omega*t),t,-inf,inf);
2*%pi*X(\omega)^2/T;
S1:S(\omega)='limit(%,T,inf);
S2:subst([X(\omega)^2=X(\omega)*
 X[c](\omega)],%);
1/T*'integrate(x(t)*x(t+\tau),t,-T/2,T/2);
R1:R(\tau)='limit(%,T,inf);
subst([t=t+\tau],XFT1);
subst([%],R1);
'integrate(X(\omega)*%e^(%i*\omega*(\tau))
 *'integrate(x(t)*%e^(%i*\omega*t),t,-T/2,
 T/2),\omega,-inf,inf)/T;
R2:R(\tau)='limit(%,T,inf);
X[c](\omega)='limit(1/2/%pi*'integrate(
 %e^(%i *omega*t)*x(t),t,-T/2,T/2),T,inf);
X[c](\omega)=1/2/%pi*'integrate(%e^(%i
 *omega*t)*x(t),t,-T/2,T/2);
subst([rhs(%)*2*%pi=lhs(%)*2*%pi],R2);
R3:R(\tau)='integrate(S(\omega)*%e^(%i
 *\omega*\tau),\omega,-inf,inf);
S3:S(\omega)=1/2/%pi*'integrate(R(\tau)
 *%e^(-%i*\omega*\tau),\tau,-inf,inf);
subst([\tau=0],R3);
```

時間：t としたとき、時間変化の関数：$x(t)$ の性質を調べるのに、自己相関関数とパワースペクトルが用いられる。まず、関数：$x(t)$ のフーリエ積分の関係式を下記とする。ここで関数：$x(t)$ は変動分のみで、平均値は引いたものとする。

$$\mathrm{x}\left(t\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{X}\left(\omega\right)\,e^{i\,\omega\,t}d\omega \tag{6.4.1}$$

$$\mathrm{X}\left(\omega\right)=\frac{1}{2\,\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\,\omega\,t}\,\mathrm{x}\left(t\right)dt \tag{6.4.2}$$

自己相関関数：$\mathrm{R}\left(\tau\right)$ は $\mathrm{x}\left(t\right)$ とそれをラグ：τ だけずらした $\mathrm{x}\left(\tau+t\right)$ の積の平均値として得られ、

$$\mathrm{R}\left(\tau\right)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\mathrm{x}\left(t\right)\,\mathrm{x}\left(\tau+t\right)dt \tag{6.4.3}$$

(6.4.1) 式から $\mathrm{x}\left(\tau+t\right)$ は、

$$\mathrm{x}\left(\tau+t\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{X}\left(\omega\right)\,e^{i\,\omega\,(\tau+t)}d\omega \tag{6.4.4}$$

(6.4.3) 式に上式を代入すると、

$$\mathrm{R}\left(\tau\right)$$
$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{X}\left(\omega\right)\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}e^{i\,\omega\,t}\,\mathrm{x}\left(t\right)dt\,e^{i\,\omega\,\tau}d\omega \tag{6.4.5}$$

ここで、(6.4.2) 式の共役 ($i\to -i$) は、

$$X_c\left(\omega\right)=\frac{1}{2\,\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\,\omega\,t}\,\mathrm{x}\left(t\right)dt \tag{6.4.6}$$

(6.4.5) 式に上式を代入すると、

$$\mathrm{R}\left(\tau\right)=\lim_{T\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2\,\pi}{T}X_c\left(\omega\right)\,\mathrm{X}\left(\omega\right)\,e^{i\,\omega\,\tau}d\omega \tag{6.4.7}$$

ここで $\mathrm{X}\left(\omega\right)$ は振幅を表し、$\mathrm{X}\left(\omega\right)^2$ はエネルギーを表す。単位時間の平均エネルギーをパワースペクトル：$\mathrm{S}\left(\omega\right)$ とすると、

$$\mathrm{S}\left(\omega\right)=\lim_{T\to\infty}\frac{2\,\pi}{T}\,\mathrm{X}\left(\omega\right)^2=\lim_{T\to\infty}\frac{2\,\pi}{T}\,X_c\left(\omega\right)\,\mathrm{X}\left(\omega\right)$$

(6.4.7) 式に上式を代入すると、

$$\mathrm{R}\left(\tau\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{S}\left(\omega\right)\,e^{i\,\omega\,\tau}d\omega \tag{6.4.8}$$

フーリエ積分の関係式：(6.2.11) 式から、

$$\mathrm{S}\left(\omega\right)=\frac{1}{2\,\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\,\omega\,\tau}\,\mathrm{R}\left(\tau\right)d\tau \tag{6.4.9}$$

(6.4.8) 式で $\tau=0$ を代入すると、

$$\mathrm{R}\left(0\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{S}\left(\omega\right)d\omega \tag{6.4.10}$$

6.4.2 線形システムのパワースペクトルによる時系列解析

```
RYY1:R[yy](\tau)=subst([x(t)=y(t),
 x(t+\tau)=y(t+\tau)],rhs(R1));
Y0:y(t)='integrate(h(t-r)*x(r),r,-inf,inf);
Y1:y(t)='integrate(h(r)*x(t-r),r,-inf,inf);
H1:H(\omega)='integrate(%e^(-%i*omega*r)
 *h(r),r,-inf,inf);
H2:H[c](\omega)='integrate(%e^(%i*omega*r)
 *h(r),r,-inf,inf);
Y2:subst([t=t+\tau,r=s],Y1);
SYY1:S[yy](\omega)=1/2/%pi*'integrate(
 %e^(-%i*\omega*\tau)*R[yy](\tau),
 \tau,-inf,inf);
subst([RYY1],SYY1);
subst([Y1,Y2],%);
SYY2:S[yy](\omega)=1/2/%pi*'integrate(
 'limit('integrate('integrate('integrate(
 %e^(-%i*\omega*\tau)*h(r)*x(t-r)*
 h(s)*x(\tau+t-s),r,-inf,inf),s,-inf,inf)
 /T,t,-T/2,T/2),T,inf),\tau,-inf,inf);
TT1:t-r=u;
solve(%,t)[1];
subst([%],SYY2);
S[yy](omega)=1/2/%pi*integrate(limit(
integrate(integrate(integrate(%e^(
-%i*omega*tau)*h(r)*h(s)*x(u)*
x(u+tau-s+r),r,-inf,inf),s,-inf,inf),u,
-T/2,T/2)/T,T,inf),tau,-inf,inf);
S[yy](omega)=1/2/%pi*integrate(limit(
 integrate(h(r)*%e^(%i*omega*(r)),r,-inf
 ,inf)*integrate(integrate(%e^(-%i*
 omega*(\tau-s+r))*h(s)*%e^(%i*
 omega*(-s))*x(u)*x(u+\tau-s+r),s,
 -inf,inf),u,-T/2,T/2)/T,T,inf),\tau,
 -inf,inf);
 S[yy](\omega)=1/2/%pi*integrate(limit(
 integrate(h(r)*%e^(%i*omega*(r)),r,-inf,
 inf)*integrate(h(s)*%e^(%i*omega*(-s)),
 s,-inf,inf)*integrate(%e^(-%i*omega*
 (\tau-s+r))*x(u)*x(u+\tau-s+r),u,
 -T/2,T/2)/T,T,inf),\tau,-inf,inf);
```

```
SYY3:S[yy](\omega)=1/2/%pi*integrate(
 integrate(h(r)*%e^(%i*omega*(r)),r,-inf,
 inf)*integrate(h(s)*%e^(%i*omega*(-s)),
 s,-inf,inf)*%e^(-%i*omega*(\tau-s+r))
 *R[xx](\tau-s+r),\tau,-inf,inf);
S[xx](\omega)=1/2/%pi*'integrate(
 %e^(-%i*omega*(tau-s+r))*R[xx]
 (tau-s+r),tau,-inf,inf);
rhs(%)*2*%pi=lhs(%)*2*%pi;
SYY4:subst([%],SYY3);
subst([r=s],rhs(H1)=lhs(H1));
subst([%],SYY4);
subst([rhs(H2)=lhs(H2)],%);
SYY5:S[yy](\omega)=(H(\omega))^2*
 S[xx](\omega);
solve(%,H(\omega)^2)[1];
H(\omega)=abs(rhs(%));
```

不規則な入力：$\mathrm{x}\,(t)$ とし、それに線形な応答出力：$\mathrm{y}\,(t)$ とすると、$\mathrm{y}\,(t)$ はインパルス応答関数：$\mathrm{h}\,(r)$ を使って、次式で表現できる。

$$\mathrm{y}\,(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{x}\,(r)\ \mathrm{h}\,(t-r)\,dr = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{h}\,(r)\ \mathrm{x}\,(t-r)\,dr \tag{6.4.11}$$

インパルス応答関数：$\mathrm{h}\,(r)$ のフーリエ変換が周波数応答：$\mathrm{H}\,(\omega)$ で次式で表現できる。

$$\mathrm{H}\,(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\,\omega\,r}\,\mathrm{h}\,(r)\,dr \tag{6.4.12}$$

ここで、上式の共役 $(i \to -i)$ は、

$$H_c\,(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\,\omega\,r}\,\mathrm{h}\,(r)\,dr \tag{6.4.13}$$

応答出力：$\mathrm{y}\,(t)$ の自己相関関数：$R_{yy}\,(\tau)$ は (6.4.3) 式から、

$$R_{yy}\,(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \mathrm{y}\,(t)\ \mathrm{y}\,(\tau+t)\,dt \tag{6.4.14}$$

(6.4.9) 式から、(6.4.14) 式のフーリエ変換から応答出力：$\mathrm{y}\,(t)$ のパワースペクトル：$S_{yy}\,(\omega)$ を求め、(6.4.14) 式、(6.4.11) 式を代入すると、

$$\begin{aligned} S_{yy}\,(\omega) =& \frac{1}{2\,\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\,\omega\,\tau}\, R_{yy}\,(\tau)\, d\tau \\ =& \frac{1}{2\,\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\,\omega\,\tau}\, \left(\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \mathrm{y}\,(t)\ \mathrm{y}\,(\tau+t)\, dt \right) d\tau \\ =& \frac{1}{2\,\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\,\omega\,\tau}\, \left(\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{h}\,(r)\ \mathrm{x}\,(t-r)\, dr \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{h}\,(s)\ \mathrm{x}\,(\tau+t-s)\, ds dt \right) d\tau \end{aligned} \tag{6.4.15}$$

上式で $t-r=u$ の置き換えを行うと、

$$\begin{aligned} S_{yy}\,(\omega) =& \frac{1}{2\,\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\,\omega\,\tau}\, \left(\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{h}\,(r)\, dr\, \mathrm{x}\,(u) \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{h}\,(s)\ \mathrm{x}\,(u+\tau-s+r)\, ds du \right) d\tau \\ =& \frac{1}{2\,\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\,\omega\,\tau}\, \left(\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \mathrm{x}\,(u) \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{h}\,(s) \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{h}\,(r)\ \mathrm{x}\,(u+\tau-s+r)\, dr ds du \right) d\tau \\ =& \frac{1}{2\,\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\,\omega\,r}\, \mathrm{h}\,(r)\, dr \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \mathrm{x}\,(u) \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{h}\,(s)\ e^{-i\,\omega\,(\tau-s+r)-i\,\omega\,s}\, \mathrm{x}\,(u+\tau-s+r)\, ds du d\tau \\ =& \frac{1}{2\,\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\,\omega\,r}\, \mathrm{h}\,(r)\, dr \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\,\omega\,s}\, \mathrm{h}\,(s)\, ds \\ & \times \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\,\omega\,(\tau-s+r)} \left(\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \mathrm{x}\,(u)\ \mathrm{x}\,(u+\tau-s+r)\, du \right) d\tau \\ =& \frac{1}{2\,\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\,\omega\,r}\, \mathrm{h}\,(r)\, dr \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\,\omega\,s}\, \mathrm{h}\,(s)\, ds \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\,\omega\,(\tau-s+r)}\, R_{xx}\,(\tau-s+r)\, d\tau \end{aligned} \tag{6.4.16}$$

ところで、$R_{xx}\,(\tau-s+r)$ のフーリエ積分はパワースペクトル：$S_{xx}\,(\omega)$ であるから、

$$S_{xx}\,(\omega) = \frac{1}{2\,\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\,\omega\,(\tau-s+r)}\, R_{xx}\,(\tau-s+r)\, d\tau$$

(6.4.16) 式に上式と (6.4.12) 式、(6.4.13) 式を代入すると、

$$\begin{aligned} S_{yy}\,(\omega) =& S_{xx}\,(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\,\omega\,r}\, \mathrm{h}\,(r)\, dr \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\,\omega\,s}\, \mathrm{h}\,(s)\, ds \\ =& H_c\,(\omega)\ S_{xx}\,(\omega)\ \mathrm{H}\,(\omega) = S_{xx}\,(\omega)\ \mathrm{H}\,(\omega)^2 \end{aligned} \tag{6.4.17}$$

上式から周波数応答：$\mathrm{H}\,(\omega)$ は次式となる。ここで $\mathrm{H}\,(\omega)$ は実数であるから周波数特性のみ得られ、位相特性は得られない。

$$\mathrm{H}\,(\omega) = \frac{|S_{yy}\,(\omega)|}{|S_{xx}\,(\omega)|} \tag{6.4.18}$$

6.4.3 線形システムのクロススペクトルによる時系列解析

```
RYX1:R[yx](\tau)=subst([x(t+\tau)=
 y(t+\tau)],rhs(R1));
Y1:y(t)='integrate(h(r)*x(t-r),r,-inf,inf);
Y2:subst([t=t+\tau],Y1);
SYX1:S[yx](\omega)=1/2/%pi*'integrate(
 %e^(-%i*\omega*\tau)*R[yx](\tau),
 \tau,-inf,inf);
subst([RYX1],SYX1);
subst([Y2],%);
S[yx](\omega)='integrate(%e^(-%i*\omega*
 \tau)*('limit('integrate(x(t)*'integrate(
 %e^(-%i*\omega*(\tau-r))*%e^(%i*
 \omega*(-r))*%e^(%i*\omega*\tau)*
 h(r)*x(\tau+t-r),r,-inf,inf),t,-T/2,T/2)
 /T,T,inf)),\tau,-inf,inf)/(2*%pi);
SYX2:S[yx](\omega)='integrate(%e^(%i*
 \omega*(-r))*h(r)*'integrate('limit(
 'integrate(%e^(-%i*\omega*(\tau-r))
 *x(t)*x(\tau+t-r),t,-T/2,T/2)/T,T,inf),
 \tau,-inf,inf),r,-inf,inf)/(2*%pi);
'limit('integrate(x(t)*x(\tau+t-r),t,
 -T/2,T/2)/T,T,inf)=R[xx](\tau-r);
SYX3:subst([%],SYX2);
```

```
S[xx](\omega)=1/2/%pi*'integrate(%e^(
 -%i*omega*(\tau-r))*R[xx](\tau-r),
 \tau,-inf,inf);
rhs(%)*2*%pi=lhs(%)*2*%pi;
subst([%],SYX3);
S[yx](omega)=S[xx](omega)*H(\omega);
solve(%,H(\omega))[1];
```

不規則な入力:$\mathrm{x}\,(t)$ とし、それに線形な応答出力:$\mathrm{y}\,(t)$ とすると、インパルス応答関数：$\mathrm{h}\,(r)$ を使って、$\mathrm{y}\,(t)$ は次式で表現できる。

$$\mathrm{y}\,(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{x}\,(r)\;\mathrm{h}\,(t-r)\,dr = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{h}\,(r)\;\mathrm{x}\,(t-r)\,dr \tag{6.4.19}$$

インパルス応答関数：$\mathrm{h}\,(r)$ のフーリエ変換が周波数応答：$\mathrm{H}\,(\omega)$ で次式で表現できる。

$$\mathrm{H}\,(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\,\omega\,r}\,\mathrm{h}\,(r)\,dr \tag{6.4.20}$$

$\mathrm{x}\,(t)$ と $\mathrm{y}\,(t)$ の相互相関関数:$R_{yx}\,(\tau)$ は (6.4.3) 式から、

$$R_{yx}\,(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \mathrm{x}\,(t)\;\mathrm{y}\,(\tau+t)\,dt \tag{6.4.21}$$

また、(6.4.19) 式から、

$$\mathrm{y}\,(\tau+t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{h}\,(r)\;\mathrm{x}\,(\tau+t-r)\,dr \tag{6.4.22}$$

(6.4.9) 式から、相互相関関数：$R_{yx}\,(\tau)$ をフーリエ変換するとクロススペクトル：$S_{yx}\,(\omega)$ が得られ、(6.4.21) 式、(6.4.22) 式を代入すると、

$$\begin{aligned}
S_{yx}\,(\omega) =& \frac{1}{2\,\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\,\omega\,\tau}\,R_{yx}\,(\tau)\,d\tau = \frac{1}{2\,\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\,\omega\,\tau} \left(\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \mathrm{x}\,(t)\;\mathrm{y}\,(\tau+t)\,dt \right) d\tau \\
=& \frac{1}{2\,\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\,\omega\,\tau} \left(\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \mathrm{x}\,(t) \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{h}\,(r)\;\mathrm{x}\,(\tau+t-r)\,drdt \right) d\tau \\
=& \frac{1}{2\,\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\,\omega\,\tau} \left(\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \mathrm{x}\,(t) \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{h}\,(r)\; e^{-i\,\omega\,(\tau-r)+i\,\omega\,\tau-i\,\omega\,r}\,\mathrm{x}\,(\tau+t-r)\,drdt \right) d\tau \\
=& \frac{1}{2\,\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\,\omega\,r}\,\mathrm{h}\,(r) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\,\omega\,(\tau-r)} \left(\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \mathrm{x}\,(t)\;\mathrm{x}\,(\tau+t-r)\,dt \right) d\tau dr
\end{aligned} \tag{6.4.23}$$

ここで (6.4.3) 式、(6.4.9) 式から、

$$R_{xx}\,(\tau-r) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \mathrm{x}\,(t)\;\mathrm{x}\,(\tau+t-r)\,dt, \quad S_{xx}\,(\omega) = \frac{1}{2\,\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\,\omega\,(\tau-r)}\,R_{xx}\,(\tau-r)\,d\tau \tag{6.4.24}$$

(6.4.23) 式に上式を代入すると、次式となり周波数応答：$\mathrm{H}\,(\omega)$ が得られる。ここで相互相関関数：$R_{yx}\,(\tau)$ は一般に非対称であるため、$\mathrm{H}\,(\omega)$ は複素数となり、周波数特性、位相特性が得られる。

$$S_{yx}\,(\omega) = S_{xx}\,(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\,\omega\,r}\,\mathrm{h}\,(r)\,dr = S_{xx}\,(\omega)\;\mathrm{H}\,(\omega) \qquad \to \qquad \mathrm{H}\,(\omega) = \frac{S_{yx}\,(\omega)}{S_{xx}\,(\omega)} \tag{6.4.25}$$

6.4.4　ウインドウ

自己相関：$\mathrm{R}(\tau)$ からパワースペクトル：$\mathrm{S}(\omega)$ を求めるとき、フーリエ積分で無限積分が要求される。このようなフーリエ変換の無限積分において、実際の数値計算では有限の積分に置き換えねばならない。それは無限の信号に対して、一部分を切り取るウインドウを掛けることと同じである。このウインドウについて調べる。

```
kill(all);
FK1:S(k)='integrate(%e^(-%i*k*\tau)
 *R(\tau),\tau,-inf,inf)/(2*%pi);
FX1:R(\tau)='integrate(%e^(%i*k*\tau)
 *S(k),k,-inf,inf);
FK2:Q(k)='integrate(%e^(-%i*k*\tau)
 *W(\tau),\tau,-inf,inf)/(2*%pi);
FX2:W(\tau)='integrate(%e^(%i*k*\tau)
 *Q(k),k,-inf,inf);
FX11:subst([k=kd],FX1);
HX1:sd(\tau)=R(\tau)*W(\tau);
HK11:Sd(k)='integrate(%e^(-%i*k*\tau)
 *sd(\tau),\tau,-inf,inf)/(2*%pi);
subst([HX1],HK11);
subst([FX11],%);
Sd(k)=integrate(integrate(%e^(-%i*(k-kd)
 *\tau)*W(\tau)*S(kd),\tau,-inf,inf),
 kd,-inf,inf)/(2*%pi);
Sd(k)=integrate(Q(k-kd)*S(kd),kd,-inf,inf);
```

自己相関：$\mathrm{R}(\tau)$ とパワースペクトル：$\mathrm{S}(\omega)$ のフーリエ積分の関係は、(6.4.8) 式、(6.4.9) 式から、

$$\mathrm{S}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\,k\,\tau}\,\mathrm{R}(\tau)\,d\tau \tag{6.4.26}$$

$$\mathrm{R}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{S}(k)\; e^{i\,k\,\tau} dk \tag{6.4.27}$$

上記と同様の関係式で、時間領域で掛ける時間ウインドウ：$\mathrm{W}(\tau)$ とそのフーリエ積分のスペクトルウインドウ：$\mathrm{Q}(k)$ の関係式は、

$$\mathrm{Q}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\,k\,\tau}\,\mathrm{W}(\tau)\,d\tau \tag{6.4.28}$$

$$\mathrm{W}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Q}(k)\; e^{i\,k\,\tau} dk \tag{6.4.29}$$

自己相関：$\mathrm{R}(\tau)$ に時間ウインドウ：$\mathrm{W}(\tau)$ を掛けたものを $\mathrm{sd}(\tau)$ とする。

$$\mathrm{sd}(\tau) = \mathrm{R}(\tau)\;\mathrm{W}(\tau) \tag{6.4.30}$$

上式をフーリエ変換すると下記となり、(6.4.29) 式を代入すると、

$$\begin{aligned}
\mathrm{Sd}(k) &= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\,k\,\tau}\,\mathrm{sd}(\tau)\,d\tau}{2\pi} \\
&= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\,k\,\tau}\,\mathrm{R}(\tau)\;\mathrm{W}(\tau)\,d\tau}{2\pi} \\
&= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\,k\,\tau}\,\mathrm{W}(\tau)\,\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{S}(kd)\;e^{i\,kd\,\tau}dkdd\tau}{2\pi} \\
&= \frac{\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{S}(kd)\,\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\,(k-kd)\,\tau}\,\mathrm{W}(\tau)\,d\tau dkd}{2\pi} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{Q}(k-kd)\;\mathrm{S}(kd)\,dkd
\end{aligned} \tag{6.4.31}$$

上記の結果からパワースペクトル：$\mathrm{S}(\omega)$ にスペクトルウインドウ：$\mathrm{Q}(k)$ の畳み込み積分を行うことにより、ウインドウを考慮したパワースペクトル：$\mathrm{Sd}(k)$ が得られる。

矩形ウインドウ

```
Q0:Q(f)='integrate(W(t)*%e^(-%i*2*%pi*f*t),
 t,-inf,inf);
F=f*T;
F1:solve(%,f)[1];
W0:W(t)=1;
subst([inf=T/2,W0],Q0);
ev(%,integrate);
Q1:lhs(%)=trigrat(rhs(%))/T;
Q11:subst([F1],Q1);
plot2d(rhs(Q11),[F,-10,10],[ylabel,"Q(f)"]
 ,[style,[lines,3,1]]);
plot2d(log(abs(rhs(Q11)))/log(10)*20,
 [F,-10,10],[y,-60,0],[ylabel,"Q(f) dB"],
 [style,[lines,3,1]]);
 plot2d([parametric, t,1, [t, -0.5,0.5],
  [nticks, 100]],[x,-0.75,0.75],
  [y,-0.5,1.5],
  [ylabel,"W(t)"],[style,[lines,3,1]]);
```

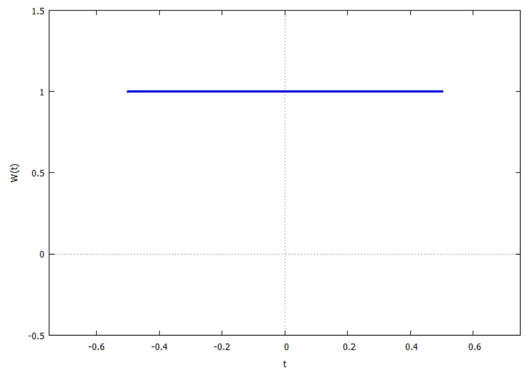


図 6.4.1: 矩形の時間ウインドウ

無限積分を有限の積分にすることで生ずる影響について調べる。(6.4.28) 式を $\omega \to 2\,\pi\,f$ の周波数：f に置き換えると、

$$\mathrm{Q}\,(f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\,i\,\pi\,f\,t}\,\mathrm{W}\,(t)\,dt \tag{6.4.32}$$

矩形ウインドウでは、$\mathrm{W}\,(t) = 1,\ -T/2 < t < T/2$ であり、上式は、

$$\begin{aligned}\mathrm{Q}\,(f) &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-2\,i\,\pi\,f\,t} dt \\ &= \frac{i\,e^{-i\,\pi\,f\,T}}{2\,\pi\,f} - \frac{i\,e^{i\,\pi\,f\,T}}{2\,\pi\,f} \\ &= \frac{\sin\,(\pi\,f\,T)}{\pi\,f\,T}\end{aligned}$$

上式で、$F = f\,T$ と置き換えると、

$$\mathrm{Q}\,(F) = \frac{\sin\,(\pi\,F)}{\pi\,F} \tag{6.4.33}$$

矩形のスペクトルウインドウ：$\mathrm{Q}\,(F)$ は下図に示すように大きく変動する。

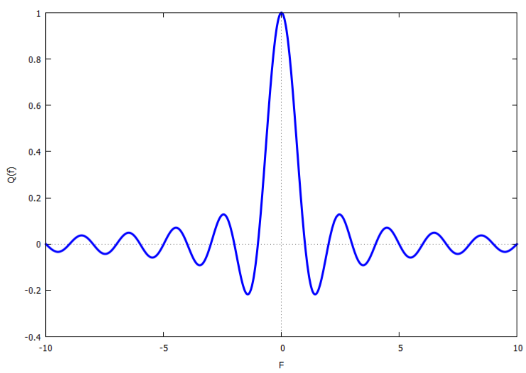


図 6.4.2: 矩形のスペクトルウインドウ

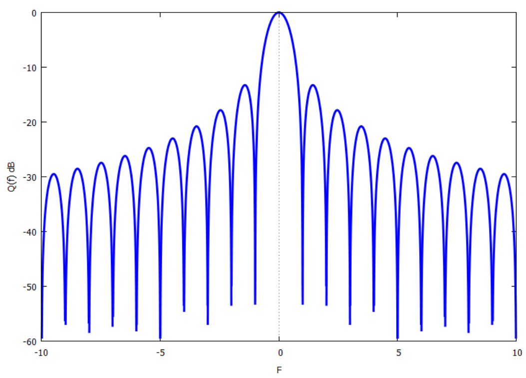


図 6.4.3: 矩形のスペクトルウインドウ (dB)

ハニングウインドウ

```
/* Hunning  */
W0:W(t)=(0.5+0.5*cos(2*%pi*t/T));
subst([inf=T/2,W0],Q0);
ev(%,integrate);
Q1:lhs(%)=trigrat(rhs(%))/T;
Q11:subst([F1],Q1);
Q12:factor(%);
A0:A/F+B/(F-1)+C/(F+1);
factor(%);
A1:-A=-1/(2*%pi)*sin(%pi*F);
A2:B-C=0;
A3:A+B+C=0;
solve([A1,A2,A3],[A,B,C])[1];
subst([%],A0);
lhs(Q12)=+sin(%pi*(F+1))/(4*%pi*(F+1))
 +sin(%pi*F)/(2*%pi*F)+sin(%pi*(F-1))
 /(4*%pi*(F-1));
plot2d(rhs(Q11),[F,-10,10],[ylabel,"Q(f)"]
 ,[style,[lines,3,1]]);
plot2d(log(abs(rhs(Q11)))/log(10)*20,
 [F,-10,10],[y,-60,0],[ylabel,"Q(f) dB"],
 [style,[lines,3,1]]);
 plot2d([parametric, t,(0.5+0.5*cos(2*
 %pi*t)), [t, -0.5,0.5], [nticks, 100]],
 [x,-0.75,0.75],[y,-0.5,1.5],
 [ylabel,"W(t)"],[style,[lines,3,1]]);
```

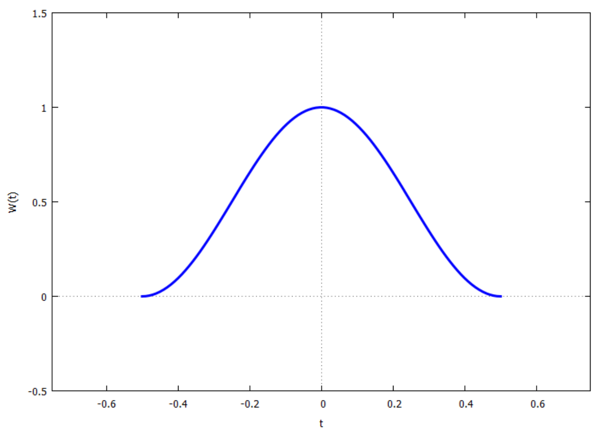


図 6.4.4: ハニングの時間ウインドウ

ハニングの時間ウインドウは $-T/2 < t < T/2$ の範囲で下記である。

$$\mathrm{W}\,(t) = 0.5\cos\left(\frac{2\,\pi\,t}{T}\right) + 0.5$$

上式を (6.4.32) 式に代入すると、

$$
\begin{aligned}
Q(f) &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-2\,i\,\pi\,f\,t}\left(0.5\cos\left(\frac{2\,\pi\,t}{T}\right)+0.5\right)dt \\
&= -\frac{\sin(\pi\,f\,T)}{T\,(2\,\pi\,f^3\,T^2-2\,\pi\,f)}
\end{aligned}
$$

上式で、$F=f\,T$ と置き換えると、

$$
\begin{aligned}
Q(F) &= -\frac{\sin(\pi\,F)}{\left(\frac{2\,\pi\,F^3}{T}-\frac{2\,\pi\,F}{T}\right)\,T} \\
&= -\frac{\sin(\pi\,F)}{2\,\pi\,(F-1)\,F\,(F+1)}
\end{aligned}
\tag{6.4.34}
$$

上式を次式の形にするためには、

$$
\frac{C}{F+1}+\frac{A}{F}+\frac{B}{F-1}
=\frac{C\,F^2+B\,F^2+A\,F^2-C\,F+B\,F-A}{(F-1)\,F\,(F+1)}
$$

(6.4.34) 式と上式を比較して、次式の関係式を得る。

$$
-A=-\frac{\sin(\pi\,F)}{2\,\pi},\ B-C=0,\ C+B+A=0
$$

上式を解くと、

$$
[A=\frac{\sin(\pi\,F)}{2\,\pi}, B=-\frac{\sin(\pi\,F)}{4\,\pi}, C=-\frac{\sin(\pi\,F)}{4\,\pi}]
$$

上式の結果を (6.4.34) 式にに適用すると、

$$
\begin{aligned}
Q(F) &= -\frac{\sin(\pi\,F)}{4\,\pi\,(F+1)}+\frac{\sin(\pi\,F)}{2\,\pi\,F}-\frac{\sin(\pi\,F)}{4\,\pi\,(F-1)} \\
&= \frac{\sin(\pi\,(F+1))}{4\,\pi\,(F+1)}+\frac{\sin(\pi\,F)}{2\,\pi\,F}+\frac{\sin(\pi\,(F-1))}{4\,\pi\,(F-1)}
\end{aligned}
$$

ハニングウインドウを考慮したパワースペクトルは、(6.4.31) 式から、パワースペクトルにハニングのスペクトルウインドウの畳み込み積分を行うことで得られる。(6.4.33) 式と上式を比較して、ハニングウインドウを考慮したパワースペクトル : $Sd(k)$ は、パワースペクトル : $S(k)$ の結果に下記の荷重平均を行うことで得られる。

$$
Sd(n)=\frac{1}{4}\,S(n-1)+\frac{1}{2}\,S(n)+\frac{1}{4}\,S(n+1)
$$

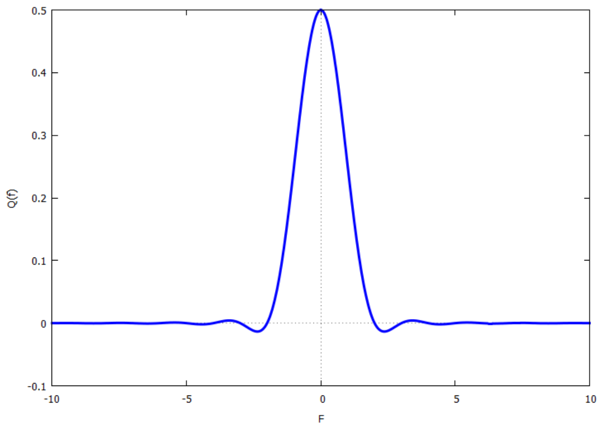


図 6.4.5: [ハニングのスペクトルウインドウ

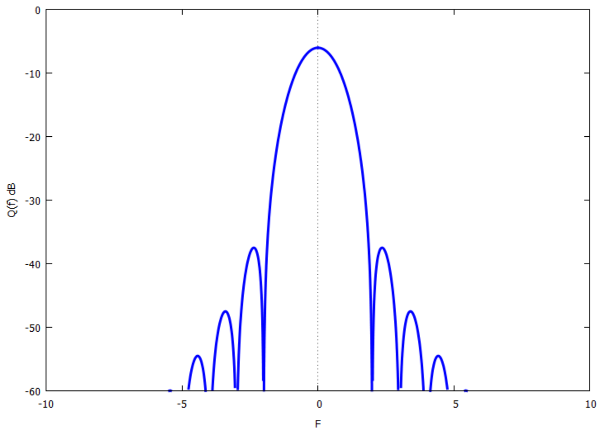


図 6.4.6: ハニングのスペクトルウインドウ (dB)

6.4.5 サンプリング定理

アナログ信号をある時間間隔でデジタル化して記録する。このデータの取り込みをサンプリングといい、その時間間隔をサンプリング間隔、この逆数をサンプリング周波数という。ある周波数帯の信号を捕まえようとするとき、デジタル化するサンプリング周波数をどのように選定すべきかの問題がある。周波数 : f の波形を表現する最小限のサンプル周波数は、高低を捕まえて、元の波形の周波数の 2 倍以上必要である。以上から、計測時間 : T、サンプルデータ数 : N とすると、分析できる最大周波数 (ナイキスト周波数) : f_N は、

$$f_N = \frac{N}{2T} \tag{6.4.35}$$

「6.1.4Maxima の高速フーリエ変換 (FFT) 関数」に示した高速フーリエ変換の結果もサンプルデータ数 : N の 1/2 の周波数の結果が出力される。

エイリアシング（折り返し雑音）: Aliasing

```
kill(all);
load("fft");
N:32;
NN:320;
M:18;
L:18;
A:2;
B:0;
for J:1 thru N do (
if J=1 then listfft:[ float(A*sin((J-1)*M/N
 *2*%pi)+B*cos((J-1)*L/N*2*%pi)  ) ]
else listfft:append(listfft, [ float(A*sin
 ((J-1)*M/N*2*%pi)+B*cos((J-1)
 *L/N*2*%pi)  ) ]));
for J:1 thru N do (
if J=1 then LOB:[[ float(J-1),
 listfft[J]] ]
else LOB:append(LOB, [ [float(J-1),
 listfft[J]]]));
for J:1 thru NN do (
if J=1 then LOC:[[float(0.1*(J-1)), float(
 A*sin((J-1)*M/N*2*%pi*0.1)+B*
 cos((J-1)*L/N*2*%pi*0.1))] ]
else LOC:append(LOC, [[float(0.1*(J-1)),
 float(A*sin((J-1)*M/N*2*%pi*0.1)+
 B*cos((J-1)*L/N*2*%pi*0.1))] ]));
plot2d([[discrete, LOC],[discrete,LOB]],
 [legend,"org.","sample deta"],[style,
 [lines,4,1],[lines,4,2]],[y,-2.5,2.5]);
```

データ数 : 32 の場合のナイキスト周波数 : $f_N = 16$ となる。これを超えた周波数のデータがある場合について調べる。

いま、$n = 18$ の場合のデータをデータ数 : 32 でサンプルすると、下図のようになる。サンプルが荒く、元のデータを表現できていないのが分かる。

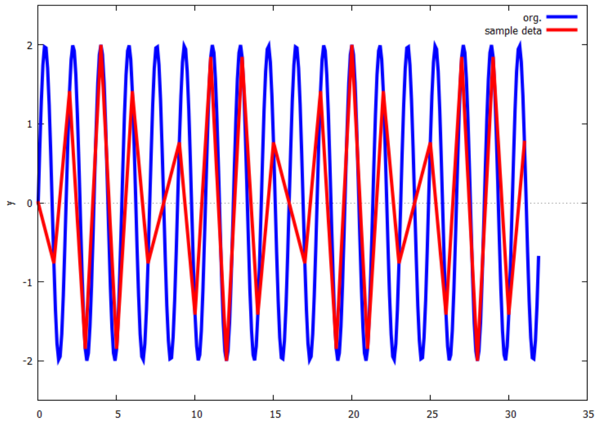


図 6.4.7: f_N を超えた $n = 18$ のデータ

$n = 18$ の場合のデータについて調べる。fft を用いてフーリエ変換してみる。

```
L01B:fft(listfft);
for J:1 thru N do (
if J=1 then L01BR:[[ float(J-1),
 realpart(L01B[J])] ]
else L01BR:append(L01BR, [ [float(J-1),
 realpart(L01B[J])]]));
for J:1 thru N do (
if J=1 then L01BI:[[ float(J-1),
 imagpart(L01B[J]) ]]
else L01BI:append(L01BI, [[float(J-1),
 imagpart(L01B[J])]]));
N:32;
M:14;
L:14;
A:2;
B:0;
for J:1 thru N do (
if J=1 then listfft:[ float(A*sin((J-1)*M/N
 *2*%pi)+B*cos((J-1)*L/N*2*%pi)  ) ]
else listfft:append(listfft, [ float(A*
 sin((J-1)*M/N*2*%pi)+B*cos((J-1)
 *L/N*2*%pi)  ) ]));
for J:1 thru N do (
if J=1 then LOA:[[float(J-1),listfft[J]]]
else LOA:append(LOA, [ [float(J-1),
 listfft[J]]]));
```

```
L01A:fft(listfft);
for J:1 thru N do (
if J=1 then L01AR:[[ float(J-1),
 realpart(L01A[J])] ]
else L01AR:append(L01AR, [ [float(J-1),
 realpart(L01A[J])]]));
for J:1 thru N do (
if J=1 then L01AI:[[ float(J-1),
 imagpart(L01A[J]) ]]
else L01AI:append(L01AI, [[float(J-1),
 imagpart(L01A[J])]]));
plot2d([[discrete, LOA],[discrete,LOB]],
 [legend,"n=14","over fn. n=18"],[style,
 [lines,4,1],[lines,4,2]],[y,-2.5,2.5]);
plot2d([[discrete,L01AR],[discrete,L01AI]
 ,[discrete, L01BR],[discrete,L01BI]],
 [legend,"n=14 cos","n=14 sin",
 "over fn n=18 cos","over fn n=18 sin"]
 ,[style,[lines,4,1],[lines,4,2],
 [lines,2,3],[lines,2,4]]);
```

$n=18$ の場合のデータと $f_N=16$ と対称位置にある $n=14$ のデータを比較すると下図となる。両者、よく一致しており、同一の周波数のように思える。

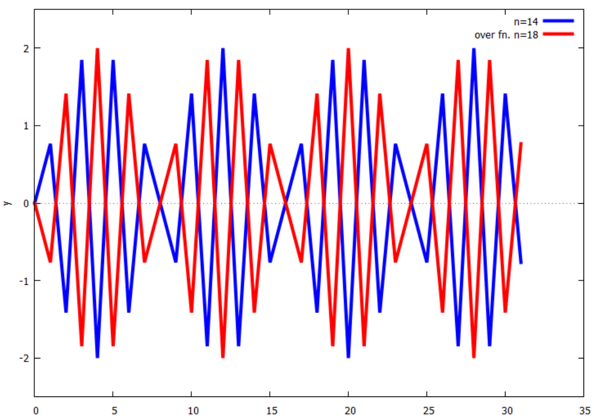


図 6.4.8: $n=14,18$ のデータ

上記データを fft を用いてフーリエ変換した結果を下図に示す。この結果から、$n=18$ の場合のフーリエ変換結果は、$f_N=16$ より大きいので、本来ならば零になるべきであるが、下図に示すようにナイキスト周波数：$f_N=16$ で折り返した位置：$n=14$ に現れる。この現象をエイリアシング（折り返し雑音）: Aliasing と言う。もし、アナログデータに f_N を超える周波数のデータが混在していた場合には、誤差としてフーリエ変換結果に混入してくるので注意しなければならない。この現象を防ぐには f_N 以上の周波数信号をフィルターでカットする必要がある。

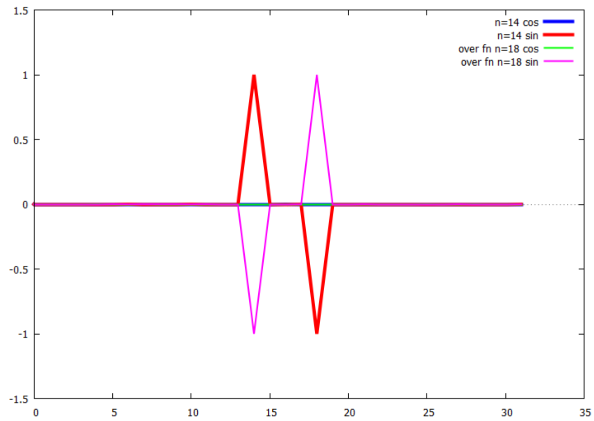


図 6.4.9: $n=14,18$ のフーリエ変換結果

6.5 時系列解析の具体例

6.5.1 時系列データの作成

```
kill(all);
load("fft");
DT:0.1;
N:2048;
DF:float(1/(float(DT*N)));
DW:float(DF*2*%pi);
L1:100;
L2:500;
LM:DW*float((L1+L2)/2);
LB:DW*float((L2-L1)/2);
LW1:L1*DW;
NW:400;
NW1:NW+1;
DNW:float((L2-L1)/NW);
ICDW:1;
ICAM:1;
SW1:%e^(-4*((w-LM)^2/LB^2));
SW2:2.64*%e^(-(1/1.2/(w-LW1+1)*LB)^4)/((
 1.2*(w-LW1+1)/LB)^5);
for J:1 thru NW1 do (
if J=1 then LRANDM:[ random(float(2*%pi)) ]
else LRANDM:append(LRANDM, [ random(float(
 2*%pi))  ]));
if ICDW=1 then
for J:1 thru NW1 do (
if J=1 then LW:[ DW*float(L1+DNW*(J-1)) ]
else LW:append(LW, [ DW*float(L1+DNW*(J-1))
   ]))
else
for J:1 thru NW1 do (
if J=1 then LW:[ DW*float(L1+random(
 float(NW))) ]
else LW:append(LW, [ DW*float(L1+random(
 float(NW)))
   ]));
LW:sort(LW,'orderlessp);
if ICAM=1 then
for J:1 thru NW1 do (
if J=1 then LAMP:[ sqrt(subst([w=LW[1]],
 SW1)*(LW[2]-LW[1])/2) ]
else
if J=NW1 then LAMP:append(LAMP, [ sqrt(
 subst([w=LW[NW1]],SW1)*(LW[NW1]
 -LW[NW])/2) ])
else
LAMP:append(LAMP, [ sqrt(subst([w=LW[J]],
 SW1)*(LW[J+1]-LW[J-1])/2) ]))
else
if ICAM=2 then
for J:1 thru NW1 do (
if J=1 then LAMP:[ sqrt(subst([w=LW[1]],
 SW2)*(LW[2]-LW[1])/2) ]
else
if J=NW1 then LAMP:append(LAMP, [ sqrt(
 subst([w=LW[NW1]],SW2)*(LW[NW1]-
 LW[NW])/2)  ])
else
LAMP:append(LAMP, [ sqrt(subst([w=LW[J]],
 SW2)*(LW[J+1]-LW[J-1])/2) ]))
else
if ICAM=3 then
for J:1 thru NW1 do (
if J=1 then LAMP:[ sqrt(random(1.0))*(
 LW[2]-LW[1])/2 ]
else
if J=NW1 then LAMP:append(LAMP, [ sqrt(
 random(1.0))*(LW[NW1]-LW[NW])/2  ])
else
LAMP:append(LAMP, [ sqrt(random(1.0))*(
 LW[J+1]-LW[J-1])/2  ]))
else
for J:1 thru NW1 do (
if J=1 then LAMP:[ 1.0*(LW[2]-LW[1])/2 ]
else
if J=NW1 then LAMP:append(LAMP, [ 1.0*(
 LW[NW1]-LW[NW])/2  ])
else
LAMP:append(LAMP, [ 1.0*(LW[J+1]-
 LW[J-1])/2  ]));
K1:NW1;
for K:1 thru K1 do (
for J:1 thru N do (
if J=1 then
LTM1:[float(LAMP[K]*sin( LW[K]*(J-1)*DT
 +LRANDM[K]))]
else LTM1:append(LTM1,[float(LAMP[K]*
 sin( LW[K]*(J-1)*DT+LRANDM[K]))])),
```

```
if K=1 then listfft:LTM1
else listfft:listfft+LTM1);
LTMI:listfft;
for J:1 thru N do (
if J=1 then LOB:[[ float(DT*(J-1)),
 listfft[J]] ]
else LOB:append(LOB, [ [float(DT*(J-1)),
 listfft[J]]]));
plot2d([discrete,LOB],[legend,
 "sample deta"],[style,[lines,2,1]],
 [xlabel, "t (sec)"],[ylabel, "x"]);
LO1B:fft(listfft);
LM2:N/2;
for J:1 thru LM2 do (
if J=1 then LO1BR:[[ float(DW*(J-1)),
  realpart(LO1B[J])] ]
else LO1BR:append(LO1BR, [ [float
 (DW*(J-1)),realpart(LO1B[J])]]));
for J:1 thru LM2 do (
if J=1 then LO1BI:[[ float(DW*(J-1)),
  imagpart(LO1B[J]) ]]
else LO1BI:append(LO1BI,
 [[float(DW*(J-1)), imagpart(LO1B[J])]]));
plot2d([[discrete, LO1BR],[discrete,
 LO1BI]],[legend,"cos","sin"],
 [style,[lines,4,1],[lines,4,2]],
 [xlabel, "f (Hz)"],[ylabel, "Amp."]);
for J:1 thru LM2 do (
if J=1 then LSPC:[[ float(DW*(J-1)),
  float(((LO1BR[J][2])*2)^2+
  ((LO1BI[J][2])*2)^2)/(DW)] ]
else LSPC:append(LSPC,
 [ [float(DW*(J-1)), float(((
 LO1BR[J][2])*2)^2+
 ((LO1BI[J][2])*2)^2)/DW]]));
plot2d([discrete, LSPC],[legend,"SPC"],
 [style,[lines,4,1]],[xlabel,
 "w (rad/sec)"],
 [ylabel, "Amp.**2"]);
LPL3:1;
LPL4:1;
if ICAM=1 then LPL0:SW1;
if ICAM=2 then LPL0:SW2;
if ICAM=3 then LPL0:LPL3;
if ICAM=4 then LPL0:LPL4;
LPL0;
```

```
plot2d([[discrete, LSPC], LPL0],[w,0,30],
 [legend,"gen.","given"],[style,[lines,4,1],
 [lines,4,2]],[x,0,30],[xlabel, "f(Hz)"],
 [ylabel, "Amp.**2"]);
write_data(LTMI,"d:listtimeinput.cvs");
write_data(LOB,"d:listtimeinput-1.cvs");
write_data(LSPC,"d:listgenspec.cvs");
```

不規則な入力 : $\mathrm{x}(t)$ とし、次式に示す多くの正弦波を合成したものとする。

$$\mathrm{x}(t) = \sum_{K=K_1}^{K_2} A_K \sin(t\,\omega_K + \epsilon_K) \tag{6.5.1}$$

ここで、FFT を使用しているので、データー数 : N は 2 の n 乗である必要がある。

$$t = \Delta t\,(J-1),\quad \omega_K = \omega_0\,K,$$

$$\omega_0 = \frac{2\,\pi}{T},\quad T = \Delta t\,N$$

$\mathrm{A}(\omega)$ は下記から選択

$$\mathrm{A}(\omega) = e^{-\frac{4\,(\omega-\omega_C)^2}{B^2}}$$

$$\mathrm{A}(\omega) = \frac{1.06\,B^5\,e^{-\frac{0.482\,B^4}{(-\omega_C+\omega+1)^4}}}{(-\omega_C+\omega+1)^5}$$

$\mathrm{A}(\omega)$: 0 〜 1 の乱数

$\mathrm{A}(\omega)$: 1

ϵ_K : 0 〜 2π の乱数

作成した時系列データの例を下図に示す。

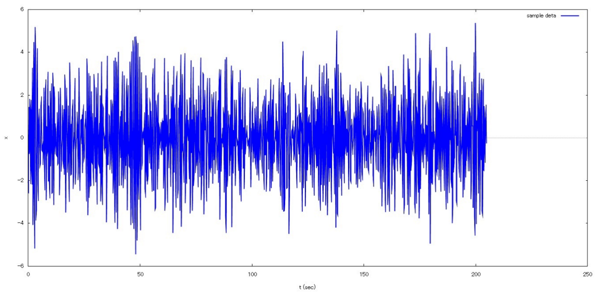


図 6.5.1: $x(t)$ の時系列データ

FFT を使用して得られた $x(t)$ の cos, sin 振幅分布、$x(t)$ の $\mathrm{X}(\omega)^2$ 分布を以下に示す。

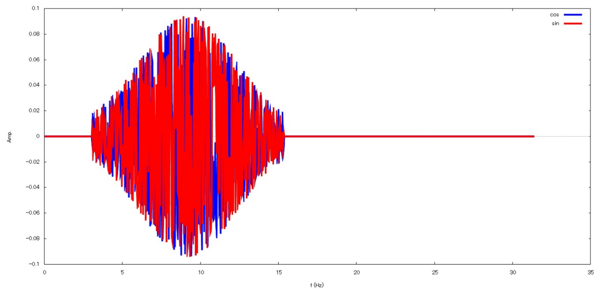


図 6.5.2: $x(t)$ の $cos\,sin$ 振幅分布

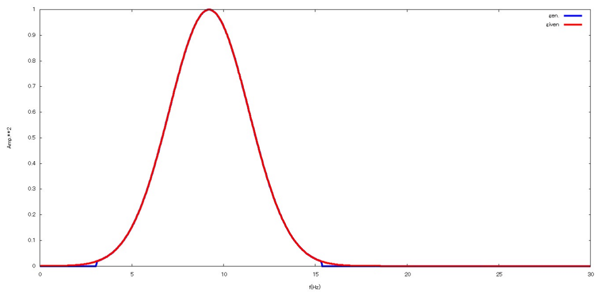


図 6.5.3: $x(t)$ の $\mathrm{X}\,(\omega)^2$ 分布

```
assume(\omega[N]>0);
assume(K>0);
LY1:laplace(y(t),t,s)=Y(s);
LX1:laplace(x(t),t,s)=X(s);
DF1:diff(y(t),t,2)+R*diff(y(t),t,1)+A
 *y(t)=B*x(t);
laplace(lhs(DF1),t,s)=laplace(rhs(DF1),
 t,s);
subst([LY1,LX1],%);
subst([at('diff(y(t),t,1),t=0)=0,y(0)=0],
 %);
LY2:solve(%,Y(s))[1];
C1:B=K*\omega[n]^2;
C2:R=2*C*\omega[n];
C3:A=\omega[n]^2;
subst([C1,C2,C3],LY2);
LY3:factor(%);
HS1:H(s)=subst([X(s)=1,\omega[n]=8,K=1,
 C=0.2],rhs(LY3));
HT1:h(t)=ilt(rhs(HS1),s,t);
plot2d(rhs(HT1),[t,0,8],[legend,"h(t)"],
 [style,[lines,2,1]],[xlabel, "t (sec)"],
 [ylabel, "h(t)"]);
FW1:f(w)=cabs(subst([s=%i*\omega],
 rhs(HS1)));
plot2d(rhs(FW1),[\omega,0,128],
 [legend,"f(w)"],[style,[lines,2,1]],
 [xlabel, "w (rad/sec)"],[ylabel, "f(w)"],
 [x,0,20]);
```

```
PH1:ph(\omega)=180/%pi*carg(subst([s=%i*
 \omega],rhs(HS1)));
plot2d(rhs(PH1),[\omega,0,128],
 [legend,"ph(w)"],[style,[lines,2,1]],
 [xlabel, "w (rad/sec)"],
 [ylabel, "ph(w)"],[x,0,20]);
for L:1 thru 200 do (
OM1:0.1*L,
if L=1 then FW2:[ [OM1,subst([\omega=OM1],
 rhs(FW1))] ]
else
FW2:append(FW2,[[OM1,subst([\omega=OM1],
 rhs(FW1))]]));
for L:1 thru 200 do (
OM1:0.1*L,
if L=1 then PH2:[ [OM1,subst([\omega=OM1],
 float(rhs(PH1)))] ]
else
PH2:append(PH2,[[OM1,subst([\omega=OM1],
 float(rhs(PH1)))]]));
NHT1:32;
for L:1 thru NHT1 do (
T1:t=float((L-1)*DT),
if L=1 then LHT1:[ float(subst([T1],
 rhs(HT1)*DT)) ]
else
LHT1:append(LHT1,[float(subst([T1],
 rhs(HT1)*DT))]));
LTM2:LTM1;
N2:N+NHT1;
for K:1 thru K1 do (
for J:1 thru N2 do (
if J=1 then
LTM2:[float(LAMP[K]*sin( LW[K]*(J-NHT1)*
 DT+LRANDM[K]))]
else LTM2:append(LTM2,[float(LAMP[K]*
 sin( LW[K]*(J-NHT1)*DT+LRANDM[K]))])),
if K=1 then LTM3:LTM2
else LTM3:LTM3+LTM2);
for J:1 thru N2 do (
if J=1 then LOB1:[[ float(DT*(J-NHT1)),
 LTM3[J]] ]
else LOB1:append(LOB1, [ [float(DT*
 (J-NHT1)),LTM3[J]]]));
```

```
plot2d([[discrete,LOB1],[discrete,LOB]],
 [legend,"input sample deta for multi",
 "original sample deta"],[style,
 [lines,1,1], [lines,1,2]],
 [xlabel, "t (sec)"],[ylabel, "x"]);
plot2d([[discrete,LOB1],[discrete,LOB]],
 [legend,"input sample deta for multi",
 "original sample deta"],[style,
 [lines,2,1],[lines,2,2]],
 [xlabel, "t (sec)"],[ylabel, "x"],
 [x,-10,30]);
plot2d([[discrete,LOB1],[discrete,LOB]],
 [legend,"input sample deta for multi",
 "original sample deta"],[style,
 [lines,2,1],[lines,2,2]],
 [xlabel, "t (sec)"],[ylabel, "x"],
 [x,70,110]);
plot2d([[discrete,LOB1],[discrete,LOB]],
 [legend,"input sample deta for multi",
 "original sample deta"],[style,
 [lines,2,1],[lines,2,2]],
 [xlabel, "t (sec)"],[ylabel, "x"],
 [x,180,210]);
LINPUT1:LTMI;
LINPUT2:LTM3;
for J:1 thru N do (
AA:0.0,
for N:1 thru NHT1 do (
AA:AA+LHT1[NHT1-N+1]*LINPUT2[J+N-1]),
if J=1 then LOUTPUT1:[ AA ]
else LOUTPUT1:append(LOUTPUT1, [ AA]));
for J:1 thru N do (
if J=1 then LOC:[[ float(DT*(J-1)),
 LOUTPUT1[J]] ]
else LOC:append(LOC, [ [float(DT*(J-1)),
 LOUTPUT1[J]]]));
plot2d([[discrete,LOB],[discrete,LOC]],
 [legend,"input sample deta",
 "output sample deta"],[style,
 [lines,2,1],[lines,2,2]],
 [xlabel, "t (sec)"],[ylabel, "x"],
 [x,0,100]);
```

```
write_data(LHT1,"d:listht.cvs");
write_data(FW2,"d:listfw.cvs");
write_data(PH2,"d:listph.cvs");
write_data(LOUTPUT1,"d:listtimeoutput.
 cvs");
write_data(LOC,"d:listtimeoutput-1.cvs");
```

(6.4.11) 式から、$\mathrm{x}(t)$ に線形な応答出力：$\mathrm{y}(t)$ とすると、

$$\mathrm{y}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{h}(r)\,\mathrm{x}(t-r)\,dr \tag{6.5.2}$$

「8.4.2 ラプラス変換　システム解析　二次システム」に示す下記の二階定数係数線形微分方程式の線形システムを考える。

$$\left(\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{y}(t)\right) R + \mathrm{y}(t)\;A + \frac{d^2}{d\,t^2}\,\mathrm{y}(t) = \mathrm{x}(t)\;B$$

上式をラプラス変換し、$\mathrm{Y}(s)$ を求めると、

$$\mathrm{Y}(s) = \frac{\mathrm{X}(s)\;B}{s\,R + A + s^2}$$

ここで定数：A, B, R を下記のように置き換えると、

$$A = \omega_N^2,\; B = K\,\omega_N^2,\; R = 2\,C\,\omega_N \text{ここで、} \omega_N > 0$$

$\mathrm{Y}(s)$ は、

$$\mathrm{Y}(s) = \frac{\mathrm{X}(s)\;K\,\omega_N^2}{\omega_N^2 + 2\,s\,C\,\omega_N + s^2} \tag{6.5.3}$$

インパルス応答は「8.1.4 デルタ関数」の (8.1.10) 式から、$X(s) = 1$ として得られ、また、定数を $\omega_N = 8, K = 1, C = 0.2$ とすると、

$$\mathrm{H}(s) = \frac{64}{s^2 + 3.2\,s + 64} \tag{6.5.4}$$

上式を逆ラプラス変換すると、インパルス応答：$\mathrm{h}(t)$ が得られ、図示すると、

$$\mathrm{h}(t) = \frac{20\,e^{-\frac{8\,t}{5}}\,\sin\left(\frac{16\,\sqrt{6}\,t}{5}\right)}{\sqrt{6}} \tag{6.5.5}$$

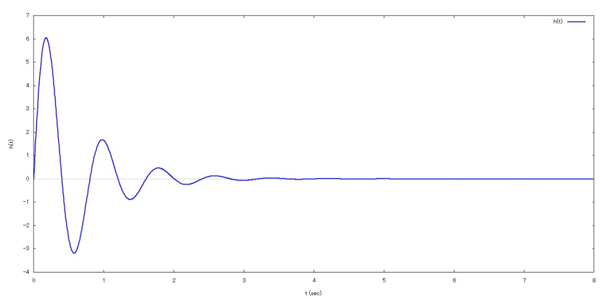


図 6.5.4: インパルス応答：$\mathrm{h}(t)$

「8.4.2 ラプラス変換　システム解析　二次システム」の (8.4.19) 式から、(6.5.4) 式に $s \to i\omega$ の置き換えを行うと、次式の周波数応答特性、位相特性が得られる。

$$\mathrm{f}\,(w) = \frac{64}{\sqrt{\left(64-\omega^2\right)^2 + 10.24\,\omega^2}} \tag{6.5.6}$$

$$\mathrm{ph}\,(\omega) = -\frac{180\,\mathrm{atan2}\left(\frac{3.2\,\omega}{\sqrt{(64-\omega^2)^2+10.24\,\omega^2}}, \frac{64-\omega^2}{\sqrt{(64-\omega^2)^2+10.24\,\omega^2}}\right)}{\pi} \tag{6.5.7}$$

上記の周波数特性を図示すると下図となる。

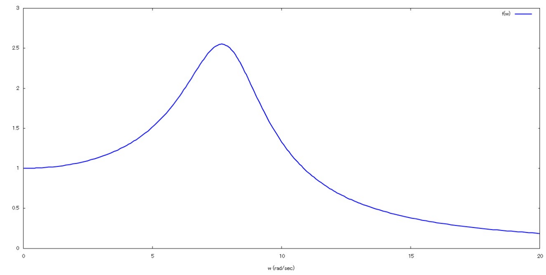


図 6.5.5: 周波数応答特性

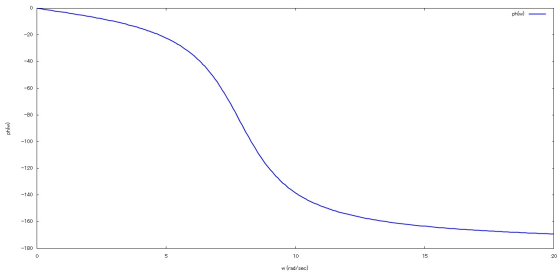


図 6.5.6: 位相特性

(6.5.5) 式で得られたインパルス応答：$\mathrm{h}\,(t)$ を用いて、(6.5.2) 式で $\mathrm{x}\,(t)$ に線形な応答出力：$\mathrm{y}\,(t)$ を求めると、下図となる。

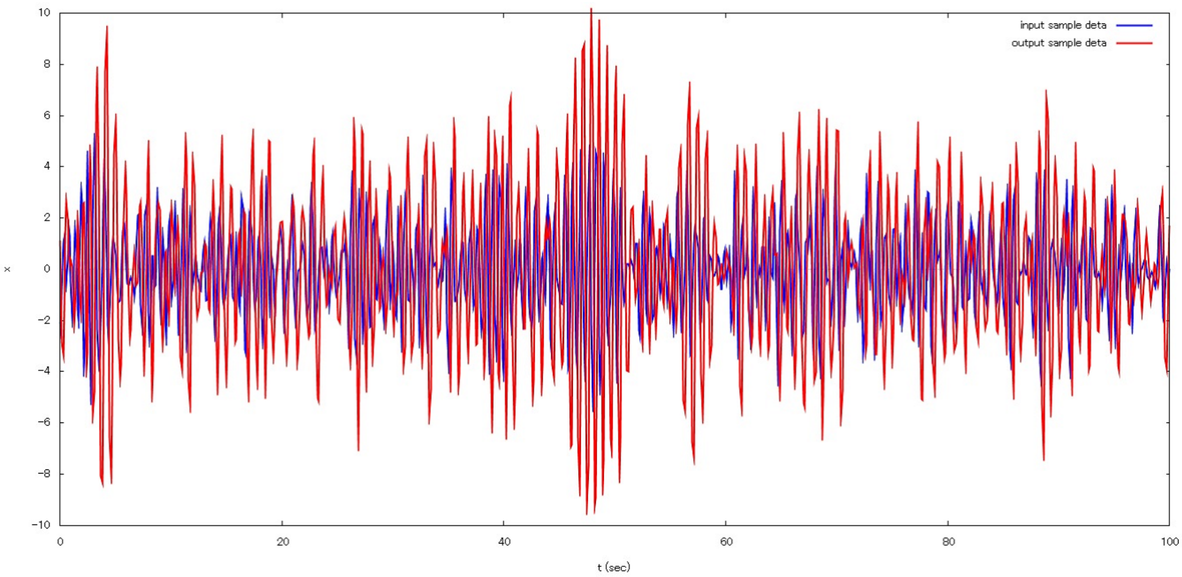


図 6.5.7: 不規則な入力：$\mathrm{x}\,(t)$ とそれに線形な応答出力：$\mathrm{y}\,(t)$

6.5.2　自己相関

```
kill(all);
ICANA:3;
DT:0.1;
N:2048;
if ICANA=1 then LTMI:read_list(
 "d:listtimeinput.cvs");
if ICANA=1 then LTMO:read_list(
 "d:listtimeinput.cvs");
if ICANA=2 then LTMI:read_list(
 "d:listtimeoutput.cvs");
if ICANA=2 then LTMO:read_list(
 "d:listtimeoutput.cvs");
if ICANA=3 then LTMI:read_list(
 "d:listtimeinput.cvs");
if ICANA=3 then LTMO:read_list(
 "d:listtimeoutput.cvs");
LAG:N/8;
LAG2:LAG*2;
for L:1 thru LAG do (
LG1:L-LAG,
ACOR:0,
for N1:-LG1+1 thru N do (
ACOR:ACOR+LTMI[N1]*LTMO[N1+LG1]),
ACOR:float(ACOR/(N+LG1)),
if L=1 then LACOR1:[ACOR]
else LACOR1:append(LACOR1,[ACOR]));
for L:LAG+1 thru LAG2 do (
LG1:L-LAG,
ACOR:0,
for N1:LG1+1 thru N do (
ACOR:ACOR+LTMI[N1-LG1]*LTMO[N1]),
ACOR:float(ACOR/(N-LG1)),
LACOR1:append(LACOR1,[ACOR]));
for J:1 thru LAG2 do (
if J=1 then LACOR:[[ float(DT*(J-LAG)),
 LACOR1[J]] ]
else LACOR:append(LACOR, [ [
 float(DT*(J-LAG)),LACOR1[J]]]));
plot2d([discrete,LACOR],[legend,
 "Auto-correlation"],[style,[lines,2,1]],
 [xlabel, "t Lag (sec)"],
 [ylabel, "Auto-correlation"]);
if ICANA=3 then  plot2d([discrete,LACOR],
 [legend,"Cross-correlation"],
 [style,[lines,2,1]],
 [xlabel, "t Lag (sec)"],
 [ylabel, "Cross-correlation"]);
```

```
LAG;
LAG2;
if ICANA=1 then write_data(LACOR1,
 "d:listcorre1.cvs");
if ICANA=1 then write_data(LACOR,
 "d:listcorre1-1.cvs");
if ICANA=2 then write_data(LACOR1,
 "d:listcorre2.cvs");
if ICANA=2 then write_data(LACOR,
 "d:listcorre2-1.cvs");
if ICANA=3 then write_data(LACOR1,
 "d:listcorre3.cvs");
if ICANA=3 then write_data(LACOR,
 "d:listcorre3-1.cvs");
```

(6.4.3) 式から入力 : x(t) の自己相関関数 : $R_{xx}(\tau)$ は、

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \mathrm{x}(t)\,\mathrm{x}(\tau+t)\,dt \tag{6.5.8}$$

(6.4.14) 式から応答出力 : y(t) の自己相関関数 : $R_{yy}(\tau)$ は、

$$R_{yy}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \mathrm{y}(t)\,\mathrm{y}(\tau+t)\,dt \tag{6.5.9}$$

(6.4.21) 式から入力 : x(t) と応答出力 : y(t) の相互相関関数 : $R_{yx}(\tau)$ は、

$$R_{yx}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \mathrm{x}(t)\,\mathrm{y}(\tau+t)\,dt \tag{6.5.10}$$

「6.5.1 時系列データの作成」で作成したデータを基に、自己相関関数、相互相関関数を求めると下図となる。

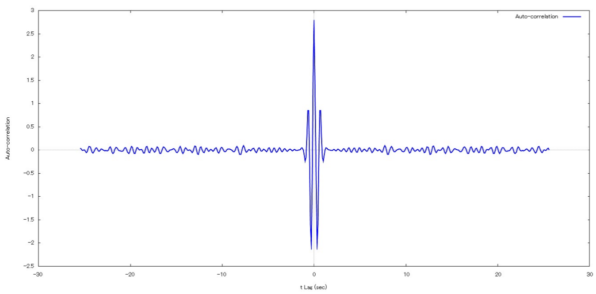


図 6.5.8: 自己相関関数 : $R_{xx}(\tau)$

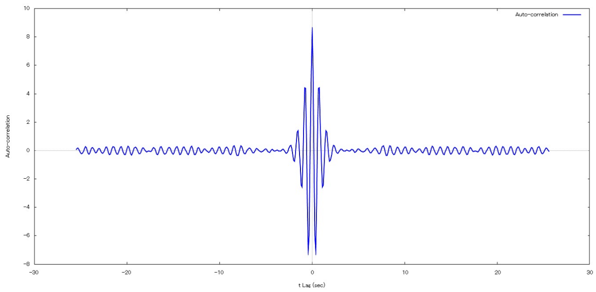


図 6.5.9: 自己相関関数：$R_{yy}(\tau)$

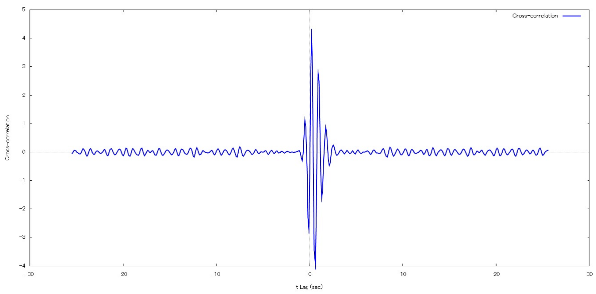


図 6.5.10: 相互相関関数：$R_{yx}(\tau)$

6.5.3　スペクトル

```
kill(all);
ICANA:3;
if ICANA=1 then LACOR1:read_list(
 "d:listcorre1.cvs");
if ICANA=2 then LACOR1:read_list(
 "d:listcorre2.cvs");
if ICANA=3 then LACOR1:read_list(
 "d:listcorre3.cvs");
if ICANA=1 then LTMI:read_list(
 "d:listtimeinput.cvs");
if ICANA=1 then LTMO:read_list(
 "d:listtimeinput.cvs");
if ICANA=2 then LTMI:read_list(
 "d:listtimeoutput.cvs");
if ICANA=2 then LTMO:read_list(
 "d:listtimeoutput.cvs");
if ICANA=3 then LTMI:read_list(
 "d:listtimeinput.cvs");
if ICANA=3 then LTMO:read_list(
 "d:listtimeoutput.cvs");
LSPC1:read_list("d:listgenspec.cvs");
N:2048;
LM2:N/2;
DT:0.1;
LAG:N/8;
LAG2:2*LAG;
ICWD:2;
for J:1 thru LM2 do (
if J=1 then LSPC:[[ LSPC1[1], LSPC1[2]/2]]
else LSPC:append(LSPC, [ [LSPC1[2*J-1],
 LSPC1[2*J]/2]]));
DF1:1/float(DT*LAG2);
DW1:float(DF1*2*%pi);
DW2:float(2*%pi/DT/(LAG2-1));
for L:1 thru LAG-1 do (
OM2:DW2*L,
DSPC:0,
for J:-LAG+1 thru LAG-1 do (
DSPC:DSPC+LACOR1[J+LAG]*cos(OM2*DT*J)*DT),
SPCC:float(DSPC/%pi),
if L=1 then LSPCC2:[[ OM2, SPCC] ]
else LSPCC2:append(LSPCC2, [ [OM2,
 SPCC]]));
for L:1 thru LAG-1 do (
OM2:DW2*L,
DSPS:0,
```

```
for J:-LAG+1 thru LAG-1 do (
DSPS:DSPS+LACOR1[J+LAG]*sin(OM2*DT*J)*DT),
SPCS:float(DSPS/%pi),
if L=1 then LSPCS2:[[ OM2, SPCS] ]
else LSPCS2:append(LSPCS2, [ [OM2,
 SPCS]]));
plot2d([[discrete,LSPCC2],
 [discrete,LSPCS2], [discrete,LSPC]],
 [legend, "Spec-cos","Spec-sin","Given"],
 [style,[lines,2,1],[lines,2,2],
 [lines,2,3]],
 [xlabel, "w (rad/sec)"],
 [ylabel, "Spectrum"],[x,0,30]);
LACOR1[LAG];
R0:0;
for J:1 thru LAG-1 do (
R0:R0+DW2*(LSPCC2[J][2]));
R0;
R0-LACOR1[LAG];
WND1:[0,0,1,0,0];
WND2:[-0.06,0.24,0.64,0.24,-0.06];
WND3:[0,0.25,0.5,0.25,0];
WND4:[0,0.23,0.54,0.23,0];
if ICWD=1 then WND:WND1;
if ICWD=2 then WND:WND2;
if ICWD=3 then WND:WND3;
if ICWD=4 then WND:WND4;
LMWD1:LAG-3;
for J:3 thru LMWD1 do (
SPW1:0.0,
for L:1 thru 5 do (
SPW1:SPW1+float(LSPCC2[J+L-3][2]*WND[L] )),
if J=3 then LSPCCQ1:[[ float(DW2*J),
 SPW1] ]
else LSPCCQ1:append(LSPCCQ1, [
 [float(DW2*J), SPW1]]));
for J:3 thru LMWD1 do (
SPW1:0.0,
for L:1 thru 5 do (
SPW1:SPW1+float(LSPCS2[J+L-3][2]*WND[L] )),
if J=3 then LSPCSQ1:[[ float(DW2*J),SPW1]]
else LSPCSQ1:append(LSPCSQ1, [
 [float(DW2*J), SPW1]]));
```

```
plot2d([[discrete,LSPCC2],
 [discrete,LSPCCQ1]],[legend,
  "Spectrum-cos from Auto-correlation",
  "Spectrum-cos with window"],
  [style,[lines,2,1],[lines,2,2]],
  [xlabel, "w (rad/sec)"],
  [ylabel, "Spectrum"]);
plot2d([[discrete,LSPCS2],
 [discrete,LSPCSQ1]],[legend,
 "Spectrum-sin from Auto-correlation",
 "Spectrum-sin with window"],
 [style,[lines,2,1],[lines,2,2]],
 [xlabel, "w (rad/sec)"],
 [ylabel, "Spectrum"]);
if ICANA=1 then write_data(LSPCC2,
 "d:listspect1.cvs");
if ICANA=2 then write_data(LSPCC2,
 "d:listspect2.cvs");
if ICANA=1 then write_data(LSPCCQ1,
 "d:listspect1wd.cvs");
if ICANA=2 then write_data(LSPCCQ1,
 "d:listspect2wd.cvs");
if ICANA=3 then write_data(LSPCC2,
 "d:listspect3c.cvs");
if ICANA=3 then write_data(LSPCS2,
 "d:listspect3s.cvs");
```

(6.4.9) 式から入力：$\mathrm{x}(t)$ のスペクトル：$\mathrm{S}_{xx}(\omega)$、応答出力：$\mathrm{y}(t)$ のスペクトル：$\mathrm{S}_{yy}(\omega)$、(6.4.23) 式から入力：$\mathrm{x}(t)$ と応答出力：$\mathrm{y}(t)$ のクロススペクトル：$S_{yx}(\omega)$ は次式で与えられる。ここで $\omega > 0$ の範囲のみとする。

$$\mathrm{S}_{xx}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\,\omega\,\tau}\,\mathrm{R}_{xx}(\tau)\,d\tau \tag{6.5.11}$$

$$S_{yy}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\,\omega\,\tau}\,R_{yy}(\tau)\,d\tau \tag{6.5.12}$$

$$S_{yx}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\,\omega\,\tau}\,R_{yx}(\tau)\,d\tau \tag{6.5.13}$$

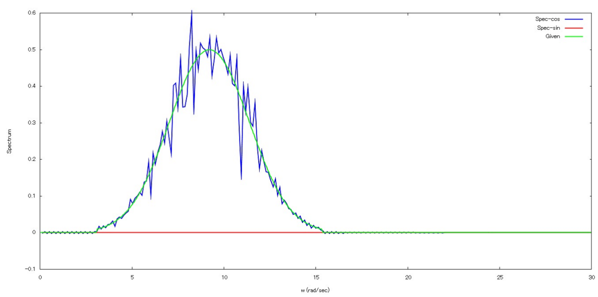


図 6.5.11: スペクトル：$\mathrm{S}_{xx}(\omega)$

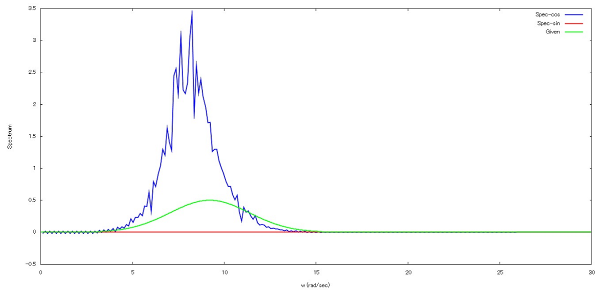


図 6.5.12: スペクトル：$\mathrm{S}_{yy}(\omega)$

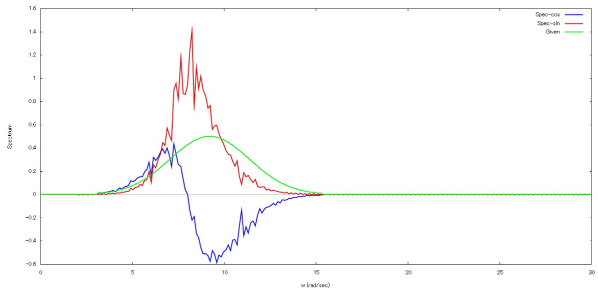


図 6.5.13: クロススペクトル：$\mathrm{S}_{yx}(\omega)$

「6.4.4 ウインドウ」に示されているハニングのスペクトルウインドウを上記の結果にかけ、元のスペクトルと比較すると、$\mathrm{S}_{xx}(\omega)$、$\mathrm{S}_{yy}(\omega)$ は、

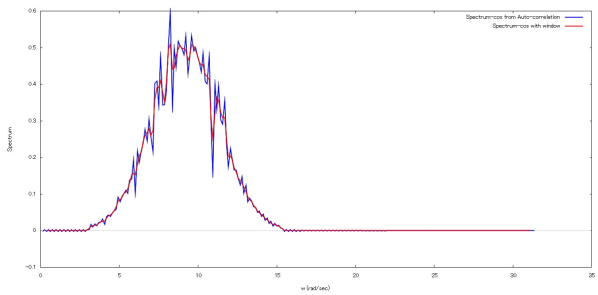


図 6.5.14: スペクトル：$\mathrm{S}_{xx}(\omega)$

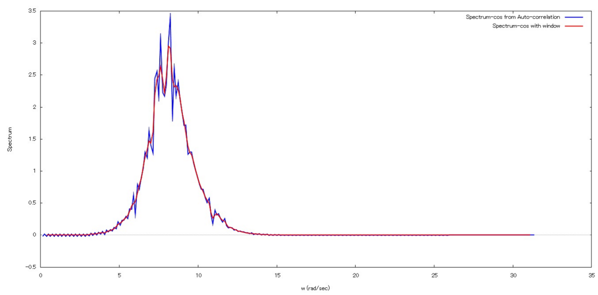


図 6.5.15: スペクトル：$\mathrm{S}_{yy}(\omega)$

6.5.4 1 次元自己回帰モデル

```
LAK:N/16;
for L:1 thru LAK do (
ACOR:0,
for N1:1 thru N-L+1 do (
ACOR:ACOR+LTMI[N1]*LTMO[N1+L-1]),
ACOR:float(ACOR/(N)),
if L=1 then LC1:[ ACOR ]
else
LC1:append(LC1,[ACOR]));
for L:1 thru LAK do (
if L=1 then LC11:[ [L-1,LC1[L]] ]
else
LC11:append(LC11,[[L-1,LC1[L]]]));
plot2d([discrete,LC11],[legend,"Cxx"],
 [style,[lines,2,1]],[xlabel, "L"],
 [ylabel,"Cxx"]);
SIG2[0]:LC1[1];
AM[1,1]:[LC1[2]/SIG2[0]];
SIG2[1]:(1-(AM[1,1])^2)*SIG2[0];
for M:1 thru 100 do (
AM[M+1,M+1]:1/SIG2[M]*(LC1[M+2]-sum(
 AM[M,MM]*LC1[M+1-MM+1],MM,1,M)),
for MM:1 thru M do (
AM[M+1,MM]:AM[M,MM]-AM[M+1,M+1]*
 AM[M,M+1-MM],
SIG2[M+1]:SIG2[M]*(1-AM[M+1,M+1]^2),
FPE[M]:(N+M+1)/(N-M-1)*SIG2[M]));
for M:1 thru 100 do (
if M=1 then FPE1:[ [M-1,FPE[M][1]] ]
else
FPE1:append(FPE1,[[M-1,FPE[M][1]]]));
plot2d([discrete,FPE1],[legend,"FPE"],
 [style,[lines,2,1]],[xlabel, "M"],
 [ylabel,"FPE"]);
LL1:16;
for MM:1 thru LL1 do (
if MM=1 then AM1:[ [MM-1,AM[LL1,MM][1]] ]
else
AM1:append(AM1,[[MM-1,AM[LL1,MM][1]]]));
LL1:32;
for MM:1 thru LL1 do (
if MM=1 then AM2:[ [MM-1,AM[LL1,MM][1]] ]
else
AM2:append(AM2,[[MM-1,AM[LL1,MM][1]]]));
```

```
LL1:64;
for MM:1 thru LL1 do (
if MM=1 then AM3:[ [MM-1,AM[LL1,MM][1]] ]
else
AM3:append(AM3,[[MM-1,AM[LL1,MM][1]]]));
LL1:100;
for MM:1 thru LL1 do (
if MM=1 then AM4:[ [MM-1,AM[LL1,MM][1]] ]
else
AM4:append(AM4,[[MM-1,AM[LL1,MM][1]]]));
plot2d([[discrete,AM4],[discrete,AM3],
 [discrete,AM2],[discrete,AM1]],
 [legend,"AM4 100","AM3 64","AM2 32",
 "AM1 16"],[style,[lines,2,1],[lines,2,2],
 [lines,2,3],[lines,2,4]],[xlabel, "MM"],
 [ylabel,"AM"]);
if ICANA=1 then write_data(AM1,
 "d:listam1-16.cvs");
if ICANA=1 then write_data(AM2,
 "d:listam1-32.cvs");
if ICANA=1 then write_data(AM3,
 "d:listam1-64.cvs");
if ICANA=2 then write_data(AM1,
 "d:listam2-16.cvs");
if ICANA=2 then write_data(AM2,
 "d:listam2-32.cvs");
if ICANA=2 then write_data(AM3,
 "d:listam2-64.cvs");
LL1:64;
DW3:float(2*%pi/DT/(128*2));
for MM:1 thru LL1 do (
if MM=1 then AM0:[ AM[LL1,MM][1] ]
else
AM0:append(AM0,[AM[LL1,MM][1]]));
SIG2[LL1];
declare(CAA,complex);
for L:1 thru 128 do (
CAA:0,
for MM:1 thru LL1 do (
CAA:CAA+AM0[MM]*%e^(-%i*2*%pi*(L/128/2)
 *MM)),
AB:float(SIG2[LL1][1]/(cabs(1-CAA))^2),
if L=1 then LSPAK0:[ [float(DW3*(L)),
 float(AB*DT/%pi)] ]
else
LSPAK0:append(LSPAK0,[[float(DW3*(L)),
 float(AB*DT/%pi)]]));
```

```
plot2d([[discrete,LSPAK0],
 [discrete,LSPC]],[legend,"AK","Given"],
 [style,[lines,2,1],[lines,2,2]],
 [xlabel, "w (rad/sec)"],
 [ylabel, "Spectrum"]);
plot2d([[discrete,LSPAK0],
 [discrete,LSPCC2], [discrete,LSPC]],
 [legend,"AK",
 "Spectrum from Auto-correlation",
 "Given"],[style,[lines,2,1],[lines,2,2],
 [lines,2,3]],[xlabel, "w (rad/sec)"],
 [ylabel, "Spectrum"]);
if ICANA=1 then write_data(LSPAK0,
 "d:listspectak1.cvs");
if ICANA=2 then write_data(LSPAK0,
 "d:listspectak2.cvs");
```

不規則な時系列データを予測誤差：$\epsilon(s)$ を用いて、下記に示す線型な予測式からスペクトルを求める [15]。

$$\mathrm{x}(s)=\sum_{m=1}^{M}A(m)\,\mathrm{x}(s-m)+\epsilon(s)$$

ここで、下記の予測誤差の2乗平均が最小になるように、係数：$A(m)$ を求める。

$$\mathrm{E}\left[\epsilon(s)^2\right]=\lim_{N\to\infty}\frac{\sum_{s=1}^{N}\epsilon(s)^2}{N}\qquad N：データ数$$

係数：$A(m)$ を求める方法として、逐次計算法を以下に示す [15]。

$$C_{xx}(l)=\frac{1}{N}\sum_{s=1}^{N-l}\mathrm{x}(s)\,\mathrm{x}(s+l)\qquad l=1,2,\cdots,L$$

ここで下記と置く。

$$A_0(m)=0\qquad m=1,2,\cdots,L\qquad \sigma(0)^2=C_{xx}(0)$$

$A_M(m)\quad m=1,2,\cdots,M$、$\sigma(M)^2$ を $M=1,2,\cdots,L$ に、下記の逐次計算を行う。

$$A_{M+1}(M+1)=\frac{C_{xx}(M+1)-\sum_{m=1}^{M}A_M(m)\,C_{xx}(M-m+1)}{\sigma(M)^2}$$

$$A_{M+1}(m)=A_M(m)-A_{M+1}(M+1)\,A_M(M-m+1)$$

$$\sigma(M+1)^2=\sigma(M)^2\left(1-A_{M+1}(M+1)^2\right)$$

$$\mathrm{FPE}(M)=\frac{\sigma(M)^2\,(N+M+1)}{N-M-1}$$

$\mathrm{FPE}(M)$ が最小となる M を最終の推定値とする。スペクトル：$\mathrm{S}(\omega)$ は次式で与えられる。

$$\mathrm{S}(\omega)=\frac{\sigma(M)^2}{\left(\left(\sum_{m=1}^{M}A_M(m)\,e^{-2\,i\,\pi\,m\,\omega}\right)-1\right)^2}$$

入力：$\mathrm{x}(t)$ および応答出力：$\mathrm{y}(t)$ の結果を下記に示す。

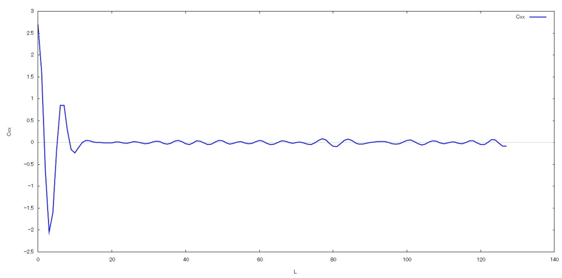


図 6.5.16: $C_{xx}(l)$

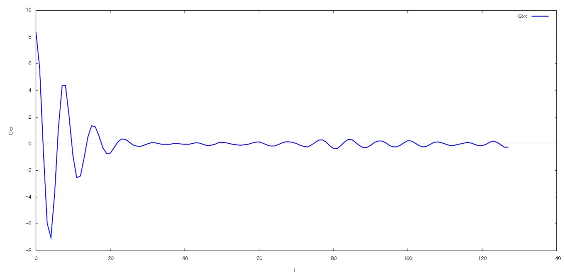


図 6.5.17: $C_{yy}(l)$

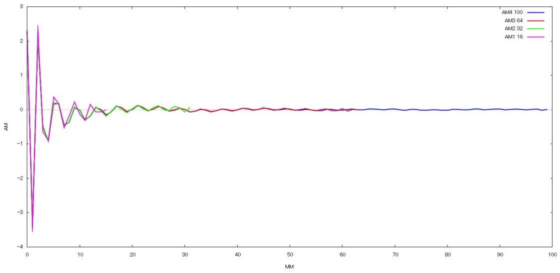


図 6.5.18: $\mathrm{x}(t)$ の $A_M(m)$

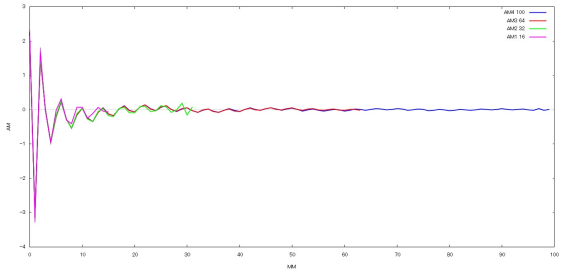


図 6.5.19: $\mathrm{y}(t)$ の $A_M(m)$

$M = 64$ として、スペクトルを求めると、

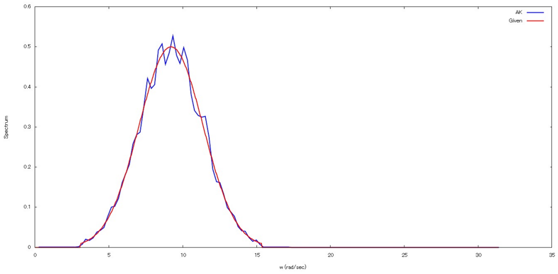


図 6.5.20: $\mathrm{S}_{xx}(\omega)$　 $M = 64$

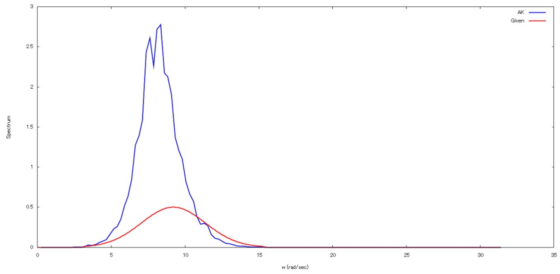


図 6.5.21: $\mathrm{S}_{yy}(\omega)$　 $M = 64$

前節で求めたストペクトルの結果との比較を行うと、

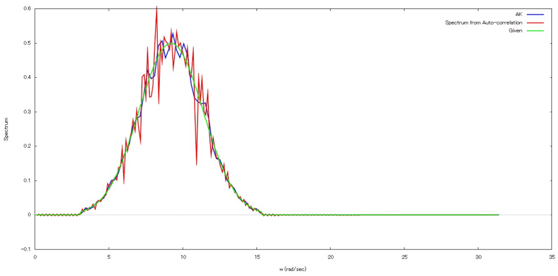


図 6.5.22: $\mathrm{S}_{xx}(\omega)$

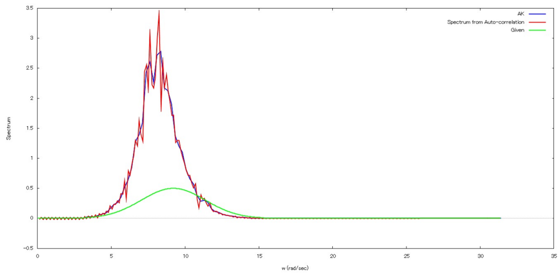


図 6.5.23: $\mathrm{S}_{yy}(\omega)$

6.5.5 FFT による応答解析

```
kill(all);
load("fft");
LINPUT1:read_list("d:listtimeinput.cvs");
LOUTPUT1:read_list("d:listtimeoutput.cvs");
FW21:read_list("d:listfw.cvs");
PH21:read_list("d:listph.cvs");
for J:1 thru 200 do (
if J=1 then FW2:[[ FW21[1], FW21[2]] ]
else FW2:append(FW2, [ [FW21[2*J-1],
 FW21[2*J]]]));
for J:1 thru 200 do (
if J=1 then PH2:[[ PH21[1], PH21[2]] ]
else PH2:append(PH2, [ [PH21[2*J-1],
 PH21[2*J]]]));
N:2048;
LAG2:N/2;
DT:0.1;
DF:float(1/(float(DT*N)));
for J:1 thru N do (
if J=1 then LINPUTW:[ float(LINPUT1[J]*
 sin(%pi*J/N)) ]
else LINPUTW:append(LINPUTW, [
 float(LINPUT1[J]*sin(%pi*J/N))]));
for J:1 thru N do (
if J=1 then LOUTPUTW:[ float(LOUTPUT1[J]*
 sin(%pi*J/N)) ]
else LOUTPUTW:append(LOUTPUTW, [
 float(LOUTPUT1[J]*sin(%pi*J/N))]));
for J:1 thru N do (
if J=1 then LOBW:[[ float(DT*(J-1)),
 LINPUTW[J]] ]
else LOBW:append(LOBW, [ [
 float(DT*(J-1)),LINPUTW[J]]]));
for J:1 thru N do (
if J=1 then LOCW:[[ float(DT*(J-1)),
 LOUTPUTW[J]] ]
else LOCW:append(LOCW, [ [float(DT*(J-1)),
 LOUTPUTW[J]]]));
plot2d([[discrete,LOBW],[discrete,LOCW]],
 [legend,"input sample deta with Hunning",
 "output sample deta with Hunning"],
 [style,[lines,2,1],[lines,2,2]],
 [xlabel, "t (sec)"],[ylabel, "x"]);
LINFFTW:fft(LINPUTW);
LOUTFFTW:fft(LOUTPUTW);
AA:0.0;
```

```
for J:1 thru LAG2 do (
BB:cabs(LOUTFFTW[J]),
if AA<BB then AA:BB );
ALIM:float(AA/100);
for J:1 thru LAG2 do (
if J=1 then LFW2:[[ float(DF*(J)),
 cabs(LINFFTW[J])] ]
else LFW2:append(LFW2, [ [float(DF*(J)),
 cabs(LINFFTW[J])]]));
for J:1 thru LAG2 do (
if J=1 then LFW3:[[ float(DF*(J)),
 cabs(LOUTFFTW[J])] ]
else LFW3:append(LFW3, [ [float(DF*(J)),
 cabs(LOUTFFTW[J])]]));
plot2d([[discrete,LFW2],[discrete,LFW3]],
 [legend,"Input","Output"],
 [style,[lines,2,1],[lines,2,2]],
 [xlabel, "w (rad/sec)"],[ylabel, "f(w)"]);
for J:1 thru LAG2 do (
if J=1 then LFW4:[[ float(DF*2*%pi*(J)),
 if cabs(LOUTFFTW[J])>ALIM then
 cabs(LOUTFFTW[J])/cabs(LINFFTW[J])
 else 0.0] ]
else LFW4:append(LFW4, [ [float(DF*2*
 %pi*(J)),if cabs(LOUTFFTW[J])>ALIM
 then cabs(LOUTFFTW[J])/
 cabs(LINFFTW[J]) else 0.0]]));
plot2d([[discrete,FW2],[discrete,LFW4]],
 [legend,"given","FFT"],
 [style,[lines,2,1],[lines,2,2]],
 [xlabel, "w (rad/sec)"],[ylabel, "f(w)"]);
for J:1 thru LAG2 do (
if J=1 then LFW5:[[ float(DF*2*%pi*(J)),
 if cabs(LOUTFFTW[J])>ALIM then -180/%pi*
 carg(LOUTFFTW[J]/LINFFTW[J]) else 0.0] ]
else LFW5:append(LFW5, [ [float(DF*2*
 %pi*(J)),if cabs(LOUTFFTW[J])>ALIM
 then -180/%pi*carg(LOUTFFTW[J]/
 LINFFTW[J]) else 0.0]]));
for J:1 thru LAG2 do (
if J=1 then LFW51:[LFW5[1] ]
else
if LFW5[J][2]>180 then
LFW51:append(LFW51, [ [LFW5[J][1],
 LFW5[J][2]-360]])
else LFW51:append(LFW51, [ [LFW5[J][1],
 LFW5[J][2]]]));
```

```
plot2d([[discrete,PH2],[discrete,LFW51]],
  [legend,"given","FFT"],
  [style,[lines,2,1],[lines,2,2]],
  [xlabel, "w (rad/sec)"],[ylabel, "ph(w)"],
  [y,-180,0]);
```

入力：x (t) および応答出力：y (t) の時系列データに、「6.4.4 ウインドウ」に示されている下記のハニングの時間ウインドウをかけ、その結果を以下に示す。

$$\mathrm{W}\,(t) = 0.5\cos\left(\frac{2\,\pi\,t}{T}\right) + 0.5 \qquad -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}$$

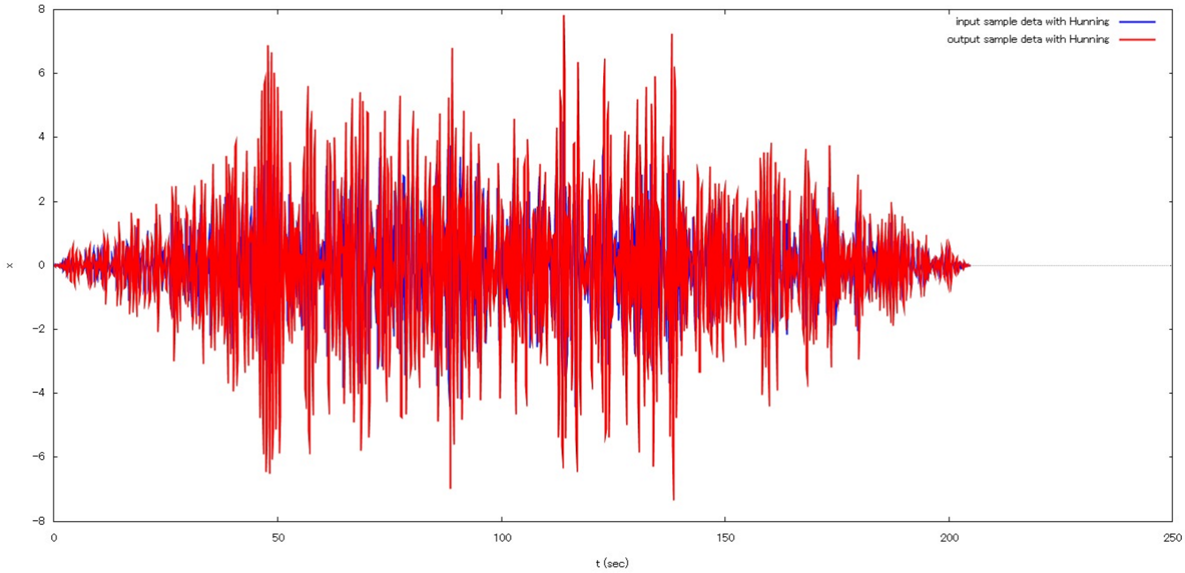


図 6.5.24: ハニングの時間ウインドウをかけた入力：x (t) とそれに線形な応答出力：y (t)

FFT によるスペクトル：$\mathrm{S}_{xx}\,(\omega)$、$\mathrm{S}_{yy}\,(\omega)$ を右に示す。入力：x (t) の FFT によるフーリエ解析結果：X (ω)、応答出力：y (t) の FFT によるフーリエ解析結果：Y (ω) とすると、周波数応答特性：H (ω) は次式で得られる。

$$\mathrm{H}\,(\omega) = \frac{\mathrm{Y}\,(\omega)}{\mathrm{X}\,(\omega)} \tag{6.5.14}$$

上式から得られた周波数応答特性、図 6.5.5、図 6.5.6 とよく一致している。

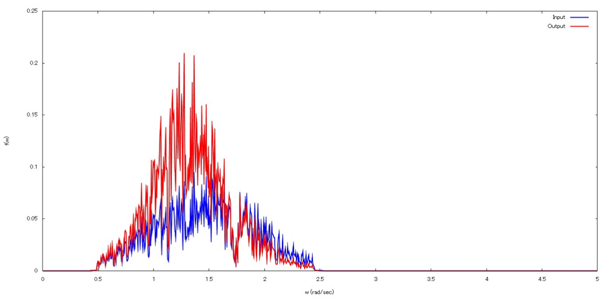


図 6.5.25: $\mathrm{S}_{xx}\,(\omega)$、$\mathrm{S}_{yy}\,(\omega)$

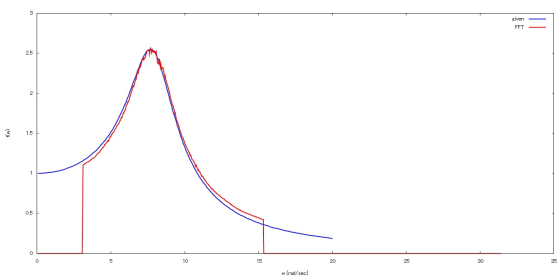


図 6.5.26: 周波数特性

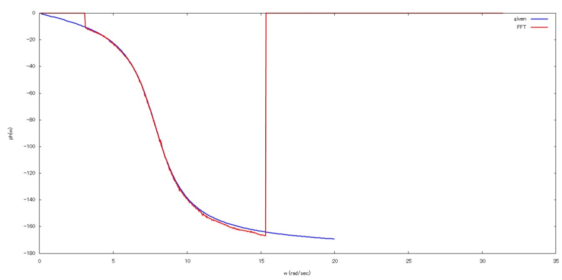


図 6.5.27: 位相特性

6.5.6 線形システムのスペクトル・クロススペクトルによる応答解析

```
kill(all);
N:2048;
LM2:N/2;
DT:0.1;
LAG:N/8;
LAG2:2*LAG;
LSPC10:read_list("d:listspect1.cvs");
LSPC20:read_list("d:listspect2.cvs");
LSPCWD10:read_list("d:listspect1wd.cvs");
LSPCWD20:read_list("d:listspect2wd.cvs");
LSPCAK10:read_list("d:listspectak1.cvs");
LSPCAK20:read_list("d:listspectak2.cvs");
LSPCC10:read_list("d:listspect3c.cvs");
LSPCS10:read_list("d:listspect3s.cvs");
FW21:read_list("d:listfw.cvs");
PH21:read_list("d:listph.cvs");
for J:1 thru LAG-1 do (
if J=1 then LAMP1:[[ LSPC10[1], if
 abs(LSPC10[2])>10^(-2) then
 sqrt(abs(LSPC20[2]/LSPC10[2])) else 0.0] ]
else LAMP1:append(LAMP1, [ [LSPC10[2*J-1],
  if abs(LSPC10[2*J])>10^(-2) then
  sqrt(abs(LSPC20[2*J]/LSPC10[2*J]))
  else 0.0]]));
for J:1 thru LAG-10 do (
if J=1 then LAMPWD1:[[ LSPCWD10[1],
  if abs(LSPCWD10[2])>10^(-2) then
  sqrt(abs(LSPCWD20[2]/LSPCWD10[2]))
   else 0.0] ]
else LAMPWD1:append(LAMPWD1,
 [[ LSPCWD10[2*J-1], if abs(LSPCWD10[2*J])
 >10^(-2) then sqrt(abs(LSPCWD20[2*J]/
 LSPCWD10[2*J]))
 else 0.0]]));
for J:1 thru 128 do (
if J=1 then LAMPK1:[[ LSPCAK10[1], if
 abs(LSPCAK10[2])>10^(-2) then
 sqrt(abs(LSPCAK20[2]/LSPCAK10[2]))
 else 0.0] ]
else LAMPK1:append(LAMPK1,
 [ [LSPCAK10[2*J-1], if abs(LSPCAK10[2*J])
 >10^(-2) then sqrt(abs(LSPCAK20[2*J]/
 LSPCAK10[2*J])) else 0.0]]));
```

```
for J:1 thru 200 do (
if J=1 then FW2:[[ FW21[1], FW21[2]] ]
else FW2:append(FW2, [ [FW21[2*J-1],
 FW21[2*J]]]));
for J:1 thru 200 do (
if J=1 then PH2:[[ PH21[1], PH21[2]] ]
else PH2:append(PH2, [ [PH21[2*J-1],
 PH21[2*J]]]));
plot2d([[discrete,FW2],[discrete,LAMP1],
 [discrete,LAMPWD1],[discrete,LAMPK1]],
 [legend,"given","Spec","Spec with WD",
 "Spec by AK"],[style,[lines,2,1],
 [lines,2,2],[lines,2,3],[lines,2,4]],
 [xlabel, "w (rad/sec)"],[ylabel, "f(w)"]);
for J:1 thru LAG-1 do (
if J=1 then LAMP3:[[ LSPC10[1], if
 abs(LSPC10[2])>10^(-2) then
 sqrt((LSPCC10[2]^2+LSPCS10[2]^2)/
 (LSPC10[2]^2)) else 0.0] ]
else LAMP3:append(LAMP3, [ [ LSPC10[2*J-1],
 if abs(LSPC10[2*J])>10^(-2) then
 sqrt((LSPCC10[2*J]^2+LSPCS10[2*J]^2)/
 (LSPC10[2*J]^2)) else 0.0]]));
plot2d([[discrete,FW2],[discrete,LAMP3]],
 [legend,"given","Syx Spec"],
 [style,[lines,2,1],[lines,2,2]],
 [xlabel, "w (rad/sec)"],[ylabel, "f(w)"]);
for J:1 thru LAG-1 do (
if J=1 then LPH3:[[ LSPC10[1], if
 abs(LSPC10[2])>10^(-2) then -180/
 %pi*carg(LSPCC10[2]+%i*LSPCS10[2])
 else 0.0] ]
else LPH3:append(LPH3, [ [ LSPC10[2*J-1],
 if abs(LSPC10[2*J])>10^(-2) then -180/%pi
 *carg(LSPCC10[2*J]+%i*LSPCS10[2*J])
 else 0.0]]));
plot2d([[discrete,PH2],[discrete,LPH3]],
[legend,"given","Syx Spec"],
[style,[lines,2,1],[lines,2,2]],
[xlabel, "w (rad/sec)"],[ylabel, "f(w)"],
[y,-180,0]);
```

「6.5.3 スペクトル」で得られた結果から周波数応答を求める。(6.4.18) 式から周波数応答：H (ω) は次式となる。

$$\mathrm{H}\,(\omega) = \frac{|S_{yy}\,(\omega)|}{|S_{xx}\,(\omega)|} \tag{6.5.15}$$

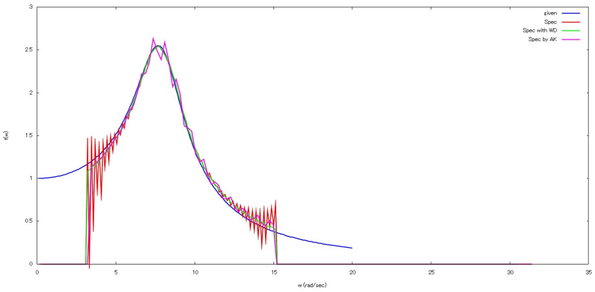


図 6.5.28: パワースペクトルから求めた周波数特性

(6.5.16) 式から周波数応答：H (ω) は次式となる。これから周波数特性、位相特性が得られる。

$$\mathrm{H}\,(\omega) = \frac{S_{yx}\,(\omega)}{S_{xx}\,(\omega)} \tag{6.5.16}$$

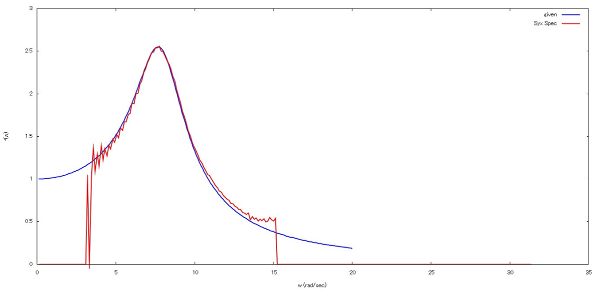


図 6.5.29: クロススペクトルから求めた周波数特性

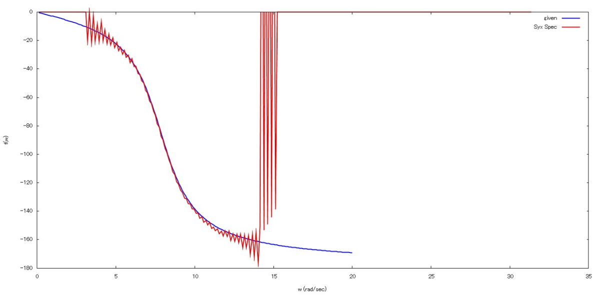


図 6.5.30: クロススペクトルから求めた位相特性

第7章　円柱関数と球関数

7.1　円柱関数

7.1.1　フーリエ・ベッセル (Fourier-Bessel) 展開

次式の Bessel の微分方程式について、

$$u\left(x^2-n^2\right)+\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,u\right)x^2+\left(\frac{d}{d\,x}\,u\right)x=0 \quad (7.1.1)$$

上式の解は n が整数でない場合、(3.3.10) 式、44 頁から、

$$u=\%k1\,\mathrm{bessel\_j}\left(n,x\right)+\%k2\,\mathrm{bessel\_j}\left(-n,x\right)$$

n が整数の場合、(3.3.12) 式から、

$$u=\%k2\,\mathrm{bessel\_y}\left(n,x\right)+\%k1\,\mathrm{bessel\_j}\left(n,x\right)$$

```
kill(all);
load("vect");
assume(C>0);
FX1:f(x)=sum(A[n]*bessel_j(\nu,
 \alpha[n]*x),n,1,inf);
AN1:A[n]=2/(bessel_j(\nu+1,
 \alpha[n]))^2*integrate(x*f(x)
 *bessel_j(\nu,\alpha[n]*x),x,0,1);
FX2:f(x)=sum(A[n]*bessel_j(\nu,
 \alpha[n]*x/C),n,1,inf);
AN2:A[n]=2/(bessel_j(\nu+1,
 \alpha[n]))^2/C^2*integrate(x
 *f(x)*bessel_j(\nu,\alpha[n]*
 x/C),x,0,C);
```

$0\to 1$ の区間で、ベッセル関数:$\mathrm{bessel\_y}\left(n,x\right)$ は $r=0$ で不適であるため、定義された : $\mathrm{f}\left(x\right)$ をベッセル関数 : $\mathrm{bessel\_j}\left(n,x\right)$ で展開する。α_n を $\mathrm{bessel\_j}\left(\nu,\alpha_n\right)=0$ を満足する n 番目の根とすると、展開式は、

$$\mathrm{f}\left(x\right)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\,\mathrm{bessel\_j}\left(\nu,\alpha_n\,x\right) \quad (7.1.2)$$

ここで、

$$\begin{aligned}A_n=&\frac{2}{\mathrm{bessel\_j}\left(\nu+1,\alpha_n\right)^2}\\&\times\int_0^1\mathrm{bessel\_j}\left(\nu,\alpha_n\,x\right)\,x\,\mathrm{f}\left(x\right)dx\end{aligned} \quad (7.1.3)$$

上式で区間を $0\to C$ とすると、

$$\mathrm{f}\left(x\right)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\,\mathrm{bessel\_j}\left(\nu,\frac{\alpha_n\,x}{C}\right) \quad (7.1.4)$$

ここで、

$$\begin{aligned}A_n=&\frac{2}{\mathrm{bessel\_j}\left(\nu+1,\alpha_n\right)^2C^2}\\&\times\int_0^C\mathrm{bessel\_j}\left(\nu,\frac{\alpha_n\,x}{C}\right)\,x\,\mathrm{f}\left(x\right)dx\end{aligned} \quad (7.1.5)$$

```
depends(u,[z]);
BS1:z^2*diff(u,z,2)+z*diff(u,z,1)+(z^2
 -\nu^2)*u=0;
depends(u,[x]);
depends(x,[z]);
Z1:z=\alpha*x;
X1:solve(Z1,x)[1];
DZ1:diff(X1,z,1);
DZ2:diff(X1,z,2);
ev(BS1,diff);
BS21:expand(subst([DZ2,DZ1,Z1],%/x));
BS22:'diff(x*'diff(u,x,1),x,1)+(\alpha^2*x
 -\nu^2/x)*u=0;
ev(BS22,diff);
factor(%-BS21);
BS23:subst([u=bessel_j(\nu,\alpha*x),
 \alpha=\alpha[m]],BS22);
BS24:subst([u=bessel_j(\nu,\alpha*x),
 \alpha=\alpha[n]],BS22);
BS23*bessel_j(\nu,\alpha[n]*x)-BS24*
 bessel_j(\nu,\alpha[m]*x);
expand(%);
%-rest(lhs(%),-2);
BS25:-factor(%);
BS26:'diff(x*bessel_j(nu,alpha[n]*x)*
 'diff(bessel_j(nu,alpha[m]*x),x,1)-x*
 bessel_j(nu,alpha[m]*x)*'diff(
 bessel_j(nu,alpha[n]*x),x,1),x,1);
```

```
rhs(BS25)-BS26;
ev(%,diff);
factor(%);
lhs(BS25)=BS26;
integrate(lhs(%),x,0,C)=integrate(rhs(%),
 x,0,C);
BS27:lhs(%)=bessel_j(nu,alpha[n]*C)*C*((
 'diff(bessel_j(nu,alpha[m]*C),x,1)))-
 bessel_j(nu,alpha[m]*C)*C*(('diff(
 bessel_j(nu,alpha[n]*C),x,1)));
```

(7.1.1) 式の Bessel の微分方程式に $x \to \alpha\, x$ の変数変換を行うと、

$$\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,u\right)\,x+\alpha^2\,u\,x-\frac{\nu^2\,u}{x}+\frac{d}{d\,x}\,u=0$$

上式は、下記のようにも記述できる。

$$\frac{d}{d\,x}\,\left(\left(\frac{d}{d\,x}\,u\right)\,x\right)+u\,\left(\alpha^2\,x-\frac{\nu^2}{x}\right)=0$$

上式の解は Bessel 関数であるから、上式に

$u=\mathrm{bessel\_j}\,(\nu,\alpha_m\,x)$,$u=\mathrm{bessel\_j}\,(\nu,\alpha_n\,x)$ を代入すると、

$$\frac{d}{d\,x}\,\left(\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{bessel\_j}\,(\nu,\alpha_m\,x)\right)\,x\right)+\mathrm{bessel\_j}\,(\nu,\alpha_m\,x)\,\left(\alpha_m^2\,x-\frac{\nu^2}{x}\right)=0 \tag{7.1.6}$$

$$\frac{d}{d\,x}\,\left(\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{bessel\_j}\,(\nu,\alpha_n\,x)\right)\,x\right)+\mathrm{bessel\_j}\,(\nu,\alpha_n\,x)\,\left(\alpha_n^2\,x-\frac{\nu^2}{x}\right)=0 \tag{7.1.7}$$

(7.1.6) 式に $\mathrm{bessel\_j}\,(\nu,\alpha_n\,x)$ を、(7.1.7) 式に $\mathrm{bessel\_j}\,(\nu,\alpha_m\,x)$ を掛け、両者を引くと、

$$\begin{aligned}&(\alpha_n-\alpha_m)\,(\alpha_n+\alpha_m)\,\mathrm{bessel\_j}\,(\nu,\alpha_m\,x)\,\mathrm{bessel\_j}\,(\nu,\alpha_n\,x)\,x\\&=\mathrm{bessel\_j}\,(\nu,\alpha_n\,x)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\left(\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{bessel\_j}\,(\nu,\alpha_m\,x)\right)\,x\right)\right)\\&\quad-\mathrm{bessel\_j}\,(\nu,\alpha_m\,x)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\left(\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{bessel\_j}\,(\nu,\alpha_n\,x)\right)\,x\right)\right)\end{aligned}$$

上式は下記のようにも記述できる。

$$\begin{aligned}&(\alpha_n-\alpha_m)\,(\alpha_n+\alpha_m)\,\mathrm{bessel\_j}\,(\nu,\alpha_m\,x)\,\mathrm{bessel\_j}\,(\nu,\alpha_n\,x)\,x\\&=\frac{d}{d\,x}\,\left(\mathrm{bessel\_j}\,(\nu,\alpha_n\,x)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{bessel\_j}\,(\nu,\alpha_m\,x)\right)\,x-\mathrm{bessel\_j}\,(\nu,\alpha_m\,x)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{bessel\_j}\,(\nu,\alpha_n\,x)\right)\,x\right)\end{aligned}$$

上式を積分すると、

$$\begin{aligned}&(\alpha_n-\alpha_m)\,(\alpha_n+\alpha_m)\,\int_0^C\mathrm{bessel\_j}\,(\nu,\alpha_m\,x)\,\mathrm{bessel\_j}\,(\nu,\alpha_n\,x)\,xdx\\&=\left[\mathrm{bessel\_j}\,(\nu,\alpha_n\,x)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{bessel\_j}\,(\nu,\alpha_m\,x)\right)\,x-\mathrm{bessel\_j}\,(\nu,\alpha_m\,x)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{bessel\_j}\,(\nu,\alpha_n\,x)\right)\,x\right]_0^C\\&=\mathrm{bessel\_j}\,(\nu,\alpha_n\,C)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{bessel\_j}\,(\nu,\alpha_m\,C)\right)\,C-\mathrm{bessel\_j}\,(\nu,\alpha_m\,C)\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{bessel\_j}\,(\nu,\alpha_n\,C)\right)\,C\end{aligned} \tag{7.1.8}$$

```
BS28:\alpha[n]*C*bessel_j(nu,alpha[n]*C)=-h*\alpha[n]*'diff(bessel_j(nu,alpha[n]*C),x,1);
BS281:solve(%,'diff(bessel_j(nu,alpha[n]*C),x,1))[1];
BS29:\alpha[m]*C*bessel_j(nu,alpha[m]*C)=-h*\alpha[m]*'diff(bessel_j(nu,alpha[m]*C),x,1);
BS291:solve(%,'diff(bessel_j(nu,alpha[m]*C),x,1))[1];
subst([BS281,BS291],BS27);
```

境界：$x=C$ で下記の境界条件式が成り立つとする。ここで α_n は下記の条件式を満足する n 番目の根とする。

$$\alpha_n\,\mathrm{bessel\_j}\,(\nu,\alpha_n\,C)\,C=-h\,\alpha_n\,\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{bessel\_j}\,(\nu,\alpha_n\,C)\right) \tag{7.1.9}$$

上式で $h=0$ の時には境界条件式は下記となる。

$$\mathrm{bessel\_j}\,(\nu,\alpha_n\,C)=0 \tag{7.1.10}$$

(7.1.9) 式を (7.1.8) 式に代入し、

$$(\alpha_n - \alpha_m)\ (\alpha_n + \alpha_m) \int_0^C \mathrm{bessel\_j}\,(\nu, \alpha_m\, x)\ \mathrm{bessel\_j}\,(\nu, \alpha_n\, x)\ x dx = 0$$

上式から、$m \neq n$ の時、下記の関係式が成り立つ。

$$\int_0^C \mathrm{bessel\_j}\,(\nu, \alpha_m\, x)\ \mathrm{bessel\_j}\,(\nu, \alpha_n\, x)\ x dx = 0 \tag{7.1.11}$$

```
BS32:subst([u=bessel_j(\nu,\alpha*x)],
 BS22);
BS41:first(lhs(BS32))*2*x*
 'diff(bessel_j(\nu,\alpha*x),x,1);
BS42:'diff((('diff(bessel_j(nu,alpha*x),
 x,1))*x)^2,x,1);
ev(BS41,diff)-ev(BS42,diff);
factor(%);
BS43:last(lhs(BS32))*2*x
 *'diff(bessel_j(\nu,\alpha*x),x,1);
BS44:('diff(bessel_j(nu,alpha*x)^2,x,1))
 *(alpha^2*x^2-nu^2);
ev(BS43,diff)-ev(BS44,diff);
factor(%);
BS42+BS44=0;
expand(lhs(%));
BS441:'integrate(first(%),x,0,C)
 +'integrate(%-first(%)-last(%),x,
 0,C)+'integrate(last(%),x,0,C)=0;
 BS442:integrate(('diff(bessel_j(\nu,
 \alpha*x)^2,x,1))*x^2,x,0,C)=
 bessel_j(nu,alpha*x)^2*x^2-
 integrate(bessel_j(nu,alpha*x)^2
 *2*x,x,0,C);
BS443:'integrate('diff(((
 'diff(bessel_j(nu,alpha*x),x,1))^2
 *x^2),x,1),x,0,C)=('diff(bessel_j(
 nu,alpha*x),x,1))^2*x^2;
BS444:'integrate('diff(bessel_j(
 nu,alpha*x)^2,x,1),x,0,C)=
 bessel_j(nu,alpha*x)^2;
subst([BS442,BS443,BS444],BS441);
expand(%/2/\alpha^2);
%-first(lhs(%));
BS45:rhs(%)=lhs(%);
BS451:'diff(bessel_j(nu,r),r,1)=\nu*
 bessel_j(\nu,r)/r-bessel_j(\nu+1,r);
BS46:'diff(bessel_j(nu,\alpha*x),x,1)=
 ((nu*bessel_j(nu,\alpha*x))/(\alpha*x)
 -bessel_j(nu+1, \alpha*x))*\alpha;
subst([BS46],BS45);
factor(%);
expand(%);
BS47:lhs(%)=subst([x=C],rhs(%));
```

(7.1.6) 式から、$\alpha_m \to \alpha$ として、

$$\frac{d}{d\,x}\ \left(\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{bessel\_j}\,(\nu, \alpha\, x)\right)\ x\right) + \mathrm{bessel\_j}\,(\nu, \alpha\, x)\ \left(\alpha^2\, x - \frac{\nu^2}{x}\right) = 0 \tag{7.1.12}$$

上式に $2\ \left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{bessel\_j}\,(\nu, \alpha\, x)\right)\ x$ を掛け、左辺第一項は、

$$2\ \left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{bessel\_j}\,(\nu, \alpha\, x)\right)\ x\ \left(\frac{d}{d\,x}\ \left(\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{bessel\_j}\,(\nu, \alpha\, x)\right)\ x\right)\right) = \frac{d}{d\,x}\ \left(\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{bessel\_j}\,(\nu, \alpha\, x)\right)^2\ x^2\right)$$

左辺第二項は、

$$2\,\mathrm{bessel\_j}\,(\nu, \alpha\, x)\ \left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{bessel\_j}\,(\nu, \alpha\, x)\right)\ x\ \left(\alpha^2\, x - \frac{\nu^2}{x}\right) = \left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{bessel\_j}\,(\nu, \alpha\, x)^2\right)\ \left(\alpha^2\, x^2 - \nu^2\right)$$

以上から、(7.1.12) 式は、

$$\frac{d}{d\,x}\ \left(\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{bessel\_j}\,(\nu, \alpha\, x)\right)^2\ x^2\right) + \left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{bessel\_j}\,(\nu, \alpha\, x)^2\right)\ \left(\alpha^2\, x^2 - \nu^2\right) = 0$$

上式を積分し、

$$\begin{aligned}\int_0^C \frac{d}{d\,x}\ \left(\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{bessel\_j}\,(\nu, \alpha\, x)\right)^2\ x^2\right) dx + \alpha^2 \int_0^C \left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{bessel\_j}\,(\nu, \alpha\, x)^2\right)\ x^2 dx \\ - \nu^2 \int_0^C \frac{d}{d\,x}\,\mathrm{bessel\_j}\,(\nu, \alpha\, x)^2 dx = 0\end{aligned} \tag{7.1.13}$$

上式の左辺第二項に部分積分を適用し、

$$\int_0^C \left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{bessel\_j}\,(\nu,\alpha\,x)^2\right)\,x^2dx=\left[\mathrm{bessel\_j}\,(\nu,\alpha\,x)^2\,x^2\right]_0^C-2\int_0^C \mathrm{bessel\_j}\,(\nu,\alpha\,x)^2\,xdx$$

上式を (7.1.13) 式の左辺第二項に代入し、(7.1.13) 式の左辺第一項、第三項の積分を行うと、

$$2\,\alpha^2\int_0^C \mathrm{bessel\_j}\,(\nu,\alpha\,x)^2\,xdx=\left[\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{bessel\_j}\,(\nu,\alpha\,x)\right)^2 x^2+\alpha^2\,\mathrm{bessel\_j}\,(\nu,\alpha\,x)^2\,x^2-\nu^2\,\mathrm{bessel\_j}\,(\nu,\alpha\,x)^2\right]_0^C \tag{7.1.14}$$

次式の関係式[1]から、

$$\left(\frac{d}{d\,r}\,\mathrm{bessel\_j}\,(\nu,r)\right)\,r=\nu\,\mathrm{bessel\_j}\,(\nu,r)-\mathrm{bessel\_j}\,(\nu+1,r)\,r \tag{7.1.15}$$

上式から、

$$\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{bessel\_j}\,(\nu,\alpha\,x)=\alpha\,\left(\frac{\nu\,\mathrm{bessel\_j}\,(\nu,\alpha\,x)}{\alpha\,x}-\mathrm{bessel\_j}\,(\nu+1,\alpha\,x)\right)$$

上式を (7.1.14) 式に代入し、

$$\begin{aligned}\int_0^C \mathrm{bessel\_j}\,(\nu,\alpha\,x)^2\,xdx=&\left[\frac{\mathrm{bessel\_j}\,(\nu+1,\alpha\,x)^2\,x^2}{2}+\frac{\mathrm{bessel\_j}\,(\nu,\alpha\,x)^2\,x^2}{2}-\frac{\nu\,\mathrm{bessel\_j}\,(\nu,\alpha\,x)\,\mathrm{bessel\_j}\,(\nu+1,\alpha\,x)\,x}{\alpha}\right]_0^C\\=&\frac{\mathrm{bessel\_j}\,(\nu+1,\alpha\,C)^2\,C^2}{2}+\frac{\mathrm{bessel\_j}\,(\nu,\alpha\,C)^2\,C^2}{2}-\frac{\nu\,\mathrm{bessel\_j}\,(\nu,\alpha\,C)\,\mathrm{bessel\_j}\,(\nu+1,\alpha\,C)\,C}{\alpha}\end{aligned} \tag{7.1.16}$$

```
BS48:bessel_j(\nu,\alpha[n]*C)=0;
BS481:subst([\alpha=\alpha[n],BS48],BS47);
'integrate(lhs(FX1)*bessel_j(\nu,\alpha[n]
 *x)*x,x,0,C)='integrate(subst([n=m],
 rhs(FX1))*bessel_j(\nu,\alpha[n]*x)*x,
 x,0,C);
lhs(%)=sum('integrate(A[m]*bessel_j(\nu,
 \alpha[m]*x)*bessel_j(\nu,\alpha[n]*x)*
 x,x,0,C),m,1,inf);
BS482:lhs(%)=subst([1=n,inf=n,\alpha[m]=
 \alpha[n]],rhs(%));
subst([BS481],%);
```

```
ev(%,sum);
solve(%,A[n])[1];
subst([\alpha[n]*x=\alpha[n]*x/C,\alpha[n]
 *C=\alpha[n],\alpha[n]^2=1],%);
```

境界条件が次式の (7.1.10) 式の時、

$$\mathrm{bessel\_j}\,(\nu,\alpha_m\,C)=0$$

上式を (7.1.16) 式に代入すると、

$$\int_0^C \mathrm{bessel\_j}\,(\nu,\alpha_n\,x)^2\,xdx=\frac{\mathrm{bessel\_j}\,(\nu+1,\alpha_n\,C)^2\,C^2}{2} \tag{7.1.17}$$

次式で $\mathrm{f}\,(x)$ として、(7.1.2) 式を代入し、(7.1.11) 式から $m=n$ の項のみが残り、上式から、

$$\begin{aligned}\int_0^C \mathrm{bessel\_j}\,(\nu,\alpha_n\,x)\,x\,\mathrm{f}\,(x)\,dx&=\int_0^C \mathrm{bessel\_j}\,(\nu,\alpha_n\,x)\,\left(\sum_{m=1}^{\infty}A_m\,\mathrm{bessel\_j}\,(\nu,\alpha_m\,x)\right)\,xdx\\&=\sum_{m=1}^{\infty}A_m\int_0^C \mathrm{bessel\_j}\,(\nu,\alpha_m\,x)\,\mathrm{bessel\_j}\,(\nu,\alpha_n\,x)\,xdx=\frac{A_n\,\mathrm{bessel\_j}\,(\nu+1,\alpha_n\,C)^2\,C^2}{2}\end{aligned} \tag{7.1.18}$$

上式から、A_n を求め、(7.1.3) 式が得られた。

$$A_n=\frac{2}{\mathrm{bessel\_j}\,(\nu+1,\alpha_n\,C)^2\,C^2}\int_0^C \mathrm{bessel\_j}\,(\nu,\alpha_n\,x)\,x\,\mathrm{f}\,(x)\,dx$$

以上から、(7.1.5) 式が得られた。

$$A_n=\frac{2}{\mathrm{bessel\_j}\,(\nu+1,\alpha_n)^2\,C^2}\int_0^C \mathrm{bessel\_j}\left(\nu,\frac{\alpha_n\,x}{C}\right)\,x\,\mathrm{f}\,(x)\,dx$$

[1]森口　繁一、宇田川　久、一松　信：岩波数学公式 3　特殊函数、岩波書店　2002、P.159

7.1.2 フーリエ・ベッセル展開例

```
CS1:sqrt(2/%pi/x)*cos(x-(2*\nu+1)/4*%pi);
CG1:(x/2)^(\nu)*sum((-1)^i*(x/2)^(2*i)
 /(i!)/gamma(\nu+i+1),i,0,inf);
CG2:subst([inf=100],CG1);
CS2:subst([\nu=0],CS1);
CS3:subst([\nu=0],CG2);
plot2d([bessel_j(0,x),CS2,CS3],[x,0,50],
 [y,-1,1.5],[legend,"bessel_j(0,x)",
 "Approx. cos","Approx. poly"],[style,
 [lines,3,1],[lines,3,2],[lines,3,3]]);
CS2:subst([\nu=1],CS1);
CS3:subst([\nu=1],CG2);
plot2d([bessel_j(1,x),CS2,CS3],[x,0,50],
 [y,-1,1.5],[legend,"bessel_j(1,x)",
 "Approx. cos","Approx. poly"],[style,
 [lines,3,1],[lines,3,2],[lines,3,3]]);
CS2:subst([\nu=3],CS1);
CS3:subst([\nu=3],CG2);
plot2d([bessel_j(3,x),CS2,CS3],[x,0,50],
 [y,-1,1.5],[legend,"bessel_j(3,x)",
 "Approx. cos","Approx. poly"],[style,
 [lines,3,1],[lines,3,2],[lines,3,3]]);
```

ベッセル関数を近似するのに、x が大きい場合は次式[1]が有効で、

$$\mathrm{bessel\_j}\,(\nu, x) \approx \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\,\sqrt{x}}\cos\left(x - \frac{\pi\,(2\,\nu+1)}{4}\right) \tag{7.1.19}$$

x が小さい場合は (3.4.26) 式の級数表記：次式[2]が有効である。

$$\mathrm{bessel\_j}\,(\nu, x) = \frac{x^{\nu}}{2^{\nu}}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^{i}\,x^{2\,i}}{2^{2\,i}\,i!\,\Gamma\,(\nu+i+1)} \tag{7.1.20}$$

以下に関数近似の結果を示す。(7.1.19) 式は x が大きい場合によく一致している。(7.1.20) 式は x が小さい場合によく一致しているが、$x \approx 35$ 以上で数値計算の限界で値が得られていない。

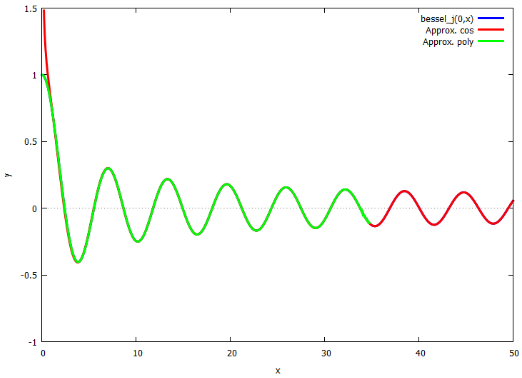


図 7.1.1: $\nu = 0$ のベッセル関数近似

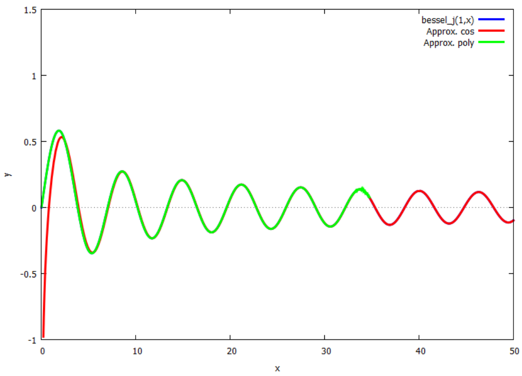


図 7.1.2: $\nu = 1$ のベッセル関数近似

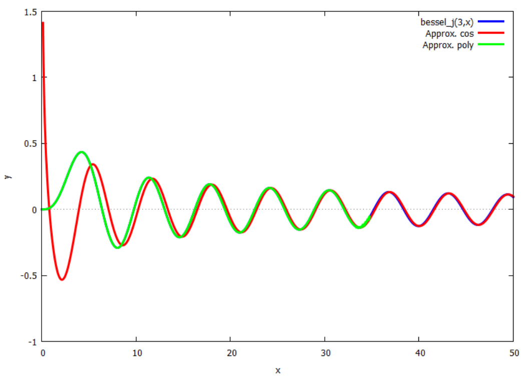


図 7.1.3: $\nu = 3$ のベッセル関数近似

[1]森口　繁一、宇田川　久、一松　信：岩波数学公式 3　特殊函数、岩波書店　2002、P.154

[2]森口　繁一、宇田川　久、一松　信：岩波数学公式 3　特殊函数、岩波書店　2002、P.145

```
x-(2*\nu+1)/4*%pi=n*%pi-%pi/2;
solve(%,x)[1];
AL1:\alpha[n]=rhs(%);
AL2:subst([n=n+1],AL1);
DX1:(\alpha[n+1]-\alpha[n])/4;
X1:\alpha[n]-DX1;
X2:\alpha[n]+DX1;
X11:subst([AL1,AL2],X1);
X21:subst([AL1,AL2],X2);
LI1:[\nu=1,n=1];
X12:subst([LI1],X11);
X22:subst([LI1],X21);
float(subst([LI1],AL1));
subst([LI1],\alpha[\nu][n])=find_root(
 subst([LI1],bessel_j(\nu,x)),x,X12,X22);
LI1:[\nu=1,n=2];
X12:subst([LI1],X11);
X22:subst([LI1],X21);
float(subst([LI1],AL1));
subst([LI1],\alpha[\nu][n])=find_root(
 subst([LI1],bessel_j(\nu,x)),x,X12,X22);
LI1:[\nu=1,n=3];
X12:subst([LI1],X11);
X22:subst([LI1],X21);
float(subst([LI1],AL1));
subst([LI1],\alpha[\nu][n])=find_root(
 subst([LI1],bessel_j(\nu,x)),x,X12,X22);
```

(7.1.19) 式を用いて、$\mathrm{bessel\_j}(\nu, \alpha_n) = 0$ を満足する α_n を求めると次式となる。

$$\alpha_n = \frac{2\pi\nu + 4\pi n - \pi}{4}$$

上式を初期値として $find\_root$ 関数を用いて α_n を求めた結果を下記に示す。
$\nu = 1, n = 1$ の場合、

$$\text{初期値}: \alpha_1 = 3.926990816987241$$

$$\rightarrow \text{結果}: \alpha_1 = 3.831705970207513$$

$\nu = 1, n = 2$ の場合、

$$\text{初期値}: \alpha_1 = 7.068583470577035$$

$$\rightarrow \text{結果}: \alpha_1 = 7.015586669815619$$

$\nu = 1, n = 3$ の場合、

$$\text{初期値}: \alpha_1 = 10.21017612416683$$

$$\rightarrow \text{結果}: \alpha_1 = 10.17346813506272$$

フーリエ・ベッセル展開の例を下記に示す。(7.1.2) 式に (7.1.3) 式を代入すると下記となる。積分を実行するにはベッセル関数として (7.1.20) 式では多項式となり、積分が容易になるので、これを代入すると、

$$\begin{aligned}
\mathrm{f}(x) =& 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{bessel_j}(\nu, \alpha_n\, x)}{\mathrm{bessel_j}(\nu+1, \alpha_n)^2} \\
&\times \int_0^1 \mathrm{bessel_j}(\nu, \alpha_n\, x)\; x\, \mathrm{f}(x)\, dx \\
\approx& \sum_{n=1}^{N}\frac{2\,\mathrm{bessel_j}(\nu, \alpha_n\, x)}{\mathrm{bessel_j}(\nu+1, \alpha_n)^2} \\
&\times \int_0^1 x\, \mathrm{f}(x)\; \frac{x^{\nu}}{2^{\nu}} \sum_{i=0}^{100}\frac{(-1)^i(\alpha_n\, x)^{2\,i}}{2^{2\,i}\, i!\,\Gamma(i+1)} dx
\end{aligned} \tag{7.1.21}$$

$\mathrm{f}(x) = 1 - x\ (0 < x < 1)$ のフーリエ・ベッセル展開の結果を以下に示す。

```
LI1:[\nu=0];
subst([LI1],CG2);
CG4:subst([x=\alpha[n]*x],%);
FX4:subst([AN1],FX1);
FX41:2*(bessel_j(nu,alpha[n]*x)*integrate(
 CG4*x*f(x),x,0,1))/bessel_j(nu+1,
 alpha[n])^2;
FX3:f(x)=(1-x);
subst([LI1],FX41);
FX42:subst([FX3],%);
BS1:0;
for N:1 thru 3 do(
m:N,
AL1:subst([LI1],(2*%pi*nu+4*%pi*m-%pi)/4),
AL2:subst([LI1],(2*%pi*nu+4*%pi*(m+1)-%pi)
 /4),
DX1:(AL2-AL1)/4,
X1:AL1-DX1,
X2:AL1+DX1,
AL3:find_root(subst([LI1],bessel_j(\nu,x))
 ,x,X1,X2),
BS1:BS1+subst([\alpha[n]=AL3],FX42));
ev(BS1,sum);
PL1:ev(%,integrate);
BS1:0;
for N:1 thru 10 do(
m:N,
AL1:subst([LI1],(2*%pi*nu+4*%pi*m-%pi)/4),
AL2:subst([LI1],(2*%pi*nu+4*%pi*(m+1)-%pi)
 /4),
DX1:(AL2-AL1)/4,
```

```
X1:AL1-DX1,
X2:AL1+DX1,
AL3:find_root(subst([LI1],bessel_j(\nu,x))
 ,x,X1,X2),
BS1:BS1+subst([\alpha[n]=AL3],FX42));
ev(BS1,sum);
PL2:ev(%,integrate);
plot2d([rhs(FX3),PL1,PL2],[x,0,1],[legend,
 "1-x","N=3","N=10"],[style,
 [lines,3,1],[lines,3,2],[lines,3,3]]);
```

(7.1.21) 式では $x < 35$ でないと解が得られないので、N は 10 までとした。

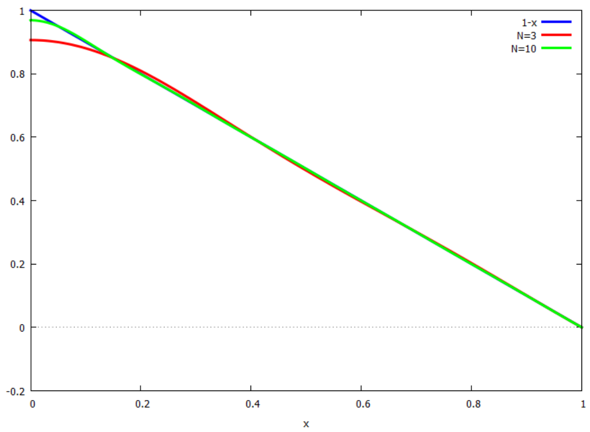


図 7.1.4: $\mathrm{f}(x) = 1 - x$ のフーリエ・ベッセル展開

$\mathrm{f}(x) = (1-x)x\ (0 < x < 1)$ のフーリエ・ベッセル展開の結果を以下に示す。

```
LI1:[\nu=1];
subst([LI1],CG2);
CG4:subst([x=\alpha[n]*x],%);
FX4:subst([AN1],FX1);
FX41:2*(bessel_j(nu,alpha[n]*x)*integrate(
 CG4*x*f(x),x,0,1))/bessel_j(nu+1,
 alpha[n])^2;
FX3:f(x)=(1-x)*x;
subst([LI1],FX41);
FX42:subst([FX3],%);
```

```
BS1:0;
for N:1 thru 3 do(
m:N,
AL1:subst([LI1],(2*%pi*nu+4*%pi*m-%pi)/4),
AL2:subst([LI1],(2*%pi*nu+4*%pi*(m+1)-%pi)
 /4),
DX1:(AL2-AL1)/4,
X1:AL1-DX1,
X2:AL1+DX1,
AL3:find_root(subst([LI1],bessel_j(\nu,x)),
 x,X1,X2),
BS1:BS1+subst([\alpha[n]=AL3],FX42));
ev(BS1,sum);
PL1:ev(%,integrate);
BS1:0;
for N:1 thru 10 do(
m:N,
AL1:subst([LI1],(2*%pi*nu+4*%pi*m-%pi)/4),
AL2:subst([LI1],(2*%pi*nu+4*%pi*(m+1)-%pi)
 /4),
DX1:(AL2-AL1)/4,
X1:AL1-DX1,
X2:AL1+DX1,
AL3:find_root(subst([LI1],bessel_j(\nu,x))
 ,x,X1,X2),
BS1:BS1+subst([\alpha[n]=AL3],FX42));
ev(BS1,sum);
PL2:ev(%,integrate);
plot2d([rhs(FX3),PL1,PL2],[x,0,1],[legend,
 "(1-x)*x","N=3","N=10"],[style,
 [lines,3,1],[lines,3,2],[lines,3,3]]);
```

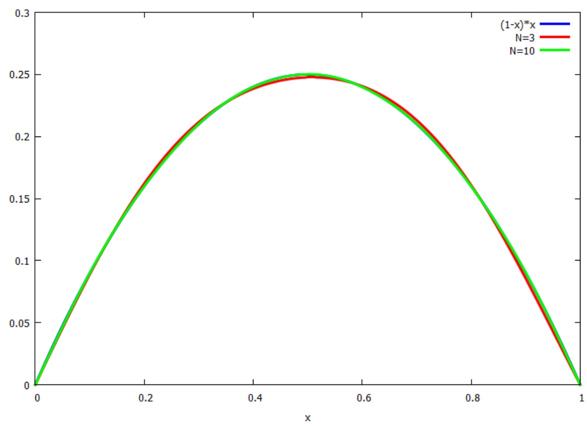


図 7.1.5: $\mathrm{f}(x) = (1-x)x$ のフーリエ・ベッセル展開

7.1.3　ディニ (Dini) 展開

```
kill(all);
assume(C>0);
FX1:f(x)=sum(A[n]*bessel_j(\nu,\alpha[n]*x/C),n,1,inf);
AL1:(x*'diff(bessel_j(\nu,x),x,1)+p*bessel_j(\nu,x))=0;
AN1:A[n]=2/C^2*\alpha[n]^2/(\alpha[n]^2+p^2-\nu^2)/(bessel_j(\nu,\alpha[n]))^2*
 integrate(x*f(x)*bessel_j(\nu,\alpha[n]*x/C),x,0,C);
BS47:integrate(bessel_j(nu,alpha*x)^2*x,x,0,C)=(bessel_j(nu+1,alpha*C)^2*C^2)/2+(bessel
 _j(nu,alpha*C)^2*C^2)/2-(nu*bessel_j(nu,alpha*C)*bessel_j(nu+1,alpha*C)*C)/alpha;
BS51:r*'diff(bessel_j(nu,r),r,1)+p*bessel_j(\nu,r)=0;
BS451:('diff(bessel_j(nu,r),r,1))*r=nu*bessel_j(nu,r)-bessel_j(nu+1,r)*r;
subst([BS451],BS51);
subst([r=\alpha*C],%);
BS52:solve(%,bessel_j(nu+1,alpha*C))[1];
subst([BS52],BS47);
factor(%);
BS53:subst([\alpha=\alpha[n]],%);
BS54:integrate(bessel_j(nu,alpha[n]*x)
 *x*f(x),x,0,C);
subst([n=m,C=1],FX1);
BS54=subst([%],BS54);
lhs(%)=sum(integrate(bessel_j(nu,alpha[n]*x)*((A[m]*
 bessel_j(nu,(alpha[m]*x))))*x,x,0,C),m,1,inf);
subst([1=n,inf=n],%);
BS482:ev(%,sum);
subst([BS53],BS482);
solve(%,A[n])[1];
factor(%);
subst([\alpha[n]=\alpha[n]/C],%);
```

(7.1.1) 式の Bessel の微分方程式において、境界条件が次式で、

$$\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{bessel\_j}\,(\nu,x)\right)\,x+\mathrm{bessel\_j}\,(\nu,x)\;p=0 \quad (7.1.22)$$

上式の n 番目の根: : α_n とすると、解の Bessel 関数の級数展開式は、

$$\mathrm{f}\,(x)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\,\mathrm{bessel\_j}\left(\nu,\frac{\alpha_n\,x}{C}\right) \quad (7.1.23)$$

ここで、係数は、

$$A_n=\frac{2\,\alpha_n^2}{\mathrm{bessel\_j}\,(\nu,\alpha_n)^2\,\left(p^2-\nu^2+\alpha_n^2\right)\,C^2}\times\int_0^C\mathrm{bessel\_j}\left(\nu,\frac{\alpha_n\,x}{C}\right)\,x\,\mathrm{f}\,(x)\,dx \quad (7.1.24)$$

(7.1.22) 式に (7.1.15) 式を代入し、境界の $x=C$ として、

$$-\alpha\,\mathrm{bessel\_j}\,(\nu+1,\alpha\,C)\;C+\mathrm{bessel\_j}\,(\nu,\alpha\,C)\;p+\nu\,\mathrm{bessel\_j}\,(\nu,\alpha\,C)=0$$

上式を (7.1.16) 式に代入し

$$\int_0^C \mathrm{bessel\_j}\left(\nu,\alpha\,x\right)^2 x dx = \frac{\mathrm{bessel\_j}\left(\nu,\alpha\,C\right)^2 C^2}{2} + \frac{\left(\mathrm{bessel\_j}\left(\nu,\alpha\,C\right)\,p+\nu\,\mathrm{bessel\_j}\left(\nu,\alpha\,C\right)\right)^2}{2\,\alpha^2} - \frac{\nu\,\mathrm{bessel\_j}\left(\nu,\alpha\,C\right)\,\left(\mathrm{bessel\_j}\left(\nu,\alpha\,C\right)\,p+\nu\,\mathrm{bessel\_j}\left(\nu,\alpha\,C\right)\right)}{\alpha^2} = \frac{\mathrm{bessel\_j}\left(\nu,\alpha\,C\right)^2\,\left(\alpha^2\,C^2+p^2-\nu^2\right)}{2\,\alpha^2}$$

次式で $\mathrm{f}\left(x\right)$ として、(7.1.2) 式を代入し、(7.1.11) 式から $m=n$ の項のみが残り、上式から、

$$\begin{aligned}\int_0^C \mathrm{bessel\_j}\left(\nu,\alpha_n\,x\right)\,x\,\mathrm{f}\left(x\right)dx &= \int_0^C \mathrm{bessel\_j}\left(\nu,\alpha_n\,x\right)\,\left(\sum_{m=1}^{\infty} A_m\,\mathrm{bessel\_j}\left(\nu,\alpha_m\,x\right)\right)\,xdx \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} A_m \int_0^C \mathrm{bessel\_j}\left(\nu,\alpha_m\,x\right)\,\mathrm{bessel\_j}\left(\nu,\alpha_n\,x\right)\,xdx \\ &= A_n \int_0^C \mathrm{bessel\_j}\left(\nu,\alpha_n\,x\right)^2 xdx \\ &= \frac{A_n\,\mathrm{bessel\_j}\left(\nu,\alpha_n\,C\right)^2\,\left(\alpha_n^2\,C^2+p^2-\nu^2\right)}{2\,\alpha_n^2}\end{aligned}$$

上式から、A_n を求め、

$$A_n = \frac{2\,\alpha_n^2}{\mathrm{bessel\_j}\left(\nu,\alpha_n\,C\right)^2\,\left(\alpha_n^2\,C^2+p^2-\nu^2\right)} \int_0^C \mathrm{bessel\_j}\left(\nu,\alpha_n\,x\right)\,x\,\mathrm{f}\left(x\right)dx$$

上記から、次式が得られ、(7.1.24) 式が得られる。

$$A_n = \frac{2\,\alpha_n^2}{\mathrm{bessel\_j}\left(\nu,\alpha_n\right)^2\,\left(p^2-\nu^2+\alpha_n^2\right)\,C^2} \int_0^C \mathrm{bessel\_j}\left(\nu,\frac{\alpha_n\,x}{C}\right)\,x\,\mathrm{f}\left(x\right)dx$$

7.2 球関数

7.2.1 Legendre の多項式による展開

(3.4.39) 式、65 頁の Legendre の微分方程式について、次式で表現できる、

$$-y\,n\,(n+1)+\left(x^2-1\right)\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,y\right)+2\,x\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)=0 \tag{7.2.1}$$

ここで n は正の整数とする。

```
kill(all);
depends(y,[x]);
EQ1:(x^2-1)*diff(y,x,2)+2*x*diff(y,x,1)
 -N*(N+1)*y=0;
PN1:P[n](x)=1/n!/2^n*diff((x^2-1)^n,x,n);
PN2:y=rhs(PN1);
FX1:f(x)=sum(A[n]*P[n](x),n,0,inf);
AN1:A[n]=(2*n+1)/2*integrate(f(x)*P[n](x),
 x,-1,1);
```

上式の多項式解である (3.4.52) 式、69 頁の Rodrigue の公式は下記である。

$$P_n\left(x\right)=\frac{\frac{d^n}{d\,x^n}\left(x^2-1\right)^n}{2^n\,n!} \tag{7.2.2}$$

上式の多項式を用いた級数展開式は下記である。

$$\mathrm{f}\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\,P_n\left(x\right) \tag{7.2.3}$$

ここで、

$$A_n=\frac{(2\,n+1)}{2}\int_{-1}^{1}\mathrm{f}\left(x\right)\,P_n\left(x\right)dx \tag{7.2.4}$$

(7.2.3) 式に (7.2.4) 式を代入すると、

$$\mathrm{f}\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2\,n+1)}{2}\,P_n\left(x\right)\int_{-1}^{1}\mathrm{f}\left(x\right)\,P_n\left(x\right)dx \tag{7.2.5}$$

```
EX0:subst([AN1],FX1);
EQ2:'diff((x^2-1)*'diff(y,x,1),x,1)
  -n*(n+1)*y=0;
ev(%,diff)-EQ1;
subst([y=P[n](x)],EQ2);
-(%-first(lhs(%)));
%*P[m](x);
integrate(lhs(%),x,-1,1)=integrate(rhs(%),
  x,-1,1);
lhs(%)=P[m](x)*(x^2-1)*('diff(P[n](x),x,1))
  -integrate((x^2-1)*('diff(P[n](x),x,1))*
  diff(P[m](x),x,1),x,-1,1);
lhs(%)=last(rhs(%));
PMN1:%/n/(n+1);
PMN2:lhs(%)=rhs(%)*n*(n+1)/m/(m+1);
PMN1-PMN2;
factor(%);
PMN3:integrate((x^2-1)*('diff(P[m](x),x,1))
  *('diff(P[n](x),x,1)),x,-1,1)=0;
PMN4:subst([PMN3],PMN1);
```

以降、(7.2.4) 式を求める。Legendre の微分方程式：(7.2.1) 式を下記のように書き換えることができる。

$$\frac{d}{d\,x}\left(\left(x^2-1\right)\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)\right)-n\,(n+1)\,y=0$$

上式の多項式解：$P_n\left(x\right)$ を代入し、変形すると、

$$n\,(n+1)\,P_n\left(x\right)=\frac{d}{d\,x}\left(\left(x^2-1\right)\left(\frac{d}{d\,x}\,P_n\left(x\right)\right)\right)$$

両辺に $P_m\left(x\right)$ を掛け、

$$n\,(n+1)\,P_m\left(x\right)\,P_n\left(x\right)=P_m\left(x\right)\left(\frac{d}{d\,x}\left(\left(x^2-1\right)\left(\frac{d}{d\,x}\,P_n\left(x\right)\right)\right)\right)$$

上式を積分し、右辺に部分積分を適用し、

$$\begin{aligned}n\,(n+1)\int_{-1}^{1}P_m\left(x\right)\,P_n\left(x\right)dx&=\int_{-1}^{1}P_m\left(x\right)\left(\frac{d}{d\,x}\left(\left(x^2-1\right)\left(\frac{d}{d\,x}\,P_n\left(x\right)\right)\right)\right)dx\\&=\left[\left(x^2-1\right)\,P_m\left(x\right)\left(\frac{d}{d\,x}\,P_n\left(x\right)\right)\right]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}\left(x^2-1\right)\left(\frac{d}{d\,x}\,P_m\left(x\right)\right)\left(\frac{d}{d\,x}\,P_n\left(x\right)\right)dx\\&=-\int_{-1}^{1}\left(x^2-1\right)\left(\frac{d}{d\,x}\,P_m\left(x\right)\right)\left(\frac{d}{d\,x}\,P_n\left(x\right)\right)dx\end{aligned}$$

上式を変形し、

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)\, P_n(x)\, dx = -\frac{1}{n\,(n+1)} \int_{-1}^{1} \left(x^2-1\right) \left(\frac{d}{d\,x} P_m(x)\right) \left(\frac{d}{d\,x} P_n(x)\right) dx \tag{7.2.6}$$

上式で $n \to m$、$m \to n$ に置き換えて、

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)\, P_n(x)\, dx = -\frac{1}{m\,(m+1)} \int_{-1}^{1} \left(x^2-1\right) \left(\frac{d}{d\,x} P_m(x)\right) \left(\frac{d}{d\,x} P_n(x)\right) dx \tag{7.2.7}$$

(7.2.6) 式と (7.2.7) 式の差をとると、

$$0 = \frac{(n-m)\,(n+m+1)}{m\,(m+1)\,n\,(n+1)} \int_{-1}^{1} \left(x^2-1\right) \left(\frac{d}{d\,x} P_m(x)\right) \left(\frac{d}{d\,x} P_n(x)\right) dx$$

上式で、$m \neq n$ とすると、

$$\int_{-1}^{1} \left(x^2-1\right) \left(\frac{d}{d\,x} P_m(x)\right) \left(\frac{d}{d\,x} P_n(x)\right) dx = 0$$

上式を (7.2.6) 式に代入すると、

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)\, P_n(x)\, dx = 0 \qquad ここで、\quad m \neq n \tag{7.2.8}$$

```
PN3:subst([n=m],PN1);
lhs(PMN4)=subst([PN1],lhs(PMN4));
IPN1:subst([m=n],%);
DPN1:lhs(PN1);
DPN2:rhs(PN1)*2^n*n!;
```

```
integrate(PN1,x);
diff(PN3,x,1);
IPN1*2^n*n!;
lhs(%)=DPN1*integrate(DPN2,x)-integrate(
 diff(DPN1,x,1)*integrate(DPN2,x),x,-1,1);
lhs(%)=last(rhs(%));
lhs(%)=-diff(DPN1,x,1)*integrate(integrate
 (DPN2,x),x)+(-1)^2*integrate(
 diff(DPN1,x,2)*integrate(
 integrate(DPN2,x),x),x,-1,1);
lhs(%)=(-1)^n*integrate(diff(DPN1,x,n)
 *(x^2-1)^n,x,-1,1);
IPN2:%/(2^n*n!);
```

次式について、(7.2.2) 式を代入すると、

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)^2 dx = \frac{1}{2^n\,n!} \int_{-1}^{1} P_n(x) \left(\frac{d^n}{d\,x^n} \left(x^2-1\right)^n\right) dx$$

上式を変形し、部分積分を下記のように、繰り返し適用する。ここで、部分積分の $[\quad]_{-1}^{1}$ について、$\left(x^2-1\right)$ は偶関数であるから、$\left(x^2-1\right)^n$ も偶関数となる。今、n を奇数の場合、$P_n(x)$ は (7.2.2) 式から奇数回微分であるから奇関数となる。一方、$\frac{d^{n-1}}{d\,x^{n-1}} \left(x^2-1\right)^n$ は偶数回微分であるから偶関数となる。奇関数と偶関数の積は偶関数となるから、$[偶関数]_{-1}^{1} = 0$ となる。n が偶数の場合も同様にして、奇関数と偶関数の積となり、偶関数となり、$[偶関数]_{-1}^{1} = 0$ となる。これを基に次式が得られる。

$$\begin{aligned}
2^n\,n! \int_{-1}^{1} P_n(x)^2 dx =& \int_{-1}^{1} P_n(x) \left(\frac{d^n}{d\,x^n} \left(x^2-1\right)^n\right) dx \\
=& \left[P_n(x) \left(\frac{d^{n-1}}{d\,x^{n-1}} \left(x^2-1\right)^n\right)\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \left(\frac{d^{n-1}}{d\,x^{n-1}} \left(x^2-1\right)^n\right) \left(\frac{d}{d\,x} P_n(x)\right) dx \\
=& -\int_{-1}^{1} \left(\frac{d^{n-1}}{d\,x^{n-1}} \left(x^2-1\right)^n\right) \left(\frac{d}{d\,x} P_n(x)\right) dx \\
=& \int_{-1}^{1} \left(\frac{d^{n-2}}{d\,x^{n-2}} \left(x^2-1\right)^n\right) \left(\frac{d^2}{d\,x^2} P_n(x)\right) dx - \left[\left(\frac{d^{n-2}}{d\,x^{n-2}} \left(x^2-1\right)^n\right) \left(\frac{d}{d\,x} P_n(x)\right)\right]_{-1}^{1} \\
=& (-1)^n \int_{-1}^{1} \left(x^2-1\right)^n \left(\frac{d^n}{d\,x^n} P_n(x)\right) dx
\end{aligned}$$

上式から、

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)^2 dx = \frac{(-1)^n}{2^n\,n!} \int_{-1}^{1} \left(x^2-1\right)^n \left(\frac{d^n}{d\,x^n} P_n(x)\right) dx \tag{7.2.9}$$

```
assume(z>0);
PM1:(a+b)^n=sum(n!/(n-k)!/k!*a^(n-k)*b^k,
 k,0,n);
PM2:subst([a=z^2,b=-1],PM1);
DPM21:'diff(lhs(PM2),z,1)=diff(rhs(PM2),
 z,1);
DPM22:'diff(lhs(PM2),z,2)=diff(rhs(PM2),
 z,2);
DPM23:'diff(lhs(PM2),z,3)=diff(rhs(PM2),
 z,3);
DPM24:'diff(lhs(PM2),z,4)=diff(rhs(PM2),
 z,4);
PM24:'diff(lhs(PM2),z,m)=n!*sum(((-1)^k*
 (2*n-2*k)!/(2*(n-k)-(m))!*z^(2*(n-k)
 -m))/(k!*(n-k)!),k,0,n-m/2);
subst([n=6],PM2);
PM23:ev(%,sum);
lhs(%)-rhs(%);
factor(%);
```

```
diff(PM23,z,2);
diff(PM23,z,3);
subst([n=6,m=2],PM24);
ev(%,sum);
subst([n=6,m=3],PM24);
ev(%,sum);
subst([m=n,z=x],PM24);
PN3:subst([%],PN1);
subst([n/2=0],%);
PN31:ev(%,sum);
PN32:diff(lhs(PN31),x,n)=rhs(PN31)/x^n*n!;
```

二項定理[1]から、

$$(b+a)^n = n!\sum_{k=0}^{n}\frac{a^{n-k}\,b^k}{k!\,(n-k)!}$$

上式から、

$$\left(z^2-1\right)^n = n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k\,z^{2\,(n-k)}}{k!\,(n-k)!} \tag{7.2.10}$$

上式を一階微分、二階微分、三階微分、四階微分すると下記となり、

$$\frac{d}{d\,z}\left(z^2-1\right)^n = 2\,n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k\,(n-k)\,z^{2\,(n-k)-1}}{k!\,(n-k)!}$$

$$\frac{d^2}{d\,z^2}\left(z^2-1\right)^n = 2\,n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k\,(n-k)\,(2\,(n-k)-1)\,z^{2\,(n-k)-2}}{k!\,(n-k)!}$$

$$\frac{d^3}{d\,z^3}\left(z^2-1\right)^n = 2\,n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k\,(n-k)\,(2\,(n-k)-2)\,(2\,(n-k)-1)\,z^{2\,(n-k)-3}}{k!\,(n-k)!}$$

$$\frac{d^4}{d\,z^4}\left(z^2-1\right)^n = 2\,n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k\,(n-k)\,(2\,(n-k)-3)\,(2\,(n-k)-2)\,(2\,(n-k)-1)\,z^{2\,(n-k)-4}}{k!\,(n-k)!}$$

以上から m 階微分は、

$$\frac{d^m}{d\,z^m}\left(z^2-1\right)^n = n!\sum_{k=0}^{n-\frac{m}{2}}\frac{(-1)^k\,(2\,n-2\,k)!\,z^{2\,(n-k)-m}}{k!\,(n-k)!\,(2\,(n-k)-m)!} \tag{7.2.11}$$

上記の結果を確かめる。$n=6$ の場合、(7.2.10) 式は下記となり、

$$\left(z^2-1\right)^6 = 720\sum_{k=0}^{6}\frac{(-1)^k\,z^{2\,(6-k)}}{(6-k)!\,k!} = 720\left(\frac{z^{12}}{720}-\frac{z^{10}}{120}+\frac{z^8}{48}-\frac{z^6}{36}+\frac{z^4}{48}-\frac{z^2}{120}+\frac{1}{720}\right) \tag{7.2.12}$$

上式を二階微分すると、多項式を直接微分したことになり、

$$\frac{d^2}{d\,z^2}\left(z^2-1\right)^6 = 720\left(\frac{11\,z^{10}}{60}-\frac{3\,z^8}{4}+\frac{7\,z^6}{6}-\frac{5\,z^4}{6}+\frac{z^2}{4}-\frac{1}{60}\right)$$

(7.2.11) 式に $m=2,\,n=6$ とすると下記となり、当然であるが両者一致している。

$$\frac{d^2}{d\,z^2}\left(z^2-1\right)^6 = 720\sum_{k=0}^{5}\frac{(12-2\,k)!\,(-1)^k\,z^{2\,(6-k)-2}}{(2\,(6-k)-2)!\,(6-k)!\,k!} = 720\left(\frac{11\,z^{10}}{60}-\frac{3\,z^8}{4}+\frac{7\,z^6}{6}-\frac{5\,z^4}{6}+\frac{z^2}{4}-\frac{1}{60}\right)$$

[1]森口　繁一、宇田川　久、一松　信：岩波数学公式 2　級数・フーリエ解析、岩波書店　1998、P.10

(7.2.12) 式を三階微分すると、

$$\frac{d^3}{d\,z^3}\left(z^2-1\right)^6=720\left(\frac{11\,z^9}{6}-6\,z^7+7\,z^5-\frac{10\,z^3}{3}+\frac{z}{2}\right)$$

(7.2.11) 式に $m=3,\,n=6$ とすると下記となり、当然であるが両者一致している。

$$\frac{d^3}{d\,z^3}\left(z^2-1\right)^6=720\sum_{k=0}^{\frac{9}{2}}\frac{(12-2\,k)!\,(-1)^k\,z^{2\,(6-k)-3}}{(2\,(6-k)-3)!\,(6-k)!\,k!}=720\left(\frac{11\,z^9}{6}-6\,z^7+7\,z^5-\frac{10\,z^3}{3}+\frac{z}{2}\right)$$

(7.2.11) 式で $m=n$ として、n 階微分の結果は、

$$\frac{d^n}{d\,x^n}\left(x^2-1\right)^n=n!\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}}\frac{(-1)^k\,(2\,n-2\,k)!\,x^{2\,(n-k)-n}}{k!\,(n-k)!\,(2\,(n-k)-n)!}$$

上式を (7.2.2) 式に代入し、

$$P_n\left(x\right)=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}}\frac{(-1)^k\,(2\,n-2\,k)!\,x^{2\,(n-k)-n}}{k!\,(n-k)!\,(2\,(n-k)-n)!} \tag{7.2.13}$$

上式の最高次数である x^n の項は、上式で $k=0$ として、

$$P_n\left(x\right)=\frac{(2\,n)!\,x^n}{2^n\,n!^2}+\cdots$$

上式を n 階微分すると x^n の項のみが残り、

$$\frac{d^n}{d\,x^n}\,P_n\left(x\right)=\frac{(2\,n)!}{2^n\,n!} \tag{7.2.14}$$

```
IX1:'integrate((x^2-1)^n,x,-1,1)=2*(-1)^n
 *'integrate((1-x^2)^n,x,0,1);
IX2:'integrate((1-x^2)^n,x,0,1)=(2^n*n!)^2
 /(2*n+1)!;
subst([PN32],IPN2);
subst([IX1],%);
subst([IX2],%);
IPN3:subst([(2*n+1)!=(2*n+1)*(2*n)!],%);
IPX1:'integrate(P[n](x)*f(x),x,-1,1);
subst([n=m],FX1);
IPX1=subst([%],IPX1);
lhs(%)=sum(integrate(P[n](x)*A[m]*P[m](x),
 x,-1,1),m,0,inf);
subst([0=n,inf=n],%);
ev(%,sum);
subst([IPN3],%);
solve(%,A[n])[1];
```

下記の左辺の積分を右辺のように書き換える。

$$\int_{-1}^{1}\left(x^2-1\right)^n dx=2\,(-1)^n\int_{0}^{1}\left(1-x^2\right)^n dx \tag{7.2.15}$$

上式右辺について、代数関数の定積分 [1] から、次式が得られ、分子分母に $2^n\,n!$ を掛けて、$!!\rightarrow!$ とすると、

$$\begin{aligned}\int_{0}^{1}\left(1-x^2\right)^n dx&=\frac{(2\,n)!!}{(2\,n+1)!!}\\&=\frac{(2n)(2n-2)\cdots 6\cdot 4\cdot 2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 5\cdot 3\cdot 1}\\&=\frac{2^{2\,n}\,n!^2}{(2\,n+1)!}\end{aligned} \tag{7.2.16}$$

(7.2.9) 式に (7.2.14) 式、(7.2.15) 式、(7.2.16) 式を代入すると、

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}P_n\left(x\right)^2 dx&=\frac{(-1)^n\,(2\,n)!}{2^{2\,n}\,n!^2}\int_{-1}^{1}\left(x^2-1\right)^n dx\\&=\frac{(-1)^n}{2^n\,n!}\times\frac{(2\,n)!}{2^n\,n!}\times 2\,(-1)^n\times\frac{2^{2\,n}\,n!^2}{(2\,n+1)!}\\&=\frac{2\,(2\,n)!}{(2\,n+1)!}=\frac{2}{2\,n+1}\end{aligned} \tag{7.2.17}$$

下記の積分において $\mathrm{f}\left(x\right)$ を (7.2.3) 式の級数で置き換え、積分と級数和の順序を入れ替えると、(7.2.8) 式から $m=n$ の項のみが残り、(7.2.17) 式から、

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\mathrm{f}\left(x\right)\,P_n\left(x\right)dx&=\int_{-1}^{1}P_n\left(x\right)\,\sum_{m=0}^{\infty}A_m\,P_m\left(x\right)dx\\&=\sum_{m=0}^{\infty}A_m\int_{-1}^{1}P_m\left(x\right)\,P_n\left(x\right)dx\\&=A_n\int_{-1}^{1}P_n\left(x\right)^2 dx\\&=\frac{2\,A_n}{2\,n+1}\end{aligned}$$

上式から、A_n を求めると、次式となり、(7.2.4) 式が得られた。

$$A_n=\frac{(2\,n+1)}{2}\int_{-1}^{1}\mathrm{f}\left(x\right)\,P_n\left(x\right)dx$$

[1] 森口 繁一、宇田川 久、一松 信：岩波数学公式 1 微分積分・平面曲線、岩波書店 2003、P.220

7.2.2 Legendre の多項式による展開例

```
EX0:subst([AN1],FX1);
EXN:subst([-1=0,f(x)=1,inf=N,PN1],
 rhs(EX0));
subst([N=3],EXN);
ev(%,sum);
ev(%,diff);
PL1:ev(%,integrate);
subst([N=5],EXN);
ev(%,sum);
ev(%,diff);
PL2:ev(%,integrate);
subst([N=10],EXN);
ev(%,sum);
ev(%,diff);
PL3:ev(%,integrate);
subst([N=20],EXN);
ev(%,sum);
ev(%,diff);
PL4:ev(%,integrate);
subst([N=50],EXN);
ev(%,sum);
ev(%,diff);
PL5:ev(%,integrate);
plot2d([PL1,PL2,PL3,PL4,PL5],[x,-1,1],
 [y,-0.2,1.6],[legend,"N=3","N=5",
 "N=10","N=20","N=50"]);
```

次式のステップ関数を Legendre の多項式展開を行う。

$$\mathrm{f}(x) = 0 \quad -1 < x < 0, \qquad \mathrm{f}(x) = 1 \quad 0 < x < 1$$

上記の関係を (7.2.5) 式に代入すると、

$$\begin{aligned}
\mathrm{f}(x) =& \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(2\,n+1)\,P_n(x)\int_0^1 P_n(x)\,dx \\
\approx& \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{2^{2\,n}\,n!^2}(2\,n+1)\left(\frac{d^n}{d\,x^n}\left(x^2-1\right)^n\right) \\
&\times \int_0^1 \frac{d^n}{d\,x^n}\left(x^2-1\right)^n dx
\end{aligned}$$

上式で、N を種々変えた結果を下図に示す。

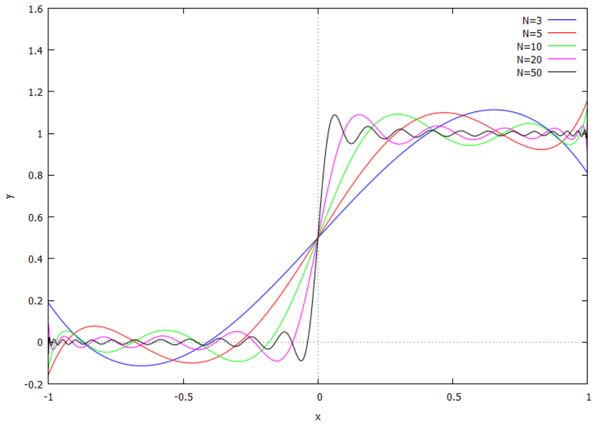


図 7.2.1: ステップ関数の Legendre の多項式展開

```
EX0:subst([AN1],FX1);
sum((2*n+1)*P[n](x)*integrate(-x*P[n](x),
 x,-1,0),n,0,inf)/2+sum((2*n+1)*P[n](x)*
 integrate(x*P[n](x),x,0,1),n,0,inf)/2;
EXN:subst([inf=N,PN1],%);
subst([N=3],EXN);
ev(%,sum);
ev(%,diff);
PL1:ev(%,integrate);
subst([N=5],EXN);
ev(%,sum);
ev(%,diff);
PL2:ev(%,integrate);
subst([N=10],EXN);
ev(%,sum);
ev(%,diff);
PL3:ev(%,integrate);
subst([N=20],EXN);
ev(%,sum);
ev(%,diff);
PL4:ev(%,integrate);
subst([N=50],EXN);
ev(%,sum);
ev(%,diff);
PL5:ev(%,integrate);
plot2d([PL1,PL2,PL3,PL4,PL5],[x,-1,1],
 [y,-0.2,1.8],[legend,"N=3","N=5",
 "N=10","N=20","N=50"]);
```

次式の V 字関数を Legendre の多項式展開を行う。

$$\mathrm{f}(x) = -x \quad -1 < x < 0, \qquad \mathrm{f}(x) = x \quad 0 < x < 1$$

上記の関係を (7.2.5) 式に代入すると、

$$\begin{aligned}
\mathrm{f}(x) =& \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\ P_n(x)\int_0^1 x\,P_n(x)\,dx \\
&-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\ P_n(x)\int_{-1}^0 x\,P_n(x)\,dx \\
\approx& \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N}\frac{(2n+1)}{2^{2n}\,n!^2}\left(\frac{d^n}{d\,x^n}\left(x^2-1\right)^n\right)\int_0^1 x\left(\frac{d^n}{d\,x^n}\left(x^2-1\right)^n\right)dx \\
&-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N}\frac{(2n+1)}{2^{2n}\,n!^2}\left(\frac{d^n}{d\,x^n}\left(x^2-1\right)^n\right)\int_{-1}^0 x\left(\frac{d^n}{d\,x^n}\left(x^2-1\right)^n\right)dx
\end{aligned}$$

上式で、N を種々変えた結果を下図に示す。

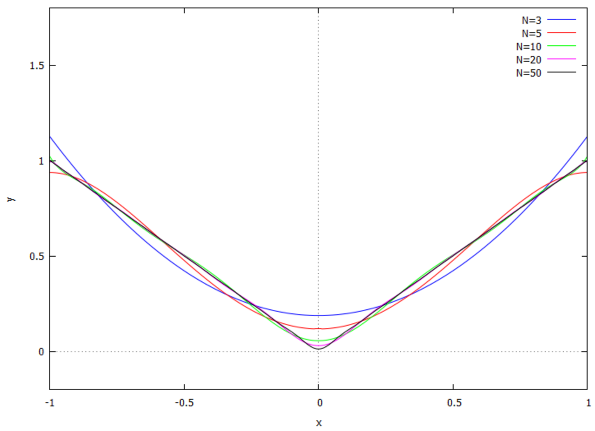


図 7.2.2: V 字関数の Legendre の多項式展開

7.2.3 Legendre の陪関数 (球関数) による展開

(3.4.53) 式、70 頁の Legendre の陪微分方程式について、次式で表現できる。

$$\left(1-x^2\right)\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,z\right)-2\,x\left(\frac{d}{d\,x}\,z\right)+\left(n\,(n+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right)z=0 \tag{7.2.18}$$

また、上式は次のようにも表現できる。

$$\frac{d}{d\,x}\left(\left(1-x^2\right)\left(\frac{d}{d\,x}\,z\right)\right)+\left(n\,(n+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right)z=0 \tag{7.2.19}$$

```
kill(all);
depends(y,[x]);
depends(z,[x]);
declare(n,integer);
declare(m,integer);
assume(n>0);
assume(m>0);
EZ0:'diff((1-x^2)*'diff(z,x,1),x,1)+(n*
 (n+1)-m^2/(1-x^2))*z=0;
EZ1:ev(%,diff);
PM0:z=P[m,n](x);
PM1:P[m,n](x)=(1-x^2)^(m/2)*diff(P[n](x),
 x,m);
PM11:solve(%,diff(P[n](x),x,m))[1];
PM12:subst([n=n+1],PM11);
PM13:subst([n=n-1],PM11);
PN1:PN1:P[n](x)=1/n!/2^n*diff((x^2-1)^n,
 x,n);
subst([PM0],EZ0);
EQ1:%-last(lhs(%));
EQ2:subst([n=k],EQ1);
EQ11:EQ1*P[m,k](x);
EQ21:EQ2*P[m,n](x);
EQ11-EQ21;
```

```
factor(%);
EQ3:integrate(first(lhs(%)),x,-1,1)+
 integrate(last(lhs(%)),x,-1,1)
 =integrate(rhs(%),x,-1,1);
EQ31:first(lhs(EQ3))=P[m,k](x)*(((-(x^2-1)
 *('diff(P[m,n](x),x,1)))))-integrate(
 diff(P[m,k](x),x,1)*(((-(x^2-1)*
 ('diff(P[m,n](x),x,1))))),x,-1,1);
EQ32:last(lhs(EQ3))=-P[m,n](x)*(((-(x^2-1)
 *('diff(P[m,k](x),x,1)))))+integrate(
 diff(P[m,n](x),x,1)*(((-(x^2-1)*
 ('diff(P[m,k](x),x,1))))),x,-1,1);
subst([EQ31,EQ32],EQ3);
PMNK1:integrate(P[m,k](x)*P[m,n](x),x,
 -1,1)=0;
```

(7.2.18) 式の解は、(3.4.61) 式、71 頁から、下記である。

$$\begin{aligned}
&z=P_{m,n}(x)\\
&\qquad \text{ここで、}\quad P_{m,n}(x)=\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}}\left(\frac{d^m}{d\,x^m}\,P_n(x)\right)\\
&\qquad\qquad P_n(x)=\frac{\frac{d^n}{d\,x^n}\left(x^2-1\right)^n}{2^n\,n!}
\end{aligned} \tag{7.2.20}$$

解：(7.2.20) 式を (7.2.19) 式に代入し、変形して次式を得る。また、$n\to k$ に置き換えて、

$$\frac{d}{d\,x}\left(\left(1-x^2\right)\left(\frac{d}{d\,x}\,P_{m,n}(x)\right)\right)=-\left(n\,(n+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right)P_{m,n}(x)$$

$$\frac{d}{d\,x}\left(\left(1-x^2\right)\left(\frac{d}{d\,x}\,P_{m,k}(x)\right)\right)=-\left(k\,(k+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right)P_{m,k}(x)$$

上式に、それぞれ $P_{m,k}(x)\,,P_{m,n}(x)$ を掛けて、その差をとると

$$\begin{aligned}
&P_{m,k}(x)\left(\frac{d}{d\,x}\left(-\left(x^2-1\right)\left(\frac{d}{d\,x}\,P_{m,n}(x)\right)\right)\right)-P_{m,n}(x)\left(\frac{d}{d\,x}\left(-\left(x^2-1\right)\left(\frac{d}{d\,x}\,P_{m,k}(x)\right)\right)\right)\\
&\qquad=-(n-k)\,(n+k+1)\,P_{m,k}(x)\,P_{m,n}(x)
\end{aligned}$$

上式を積分すると、

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1}P_{m,k}(x)\left(\frac{d}{d\,x}\left(-\left(x^2-1\right)\left(\frac{d}{d\,x}\,P_{m,n}(x)\right)\right)\right)dx-\int_{-1}^{1}P_{m,n}(x)\left(\frac{d}{d\,x}\left(-\left(x^2-1\right)\left(\frac{d}{d\,x}\,P_{m,k}(x)\right)\right)\right)dx\\
&\qquad=-(n-k)\,(n+k+1)\int_{-1}^{1}P_{m,k}(x)\,P_{m,n}(x)\,dx
\end{aligned} \tag{7.2.21}$$

上式の左辺第一項を部分積分すると、

$$\int_{-1}^{1} P_{m,k}(x) \left(\frac{d}{d\,x}\left(-\left(x^2-1\right)\left(\frac{d}{d\,x}P_{m,n}(x)\right)\right)\right)dx$$
$$=\left[\left(1-x^2\right)\,P_{m,k}(x)\left(\frac{d}{d\,x}P_{m,n}(x)\right)\right]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)\left(\frac{d}{d\,x}P_{m,k}(x)\right)\left(\frac{d}{d\,x}P_{m,n}(x)\right)dx$$

同様に、上式の左辺第二項を部分積分すると、

$$-\int_{-1}^{1} P_{m,n}(x) \left(\frac{d}{d\,x}\left(-\left(x^2-1\right)\left(\frac{d}{d\,x}P_{m,k}(x)\right)\right)\right)dx$$
$$=\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)\left(\frac{d}{d\,x}P_{m,k}(x)\right)\left(\frac{d}{d\,x}P_{m,n}(x)\right)dx-\left[\left(1-x^2\right)\,P_{m,n}(x)\left(\frac{d}{d\,x}P_{m,k}(x)\right)\right]_{-1}^{1}$$

上記二式を (7.2.21) 式に代入し、

$$\left[\left(1-x^2\right)\,P_{m,k}(x)\left(\frac{d}{d\,x}P_{m,n}(x)\right)-\left(1-x^2\right)\,P_{m,n}(x)\left(\frac{d}{d\,x}P_{m,k}(x)\right)\right]_{-1}^{1}$$
$$=-\left(n-k\right)\,\left(n+k+1\right)\int_{-1}^{1}P_{m,k}(x)\,P_{m,n}(x)\,dx$$

上式の左辺は零で、$n \neq k$ とすると、

$$\int_{-1}^{1}P_{m,k}(x)\,P_{m,n}(x)\,dx=0 \tag{7.2.22}$$

```
PNK1:P[n](x)=sum(((-1)^k*(2*n-2*k)!*x^(2*
   (n-k)-n))/(k!*(n-k)!*(2*(n-k)-n)!)
   ,k,0,n/2)/2^n;
PNK0:P[n](x)=(((-1)^k*(2*n-2*k)!*x^(2*(n-k)
  -n))/(k!*(n-k)!*(2*(n-k)-n)!))/2^n;
REC1:(n+1)*P[n+1](x)+n*P[n-1](x)=(2*n+1)*
   x*P[n](x);
REC10:subst([n=5],REC1);
subst([n=5],PNK1);
REC15:ev(%,sum);
subst([n=4],PNK1);
REC14:ev(%,sum);
subst([n=6],PNK1);
REC16:ev(%,sum);
subst([REC14,REC15,REC16],REC10);
factor(%);
REC17:expand(subst([n=n+1],PNK0));
REC12:expand(x*PNK0);
REC13:expand(subst([n=n-1,k=k-1],PNK0));
REC1-rhs(REC1);
subst([REC17,PNK0,REC13],%);
%/(x^(n-2*k+1))/(-1)^k;
expand(subst([k!=k*(k-1)!],%)*(k-1)!);
subst([(2*n-2*k+2)!=(2*n-2*k)!*(2*n-2*k+2)
  *(2*n-2*k+1)],%);
```

```
subst([(n-2*k+1)!=(n-2*k)!*(n-2*k+1)],%);
subst([(n-k+1)!=(n-k)!*(n-k+1)],%);
%*(n-2*k)!*(n-k)!/(2*n-2*k)!;
factor(%);
```

Legendre の多項式は (7.2.13) 式から下記の級数表記ができる。

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}}\frac{(-1)^k\,\left(2\,n-2\,k\right)!\,x^{2\,(n-k)-n}}{k!\,\left(n-k\right)!\,\left(2\,\left(n-k\right)-n\right)!} \tag{7.2.23}$$

上式を活用して下記の Legendre 関数の漸化式を求める。

$$\left(n+1\right)\,P_{n+1}(x)+n\,P_{n-1}(x)=\left(2\,n+1\right)\,x\,P_n(x) \tag{7.2.24}$$

$n=5$ の場合には、

$$6\,P_6(x)+5\,P_4(x)=11\,x\,P_5(x)$$

上式に (7.2.23) 式から求めた次式の多項式を代入し、

$$\begin{aligned}P_5(x)&=\frac{252\,x^5-280\,x^3+60\,x}{32}\\P_4(x)&=\frac{70\,x^4-60\,x^2+6}{16}\\P_6(x)&=\frac{924\,x^6-1260\,x^4+420\,x^2-20}{64}\end{aligned} \tag{7.2.25}$$

下記の結果から、漸化式を満足している。

$$\frac{11\,x^2\,\left(63\,x^4-70\,x^2+15\right)}{8}=\frac{11\,x^2\,\left(63\,x^4-70\,x^2+15\right)}{8}$$

次に多項式の x の同じ乗数について調べる。(7.2.23) 式で級数和を外し、x^{n-2k} の項は、

$$P_n\left(x\right)\to\frac{\left(-1\right)^k\,\left(2\,n-2\,k\right)!\,x^{2\,(n-k)-n}}{k!\,2^n\,\left(n-k\right)!\,\left(2\,\left(n-k\right)-n\right)!}$$

上式から下記を求める。$P_{n-1}\left(x\right)$ については乗数を合わせるため、$k\to k-1$ とする。

$$\begin{aligned}P_{n+1}\left(x\right)&\to\frac{\left(-1\right)^k\,2^{-n-1}\,\left(2\,n-2\,k+2\right)!\,x^{n-2\,k+1}}{k!\,\left(n-2\,k+1\right)!\,\left(n-k+1\right)!}\\x\,P_n\left(x\right)&\to\frac{\left(-1\right)^k\,\left(2\,n-2\,k\right)!\,x^{n-2\,k+1}}{k!\,2^n\,\left(n-2\,k\right)!\,\left(n-k\right)!}\\P_{n-1}\left(x\right)&\to\frac{\left(-1\right)^{k-1}\,2^{1-n}\,\left(2\,n-2\,k\right)!\,x^{n-2\,k+1}}{\left(k-1\right)!\,\left(n-2\,k+1\right)!\,\left(n-k\right)!}\end{aligned}\tag{7.2.26}$$

(7.2.24) 式を変形し、

$$\left(n+1\right)\,P_{n+1}\left(x\right)-\left(2\,n+1\right)\,x\,P_n\left(x\right)+n\,P_{n-1}\left(x\right)=0$$

(7.2.26) 式を代入すると、下記となり、

$$\begin{aligned}&-\frac{\left(-1\right)^k\,\left(2\,n+1\right)\,\left(2\,n-2\,k\right)!\,x^{2\,(n-k)-n+1}}{k!\,2^n\,\left(n-k\right)!\,\left(2\,\left(n-k\right)-n\right)!}\\&+\frac{\left(-1\right)^k\,\left(n+1\right)\,2^{-n-1}\,\left(2\,n-2\,k+2\right)!\,x^{n-2\,k+1}}{k!\,\left(n-2\,k+1\right)!\,\left(n-k+1\right)!}\\&+\frac{\left(-1\right)^{k-1}\,n\,2^{1-n}\,\left(2\,n-2\,k\right)!\,x^{n-2\,k+1}}{\left(k-1\right)!\,\left(n-2\,k+1\right)!\,\left(n-k\right)!}=0\end{aligned}$$

上式を $\left(-1\right)^k$、$x^{2\,(n-k)-n+1}$ で割り、下記の関係を代入し、整理すると満足していることが分かる。

$$\begin{aligned}k!\,&\to k(k-1)!\\(2*n-2*k+2)!\,&\to(2n-2k)!(2n-2k+2)\\&\quad\times(2n-2k+1)\\(n-2k+1)!\,&\to(n-2k)!(n-2k+1)\\(n-k+1)!\,&\to(n-k)!(n-k+1)\end{aligned}\tag{7.2.27}$$

```
REC2:x*diff(P[n](x),x,1)-diff(P[n-1](x),
 x,1)=n*P[n](x);
REC3:diff(P[n+1](x),x,1)-x*diff(P[n](x),
 x,1)=(n+1)*P[n](x);
REC4:factor(REC2+REC3);
REC11:solve(REC1,P[n](x))[1];
REC41:solve(REC4,P[n](x))[1];
REC40:subst([n=5],REC4);
subst([REC14,REC15,REC16],REC40);
ev(%,diff);
factor(%);
REC42:REC4-rhs(REC4);
subst([REC17,PNK0,REC13],%);
ev(%,diff);
%/(x^(n-2*k))/(-1)^k;
expand(subst([k!=k*(k-1)!],%)*(k-1)!);
subst([(2*n-2*k+2)!=(2*n-2*k)!*(2*n-2*k+2)
 *(2*n-2*k+1)],%);
subst([(n-2*k+1)!=(n-2*k)!*(n-2*k+1)],%);
subst([(n-k+1)!=(n-k)!*(n-k+1)],%);
%*(n-2*k)!*(n-k)!/(2*n-2*k)!;
factor(%);
```

(7.2.26) 式を活用して下記の Legendre 関数の漸化式を求める。

$$\frac{d}{d\,x}\,P_{n+1}\left(x\right)-\frac{d}{d\,x}\,P_{n-1}\left(x\right)=\left(2\,n+1\right)\,P_n\left(x\right)\tag{7.2.28}$$

$n=5$ の場合には、

$$\frac{d}{d\,x}\,P_6\left(x\right)-\frac{d}{d\,x}\,P_4\left(x\right)=11\,P_5\left(x\right)$$

上式に (7.2.25) 式の多項式を代入し、

$$\begin{aligned}&\frac{d}{d\,x}\,\frac{924\,x^6-1260\,x^4+420\,x^2-20}{64}\\&\quad-\frac{d}{d\,x}\,\frac{70\,x^4-60\,x^2+6}{16}\\&\quad=\frac{11\,\left(252\,x^5-280\,x^3+60\,x\right)}{32}\end{aligned}$$

微分を実行し、整理すると下記となり、漸化式を満足している。

$$\frac{11\,x\,\left(63\,x^4-70\,x^2+15\right)}{8}=\frac{11\,x\,\left(63\,x^4-70\,x^2+15\right)}{8}$$

(7.2.28) 式を変形し、

$$\frac{d}{d\,x}\,P_{n+1}\left(x\right)-\frac{d}{d\,x}\,P_{n-1}\left(x\right)-\left(2\,n+1\right)\,P_n\left(x\right)=0$$

上式に (7.2.26) 式を代入すると、

$$\frac{d}{d\,x}\,\frac{(-1)^k\,2^{-n-1}\,(2\,n-2\,k+2)!\,x^{n-2\,k+1}}{k!\,(n-2\,k+1)!\,(n-k+1)!}-\frac{d}{d\,x}\,\frac{(-1)^{k-1}\,2^{1-n}\,(2\,n-2\,k)!\,x^{n-2\,k+1}}{(k-1)!\,(n-2\,k+1)!\,(n-k)!}-\frac{(-1)^k\,(2\,n+1)\,(2\,n-2\,k)!\,x^{2\,(n-k)-n}}{k!\,2^n\,(n-k)!\,(2\,(n-k)-n)!}=0$$

上式の微分を実行すると、

$$-\frac{(-1)^k\,(2\,n+1)\,(2\,n-2\,k)!\,x^{2\,(n-k)-n}}{k!\,2^n\,(n-k)!\,(2\,(n-k)-n)!}+\frac{(-1)^k\,(n-2\,k+1)\,2^{-n-1}\,(2\,n-2\,k+2)!\,x^{n-2\,k}}{k!\,(n-2\,k+1)!\,(n-k+1)!}-\frac{(-1)^{k-1}\,(n-2\,k+1)\,2^{1-n}\,(2\,n-2\,k)!\,x^{n-2\,k}}{(k-1)!\,(n-2\,k+1)!\,(n-k)!}=0$$

上式を $(-1)^k$、$x^{n-2\,k}$ で割り、(7.2.27) 式の関係を代入し、整理すると満足していることが分かる。

```
REC5:(2*n+1)*x*P[m,n](x);
'diff((x*P[n](x)),x,m);
subst([m=5],%);
ev(%,diff);
REC51:'diff((x*P[n](x)),x,m)=x*'diff((
 P[n](x)),x,m)+m*'diff((P[n](x)),x,m-1);
REC52:solve(%,'diff((P[n](x)),x,m))[1];
REC5=subst([PM1],REC5);
REC53:subst([REC52],%);
'diff((x*P[n](x)),x,m)=subst([REC11],
 'diff((x*P[n](x)),x,m));
lhs(%)=subst([m=5],rhs(%));
ev(%,diff);
```

```
REC54:subst([5=m],%);
'diff(P[n](x),x,m-1)=subst([REC41],
 'diff(P[n](x),x,m-1));
REC55:lhs(%)=('diff(P[n+1](x),x,m)
 -'diff(P[n-1](x),x,m))/(2*n+1);
subst([REC54,REC55],REC53);
factor(%);
subst([PM12,PM13],%);
PM56:factor(%);
subst([n=n+1],PM56);
solve(%,P[m,n](x))[1];
PM6:%*(n+m+1);
```

次に、下記の Legendre 陪関数の漸化式を求める。

$$(2\,n+1)\,x\,P_{m,n}\,(x)=(n-m+1)\,P_{m,n+1}\,(x)+(n+m)\,P_{m,n-1}\,(x) \tag{7.2.29}$$

$\frac{d^m}{d\,x^m}\,(x\,P_n\,(x))$ について、

$$\frac{d^5}{d\,x^5}\,(x\,P_n\,(x))=x\,\left(\frac{d^5}{d\,x^5}\,P_n\,(x)\right)+5\,\left(\frac{d^4}{d\,x^4}\,P_n\,(x)\right)$$

となり、次式の関係が得られる。

$$\frac{d^m}{d\,x^m}\,(x\,P_n\,(x))=x\,\left(\frac{d^m}{d\,x^m}\,P_n\,(x)\right)+m\,\left(\frac{d^{m-1}}{d\,x^{m-1}}\,P_n\,(x)\right)$$

上式から、

$$\frac{d^m}{d\,x^m}\,P_n\,(x)=\frac{\frac{d^m}{d\,x^m}\,(x\,P_n\,(x))-m\,\left(\frac{d^{m-1}}{d\,x^{m-1}}\,P_n\,(x)\right)}{x} \tag{7.2.30}$$

$(2\,n+1)\,x\,P_{m,n}\,(x)$ について、(7.2.20) 式、(7.2.30) 式を代入し、

$$\begin{aligned}(2\,n+1)\,x\,P_{m,n}\,(x)&=(2\,n+1)\,x\,\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}}\,\left(\frac{d^m}{d\,x^m}\,P_n\,(x)\right)\\&=(2\,n+1)\,\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}}\,\left(\frac{d^m}{d\,x^m}\,(x\,P_n\,(x))-m\,\left(\frac{d^{m-1}}{d\,x^{m-1}}\,P_n\,(x)\right)\right)\end{aligned} \tag{7.2.31}$$

(7.2.24) 式を m 階微分して、

$$\begin{aligned}\frac{d^m}{d\,x^m}\,(x\,P_n\,(x))&=\frac{d^m}{d\,x^m}\,\frac{(n+1)\,P_{n+1}\,(x)+n\,P_{n-1}\,(x)}{2\,n+1}\\&=\frac{(n+1)\,\left(\frac{d^m}{d\,x^m}\,P_{n+1}\,(x)\right)+n\,\left(\frac{d^m}{d\,x^m}\,P_{n-1}\,(x)\right)}{2\,n+1}\end{aligned} \tag{7.2.32}$$

(7.2.28) 式を $m-1$ 階微分して、

$$\begin{aligned}\frac{d^{m-1}}{d\,x^{m-1}}\,P_n\,(x)&=\frac{d^{m-1}}{d\,x^{m-1}}\,\frac{\frac{d}{d\,x}\,P_{n+1}\,(x)-\frac{d}{d\,x}\,P_{n-1}\,(x)}{2\,n+1}\\&=\frac{\frac{d^m}{d\,x^m}\,P_{n+1}\,(x)-\frac{d^m}{d\,x^m}\,P_{n-1}\,(x)}{2\,n+1}\end{aligned} \tag{7.2.33}$$

(7.2.32) 式、(7.2.33) 式を (7.2.31) 式に代入し、整理すると、下記となり、(7.2.29) 式が得られる。

$$\begin{aligned}(2\,n+1)\;x\,P_{m,n}\left(x\right)=&(2\,n+1)\;\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}}\left(\frac{(n+1)\;\left(\frac{d^m}{d\,x^m}\,P_{n+1}\left(x\right)\right)+n\;\left(\frac{d^m}{d\,x^m}\,P_{n-1}\left(x\right)\right)}{2\,n+1}\right.\\&\left.-\frac{m\;\left(\frac{d^m}{d\,x^m}\,P_{n+1}\left(x\right)-\frac{d^m}{d\,x^m}\,P_{n-1}\left(x\right)\right)}{2\,n+1}\right)\\=&\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}}\left(n\;\left(\frac{d^m}{d\,x^m}\,P_{n+1}\left(x\right)\right)-m\;\left(\frac{d^m}{d\,x^m}\,P_{n+1}\left(x\right)\right)+\frac{d^m}{d\,x^m}\,P_{n+1}\left(x\right)\right.\\&\left.+n\;\left(\frac{d^m}{d\,x^m}\,P_{n-1}\left(x\right)\right)+m\;\left(\frac{d^m}{d\,x^m}\,P_{n-1}\left(x\right)\right)\right)\\=&\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}}\left(\frac{n\,P_{m,n+1}\left(x\right)}{\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}}}-\frac{m\,P_{m,n+1}\left(x\right)}{\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}}}+\frac{P_{m,n+1}\left(x\right)}{\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}}}\right.\\&\left.+\frac{n\,P_{m,n-1}\left(x\right)}{\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}}}+\frac{m\,P_{m,n-1}\left(x\right)}{\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}}}\right)\\=&(n-m+1)\;P_{m,n+1}\left(x\right)+(n+m)\;P_{m,n-1}\left(x\right)\end{aligned}$$

上式で、$n\to n+1$ として、

$$(n+m+1)\;P_{m,n}\left(x\right)=-(n-m+2)\;P_{m,n+2}\left(x\right)-(-2\,n-3)\;x\,P_{m,n+1}\left(x\right)\tag{7.2.34}$$

```
integrate(lhs(PM6)*P[m,n](x),x,-1,1)=
 integrate(first(rhs(PM6))*P[m,n](x),x,-1,
 1)+integrate(last(rhs(PM6))*P[m,n](x),x,
 -1,1);
PM61:lhs(%)=last(rhs(%));
solve(PM56,P[m,n](x))[1];
lhs(PM61)=subst([%],rhs(PM61));
subst([P[m,n-1](x)=0],%);
rhs(%)=lhs(%);
PM62:factor(%*(2*n+1)/(n-m+1));
PM63:factor(subst([n=n-1],PM62));
factor(subst([n=n-1],PM63));
solve(%,'integrate(P[m,n-1](x)^2,x,-1,1))
 [1];
PM64:factor(lhs(PM63)=subst([%],
 rhs(PM63)));
factor(subst([n=n-2],PM63));
solve(%,'integrate(P[m,n-2](x)^2,x,-1,1))
 [1];
PM65:factor(subst([%],PM64));
PM66:factor(subst([n=m+3],PM63));
factor(subst([n=m+2],PM63));
```

```
solve(%,'integrate(P[m,m+2](x)^2,x,-1,1))
 [1];
PM67:factor(subst([%],PM66));
factor(subst([n=m+1],PM63));
solve(%,'integrate(P[m,m+1](x)^2,x,-1,1))
 [1];
PM68:factor(subst([%],PM67));
lhs(PM63)=(n+m)*(n+m-1)*(n+m-2)*(2*m+1)/
 (n-m)!*(2*m+1)*integrate(P[m,m](x)^2,x,
 -1,1);
PM69:lhs(%)=(n+m)!/(n-m)!/(2*m)!*(2*m+1)
 *integrate(P[m,m](x)^2,x,-1,1);
subst([n=m],PM1);
PM7:subst([%],PM69);
diff(P[m](x),x,m)=(2*m)!/2^m/m!;
PM71:subst([%],PM7);
integrate((1-x^2)^m,x,-1,1)=2*(2^m*m!)^2/
 (2*m+1)!;
subst([%],PM71);
subst([(2*m+1)!=(2*m+1)*(2*m)!],%);
PM72:%/(2*n+1);
```

(7.2.34) 式に $P_{m,n}\left(x\right)$ を掛けて積分し、(7.2.22) 式から、右辺第二項が残り、

$$\begin{aligned}(n+m+1)\;\int_{-1}^{1}P_{m,n}\left(x\right)^2dx=&(-n+m-2)\;\int_{-1}^{1}P_{m,n}\left(x\right)\;P_{m,n+2}\left(x\right)dx\\&+(2\,n+3)\;\int_{-1}^{1}x\,P_{m,n}\left(x\right)\;P_{m,n+1}\left(x\right)dx\\=&(2\,n+3)\;\int_{-1}^{1}x\,P_{m,n}\left(x\right)\;P_{m,n+1}\left(x\right)dx\end{aligned}\tag{7.2.35}$$

(7.2.29) 式を変形し、

$$P_{m,n}(x)=\frac{(n-m+1)\ P_{m,n+1}(x)+(n+m)\ P_{m,n-1}(x)}{(2\,n+1)\ x}$$

上式を (7.2.35) 式の右辺に代入し、(7.2.22) 式から、$P_{m,n+1}(x)^2$ の項のみが残り、

$$\begin{aligned}(n+m+1)\int_{-1}^{1}P_{m,n}(x)^2dx=&\frac{(2\,n+3)\ \int_{-1}^{1}P_{m,n+1}(x)\ ((n-m+1)\ P_{m,n+1}(x)+(n+m)\ P_{m,n-1}(x))\,dx}{2\,n+1}\\=&\frac{(n-m+1)\ (2\,n+3)}{2\,n+1}\int_{-1}^{1}P_{m,n+1}(x)^2dx\end{aligned}$$

上式から、

$$(2\,n+3)\int_{-1}^{1}P_{m,n+1}(x)^2dx=\frac{(n+m+1)\ (2\,n+1)}{n-m+1}\int_{-1}^{1}P_{m,n}(x)^2dx$$

$n\to n-1$ として、次式の漸化式が得られた。

$$(2\,n+1)\int_{-1}^{1}P_{m,n}(x)^2dx=\frac{(n+m)\ (2\,n-1)}{n-m}\int_{-1}^{1}P_{m,n-1}(x)^2dx \tag{7.2.36}$$

(7.2.36) 式で、$n\to n-1$、$n\to n-2$ として、次式の二つの漸化式が得られる。

$$(2\,n-1)\int_{-1}^{1}P_{m,n-1}(x)^2dx=\frac{(n+m-1)\ (2\,n-3)}{n-m-1}\int_{-1}^{1}P_{m,n-2}(x)^2dx$$

$$(2\,n-3)\int_{-1}^{1}P_{m,n-2}(x)^2dx=\frac{(n+m-2)\ (2\,n-5)}{n-m-2}\int_{-1}^{1}P_{m,n-3}(x)^2dx$$

上記二式を (7.2.36) 式に順次代入し、

$$(2\,n+1)\int_{-1}^{1}P_{m,n}(x)^2dx=\frac{(n+m-2)\ (n+m-1)\ (n+m)\ (2\,n-5)}{(n-m-2)\ (n-m-1)\ (n-m)}\int_{-1}^{1}P_{m,n-3}(x)^2dx \tag{7.2.37}$$

(7.2.36) 式で、$n\to m+3$、$n\to m+2$、$n\to m+1$ として、次式の三つの漸化式が得られる。

$$(2\,m+7)\int_{-1}^{1}P_{m,m+3}(x)^2dx=\frac{(2\,m+3)\ (2\,m+5)}{3}\int_{-1}^{1}P_{m,m+2}(x)^2dx$$

$$(2\,m+5)\int_{-1}^{1}P_{m,m+2}(x)^2dx=\frac{(2\,m+2)\ (2\,m+3)}{2}\int_{-1}^{1}P_{m,m+1}(x)^2dx$$

$$(2\,m+3)\int_{-1}^{1}P_{m,m+1}(x)^2dx=\frac{(2\,m+1)^2}{1}\int_{-1}^{1}P_{m,m}(x)^2dx$$

上記、三式をまとめると、

$$(2\,m+7)\int_{-1}^{1}P_{m,m+3}(x)^2dx=\frac{(2\,m+1)^2\ (2\,m+2)\ (2\,m+3)}{3\cdot2\cdot1}\int_{-1}^{1}P_{m,m}(x)^2dx \tag{7.2.38}$$

(7.2.37) 式と (7.2.38) 式から次式が得られる。

$$(2\,n+1)\int_{-1}^{1}P_{m,n}(x)^2dx=\frac{(2\,m+1)\,(2\,m+1)\cdots\ (n+m-2)\ (n+m-1)\ (n+m)}{(n-m)!}\int_{-1}^{1}P_{m,m}(x)^2dx$$

上式右辺の分子、分母に $(2\,m)!$ を掛けると下記のように整理できる。

$$(2\,n+1)\int_{-1}^{1}P_{m,n}(x)^2dx=\frac{(2\,m+1)\ (n+m)!}{(2\,m)!\ (n-m)!}\int_{-1}^{1}P_{m,m}(x)^2dx \tag{7.2.39}$$

(7.2.20) 式から

$$P_{m,m}(x)=\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}}\left(\frac{d^m}{d\,x^m}P_m(x)\right) \tag{7.2.40}$$

(7.2.14) 式から

$$\frac{d^m}{d\,x^m}\,P_m\left(x\right)=\frac{\left(2\,m\right)!}{2^m\,m!} \tag{7.2.41}$$

(7.2.16) 式から

$$\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^m dx=2\int_{0}^{1}\left(1-x^2\right)^m dx=\frac{2^{2\,m+1}\,m!^2}{\left(2\,m+1\right)!} \tag{7.2.42}$$

(7.2.39) 式に (7.2.40) 式、(7.2.41) 式、(7.2.42) 式を順次代入し、整理すると、

$$\begin{aligned}\left(2\,n+1\right)\int_{-1}^{1}P_{m,n}\left(x\right)^2 dx&=\frac{\left(2\,m+1\right)\,\left(n+m\right)!\,\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^m\left(\frac{d^m}{d\,x^m}\,P_m\left(x\right)\right)^2 dx}{\left(2\,m\right)!\,\left(n-m\right)!}\\&=\frac{\left(2\,m+1\right)\,\left(2\,m\right)!\,\left(n+m\right)!\,\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^m dx}{2^{2\,m}\,m!^2\,\left(n-m\right)!}\\&=\frac{2\,\left(2\,m+1\right)\,\left(2\,m\right)!\,\left(n+m\right)!}{\left(2\,m+1\right)!\,\left(n-m\right)!}\\&=\frac{2\,\left(n+m\right)!}{\left(n-m\right)!}\end{aligned}$$

上式から、

$$\int_{-1}^{1}P_{m,n}\left(x\right)^2 dx=\frac{2\,\left(n+m\right)!}{\left(2\,n+1\right)\,\left(n-m\right)!} \tag{7.2.43}$$

```
u=sum((%k1*r^n+%k2*r^(-n-1))*((sum(B[m,n]*sin(m*phi)*P[m,n](cos(theta))+A[m,n]
 *cos(m*phi)*P[m,n](cos(theta)),m,1,n))+A[0,n]*P[n](cos(theta))),n,1,inf);
W1:subst([%k1=0,%k2=1,r=r/R],%);
declere(k,integer);
declere(j,integer);
assume(m>k);
assume(n>j);
IF1:f(R,\theta,\phi)=subst([m=k,r=R],rhs(W1));
DIF1:B[k,j]*sin(k*phi)*P[k,j](cos(theta));
DIF2:A[k,j]*cos(k*phi)*P[k,j](cos(theta));
DIF3:A[0,j]*P[j](cos(theta));
IF2:'integrate(lhs(IF1)*cos(m*\phi),\phi,-%pi,%pi)=sum(sum(('integrate(DIF1
 *cos(m*\phi),\phi,-%pi,%pi)+'integrate(DIF2*cos(m*\phi),\phi,-%pi,%pi)
 +'integrate(DIF3*cos(m*\phi),\phi,-%pi,%pi)),k,1,n),j,1,inf);
lhs(%)=sum(A[m,j]*%pi*P[m,j](cos(theta)),j,1,inf);
subst([cos(\theta)=s,\theta=s],%);
'integrate('integrate(cos(m*phi)*f(R,s,phi)*P[m,n](s),phi,-%pi,%pi),s,-1,1)=%pi
 *sum('integrate(A[m,j]*P[m,j](s)*P[m,n](s),s,-1,1),j,1,inf);
lhs(%)=%pi*A[m,n]*(2*(n+m)!)/((2*n+1)*(n-m)!);
'integrate('integrate(P[m,n](cos(\theta))*cos(m*phi)*f(R,\theta,phi)*sin(\theta),
 phi,-%pi,%pi),\theta,0,%pi)=rhs(%);
solve(%,A[m,n])[1];
subst([A[m,n]=B[m,n],cos(m*\phi)=sin(m*\phi)],%);
subst([m=0],IF2);
integrate(f(R,theta,phi),phi,-%pi,%pi)=sum(2*%pi*A[0,j]*P[j](cos(theta)),j,1,inf);
subst([cos(\theta)=s,\theta=s],%);
integrate(integrate(f(R,s,phi)*P[n](s),phi,-%pi,%pi),s,-1,1)=2*%pi*sum(A[0,j]
 *integrate(P[n](s)*P[j](s),s,-1,1),j,1,inf);
lhs(%)=2*%pi*A[0,n]*2/(2*n+1);
```

```
integrate(P[n](cos(\theta))*sin(\theta)*integrate(f(R,\theta,phi),phi,-%pi,%pi),
 \theta,0,%pi)=rhs(%);
solve(%,A[0,n])[1];
```

極座標：$r-\theta-\phi$ の三次元ラプラスの方程式の解は (10.3.30) 式から次式である。

$$u=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\%k1\, r^n+\%k2\, r^{-n-1}\right)\left(\left(\sum_{m=1}^{n}B_{m,n}\sin(m\,\phi)\ P_{m,n}(\cos(\theta))+A_{m,n}\cos(m\,\phi)\ P_{m,n}(\cos(\theta))\right)+A_{0,n}\,P_n(\cos(\theta))\right)$$

球の内部では、r^n の項は $r=0$ で発散するので、この項を除き、球の半径：R とすると、

$$u=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^{-n-1}\left(\left(\sum_{m=1}^{n}B_{m,n}\sin(m\,\phi)\ P_{m,n}(\cos(\theta))+A_{m,n}\cos(m\,\phi)\ P_{m,n}(\cos(\theta))\right)+A_{0,n}\,P_n(\cos(\theta))\right) \tag{7.2.44}$$

$r=R$ において、$u=\mathrm{f}(R,\theta,\phi)$ が与えられたとすると、

$$\mathrm{f}(R,\theta,\phi)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}B_{k,n}\sin(k\,\phi)\ P_{k,n}(\cos(\theta))+A_{k,n}\cos(k\,\phi)\ P_{k,n}(\cos(\theta))\right)+A_{0,n}\,P_n(\cos(\theta)) \tag{7.2.45}$$

上式の両辺に $\cos(m\,\phi)$、(ここで $m\neq 0$) を掛け、積分すると、(6.1.6) 式から $k=m$ の項のみが残り、

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(m\,\phi)\ \mathrm{f}(R,\theta,\phi)\,d\phi&=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}B_{k,j}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(k\,\phi)\ \cos(m\,\phi)\,d\phi\,P_{k,j}(\cos(\theta))\\&\quad+A_{k,j}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(k\,\phi)\ \cos(m\,\phi)\,d\phi\,P_{k,j}(\cos(\theta))+A_{0,j}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(m\,\phi)\,d\phi\,P_j(\cos(\theta))\\&=\pi\sum_{j=1}^{\infty}A_{m,j}\,P_{m,j}(\cos(\theta))\end{aligned} \tag{7.2.46}$$

上式で $\cos(\theta)=s$ の変数変換を行って、両辺に $P_{m,n}(s)$ を掛け、積分すると、(7.2.22) 式と (7.2.43) 式から $j=n$ の項のみが残り、

$$\int_{-1}^{1}P_{m,n}(s)\int_{-\pi}^{\pi}\cos(m\,\phi)\ \mathrm{f}(R,s,\phi)\,d\phi ds=\pi\sum_{j=1}^{\infty}A_{m,j}\int_{-1}^{1}P_{m,j}(s)\ P_{m,n}(s)\,ds=\frac{2\,\pi\,A_{m,n}\ (n+m)!}{(2\,n+1)\ (n-m)!}$$

上式で $s=\ \cos(\theta)$ の変数変換を行って、$A_{m,n}$ を求めると、

$$A_{m,n}=\frac{(2\,n+1)\ (n-m)!}{2\,\pi\ (n+m)!}\int_{0}^{\pi}\sin(\theta)\ P_{m,n}(\cos(\theta))\int_{-\pi}^{\pi}\cos(m\,\phi)\ \mathrm{f}(R,\theta,\phi)\,d\phi d\theta \tag{7.2.47}$$

(7.2.45) 式の両辺に $\sin(m\,\phi)$、(ここで $m\neq 0$) を掛け、上記と同様に $B_{m,n}$ を求めると、

$$B_{m,n}=\frac{(2\,n+1)\ (n-m)!}{2\,\pi\ (n+m)!}\int_{0}^{\pi}\sin(\theta)\ P_{m,n}(\cos(\theta))\int_{-\pi}^{\pi}\sin(m\,\phi)\ \mathrm{f}(R,\theta,\phi)\,d\phi d\theta \tag{7.2.48}$$

(7.2.46) 式で $m=0$ とすると、

$$\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{f}(R,\theta,\phi)\,d\phi=2\,\pi\sum_{j=1}^{\infty}A_{0,j}\,P_j(\cos(\theta))$$

上式で $\cos(\theta)=s$ の変数変換を行って、両辺に $P_n(s)$ を掛け、積分すると、(7.2.8) 式と (7.2.16) 式から $j=n$ の場合のみ値をもち、

$$\int_{-1}^{1}P_n(s)\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{f}(R,s,\phi)\,d\phi ds=2\,\pi\sum_{j=1}^{\infty}A_{0,j}\int_{-1}^{1}P_j(s)\ P_n(s)\,ds=\frac{4\,\pi\,A_{0,n}}{2\,n+1}$$

上式で $s=\ \cos(\theta)$ の変数変換を行って、$A_{0,n}$ を求めると、

$$A_{0,n}=\frac{(2\,n+1)}{4\,\pi}\int_{0}^{\pi}\sin(\theta)\ P_n(\cos(\theta))\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{f}(R,\theta,\phi)\,d\phi d\theta \tag{7.2.49}$$

$r=R$ における $u=\mathrm{f}(R,\theta,\phi)$ が与えられると、(7.2.47) 式、(7.2.48) 式、(7.2.49) 式から $A_{m,n},B_{m,n},A_{0,n}$ が得られ、(7.2.44) 式からラプラスの方程式を満足する球内部の値が得られる。

第8章　ラプラス変換

8.1　ラプラス変換

8.1.1　ラプラス変換の定義と例題

```
kill(all);
assume(s>0);
assume(s>a);
LA1:'integrate(%e^(-s*t)*f(t),t,0,inf);
```

$t \geq 0$ で定義される関数：$\mathrm{f}(t)$ のラプラス変換：$\mathrm{F}(s)$ は次式で定義される。

$$\mathrm{F}(s) = \mathcal{L}[\mathrm{f}(t)] = \int_0^{\infty} e^{-s\,t}\,\mathrm{f}(t)\,dt \tag{8.1.1}$$

ラプラス逆変換は次式で定義される。

$$\mathrm{f}(t) = \frac{1}{2\,\pi\,i}\int_{\sigma-i\,\infty}^{\sigma-i\,\infty} e^{s\,t}\,\mathrm{F}(s)\,ds \tag{8.1.2}$$

Maxima におけるラプラス変換の関数は下記の laplace 関数を使用して、ラプラス変換結果を求めることができる。ここで、t, s は (8.1.1) 式の定義で示した t, s である。

$$laplace(\text{関数}, t, s)$$

また、逆変換は下記の ilt 関数を使用して求めることができる。

$$ilt(\text{関数}, s, t)$$

```
EX:f(t)=1;
subst([EX],LA1);
ev(%,integrate);
laplace(rhs(EX),t,s);
ilt(%,s,t);
```

下記の関数のラプラス変換を行う。

$$\mathrm{f}(t) = 1$$

定義から、

$$\mathrm{F}(s) = \mathcal{L}[1] = \int_0^{\infty} e^{-s\,t}dt = \frac{1}{s}$$

上式の Maxima によるラプラス変換結果は、

$$\mathrm{F}(s) = \mathcal{L}[1] = \frac{1}{s}$$

上式の Maxima によるラプラス逆変換結果は、

$$\mathrm{f}(t) = 1$$

```
EX:f(t)=t;
subst([EX],LA1);
ev(%,integrate);
laplace(rhs(EX),t,s);
ilt(%,s,t);
```

下記の関数のラプラス変換を行う。

$$\mathrm{f}(t) = t$$

定義から、

$$\mathrm{F}(s) = \mathcal{L}[t] = \int_0^{\infty} t\,e^{-s\,t}dt = \frac{1}{s^2}$$

上式の Maxima によるラプラス変換結果は、

$$\mathrm{F}(s) = \mathcal{L}[t] = \frac{1}{s^2}$$

上式の Maxima によるラプラス逆変換結果は、

$$\mathrm{f}(t) = t$$

```
EX:f(t)=t^2;
subst([EX],LA1);
ev(%,integrate);
laplace(rhs(EX),t,s);
ilt(%,s,t);
```

下記の関数のラプラス変換を行う。

$$\mathrm{f}\left(t\right)=t^2$$

定義から、

$$\mathrm{F}\left(s\right)=\mathcal{L}\left[t^2\right]=\int_0^{\infty} t^2\,e^{-s\,t}dt=\frac{2}{s^3}$$

上式の Maxima によるラプラス変換結果は、

$$\mathrm{F}\left(s\right)=\mathcal{L}\left[t^2\right]=\frac{2}{s^3}$$

上式の Maxima によるラプラス逆変換結果は、

$$\mathrm{f}\left(t\right)=t^2$$

```
EX:f(t)=t^5;
subst([EX],LA1);
ev(%,integrate);
laplace(rhs(EX),t,s);
ilt(%,s,t);
```

下記の関数のラプラス変換を行う。

$$\mathrm{f}\left(t\right)=t^5$$

定義から、

$$\mathrm{F}\left(s\right)=\mathcal{L}\left[t^5\right]=\int_0^{\infty} t^5\,e^{-s\,t}dt=\frac{120}{s^6}$$

上式の Maxima によるラプラス変換結果は、

$$\mathrm{F}\left(s\right)=\mathcal{L}\left[t^5\right]=\frac{120}{s^6}$$

上式の Maxima によるラプラス逆変換結果は、

$$\mathrm{f}\left(t\right)=t^5$$

```
EX:f(t)=t^(1/2);
subst([EX],LA1);
ev(%,integrate);
laplace(rhs(EX),t,s);
ilt(%,s,t);
```

下記の関数のラプラス変換を行う。

$$\mathrm{f}\left(t\right)=\sqrt{t}$$

定義から、

$$\mathrm{F}\left(s\right)=\mathcal{L}\left[\sqrt{t}\right]=\int_0^{\infty} \sqrt{t}\,e^{-s\,t}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2\,s^{\frac{3}{2}}}$$

上式の Maxima によるラプラス変換結果は、

$$\mathrm{F}\left(s\right)=\mathcal{L}\left[\sqrt{t}\right]=\frac{\sqrt{\pi}}{2\,s^{\frac{3}{2}}}$$

上式の Maxima によるラプラス逆変換結果は、変換できなかった。

$$\mathrm{f}\left(t\right)=\mathrm{ilt}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\,s^{\frac{3}{2}}},s,t\right)$$

```
declare(n,integer);
assume(n>0);
EX:f(t)=t^n;
subst([EX],LA1);
ev(%,integrate);
laplace(rhs(EX),t,s);
ilt(%,s,t);
```

下記の関数のラプラス変換を行う。

$$\mathrm{f}\left(t\right)=t^n$$

定義から、

$$\mathrm{F}\left(s\right)=\mathcal{L}\left[t^n\right]=\int_0^{\infty} t^n\,e^{-s\,t}dt=\Gamma\left(n+1\right)\,s^{-n-1}$$

上式の Maxima によるラプラス変換結果は、

$$\mathrm{F}\left(s\right)=\mathcal{L}\left[t^n\right]=\Gamma\left(n+1\right)\,s^{-n-1}$$

上式の Maxima によるラプラス逆変換結果は、変換できなかった。

$$\mathrm{f}\left(t\right)=\mathrm{ilt}\left(\Gamma\left(n+1\right)\,s^{-n-1},s,t\right)$$

```
assume(s>a);
EX:f(t)=%e^(a*t);
subst([EX],LA1);
ev(%,integrate);
laplace(rhs(EX),t,s);
ilt(%,s,t);
```

下記の関数のラプラス変換を行う。

$$\mathrm{f}\left(t\right)={e}^{a\,t}$$

定義から、

$$\mathrm{F}\left(s\right)=\mathcal{L}\left[{e}^{a\,t}\right]=\int_{0}^{\infty }{e}^{a\,t-s\,t}dt=\frac{1}{s-a}$$

上式の Maxima によるラプラス変換結果は、

$$\mathrm{F}\left(s\right)=\mathcal{L}\left[{e}^{a\,t}\right]=\frac{1}{s-a}$$

上式の Maxima によるラプラス逆変換結果は、

$$\mathrm{f}\left(t\right)={e}^{a\,t}$$

```
EX:f(t)=sinh(b*t);
subst([EX],LA1);
ev(%,integrate);
laplace(rhs(EX),t,s);
ilt(%,s,t);
```

下記の関数のラプラス変換を行う。

$$\mathrm{f}\left(t\right)=\sinh\left(b\,t\right)$$

定義から、

$$\begin{aligned}\mathrm{F}\left(s\right)=&\mathcal{L}\left[\sinh\left(b\,t\right)\right]\\=&\int_{0}^{\infty }{e}^{-s\,t}\sinh\left(b\,t\right)dt=\frac{b}{{s}^{2}-{b}^{2}}\end{aligned}$$

上式の Maxima によるラプラス変換結果は、

$$\mathrm{F}\left(s\right)=\mathcal{L}\left[\sinh\left(b\,t\right)\right]=\frac{b}{{s}^{2}-{b}^{2}}$$

上式の Maxima によるラプラス逆変換結果は、

$$\mathrm{f}\left(t\right)=\frac{{e}^{b\,t}}{2}-\frac{{e}^{-b\,t}}{2}$$

```
assume(s>abs(b));
EX:f(t)=cosh(b*t);
subst([EX],LA1);
ev(%,integrate);
laplace(rhs(EX),t,s);
ilt(%,s,t);
```

下記の関数のラプラス変換を行う。

$$\mathrm{f}\left(t\right)=\cosh\left(b\,t\right)$$

定義から、

$$\begin{aligned}\mathrm{F}\left(s\right)=&\mathcal{L}\left[\cosh\left(b\,t\right)\right]\\=&\int_{0}^{\infty }{e}^{-s\,t}\cosh\left(b\,t\right)dt=\frac{s}{{s}^{2}-{b}^{2}}\end{aligned}$$

上式の Maxima によるラプラス変換結果は、

$$\mathrm{F}\left(s\right)=\mathcal{L}\left[\cosh\left(b\,t\right)\right]=\frac{s}{{s}^{2}-{b}^{2}}$$

上式の Maxima によるラプラス逆変換結果は、

$$\mathrm{f}\left(t\right)=\frac{{e}^{b\,t}}{2}+\frac{{e}^{-b\,t}}{2}$$

```
assume(c>0);
EX:f(t)=cos(c*t);
subst([EX],LA1);
ev(%,integrate);
laplace(rhs(EX),t,s);
ilt(%,s,t);
```

下記の関数のラプラス変換を行う。

$$\mathrm{f}\left(t\right)=\cos\left(c\,t\right)$$

定義から、

$$\mathrm{F}\left(s\right)=\mathcal{L}\left[\cos\left(c\,t\right)\right]=\int_{0}^{\infty }{e}^{-s\,t}\cos\left(c\,t\right)dt=\frac{s}{{s}^{2}+{c}^{2}}$$

上式の Maxima によるラプラス変換結果は、

$$\mathrm{F}\left(s\right)=\mathcal{L}\left[\cos\left(c\,t\right)\right]=\frac{s}{{s}^{2}+{c}^{2}}$$

上式の Maxima によるラプラス逆変換結果は、

$$\mathrm{f}\left(t\right)=\cos\left(c\,t\right)$$

```
EX:f(t)=sin(c*t);
subst([EX],LA1);
ev(%,integrate);
laplace(rhs(EX),t,s);
ilt(%,s,t);
```

下記の関数のラプラス変換を行う。

$$\mathrm{f}\left(t\right)=\sin\left(c\,t\right)$$

定義から、

$$\mathrm{F}\left(s\right)=\mathcal{L}\left[\sin\left(c\,t\right)\right]=\int_{0}^{\infty}e^{-s\,t}\sin\left(c\,t\right)dt=\frac{c}{s^2+c^2}$$

上式の Maxima によるラプラス変換結果は、

$$\mathrm{F}\left(s\right)=\mathcal{L}\left[\sin\left(c\,t\right)\right]=\frac{c}{s^2+c^2}$$

上式の Maxima によるラプラス逆変換結果は、

$$\mathrm{f}\left(t\right)=\sin\left(c\,t\right)$$

```
EX:f(t)=t*sin(c*t);
subst([EX],LA1);
ev(%,integrate);
laplace(rhs(EX),t,s);
ilt(%,s,t);
```

下記の関数のラプラス変換を行う。

$$\mathrm{f}\left(t\right)=t\sin\left(c\,t\right)$$

定義から、下記となるが解けなかった。

$$\mathrm{F}\left(s\right)=\mathcal{L}\left[t\sin\left(c\,t\right)\right]=\int_{0}^{\infty}t\,e^{-s\,t}\sin\left(c\,t\right)dt$$

上式の Maxima によるラプラス変換結果は、

$$\mathrm{F}\left(s\right)=\mathcal{L}\left[t\sin\left(c\,t\right)\right]=\frac{2\,c\,s}{\left(s^2+c^2\right)^2}$$

上式の Maxima によるラプラス逆変換結果は、

$$\mathrm{f}\left(t\right)=t\sin\left(c\,t\right)$$

```
EX:f(t)=t*cos(c*t);
subst([EX],LA1);
ev(%,integrate);
laplace(rhs(EX),t,s);
factor(%);
ilt(%,s,t);
```

下記の関数のラプラス変換を行う。

$$\mathrm{f}\left(t\right)=t\cos\left(c\,t\right)$$

定義から、

$$\begin{aligned}\mathrm{F}\left(s\right)=&\mathcal{L}\left[t\cos\left(c\,t\right)\right]\\=&\int_{0}^{\infty}t\,e^{-s\,t}\cos\left(c\,t\right)dt=\frac{2\,s^2}{\left(s^2+c^2\right)^2}-\frac{1}{s^2+c^2}\end{aligned}$$

上式の Maxima によるラプラス変換結果は、下記で上記と同じ結果である。

$$\mathrm{F}\left(s\right)=\mathcal{L}\left[t\cos\left(c\,t\right)\right]=\frac{\left(s-c\right)\,\left(s+c\right)}{\left(s^2+c^2\right)^2}$$

上式の Maxima によるラプラス逆変換結果は、

$$\mathrm{f}\left(t\right)=t\cos\left(c\,t\right)$$

```
EX:f(t)=%e^(%i*c*t);
subst([EX],LA1);
ev(%,integrate);
laplace(rhs(EX),t,s);
realpart(%)+%i*imagpart(%);
ilt(%,s,t);
```

下記の関数のラプラス変換を行う。

$$\mathrm{f}\left(t\right)=e^{i\,c\,t}$$

定義から、

$$\mathrm{F}\left(s\right)=\mathcal{L}\left[e^{i\,c\,t}\right]=\int_{0}^{\infty}e^{i\,c\,t-s\,t}dt=\frac{1}{s-i\,c}$$

上式の Maxima によるラプラス変換結果は、

$$\mathrm{F}\left(s\right)=\mathcal{L}\left[e^{i\,c\,t}\right]=\frac{1}{s-i\,c}$$

上式の Maxima によるラプラス逆変換結果は、

$$\mathrm{f}\left(t\right)=\frac{s}{s^2+c^2}+\frac{i\,c}{s^2+c^2}=i\sin\left(c\,t\right)+\cos\left(c\,t\right)$$

```
EX:f(t)=sin(c*t)^2;
subst([EX],LA1);
ev(%,integrate);
laplace(rhs(EX),t,s);
ilt(%,s,t);
trigexpand(%);
trigsimp(%);
```

下記の関数のラプラス変換を行う。

$$\mathrm{f}(t)=\sin(c\,t)^2$$

定義から、下記となるが解けなかった。

$$\begin{aligned}\mathrm{F}(s)=&\mathcal{L}\left[\sin(c\,t)^2\right]\\=&\int_0^\infty e^{-s\,t}\sin(c\,t)^2dt=\frac{2\,c^2}{s^3+4\,c^2\,s}\end{aligned}$$

上式の Maxima によるラプラス変換結果は、

$$\mathrm{F}(s)=\mathcal{L}\left[\sin(c\,t)^2\right]=\frac{2\,c^2}{s^3+4\,c^2\,s}$$

上式の Maxima によるラプラス逆変換結果は、

$$\mathrm{f}(t)=\frac{1}{2}-\frac{\cos(2\,c\,t)}{2}=\sin(c\,t)^2$$

```
EX:f(t)=cos(c*t+a);
subst([EX],LA1);
ev(%,integrate);
laplace(rhs(EX),t,s);
ilt(%,s,t);
trigrat(%);
```

下記の関数のラプラス変換を行う。

$$\mathrm{f}(t)=\cos(c\,t+a)$$

定義から、

$$\begin{aligned}\mathrm{F}(s)=&\mathcal{L}\left[\cos(c\,t+a)\right]\\=&\int_0^\infty e^{-s\,t}\cos(c\,t+a)\,dt=\frac{\cos(a)\ s}{s^2+c^2}-\frac{\sin(a)\ c}{s^2+c^2}\end{aligned}$$

上式の Maxima によるラプラス変換結果は、

$$\mathrm{F}(s)=\mathcal{L}\left[\cos(c\,t+a)\right]=\frac{\cos(a)\ s-\sin(a)\ c}{s^2+c^2}$$

上式の Maxima によるラプラス逆変換結果は、

$$\mathrm{f}(t)=\cos(a)\ \cos(c\,t)-\sin(a)\ \sin(c\,t)=\cos(c\,t+a)$$

```
EX:f(t)=t^3*%e^(a*t);
subst([EX],LA1);
ev(%,integrate);
laplace(rhs(EX),t,s);
ilt(%,s,t);
```

下記の関数のラプラス変換を行う。

$$\mathrm{f}(t)=t^3\,e^{a\,t}$$

定義から、下記となるが解けなかった。

$$\mathrm{F}(s)=\mathcal{L}\left[t^3\,e^{a\,t}\right]=\int_0^\infty t^3\,e^{a\,t-s\,t}dt=\frac{6}{(s-a)^4}$$

上式の Maxima によるラプラス変換結果は、

$$\mathrm{F}(s)=\mathcal{L}\left[t^3\,e^{a\,t}\right]=\frac{6}{(s-a)^4}$$

上式の Maxima によるラプラス逆変換結果は、

$$\mathrm{f}(t)=t^3\,e^{a\,t}$$

```
EX:f(t)=cos(c*t)*%e^(a*t);
subst([EX],LA1);
ev(%,integrate);
factor(%);
laplace(rhs(EX),t,s);
ilt(%,s,t);
```

下記の関数のラプラス変換を行う。

$$\mathrm{f}(t)=e^{a\,t}\cos(c\,t)$$

定義から、

$$\begin{aligned}\mathrm{F}(s)=&\mathcal{L}\left[e^{a\,t}\cos(c\,t)\right]\\=&\int_0^\infty e^{a\,t-s\,t}\cos(c\,t)\,dt=\frac{s-a}{s^2-2\,a\,s+c^2+a^2}\end{aligned}$$

上式の Maxima によるラプラス変換結果は、

$$\mathrm{F}(s)=\mathcal{L}\left[e^{a\,t}\cos(c\,t)\right]=\frac{s-a}{s^2-2\,a\,s+c^2+a^2}$$

上式の Maxima によるラプラス逆変換結果は、

$$\mathrm{f}(t)=e^{a\,t}\cos(c\,t)$$

```
EX:f(t)=%e^(-t)*sin(t);
subst([EX],LA1);
ev(%,integrate);
laplace(rhs(EX),t,s);
ilt(%,s,t);
```

下記の関数のラプラス変換を行う。

$$\mathrm{f}(t) = e^{-t}\sin(t)$$

定義から、下記となるが解けなかった。

$$\begin{aligned}\mathrm{F}(s) =& \mathcal{L}\left[e^{-t}\sin(t)\right]\\ =& \int_0^{\infty} e^{-s\,t-t}\sin(t)\,dt = \frac{1}{s^2+2\,s+2}\end{aligned}$$

上式の Maxima によるラプラス変換結果は、

$$\mathrm{F}(s) = \mathcal{L}\left[e^{-t}\sin(t)\right] = \frac{1}{s^2+2\,s+2}$$

上式の Maxima によるラプラス逆変換結果は、

$$\mathrm{f}(t) = e^{-t}\sin(t)$$

```
EX:f(t)=log(t);
subst([EX],LA1);
ev(%,integrate);
laplace(rhs(EX),t,s);
ilt(%,s,t);
```

下記の関数のラプラス変換を行う。

$$\mathrm{f}(t) = \log(t)$$

定義から、下記となるが積分結果は得られなかった。

$$\mathrm{F}(s) = \mathcal{L}[\log(t)] = \int_0^{\infty} e^{-s\,t}\log(t)\,dt$$

上式の Maxima によるラプラス変換結果は、

$$\mathrm{F}(s) = \mathcal{L}[\log(t)] = \frac{-\log(s)-\gamma}{s}$$

上式の Maxima によるラプラス逆変換結果は、、変換できなかった。

$$\mathrm{f}(t) = \mathrm{ilt}\left(\frac{-\log(s)-\gamma}{s}, s, t\right)$$

8.1.2　関数の和と定数積

関数 : $\mathrm{f}(t)$ と関数 : $\mathrm{g}(t)$、定数 : A, B の下記の和 : $\mathrm{h}(t)$ のラプラス変換結果 : $\mathrm{H}(s)$ を求める。

$$\mathrm{h}(t) = \mathrm{g}(t)\;B + \mathrm{f}(t)\;A \tag{8.1.3}$$

```
kill(all);
assume(t>0);
assume(s>0);
kill(all);
assume(t>0);
assume(s>0);
F1:f(t);
G1:g(t);
h(t)=A*F1+B*G1;
H(s)='integrate(%e^(-s*t)*(A*F1+B*G1),
 t,0,inf);
H(s)='integrate(%e^(-s*t)*(A*F1),t,0,inf)
 +'integrate(%e^(-s*t)*(B*G1),t,0,inf);
H(s)=A*F(s)+B*G(s);
```

関数 : $\mathrm{f}(t)$ のラプラス変換結果を $\mathrm{F}(s)$、関数 : $\mathrm{g}(t)$ のラプラス変換結果を $\mathrm{G}(s)$ とする。上式のラプラス変換結果は、

$$\begin{aligned}\mathrm{H}(s) =& \mathcal{L}[\mathrm{g}(t)\;B + \mathrm{f}(t)\;A]\\ =& \int_0^{\infty} e^{-s\,t}\;(\mathrm{g}(t)\;B + \mathrm{f}(t)\;A)\,dt\\ =& \int_0^{\infty} e^{-s\,t}\,\mathrm{g}(t)\,dt\,B + \int_0^{\infty} e^{-s\,t}\,\mathrm{f}(t)\,dt\,A\\ =& \mathrm{G}(s)\;B + \mathrm{F}(s)\;A\end{aligned} \tag{8.1.4}$$

8.1.3　単位ステップ関数

下記式、図に示す単位ステップ関数：$u(t)$ のラプラス変換：$U(s)$ を求める。

$$\mathrm{u}\left(t\right)=\begin{cases}1 & t\geq 0\\ 0 & t<0\end{cases} \tag{8.1.5}$$

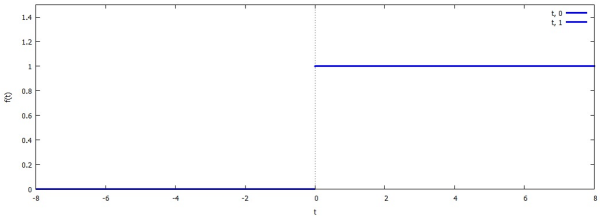


図 8.1.1: 単位ステップ関数

```
kill(all);
assume(s>0);
EX:f(t)=1;
'integrate(%e^(-s*t)*f(t),t,0,inf);
subst([EX],%);
FS1:F(s)=ev(%,integrate);
ilt(%,s,t);
plot2d([[parametric,t,0,[t,-8,0]],
 [parametric,t,1,[t,0,8]]],[x,-8,8],
 [y,0,1.5],[xlabel, "t"],[ylabel, "f(t)"],
 [style,[lines,3,1],[lines,3,1]]);
```

上式のラプラス変換結果は、

$$\mathrm{U}\left(s\right)=\mathcal{L}\left[\mathrm{u}\left(t\right)\right]=\int_{0}^{\infty}e^{-s\,t}\,\mathrm{u}\left(t\right)dt=\int_{0}^{\infty}e^{-s\,t}dt=\frac{1}{s} \tag{8.1.6}$$

上式のラプラス逆変換結果は、

$$\mathrm{u}\left(t\right)=\mathrm{ilt}\left(\mathrm{U}\left(s\right),s,t\right)=1$$

次に上記単位ステップ関数を時間軸で A ずらした関数：$u_A\left(t\right)$ のラプラス変換：$U_A\left(s\right)$ を求める。

$$u_A\left(t\right)=\begin{cases}1 & t\geq A\\ 0 & t<A\end{cases} \tag{8.1.7}$$

```
'integrate(%e^(-s*t)*u[A](t),t,A,inf);
subst([u[A](t)=1],%);
FS1:U[A](s)=ev(%,integrate);
ilt(%,s,t);
plot2d([[parametric,t,0,[t,-8,2]],
 [parametric,t,1,[t,2,8]]],[x,-8,8],
 [y,0,1.5],[xlabel, "t"],[ylabel, "f(t)"],
 [style,[lines,3,1],[lines,3,1]]);
```

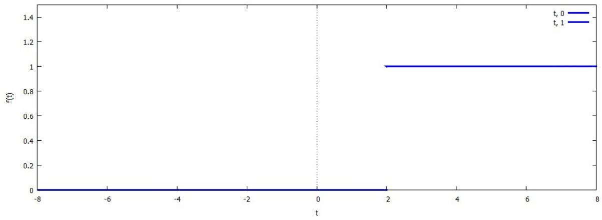


図 8.1.2: 単位ステップ関数

上式のラプラス変換結果は、

$$\begin{aligned}U_A\left(s\right)=&\mathcal{L}\left[u_A\left(t\right)\right]\\ &=\int_{A}^{\infty}e^{-s\,t}\,u_A\left(t\right)dt=\int_{A}^{\infty}e^{-s\,t}dt=\frac{e^{-s\,A}}{s}\end{aligned} \tag{8.1.8}$$

上式のラプラス逆変換結果は、Maxima では得られなかった。

$$\mathrm{ilt}\left(U_A\left(s\right),s,t\right)=\mathrm{ilt}\left(\frac{e^{-s\,A}}{s},s,t\right)$$

8.1.4 デルタ関数

デルタ関数：$\delta(t)$ のラプラス変換：$\Delta\,(s)$ を求める。デルタ関数は幅：A、高さ：$1/A$、面積：1 の矩形波で、$A \to 0$ で得られる。

$$\delta\,(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{A} & 0 \geq t \geq A \\ 0 & t > A \end{cases} \tag{8.1.9}$$

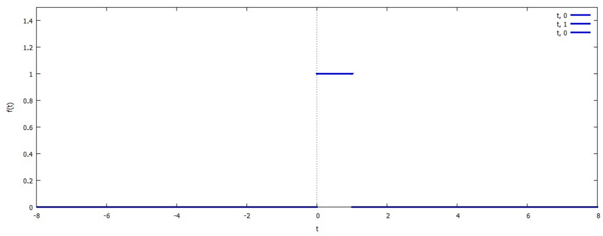


図 8.1.3: デルタ関数

```
kill(all);
\Delta(s)=1/s/A-%e^(-A*s)/s/A;
factor(%);
limit(%,A,0);
plot2d([[parametric,t,0,[t,-8,0]],
 [parametric,t,1,[t,0,1]],
 [parametric,t,0,[t,1,8]]],[x,-8,8],
 [y,0,1.5],[xlabel, "t"],[ylabel, "f(t)"],
 [style,[lines,3,1],[lines,3,1]]);
```

単位ステップ関数の (8.1.6) 式、(8.1.8) 式から、上記のデルタ関数のラプラス変換結果：$\Delta\,(s)$ は、

$$\Delta\,(s) = \mathcal{L}\left[\delta\,(t)\right] = \lim_{A \to 0}\left(\frac{1}{A\,s} - \frac{e^{-A\,s}}{A\,s}\right) = 1 \tag{8.1.10}$$

8.1.5 関数に $e^{a\,t}$ を掛ける

関数：$\mathrm{f}\,(t)$ に $e^{a\,t}$ を掛けた関数のラプラス変換：$\mathrm{G}\,(s)$ を求める。

```
kill(all);
LF1:laplace(f(t),t,s)=F(s);
G3:g(t)=%e^(a*t)*f(t);
G(s)='integrate(%e^(-s*t)*g(t),t,0,inf);
LG3:subst([G3],%);
P2:p=s-a;
solve(%,s)[1];
lhs(LG3)=factor(subst([%],rhs(LG3)));
lhs(%)=F(p);
subst([P2],%);
lhs(%)=F(s-a);
```

関数：$\mathrm{f}\,(t)$ に $e^{a\,t}$ を掛けた関数：$\mathrm{g}\,(t)$ は次式で与えられる。

$$\mathrm{g}\,(t) = e^{a\,t}\,\mathrm{f}\,(t)$$

上式のラプラス変換結果は定義から次式となり、$s - a \to p$ の変数変換を行う。ここで、関数：$\mathrm{f}\,(t)$ のラプラス変換結果：$\mathrm{F}\,(s)$ とすると、

$$\begin{aligned} \mathrm{G}\,(s) = \mathcal{L}\left[e^{a\,t}\,\mathrm{f}\,(t)\right] &= \int_0^{\infty} e^{-s\,t}\,\mathrm{g}\,(t)\,dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{a\,t - s\,t}\,\mathrm{f}\,(t)\,dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-p\,t}\,\mathrm{f}\,(t)\,dt \\ &= \mathrm{F}\,(p) \end{aligned}$$

上式で、$p = s - a$ であるから、これを上式に代入し、元の s に戻し、

$$\mathrm{G}\,(s) = \mathcal{L}\left[e^{a\,t}\,\mathrm{f}\,(t)\right] = \mathrm{F}\,(s - a) \tag{8.1.11}$$

8.1.6　関数を時間：A だけずらす

関数：$\mathrm{f}(t)$ を時間軸で $t=A$ ずらした関数のラプラス変換：$\mathrm{G}(s)$ を求める。

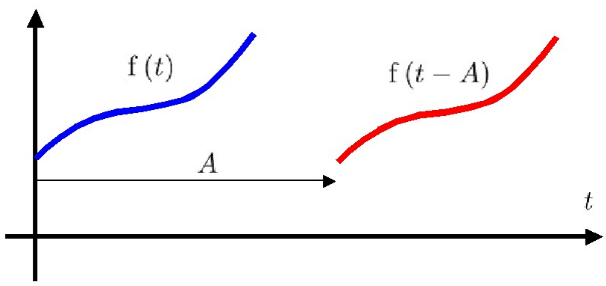


図 8.1.4: 関数を時間：A だけずらす

```
kill(all);
LF1:laplace(f(t),t,s)=F(s);
G1:g(t)=f(t-A)*u(t-A);
G2:G1*%e^(-s*t);
LG1:G(s)='integrate(lhs(G2),t,A,inf);
LG2:subst([G1],LG1);
P1:t-A=p;
lhs(LG2)=changevar(rhs(LG2),t-A-p,p,t);
subst([u(p)=1],%);
lhs(%)=%e^(-A*s)*subst([A=0],rhs(%));
lhs(%)=%e^(-A*s)*F(s);
```

関数：$\mathrm{f}(t)$ を時間軸で $t=A$ ずらした関数は $\mathrm{f}(t-A)$ で $t<A$ では零とするためステップ関数：$\mathrm{u}(t-A)$ を掛け、次式で表せる。

$$\mathrm{g}(t)=\mathrm{f}(t-A)\ \mathrm{u}(t-A) \tag{8.1.12}$$

ここで、関数：$\mathrm{f}(t)$ のラプラス変換結果：$\mathrm{F}(s)$ とする。

(8.1.12) 式のラプラス変換結果は定義から次式となり、$t-A\to p$ の変数変換を行うと、

$$\begin{aligned}\mathrm{G}(s)=&\mathcal{L}\left[\mathrm{f}(t-A)\ \mathrm{u}(t-A)\right]\\=&\int_A^\infty e^{-s\,t}\,\mathrm{g}(t)\,dt\\=&\int_A^\infty e^{-s\,t}\,\mathrm{f}(t-A)\ \mathrm{u}(t-A)\,dt\\=&\int_0^\infty \mathrm{f}(p)\ \mathrm{u}(p)\ e^{-s\,A-p\,s}dp\\=&\int_0^\infty \mathrm{f}(p)\ e^{-p\,s}dp\,e^{-s\,A}\\=&\mathrm{F}(s)\ e^{-s\,A}\end{aligned} \tag{8.1.13}$$

この結果は、単位ステップ関数を時間軸で A ずらした関数のラプラス変換結果：(8.1.8) 式の結果と一致している。

逆変換例　$\frac{-e^{-s}-e^{-3\,s}+1}{s^2}$

```
LF1:(1-%e^(-s)-%e^(-3*s))/(s^2);
ilt(%,s,t);
LF2:expand(LF1);
Y1:ilt(last(LF2),s,t);
Y2:subst([t=t-1],-Y1)*u[1](t);
Y3:subst([t=t-3],-Y1)*u[3](t);
f(t)=Y1+Y2+Y3;
```

次式のラプラス逆変換を行う。

$$\mathrm{F}(s)=\frac{-e^{-s}-e^{-3\,s}+1}{s^2}$$

上式を展開し、

$$\mathrm{F}(s)=-\frac{e^{-s}}{s^2}-\frac{e^{-3\,s}}{s^2}+\frac{1}{s^2}$$

上式の右辺第 3 項の逆変換結果は、

$$\mathrm{f}_3(t)=t$$

右辺第 1 項、第 2 項は上記の結果と (8.1.13) 式から、

$$\mathrm{f}_2(t)=(1-t)\ u_1(t)$$

$$\mathrm{f}_1(t)=(3-t)\ u_3(t)$$

以上から、

$$\mathrm{f}(t)=(3-t)\ u_3(t)+(1-t)\ u_1(t)+t$$

逆変換例　$\frac{e^{-3\,s}}{s^2-5\,s+6}$

```
LF1:%e^(-3*s)/(s^2-5*s+6);
ilt(%,s,t);
LF2:1/denom(LF1);
ilt(%,s,t);
subst([t=t-3],%);
f(t)=%*u[3](t);
```

次式のラプラス逆変換を行う。

$$\mathrm{F}(s)=\frac{e^{-3\,s}}{s^2-5\,s+6}$$

(8.1.13) 式から $e^{-3\,s}$ の項を除き、

$$\mathrm{F}^{‘}(s)=\frac{1}{s^2-5\,s+6}$$

ラプラス逆変換を行い、

$$\mathrm{f}^{‘}(t)=e^{3\,t}-e^{2\,t}$$

以上から、

$$\mathrm{f}(t)=\left(e^{3\,(t-3)}-e^{2\,(t-3)}\right)\ u_3(t)$$

8.1.7 関数の微分

関数:$\mathrm{f}(t)$ の微分結果のラプラス変換:$\mathrm{G}(s)$ を求める。

```
kill(all);
assume(t>0);
assume(s>0);
DF1:'diff(f(t),t,1);
EX1:p(t)=%e^(-s*t);
'integrate(DF1*rhs(EX1),t,0,inf);
'integrate(DF1*lhs(EX1),t,0,inf);
at(p(t)*f(t),t=inf)-at(p(t)*f(t),t=0)
 -'integrate(diff(p(t),t,1)*f(t),t,0,inf);
subst([p(inf)=0,p(0)=1],%);
subst([EX1],%);
ev(%,diff);
s*F(s)-f(0);
LF1:laplace(f(t),t,s)=F(s);
laplace('diff(f(t),t,1),t,s);
subst([LF1],%);
laplace(diff(f(t),t,2),t,s);
subst([LF1],%);
```

ラプラス変換の定義から、関数 : $\mathrm{f}(t)$ の微分のラプラス変換結果は、

$$\mathrm{G}(s) = \mathcal{L}\left[\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{f}(t)\right] = \int_0^\infty e^{-s\,t}\,\left(\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{f}(t)\right)dt$$

次式の置き換えを行い、

$$\mathrm{p}(t) = e^{-s\,t} \tag{8.1.14}$$

部分積分を適用すると、

$$\begin{aligned}\mathrm{G}(s) &= \int_0^\infty \mathrm{p}(t)\,\left(\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{f}(t)\right)dt\\ &= -\int_0^\infty \mathrm{f}(t)\,\left(\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{p}(t)\right)dt\\ &\quad+\mathrm{f}(\infty)\,\mathrm{p}(\infty)-\mathrm{f}(0)\,\mathrm{p}(0)\end{aligned}$$

(8.1.14) 式から、$\mathrm{p}(0) = 0.\,\mathrm{p}(\infty) \to 0$ であるから、上式は下記となり、(8.1.14) 式を代入し、関数 : $\mathrm{f}(t)$ のラプラス変換結果 : $\mathrm{F}(s)$ とすると、

$$\begin{aligned}\mathrm{G}(s) &= -\int_0^\infty \mathrm{f}(t)\,\left(\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{p}(t)\right)dt - \mathrm{f}(0)\\ &= -\int_0^\infty \mathrm{f}(t)\,\left(\frac{d}{d\,t}\,e^{-s\,t}\right)dt - \mathrm{f}(0)\\ &= s\int_0^\infty e^{-s\,t}\,\mathrm{f}(t)\,dt - \mathrm{f}(0)\\ &= s\,\mathrm{F}(s) - \mathrm{f}(0)\end{aligned} \tag{8.1.15}$$

$\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{f}(t)$ の Maxima によるラプラス変換結果は、

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{f}(t)\right] &= s\,\mathrm{laplace}(\mathrm{f}(t),t,s) - \mathrm{f}(0)\\ &= s\,\mathrm{F}(s) - \mathrm{f}(0)\end{aligned}$$

$\frac{d^2}{d\,t^2}\,\mathrm{f}(t)$ の Maxima によるラプラス変換結果は、

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\frac{d^2}{d\,t^2}\,\mathrm{f}(t)\right] &= -\left.\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{f}(t)\right|_{t=0}\\ &\quad+s^2\,\mathrm{laplace}(\mathrm{f}(t),t,s) - \mathrm{f}(0)\,s\\ &= -\left.\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{f}(t)\right|_{t=0} + s^2\,\mathrm{F}(s) - \mathrm{f}(0)\,s\end{aligned}$$

8.1.8 関数の積分

関数:$\mathrm{f}\left(t\right)$ の積分結果のラプラス変換:$\mathrm{G}\left(s\right)$ を求める。

```
kill(all);
assume(s>0);
assume(t>0);
LF1:laplace(f(t),t,s)=F(s);
I1:g(t)=integrate(f(\tau),\tau,0,t);
DI1:diff(I1,t,1);
I2:p(t)='integrate(%e^(-s*t),t);
DI2:diff(I2,t,1);
I21:ev(I2,integrate);
LF2:'integrate(%e^(-s*t)*lhs(I1),t,0,inf);
LF21:subst([rhs(DI2)=lhs(DI2)],%);
g(inf)*p(inf)-g(0)*p(0)-'integrate(
 diff(g(t),t,1)*p(t),t,0,inf);
subst([I21,DI1],%);
subst([p(inf)=0,g(0)=0],%);
F(s)/s;
laplace(I1,t,s);
subst([LF1],%);
```

関数：$\mathrm{f}\left(t\right)$ の積分結果：$\mathrm{g}\left(t\right)$ は、

$$\mathrm{g}\left(t\right)=\int_{0}^{t}\mathrm{f}\left(\tau\right)d\tau \tag{8.1.16}$$

その微分は当然ながら、

$$\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{g}\left(t\right)=\mathrm{f}\left(t\right) \tag{8.1.17}$$

$e^{-s\,t}$ を $\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{p}\left(t\right)$ と置く。

$$\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{p}\left(t\right)=e^{-s\,t} \tag{8.1.18}$$

その積分結果は、

$$\mathrm{p}\left(t\right)=\int e^{-s\,t}dt=-\frac{e^{-s\,t}}{s} \tag{8.1.19}$$

ラプラス変換の定義から、関数:$\mathrm{f}\left(t\right)$ の積分:$\mathrm{g}\left(t\right)$ のラプラス変換結果：$\mathrm{G}\left(s\right)$ は、部分積分を使い、上記の関係式から、

$$\begin{aligned}\mathrm{G}\left(s\right)=&\int_{0}^{\infty}e^{-s\,t}\,\mathrm{g}\left(t\right)dt\\=&\int_{0}^{\infty}\mathrm{g}\left(t\right)\left(\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{p}\left(t\right)\right)dt\\=&-\int_{0}^{\infty}\mathrm{p}\left(t\right)\left(\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{g}\left(t\right)\right)dt\\&+\mathrm{g}\left(\infty\right)\,\mathrm{p}\left(\infty\right)-\mathrm{g}\left(0\right)\,\mathrm{p}\left(0\right)\\=&\frac{1}{s}\int_{0}^{\infty}e^{-s\,t}\,\mathrm{f}\left(t\right)dt+\mathrm{g}\left(\infty\right)\,\mathrm{p}\left(\infty\right)-\mathrm{g}\left(0\right)\,\mathrm{p}\left(0\right)\end{aligned}$$

(8.1.16) 式、(8.1.19) 式から、$\mathrm{p}\left(\infty\right)=0,\ \mathrm{g}\left(0\right)=0$ であるから、上式は、

$$\mathrm{G}\left(s\right)=\frac{1}{s}\int_{0}^{\infty}e^{-s\,t}\,\mathrm{f}\left(t\right)dt=\frac{\mathrm{F}\left(s\right)}{s} \tag{8.1.20}$$

関数：$\mathrm{f}\left(t\right)$ の積分結果のラプラス変換を Maxima で行うと、

$$\mathrm{laplace}\left(\mathrm{g}\left(t\right),t,s\right)=\frac{\mathrm{laplace}\left(\mathrm{f}\left(t\right),t,s\right)}{s}=\frac{\mathrm{F}\left(s\right)}{s}$$

8.1.9 インパルス応答

```
kill(all);
assume(s>0);
assume(t>0);
assume(\tau>0);
LX1:laplace(x(t),t,s)=X(s);
LH1:laplace(h(t),t,s)=H(s);
Y1:y(t)='integrate(x(\tau)*h(t-\tau),
 \tau,0,inf);
Y(s)='integrate(%e^(-s*t)*y(t),t,0,inf);
subst([Y1],%);
lhs(%)='integrate('integrate(%e^(-s*t)*
 x(\tau)*h(t-\tau),t,0,inf),\tau,0,inf);
'integrate(%e^(-s*t)*h(t-\tau),t,0,inf);
changevar(%,t-\tau-a,a,t);
Y(s)='integrate(%*x(\tau),\tau,0,inf);
lhs(%)=integrate(x(tau)*%e^(-s*tau),\tau,
 0,inf)*integrate(h(a)*%e^(-a*s),a,0,inf);
lhs(%)=H(s)*X(s);
```

入力：$\mathrm{x}\,(\tau)$、インパルス応答関数：$\mathrm{h}\,(\tau)$、出力：$\mathrm{y}\,(t)$ とすると、「6.2.2 畳み込み積分 (インパルス応答)」からインパルス応答は次式で表される。ここでインパルス応答関数：$\mathrm{h}\,(\tau)$ は前方へ影響を与えないので、時間積分区間を $0 \to \infty$ とした。

$$\mathrm{y}\,(t) = \int_0^{\infty} \mathrm{h}\,(t-\tau)\;\mathrm{x}\,(\tau)\,d\tau \tag{8.1.21}$$

出力：$\mathrm{y}\,(t)$ のラプラス変換：$\mathrm{Y}\,(s)$ を求める。積分順序を変え、

$$\begin{aligned}\mathrm{Y}\,(s) &= \int_0^{\infty} e^{-s\,t}\,\mathrm{y}\,(t)\,dt\\ &= \int_0^{\infty} e^{-s\,t} \int_0^{\infty} \mathrm{h}\,(t-\tau)\;\mathrm{x}\,(\tau)\,d\tau dt\\ &= \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-s\,t}\,\mathrm{h}\,(t-\tau)\,dt\,\mathrm{x}\,(\tau)\,d\tau\end{aligned}$$

上記 t の積分で、$t-\tau=a$ と置き換えて、

$$\int_0^{\infty} e^{-s\,t}\,\mathrm{h}\,(t-\tau)\,dt = \int_{-\tau}^{\infty} \mathrm{h}\,(a)\;e^{-s\,\tau-a\,s}da$$

上記結果を上式に代入し、入力：$\mathrm{x}\,(t)$ のラプラス変換：$\mathrm{X}\,(s)$、インパルス応答関数：$\mathrm{h}\,(\tau)$ のラプラス変換：$\mathrm{H}\,(s)$ とすると, 出力のラプラス変換：$\mathrm{Y}\,(s)$ は、

$$\begin{aligned}\mathrm{Y}\,(s) &= \int_0^{\infty} \mathrm{x}\,(\tau)\int_{-\tau}^{\infty} \mathrm{h}\,(a)\;e^{-s\,\tau-a\,s}dad\tau\\ &= \int_0^{\infty} \mathrm{h}\,(a)\;e^{-a\,s}da\int_0^{\infty} e^{-s\,\tau}\,\mathrm{x}\,(\tau)\,d\tau\\ &=\mathrm{H}\,(s)\;\mathrm{X}\,(s)\end{aligned} \tag{8.1.22}$$

```
H1:h(t)=2*%e^(-t);
X1:x(t)=5;
LX2:X(s)=5*(1/s-%e^(-3*s)/s);
LH2:H(s)=laplace(rhs(H1),t,s);
LY2:Y(s)=rhs(LX2)*rhs(LH2);
LY21:expand(%);
LY22:first(rhs(LY21));
LY23:last(rhs(LY21));
factor(LY23);
LY231:%/(%e^(-3*s));
Y31:ilt(LY22,s,t);
ilt(LY23,s,t);
ilt(LY231,s,t);
Y32:subst([t=t-3],%);
Y321:Y31+Y32;
Y41:y(t)=Y31+Y32*u[3](t);
Y42:y(t)=Y31;
Y43:y(t)=Y31+Y32;
plot2d([[parametric,t,0,[t,-3,0]],
 [parametric,t,rhs(Y42),[t,0,3]],
 [parametric,t,rhs(Y43),[t,3,10]]],
 [x,-3,10],[xlabel, "t"],[ylabel, "y(t)"],
 [style,[lines,3,1],[lines,3,1]]);
```

入力：$\mathrm{x}\,(t)$ として、下記の矩形波とする。

$$\mathrm{x}\,(t) = \begin{cases} 0 & t<0\\ 5 & 0 \ge t \ge 3\\ 0 & t>3 \end{cases} \tag{8.1.23}$$

インパルス応答関数：$\mathrm{h}\,(t)$ として下記とする。

$$\mathrm{h}\,(t) = 2\,e^{-t} \tag{8.1.24}$$

入力のラプラス変換結果：$\mathrm{X}\,(s)$ は (8.1.10) 式から、

$$\mathrm{X}\,(s) = 5\left(\frac{1}{s} - \frac{e^{-3\,s}}{s}\right) \tag{8.1.25}$$

インパルス応答のラプラス変換結果：$\mathrm{H}\,(s)$ は Maxima の laplace 関数を用いて得られ、

$$\mathrm{H}\,(s) = \frac{2}{s+1} \tag{8.1.26}$$

(8.1.22) 式から、出力のラプラス変換：$\mathrm{Y}\,(s)$ は、

$$\begin{aligned}\mathrm{Y}\,(s) = \mathrm{H}\,(s)\;\mathrm{X}\,(s) &= \frac{10\left(\frac{1}{s} - \frac{e^{-3\,s}}{s}\right)}{s+1}\\ &= \frac{10}{s^2+s} - \frac{10\,e^{-3\,s}}{s\,(s+1)}\end{aligned} \tag{8.1.27}$$

(8.1.27) 式の右辺第 1 項のラプラス逆変換結果は Maxima の ilt 関数を用いて得られ、

$$\mathrm{y}_1\,(t) = 10 - 10\,e^{-t}$$

(8.1.27) 式の右辺第 2 項は $e^{-3\,s}$ の項があり、これは (8.1.13) 式から時間を $t=3$ ずらすことを示しており、$e^{-3\,s}$ を除いた項のラプラス逆変換結果を Maxima の ilt 関数を用いて得、$t=t-3$ の置き換えを行うと、

$$\mathrm{y}_2\,(t)=10\,e^{3-t}-10$$

以上から、出力：$\mathrm{y}\,(t)$ は、

$$\mathrm{y}\,(t)=\left(10\,e^{3-t}-10\right)\,u_3\,(t)-10\,e^{-t}+10$$

または、

$$\mathrm{y}\,(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 10-10\,e^{-t} & 0\geq t\geq 3\\ 10\,e^{3-t}-10\,e^{-t} & t>3\end{cases}$$

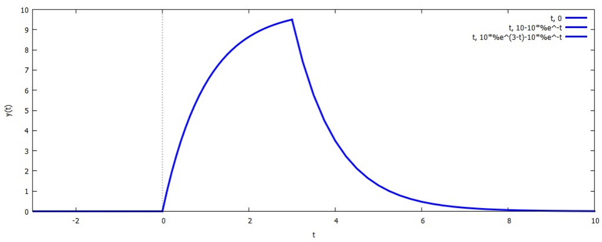


図 8.1.5: インパルス応答の例

8.1.10 周期関数

```
kill(all);
declare(n,integer);
assume(s>0);
assume(n>0);
assume(p>0);
Y1:y(t+p)=y(t);
Y2:y(t+n*p)=y(t);
Y(s)='integrate(%e^(-s*t)*y(t),t,0,inf);
DI1:'integrate(%e^(-s*t)*y(t),t,n*p,(n+1)
 *p);
Y(s)=sum(DI1,n,0,inf);
T1:t=\tau+n*p;
T2:%-rhs(%);
changevar(DI1,lhs(T2),\tau,t);
%e^(-n*p*s)*'integrate(%e^(-s*tau)*y(tau
 +n*p),tau,0,p);
subst([\tau=t],%);
DI2:subst([Y2],%);
LU2:Y(s)=sum(DI2,n,0,inf);
LU2, simpsum;
```

関数：$\mathrm{y}(t)$ が p の周期関数であるとすると、下記のように表示できる。

$$\mathrm{y}(t+n\,p)=\mathrm{y}(t) \qquad \text{ここで、n：整数}$$

p の周期関数：$\mathrm{y}(t)$ のラプラス変換結果：$\mathrm{Y}(s)$ は定義から、

$$\mathrm{Y}(s)=\int_0^{\infty} e^{-s\,t}\,\mathrm{y}(t)\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{n\,p}^{(n+1)\,p} e^{-s\,t}\,\mathrm{y}(t)\,dt$$

積分の部分を $t=\tau+n\,p$ の変数変換を行って、

$$\begin{aligned}\mathrm{Y}(s)&=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^p e^{-s\,\tau-n\,p\,s}\,\mathrm{y}(\tau+n\,p)\,d\tau\\&=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-n\,p\,s}\int_0^p e^{-s\,\tau}\,\mathrm{y}(\tau+n\,p)\,d\tau\end{aligned}$$

$\tau\to t$ の置き換えを行い、$\mathrm{y}(t+n\,p)=\mathrm{y}(t)$ であるから下記となり、無限級数和を簡素化すると、

$$\begin{aligned}\mathrm{Y}(s)&=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-n\,p\,s}\int_0^p e^{-s\,t}\,\mathrm{y}(t+n\,p)\,dt\\&=\left(\sum_{n=0}^{\infty}e^{-n\,p\,s}\right)\int_0^p e^{-s\,t}\,\mathrm{y}(t)\,dt\\&=\frac{1}{1-e^{-p\,s}}\int_0^p e^{-s\,t}\,\mathrm{y}(t)\,dt\end{aligned}\tag{8.1.28}$$

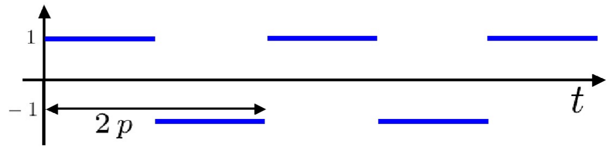


図 8.1.6: 周期：2p の方形波

```
Y(s)=1/(1-%e^(-2*p*s))*('integrate(%e^
 (-s*t),t,0,p)+'integrate(-%e^(-s*t),t,
 p,2*p));
ev(%,integrate);
factor(%);
```

周期:2p の方形波のラプラス変換結果:$\mathrm{Y}(s)$ を (8.1.28) 式から求めると、

$$\begin{aligned}\mathrm{Y}(s)&=\frac{\int_0^p e^{-s\,t}dt-\int_p^{2\,p}e^{-s\,t}dt}{1-e^{-2\,p\,s}}\\&=\frac{-\frac{2\,e^{-p\,s}}{s}+\frac{e^{-2\,p\,s}}{s}+\frac{1}{s}}{1-e^{-2\,p\,s}}\\&=\frac{e^{p\,s}-1}{s\,(e^{p\,s}+1)}\end{aligned}$$

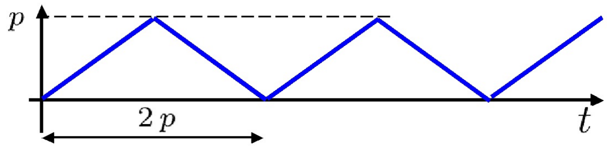


図 8.1.7: 周期：2p の三角波

```
Y(s)=1/(1-%e^(-2*p*s))*('integrate(%e^
 (-s*t)*t,t,0,p)+'integrate(%e^(-s*t)*
 (-t+2*p),t,p,2*p));
ev(%,integrate);
factor(%);
```

周期:2p の三角波のラプラス変換結果:$\mathrm{Y}(s)$ を (8.1.28) 式から求めると、

$$\begin{aligned}\mathrm{Y}(s)&=\frac{\int_0^p t\,e^{-s\,t}dt+\int_p^{2\,p}(2\,p-t)\,e^{-s\,t}dt}{1-e^{-2\,p\,s}}\\&=\frac{-\frac{(p\,s+1)\,e^{-p\,s}}{s^2}+\frac{(p\,s-1)\,e^{-p\,s}}{s^2}+\frac{e^{-2\,p\,s}}{s^2}+\frac{1}{s^2}}{1-e^{-2\,p\,s}}\\&=\frac{e^{p\,s}-1}{s^2\,(e^{p\,s}+1)}\end{aligned}$$

8.1.11　変換結果の微分

```
kill(all);
assume(s>0);
LF1:laplace(f(t),t,s)=F(s);
LF2:F(s)='integrate(%e^(-s*t)*f(t),t,0,
 inf);
'diff(lhs(%),s,1)='diff(rhs(%),s,1);
ev(%,diff);
F1:g(t)=-t*f(t);
G(s)=laplace(rhs(F1),t,s);
subst([LF1],%);
'diff(lhs(LF2),s,2)='diff(rhs(LF2),s,2);
ev(%,diff);
F2:g(t)=(-t)^2*f(t);
G(s)=laplace(rhs(F2),t,s);
subst([LF1],%);
```

関数：$\mathrm{f}(t)$ のラプラス変換結果：$\mathrm{F}(s)$ とすると、定義から、

$$\mathrm{F}(s)=\int_0^\infty e^{-s\,t}\,\mathrm{f}(t)\,dt$$

上式を s で微分すると、

$$\frac{d}{d\,s}\,\mathrm{F}(s)=\frac{d}{d\,s}\int_0^\infty e^{-s\,t}\,\mathrm{f}(t)\,dt=-\int_0^\infty t\,e^{-s\,t}\,\mathrm{f}(t)\,dt$$

上式から、$-t\,\mathrm{f}(t)$ のラプラス変換結果が、$\mathrm{f}(t)$ のラプラス変換結果：$\mathrm{F}(s)$ の微分結果となっている。また、次式と置き、

$$\mathrm{g}(t)=-t\,\mathrm{f}(t)$$

上式のラプラス変換結果を Maxima の laplace 関数を用いて求めると、下記となり、上記の結果が成り立っている。

$$\mathrm{G}(s)=\mathcal{L}\left[-t\,\mathrm{f}(t)\right]=\frac{d}{d\,s}\,\mathrm{laplace}\left(\mathrm{f}(t),t,s\right)=\frac{d}{d\,s}\,\mathrm{F}(s) \tag{8.1.29}$$

同様にして、二階微分については、下記となる。

$$\frac{d^2}{d\,s^2}\,\mathrm{F}(s)=\frac{d^2}{d\,s^2}\int_0^\infty e^{-s\,t}\,\mathrm{f}(t)\,dt=\int_0^\infty t^2\,e^{-s\,t}\,\mathrm{f}(t)\,dt$$

また、次式と置き、

$$\mathrm{g}(t)=-t^2\,\mathrm{f}(t)$$

上式のラプラス変換結果を Maxima の laplace 関数を用いて求めると、下記となり、上記の結果が成り立っている。

$$\mathrm{G}(s)=\mathcal{L}\left[-t^2\,\mathrm{f}(t)\right]=\frac{d^2}{d\,s^2}\,\mathrm{F}(s) \tag{8.1.30}$$

8.1.12　変換結果の積分

```
kill(all);
assume(s>0);
assume(t>0);
LF1:laplace(f(t),t,s)=F(s);
DLF2:%e^(-s*t)*f(t);
LF2:F(s)='integrate(DLF2,t,0,inf);
G(s)='integrate(lhs(LF2),s,s,inf);
lhs(%)=subst([LF2],rhs(%));
lhs(%)='integrate('integrate(DLF2,s,s,
 inf),t,0,inf);
ev(%,integrate);
F1:g(t)=f(t)/t;
G(s)=laplace(f(t)/t,t,s);
```

関数：$\mathrm{f}(t)$ のラプラス変換結果：$\mathrm{F}(s)$ とすると、定義から、

$$\mathrm{F}(s)=\int_0^\infty e^{-s\,t}\,\mathrm{f}(t)\,dt$$

上式を $s\to\infty$ の範囲で積分すると、

$$\begin{aligned}\mathrm{G}(s)&=\int_s^\infty \mathrm{F}(s)\,ds=\int_s^\infty\int_0^\infty e^{-s\,t}\,\mathrm{f}(t)\,dtds\\&=\int_0^\infty \mathrm{f}(t)\int_s^\infty e^{-s\,t}dsdt=\int_0^\infty\frac{e^{-s\,t}\,\mathrm{f}(t)}{t}dt\end{aligned} \tag{8.1.31}$$

上式から、$\frac{\mathrm{f}(t)}{t}$ のラプラス変換結果が、$\mathrm{f}(t)$ のラプラス変換結果：$\mathrm{F}(s)$ の $s\to\infty$ の範囲の積分結果となっている。

$$\mathcal{L}\left[\frac{\mathrm{f}(t)}{t}\right]=\int_s^\infty \mathrm{F}(s)\,ds \tag{8.1.32}$$

8.2　微分方程式

8.2.1　一階微分方程式

一階微分方程式の「3.2.1 変数分離形」の例題をラプラス変換を用いて解く。

```
kill(all);
assume(x>0);
assume(s>0);
LY1:laplace(y(x),x,s)=Y(s);
DY1:diff(y(x),x,1)+y(x)=%e^x;
laplace(lhs(DY1),x,s)=laplace(rhs(DY1),
 x,s);
subst([LY1],%);
solve(%,Y(s))[1];
y(x)=ilt(rhs(%),s,x);
ode2(DY1,y(x),x);
```

次式の一階微分方程式をラプラス変換を使って解く。

$$\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{y}\left(x\right)+\mathrm{y}\left(x\right)=e^{x}$$

両辺を laplace 関数を使って、ラプラス変換すると、

$$s\,\mathrm{Y}\left(s\right)+\mathrm{Y}\left(s\right)-\mathrm{y}\left(0\right)=\frac{1}{s-1}$$

$\mathrm{Y}\left(s\right)$ を求めると、

$$\mathrm{Y}\left(s\right)=\frac{\mathrm{y}\left(0\right)\,s-\mathrm{y}\left(0\right)+1}{s^{2}-1}$$

上式のラプラス逆変換を ilt 関数を使って $\mathrm{y}\left(t\right)$ を求めると、

$$\mathrm{y}\left(x\right)=\frac{e^{x}}{2}+\frac{\left(2\,\mathrm{y}\left(0\right)-1\right)\,e^{-x}}{2}$$

上記の一階微分方程式を ode2 関数を使って求めると、下記となり、ラプラス変換から求めた結果と一致している。

$$\mathrm{y}\left(x\right)=e^{-x}\,\left(\frac{e^{2\,x}}{2}+\%c\right)$$

```
kill(all);
assume(x>0);
assume(s>0);
LY1:laplace(y(x),x,s)=Y(s);
DY1:diff(y(x),x,1)=x-y(x);
laplace(lhs(DY1),x,s)=laplace(rhs(DY1),
 x,s);
subst([LY1],%);
solve(%,Y(s))[1];
y(x)=ilt(rhs(%),s,x);
ode2(DY1,y(x),x);
```

次式の一階微分方程式をラプラス変換を使って解く。

$$\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{y}\left(x\right)=x-\mathrm{y}\left(x\right)$$

両辺を laplace 関数を使って、ラプラス変換すると、

$$s\,\mathrm{Y}\left(s\right)-\mathrm{y}\left(0\right)=\frac{1}{s^{2}}-\mathrm{Y}\left(s\right)$$

$\mathrm{Y}\left(s\right)$ を求めると、

$$\mathrm{Y}\left(s\right)=\frac{\mathrm{y}\left(0\right)\,s^{2}+1}{s^{3}+s^{2}}$$

上式のラプラス逆変換を ilt 関数を使って $\mathrm{y}\left(t\right)$ を求めると、

$$\mathrm{y}\left(x\right)=\left(\mathrm{y}\left(0\right)+1\right)\,e^{-x}+x-1$$

上記の一階微分方程式を ode2 関数を使って求めると、下記となり、ラプラス変換から求めた結果と一致している。

$$\mathrm{y}\left(x\right)=e^{-x}\,\left(\left(x-1\right)\,e^{x}+\%c\right)$$

8.2.2 二階微分方程式

二階微分方程式の「3.3.1 定数係数線形微分方程式」の例題をラプラス変換を用いて解く。

```
kill(all);
assume(t>0);
assume(s>0);
LF1:laplace(f(t),t,s)=F(s);
DF1:diff(f(t),t,2)-diff(f(t),t,1)-6*f(t)=
 3*t^2-5*t+6;
laplace(lhs(DF1),t,s)=laplace(rhs(DF1),
 t,s);
subst([LF1],%);
subst([at('diff(f(t),t,1),t=0)=0,f(0)=0],
 %);
solve(%,F(s))[1];
f(t)=ilt(rhs(%),s,t);
atvalue(f(t),t=0,0);
atvalue(diff(f(t),t,1),t=0,0);
desolve([DF1],[f(t)]);
```

次式の二階微分方程式をラプラス変換を使って解く。境界条件として、$t=0$ で $\mathrm{f}(t)=0,\ \frac{d}{d\,t}\mathrm{f}(t)=0$ とする。

$$\frac{d^2}{d\,t^2}\mathrm{f}(t)-\frac{d}{d\,t}\mathrm{f}(t)-6\,\mathrm{f}(t)=3\,t^2-5\,t+6$$

両辺を laplace 関数を使って、ラプラス変換し、境界条件を代入し、$\mathcal{L}[\mathrm{f}(t)]=\mathrm{F}(s)$ とすると、

$$s^2\,\mathrm{F}(s)-s\,\mathrm{F}(s)-6\,\mathrm{F}(s)=\frac{6}{s}-\frac{5}{s^2}+\frac{6}{s^3}$$

$\mathrm{F}(s)$ を求めると、

$$\mathrm{F}(s)=\frac{6\,s^2-5\,s+6}{s^5-s^4-6\,s^3}$$

上式のラプラス逆変換を ilt 関数を使って $\mathrm{f}(t)$ を求めると、

$$\mathrm{f}(t)=\frac{e^{3\,t}}{3}+e^{-2\,t}-\frac{t^2}{2}+t-\frac{4}{3}$$

上記の二階微分方程式を desolve 関数を使って求めると、下記となり、ラプラス変換から求めた結果と一致している。

$$\mathrm{f}(t)=\frac{e^{3\,t}}{3}+e^{-2\,t}-\frac{t^2}{2}+t-\frac{4}{3}$$

```
kill(all);
assume(t>0);
assume(s>0);
LF1:laplace(f(t),t,s)=F(s);
DF1:diff(f(t),t,2)-2*diff(f(t),t,1)-8*f(t)
 =%e^(2*t);
laplace(lhs(DF1),t,s)=laplace(rhs(DF1),
 t,s);
subst([LF1],%);
subst([at('diff(f(t),t,1),t=0)=0,f(0)=0],
 %);
solve(%,F(s))[1];
f(t)=ilt(rhs(%),s,t);
atvalue(f(t),t=0,0);
atvalue(diff(f(t),t,1),t=0,0);
desolve([DF1],[f(t)]);
```

次式の二階微分方程式をラプラス変換を使って解く。境界条件として、$t=0$ で $\mathrm{f}(t)=0,\ \frac{d}{d\,t}\mathrm{f}(t)=0$ とする。

$$\frac{d^2}{d\,t^2}\mathrm{f}(t)-2\left(\frac{d}{d\,t}\mathrm{f}(t)\right)-8\,\mathrm{f}(t)=e^{2\,t}$$

両辺を laplace 関数を使って、ラプラス変換し、境界条件を代入し、$\mathcal{L}[\mathrm{f}(t)]=\mathrm{F}(s)$ とすると、

$$s^2\,\mathrm{F}(s)-2\,s\,\mathrm{F}(s)-8\,\mathrm{F}(s)=\frac{1}{s-2}$$

$\mathrm{F}(s)$ を求めると、

$$\mathrm{F}(s)=\frac{1}{s^3-4\,s^2-4\,s+16}$$

上式のラプラス逆変換を ilt 関数を使って $\mathrm{f}(t)$ を求めると、

$$\mathrm{f}(t)=\frac{e^{4\,t}}{12}-\frac{e^{2\,t}}{8}+\frac{e^{-2\,t}}{24}$$

上記の二階微分方程式を desolve 関数を使って求めると、下記となり、ラプラス変換から求めた結果と一致している。

$$\mathrm{f}(t)=\frac{e^{4\,t}}{12}-\frac{e^{2\,t}}{8}+\frac{e^{-2\,t}}{24}$$

```
kill(all);
assume(t>0);
assume(s>0);
LF1:laplace(f(t),t,s)=F(s);
DF1:diff(f(t),t,2)-2*diff(f(t),t,1)+f(t)
 =(t^2+1)*%e^(3*t);
laplace(lhs(DF1),t,s)=laplace(rhs(DF1),
 t,s);
subst([LF1],%);
subst([at('diff(f(t),t,1),t=0)=0,f(0)=0],
 %);
solve(%,F(s))[1];
f(t)=ilt(rhs(%),s,t);
atvalue(f(t),t=0,0);
atvalue(diff(f(t),t,1),t=0,0);
desolve([DF1],[f(t)]);
```

次式の二階微分方程式をラプラス変換を使って解く。境界条件として、$t=0$ で $\mathrm{f}(t)=0,\ \frac{d}{d\,t}\mathrm{f}(t)=0$ とする。

$$\frac{d^2}{d\,t^2}\mathrm{f}(t)-2\left(\frac{d}{d\,t}\mathrm{f}(t)\right)+\mathrm{f}(t)=\left(t^2+1\right)e^{3\,t}$$

両辺を laplace 関数を使って、ラプラス変換し、境界条件を代入し、$\mathcal{L}[\mathrm{f}(t)]=\mathrm{F}(s)$ とすると、

$$s^2\,\mathrm{F}(s)-2\,s\,\mathrm{F}(s)+\mathrm{F}(s)=\frac{1}{s-3}+\frac{2}{(s-3)^3}$$

$\mathrm{F}(s)$ を求めると、

$$\mathrm{F}(s)=\frac{s^2-6\,s+11}{s^5-11\,s^4+46\,s^3-90\,s^2+81\,s-27}$$

上式のラプラス逆変換を ilt 関数を使って $\mathrm{f}(t)$ を求めると、

$$\mathrm{f}(t)=\frac{t^2\,e^{3\,t}}{4}-\frac{t\,e^{3\,t}}{2}+\frac{5\,e^{3\,t}}{8}-\frac{3\,t\,e^{t}}{4}-\frac{5\,e^{t}}{8}$$

上記の二階微分方程式を desolve 関数を使って求めると、下記となり、ラプラス変換から求めた結果と一致している。

$$\mathrm{f}(t)=\frac{t^2\,e^{3\,t}}{4}-\frac{t\,e^{3\,t}}{2}+\frac{5\,e^{3\,t}}{8}-\frac{3\,t\,e^{t}}{4}-\frac{5\,e^{t}}{8}$$

```
kill(all);
assume(t>0);
assume(s>0);
LF1:laplace(f(t),t,s)=F(s);
DF1:diff(f(t),t,2)-4*diff(f(t),t,1)+3*f(t)
 =%e^(t)*cos(2*t);
laplace(lhs(DF1),t,s)=laplace(rhs(DF1),
 t,s);
subst([LF1],%);
subst([at('diff(f(t),t,1),t=0)=0,f(0)=0],
 %);
solve(%,F(s))[1];
f(t)=ilt(rhs(%),s,t);
atvalue(f(t),t=0,0);
atvalue(diff(f(t),t,1),t=0,0);
desolve([DF1],[f(t)]);
```

次式の二階微分方程式をラプラス変換を使って解く。境界条件として、$t=0$ で $\mathrm{f}(t)=0,\ \frac{d}{d\,t}\mathrm{f}(t)=0$ とする。

$$\frac{d^2}{d\,t^2}\mathrm{f}(t)-4\left(\frac{d}{d\,t}\mathrm{f}(t)\right)+3\,\mathrm{f}(t)=e^{t}\cos(2\,t)$$

両辺を laplace 関数を使って、ラプラス変換し、境界条件を代入し、$\mathcal{L}[\mathrm{f}(t)]=\mathrm{F}(s)$ とすると、

$$s^2\,\mathrm{F}(s)-4\,s\,\mathrm{F}(s)+3\,\mathrm{F}(s)=\frac{s-1}{s^2-2\,s+5}$$

$\mathrm{F}(s)$ を求めると、

$$\mathrm{F}(s)=\frac{1}{s^3-5\,s^2+11\,s-15}$$

上式のラプラス逆変換を ilt 関数を使って $\mathrm{f}(t)$ を求めると、

$$\mathrm{f}(t)=e^{t}\left(-\frac{\sin(2\,t)}{8}-\frac{\cos(2\,t)}{8}\right)+\frac{e^{3\,t}}{8}$$

上記の二階微分方程式を desolve 関数を使って求めると、下記となり、ラプラス変換から求めた結果と一致している。

$$\mathrm{f}(t)=e^{t}\left(-\frac{\sin(2\,t)}{8}-\frac{\cos(2\,t)}{8}\right)+\frac{e^{3\,t}}{8}$$

```
kill(all);
assume(t>0);
assume(s>0);
LF1:laplace(f(t),t,s)=F(s);
DF1:diff(f(t),t,2)+f(t)=cos(t);
laplace(lhs(DF1),t,s)=laplace(rhs(DF1),
 t,s);
subst([LF1],%);
subst([at('diff(f(t),t,1),t=0)=0,f(0)=0],
 %);
solve(%,F(s))[1];
f(t)=ilt(rhs(%),s,t);
atvalue(f(t),t=0,0);
atvalue(diff(f(t),t,1),t=0,0);
desolve([DF1],[f(t)]);
```

次式の二階微分方程式をラプラス変換を使って解く。境界条件として、$t=0$ で $\mathrm{f}(t)=0,\ \frac{d}{d\,t}\mathrm{f}(t)=0$ とする。

$$\frac{d^2}{d\,t^2}\,\mathrm{f}(t)+\mathrm{f}(t)=\cos(t)$$

両辺を laplace 関数を使って、ラプラス変換し、境界条件を代入し、$\mathcal{L}[\mathrm{f}(t)]=\mathrm{F}(s)$ とすると、

$$s^2\,\mathrm{F}(s)+\mathrm{F}(s)=\frac{s}{s^2+1}$$

$\mathrm{F}(s)$ を求めると、

$$\mathrm{F}(s)=\frac{s}{s^4+2\,s^2+1}$$

上式のラプラス逆変換を ilt 関数を使って $\mathrm{f}(t)$ を求めると、

$$\mathrm{f}(t)=\frac{t\sin(t)}{2}$$

上記の二階微分方程式を desolve 関数を使って求めると、下記となり、ラプラス変換から求めた結果と一致している。

$$\mathrm{f}(t)=\frac{t\sin(t)}{2}$$

```
kill(all);
assume(t>0);
assume(s>0);
LF1:laplace(f(t),t,s)=F(s);
DF1:diff(f(t),t,2)+4*f(t)=t*sin(t);
laplace(lhs(DF1),t,s)=laplace(rhs(DF1),
 t,s);
subst([LF1],%);
subst([at('diff(f(t),t,1),t=0)=0,f(0)=0],
 %);
solve(%,F(s))[1];
f(t)=ilt(rhs(%),s,t);
atvalue(f(t),t=0,0);
atvalue(diff(f(t),t,1),t=0,0);
desolve([DF1],[f(t)]);
```

次式の二階微分方程式をラプラス変換を使って解く。境界条件として、$t=0$ で $\mathrm{f}(t)=0,\ \frac{d}{d\,t}\mathrm{f}(t)=0$ とする。

$$\frac{d^2}{d\,t^2}\,\mathrm{f}(t)+4\,\mathrm{f}(t)=t\sin(t)$$

両辺を laplace 関数を使って、ラプラス変換し、境界条件を代入し、$\mathcal{L}[\mathrm{f}(t)]=\mathrm{F}(s)$ とすると、

$$s^2\,\mathrm{F}(s)+4\,\mathrm{F}(s)=\frac{2\,s}{\left(s^2+1\right)^2}$$

$\mathrm{F}(s)$ を求めると、

$$\mathrm{F}(s)=\frac{2\,s}{s^6+6\,s^4+9\,s^2+4}$$

上式のラプラス逆変換を ilt 関数を使って $\mathrm{f}(t)$ を求めると、

$$\mathrm{f}(t)=\frac{2\cos(2\,t)}{9}+\frac{t\sin(t)}{3}-\frac{2\cos(t)}{9}$$

上記の二階微分方程式を desolve 関数を使って求めると、下記となり、ラプラス変換から求めた結果と一致している。

$$\mathrm{f}(t)=\frac{2\cos(2\,t)}{9}+\frac{t\sin(t)}{3}-\frac{2\cos(t)}{9}$$

8.2.3 連立線形微分方程式

「3.3.7 定数係数連立線形微分方程式」の例題をラプラス変換を用いて解く。

```
kill(all);
assume(t>0);
assume(s>0);
LY1:laplace(y(t),t,s)=Y(s);
LZ1:laplace(z(t),t,s)=Z(s);
EQ1:diff(y(t),t,2)+2*diff(y(t),t,1)+3*y(t)
 +3*diff(z(t),t,2)+3*diff(z(t),t,1)
 +2*z(t)=0;
EQ2:diff(y(t),t,2)+diff(y(t),t,1)+y(t)
 +2*diff(z(t),t,2)-diff(z(t),t,1)-2*z(t)
 =8;
laplace(lhs(EQ1),t,s)=laplace(rhs(EQ1),
 t,s);
subst([at('diff(y(t),t,1),t=0)=0,y(0)=0],
 %);
subst([at('diff(z(t),t,1),t=0)=0,z(0)=0],
 %);
LEQ1:subst([LY1,LZ1],%);
laplace(lhs(EQ2),t,s)=laplace(rhs(EQ2),
 t,s);
subst([at('diff(y(t),t,1),t=0)=0,y(0)=0],
 %);
subst([at('diff(z(t),t,1),t=0)=0,z(0)=0],
 %);
LEQ2:subst([LY1,LZ1],%);
LEQ:solve([LEQ1,LEQ2],[Y(s),Z(s)])[1];
y(t)=ilt(rhs(LEQ[1]),s,t);
z(t)=ilt(rhs(LEQ[2]),s,t);
atvalue(y(t),t=0,0);
atvalue(z(t),t=0,0);
atvalue(diff(y(t),t,1),t=0,0);
atvalue(diff(z(t),t,1),t=0,0);
desolve([EQ1,EQ2],[y(t),z(t)]);
```

次式の微分方程式をラプラス変換を使って解く。境界条件として、$t=0$ で $\mathrm{y}(t)=0$, $\frac{d}{d\,t}\mathrm{y}(t)=0$,$\mathrm{z}(t)=0$, $\frac{d}{d\,t}\mathrm{z}(t)=0$ とする。

$$
\begin{aligned}
&3\left(\frac{d^2}{d\,t^2}\mathrm{z}(t)\right)+3\left(\frac{d}{d\,t}\mathrm{z}(t)\right)+\frac{d^2}{d\,t^2}\mathrm{y}(t)\\
&\quad+2\left(\frac{d}{d\,t}\mathrm{y}(t)\right)+2\,\mathrm{z}(t)+3\,\mathrm{y}(t)=0\\
&2\left(\frac{d^2}{d\,t^2}\mathrm{z}(t)\right)-\frac{d}{d\,t}\mathrm{z}(t)+\frac{d^2}{d\,t^2}\mathrm{y}(t)+\frac{d}{d\,t}\mathrm{y}(t)\\
&\quad-2\,\mathrm{z}(t)+\mathrm{y}(t)=8
\end{aligned}
$$

両辺を laplace 関数を使って、ラプラス変換し、境界条件を代入し、$\mathcal{L}[\mathrm{y}(t)]=\mathrm{Y}(s)$,$\mathcal{L}[\mathrm{z}(t)]=\mathrm{Z}(s)$ とすると、

$$
\begin{aligned}
&3\,s^2\,\mathrm{Z}(s)+3\,s\,\mathrm{Z}(s)+2\,\mathrm{Z}(s)+s^2\,\mathrm{Y}(s)+2\,s\,\mathrm{Y}(s)\\
&\quad+3\,\mathrm{Y}(s)=0\\
&2\,s^2\,\mathrm{Z}(s)-s\,\mathrm{Z}(s)-2\,\mathrm{Z}(s)+s^2\,\mathrm{Y}(s)+s\,\mathrm{Y}(s)\\
&\quad+\mathrm{Y}(s)=\frac{8}{s}
\end{aligned}
$$

$\mathrm{Y}(s)$,$\mathrm{Z}(s)$ を求めると、

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Y}(s)&=\frac{24\,s^2+24\,s+16}{s^5+3\,s^4+6\,s^3+12\,s^2+8\,s}\\
\mathrm{Z}(s)&=-\frac{8\,s^2+16\,s+24}{s^5+3\,s^4+6\,s^3+12\,s^2+8\,s}
\end{aligned}
$$

上式のラプラス逆変換を ilt 関数を使って $\mathrm{y}(t)$,$\mathrm{z}(t)$ を求めると、

$$
\begin{aligned}
\mathrm{y}(t)=&\frac{12\sin(2\,t)}{5}-\frac{14\cos(2\,t)}{5}-\frac{16\,e^{-t}}{5}\\
&+4\,e^{-2\,t}+2\\
\mathrm{z}(t)=&\frac{\sin(2\,t)}{10}+\frac{13\cos(2\,t)}{10}+\frac{16\,e^{-t}}{5}\\
&-\frac{3\,e^{-2\,t}}{2}-3
\end{aligned}
$$

上記の微分方程式を desolve 関数を使って求めると、下記となり、ラプラス変換から求めた結果と一致している。

$$
\begin{aligned}
\mathrm{y}(t)=&\frac{12\sin(2\,t)}{5}-\frac{14\cos(2\,t)}{5}-\frac{16\,e^{-t}}{5}\\
&+4\,e^{-2\,t}+2\\
\mathrm{z}(t)=&\frac{\sin(2\,t)}{10}+\frac{13\cos(2\,t)}{10}+\frac{16\,e^{-t}}{5}\\
&-\frac{3\,e^{-2\,t}}{2}-3
\end{aligned}
$$

```
kill(all);
assume(t>0);
assume(s>0);
LX1:laplace(x(t),t,s)=X(s);
LY1:laplace(y(t),t,s)=Y(s);
LZ1:laplace(z(t),t,s)=Z(s);
EQ1:diff(x(t),t,1)-6*y(t)+9*z(t)=0;
EQ2:2*x(t)+diff(y(t),t,1)-3*z(t)=0;
EQ3:x(t)-y(t)+diff(z(t),t,1)=0;
laplace(lhs(EQ1),t,s)=laplace(rhs(EQ1),
 t,s);
LEQ1:subst([LX1,LY1,LZ1],%);
laplace(lhs(EQ2),t,s)=laplace(rhs(EQ2),
 t,s);
LEQ2:subst([LX1,LY1,LZ1],%);
laplace(lhs(EQ3),t,s)=laplace(rhs(EQ3),
 t,s);
LEQ3:subst([LX1,LY1,LZ1],%);
LEQ:solve([LEQ1,LEQ2,LEQ3],[X(s),Y(s),
 Z(s)])[1];
x(t)=ilt(rhs(LEQ[1]),s,t);
y(t)=ilt(rhs(LEQ[2]),s,t);
z(t)=ilt(rhs(LEQ[3]),s,t);
desolve([EQ1,EQ2,EQ3],[x(t),y(t),z(t)]);
```

次式の微分方程式をラプラス変換を使って解く。

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{x}\,(t)+9\,\mathrm{z}\,(t)-6\,\mathrm{y}\,(t)=&0\\ \frac{d}{d\,t}\,\mathrm{y}\,(t)-3\,\mathrm{z}\,(t)+2\,\mathrm{x}\,(t)=&0\\ \frac{d}{d\,t}\,\mathrm{z}\,(t)-\mathrm{y}\,(t)+\mathrm{x}\,(t)=&0\end{aligned}$$

両辺を laplace 関数を使って、ラプラス変換し、$\mathcal{L}\,[\mathrm{x}\,(t)]=\mathrm{Z}\,(s)$,$\mathcal{L}\,[\mathrm{y}\,(t)]=\mathrm{Y}\,(s)$,$\mathcal{L}\,[\mathrm{z}\,(t)]=\mathrm{Z}\,(s)$ とすると、

$$\begin{aligned}9\,\mathrm{Z}\,(s)-6\,\mathrm{Y}\,(s)+s\,\mathrm{X}\,(s)-\mathrm{x}\,(0)=&0\\ -3\,\mathrm{Z}\,(s)+s\,\mathrm{Y}\,(s)+2\,\mathrm{X}\,(s)-\mathrm{y}\,(0)=&0\\ s\,\mathrm{Z}\,(s)-\mathrm{Y}\,(s)+\mathrm{X}\,(s)-\mathrm{z}\,(0)=&0\end{aligned}$$

$\mathrm{X}\,(s)$,$\mathrm{Y}\,(s)$,$\mathrm{Z}\,(s)$ を求めると、

$$\begin{aligned}\mathrm{X}\,(s)=&\frac{\mathrm{x}\,(0)\;s^2+(6\,\mathrm{y}\,(0)-9\,\mathrm{z}\,(0))\;s+18\,\mathrm{z}\,(0)-9\,\mathrm{y}\,(0)-3\,\mathrm{x}\,(0)}{s^3}\\ \mathrm{Y}\,(s)=&\frac{\mathrm{y}\,(0)\;s^2+(3\,\mathrm{z}\,(0)-2\,\mathrm{x}\,(0))\;s+18\,\mathrm{z}\,(0)-9\,\mathrm{y}\,(0)-3\,\mathrm{x}\,(0)}{s^3}\\ \mathrm{Z}\,(s)=&\frac{\mathrm{z}\,(0)\;s^2+(\mathrm{y}\,(0)-\mathrm{x}\,(0))\;s+12\,\mathrm{z}\,(0)-6\,\mathrm{y}\,(0)-2\,\mathrm{x}\,(0)}{s^3}\end{aligned}$$

上式のラプラス逆変換を ilt 関数を使って $\mathrm{x}\,(t)$,$\mathrm{y}\,(t)$,$\mathrm{z}\,(t)$ を求めると、

$$\begin{aligned}\mathrm{x}\,(t)=&9\,\mathrm{z}\,(0)\;t^2-\frac{9\,\mathrm{y}\,(0)\;t^2}{2}-\frac{3\,\mathrm{x}\,(0)\;t^2}{2}-9\,\mathrm{z}\,(0)\;t\\ &+6\,\mathrm{y}\,(0)\;t+\mathrm{x}\,(0)\\ \mathrm{y}\,(t)=&9\,\mathrm{z}\,(0)\;t^2-\frac{9\,\mathrm{y}\,(0)\;t^2}{2}-\frac{3\,\mathrm{x}\,(0)\;t^2}{2}+3\,\mathrm{z}\,(0)\;t\\ &-2\,\mathrm{x}\,(0)\;t+\mathrm{y}\,(0)\\ \mathrm{z}\,(t)=&6\,\mathrm{z}\,(0)\;t^2-3\,\mathrm{y}\,(0)\;t^2-\mathrm{x}\,(0)\;t^2+\mathrm{y}\,(0)\;t\\ &-\mathrm{x}\,(0)\;t+\mathrm{z}\,(0)\end{aligned}$$

上記の微分方程式を desolve 関数を使って求めると、下記となり、ラプラス変換から求めた結果と一致している。

$$\begin{aligned}\mathrm{x}\,(t)=&9\,\mathrm{z}\,(0)\;t^2-\frac{9\,\mathrm{y}\,(0)\;t^2}{2}-\frac{3\,\mathrm{x}\,(0)\;t^2}{2}-9\,\mathrm{z}\,(0)\;t\\ &+6\,\mathrm{y}\,(0)\;t+\mathrm{x}\,(0)\\ \mathrm{y}\,(t)=&9\,\mathrm{z}\,(0)\;t^2-\frac{9\,\mathrm{y}\,(0)\;t^2}{2}-\frac{3\,\mathrm{x}\,(0)\;t^2}{2}+3\,\mathrm{z}\,(0)\;t\\ &-2\,\mathrm{x}\,(0)\;t+\mathrm{y}\,(0)\\ \mathrm{z}\,(t)=&6\,\mathrm{z}\,(0)\;t^2-3\,\mathrm{y}\,(0)\;t^2-\mathrm{x}\,(0)\;t^2+\mathrm{y}\,(0)\;t\\ &-\mathrm{x}\,(0)\;t+\mathrm{z}\,(0)\end{aligned}$$

```
kill(all);
assume(t>0);
assume(s>0);
LY1:laplace(y(t),t,s)=Y(s);
LZ1:laplace(z(t),t,s)=Z(s);
EQ1:diff(y(t),t,2)+y(t)+diff(z(t),t,2)
 +diff(z(t),t,1)+z(t)=t;
EQ2:diff(y(t),t,1)+diff(z(t),t,1)+z(t)
 =%e^t;
laplace(lhs(EQ1),t,s)=laplace(rhs(EQ1),
 t,s);
subst([at('diff(y(t),t,1),t=0)=0,y(0)=0],
 %);
subst([at('diff(z(t),t,1),t=0)=0,z(0)=0],
 %);
LEQ1:subst([LY1,LZ1],%);
laplace(lhs(EQ2),t,s)=laplace(rhs(EQ2),
 t,s);
subst([at('diff(y(t),t,1),t=0)=0,y(0)=0],
 %);
subst([at('diff(z(t),t,1),t=0)=0,z(0)=0],
 %);
LEQ2:subst([LY1,LZ1],%);
LEQ:solve([LEQ1,LEQ2],[Y(s),Z(s)])[1];
partfrac(rhs(LEQ[1]),s);
y(t)=ilt(%,s,t);
partfrac(rhs(LEQ[2]),s);
z(t)=ilt(%,s,t);
atvalue(y(t),t=0,0);
atvalue(z(t),t=0,0);
atvalue(diff(y(t),t,1),t=0,0);
atvalue(diff(z(t),t,1),t=0,0);
desolve([EQ1,EQ2],[y(t),z(t)]);
```

次式の微分方程式をラプラス変換を使って解く。境界条件として、$t=0$ で $\mathrm{y}(t)=0$, $\frac{d}{dt}\mathrm{y}(t)=0$,$\mathrm{z}(t)=0$, $\frac{d}{dt}\mathrm{z}(t)=0$ とする。

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2}\mathrm{z}(t)+\frac{d}{dt}\mathrm{z}(t)+\frac{d^2}{dt^2}\mathrm{y}(t)+\mathrm{z}(t)+\mathrm{y}(t)=&t\\ \frac{d}{dt}\mathrm{z}(t)+\frac{d}{dt}\mathrm{y}(t)+\mathrm{z}(t)=&e^t\end{aligned}$$

両辺を laplace 関数を使って、ラプラス変換し、境界条件を代入し、$\mathcal{L}[\mathrm{y}(t)]=\mathrm{Y}(s)$,$\mathcal{L}[\mathrm{z}(t)]=\mathrm{Z}(s)$ とすると、

$$\begin{aligned}s^2\,\mathrm{Z}(s)+s\,\mathrm{Z}(s)+\mathrm{Z}(s)+s^2\,\mathrm{Y}(s)+\mathrm{Y}(s)=&\frac{1}{s^2}\\ s\,\mathrm{Z}(s)+\mathrm{Z}(s)+s\,\mathrm{Y}(s)=&\frac{1}{s-1}\end{aligned}$$

$\mathrm{Y}(s)$,$\mathrm{Z}(s)$ を求め、partfrac 関数を使って部分分数分解をすると、

$$\begin{aligned}\mathrm{Y}(s)=&-\frac{s^4+s^3+1}{s^3-s^2}\\ =&-s+\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2}-\frac{3}{s-1}-2\\ \mathrm{Z}(s)=&\frac{s^3+1}{s^2-s}\\ =&s-\frac{1}{s}+\frac{2}{s-1}+1\end{aligned}$$

上式のラプラス逆変換を ilt 関数を使って $\mathrm{y}(t)$,$\mathrm{z}(t)$ を求めると下記となる。ilt 関数の形が一部残っている。

$$\begin{aligned}\mathrm{y}(t)=&-3\,e^t+t+\mathrm{ilt}(-s,s,t)+\mathrm{ilt}(-2,s,t)+1\\ \mathrm{z}(t)=&2\,e^t+\mathrm{ilt}(s,s,t)+\mathrm{ilt}(1,s,t)-1\end{aligned}$$

上記の微分方程式を desolve 関数を使って求めると下記のように解けなかった。

$$\begin{aligned}\mathrm{y}(t)=&\mathrm{ilt}\left(-\frac{g34496^4+g34496^3+1}{g34496^3-g34496^2},g34496,t\right)\\ \mathrm{z}(t)=&\mathrm{ilt}\left(\frac{g34496^3+1}{g34496^2-g34496},g34496,t\right)\end{aligned}$$

```
kill(all);
assume(t>0);
assume(s>0);
LY1:laplace(y(t),t,s)=Y(s);
LZ1:laplace(z(t),t,s)=Z(s);
EQ1:diff(y(t),t,2)+diff(y(t),t,1)+y(t)
 +diff(z(t),t,2)=t;
EQ2:diff(y(t),t,1)+diff(z(t),t,1)-z(t)=
 t^2;
laplace(lhs(EQ1),t,s)=laplace(rhs(EQ1),
 t,s);
subst([at('diff(y(t),t,1),t=0)=0,y(0)=0],
 %);
subst([at('diff(z(t),t,1),t=0)=0,z(0)=0],
 %);
LEQ1:subst([LY1,LZ1],%);
laplace(lhs(EQ2),t,s)=laplace(rhs(EQ2),
 t,s);
subst([at('diff(y(t),t,1),t=0)=0,y(0)=0],
 %);
subst([at('diff(z(t),t,1),t=0)=0,z(0)=0],
 %);
LEQ2:subst([LY1,LZ1],%);
LEQ:solve([LEQ1,LEQ2],[Y(s),Z(s)])[1];
partfrac(rhs(LEQ[1]),s);
y(t)=ilt(%,s,t);
partfrac(rhs(LEQ[2]),s);
z(t)=ilt(%,s,t);
atvalue(y(t),t=0,0);
atvalue(z(t),t=0,0);
atvalue(diff(y(t),t,1),t=0,0);
atvalue(diff(z(t),t,1),t=0,0);
desolve([EQ1,EQ2],[y(t),z(t)]);
```

次式の微分方程式をラプラス変換を使って解く。境界条件として、$t=0$ で $\mathrm{y}(t)=0$, $\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{y}(t)=0$,$\mathrm{z}(t)=0$, $\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{z}(t)=0$ とする。

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{d\,t^2}\,\mathrm{z}(t)+\frac{d^2}{d\,t^2}\,\mathrm{y}(t)+\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{y}(t)+\mathrm{y}(t)=&t\\ \frac{d}{d\,t}\,\mathrm{z}(t)+\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{y}(t)-\mathrm{z}(t)=&t^2\end{aligned}$$

両辺を laplace 関数を使って、ラプラス変換し、境界条件を代入し、$\mathcal{L}\left[\mathrm{y}(t)\right]=\mathrm{Y}(s)$,$\mathcal{L}\left[\mathrm{z}(t)\right]=\mathrm{Z}(s)$ とすると、

$$\begin{aligned}s^2\,\mathrm{Z}(s)+s^2\,\mathrm{Y}(s)+s\,\mathrm{Y}(s)+\mathrm{Y}(s)=&\frac{1}{s^2}\\ s\,\mathrm{Z}(s)-\mathrm{Z}(s)+s\,\mathrm{Y}(s)=&\frac{2}{s^3}\end{aligned}$$

$\mathrm{Y}(s)$,$\mathrm{Z}(s)$ を求め、部分分数分解すると、

$$\begin{aligned}\mathrm{Y}(s)=&\frac{s+1}{s^2}\\ =&\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2}\\ \mathrm{Z}(s)=&-\frac{s^2+2\,s+2}{s^3}\\ =&-\frac{1}{s}-\frac{2}{s^2}-\frac{2}{s^3}\end{aligned}$$

上式のラプラス逆変換を ilt 関数を使って $\mathrm{y}(t)$,$\mathrm{z}(t)$ を求めると、

$$\begin{aligned}\mathrm{y}(t)=&t+1\\ \mathrm{z}(t)=&-t^2-2\,t-1\end{aligned}$$

上記の微分方程式を desolve 関数を使って求めると、下記となり、ラプラス変換から求めた結果と一致している。

$$\mathrm{y}(t)=t+1,\quad \mathrm{z}(t)=-t^2-2\,t-1$$

8.3　電気回路の応答

電気回路を構成する抵抗：R、コンデンサ：C、コイル：L の電圧：$\mathrm{v}\,(t)$ と電流：$\mathrm{i}\,(t)$ の関係式は、

$$\begin{aligned}\text{抵抗：}\quad & \mathrm{v}\,(t)=\mathrm{i}\,(t)\;R\\ \text{コイル：}\quad & \mathrm{v}\,(t)=\left(\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{i}\,(t)\right)\;L\\ \text{コンデンサ：}\quad & \mathrm{i}\,(t)=\left(\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{v}\,(t)\right)\;C\end{aligned}\tag{8.3.1}$$

8.3.1　RC 回路

下図に示す RC 回路の過渡応答特性を求める。

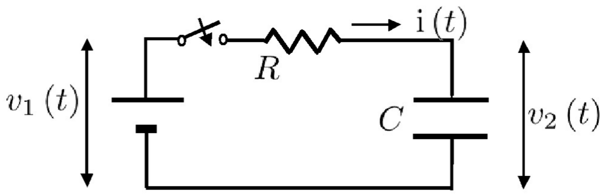


図 8.3.1: RC 回路

```
kill(all);
LV1:laplace(v[1](t),t,s)=V1(s);
LV2:laplace(v[2](t),t,s)=V2(s);
EQ1:v[1](t)-v[2](t)=R*i(t);
EQ2:i(t)=C*diff(v[2](t),t,1);
EQ5:subst([EQ2],EQ1);
laplace(lhs(EQ5),t,s)=laplace(rhs(EQ5),
 t,s);
subst([LV1,LV2],%);
subst([v[1](0)=0],%);
subst([at(v[2](0)=0],%);
solve(%,V2(s))[1];
LV21:factor(%);
subst([R=1,L=1,C=1,V1(s)=1/s],%);
v[2](t)=ilt(rhs(%),s,t);
PL1:rhs(%);
plot2d([parametric,t,PL1,[t,0,10],
 [nticks,80]],[x,-3,10],[y,0,1.5],
 [xlabel, "t"],[ylabel, "v2(t)"],
 [style,[lines,3,1]]);
```

(8.3.1) 式から上図の RC 回路の入力電圧：$v_1\,(t)$、コンデンサー両端の電圧：$v_2\,(t)$、電流：$\mathrm{i}\,(t)$ の関係式は、

$$v_1\,(t)-v_2\,(t)=\mathrm{i}\,(t)\;R\tag{8.3.2}$$

$$\mathrm{i}\,(t)=\left(\frac{d}{d\,t}\,v_2\,(t)\right)\;C\tag{8.3.3}$$

(8.3.3) 式を (8.3.2) 式に代入し、$\mathrm{i}\,(t)$ を消去すると、

$$v_1\,(t)-v_2\,(t)=\left(\frac{d}{d\,t}\,v_2\,(t)\right)\;C\,R$$

上式をラプラス変換すると、

$$\mathrm{V1}\,(s)-\mathrm{V2}\,(s)=(s\,\mathrm{V2}\,(s)-v_2\,(0))\;C\,R$$

初期条件として、$v_2\,(0)=0$ とすると、

$$\mathrm{V1}\,(s)-\mathrm{V2}\,(s)=s\,\mathrm{V2}\,(s)\;C\,R$$

上式から、$\mathrm{V2}\,(s)$ を求めると、

$$\mathrm{V2}\,(s)=\frac{\mathrm{V1}\,(s)}{s\,C\,R+1}\tag{8.3.4}$$

上式で、$R=1,\,C=1$ とし、$v_1\,(t)$ としてステップ関数とすると、$\mathrm{V1}\,(s)=1/s$ となり、

$$\mathrm{V2}\,(s)=\frac{1}{s\;(s+1)}$$

上式をラプラス逆変換すると、

$$v_2\,(t)=1-e^{-t}$$

上記の結果を図に表すと、

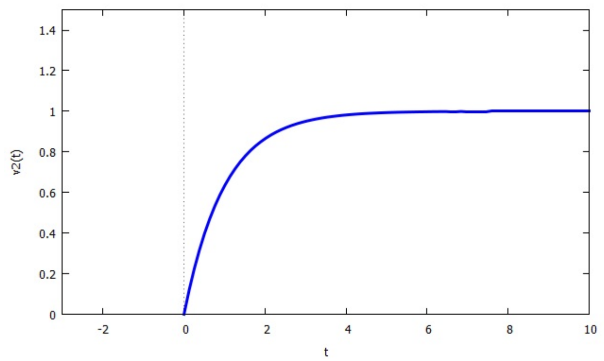


図 8.3.2: RC 回路　ステップ応答

```
V1(s)=1/s-1/s*%e^(-3*s);
subst([%],LV21);
subst([R=1,L=1,C=1],%);
LV22:expand(%);
LV23:first(rhs(LV22));
last(rhs(LV22));
LV24:factor(%);
V21:ilt(LV23,s,t);
V22:ilt(LV24/%e^(-3*s),s,t)*u[3](t);
v[2](t)=V21+V22;
PL1:V21;
```

```
PL2:subst([u[3](t)=1,t=t-3],V22);
PL3:PL1+PL2;
plot2d([[parametric,t,PL1,[t,0,3],
 [nticks,80]],
 [parametric,t,PL3,[t,3,10],[nticks,80]],
 [parametric,t,0,[t,-3,0]],
 [parametric,t,1,[t,0,3]],
 [parametric,t,0,[t,3,10]]],
 [x,-3,10],[y,0,1.5],[xlabel, "t"],
 [ylabel, "v1(t),v2(t)"],
 [style,[lines,3,1],[lines,3,1],
 [lines,3,2],[lines,3,2],[lines,3,2]]
 ,[legend, "v2(t)"," ","v1(t)"," "," "]);
```

$v_1(t)$ として下図に示す矩形波とすると、そのラプラス変換結果は (8.1.25) 式から次式とする。

$$\mathrm{V1}(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-3\,s}}{s}$$

(8.3.4) 式に上式を代入し、

$$\mathrm{V2}(s) = \frac{\frac{1}{s} - \frac{e^{-3\,s}}{s}}{s\,C\,R+1}$$

$R=1,\ C=1$ とすると、

$$\mathrm{V2}(s) = \frac{\frac{1}{s} - \frac{e^{-3\,s}}{s}}{s+1} = \frac{1}{s^2+s} - \frac{e^{-3\,s}}{s\,(s+1)}$$

上式をラプラス逆変換すると、

$$v_2(t) = \left(e^{-t}-1\right)\,u_3(t) - e^{-t} + 1$$

上記の結果を図に表すと、

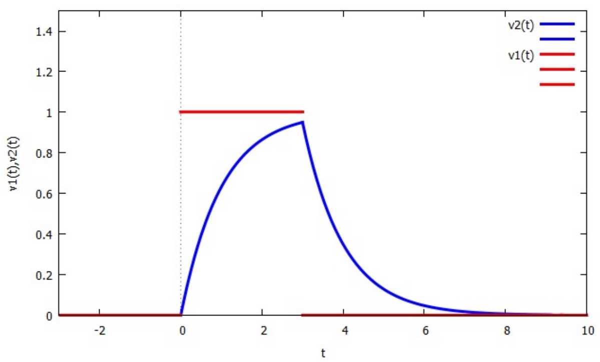


図 8.3.3: RC 回路　矩形波応答

```
V1(s)=1;
subst([%],LV21);
subst([R=1,L=1,C=1],%);
v[2](t)=ilt(rhs(%),s,t);
PL1:rhs(%);
plot2d([parametric,t,PL1,[t,0,10],
 [nticks,80]],
 [x,-3,10],[y,0,1.5],[xlabel, "t"],
 [ylabel, "v2(t)"],[style,[lines,3,1]]);
```

$v_1(t)$ としてインパルス応答とすると、そのラプラス変換結果、

$$\mathrm{V1}(s) = 1$$

(8.3.4) 式に上式を代入し、

$$\mathrm{V2}(s) = \frac{1}{s\,C\,R+1}$$

$R=1,\ C=1$ とすると、

$$\mathrm{V2}(s) = \frac{1}{s+1}$$

上式をラプラス逆変換すると、

$$v_2(t) = e^{-t}$$

上記の結果を図に表すと、

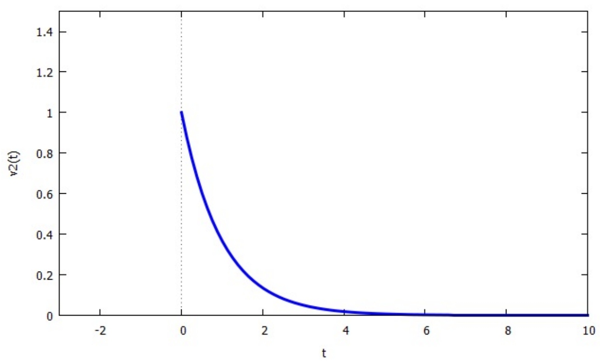


図 8.3.4: RC 回路　インパルス応答

8.3.2 RL 回路

下図に示す RL 回路の過渡応答特性を求める。

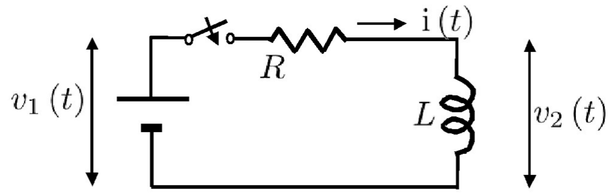


図 8.3.5: RL 回路

```
kill(all);
LV1:laplace(v[1](t),t,s)=V1(s);
LV2:laplace(v[2](t),t,s)=V2(s);
EQ1:v[1](t)-v[2](t)=R*i(t);
EQ4:v[2](t)=L*diff(i(t),t,1);
EQ11:solve(EQ1,i(t))[1];
subst([%],EQ4);
ev(%,diff);
EQ5:expand(%);
laplace(lhs(EQ5),t,s)=laplace(rhs(EQ5),
 t,s);
subst([LV1,LV2],%);
subst([v[1](0)=0],%);
subst([v[2](0)=0],%);
solve(%,V2(s))[1];
LV21:factor(%);
subst([R=1,L=1,C=1,V1(s)=1/s],%);
v[2](t)=ilt(rhs(%),s,t);
PL1:rhs(%);
plot2d([parametric,t,PL1,[t,0,10],
 [nticks,80]],[x,-3,10],[y,0,1.5],
 [xlabel, "t"],[ylabel, "v2(t)"],
 [style,[lines,3,1]]);
```

(8.3.1) 式から上図の RL 回路の入力電圧：$v_1(t)$、コイル両端の電圧：$v_2(t)$、電流：$\mathrm{i}(t)$ の関係式は、

$$v_1(t) - v_2(t) = \mathrm{i}(t)\ R \tag{8.3.5}$$

$$v_2(t) = \left(\frac{d}{d\,t}\mathrm{i}(t)\right) L \tag{8.3.6}$$

(8.3.5) 式から、$\mathrm{i}(t)$ を求め、

$$\mathrm{i}(t) = -\frac{v_2(t) - v_1(t)}{R}$$

(8.3.6) 式に代入し、展開すると、

$$\begin{aligned} v_2(t) =& L\left(\frac{d}{d\,t}\left(-\frac{v_2(t)-v_1(t)}{R}\right)\right) \\ =& \frac{\left(\frac{d}{d\,t}v_1(t)\right) L}{R} - \frac{\left(\frac{d}{d\,t}v_2(t)\right) L}{R} \end{aligned}$$

上式をラプラス変換すると、

$$\mathrm{V2}(s) = \frac{(s\,\mathrm{V1}(s) - v_1(0))\ L}{R} - \frac{(s\,\mathrm{V2}(s) - v_2(0))\ L}{R}$$

初期条件として、$v_1(0) = 0,\ v_2(0) = 0$ とすると、

$$\mathrm{V2}(s) = \frac{s\,\mathrm{V1}(s)\ L}{R} - \frac{s\,\mathrm{V2}(s)\ L}{R}$$

上式から、$\mathrm{V2}(s)$ を求めると、

$$\mathrm{V2}(s) = \frac{s\,\mathrm{V1}(s)\ L}{R + s\,L}$$

上式で、$R = 1,\ C = 1$ とし、$v_1(t)$ としてステップ関数とすると、$\mathrm{V1}(s) = 1/s$ となり、

$$\mathrm{V2}(s) = \frac{1}{s+1}$$

上式をラプラス逆変換すると、

$$v_2(t) = e^{-t}$$

上記の結果を図に表すと、

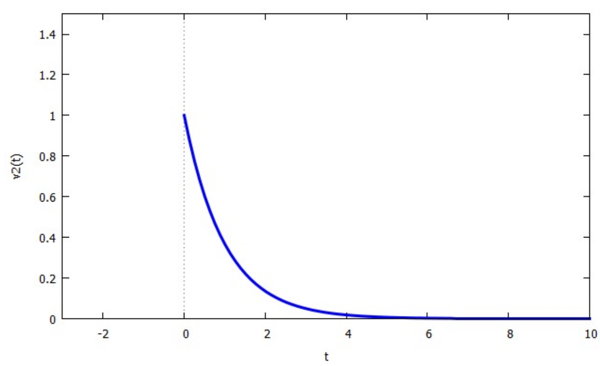


図 8.3.6: RL 回路

8.3.3　RCL 回路　例 1

下図に示す RCL 回路の過渡応答特性を求める。

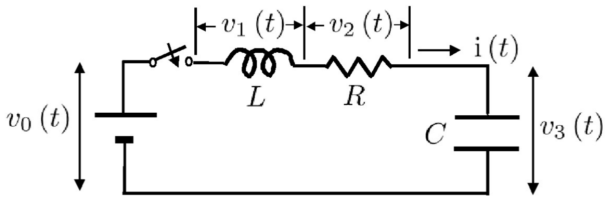


図 8.3.7: RCL 回路　例 1

```
kill(all);
LV1:laplace(v[0](t),t,s)=V0(s);
LV2:laplace(v[3](t),t,s)=V3(s);
EQ1:v[2](t)=R*i(t);
EQ2:i(t)=C*diff(v[3](t),t,1);
EQ3:v[0](t)=v[1](t)+v[2](t)+v[3](t);
EQ4:v[1](t)=L*diff(i(t),t,1);
subst([EQ1,EQ4],EQ3);
subst([EQ2],%);
ev(%,diff);
EQ5:expand(%);
laplace(lhs(EQ5),t,s)=laplace(rhs(EQ5),
 t,s);
subst([LV1,LV2],%);
subst([at('diff(v[3](t),t,1),t=0)=0,
 v[3](0)=0],%);
LV21:solve(%,V3(s))[1];
subst([R=1,L=1,C=1,V0(s)=1/s],%);
v[3](t)=ilt(rhs(%),s,t);
PL1:rhs(%);
plot2d([parametric,t,PL1,[t,0,10],
  [nticks,80]],
  [x,-3,10],[y,-0.5,1.5],[xlabel, "t"],
  [ylabel, "v3(t)"],[style,[lines,3,1]]);
```

(8.3.1) 式から上図の回路の入力電圧：$v_0(t)$、コイル両端の電圧：$v_1(t)$、抵抗両端の電圧：$v_2(t)$、コンデンサー両端の電圧：$v_3(t)$、電流：$\mathrm{i}(t)$ の関係式は、

$$v_2(t) = \mathrm{i}(t)\, R \tag{8.3.7}$$

$$\mathrm{i}(t) = \left(\frac{d}{d\,t} v_3(t)\right) C \tag{8.3.8}$$

$$v_0(t) = v_3(t) + v_2(t) + v_1(t) \tag{8.3.9}$$

$$v_1(t) = \left(\frac{d}{d\,t} \mathrm{i}(t)\right) L \tag{8.3.10}$$

(8.3.7) 式と (8.3.10) 式を (8.3.9) 式に代入すると、

$$v_0(t) = \mathrm{i}(t)\, R + \left(\frac{d}{d\,t} \mathrm{i}(t)\right) L + v_3(t)$$

(8.3.8) 式を上式に代入すると、$v_0(t)$ と $v_3(t)$ の関係式が得られ、展開すると、

$$v_0(t) = \left(\frac{d}{d\,t} v_3(t)\right) C\,R + \left(\frac{d^2}{d\,t^2} v_3(t)\right) C\,L + v_3(t)$$

上式のラプラス変換は、

$$\mathrm{V0}(s) = (s\,\mathrm{V3}(s) - v_3(0))\, C\,R + \left(- \left.\frac{d}{d\,t} v_3(t)\right|_{t=0} + s^2\,\mathrm{V3}(s) - v_3(0)\, s\right) C\,L + \mathrm{V3}(s)$$

初期条件として、$t=0$ で $\frac{d}{d\,t} v_3(t) = 0,\ v_3(t) = 0$ とすると、

$$\mathrm{V0}(s) = s\,\mathrm{V3}(s)\, C\,R + s^2\,\mathrm{V3}(s)\, C\,L + \mathrm{V3}(s)$$

上式から、$\mathrm{V3}(s)$ を求めると、

$$\mathrm{V3}(s) = \frac{\mathrm{V0}(s)}{s\,C\,R + s^2\,C\,L + 1}$$

上式で、$R=1,\ C=1,\ L=1$ とし、$v_0(t)$ としてステップ関数とすると、$\mathrm{V0}(s) = 1/s$ となり、

$$\mathrm{V3}(s) = \frac{1}{s\,(s^2+s+1)}$$

上式をラプラス逆変換すると、

$$v_3(t) = e^{-\frac{t}{2}} \left(-\frac{\sin\left(\frac{\sqrt{3}\,t}{2}\right)}{\sqrt{3}} - \cos\left(\frac{\sqrt{3}\,t}{2}\right)\right) + 1$$

上記の結果を図に表すと、

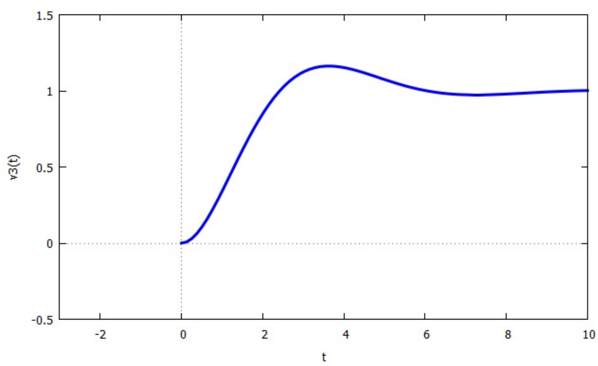


図 8.3.8: RCL 回路　例 1

8.3.4 RCL 回路 例２

下図に示す RCL 回路の過渡応答特性を求める。

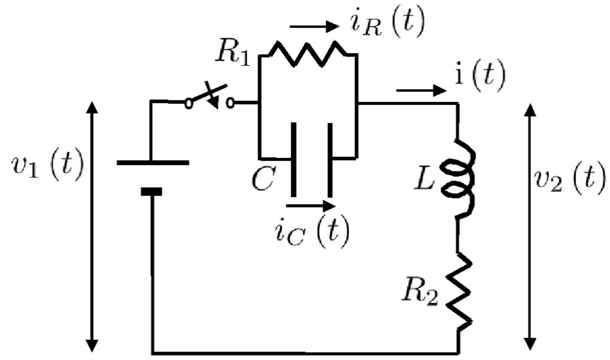


図 8.3.9: RCL 回路 例２

```
kill(all);
LV1:laplace(v[1](t),t,s)=V1(s);
LV2:laplace(v[2](t),t,s)=V2(s);
EQ1:v[1](t)-v[2](t)=R[1]*i[R](t);
EQ2:i[C](t)=C*diff(v[1](t)-v[2](t),t,1);
EQ3:i(t)=i[R](t)+i[C](t);
EQ4:v[2](t)=L*diff(i(t),t,1)+R[2]*i(t);
EQ11:solve(EQ1,i[R](t))[1];
subst([%,EQ2],EQ3);
subst([%],EQ4);
ev(%,diff);
EQ5:expand(%);
laplace(lhs(EQ5),t,s)=laplace(rhs(EQ5),
 t,s);
subst([LV1,LV2],%);
subst([at('diff(v[1](t),t,1),t=0)=0,
 v[1](0)=0],%);
subst([at('diff(v[2](t),t,1),t=0)=0,
 v[2](0)=0],%);
solve(%,V2(s))[1];
LV21:factor(%);
subst([R[1]=1,R[2]=1,L=1,C=1,V1(s)=1/s]
 ,%);
v[2](t)=ilt(rhs(%),s,t);
PL1:rhs(%);
plot2d([parametric,t,PL1,[t,0,10],
 [nticks,80]],[x,-3,10],[y,0,1.5],
 [xlabel, "t"],[ylabel, "v2(t)"],
 [style,[lines,3,1]]);
```

(8.3.1) 式から上図の回路の入力電圧：$v_1(t)$、上図の電圧：$v_2(t)$、電流：$\mathrm{i}(t)$, $i_R(t)$, $i_C(t)$ の関係式は、

$$v_1(t) - v_2(t) = R_1\, i_R(t) \tag{8.3.11}$$

$$i_C(t) = \left(\frac{d}{d\,t} v_1(t) - \frac{d}{d\,t} v_2(t)\right) C \tag{8.3.12}$$

$$\mathrm{i}(t) = i_R(t) + i_C(t) \tag{8.3.13}$$

$$v_2(t) = \left(\frac{d}{d\,t} \mathrm{i}(t)\right) L + R_2\, \mathrm{i}(t) \tag{8.3.14}$$

(8.3.11) 式から、$i_R(t)$ を求め、

$$i_R(t) = -\frac{v_2(t) - v_1(t)}{R_1}$$

上式と (8.3.12) 式を (8.3.13) 式に代入すると、

$$\mathrm{i}(t) = \left(\frac{d}{d\,t} v_1(t) - \frac{d}{d\,t} v_2(t)\right) C - \frac{v_2(t) - v_1(t)}{R_1}$$

上式を (8.3.14) 式に代入すると、$v_1(t)$ と $v_2(t)$ の関係式が得られ、展開すると、

$$\begin{aligned} v_2(t) = &- \left(\frac{d^2}{d\,t^2} v_2(t)\right) C\,L + \left(\frac{d^2}{d\,t^2} v_1(t)\right) C\,L \\ &- \frac{\left(\frac{d}{d\,t} v_2(t)\right) L}{R_1} + \frac{\left(\frac{d}{d\,t} v_1(t)\right) L}{R_1} \\ &- R_2 \left(\frac{d}{d\,t} v_2(t)\right) C + R_2 \left(\frac{d}{d\,t} v_1(t)\right) C \\ &- \frac{R_2\, v_2(t)}{R_1} + \frac{R_2\, v_1(t)}{R_1} \end{aligned}$$

上式のラプラス変換は、

$$\begin{aligned} \mathrm{V2}(s) = &- \left(- \left.\frac{d}{d\,t} v_2(t)\right|_{t=0} + s^2\, \mathrm{V2}(s) - v_2(0)\ s\right) C\,L \\ &+ \left(- \left.\frac{d}{d\,t} v_1(t)\right|_{t=0} + s^2\, \mathrm{V1}(s) - v_1(0)\ s\right) C\,L \\ &- \frac{(s\,\mathrm{V2}(s) - v_2(0))\ L}{R_1} + \frac{(s\,\mathrm{V1}(s) - v_1(0))\ L}{R_1} \\ &- R_2\ (s\,\mathrm{V2}(s) - v_2(0))\ C \\ &+ R_2\ (s\,\mathrm{V1}(s) - v_1(0))\ C \\ &- \frac{R_2\,\mathrm{V2}(s)}{R_1} + \frac{R_2\,\mathrm{V1}(s)}{R_1} \end{aligned}$$

初期条件として、$t = 0$ で $\frac{d}{d\,t} v_1(t) = 0$, $\frac{d}{d\,t} v_2(t) = 0$, $v_1(t) = 0$, $v_2(t) = 0$ とすると、

$$\begin{aligned} \mathrm{V2}(s) = &- s^2\, \mathrm{V2}(s)\ C\,L + s^2\, \mathrm{V1}(s)\ C\,L - \frac{s\,\mathrm{V2}(s)\ L}{R_1} \\ &+ \frac{s\,\mathrm{V1}(s)\ L}{R_1} - R_2\, s\,\mathrm{V2}(s)\ C + R_2\, s\,\mathrm{V1}(s)\ C \\ &- \frac{R_2\,\mathrm{V2}(s)}{R_1} + \frac{R_2\,\mathrm{V1}(s)}{R_1} \end{aligned}$$

上式から、$\mathrm{V2}(s)$ を求めると、

$$\mathrm{V2}(s) = \frac{\mathrm{V1}(s)\ (R_1\, s\, C + 1)\ (s\, L + R_2)}{R_1\, s^2\, C\, L + s\, L + R_1\, R_2\, s\, C + R_2 + R_1}$$

上式で、$R_1 = 1,\ R_2 = 1,\ C = 1,\ L = 1$ とし、$v_1(t)$ としてステップ関数とすると、$\mathrm{V1}(s) = 1/s$ となり、

$$\mathrm{V2}(s) = \frac{(s+1)^2}{s\,(s^2+2\,s+2)}$$

上式をラプラス逆変換すると、

$$v_2(t) = e^{-t}\left(\frac{\sin(t)}{2} + \frac{\cos(t)}{2}\right) + \frac{1}{2}$$

上記の結果を図に表すと、

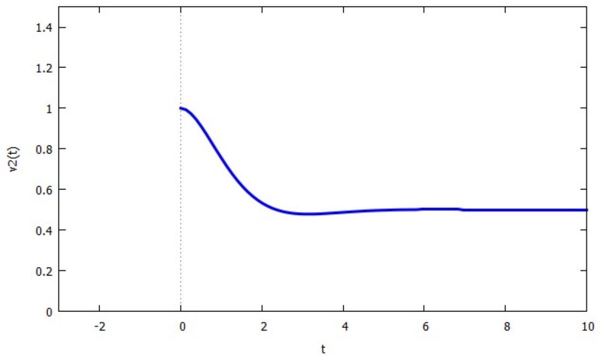


図 8.3.10: RCL 回路　例 2

8.4 システム解析

8.4.1 一次システム

下記の一階定数係数線形微分方程式を一次システムという。

$$\mathrm{y}(t)\ A+\frac{d}{d\,t}\mathrm{y}(t)=\mathrm{x}(t)\ B$$

```
kill(all);
assume(\omega>0);
assume(K>0);
LY1:laplace(y(t),t,s)=Y(s);
LX1:laplace(x(t),t,s)=X(s);
DF1:diff(y(t),t,1)+A*y(t)=B*x(t);
laplace(lhs(DF1),t,s)=laplace(rhs(DF1),
 t,s);
subst([LY1,LX1],%);
subst([y(0)=0],%);
LF2:solve(%,Y(s))[1];
C1:B=A*K;
C2:A=1/T;
YS1:subst([C1,C2],LF2);
subst([X(s)=1/s],%);
LF3:factor(%);
y(t)=ilt(rhs(LF3),s,t);
YT1:factor(%);
PL1:subst([K=2,T=1],rhs(YT1));
plot2d([[parametric,t,PL1,[t,0,10],
 [nticks,80]],[parametric,t,2*t,[t,0,1],
 [nticks,80]]],[x,-3,10],[y,0,2.5],
 [xlabel, "t"],[ylabel, "y(t)"],
 [style,[lines,3,1],[lines,3,2]]);
```

上式をラプラス変換すると、

$$\mathrm{Y}(s)\ A+s\,\mathrm{Y}(s)-\mathrm{y}(0)=\mathrm{X}(s)\ B$$

初期条件として、$\mathrm{y}(0)=0$ とすると、

$$\mathrm{Y}(s)\ A+s\,\mathrm{Y}(s)=\mathrm{X}(s)\ B$$

上式から、$\mathrm{Y}(s)$ を求めると、

$$\mathrm{Y}(s)=\frac{\mathrm{X}(s)\ B}{A+s}$$

ここで定数：A,B を下記のように置き換える。

$$A=\frac{1}{T},\ B=A\,K$$

$\mathrm{Y}(s)$ は、

$$\mathrm{Y}(s)=\frac{\mathrm{X}(s)\ K}{\left(\frac{1}{T}+s\right)\ T} \tag{8.4.1}$$

上式で $\mathrm{X}(s)$ としてステップ関数とすると、$\mathrm{X}(s)=1/s$ となり、

$$\mathrm{Y}(s)=\frac{K}{s\left(\frac{1}{T}+s\right)\ T}=\frac{K}{s\,(s\,T+1)}$$

上式をラプラス逆変換すると、

$$\mathrm{y}(t)=K-K\,e^{-\frac{t}{T}}$$

上記の結果を $T=1,\ K=2$ として、図に表すと、下記となる。ここで $t\to\infty$ で $\mathrm{y}(t)\to K$ となる。また、$\mathrm{y}(t)$ の初期：$t=0$ の勾配は $t=T$ で $\mathrm{y}(t)=K$ に向かっている。

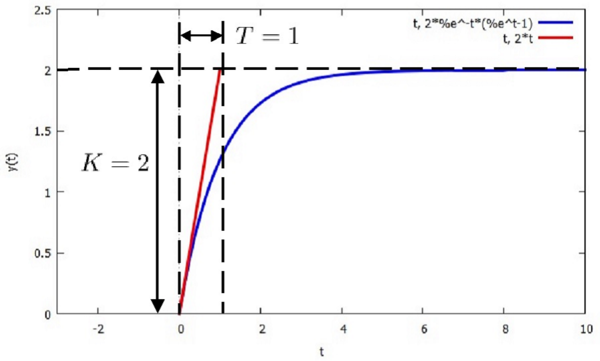


図 8.4.1: 一次システムのステップ応答

```
YS1:Y(s)=P(s)*X(s);
P1:P(s)=N(s)/D(s);
PS1:P(s)=K/(s*T+1);
XT1:x(t)=%e^(%i*\omega*t);
XS1:X(s)=laplace(rhs(XT1),t,s);
YS2:subst([XS1],YS1);
YS11:subst([PS1],YS2);
YS12:A[1]/denom(rhs(PS1))+A[2]/(s-%i*
 \omega);
factor(%);
num(%)=num(rhs(YS11));
N1:expand(%-rhs(%));
N3:coeff(lhs(N1),s,1)=0;
N4:coeff(lhs(N1),s,0)=0;
A123:solve([N3,N4],[A[1],A[2]])[1];
residue(rhs(YS11),s,-1/T)*T;
%-rhs(A123[1]);
residue(rhs(YS11),s,%i*\omega);
%-rhs(A123[2]);
YS13:Y(s)=subst([A123],YS12);
YS14:first(rhs(YS13));
YS15:last(rhs(YS13));
```

```
YT1:y(t)=ilt(YS14,s,t)+ilt(YS15,s,t);
G2:YT11:coeff(rhs(YT1),%e^(%i*\omega*t),
 1);
YS21:(s-%i*\omega)*rhs(YS2);
limit(YS21,s,%i*\omega);
subst([s=%i*\omega],P(s));
PI1:subst([s=%i*\omega],rhs(PS1));
```

一次システムの周波数特性について調べる。(8.4.1) 式を書き換えて次式とする。

$$\mathrm{Y}(s)=\mathrm{P}(s)\,\mathrm{X}(s) \tag{8.4.2}$$

ここで、

$$\mathrm{P}(s)=\frac{K}{s\,T+1} \tag{8.4.3}$$

周波数特性を調べるため、入力 : $\mathrm{x}(t)$ として、複素表示を使用し、周波数 : ω とすると下記となる。

$$\mathrm{x}(t)=e^{i\,\omega\,t}$$

上式をラプラス変換すると、

$$\mathrm{X}(s)=\frac{1}{s-i\,\omega}$$

上式を (8.4.2) 式に代入すると、

$$\mathrm{Y}(s)=\frac{\mathrm{P}(s)}{s-i\,\omega} \tag{8.4.4}$$

更に、(8.4.3) 式を代入すると、

$$\mathrm{Y}(s)=\frac{K}{(s-i\,\omega)\,(s\,T+1)} \tag{8.4.5}$$

上式を部分分数分解し、係数を $A_1,\,A_2$ とする。

$$\mathrm{Y}(s)=\frac{A_1}{s\,T+1}+\frac{A_2}{s-i\,\omega} \tag{8.4.6}$$

上式を整理すると、

$$\mathrm{Y}(s)=\frac{A_2\,s\,T+A_1\,s-i\,A_1\,\omega+A_2}{(s-i\,\omega)\,(s\,T+1)}$$

上式の分子と (8.4.5) 式の分子が等しいとして、

$$A_2\,s\,T+A_1\,s-i\,A_1\,\omega+A_2=K$$

s の同じ次数の両辺の係数が等しいとして、$A_1,\,A_2$ を求めると、

$$A_1=-\frac{K\,T}{i\,\omega\,T+1},\quad A_2=\frac{K}{i\,\omega\,T+1}$$

$A_1,\,A_2$ は留数の定義 : $\lim_{x\to a}(x-a)\,f(a)$ から得られ下記となり、上記と一致している。

$$A_1=-\frac{K\,T}{i\,\omega\,T+1},\quad A_2=\frac{K}{i\,\omega\,T+1}$$

上記の $A_1,\,A_2$ を (8.4.6) 式に代入すると、

$$\mathrm{Y}(s)=\frac{K}{(s-i\,\omega)\,(i\,\omega\,T+1)}-\frac{K\,T}{(i\,\omega\,T+1)\,(s\,T+1)}$$

上式をラプラス逆変換すると、

$$\mathrm{y}(t)=\frac{e^{i\,\omega\,t}\,K}{i\,\omega\,T+1}-\frac{K\,e^{-\frac{t}{T}}}{i\,\omega\,T+1}$$

上式の右辺第 2 項は $t\to 0$ で零に収束し、右辺第 1 項は定常状態を表している。右辺第 1 項の $e^{i\,\omega\,t}$ は入力であるから、これ省くと、周波数伝達関数 : $\mathrm{G}(i\,\omega)$ が得られ、

$$\mathrm{G}(i\,\omega)=\frac{K}{i\,\omega\,T+1} \tag{8.4.7}$$

以上から、$\frac{A_2}{s-i\,\omega}$ の係数 : A_2 が周波数伝達関数 : $\mathrm{G}(i\,\omega)$ となる。また、A_2 は留数からも得られるから、(8.4.2) 式で定義される $\mathrm{P}(s)$ に $s\to i\,\omega$ を代入することで得られる。

$$\mathrm{G}(i\,\omega)=\mathrm{P}(i\,\omega)=\frac{K}{i\,\omega\,T+1} \tag{8.4.8}$$

```
G(\omega)=sqrt(realpart(PI1)^2+
 imagpart(PI1)^2);
G1:factor(%);
PH1:PH(\omega)=carg(PI1);
PL1:subst([T=1,K=2,\omega=t],rhs(G1));
PL2:subst([T=1,K=2,\omega=t],rhs(PH1)
 *180/%pi);
plot2d(PL1,[t,0.1,100],[logx],
 [xlabel, "w"],[ylabel, "Gain"],
 [style,[lines,3,1]]);
plot2d(PL2,[t,0.1,100],[logx],
 [xlabel, "w"],[ylabel, "Phase"],
 [style,[lines,3,1]]);
PL3:subst([T=1,K=2,\omega=t],
 realpart(PI1));
PL4:subst([T=1,K=2,\omega=t],
 imagpart(PI1));
plot2d([[parametric,PL3,PL4,[t,0,1],
 [nticks,10000]],
 [parametric,PL3,PL4,[t,1,100],
 [nticks,10000]]],[xlabel, "real"],
 [ylabel, "imagnaly"],
 [style,[lines,3,1],[lines,3,2]],
 [x,-0.5,2.5],[y,-1.5,0.5],
 [legend, "w=0-1", "w=1-100"]);
```

一次システムの周波数応答のゲイン : $\mathrm{G}(\omega)$ は次式で得られる。

$$\mathrm{G}(\omega)=|\mathrm{P}(i\,\omega)|=\sqrt{\frac{\omega^2\,K^2\,T^2}{(\omega^2\,T^2+1)^2}+\frac{K^2}{(\omega^2\,T^2+1)^2}}$$
$$=\frac{K}{\sqrt{\omega^2\,T^2+1}}$$

一次システムの周波数応答の位相：$\mathrm{PH}(\omega)$ は次式で得られる。

$$\mathrm{PH}(\omega) = arg((\mathrm{P}(i\,\omega)) = \mathrm{atan}(\omega\,T)$$

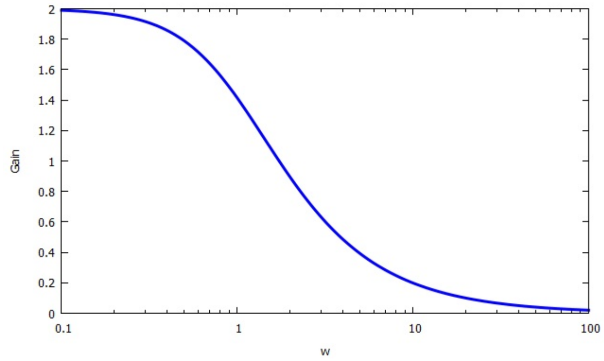


図 8.4.2: 一次システムの周波数応答　ゲイン

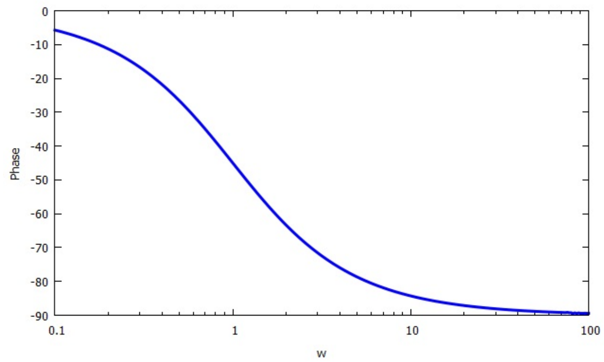


図 8.4.3: 一次システムの周波数応答　位相

周波数伝達関数：$\mathrm{G}(i\omega)$ の実部を x 軸に、虚部を y 軸にして表すとベクトル軌跡が得られる。ここでゲインと位相の関係は図中に示すとおりである。

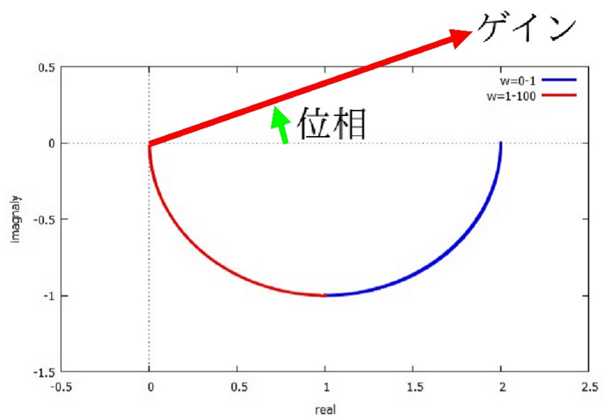


図 8.4.4: 一次システムの周波数応答　ベクトル軌跡

8.4.2　二次システム

下記の二階定数係数線形微分方程式を二次システムという。

$$\left(\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{y}\left(t\right)\right)\,R+\mathrm{y}\left(t\right)\,A+\frac{d^2}{d\,t^2}\,\mathrm{y}\left(t\right)=\mathrm{x}\left(t\right)\,B$$

```
kill(all);
assume(\omega[N]>0);
assume(K>0);
LY1:laplace(y(t),t,s)=Y(s);
LX1:laplace(x(t),t,s)=X(s);
DF1:diff(y(t),t,2)+R*diff(y(t),t,1)+
 A*y(t)=B*x(t);
laplace(lhs(DF1),t,s)=laplace(rhs(DF1),
 t,s);
subst([LY1,LX1],%);
subst([at('diff(y(t),t,1),t=0)=0,y(0)=0],
 %);
LY2:solve(%,Y(s))[1];
C1:B=K*\omega[N]^2;
C2:R=2*C*\omega[N];
C3:A=\omega[N]^2;
subst([C1,C2,C3],LY2);
LY3:factor(%);
LY4:subst([X(s)=1/s],%);
LSE1:solve(denom(rhs(LY3)),s);
assume(C>1);
y(t)=ilt(rhs(LY4),s,t);
YT1:expand(%);
forget(C>1);
assume(0<C and C<1);
y(t)=ilt(rhs(LY4),s,t);
YT2:expand(%);
forget(0<C and C<1);
assume(0>C and C>-1);
y(t)=ilt(rhs(LY4),s,t);
YT3:expand(%);
forget(0>C and C>-1);
assume(C<-1);
y(t)=ilt(rhs(LY4),s,t);
YT4:expand(%);
```

上式をラプラス変換すると、

$$\left(s\,\mathrm{Y}\left(s\right)-\mathrm{y}\left(0\right)\right)\,R+\mathrm{Y}\left(s\right)\,A-\left.\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{y}\left(t\right)\right|_{t=0}+s^2\,\mathrm{Y}\left(s\right)-\mathrm{y}\left(0\right)\,s=\mathrm{X}\left(s\right)\,B$$

初期条件として、$t=0$ で $\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{y}\left(t\right)=0,\ \mathrm{y}\left(t\right)=0$ とすると、

$$s\,\mathrm{Y}\left(s\right)\,R+\mathrm{Y}\left(s\right)\,A+s^2\,\mathrm{Y}\left(s\right)=\mathrm{X}\left(s\right)\,B$$

上式から、$\mathrm{Y}\left(s\right)$ を求めると、

$$\mathrm{Y}\left(s\right)=\frac{\mathrm{X}\left(s\right)\,B}{s\,R+A+s^2}$$

ここで定数：A,B,R を下記のように置き換える。

$A=\omega_N^2,\ B=K\,\omega_N^2,\ R=2\,C\,\omega_N$ ここで、$\omega_N>0$

$\mathrm{Y}\left(s\right)$ は、

$$\mathrm{Y}\left(s\right)=\frac{\mathrm{X}\left(s\right)\,K\,\omega_N^2}{\omega_N^2+2\,s\,C\,\omega_N+s^2} \tag{8.4.9}$$

上式で $\mathrm{X}\left(s\right)$ としてステップ関数とすると、$\mathrm{X}\left(s\right)=1/s$ となり、

$$\mathrm{Y}\left(s\right)=\frac{K\,\omega_N^2}{s\,\left(\omega_N^2+2\,s\,C\,\omega_N+s^2\right)} \tag{8.4.10}$$

上式の分母 $=0$ としたときの根：極は、

$$s=-\sqrt{C^2-1}\,\omega_N-C\,\omega_N,\, s=\sqrt{C^2-1}\,\omega_N-C\,\omega_N \tag{8.4.11}$$

(8.4.10) 式のラプラス逆変換を行う。ここで、C の範囲により解は異なり、安定性も異なる。
$1<C$ のとき振動しないで安定収束する。

$$\mathrm{y}\left(t\right)=-\frac{C\,K\,e^{-t\,C\,\omega_N}\,\sinh\left(t\,\sqrt{C^2-1}\,\omega_N\right)}{\sqrt{C^2-1}}-K\,e^{-t\,C\,\omega_N}\,\cosh\left(t\,\sqrt{C^2-1}\,\omega_N\right)+K \tag{8.4.12}$$

$0<C<1$ のとき振動しながら安定収束する。

$$\mathrm{y}\left(t\right)=-\frac{C\,K\,e^{-t\,C\,\omega_N}\,\sin\left(t\,\sqrt{1-C^2}\,\omega_N\right)}{\sqrt{1-C^2}}-K\,e^{-t\,C\,\omega_N}\,\cos\left(t\,\sqrt{1-C^2}\,\omega_N\right)+K \tag{8.4.13}$$

$-1<C<0$ のとき振動しながら発散する。

$$\mathrm{y}\left(t\right)=-\frac{C\,K\,e^{-t\,C\,\omega_N}\,\sin\left(t\,\sqrt{1-C^2}\,\omega_N\right)}{\sqrt{1-C^2}}-K\,e^{-t\,C\,\omega_N}\,\cos\left(t\,\sqrt{1-C^2}\,\omega_N\right)+K \tag{8.4.14}$$

$C<-1$ のとき振動しないで発散する。

$$\mathrm{y}\left(t\right)=-\frac{C\,K\,e^{-t\,C\,\omega_N}\,\sinh\left(t\,\sqrt{C^2-1}\,\omega_N\right)}{\sqrt{C^2-1}}-K\,e^{-t\,C\,\omega_N}\,\cosh\left(t\,\sqrt{C^2-1}\,\omega_N\right) \tag{8.4.15}$$

```
L1:[K=1,\omega[N]=1,C=1.1];
L2:[K=1,\omega[N]=1,C=0.2];
L3:[K=1,\omega[N]=1,C=-0.2];
```

```
L4:[K=1,\omega[N]=1,C=-1.1];
PL1:subst([L1],rhs(YT1));
PL2:subst([L2],rhs(YT2));
PL3:subst([L3],rhs(YT3));
PL4:subst([L4],rhs(YT4));
plot2d([[parametric,t,PL1,[t,0,20],
  [nticks,80]],
  [parametric,t,PL2,[t,0,20],[nticks,80]]],
  [x,-3,20],[y,0,2],[xlabel, "t"],
  [ylabel, "y(t)"],
  [style,[lines,3,1],[lines,3,2]],
  [legend, "C>1 C=1.1", "0<C<1 C=0.2"]);
plot2d([[parametric,t,PL3,[t,0,20],
  [nticks,80]],
  [parametric,t,PL4,[t,0,20],[nticks,80]]],
  [x,-3,20],[y,-50,50],[xlabel, "t"],
  [ylabel, "y(t)"],
  [style,[lines,3,1],[lines,3,2]],
  [legend, "-1<C<0 C=-0.2", "C<-1 C=-1.1"]
 );
```

(8.4.12) 式から (8.4.15) 式の結果で $K=1, \omega_N=1$ とし、$C=1.1,\ 0.2,\ -0.2,\ -1.1$ の安定、不安定の状況を下記に示す。

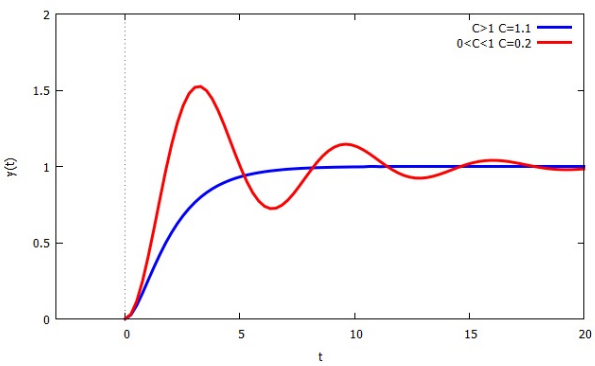


図 8.4.5: 二次システムのステップ応答　安定収束

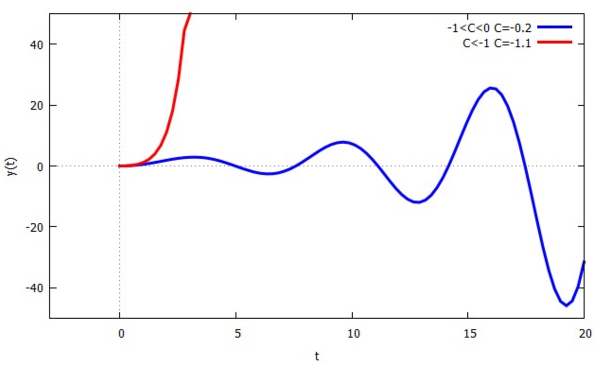


図 8.4.6: 二次システムのステップ応答　発散

```
PT1:subst([L1],LSE1);
PT11:[realpart(rhs(PT1[1])),
 imagpart(rhs(PT1[1]))];
PT12:[realpart(rhs(PT1[2])),
 imagpart(rhs(PT1[2]))];
PT2:subst([L2],LSE1);
PT21:[realpart(rhs(PT2[1])),
 imagpart(rhs(PT2[1]))];
PT22:[realpart(rhs(PT2[2])),
 imagpart(rhs(PT2[2]))];
PT3:subst([L3],LSE1);
PT31:[realpart(rhs(PT3[1])),
 imagpart(rhs(PT3[1]))];
PT32:[realpart(rhs(PT3[2])),
 imagpart(rhs(PT3[2]))];
PT4:subst([L4],LSE1);
PT41:[realpart(rhs(PT4[1])),
 imagpart(rhs(PT4[1]))];
PT42:[realpart(rhs(PT4[2])),
 imagpart(rhs(PT4[2]))];
plot2d([[discrete, [PT11,PT12]],
 [discrete, [PT21,PT22]],
 [discrete, [PT31,PT32]],
 [discrete, [PT41,PT42]]],[style, points],
 [x,-2,2],[y,-2,2],[legend, "C>1 C=1.1",
  "0<C<1 C=0.2", "-1<C<0 C=-0.2",
  "C<-1 C=-1.1"],[xlabel, "real"],
  [ylabel, "imaginaly"]);
```

(8.4.11) 式で $K=1, \omega_N=1$ とし、極を求めると、

$$
\begin{aligned}
C=1.1 \text{ の場合} \quad & s=-1.558257569495584, \\
& s=-0.64174243050442 \\
C=0.2 \text{ の場合} \quad & s=-0.97979589711327\,i-0.2, \\
& s=0.97979589711327\,i-0.2 \\
C=-0.2 \text{ の場合} \quad & s=0.2-0.97979589711327\,i, \\
& s=0.97979589711327\,i+0.2 \\
C=-1.1 \text{ の場合} \quad & s=0.64174243050442, \\
& s=1.558257569495584
\end{aligned}
$$

上記の結果を図示すると下記となる。極の領域により安定、不安定の状況がわかる。

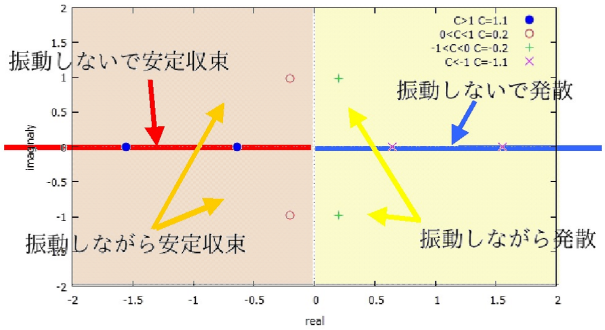


図 8.4.7: 二次システムの極

```
L5:[K=1,\omega[N]=1,C=0.8];
PL5:subst([L5],rhs(YT2));
plot2d([[parametric,t,PL2,[t,0,20],
  [nticks,80]],
  [parametric,t,PL5,[t,0,20],[nticks,80]]],
  [x,-3,20],[y,0,2],[xlabel, "t"],
  [ylabel, "y(t)"],
  [style,[lines,3,1],[lines,3,2]],
  [legend, "0<C<1 C=0.2", "0<C<1 C=0.8"]);
```

$1 > C > 0$ のとき振動しながら安定収束する (8.4.13) 式で C を変えた $C = 0.2$, $C = 0.8$ の比較を下記に示す。

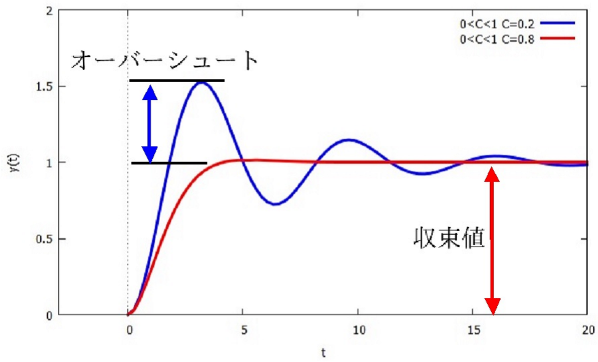


図 8.4.8: 二次システムのステップ応答　$C = 0.2$, $C = 0.8$

```
t*sqrt(1-C^2)*\omega[N]=%pi;
TM1:solve(%,t)[1];
t[max]=rhs(TM1);
y[max]=subst([TM1],rhs(YT2));
OS1:OS=(rhs(%)-K)/(K);
subst([OS=0.05],OS1);
log(%);
%^2;
solve(%,C);
float(%);
```

```
C2:%[2];
L6:[K=1,\omega[N]=1];
subst([L6],rhs(YT2));
PL6:subst([C2],%);
plot2d([parametric,t,PL6,[t,0,20],
  [nticks,80]],[x,-3,20],[y,0,2],
  [xlabel, "t"],[ylabel, "y(t)"],
  [style,[lines,3,1]],[legend, "OS 5%"]);
```

上図で C が小さい場合、大きく振動しながら収束している。また、C が大きいと立ち上がりが遅く、C が小さいと立ち上がりが早いことがわかる。最初の振幅の山が収束値をこえた量：オーバーシュートをなるべく小さくし、早い立ち上がりが制御から求められる。(8.4.13) 式から最初の振幅の山が来る時間の関係式は近似的に次式で表すことができる。

$$t\sqrt{1-C^2}\,\omega_N = \pi$$

上式から最初の振幅の山が来る時間：t は、

$$t = \frac{\pi}{\sqrt{1-C^2}\,\omega_N}$$

上式を (8.4.13) 式に代入すると、近似的な最大振幅は、

$$y_{max} = e^{-\frac{\pi C}{\sqrt{1-C^2}}} K + K$$

オーバーシュートを収束値で無次元化すると、

$$OS = e^{-\frac{\pi C}{\sqrt{1-C^2}}}$$

オーバーシュートとして 5%とすると、

$$0.05 = e^{-\frac{\pi C}{\sqrt{1-C^2}}}$$

上式の log をとり、二乗して C を求め、$C > 0$ であるから、

$$C = 0.69010673055982$$

上式を (8.4.13) 式に代入し、図示すると、

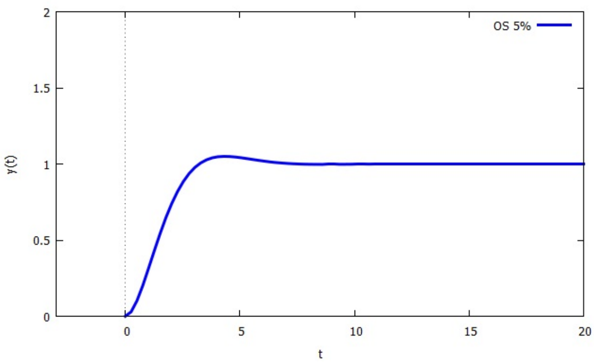


図 8.4.9: 二次システムのステップ応答　OS=5%

```
TS1:K*%e^(-t*C*omega[N]);
A=%/K;
log(%);
solve(%,t)[1];
TS2:t[set]=rhs(%);
TS21:subst([A=0.02],TS2);
subst([L2],TS21);
subst([L5],TS21);
subst([L6],TS21);
subst([C2],%);
```

定常状態になるまでの時間の予測は、(8.4.13) 式の下記の減衰項を基に行える。

$$K\,e^{-t\,C\,\omega_N}$$

収束値を用いて無次元化すると、

$$A=e^{-t\,C\,\omega_N}$$

上式の log をとり、

$$\log{(A)}=-t\,C\,\omega_N$$

t を求めると、

$$t_{set}=-\frac{\log{(A)}}{C\,\omega_N}$$

A として 2%とすると、

$$t_{set}=\frac{3.912023005428146}{C\,\omega_N}$$

$C=0.2$ の場合、

$$t_{set}=19.56011502714073$$

$C=0.8$ の場合、

$$t_{set}=4.890028756785182$$

5%オーバーシュートの $C=0.69010673055982$ の場合、

$$t_{set}=5.668721709545816$$

```
PS1:P(s)=rhs(LY3)/X(s);
XT1:x(t)=%e^(%i*\omega*t);
XS1:X(s)=laplace(rhs(XT1),t,s);
YS2:subst([XS1],LY3);
YS12:A[1]/(s-rhs(LSE1[1]))+A[2]/(s-
 rhs(LSE1[2]))+A[3]/(s-%i*\omega);
```

```
YS13:factor(%);
-denom(YS13)=denom(rhs(YS2));
%-rhs(%);
factor(%);
-num(YS13)=num(rhs(YS2));
N1:expand(%-rhs(%));
N2:coeff(lhs(N1),s,2)=0;
N3:coeff(lhs(N1),s,1)=0;
N4:coeff(lhs(N1),s,0)=0;
A123:solve([N2,N3,N4],[A[1],A[2],
 A[3]])[1];
residue(rhs(YS2),s,rhs(LSE1[1]));
%-rhs(A123[1]);
factor(%);
residue(rhs(YS2),s,rhs(LSE1[2]));
%-rhs(A123[2]);
factor(%);
residue(rhs(YS2),s,%i*\omega);
%-rhs(A123[3]);
PI1:subst([s=%i*\omega],rhs(PS1));
G(\omega)=sqrt(realpart(PI1)^2
 +imagpart(PI1)^2);
G1:factor(%);
PH1:PH(\omega)=atan(imagpart(PI1)/
 realpart(PI1));
subst([\omega[N]=a,\omega=\omega[0]*a],
 rhs(G1));
G2:G(\omega[0])=factor(%);
subst([\omega[N]=a,\omega=\omega[0]*a],
 rhs(PH1));
PH2:PH(\omega[0])=factor(%);
PL1:subst([C=0.2,K=1,\omega[0]=t],
 rhs(G2));
PL2:subst([C=0.8,K=1,\omega[0]=t],
 rhs(G2));
PL3:subst([C=0.2,\omega[0]=t],rhs(PH2)
 *180/%pi);
PL4:subst([C=0.8,\omega[0]=t],rhs(PH2)
 *180/%pi);
plot2d([PL1,PL2],[t,0.1,100],[logx],
 [xlabel, "w"],[ylabel, "Gain"],
 [style,[lines,3,1],[lines,3,2]],
 [legend, "C=0.2","C=0.8"]);
plot2d([PL3,PL4],[t,0.1,100],[logx],
 [xlabel, "w"],[ylabel, "Phase"],
 [style,[lines,3,1],[lines,3,2]],
 [legend, "C=0.2","C=0.8"],[y,-180,180]);
```

二次システムの周波数特性について調べる。(8.4.9) 式から、

$$\mathrm{P}(s) = \frac{K\,\omega_N^2}{\omega_N^2 + 2\,s\,C\,\omega_N + s^2} \tag{8.4.16}$$

周波数特性を調べるため、入力 : $\mathrm{x}(t)$ として、複素表示を使用し、周波数 : ω とすると下記となる。

$$\mathrm{x}(t) = e^{i\,\omega\,t}$$

上式をラプラス変換すると、

$$\mathrm{X}(s) = \frac{1}{s - i\,\omega}$$

上式を (8.4.9) 式に代入すると、

$$\mathrm{Y}(s) = \mathrm{P}(s)\ \mathrm{X}(s)\ = \frac{K\,\omega_N^2}{(s - i\,\omega)\ (\omega_N^2 + 2\,s\,C\,\omega_N + s^2)} \tag{8.4.17}$$

上式を部分分数分解し、係数を A_1, A_2, A_3 とする。

$$\begin{aligned}\mathrm{Y}(s) =& \frac{A_1}{\sqrt{C^2 - 1}\,\omega_N + C\,\omega_N + s} \\ &+ \frac{A_2}{-\sqrt{C^2 - 1}\,\omega_N + C\,\omega_N + s} + \frac{A_3}{s - i\,\omega}\end{aligned} \tag{8.4.18}$$

上式を整理し、その分子と (8.4.17) 式の分子が等しいとして、

$$\begin{aligned}&A_3\,\omega_N^2 + A_2\,s\,\sqrt{C^2 - 1}\,\omega_N - A_1\,s\,\sqrt{C^2 - 1}\,\omega_N \\ &\quad - i\,A_2\,\omega\,\sqrt{C^2 - 1}\,\omega_N + i\,A_1\,\omega\,\sqrt{C^2 - 1}\,\omega_N \\ &\quad + 2\,A_3\,s\,C\,\omega_N + A_2\,s\,C\,\omega_N + A_1\,s\,C\,\omega_N \\ &\quad - i\,A_2\,\omega\,C\,\omega_N - i\,A_1\,\omega\,C\,\omega_N + A_3\,s^2 + A_2\,s^2 \\ &\quad + A_1\,s^2 - i\,A_2\,\omega\,s - i\,A_1\,\omega\,s = K\,\omega_N^2\end{aligned}$$

s の同じ次数の両辺の係数が等しいとして、A_1, A_2, A_3 を求め、A_3 は、

$$A_3 = \frac{K\,\omega_N^2}{\omega_N^2 + 2\,i\,\omega\,C\,\omega_N - \omega^2}$$

A_3 は、は留数の定義 : $\lim_{x\to a}(x - a)\,f(a)$ から得られ下記となる。上記と一致している。

$$A_3 = \frac{K\,\omega_N^2}{\omega_N^2 + 2\,i\,\omega\,C\,\omega_N - \omega^2}$$

(8.4.18) 式から A_1, A_2 の項は過渡応答を表しており、A_3 の項は定常状態の周波数応答を表している。以上から、周波数伝達関数 : $\mathrm{G}(i\omega)$ は上式や $\mathrm{P}(s)$ に $s \to i\,\omega$ を代入することで得られる。

$$\mathrm{G}(i\,\omega) = \mathrm{P}(i\,\omega) = \frac{K\,\omega_N^2}{\omega_N^2 + 2\,i\,\omega\,C\,\omega_N - \omega^2} \tag{8.4.19}$$

二次システムの周波数応答のゲイン : $\mathrm{G}(\omega)$ は次式で得られる。

$$\mathrm{G}(\omega) = |\mathrm{P}(i\,\omega)| = \frac{K\,\omega_N^2}{\sqrt{\omega_N^4 + (4\,\omega^2\,C^2 - 2\,\omega^2)\ \omega_N^2 + \omega^4}}$$

二次システムの周波数応答の位相 : $\mathrm{PH}(\omega)$ は次式で得られる。

$$\mathrm{PH}(\omega) = arg((\mathrm{P}(i\,\omega)) = -\mathrm{atan}\left(\frac{2\,\omega\,C\,\omega_N}{\omega_N^2 - \omega^2}\right)$$

$\omega_0 = \frac{\omega}{\omega_N}$ の置き換えを行い、二次システムの周波数応答のゲイン、位相は、

$$\mathrm{G}(\omega_0) = \frac{K}{\sqrt{4\,\omega_0^2\,C^2 + \omega_0^4 - 2\,\omega_0^2 + 1}}$$

$$\mathrm{PH}(\omega_0) = \mathrm{atan}\left(\frac{2\,\omega_0\,C}{\omega_0^2 - 1}\right)$$

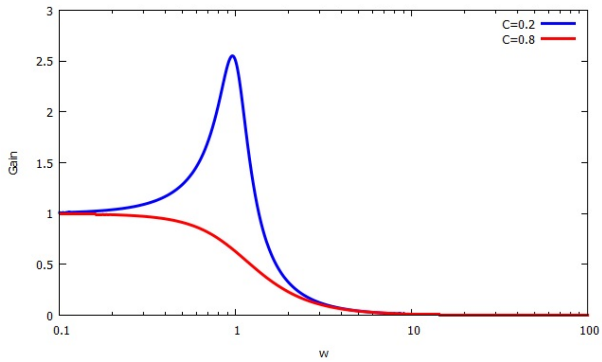


図 8.4.10: 二次システムの周波数応答　ゲイン

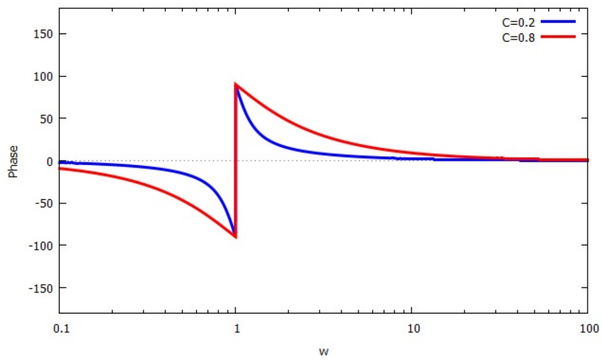


図 8.4.11: 二次システムの周波数応答　位相

```
PL5:subst([\omega[N]=1,K=1,C=0.2,
 \omega=t],realpart(PI1));
PL6:subst([\omega[N]=1,K=1,C=0.2,
 \omega=t],imagpart(PI1));
PL7:subst([\omega[N]=1,K=1,C=0.8,
 \omega=t],realpart(PI1));
PL8:subst([\omega[N]=1,K=1,C=0.8,
 \omega=t],imagpart(PI1));
plot2d([[parametric,PL5,PL6,[t,0,1],
 [nticks,10000]],
 [parametric,PL5,PL6,[t,1,100],
 [nticks,10000]],
 [parametric,PL7,PL8,[t,0,1],
 [nticks,10000]],
 [parametric,PL7,PL8,[t,1,100],
 [nticks,10000]]],[xlabel,"real"] ,
 [ylabel,"imaginaly"],
 [style,[lines,3,1],[lines,3,2],
 [lines,3,3],[lines,3,4]],
 [legend, "C=0.2 w=0-1",
 "C=0.2 w=1-100","C=0.8 w=0-1",
 "C=0.8 w=1-100"],[y,-3,1]);
```

周波数伝達関数：G $(i\omega)$ の実部を x 軸に、虚部を y 軸にして表すと下図のベクトル軌跡が得られる。

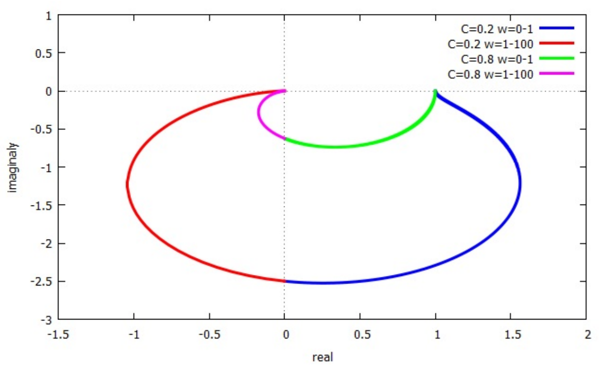


図 8.4.12: 二次システムの周波数応答　ベクトル軌跡

8.4.3　一次フィードバック制御

フィードバック制御は下図のようなフィードバックシステムで、ラプラス変換された制御対象：$\mathrm{P}(s)$ に制御器 : $\mathrm{K}(s)$ を加え、制御入力 : $\mathrm{X}(s)$ に出力信号 : $\mathrm{Y}(s)$ を考慮したシステムである。

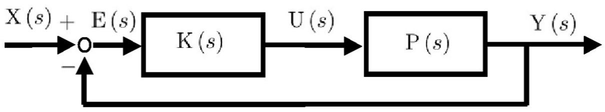


図 8.4.13: フィードバック制御系

```
kill(all);
EQ1:E(s)=X(s)-Y(s);
EQ2:U(s)=E(s)*K(s);
EQ3:Y(s)=P(s)*U(s);
solve([EQ1,EQ2,EQ3],[E(s),U(s),Y(s)]);
YS1:%[1][3];
P1:P(s)=1/(s-1);
subst([K(s)=K1,P1],YS1);
YS2:factor(%);
subst([X(s)=1/s],%);
YT2:y(t)=ilt(rhs(%),s,t);
PL1:subst([K1=3],rhs(YT2));
PL2:subst([K1=3/4],rhs(YT2));
plot2d([PL1,PL2],[t,0,10],
 [x,-3,10],[y,0,2],[xlabel, "t"],
 [ylabel, "f(t)"],
 [style,[lines,3,1],[lines,3,2]],
 [legend, "K(s)=3","K(s)=3/4"]);
```

上記システムの関係式は、

$$\mathrm{E}(s)=\mathrm{X}(s)-\mathrm{Y}(s)$$

$$\mathrm{U}(s)=\mathrm{E}(s)\ \mathrm{K}(s)$$

$$\mathrm{Y}(s)=\mathrm{P}(s)\ \mathrm{U}(s)$$

上式から閉ループシステムの $\mathrm{Y}(s)$ を求めると、

$$\mathrm{Y}(s)=\frac{\mathrm{K}(s)\ \mathrm{P}(s)\ \mathrm{X}(s)}{\mathrm{K}(s)\ \mathrm{P}(s)+1} \tag{8.4.20}$$

制御対象：$\mathrm{P}(s)$ として下記の一次システムとする。

$$\mathrm{P}(s)=\frac{1}{s-1}$$

制御器：$\mathrm{K}(s)$ として下記の定数とすると、

$$\mathrm{K}(s)=K1$$

上式から (8.4.20) 式は、

$$\mathrm{Y}(s)=\frac{\mathrm{X}(s)\ K1}{K1+s-1} \tag{8.4.21}$$

制御入力としてステップ関数とし、$\mathrm{X}(s)=1/s$ として上式は、

$$\mathrm{Y}(s)=\frac{K1}{s\ (K1+s-1)}$$

上式をラプラス逆変換すると出力結果は、

$$\mathrm{y}(t)=\frac{K1}{K1-1}-\frac{K1\, e^{-t\,(K1-1)}}{K1-1}$$

上式から $K1>1$ のとき安定、$K1<1$ のとき不安定となる。$K1=3,\ K1=3/4$ の場合の出力結果を以下に示す。

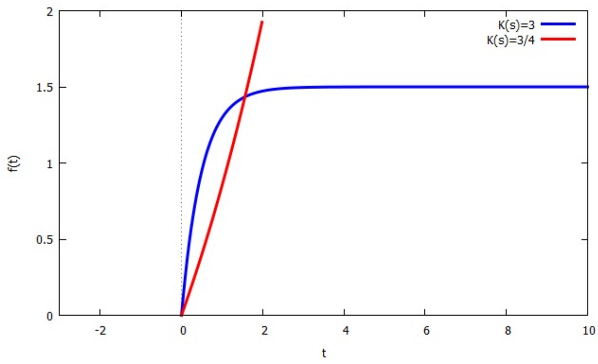


図 8.4.14: 一次フィードバック制御による出力

```
rhs(YS2)/X(s);
P11:subst([s=%i*\omega],%);
PL3:subst([K1=3,\omega=t],realpart(P11));
PL4:subst([K1=3,\omega=t],imagpart(P11));
PL5:subst([K1=3/4,\omega=t],realpart(P11)
 );
PL6:subst([K1=3/4,\omega=t],imagpart(P11)
 );
plot2d([[parametric,PL3,PL4,[t,0,1],
 [nticks,1000]],
 [parametric,PL3,PL4,[t,1,100],
 [nticks,1000]],
 [parametric,PL5,PL6,[t,0,1],
 [nticks,100000]],
 [parametric,PL5,PL6,[t,1,100],
 [nticks,100000]]],[xlabel, "real"],
 [ylabel, "imagnaly"],[x,-4,2],[y,-2,2],
 [style,[lines,3,1],[lines,3,2],
 [lines,3,3],[lines,3,4]],
 [legend, "K(s)=3 w=0-1",
 "K(s)=3 w=1-100","K(s)=3/4 w=0-1",
 "K(s)=3/4 w=1-100"]);
```

閉ループシステムの周波数伝達関数:$\mathrm{G}(i\omega)$ は (8.4.21) 式から、

$$\mathrm{G}(i\omega)=\frac{K1}{K1+i\omega-1}$$

上式を基に $K1 = 3$, $K1 = 3/4$ の場合の閉ループシステムのベクトル軌跡を描くと下図となる。

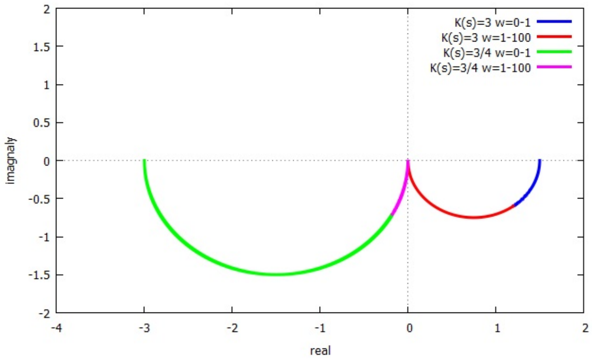


図 8.4.15: 一次フィードバック制御 ベクトル軌跡

```
P2:K1*P1;
P21:subst([s=%i*\omega],rhs(%));
PL7:subst([K1=3,\omega=t],realpart(P21));
PL8:subst([K1=3,\omega=t],imagpart(P21));
PL9:subst([K1=3/4,\omega=t],realpart(P21)
 );
PLA:subst([K1=3/4,\omega=t],imagpart(P21)
 );
plot2d([[parametric,PL7,PL8,[t,-100,1],
 [nticks,10000]],
 [parametric,PL7,PL8,[t,1,100],
 [nticks,10000]],
 [parametric,PL9,PLA,[t,-100,1],
 [nticks,10000]],
 [parametric,PL9,PLA,[t,1,100],
 [nticks,10000]]],[xlabel, "real"],
 [ylabel, "imagnaly"],[x,-4,2],[y,-2,2],
 [style,[lines,3,1],[lines,3,2],
 [lines,3,3],[lines,3,4]],
 [legend, "K(s)=3 w=-100-1",
 "K(s)=3 w=1-100","K(s)=3/4 w=-100-1",
 "K(s)=3/4 w=1-100"]);
```

開ループの伝達関数は、

$$\mathrm{P}\left(s\right)\,\mathrm{K}\left(s\right) = \frac{K1}{s-1}$$

上式に $s = i\,\omega$ を代入し、

$$\mathrm{P}\left(i\,\omega\right)\,\mathrm{K}\left(i\,\omega\right) == \frac{K1}{i\,\omega-1}$$

上式を基に $K1 = 3$, $K1 = 3/4$ の場合のナイキスト線図を描くと下図となる。ナイキストの安定判別として、ω が増加する向きにたどって、点：$(-1, 0)$ を左側に見れば安定、右側に見れば不安定であり、下記の線図から $K1 = 3$ は安定、$K1 = 3/4$ は不安定である。

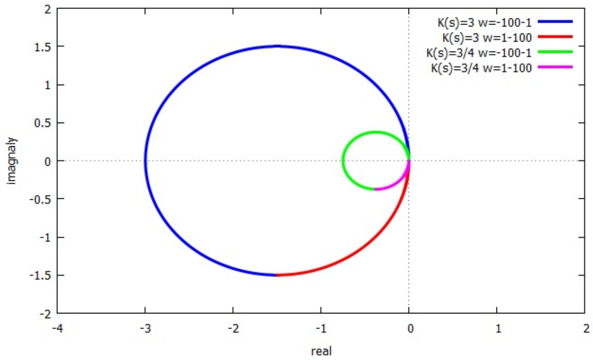


図 8.4.16: 一次フィードバック制御 ナイキスト線図

8.4.4　二次フィードバック制御

図 8.4.13 に示すフィードバック制御でラプラス変換された制御対象：$\mathrm{P}(s)$ が二次システムの場合について検討する。ここでラプラス変換された制御器：$\mathrm{K}(s)$、制御入力：$\mathrm{X}(s)$、出力信号：$\mathrm{Y}(s)$ とする。

```
kill(all);
EQ1:E(s)=X(s)-Y(s);
EQ2:U(s)=E(s)*K(s);
EQ3:Y(s)=P(s)*U(s);
solve([EQ1,EQ2,EQ3],[E(s),U(s),Y(s)]);
YS1:%[1][3];
P1:P(s)=-(s-1)/(s+2)/(s+6);
subst([K(s)=K1,P1],YS1);
YS2:factor(%);
P10:rhs(YS2)/X(s);
denom(P10);
PS1:solve(%,s);
K1^2-20*K1+16;
solve(%,K1);
K2:float(%);
```

制御対象：$\mathrm{P}(s)$ として次式の二次システムとする。

$$\mathrm{P}(s)=\frac{1-s}{(s+2)\ (s+6)}$$

制御器：$\mathrm{K}(s)$ として下記の定数とすと、

$$\mathrm{K}(s)=K1$$

上式から (8.4.20) 式は、

$$\mathrm{Y}(s)=\frac{(s-1)\ \mathrm{X}(s)\ K1}{s\,K1-K1-s^2-8\,s-12} \tag{8.4.22}$$

上式の極は、

$$s=-\frac{\sqrt{K1^2-20\,K1+16}-K1+8}{2},$$
$$s=\frac{\sqrt{K1^2-20\,K1+16}+K1-8}{2}$$

上式の平方根の中の項について下記とし、

$$K1^2-20\,K1+16=0$$

上式から $K1$ を求めると、

$$K1=0.83484861008832, K1=19.16515138991168$$

以上から、$K1<0.83$ で振動しないで安定収束、$0.83<K1<8$ で振動しながら安定収束、$8<K1<19.2$ で振動しながら発散、$19.2<K1$ で振動しないで発散することがわかる。

```
K31:[K1=0.5];
K32:[K1=5];
K33:[K1=12];
K34:[K1=21];
YS3:subst([X(s)=1/s],YS2);
subst([K31],rhs(YS3));
y(t)=ilt(%,s,t);
PLT1:rhs(%);
subst([K32],rhs(YS3));
y(t)=ilt(%,s,t);
PLT2:rhs(%);
subst([K33],rhs(YS3));
y(t)=ilt(%,s,t);
PLT3:rhs(%);
subst([K34],rhs(YS3));
y(t)=ilt(%,s,t);
PLT4:rhs(%);
plot2d(PLT1,[t,0,5],
 [x,-1,5],[xlabel, "t"],[ylabel, "f(t)"],
 [style,[lines,3,1]],[legend, "K1=0.5"]);
plot2d(PLT2,[t,0,5],
 [x,-1,5],[xlabel, "t"],[ylabel, "f(t)"],
 [style,[lines,3,1]],[legend, "K(s)=5"]);
plot2d(PLT3,[t,0,5],
 [x,-1,5],[xlabel, "t"],[ylabel, "f(t)"],
 [style,[lines,3,1]],[legend, "K(s)=12"]);
plot2d(PLT4,[t,0,5],
 [x,-1,5],[xlabel, "t"],[ylabel, "f(t)"],
 [style,[lines,3,1]],[legend, "K(s)=21"]);
```

上記の結果から $K1=0.5,\,5,\,12,\,21$ について検討する。制御入力としてステップ関数とし、$\mathrm{X}(s)=1/s$ とすると、(8.4.22) 式は、

$$\mathrm{Y}(s)=\frac{(s-1)\ K1}{s\ (s\,K1-K1-s^2-8\,s-12)}$$

上式に $K1$ を与えてラプラス逆変換すると、$K1=0.5$ の場合は振動しないで安定収束、

$$\mathrm{y}(t)=-\frac{7\,e^{-\frac{5\,t}{2}}}{25}+\frac{6\,e^{-5\,t}}{25}+\frac{1}{25}$$

$K1=5$ の場合は振動しながら安定収束、

$$\mathrm{y}(t)=e^{-\frac{3\,t}{2}}\left(-\frac{185\sin\left(\frac{\sqrt{59}\,t}{2}\right)}{17\,\sqrt{59}}-\frac{5\cos\left(\frac{\sqrt{59}\,t}{2}\right)}{17}\right)+\frac{5}{17}$$

$K1=12$ の場合は振動しながら発散、

$$\mathrm{y}(t)=e^{2\,t}\left(-\frac{11\sin\left(2\,\sqrt{5}\,t\right)}{2\,\sqrt{5}}-\frac{\cos\left(2\,\sqrt{5}\,t\right)}{2}\right)+\frac{1}{2}$$

$K1=21$ の場合は振動しないで発散、

$$y\left(t\right)=e^{\frac{13\,t}{2}}\left(-\frac{371\sinh\left(\frac{\sqrt{37}\,t}{2}\right)}{11\,\sqrt{37}}-\frac{7\cosh\left(\frac{\sqrt{37}\,t}{2}\right)}{11}\right)+\frac{7}{11}$$

上記の結果を図示すると、

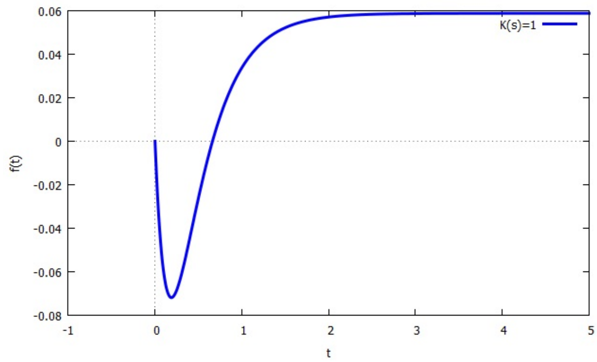


図 8.4.17: 二次フィードバック制御による出力　$K1=0.5$

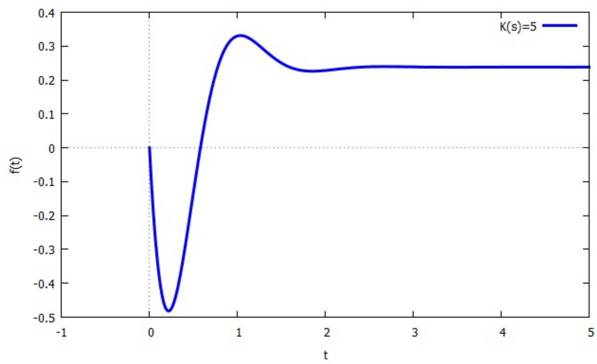


図 8.4.18: 二次フィードバック制御による出力　$K1=5$

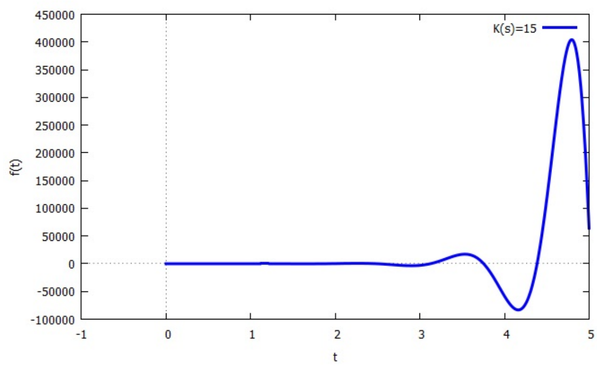


図 8.4.19: 二次フィードバック制御による出力　$K1=12$

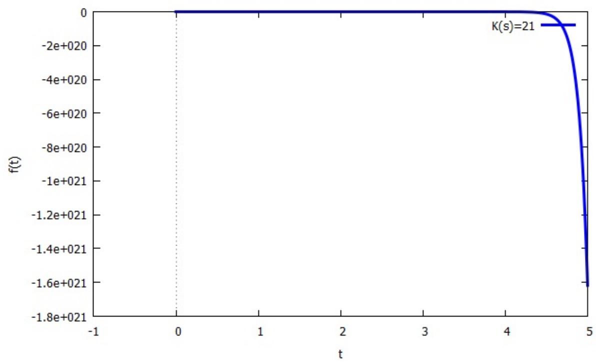


図 8.4.20: 二次フィードバック制御による出力　$K1=21$

```
PT1:subst([K31],PS1);
PT11:[realpart(rhs(PT1[1])),
 imagpart(rhs(PT1[1]))];
PT12:[realpart(rhs(PT1[2])),
 imagpart(rhs(PT1[2]))];
PT2:subst([K32],PS1);
PT21:[realpart(rhs(PT2[1])),
 imagpart(rhs(PT2[1]))];
PT22:[realpart(rhs(PT2[2])),
 imagpart(rhs(PT2[2]))];
PT3:subst([K33],PS1);
PT31:[realpart(rhs(PT3[1])),
 imagpart(rhs(PT3[1]))];
PT32:[realpart(rhs(PT3[2])),
 imagpart(rhs(PT3[2]))];
PT4:subst([K34],PS1);
PT41:[realpart(rhs(PT4[1])),
 imagpart(rhs(PT4[1]))];
PT42:[realpart(rhs(PT4[2])),
 imagpart(rhs(PT4[2]))];
plot2d([[discrete, [PT11,PT12]],
 [discrete, [PT21,PT22]],
 [discrete, [PT31,PT32]],
 [discrete, [PT41,PT42]]],[style, points],
 [legend, "K1=0.5", "K1=5", "K1=12",
  "K1=21"],[xlabel, "real"],
 [ylabel, "imaginaly"]);
```

(8.4.22) 式の極を求めると、

$$K1=0.5 \text{ の場合}\quad s=-5.0, s=-2.5$$

$$K1=5 \text{ の場合}\quad s=-\frac{\sqrt{59}\,i+3}{2}, s=\frac{\sqrt{59}\,i-3}{2}$$

$$K1=12 \text{ の場合}\quad s=-\frac{4\sqrt{5}\,i-4}{2}, s=\frac{4\sqrt{5}\,i+4}{2}$$

$K1 = 21$ の場合　$s = -\dfrac{\sqrt{37}-13}{2}, s = \dfrac{\sqrt{37}+13}{2}$

上記の結果を図示すると、

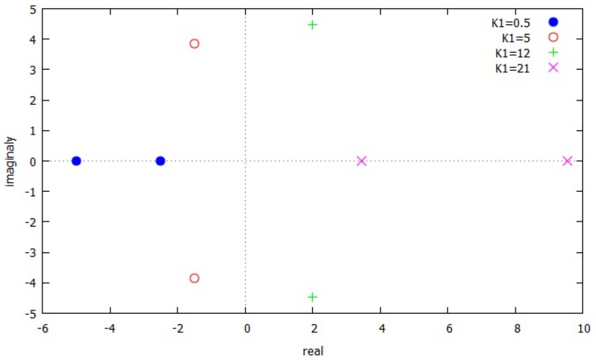


図 8.4.21: 二次フィードバック制御による極

```
P10:rhs(YS2)/X(s);
P11:subst([s=%i*t],P10);
PLV1:subst([K31],P11);
PLV11:realpart(PLV1);
PLV12:imagpart(PLV1);
PLV1:subst([K32],P11);
PLV21:realpart(PLV1);
PLV22:imagpart(PLV1);
PLV1:subst([K33],P11);
PLV31:realpart(PLV1);
PLV32:imagpart(PLV1);
PLV1:subst([K34],P11);
PLV41:realpart(PLV1);
PLV42:imagpart(PLV1);
plot2d([[parametric,PLV11,PLV12,[t,0,1],
 [nticks,10000]],
 [parametric,PLV11,PLV12,[t,1,1000],
 [nticks,10000]]],[xlabel, "real"],
 [ylabel, "imagnaly"],
 [style,[lines,3,1],[lines,3,2]],
 [legend, "K(s)=0.5 w=0-1",
 "K(s)=0.5 w=1-1000"]);
plot2d([[parametric,PLV21,PLV22,[t,0,3],
 [nticks,10000]],
 [parametric,PLV21,PLV22,[t,3,100],
 [nticks,10000]],
 [parametric,PLV31,PLV32,[t,0,3],
 [nticks,10000]],
 [parametric,PLV31,PLV32,[t,3,100],
 [nticks,10000]],
[parametric,PLV41,PLV42,[t,0,3],
[nticks,10000]],
[parametric,PLV41,PLV42,[t,3,100],
[nticks,10000]]],[xlabel, "real"],
[ylabel, "imagnaly"],[x,-2,5],[y,-2,2],
[style,[lines,3,1],[lines,3,2],
[lines,3,3],
[lines,3,4],[lines,3,5],[lines,3,6]],
[legend, "K(s)=5 w=0-3","K(s)=5 w=3-100",
"K(s)=12 w=0-3","K(s)=12 w=3-100",
"K(s)=21 w=0-3","K(s)=21 w=3-100"]);
```

閉ループシステムの周波数伝達関数:G $(i\omega)$ は (8.4.22) 式から、

$$\mathrm{G}\,(i\omega) = \frac{(i\omega - 1)\ K1}{i\omega K1 - K1 + \omega^2 - 8\,i\omega - 12}$$

上式を基に $K1 = 0.5,\ 5,\ 12,\ 21$ の場合の閉ループシステムのベクトル軌跡を描くと下図となる。

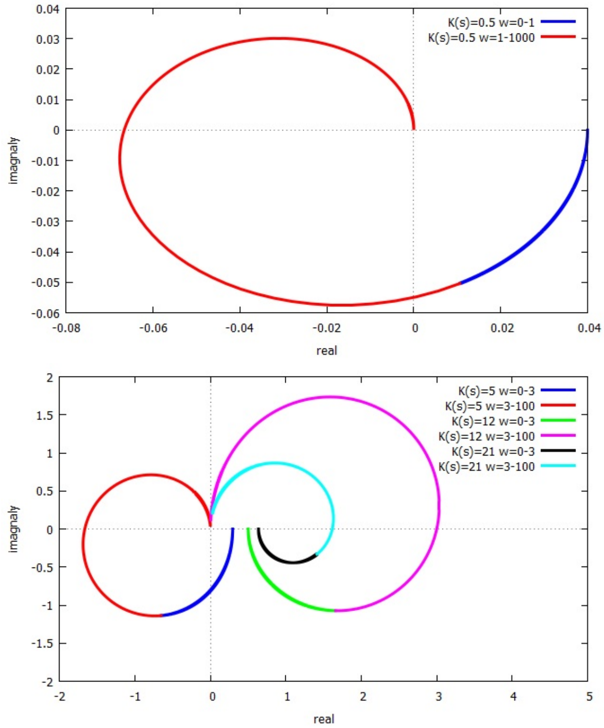


図 8.4.22: 二次フィードバック制御のベクトル軌跡

```
P10:rhs(K1*P1);
P11:subst([s=%i*t],P10);
PLV1:subst([K31],P11);
PLV11:realpart(PLV1);
PLV12:imagpart(PLV1);
PLV1:subst([K32],P11);
PLV21:realpart(PLV1);
PLV22:imagpart(PLV1);
PLV1:subst([K33],P11);
PLV31:realpart(PLV1);
PLV32:imagpart(PLV1);
PLV1:subst([K34],P11);
PLV41:realpart(PLV1);
PLV42:imagpart(PLV1);
plot2d([[parametric,PLV11,PLV12,
 [t,-1000,3],[nticks,10000]],
 [parametric,PLV11,PLV12,[t,3,1000],
 [nticks,10000]]],[xlabel, "real"],
 [ylabel, "imagnaly"],
 [style,[lines,3,1],[lines,3,2]],
 [legend, "K(s)=0.5 w=-100-3",
 "K(s)=0.5 w=3-100"]);
plot2d([[parametric,PLV21,PLV22,
 [t,-100,3],[nticks,10000]],
 [parametric,PLV21,PLV22,[t,3,100],
 [nticks,10000]],
 [parametric,PLV31,PLV32,[t,-100,3],
 [nticks,10000]],
 [parametric,PLV31,PLV32,[t,3,100],
 [nticks,10000]],
 [parametric,PLV41,PLV42,[t,-100,3],
 [nticks,10000]],
 [parametric,PLV41,PLV42,[t,3,100],
 [nticks,10000]]],[xlabel, "real"],
 [ylabel, "imagnaly"],[x,-3,3],[y,-3,3],
 [style,[lines,3,1],[lines,3,2],
 [lines,3,3],
 [lines,3,4],[lines,3,5],[lines,3,6]],
 [legend, "K(s)=5 w=-100-3",
 "K(s)=5 w=3-100",
 "K(s)=12 w=-100-3","K(s)=12 w=3-100",
 "K(s)=21 w=-100-3","K(s)=21 w=3-100"]);
```

開ループの伝達関数は、

$$\mathrm{P}\left(s\right)\,\mathrm{K}\left(s\right)=\frac{\left(1-s\right)\,K1}{\left(s+2\right)\,\left(s+6\right)}$$

上式に $s=i\,\omega$ を代入し、

$$\mathrm{G}\left(i\,\omega\right)=\frac{\left(1-i\,\omega\right)\,K1}{\left(i\,\omega+2\right)\,\left(i\,\omega+6\right)}$$

上式を基に $K1=0.5,\,5,\,12,\,21$ の場合のナイキスト線図を描くと下図となる。ナイキストの安定判別として、ω が増加する向きにたどって、点 : $(-1,0)$ を左側に見れば安定、右側に見れば不安定であり、下記の線図から $K1=0.5,\,5$ は安定、$K1=12,\,21$ は不安定である。

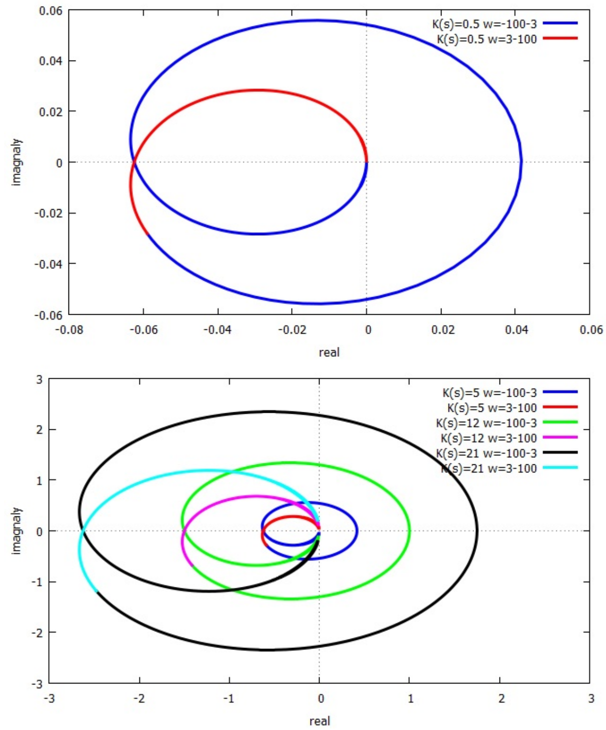


図 8.4.23: 二次フィードバック制御　ナイキスト線図

第9章　変分法

9.1　オイラー (Eular) の微分方程式

関数:y が変数:x の関数であるとき、y の極値は $\frac{d}{d\,x}\,y=0$ で得られる。ここで、関数：$\mathrm{H}\left(x,y,\frac{d}{d\,x}\,y,\cdots\right)$ の積分：I の極値となる条件について調べる。

9.1.1　一変数一変関数

関数：y が変数：x の関数であるとき、下記の関数：$\mathrm{H}\left(x,y,\frac{d}{d\,x}\,y\right)$ の積分：I の極値について調べる。

$$I=\int_a^b \mathrm{H}\left(x,y,\frac{d}{d\,x}\,y\right)dx \tag{9.1.1}$$

```
kill(all);
depends(y,[f,g,\alpha]);
depends(f,x);
depends(g,x);
Y1:y=f+\alpha*g;
DY1:'diff(y,x,1)=diff(rhs(Y1),x,1);
I1:I='integrate(H(x,y,'diff(y,x,1)),x,a,b);
subst([Y1,DY1],I1);
I2:ev(%,diff);
I21:I=taylor(rhs(I2),\alpha,0,3);
DH1:'diff(H(x,alpha*g+f,alpha*('diff(
 g,x,1))+'diff(f,x,1)),alpha,1);
depends(H,[x,y,p]);
depends(p,[f,g,\alpha]);
Z1:p='diff(y,x,1);
Z2:subst([DY1],Z1);
DH2:'diff(H,\alpha,1)=diff(H,\alpha,1);
AY1:diff(Y1,\alpha,1);
AZ1:diff(Z2,\alpha,1);
DH3:subst([AY1,AZ1],DH2);
I3:dI=\alpha*'integrate(rhs(DH3),x,a,b);
I31:lhs(I3)=\alpha*g*'diff(H,p,1)+\alpha*
 'integrate(g*('diff(H,y,1))
 -g*'diff('diff(H,p,1),x,1),x,a,b);
DI3:g*('diff(H,y,1))-g*('diff(H,x,1,p,1))
 =0;
```

```
factor(%);
%/g;
'diff((H-'diff(y,x,1)*'diff(H,p,1)),y,1)=0;
H-'diff(y,x,1)*'diff(H,p,1)=C;
H-p*'diff(H,p,1)=C;
```

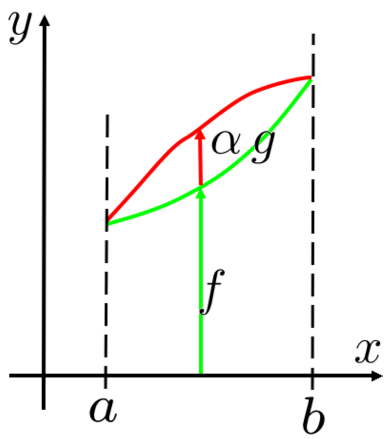


図 9.1.1: 変分問題

上図に示すように、(9.1.1) 式の I の極値を与える f が得られたとする。f をわずか：$\alpha\,g$ ずらした次式の y を考える。ここで α は微少定数、g は任意の x の関数で、端部：$x=a,b$ で $g=0$ とする。

$$y=\alpha\,g+f,\quad \frac{d}{d\,x}\,y=\alpha\left(\frac{d}{d\,x}\,g\right)+\frac{d}{d\,x}\,f \tag{9.1.2}$$

ここで、H は $x, y, \frac{d}{dx}y$ の関数とし、y は f, g, α の関数、f, g は x の関数とする。(9.1.1) 式を α で Taylor 展開すると、

$$\begin{aligned}
I =& \int_a^b \mathrm{H}\left(x, y, \frac{d}{dx}y\right)dx = \int_a^b \mathrm{H}\left(x, \alpha g + f, \alpha\left(\frac{d}{dx}g\right) + \frac{d}{dx}f\right)dx \\
=& \int_a^b \mathrm{H}\left(x, f, \frac{d}{dx}f\right)dx\bigg|_{\alpha=0} + \left(\int_a^b \frac{d}{d\alpha}\mathrm{H}\left(x, \alpha g + f, \alpha\left(\frac{d}{dx}g\right) + \frac{d}{dx}f\right)dx\bigg|_{\alpha=0}\right)\alpha \\
&+ \frac{1}{2}\left(\int_a^b \frac{d^2}{d\alpha^2}\mathrm{H}\left(x, \alpha g + f, \alpha\left(\frac{d}{dx}g\right) + \frac{d}{dx}f\right)dx\bigg|_{\alpha=0}\right)\alpha^2 \\
&+ \frac{1}{6}\left(\int_a^b \frac{d^3}{d\alpha^3}\mathrm{H}\left(x, \alpha g + f, \alpha\left(\frac{d}{dx}g\right) + \frac{d}{dx}f\right)dx\bigg|_{\alpha=0}\right)\alpha^3 + ...
\end{aligned} \tag{9.1.3}$$

$\frac{d}{dx}y$ を次式のように置く。

$$p = \frac{d}{dx}y = \alpha\left(\frac{d}{dx}g\right) + \frac{d}{dx}f \tag{9.1.4}$$

また、

$$\frac{d}{d\alpha}y = g, \quad \frac{d}{d\alpha}p = \frac{d}{dx}g \tag{9.1.5}$$

(9.1.3) 式の右辺第二項の被積分関数は、上式から、

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{d\alpha}\mathrm{H}\left(x, \alpha g + f, \alpha\left(\frac{d}{dx}g\right) + \frac{d}{dx}f\right) \\
&\quad = \left(\frac{d}{d\alpha}y\right)\left(\frac{d}{dy}H\right) + \left(\frac{d}{d\alpha}p\right)\left(\frac{d}{dp}H\right) \\
&\quad = g\left(\frac{d}{dy}H\right) + \left(\frac{d}{dx}g\right)\left(\frac{d}{dp}H\right)
\end{aligned}$$

I の極値は (9.1.3) 式の右辺第二項：$dI = 0$ で与えられ、被積分関数の第二項に部分積分を適用すると、

$$\begin{aligned}
dI =& \alpha\int_a^b g\left(\frac{d}{dy}H\right) + \left(\frac{d}{dx}g\right)\left(\frac{d}{dp}H\right)dx \\
=& \alpha\int_a^b g\left(\frac{d}{dy}H\right) - g\left(\frac{d^2}{dp\,dx}H\right)dx \\
&+ \left[\alpha g\left(\frac{d}{dp}H\right)\right]_a^b = 0
\end{aligned}$$

$x = a, b$ では $g = 0$ であるから、上式の右辺第 2 項は零となる。任意関数の g に関係なく上式が零となるには、上式の右辺第一項の被積分関数が零とならねばならない。

$$g\left(\frac{d}{dy}H\right) - g\left(\frac{d^2}{dp\,dx}H\right) = 0$$

上式を整理すると下記となり、この微分方程式がオイラーの微分方程式である。

$$\frac{d}{dy}H - \frac{d^2}{dp\,dx}H = 0 \tag{9.1.6}$$

上式を変形し、

$$\frac{d}{dy}\left(H - \left(\frac{d}{dx}y\right)\left(\frac{d}{dp}H\right)\right) = 0$$

y で積分すると、

$$H - \left(\frac{d}{dx}y\right)\left(\frac{d}{dp}H\right) = C$$

上式から、

$$H - p\left(\frac{d}{dp}H\right) = C \tag{9.1.7}$$

9.1.2　多変数

関数 : u が変数 : x,y の関数であるとき、下記の関数 : $\mathrm{H}\left(x,y,u,\frac{d}{d\,x}\,u,\frac{d}{d\,y}\,u\right)$ の積分 : I の極値となる条件について調べる。

$$I=\int_{a_y}^{b_y}\int_{a_x}^{b_x}\mathrm{H}\left(x,y,u,\frac{d}{d\,x}\,u,\frac{d}{d\,y}\,u\right)dxdy \qquad (9.1.8)$$

```
kill(all);
depends(u,[f,g,\alpha]);
depends(f,[x,y]);
depends(g,[x,y]);
U1:u=f+\alpha*g;
DUX1:'diff(u,x,1)=diff(rhs(U1),x,1);
DUY1:'diff(u,y,1)=diff(rhs(U1),y,1);
I1:I='integrate('integrate(H(x,y,u,
 'diff(u,x,1),'diff(u,y,1)),x,a[x],b[x])
 ,y,a[y],b[y]);
subst([U1,DUX1,DUY1],I1);
I2:ev(%,diff);
I21:I=taylor(rhs(I2),\alpha,0,3);
DH1:'diff(H(x,y,alpha*g+f,alpha*(
 'diff(g,x,1))+'diff(f,x,1),alpha*
 ('diff(g,y,1))+'diff(f,y,1)),alpha,1);
depends(H,[x,y,u,p,q]);
depends(p,[f,g,\alpha]);
depends(q,[f,g,\alpha]);
P1:p='diff(u,x,1);
Q1:q='diff(u,y,1);
P2:subst([DUX1],P1);
Q2:subst([DUY1],Q1);
DH2:'diff(H,\alpha,1)=diff(H,\alpha,1);
AU1:diff(U1,\alpha,1);
AP2:diff(P2,\alpha,1);
AQ2:diff(Q2,\alpha,1);
DH3:subst([AU1,AP2,AQ2],DH2);
I3:dI=\alpha*'integrate('integrate(
 rhs(DH3),x,a[x],b[x]),y,a[y],b[y]);
subst([('diff(g,y,1))*('diff(H,q,1))=-g
 *'diff('diff(H,q,1),y,1)],%);
subst([('diff(g,x,1))*('diff(H,p,1))=-g
 *'diff('diff(H,p,1),x,1)],%);
g*('diff(H,u,1))-g*('diff(H,q,1,y,1))-g
 *('diff(H,p,1,x,1))=0;
expand(%/g);
```

```
'diff((H-'diff(u,x,1)*'diff(H,p,1)
 -'diff(u,y,1)*'diff(H,q,1)),u,1)=0;
(H-'diff(u,x,1)*'diff(H,p,1)
 -'diff(u,y,1)*'diff(H,q,1))=C;
(H-p*'diff(H,p,1)-q*'diff(H,q,1))=C;
```

(9.1.8) 式の I の極値を与える f が得られたとする。f をわずか : $\alpha\,g$ ずらした次式の u を考える。ここで α は微少定数、g は任意の x,y の関数で、端部で $g=0$ とする。

$$\begin{aligned}u=&\alpha\,g+f\\ \frac{d}{d\,x}\,u=&\alpha\left(\frac{d}{d\,x}\,g\right)+\frac{d}{d\,x}\,f\\ \frac{d}{d\,y}\,u=&\alpha\left(\frac{d}{d\,y}\,g\right)+\frac{d}{d\,y}\,f\end{aligned} \qquad (9.1.9)$$

ここで、H は $x, y, u, \frac{d}{d\,x}\,u, \frac{d}{d\,y}\,u$ の関数とし、u は f, g, α の関数、f, g は x, y の関数とする。(9.1.8) 式を α で Taylor 展開すると、

$$
\begin{aligned}
I =& \int_{a_y}^{b_y}\int_{a_x}^{b_x} \mathrm{H}\left(x, y, u, \frac{d}{d\,x}\,u, \frac{d}{d\,y}\,u\right) dxdy \\
=& \int_{a_y}^{b_y}\int_{a_x}^{b_x} \mathrm{H}\left(x, y, \alpha\,g + f, \alpha\left(\frac{d}{d\,x}\,g\right) + \frac{d}{d\,x}\,f, \alpha\left(\frac{d}{d\,y}\,g\right) + \frac{d}{d\,y}\,f\right) dxdy \\
=& \int_{a_y}^{b_y}\int_{a_x}^{b_x} \mathrm{H}\left(x, y, f, \frac{d}{d\,x}\,f, \frac{d}{d\,y}\,f\right) dxdy\bigg|_{\alpha=0} \\
&+ \left(\int_{a_y}^{b_y}\int_{a_x}^{b_x} \frac{d}{d\,\alpha}\,\mathrm{H}\left(x, y, \alpha\,g + f, \alpha\left(\frac{d}{d\,x}\,g\right) + \frac{d}{d\,x}\,f, \alpha\left(\frac{d}{d\,y}\,g\right) + \frac{d}{d\,y}\,f\right) dxdy\bigg|_{\alpha=0}\right)\alpha \\
&+ \frac{1}{2}\left(\int_{a_y}^{b_y}\int_{a_x}^{b_x} \frac{d^2}{d\,\alpha^2}\,\mathrm{H}\left(x, y, \alpha\,g + f, \alpha\left(\frac{d}{d\,x}\,g\right) + \frac{d}{d\,x}\,f, \alpha\left(\frac{d}{d\,y}\,g\right) + \frac{d}{d\,y}\,f\right) dxdy\bigg|_{\alpha=0}\right)\alpha^2 \\
&+ \frac{1}{6}\left(\int_{a_y}^{b_y}\int_{a_x}^{b_x} \frac{d^3}{d\,\alpha^3}\,\mathrm{H}\left(x, y, \alpha\,g + f, \alpha\left(\frac{d}{d\,x}\,g\right) + \frac{d}{d\,x}\,f, \alpha\left(\frac{d}{d\,y}\,g\right) + \frac{d}{d\,y}\,f\right) dxdy\bigg|_{\alpha=0}\right)\alpha^3 + ...
\end{aligned}
\tag{9.1.10}
$$

$\frac{d}{d\,x}\,u, \frac{d}{d\,y}\,u$ を次式のように置く。

$$
p = \frac{d}{d\,x}\,u = \alpha\left(\frac{d}{d\,x}\,g\right) + \frac{d}{d\,x}\,f, \quad q = \frac{d}{d\,y}\,u = \alpha\left(\frac{d}{d\,y}\,g\right) + \frac{d}{d\,y}\,f \tag{9.1.11}
$$

また、

$$
\frac{d}{d\,\alpha}\,u = g, \quad \frac{d}{d\,\alpha}\,p = \frac{d}{d\,x}\,g, \quad \frac{d}{d\,\alpha}\,q = \frac{d}{d\,y}\,g \tag{9.1.12}
$$

(9.1.10) 式の右辺第二項は、上式から、

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{d\,\alpha}\,\mathrm{H}\left(x, y, \alpha\,g + f, \alpha\left(\frac{d}{d\,x}\,g\right) + \frac{d}{d\,x}\,f, \alpha\left(\frac{d}{d\,y}\,g\right) + \frac{d}{d\,y}\,f\right) \\
&= \left(\frac{d}{d\,\alpha}\,u\right)\left(\frac{d}{d\,u}\,H\right) + \left(\frac{d}{d\,\alpha}\,q\right)\left(\frac{d}{d\,q}\,H\right) + \left(\frac{d}{d\,\alpha}\,p\right)\left(\frac{d}{d\,p}\,H\right) \\
&= g\left(\frac{d}{d\,u}\,H\right) + \left(\frac{d}{d\,y}\,g\right)\left(\frac{d}{d\,q}\,H\right) + \left(\frac{d}{d\,x}\,g\right)\left(\frac{d}{d\,p}\,H\right)
\end{aligned}
$$

I の極値は (9.1.10) 式の右辺第二項：$dI = 0$ で与えられる。次式の被積分関数の第二項、第三項に部分積分を適用し、積分境界では $g = 0$ であることを活用すると、

$$
\begin{aligned}
dI =& \alpha\int_{a_y}^{b_y}\int_{a_x}^{b_x} g\left(\frac{d}{d\,u}\,H\right) + \left(\frac{d}{d\,y}\,g\right)\left(\frac{d}{d\,q}\,H\right) + \left(\frac{d}{d\,x}\,g\right)\left(\frac{d}{d\,p}\,H\right) dxdy \\
=& \alpha\int_{a_y}^{b_y}\int_{a_x}^{b_x} g\left(\frac{d}{d\,u}\,H\right) - g\left(\frac{d^2}{d\,q\,d\,y}\,H\right) + \left(\frac{d}{d\,x}\,g\right)\left(\frac{d}{d\,p}\,H\right) dxdy \\
=& \alpha\int_{a_y}^{b_y}\int_{a_x}^{b_x} g\left(\frac{d}{d\,u}\,H\right) - g\left(\frac{d^2}{d\,q\,d\,y}\,H\right) - g\left(\frac{d^2}{d\,p\,d\,x}\,H\right) dxdy = 0
\end{aligned}
$$

上式が任意関数の g に関係なく零となるには、被積分関数が零とならねばならないので、次式を得る。これが多変数の場合のオイラーの微分方程式である。

$$
\frac{d}{d\,u}\,H - \frac{d^2}{d\,q\,d\,y}\,H - \frac{d^2}{d\,p\,d\,x}\,H = 0 \tag{9.1.13}
$$

上式を変形し、

$$
\frac{d}{d\,u}\left(-\left(\frac{d}{d\,y}\,u\right)\left(\frac{d}{d\,q}\,H\right) - \left(\frac{d}{d\,x}\,u\right)\left(\frac{d}{d\,p}\,H\right) + H\right) = 0
$$

u で積分すると、

$$
-q\left(\frac{d}{d\,q}\,H\right) - p\left(\frac{d}{d\,p}\,H\right) + H = C \tag{9.1.14}
$$

9.1.3　高階導関数

関数：y が変数：x の関数であるとき、下記の高階導関数を含んだ関数：$\mathrm{H}\left(x, y, \frac{d}{d\,x}\,y, \frac{d^2}{d\,x^2}\,y, \frac{d^3}{d\,x^3}\,y\right)$ の積分：I の極値となる条件について調べる。

$$I = \int_a^b \mathrm{H}\left(x, y, \frac{d}{d\,x}\,y, \frac{d^2}{d\,x^2}\,y, \frac{d^3}{d\,x^3}\,y\right) dx \qquad (9.1.15)$$

```
kill(all);
depends(y,[f,g,\alpha]);
depends(f,x);
depends(g,x);
Y1:y=f+\alpha*g;
DY1:'diff(y,x,1)=diff(rhs(Y1),x,1);
DY2:'diff(y,x,2)=diff(rhs(Y1),x,2);
DY3:'diff(y,x,3)=diff(rhs(Y1),x,3);
I1:I='integrate(H(x,y,'diff(y,x,1),
 'diff(y,x,2),'diff(y,x,3)),x,a,b);
subst([Y1,DY1,DY2,DY3],I1);
I2:ev(%,diff);
I21:I=taylor(rhs(I2),\alpha,0,3);
DH1:'diff(H(x,alpha*g+f,alpha*('diff(g,x,1)
 )+'diff(f,x,1),alpha*('diff(g,x,2))+
 'diff(f,x,2),alpha*('diff(g,x,3))+
 'diff(f,x,3)),alpha,1);
depends(H,[x,y,p,q,s]);
depends(p,[f,g,\alpha]);
P1:p='diff(y,x,1);
P2:subst([DY1],P1);
depends(q,[f,g,\alpha]);
Q1:q='diff(y,x,2);
Q2:subst([DY2],Q1);
depends(s,[f,g,\alpha]);
S1:s='diff(y,x,3);
S2:subst([DY3],S1);
DH2:'diff(H,\alpha,1)=diff(H,\alpha,1);
AY1:diff(Y1,\alpha,1);
AP1:diff(P2,\alpha,1);
AQ1:diff(Q2,\alpha,1);
AS1:diff(S2,\alpha,1);
DH3:subst([AY1,AP1,AQ1,AS1],DH2);
I3:dI='integrate(rhs(DH3),x,a,b);
subst([H=H(x,y,p,q,s),g=g(x)],I3);
```

```
I32:dI[1]='integrate(('diff(g(x),x,1))*
 ('diff(H(x,y,p,q,s),p,1)),x,a,b);
I33:dI[2]='integrate(g(x)*('diff(
 H(x,y,p,q,s),y,1)),x,a,b);
I35:dI[3]='integrate(('diff(g(x),x,2))*
 ('diff(H(x,y,p,q,s),q,1)),x,a,b);
I34:dI[4]='integrate(('diff(g(x),x,3))*
 ('diff(H(x,y,p,q,s),s,1)),x,a,b);
lhs(I32)=g(x)*'diff(H(x,y,p,q,s),p,1)-
 'integrate(g(x)*diff(
 'diff(H(x,y,p,q,s),p,1),x,1),x,a,b);
I321:lhs(%)=last(rhs(%));
I35;
lhs(I35)=('diff(g(x),x,1))*('diff(
 H(x,y,p,q,s),q,1))-'integrate((
 'diff(g(x),x,1))*diff(('diff(
 H(x,y,p,q,s),q,1)),x,1),x,a,b);
lhs(%)=last(rhs(%));
lhs(%)=-('diff(g(x),x,0))*('diff(
 H(x,y,p,q,s),q,1,x,1))+'integrate((
 'diff(g(x),x,0))*diff('diff(
 H(x,y,p,q,s),q,1),x,2),x,a,b);
I351:lhs(%)=first(rhs(%));
I34;
lhs(I34)=('diff(g(x),x,2))*('diff(
 H(x,y,p,q,s),s,1))-'integrate((
 'diff(g(x),x,2))*diff('diff(
 H(x,y,p,q,s),s,1),x,1),x,a,b);
lhs(%)=last(rhs(%));
lhs(%)=-('diff(g(x),x,1))*('diff(
 H(x,y,p,q,s),s,1,x,1))+'integrate((
 'diff(g(x),x,1))*('diff(
 H(x,y,p,q,s),s,1,x,2)),x,a,b);
lhs(%)=first(rhs(%));
lhs(%)=('diff(g(x),x,0))*('diff(
 H(x,y,p,q,s),s,1,x,2))-'integrate((
 'diff(g(x),x,0))*('diff(
 H(x,y,p,q,s),s,1,x,3)),x,a,b);
I341:lhs(%)=last(rhs(%));
lhs(I3)=\alpha*(rhs(I321)+rhs(I33)
 +rhs(I351)+rhs(I341));
g(x)*('diff(H(x,y,p,q,s),y,1))-g(x)*(
 'diff(H(x,y,p,q,s),x,1,p,1))+g(x)*(
 'diff(H(x,y,p,q,s),q,1,x,2))-g(x)*(
 'diff(H(x,y,p,q,s),s,1,x,3))=0;
subst([H(x,y,p,q,s)=H],%);
factor(%/g(x));
```

(9.1.15) 式の I の極値を与える f が得られたとする。f をわずか：$\alpha\, g$ ずらした次式の y を考える。ここで α は微少定数、g は任意の x の関数で、端部：$x = a, b$ で $g = 0, \frac{d}{d\,x}\, g = 0, \frac{d^2}{d\,x^2}\, g = 0$ とする。

$$y = \alpha\, g + f, \quad \frac{d}{d\,x}\, y = \alpha \left(\frac{d}{d\,x}\, g\right) + \frac{d}{d\,x}\, f, \quad \frac{d^2}{d\,x^2}\, y = \alpha \left(\frac{d^2}{d\,x^2}\, g\right) + \frac{d^2}{d\,x^2}\, f, \quad \frac{d^3}{d\,x^3}\, y = \alpha \left(\frac{d^3}{d\,x^3}\, g\right) + \frac{d^3}{d\,x^3}\, f \tag{9.1.16}$$

ここで、H は $x, y, \frac{d}{d\,x}\, y, \frac{d^2}{d\,x^2}\, y, \frac{d^3}{d\,x^3}\, y$ の関数とし、y は f, g, α の関数、f, g は x の関数とする。(9.1.15) 式を α で Taylor 展開すると、

$$\begin{aligned}
I &= \int_a^b \mathrm{H}\left(x, y, \frac{d}{d\,x}\, y, \frac{d^2}{d\,x^2}\, y, \frac{d^3}{d\,x^3}\, y\right) dx \\
&= \int_a^b \mathrm{H}\left(x, \alpha\, g + f, \alpha \left(\frac{d}{d\,x}\, g\right) + \frac{d}{d\,x}\, f, \alpha \left(\frac{d^2}{d\,x^2}\, g\right) + \frac{d^2}{d\,x^2}\, f, \alpha \left(\frac{d^3}{d\,x^3}\, g\right) + \frac{d^3}{d\,x^3}\, f\right) dx \\
&= \int_a^b \mathrm{H}\left(x, f, \frac{d}{d\,x}\, f, \frac{d^2}{d\,x^2}\, f, \frac{d^3}{d\,x^3}\, f\right) dx \bigg|_{\alpha=0} \\
&\quad + \left(\int_a^b \frac{d}{d\,\alpha}\, \mathrm{H}\left(x, \alpha\, g + f, \alpha \left(\frac{d}{d\,x}\, g\right) + \frac{d}{d\,x}\, f, \alpha \left(\frac{d^2}{d\,x^2}\, g\right) + \frac{d^2}{d\,x^2}\, f, \alpha \left(\frac{d^3}{d\,x^3}\, g\right) + \frac{d^3}{d\,x^3}\, f\right) dx \bigg|_{\alpha=0}\right) \alpha \\
&\quad + \frac{1}{2} \left(\int_a^b \frac{d^2}{d\,\alpha^2}\, \mathrm{H}\left(x, \alpha\, g + f, \alpha \left(\frac{d}{d\,x}\, g\right) + \frac{d}{d\,x}\, f, \alpha \left(\frac{d^2}{d\,x^2}\, g\right) + \frac{d^2}{d\,x^2}\, f, \alpha \left(\frac{d^3}{d\,x^3}\, g\right) + \frac{d^3}{d\,x^3}\, f\right) dx \bigg|_{\alpha=0}\right) \alpha^2 \\
&\quad + \frac{1}{6} \left(\int_a^b \frac{d^3}{d\,\alpha^3}\, \mathrm{H}\left(x, \alpha\, g + f, \alpha \left(\frac{d}{d\,x}\, g\right) + \frac{d}{d\,x}\, f, \alpha \left(\frac{d^2}{d\,x^2}\, g\right) + \frac{d^2}{d\,x^2}\, f, \alpha \left(\frac{d^3}{d\,x^3}\, g\right) + \frac{d^3}{d\,x^3}\, f\right) dx \bigg|_{\alpha=0}\right) \alpha^3 + \ldots
\end{aligned} \tag{9.1.17}$$

$\frac{d}{d\,x}\, y, \frac{d^2}{d\,x^2}\, y, \frac{d^3}{d\,x^3}\, y$ を次式のように置くと、

$$p = \frac{d}{d\,x}\, y = \alpha \left(\frac{d}{d\,x}\, g\right) + \frac{d}{d\,x}\, f, \quad q = \frac{d^2}{d\,x^2}\, y = \alpha \left(\frac{d^2}{d\,x^2}\, g\right) + \frac{d^2}{d\,x^2}\, f, \quad s = \frac{d^3}{d\,x^3}\, y = \alpha \left(\frac{d^3}{d\,x^3}\, g\right) + \frac{d^3}{d\,x^3}\, f \tag{9.1.18}$$

また、

$$\frac{d}{d\,\alpha}\, y = g, \quad \frac{d}{d\,\alpha}\, p = \frac{d}{d\,x}\, g, \quad \frac{d}{d\,\alpha}\, q = \frac{d^2}{d\,x^2}\, g, \quad \frac{d}{d\,\alpha}\, s = \frac{d^3}{d\,x^3}\, g \tag{9.1.19}$$

(9.1.17) 式の右辺第二項の被積分関数は、上式から、

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{d\,\alpha}\, \mathrm{H}\left(x, \alpha\, g + f, \alpha \left(\frac{d}{d\,x}\, g\right) + \frac{d}{d\,x}\, f, \alpha \left(\frac{d^2}{d\,x^2}\, g\right) + \frac{d^2}{d\,x^2}\, f, \alpha \left(\frac{d^3}{d\,x^3}\, g\right) + \frac{d^3}{d\,x^3}\, f\right) \\
&\quad = \left(\frac{d}{d\,\alpha}\, y\right) \left(\frac{d}{d\,y}\, H\right) + \left(\frac{d}{d\,\alpha}\, s\right) \left(\frac{d}{d\,s}\, H\right) + \left(\frac{d}{d\,\alpha}\, q\right) \left(\frac{d}{d\,q}\, H\right) + \left(\frac{d}{d\,\alpha}\, p\right) \left(\frac{d}{d\,p}\, H\right) \\
&\quad = g \left(\frac{d}{d\,y}\, H\right) + \left(\frac{d^3}{d\,x^3}\, g\right) \left(\frac{d}{d\,s}\, H\right) + \left(\frac{d^2}{d\,x^2}\, g\right) \left(\frac{d}{d\,q}\, H\right) + \left(\frac{d}{d\,x}\, g\right) \left(\frac{d}{d\,p}\, H\right)
\end{aligned}$$

上式から (9.1.17) 式の右辺第二項：dI は下記となり、

$$\begin{aligned}
dI &= \int_a^b g \left(\frac{d}{d\,y}\, H\right) + \left(\frac{d^3}{d\,x^3}\, g\right) \left(\frac{d}{d\,s}\, H\right) + \left(\frac{d^2}{d\,x^2}\, g\right) \left(\frac{d}{d\,q}\, H\right) + \left(\frac{d}{d\,x}\, g\right) \left(\frac{d}{d\,p}\, H\right) dx \\
&= \int_a^b \mathrm{g}\,(x) \left(\frac{d}{d\,y}\, \mathrm{H}\,(x, y, p, q, s)\right) + \left(\frac{d^3}{d\,x^3}\, \mathrm{g}\,(x)\right) \left(\frac{d}{d\,s}\, \mathrm{H}\,(x, y, p, q, s)\right) \\
&\qquad + \left(\frac{d^2}{d\,x^2}\, \mathrm{g}\,(x)\right) \left(\frac{d}{d\,q}\, \mathrm{H}\,(x, y, p, q, s)\right) + \left(\frac{d}{d\,x}\, \mathrm{g}\,(x)\right) \left(\frac{d}{d\,p}\, \mathrm{H}\,(x, y, p, q, s)\right) dx
\end{aligned} \tag{9.1.20}$$

上式の右辺第四項：dI_1、右辺第一項：dI_2、右辺第三項：dI_3、右辺第二項：dI_4 とし、部分積分を適用すると、

$$\begin{aligned}
dI_1 &= \int_a^b \left(\frac{d}{d\,x}\, \mathrm{g}\,(x)\right) \left(\frac{d}{d\,p}\, \mathrm{H}\,(x, y, p, q, s)\right) dx \\
&= \left[\mathrm{g}\,(x) \left(\frac{d}{d\,p}\, \mathrm{H}\,(x, y, p, q, s)\right)\right]_a^b - \int_a^b \mathrm{g}\,(x) \left(\frac{d^2}{d\,p\,d\,x}\, \mathrm{H}\,(x, y, p, q, s)\right) dx \\
&= -\int_a^b \mathrm{g}\,(x) \left(\frac{d^2}{d\,p\,d\,x}\, \mathrm{H}\,(x, y, p, q, s)\right) dx
\end{aligned} \tag{9.1.21}$$

$$dI_2 = \int_a^b \mathrm{g}\,(x)\,\left(\frac{d}{d\,y}\,\mathrm{H}\,(x,y,p,q,s)\right) dx \tag{9.1.22}$$

$$\begin{aligned}
dI_3 &= \int_a^b \left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,\mathrm{g}\,(x)\right)\,\left(\frac{d}{d\,q}\,\mathrm{H}\,(x,y,p,q,s)\right) dx \\
&= \left[\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{g}\,(x)\right)\,\left(\frac{d}{d\,q}\,\mathrm{H}\,(x,y,p,q,s)\right)\right]_a^b - \int_a^b \left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{g}\,(x)\right)\,\left(\frac{d^2}{d\,q\,d\,x}\,\mathrm{H}\,(x,y,p,q,s)\right) dx \\
&= -\int_a^b \left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{g}\,(x)\right)\,\left(\frac{d^2}{d\,q\,d\,x}\,\mathrm{H}\,(x,y,p,q,s)\right) dx \\
&= \int_a^b \mathrm{g}\,(x)\,\left(\frac{d^3}{d\,q\,d\,x^2}\,\mathrm{H}\,(x,y,p,q,s)\right) dx - \left[\mathrm{g}\,(x)\,\left(\frac{d^2}{d\,q\,d\,x}\,\mathrm{H}\,(x,y,p,q,s)\right)\right]_a^b \\
&= \int_a^b \mathrm{g}\,(x)\,\left(\frac{d^3}{d\,q\,d\,x^2}\,\mathrm{H}\,(x,y,p,q,s)\right) dx
\end{aligned} \tag{9.1.23}$$

$$\begin{aligned}
dI_4 &= \int_a^b \left(\frac{d^3}{d\,x^3}\,\mathrm{g}\,(x)\right)\,\left(\frac{d}{d\,s}\,\mathrm{H}\,(x,y,p,q,s)\right) dx \\
&= \left[\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,\mathrm{g}\,(x)\right)\,\left(\frac{d}{d\,s}\,\mathrm{H}\,(x,y,p,q,s)\right)\right]_a^b - \int_a^b \left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,\mathrm{g}\,(x)\right)\,\left(\frac{d^2}{d\,s\,d\,x}\,\mathrm{H}\,(x,y,p,q,s)\right) dx \\
&= -\int_a^b \left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,\mathrm{g}\,(x)\right)\,\left(\frac{d^2}{d\,s\,d\,x}\,\mathrm{H}\,(x,y,p,q,s)\right) dx \\
&= \int_a^b \left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{g}\,(x)\right)\,\left(\frac{d^3}{d\,s\,d\,x^2}\,\mathrm{H}\,(x,y,p,q,s)\right) dx - \left[\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{g}\,(x)\right)\,\left(\frac{d^2}{d\,s\,d\,x}\,\mathrm{H}\,(x,y,p,q,s)\right)\right]_a^b \\
&= \int_a^b \left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{g}\,(x)\right)\,\left(\frac{d^3}{d\,s\,d\,x^2}\,\mathrm{H}\,(x,y,p,q,s)\right) dx \\
&= \left[\mathrm{g}\,(x)\,\left(\frac{d^3}{d\,s\,d\,x^2}\,\mathrm{H}\,(x,y,p,q,s)\right)\right]_a^b - \int_a^b \mathrm{g}\,(x)\,\left(\frac{d^4}{d\,s\,d\,x^3}\,\mathrm{H}\,(x,y,p,q,s)\right) dx \\
&= -\int_a^b \mathrm{g}\,(x)\,\left(\frac{d^4}{d\,s\,d\,x^3}\,\mathrm{H}\,(x,y,p,q,s)\right) dx
\end{aligned} \tag{9.1.24}$$

dI_1, dI_2, dI_3, dI_4 をまとめると下記となる。I の極値は (9.1.17) 式の右辺第二項、即ち、次式が $dI = 0$ で与えられる。

$$\begin{aligned}
dI &= dI_1 + dI_2 + dI_3 + dI_4 \\
&= \alpha\left(\int_a^b \mathrm{g}\,(x)\,\left(\frac{d}{d\,y}\,\mathrm{H}\,(x,y,p,q,s)\right) dx - \int_a^b \mathrm{g}\,(x)\,\left(\frac{d^4}{d\,s\,d\,x^3}\,\mathrm{H}\,(x,y,p,q,s)\right) dx\right. \\
&\qquad \left. + \int_a^b \mathrm{g}\,(x)\,\left(\frac{d^3}{d\,q\,d\,x^2}\,\mathrm{H}\,(x,y,p,q,s)\right) dx - \int_a^b \mathrm{g}\,(x)\,\left(\frac{d^2}{d\,p\,d\,x}\,\mathrm{H}\,(x,y,p,q,s)\right) dx\right) = 0
\end{aligned}$$

上式が任意関数の g に関係なく零となるには、上式の被積分関数が零とならねばならないので、次式を得る。

$$\begin{aligned}
&\mathrm{g}\,(x)\,\left(\frac{d}{d\,y}\,\mathrm{H}\,(x,y,p,q,s)\right) - \mathrm{g}\,(x)\,\left(\frac{d^4}{d\,s\,d\,x^3}\,\mathrm{H}\,(x,y,p,q,s)\right) \\
&\qquad + \mathrm{g}\,(x)\,\left(\frac{d^3}{d\,q\,d\,x^2}\,\mathrm{H}\,(x,y,p,q,s)\right) - \mathrm{g}\,(x)\,\left(\frac{d^2}{d\,p\,d\,x}\,\mathrm{H}\,(x,y,p,q,s)\right) = 0
\end{aligned}$$

上式を整理すると下記となり、この微分方程式が高階導関数の場合のオイラーの微分方程式である。

$$\frac{d}{d\,y}\,H - \frac{d^4}{d\,s\,d\,x^3}\,H + \frac{d^3}{d\,q\,d\,x^2}\,H - \frac{d^2}{d\,p\,d\,x}\,H = 0 \tag{9.1.25}$$

上式から、高階導関数の場合のオイラーの微分方程式の一般形は、

$$\frac{d}{d\,y}\,H - \frac{d}{d\,x}\left(\frac{d}{d\,y'}\,H\right) + \frac{d^2}{d\,x^2}\left(\frac{d}{d\,y''}\,H\right) - \frac{d^3}{d\,x^3}\left(\frac{d}{d\,y'''}\,H\right) \cdots + (-1)^n\,\frac{d^n}{d\,x^n}\left(\frac{d}{d\,y^{(n)}}\,H\right) = 0 \tag{9.1.26}$$

9.1.4 多未知数

関数 : y, z が変数 : x の関数であるとき、下記の関数 : $\mathrm{H}\left(x, y, \frac{d}{dx}\, y, z, \frac{d}{dx}\, z\right)$ の積分 : I の極値となる条件について調べる。

$$I = \int_a^b \mathrm{H}\left(x, y, \frac{d}{dx}\, y, z, \frac{d}{dx}\, z\right) dx \tag{9.1.27}$$

```
kill(all);
depends(y,[f,g,\alpha]);
depends(z,[c,e,\alpha]);
depends(f,x);
depends(g,x);
depends(c,x);
depends(e,x);
Y1:y=f+\alpha*g;
Z1:z=c+\alpha*e;
DY1:'diff(y,x,1)=diff(rhs(Y1),x,1);
DZ1:'diff(z,x,1)=diff(rhs(Z1),x,1);
I1:I='integrate(H(x,y,'diff(y,x,1),z,
 'diff(z,x,1)),x,a,b);
subst([Y1,DY1,Z1,DZ1],I1);
I2:ev(%,diff);
I21:I=taylor(rhs(I2),\alpha,0,3);
DH1:dI='integrate('diff(H(x,alpha*g+f,
 alpha*('diff(g,x,1))+'diff(f,x,1),alpha*e
 +c,alpha*('diff(e,x,1))+'diff(c,x,1)),
alpha,1),x,a,b);
depends(H,[x,y,z,p,q]);
depends(p,[f,g,\alpha]);
depends(q,[c,e,\alpha]);
P1:p='diff(y,x,1);
P2:subst([DY1],P1);
Q1:q='diff(z,x,1);
Q2:subst([DZ1],Q1);
DH2:'diff(H,\alpha,1)=diff(H,\alpha,1);
AY1:diff(Y1,\alpha,1);
AZ1:diff(Z1,\alpha,1);
AP1:diff(P2,\alpha,1);
AQ1:diff(Q2,\alpha,1);
DH3:subst([AY1,AZ1,AP1,AQ1,H=H(x,y,p,z,q),
 e=e(x),g=g(x)],DH2);
I3:dI=\alpha*'integrate(rhs(DH3),x,a,b);
I31:first(rhs(DH3));
I32:first(rest(rhs(DH3),2));
I33:last(rest(rhs(DH3),-2));
I34:last(rhs(DH3));
```

```
I311:dI[1]='integrate(I31,x,a,b);
I321:dI[2]='integrate(I32,x,a,b);
I331:dI[3]='integrate(I33,x,a,b);
I341:dI[4]='integrate(I34,x,a,b);
lhs(I321)=('diff(e(x),x,0))*('diff(
 H(x,y,p,z,q),q,1))-'integrate((
 'diff(e(x),x,0))*'diff('diff(
 H(x,y,p,z,q),q,1),x,1),x,a,b);
I322:lhs(%)=last(rhs(%));
lhs(I341)=('diff(g(x),x,0))*('diff(H(
 x,y,p,z,q),p,1))-'integrate((
 'diff(g(x),x,0))*'diff('diff(
 H(x,y,p,z,q),p,1),x,1),x,a,b);
I342:lhs(%)=last(rhs(%));
lhs(I3)=\alpha*(rhs(I311)+rhs(I322)
 +rhs(I331)+rhs(I342));
e(x)*('diff(H(x,y,p,z,q),z,1))+g(x)*
 ('diff(H(x,y,p,z,q),y,1))-e(x)*('diff(
 H(x,y,p,z,q),q,1,x,1))-g(x)*('diff(
 H(x,y,p,z,q),p,1,x,1))=0;
subst([H(x,y,p,z,q)=H,e(x)=e,g(x)=g],%);
e*('diff(H,z,1)-'diff(H,q,1,x,1))
 +g*('diff(H,y,1)-'diff(H,p,1,x,1))=0;
'diff(H,y,1)-'diff(H,p,1,x,1)=0;
'diff(H,z,1)-'diff(H,q,1,x,1)=0;
```

(9.1.27) 式の I の極値を与える f, c が得られたとする。f, c をわずか : $\alpha\, g$, $\alpha\, e$ ずらした次式の y, z を考える。ここで α は微少定数、g, e は任意の x の関数で、端部 : $x = a, b$ で $g = 0$, $e = 0$ とする。

$$\begin{aligned} y =& \alpha\, g + f, \quad z = \alpha\, e + c \\ \frac{d}{dx}\, y =& \alpha \left(\frac{d}{dx}\, g\right) + \frac{d}{dx}\, f \\ \frac{d}{dx}\, z =& \alpha \left(\frac{d}{dx}\, e\right) + \frac{d}{dx}\, c \end{aligned} \tag{9.1.28}$$

ここで、H は $x, y, \frac{d}{dx}y, z, \frac{d}{dx}z$ の関数とし、y は f, g, α の関数で f, g は x の関数、z は e, c, α の関数で c, e は x の関数とする。(9.1.27) 式を α で Taylor 展開すると、

$$\begin{aligned}
I =& \int_a^b \mathrm{H}\left(x, y, \frac{d}{dx}y, z, \frac{d}{dx}z\right) dx \\
=& \int_a^b \mathrm{H}\left(x, \alpha g + f, \alpha\left(\frac{d}{dx}g\right) + \frac{d}{dx}f, \alpha e + c, \alpha\left(\frac{d}{dx}e\right) + \frac{d}{dx}c\right) dx \\
=& \int_a^b \mathrm{H}\left(x, f, \frac{d}{dx}f, c, \frac{d}{dx}c\right) dx\Bigg|_{\alpha=0} \\
&+ \left(\int_a^b \frac{d}{d\alpha}\mathrm{H}\left(x, \alpha g + f, \alpha\left(\frac{d}{dx}g\right) + \frac{d}{dx}f, \alpha e + c, \alpha\left(\frac{d}{dx}e\right) + \frac{d}{dx}c\right) dx\Bigg|_{\alpha=0}\right)\alpha \\
&+ \frac{1}{2}\left(\int_a^b \frac{d^2}{d\alpha^2}\mathrm{H}\left(x, \alpha g + f, \alpha\left(\frac{d}{dx}g\right) + \frac{d}{dx}f, \alpha e + c, \alpha\left(\frac{d}{dx}e\right) + \frac{d}{dx}c\right) dx\Bigg|_{\alpha=0}\right)\alpha^2 \\
&+ \frac{1}{6}\left(\int_a^b \frac{d^3}{d\alpha^3}\mathrm{H}\left(x, \alpha g + f, \alpha\left(\frac{d}{dx}g\right) + \frac{d}{dx}f, \alpha e + c, \alpha\left(\frac{d}{dx}e\right) + \frac{d}{dx}c\right) dx\Bigg|_{\alpha=0}\right)\alpha^3 + \ldots
\end{aligned} \tag{9.1.29}$$

$\frac{d}{dx}y$, $\frac{d}{dx}z$, を次式のように置く。

$$p = \frac{d}{dx}y = \alpha\left(\frac{d}{dx}g\right) + \frac{d}{dx}f, \quad q = \frac{d}{dx}z = \alpha\left(\frac{d}{dx}e\right) + \frac{d}{dx}c \tag{9.1.30}$$

また、

$$\frac{d}{d\alpha}y = g, \quad \frac{d}{d\alpha}z = e, \quad \frac{d}{d\alpha}p = \frac{d}{dx}g, \quad \frac{d}{d\alpha}q = \frac{d}{dx}e \tag{9.1.31}$$

(9.1.29) 式の右辺第二項の被積分関数は、上式から、

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{d\alpha}\mathrm{H}\left(x, \alpha g + f, \alpha\left(\frac{d}{dx}g\right) + \frac{d}{dx}f, \alpha e + c, \alpha\left(\frac{d}{dx}e\right) + \frac{d}{dx}c\right) \\
&= \left(\frac{d}{d\alpha}z\right)\left(\frac{d}{dz}H\right) + \left(\frac{d}{d\alpha}y\right)\left(\frac{d}{dy}H\right) + \left(\frac{d}{d\alpha}q\right)\left(\frac{d}{dq}H\right) + \left(\frac{d}{d\alpha}p\right)\left(\frac{d}{dp}H\right) \\
&= \mathrm{e}(x)\left(\frac{d}{dz}\mathrm{H}(x, y, p, z, q)\right) + \mathrm{g}(x)\left(\frac{d}{dy}\mathrm{H}(x, y, p, z, q)\right) \\
&\quad + \left(\frac{d}{dx}\mathrm{e}(x)\right)\left(\frac{d}{dq}\mathrm{H}(x, y, p, z, q)\right) + \left(\frac{d}{dx}\mathrm{g}(x)\right)\left(\frac{d}{dp}\mathrm{H}(x, y, p, z, q)\right)
\end{aligned}$$

上式から (9.1.29) 式の右辺第二項：dI は下記となり、

$$\begin{aligned}
dI = \alpha\int_a^b & \mathrm{e}(x)\left(\frac{d}{dz}\mathrm{H}(x, y, p, z, q)\right) + \mathrm{g}(x)\left(\frac{d}{dy}\mathrm{H}(x, y, p, z, q)\right) \\
&+ \left(\frac{d}{dx}\mathrm{e}(x)\right)\left(\frac{d}{dq}\mathrm{H}(x, y, p, z, q)\right) + \left(\frac{d}{dx}\mathrm{g}(x)\right)\left(\frac{d}{dp}\mathrm{H}(x, y, p, z, q)\right) dx
\end{aligned} \tag{9.1.32}$$

上式の右辺第三項：dI_2、右辺第四項：dI_4 とし、部分積分を適用すると、

$$\begin{aligned}
dI_2 &= \int_a^b \left(\frac{d}{dx}\mathrm{e}(x)\right)\left(\frac{d}{dq}\mathrm{H}(x, y, p, z, q)\right) dx \\
&= \left[\mathrm{e}(x)\left(\frac{d}{dq}\mathrm{H}(x, y, p, z, q)\right)\right]_a^b - \int_a^b \mathrm{e}(x)\left(\frac{d^2}{dq\,dx}\mathrm{H}(x, y, p, z, q)\right) dx \\
&= -\int_a^b \mathrm{e}(x)\left(\frac{d^2}{dq\,dx}\mathrm{H}(x, y, p, z, q)\right) dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
dI_4 &= \int_a^b \left(\frac{d}{dx}\mathrm{g}(x)\right)\left(\frac{d}{dp}\mathrm{H}(x, y, p, z, q)\right) dx \\
&= \left[\mathrm{g}(x)\left(\frac{d}{dp}\mathrm{H}(x, y, p, z, q)\right)\right]_a^b - \int_a^b \mathrm{g}(x)\left(\frac{d^2}{dp\,dx}\mathrm{H}(x, y, p, z, q)\right) dx \\
&= -\int_a^b \mathrm{g}(x)\left(\frac{d^2}{dp\,dx}\mathrm{H}(x, y, p, z, q)\right) dx
\end{aligned}$$

上式を (9.1.32) 式を代入すると次式となる。I の極値は (9.1.29) 式の右辺第二項、即ち、次式の $dI = 0$ で与えられ、

$$dI = \alpha \left(\int_a^b \mathrm{e}\,(x) \left(\frac{d}{d\,z} \mathrm{H}\,(x,y,p,z,q) \right) dx + \int_a^b \mathrm{g}\,(x) \left(\frac{d}{d\,y} \mathrm{H}\,(x,y,p,z,q) \right) dx \right.$$
$$\left. - \int_a^b \mathrm{e}\,(x) \left(\frac{d^2}{d\,q\,d\,x} \mathrm{H}\,(x,y,p,z,q) \right) dx - \int_a^b \mathrm{g}\,(x) \left(\frac{d^2}{d\,p\,d\,x} \mathrm{H}\,(x,y,p,z,q) \right) dx \right) = 0$$

上式が任意の関数 : g, e に関係なく成り立つには、上式の被積分関数が零とならねばならないので、次式を得る。

$$\mathrm{e}\,(x) \left(\frac{d}{d\,z} \mathrm{H}\,(x,y,p,z,q) \right) + \mathrm{g}\,(x) \left(\frac{d}{d\,y} \mathrm{H}\,(x,y,p,z,q) \right)$$
$$- \mathrm{e}\,(x) \left(\frac{d^2}{d\,q\,d\,x} \mathrm{H}\,(x,y,p,z,q) \right) - \mathrm{g}\,(x) \left(\frac{d^2}{d\,p\,d\,x} \mathrm{H}\,(x,y,p,z,q) \right) = 0$$

上式を整理すると,

$$e \left(\frac{d}{d\,z} H - \frac{d^2}{d\,q\,d\,x} H \right) + g \left(\frac{d}{d\,y} H - \frac{d^2}{d\,p\,d\,x} H \right) = 0$$

上式で g, e は任意関数であるから、次の二式、それぞれが零とならねばならない。この微分方程式が多未知数の場合のオイラーの微分方程式となる。

$$\frac{d}{d\,y} H - \frac{d^2}{d\,p\,d\,x} H = 0, \quad \frac{d}{d\,z} H - \frac{d^2}{d\,q\,d\,x} H = 0 \tag{9.1.33}$$

9.1.5　付帯条件のついた変分問題

関数：y が変数：x の関数であるとき、下記の関数：$\mathrm{F}\left(x,y,\frac{d}{d\,x}\,y\right)$ の積分：I とする。

$$I=\int_a^b \mathrm{F}\left(x,y,\frac{d}{d\,x}\,y\right)dx \tag{9.1.34}$$

下記の定積分の付帯条件を満たし、I が極値となる条件について調べる。[1]

$$J=\int_a^b \mathrm{G}\left(x,y,\frac{d}{d\,x}\,y\right)dx=C \tag{9.1.35}$$

```
kill(all);
depends(y,[g,h,c,d]);
depends(f,x);
depends(g,x);
depends(h,x);
depends(e,[c,d,x]);
depends(F,[x,y,p]);
depends(G,[x,y,p]);
depends(p,[f,g,h,c,d]);
Y1:y=f+e;
E1:e=g*c+h*d;
Y2:subst([E1],Y1);
P1:p='diff(y,x,1);
P2:rhs(%)=lhs(%);
DY1:'diff(y,x,1)=diff(rhs(Y2),x,1);
DY2:p=rhs(%);
DYC1:'diff(y,c,1)=diff(rhs(Y2),c,1);
DPC1:'diff(p,c,1)=diff(rhs(DY2),c,1);
DYD1:'diff(y,d,1)=diff(rhs(Y2),d,1);
DPD1:'diff(p,d,1)=diff(rhs(DY2),d,1);
F1:F(x,y,'diff(y,x,1));
G1:G(x,y,'diff(y,x,1));
F2:subst([DY1,Y1],F1);
G2:subst([DY1,Y1],G1);
```

```
I1:I='integrate(F(x,y,'diff(y,x,1)),x,a,b);
J1:J='integrate(G(x,y,'diff(y,x,1)),x,a,b);
I2:subst([DY1,Y1],I1);
I21:I=taylor(rhs(I2),c,0,3)+taylor(rhs(I2)
 ,d,0,3);
I3:dI=last(taylor(rhs(I2),c,0,1))+last(
 taylor(rhs(I2),d,0,1));
J2:subst([DY1,Y1],J1);
J21:J=taylor(rhs(J2),c,0,3)+taylor(
 rhs(J2),d,0,3);
J3:dJ=last(taylor(rhs(J2),c,0,1))+last(
 taylor(rhs(J2),d,0,1));
```

(9.1.34) 式の I の極値を与える f が得られたとする。f をわずか：e ずらした次式の y を考える。ここで f は x の関数とする。

$$y=f+e \tag{9.1.36}$$

また、ずらした e は次式で示すように微少定数：c,d、g,h は任意の x の関数で、端部：$x=a,b$ で $g=0,h=0$ とする。

$$e=d\,h+c\,g \tag{9.1.37}$$

上式から、y は、

$$y=d\,h+c\,g+f \tag{9.1.38}$$

上式を x で微分し、p と置く。

$$\frac{d}{d\,x}\,y=p=d\left(\frac{d}{d\,x}\,h\right)+c\left(\frac{d}{d\,x}\,g\right)+\frac{d}{d\,x}\,f \tag{9.1.39}$$

また、下記の関係がある。

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\,c}\,y=g,\quad \frac{d}{d\,c}\,p=\frac{d}{d\,x}\,g\\ \frac{d}{d\,d}\,y=h,\quad \frac{d}{d\,d}\,p=\frac{d}{d\,x}\,h\end{aligned} \tag{9.1.40}$$

[1]鬼頭史城：変分法と最適化問題、ダイアモンド社 1969　P.89

(9.1.34) 式を c および d で Taylot 展開すると、

$$\begin{aligned}
I =& \int_a^b \mathrm{F}\left(x, f+e, d\left(\frac{d}{d\,x}\,h\right)+c\left(\frac{d}{d\,x}\,g\right)+\frac{d}{d\,x}\,f\right)dx \\
=& \int_a^b \mathrm{F}\left(x, f+e, c\left(\frac{d}{d\,x}\,g\right)+\frac{d}{d\,x}\,f\right)dx\Bigg|_{d=0} + \int_a^b \mathrm{F}\left(x, f+e, d\left(\frac{d}{d\,x}\,h\right)+\frac{d}{d\,x}\,f\right)dx\Bigg|_{c=0} \\
&+ \left(\int_a^b \frac{d}{d\,d}\,\mathrm{F}\left(x, f+e, d\left(\frac{d}{d\,x}\,h\right)+c\left(\frac{d}{d\,x}\,g\right)+\frac{d}{d\,x}\,f\right)dx\Bigg|_{d=0}\right) d \\
&+ \frac{1}{2}\left(\int_a^b \frac{d^2}{d\,d^2}\,\mathrm{F}\left(x, f+e, d\left(\frac{d}{d\,x}\,h\right)+c\left(\frac{d}{d\,x}\,g\right)+\frac{d}{d\,x}\,f\right)dx\Bigg|_{d=0}\right) d^2 \\
&+ \frac{1}{6}\left(\int_a^b \frac{d^3}{d\,d^3}\,\mathrm{F}\left(x, f+e, d\left(\frac{d}{d\,x}\,h\right)+c\left(\frac{d}{d\,x}\,g\right)+\frac{d}{d\,x}\,f\right)dx\Bigg|_{d=0}\right) d^3 + \ldots \\
&+ \left(\int_a^b \frac{d}{d\,c}\,\mathrm{F}\left(x, f+e, d\left(\frac{d}{d\,x}\,h\right)+c\left(\frac{d}{d\,x}\,g\right)+\frac{d}{d\,x}\,f\right)dx\Bigg|_{c=0}\right) c \\
&+ \frac{1}{2}\left(\int_a^b \frac{d^2}{d\,c^2}\,\mathrm{F}\left(x, f+e, d\left(\frac{d}{d\,x}\,h\right)+c\left(\frac{d}{d\,x}\,g\right)+\frac{d}{d\,x}\,f\right)dx\Bigg|_{c=0}\right) c^2 \\
&+ \frac{1}{6}\left(\int_a^b \frac{d^3}{d\,c^3}\,\mathrm{F}\left(x, f+e, d\left(\frac{d}{d\,x}\,h\right)+c\left(\frac{d}{d\,x}\,g\right)+\frac{d}{d\,x}\,f\right)dx\Bigg|_{c=0}\right) c^3 + \ldots
\end{aligned} \tag{9.1.41}$$

(9.1.41) 式の c の一乗項、d の一乗項を dI とし、次式となる。

$$\begin{aligned}
dI =& d\left(\int_a^b \frac{d}{d\,d}\,\mathrm{F}\left(x, f+e, d\left(\frac{d}{d\,x}\,h\right)+c\left(\frac{d}{d\,x}\,g\right)+\frac{d}{d\,x}\,f\right)dx\Bigg|_{d=0}\right) \\
&+ c\left(\int_a^b \frac{d}{d\,c}\,\mathrm{F}\left(x, f+e, d\left(\frac{d}{d\,x}\,h\right)+c\left(\frac{d}{d\,x}\,g\right)+\frac{d}{d\,x}\,f\right)dx\Bigg|_{c=0}\right)
\end{aligned} \tag{9.1.42}$$

上記の I と同様に (9.1.35) 式の J について同様に、

$$\begin{aligned}
J =& \int_a^b \mathrm{G}\left(x, f+e, d\left(\frac{d}{d\,x}\,h\right)+c\left(\frac{d}{d\,x}\,g\right)+\frac{d}{d\,x}\,f\right)dx \\
=& \int_a^b \mathrm{G}\left(x, f+e, c\left(\frac{d}{d\,x}\,g\right)+\frac{d}{d\,x}\,f\right)dx\Bigg|_{d=0} + \int_a^b \mathrm{G}\left(x, f+e, d\left(\frac{d}{d\,x}\,h\right)+\frac{d}{d\,x}\,f\right)dx\Bigg|_{c=0} \\
&+ \left(\int_a^b \frac{d}{d\,d}\,\mathrm{G}\left(x, f+e, d\left(\frac{d}{d\,x}\,h\right)+c\left(\frac{d}{d\,x}\,g\right)+\frac{d}{d\,x}\,f\right)dx\Bigg|_{d=0}\right) d \\
&+ \frac{1}{2}\left(\int_a^b \frac{d^2}{d\,d^2}\,\mathrm{G}\left(x, f+e, d\left(\frac{d}{d\,x}\,h\right)+c\left(\frac{d}{d\,x}\,g\right)+\frac{d}{d\,x}\,f\right)dx\Bigg|_{d=0}\right) d^2 \\
&+ \frac{1}{6}\left(\int_a^b \frac{d^3}{d\,d^3}\,\mathrm{G}\left(x, f+e, d\left(\frac{d}{d\,x}\,h\right)+c\left(\frac{d}{d\,x}\,g\right)+\frac{d}{d\,x}\,f\right)dx\Bigg|_{d=0}\right) d^3 + \ldots \\
&+ \left(\int_a^b \frac{d}{d\,c}\,\mathrm{G}\left(x, f+e, d\left(\frac{d}{d\,x}\,h\right)+c\left(\frac{d}{d\,x}\,g\right)+\frac{d}{d\,x}\,f\right)dx\Bigg|_{c=0}\right) c \\
&+ \frac{1}{2}\left(\int_a^b \frac{d^2}{d\,c^2}\,\mathrm{G}\left(x, f+e, d\left(\frac{d}{d\,x}\,h\right)+c\left(\frac{d}{d\,x}\,g\right)+\frac{d}{d\,x}\,f\right)dx\Bigg|_{c=0}\right) c^2 \\
&+ \frac{1}{6}\left(\int_a^b \frac{d^3}{d\,c^3}\,\mathrm{G}\left(x, f+e, d\left(\frac{d}{d\,x}\,h\right)+c\left(\frac{d}{d\,x}\,g\right)+\frac{d}{d\,x}\,f\right)dx\Bigg|_{c=0}\right) c^3 + \ldots
\end{aligned} \tag{9.1.43}$$

(9.1.43) 式の c の一乗項、d の一乗項を dJ とし、次式となる。

$$\begin{aligned} dJ =& d\left(\int_a^b \frac{d}{d\,d}\,\mathrm{G}\left(x, f+e, d\left(\frac{d}{d\,x}\,h\right)+c\left(\frac{d}{d\,x}\,g\right)+\frac{d}{d\,x}\,f\right)dx\bigg|_{d=0}\right)\\ &+c\left(\int_a^b \frac{d}{d\,c}\,\mathrm{G}\left(x, f+e, d\left(\frac{d}{d\,x}\,h\right)+c\left(\frac{d}{d\,x}\,g\right)+\frac{d}{d\,x}\,f\right)dx\bigg|_{c=0}\right) \end{aligned} \tag{9.1.44}$$

```
DFC1:'diff(F,c,1)=diff(F,c,1);
DFC2:subst([DYC1,DPC1],%);
DFD1:'diff(F,d,1)=diff(F,d,1);
DFD2:subst([DYD1,DPD1],%);
DF1:c*DFC2+d*DFD2;
DF11:subst([F=F(x,y,'diff(y,x,1)),h=h(x),
 g=g(x)],%);
dI='integrate(lhs(DF11),x,a,b);
DI1:dI='integrate(first(rhs(DF11)),x,a,b)
 +'integrate(last(rhs(DF11)),x,a,b);
subst(['diff(h(x),x,1)=-h(x),'diff(g(x),x,
 1)=-g(x),'diff(F(x,y,'diff(y,x,1)),p,1)
 ='diff('diff(F(x,y,'diff(y,x,1)),p,1),x,1)
 ],%);
DI2:factor(%);
DJ2:subst([dI=dJ,F=G],%);
DI3:first(rhs(DI2))=-last(rhs(DI2));
DJ3:first(rhs(DJ2))=-last(rhs(DJ2));
DI3/DJ3;
lhs(%)=K;
%*denom(lhs(%));
```

```
lhs(%)-rhs(%)=0;
%*denom(first(lhs(%)));
('diff(F(x,y,'diff(y,x,1)),y,1)-'diff(F(x,
 y,'diff(y,x,1)),p,1,x,1))-K*('diff(
 G(x,y,'diff(y,x,1)),y,1)-'diff(
 G(x,y,'diff(y,x,1)),p,1,x,1))=0;
'diff((F-K*G),y,1)
 -'diff('diff((F-K*G),p,1),x,1)=0;
H=F-K*G;
```

(9.1.42) 式から、$\frac{d}{d\,c}\,F$, $\frac{d}{d\,d}\,F$ は、

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\,c}\,F =& \left(\frac{d}{d\,c}\,y\right)\left(\frac{d}{d\,y}\,F\right)+\left(\frac{d}{d\,c}\,p\right)\left(\frac{d}{d\,p}\,F\right)\\ =& g\left(\frac{d}{d\,y}\,F\right)+\left(\frac{d}{d\,x}\,g\right)\left(\frac{d}{d\,p}\,F\right) \end{aligned} \tag{9.1.45}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\,d}\,F =& \left(\frac{d}{d\,d}\,y\right)\left(\frac{d}{d\,y}\,F\right)+\left(\frac{d}{d\,d}\,p\right)\left(\frac{d}{d\,p}\,F\right)\\ =& h\left(\frac{d}{d\,y}\,F\right)+\left(\frac{d}{d\,x}\,h\right)\left(\frac{d}{d\,p}\,F\right) \end{aligned} \tag{9.1.46}$$

(9.1.42) 式に (9.1.45) 式、(9.1.46) 式を代入し、部分積分を行い、端部：$x=a,b$ で $g=0, h=0$ であるから、

$$\begin{aligned} dI =& \int_a^b d\left(\frac{d}{d\,d}\,\mathrm{F}\left(x,y,\frac{d}{d\,x}\,y\right)\right)+c\left(\frac{d}{d\,c}\,\mathrm{F}\left(x,y,\frac{d}{d\,x}\,y\right)\right)dx\\ =& d\int_a^b \mathrm{h}(x)\left(\frac{d}{d\,y}\,\mathrm{F}\left(x,y,\frac{d}{d\,x}\,y\right)\right)+\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{h}(x)\right)\left(\frac{d}{d\,p}\,\mathrm{F}\left(x,y,\frac{d}{d\,x}\,y\right)\right)dx\\ &+c\int_a^b \mathrm{g}(x)\left(\frac{d}{d\,y}\,\mathrm{F}\left(x,y,\frac{d}{d\,x}\,y\right)\right)+\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{g}(x)\right)\left(\frac{d}{d\,p}\,\mathrm{F}\left(x,y,\frac{d}{d\,x}\,y\right)\right)dx\\ =& d\int_a^b \mathrm{h}(x)\left(\frac{d}{d\,y}\,\mathrm{F}\left(x,y,\frac{d}{d\,x}\,y\right)\right)-\mathrm{h}(x)\left(\frac{d^2}{d\,p\,d\,x}\,\mathrm{F}\left(x,y,\frac{d}{d\,x}\,y\right)\right)dx\\ &+c\int_a^b \mathrm{g}(x)\left(\frac{d}{d\,y}\,\mathrm{F}\left(x,y,\frac{d}{d\,x}\,y\right)\right)-\mathrm{g}(x)\left(\frac{d^2}{d\,p\,d\,x}\,\mathrm{F}\left(x,y,\frac{d}{d\,x}\,y\right)\right)dx\\ =& d\int_a^b \mathrm{h}(x)\left(\frac{d}{d\,y}\,\mathrm{F}\left(x,y,\frac{d}{d\,x}\,y\right)-\frac{d^2}{d\,p\,d\,x}\,\mathrm{F}\left(x,y,\frac{d}{d\,x}\,y\right)\right)dx\\ &+c\int_a^b \mathrm{g}(x)\left(\frac{d}{d\,y}\,\mathrm{F}\left(x,y,\frac{d}{d\,x}\,y\right)-\frac{d^2}{d\,p\,d\,x}\,\mathrm{F}\left(x,y,\frac{d}{d\,x}\,y\right)\right)dx \end{aligned} \tag{9.1.47}$$

dJ についても上記と同様に行うと、

$$\begin{aligned} dJ =& d\int_a^b \mathrm{h}(x)\left(\frac{d}{d\,y}\,\mathrm{G}\left(x,y,\frac{d}{d\,x}\,y\right)-\frac{d^2}{d\,p\,d\,x}\,\mathrm{G}\left(x,y,\frac{d}{d\,x}\,y\right)\right)dx\\ &+c\int_a^b \mathrm{g}(x)\left(\frac{d}{d\,y}\,\mathrm{G}\left(x,y,\frac{d}{d\,x}\,y\right)-\frac{d^2}{d\,p\,d\,x}\,\mathrm{G}\left(x,y,\frac{d}{d\,x}\,y\right)\right)dx \end{aligned} \tag{9.1.48}$$

I の極値は $dI=0$ で得られる。また、J の付帯条件の $J=C$ では、$dJ=0$ となるから、(9.1.47) 式、(9.1.48) 式は、

$$
\begin{aligned}
&d\int_a^b \mathrm{h}\,(x)\,\left(\frac{d}{d\,y}\,\mathrm{F}\left(x,y,\frac{d}{d\,x}\,y\right)-\frac{d^2}{d\,p\,d\,x}\,\mathrm{F}\left(x,y,\frac{d}{d\,x}\,y\right)\right)dx\\
&\quad=-c\int_a^b \mathrm{g}\,(x)\,\left(\frac{d}{d\,y}\,\mathrm{F}\left(x,y,\frac{d}{d\,x}\,y\right)-\frac{d^2}{d\,p\,d\,x}\,\mathrm{F}\left(x,y,\frac{d}{d\,x}\,y\right)\right)dx\\
&d\int_a^b \mathrm{h}\,(x)\,\left(\frac{d}{d\,y}\,\mathrm{G}\left(x,y,\frac{d}{d\,x}\,y\right)-\frac{d^2}{d\,p\,d\,x}\,\mathrm{G}\left(x,y,\frac{d}{d\,x}\,y\right)\right)dx\\
&\quad=-c\int_a^b \mathrm{g}\,(x)\,\left(\frac{d}{d\,y}\,\mathrm{G}\left(x,y,\frac{d}{d\,x}\,y\right)-\frac{d^2}{d\,p\,d\,x}\,\mathrm{G}\left(x,y,\frac{d}{d\,x}\,y\right)\right)dx
\end{aligned}
\tag{9.1.49}
$$

上式の比をとると、

$$
\frac{\int_a^b \mathrm{h}\,(x)\,\left(\frac{d}{d\,y}\,\mathrm{F}\left(x,y,\frac{d}{d\,x}\,y\right)-\frac{d^2}{d\,p\,d\,x}\,\mathrm{F}\left(x,y,\frac{d}{d\,x}\,y\right)\right)dx}{\int_a^b \mathrm{h}\,(x)\,\left(\frac{d}{d\,y}\,\mathrm{G}\left(x,y,\frac{d}{d\,x}\,y\right)-\frac{d^2}{d\,p\,d\,x}\,\mathrm{G}\left(x,y,\frac{d}{d\,x}\,y\right)\right)dx}=\frac{\int_a^b \mathrm{g}\,(x)\,\left(\frac{d}{d\,y}\,\mathrm{F}\left(x,y,\frac{d}{d\,x}\,y\right)-\frac{d^2}{d\,p\,d\,x}\,\mathrm{F}\left(x,y,\frac{d}{d\,x}\,y\right)\right)dx}{\int_a^b \mathrm{g}\,(x)\,\left(\frac{d}{d\,y}\,\mathrm{G}\left(x,y,\frac{d}{d\,x}\,y\right)-\frac{d^2}{d\,p\,d\,x}\,\mathrm{G}\left(x,y,\frac{d}{d\,x}\,y\right)\right)dx}
$$

上式で $\mathrm{h}\,(x)\,,\mathrm{g}\,(x)$ を任意に選んでも成り立たねばならない。ゆえに、次式のように、この比：K は x に無関係な定数とならねばならない。

$$
\frac{\int_a^b \mathrm{h}\,(x)\,\left(\frac{d}{d\,y}\,\mathrm{F}\left(x,y,\frac{d}{d\,x}\,y\right)-\frac{d^2}{d\,p\,d\,x}\,\mathrm{F}\left(x,y,\frac{d}{d\,x}\,y\right)\right)dx}{\int_a^b \mathrm{h}\,(x)\,\left(\frac{d}{d\,y}\,\mathrm{G}\left(x,y,\frac{d}{d\,x}\,y\right)-\frac{d^2}{d\,p\,d\,x}\,\mathrm{G}\left(x,y,\frac{d}{d\,x}\,y\right)\right)dx}=K
$$

上式から、

$$
\begin{aligned}
&\int_a^b \mathrm{h}\,(x)\,\left(\frac{d}{d\,y}\,\mathrm{F}\left(x,y,\frac{d}{d\,x}\,y\right)-\frac{d^2}{d\,p\,d\,x}\,\mathrm{F}\left(x,y,\frac{d}{d\,x}\,y\right)\right)dx\\
&\quad-\int_a^b \mathrm{h}\,(x)\,\left(\frac{d}{d\,y}\,\mathrm{G}\left(x,y,\frac{d}{d\,x}\,y\right)-\frac{d^2}{d\,p\,d\,x}\,\mathrm{G}\left(x,y,\frac{d}{d\,x}\,y\right)\right)dx\,K=0
\end{aligned}
$$

上式で任意の $\mathrm{h}\,(x)$ で成り立つためには、次式の被積分関数が零とならねばならない。

$$
-\left(\frac{d}{d\,y}\,\mathrm{G}\left(x,y,\frac{d}{d\,x}\,y\right)-\frac{d^2}{d\,p\,d\,x}\,\mathrm{G}\left(x,y,\frac{d}{d\,x}\,y\right)\right)\,K+\frac{d}{d\,y}\,\mathrm{F}\left(x,y,\frac{d}{d\,x}\,y\right)-\frac{d^2}{d\,p\,d\,x}\,\mathrm{F}\left(x,y,\frac{d}{d\,x}\,y\right)=0
$$

上式を簡略化すると、

$$
\frac{d}{d\,y}\,\left(F-G\,K\right)-\frac{d^2}{d\,p\,d\,x}\,\left(F-G\,K\right)=0
$$

(9.1.6) 式のオイラーの微分方程式から、

$$
\frac{d}{d\,y}\,H-\frac{d^2}{d\,p\,d\,x}\,H=0
\tag{9.1.50}
$$

以上から、オイラーの微分方程式の H として次式とすると、付帯条件のついた変分問題が解ける。

$$
H=F-G\,K
\tag{9.1.51}
$$

ここで F,G は (9.1.34) 式、(9.1.35) 式の下記の関数で、K は定数である。

$$
I=\int_a^b \mathrm{F}\left(x,y,\frac{d}{d\,x}\,y\right)dx,\quad J=\int_a^b \mathrm{G}\left(x,y,\frac{d}{d\,x}\,y\right)dx=C
\tag{9.1.52}
$$

9.2　変分問題

9.2.1　二点を結ぶ最短曲線

x, y 座標において、二点 : $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ を結ぶ曲線で最短距離となる曲線を求める。

```
kill(all);
depends(H,x,y,p);
depends(y,x);
depends(p,x);
S1:ds=sqrt(dx^2+dy^2);
S2:ds=sqrt(1+diff(y,x,1)^2)*dx;
S3:S='integrate(rhs(S2)/dx,x,x[1],x[2]);
H1:H=rhs(S2)/dx;
P1:p=diff(y,x,1);
P2:diff(y,x,1)=p;
H2:subst([P2],H1);
E1:'diff(H,y,1)-'diff('diff(H,p,1),x,1)=0;
H3:subst([H2],E1);
first(lhs(H3));
ev(%,diff);
last(lhs(H3))=0;
'diff(H,p,1)=diff(rhs(H2),p,1);
rhs(%)=%c1;
solve(%^2,p);
P3:p=%c2;
subst([P1],%);
ode2(%,y,x);
```

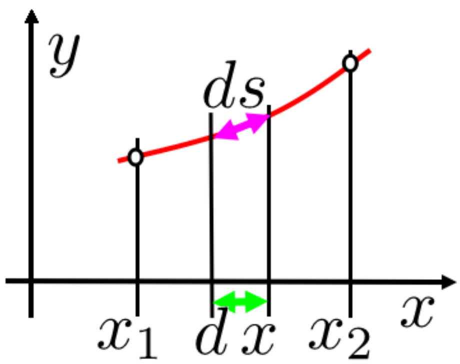


図 9.2.1: 二点を結ぶ最短曲線

曲線の線分：ds は次式で表せる。

$$ds=\sqrt{dy^2+dx^2}=dx\sqrt{\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)^2+1} \tag{9.2.1}$$

上式を x で積分することで、二点を結ぶ曲線の距離が得られる。

$$S=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)^2+1dx}$$

上式の S の最小を与える条件を求める。上式は (9.1.1) 式に対応しており、ここにおける H は下記となる。

$$H=\sqrt{\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)^2+1}$$

ここで下記とすると、

$$\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{y}\,(x)=\mathrm{p}\,(x)$$

H は、

$$H=\sqrt{p^2+1} \tag{9.2.2}$$

(9.1.6) 式のオイラーの微分方程式は、

$$\frac{d}{d\,y}\,H-\frac{d^2}{d\,p\,d\,x}\,H=0$$

上式に (9.2.2) 式の H を代入すると、

$$\frac{d}{d\,y}\,\sqrt{p^2+1}-\frac{d^2}{d\,p\,d\,x}\,\sqrt{p^2+1}=0$$

左辺第一項は零となり、左辺第二項は

$$-\frac{d^2}{d\,p\,d\,x}\,H=-\frac{d^2}{d\,p\,d\,x}\,\sqrt{p^2+1}=0 \tag{9.2.3}$$

ここで、

$$\frac{d}{d\,p}\,H=\frac{p}{\sqrt{p^2+1}}$$

(9.2.3) 式を x で積分し、上式から、

$$\frac{p}{\sqrt{p^2+1}}=\%c1$$

上式を解くと、

$$[p=-\frac{i\,\%c1}{\sqrt{\%c1^2-1}},p=\frac{i\,\%c1}{\sqrt{\%c1^2-1}}]$$

右辺は定数であり、下記とする。

$$p=\%c2$$

上式から、

$$\frac{d}{d\,x}\,y=\%c2$$

上式の微分方程式を $ode2$ 関数で解き、

$$y=\%c2\,x+\%c$$

上式から二点を結ぶ最短距離の曲線は直線である。

9.2.2 最速降下線

x, y 座標で水平方向に x 軸、鉛直下方に y 軸とする。二点：$(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ を結ぶ曲線で、高い方から低い方に質点が滑っていく。このとき経過時間が最小となる曲線を求める。

```
kill(all);
depends(H,[x,y]);
S1:ds=sqrt(dx^2+dy^2);
S2:ds=sqrt(1+diff(y(x),x,1)^2)*dx;
1/2*m*v^2=m*G*y(x)+%k1;
solve(%,v)[2];
V1:v=sqrt(y(x)+%k);
dt=ds/v;
T1:dt=rhs(S2)/sqrt(y(x)+%k);
S3:T='integrate(rhs(T1)/dx,x,x[1],x[2]);
H1:H=rhs(T1)/dx;
P1:p(x)=diff(y(x),x,1);
P2:diff(y(x),x,1)=p(x);
H2:subst([P2],H1);
E1:'diff(H,y(x),1)-'diff('diff(H,p(x),1),
 x,1)=0;
rhs(H2)-p(x)*diff(rhs(H2),p(x),1)=C;
factor(%);
denom(lhs(%))=C;
H3:subst([P1],%);
DY1:'diff(y(x),x,1)=cot(\theta);
subst([DY1],H3);
trigsimp(%);
Y1:%*abs(sin(\theta));
Y1^2;
Y2:solve(%,y(x))[1];
DY2:'diff(y(x),\theta,1)=diff(rhs(Y2),
 \theta,1);
X1:x='integrate(tan(\theta)*rhs(DY2),
 \theta);
trigsimp(%);
X3:lhs(%)=ev(rhs(%),integrate)+%c;
Y3:y=trigrat(rhs(Y2));
X41:subst([%c=0,\theta=t,C^2=1],rhs(X3));
Y41:subst([%k=0,\theta=t,C^2=1],rhs(-Y3));
plot2d([parametric, X41, Y41, [t, 0, %pi],
  [nticks, 100]]);
```

曲線の線分：ds は次式で表せる。

$$ds = \sqrt{dy^2 + dx^2} = dx\sqrt{\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)^2 + 1} \tag{9.2.4}$$

質量：m、重力加速度：G、質点の速さ：v とすると、運動エネルギーと位置エネルギーの関係から、

$$\frac{m\,v^2}{2} = m\,\mathrm{y}\,(x)\;G + \%k1$$

上式から v は下記となり、

$$v = \sqrt{2}\sqrt{\mathrm{y}\,(x)\;G + \frac{\%k1}{m}}$$

簡素化して、

$$v = \sqrt{\mathrm{y}\,(x) + \%k} \tag{9.2.5}$$

ds を通過する時間：dt は、

$$dt = \frac{ds}{v} = \frac{dx\sqrt{\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{y}\,(x)\right)^2 + 1}}{\sqrt{\mathrm{y}\,(x) + \%k}}$$

二点間を質点が移動する時間：T は上式を積分して、

$$T = \int_{x_1}^{x_2}\frac{\sqrt{\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{y}\,(x)\right)^2 + 1}}{\sqrt{\mathrm{y}\,(x) + \%k}}dx$$

上式の T の最小を与える条件を求める。上式は (9.1.1) 式に対応しており、ここにおける H は下記となる。

$$H = \frac{\sqrt{\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{y}\,(x)\right)^2 + 1}}{\sqrt{\mathrm{y}\,(x) + \%k}}$$

ここで下記とすると、

$$\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{y}\,(x) = \mathrm{p}\,(x) \tag{9.2.6}$$

H は、

$$H = \frac{\sqrt{\mathrm{p}\,(x)^2 + 1}}{\sqrt{\mathrm{y}\,(x) + \%k}} \tag{9.2.7}$$

オイラーの微分方程式を $\mathrm{y}\,(x)$ で積分した (9.1.7) 式は、

$$H - p\left(\frac{d}{d\,p}\,H\right) = C$$

上式に (9.2.7) 式の H を代入すると、

$$\frac{\sqrt{\mathrm{p}\,(x)^2 + 1}}{\sqrt{\mathrm{y}\,(x) + \%k}} - \frac{\mathrm{p}\,(x)^2}{\sqrt{\mathrm{p}\,(x)^2 + 1}\,\sqrt{\mathrm{y}\,(x) + \%k}} = C$$

上式を整理すると、

$$\frac{1}{\sqrt{\mathrm{p}\,(x)^2 + 1}\,\sqrt{\mathrm{y}\,(x) + \%k}} = C$$

上式は下記とも書ける。

$$\sqrt{\mathrm{p}\,(x)^2 + 1}\,\sqrt{\mathrm{y}\,(x) + \%k} = C$$

上式に (9.2.6) 式を代入すると、

$$\sqrt{\mathrm{y}\,(x) + \%k}\sqrt{\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{y}\,(x)\right)^2 + 1} = C \tag{9.2.8}$$

$\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{y}\left(x\right)$ を次式で置き換える。

$$\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{y}\left(x\right)=\cot\left(\theta\right) \tag{9.2.9}$$

上式を (9.2.8) 式に代入すると、

$$\sqrt{{\cot\left(\theta\right)}^{2}+1}\,\sqrt{\mathrm{y}\left(x\right)+\%k}=C$$

上式を整理すると、

$$\mathrm{y}\left(x\right)={\sin\left(\theta\right)}^{2}\,{C}^{2}-\%k \tag{9.2.10}$$

上式を θ で微分すると、

$$\frac{d}{d\,\theta}\,\mathrm{y}\left(x\right)=2\cos\left(\theta\right)\,\sin\left(\theta\right)\,{C}^{2} \tag{9.2.11}$$

(9.2.9) 式から、

$$dx=\tan\left(\theta\right)\,d\mathrm{y}\left(x\right)$$

(9.2.11) 式を使って上式を積分すると、

$$\begin{aligned}x=&\int\tan\left(\theta\right)\,d\mathrm{y}\left(x\right)\\=&2\int\cos\left(\theta\right)\,\sin\left(\theta\right)\,\tan\left(\theta\right)d\theta\,{C}^{2}\\=&2\int{\sin\left(\theta\right)}^{2}d\theta\,{C}^{2}\end{aligned}$$

上式を整理し、(9.2.10) 式から、最速降下曲線は次式となる。

$$x=\left(\theta-\frac{\sin\left(2\,\theta\right)}{2}\right)\,{C}^{2}+\%c$$

$$y=-\frac{\left(\cos\left(2\,\theta\right)-1\right)\,{C}^{2}+2\,\%k}{2}$$

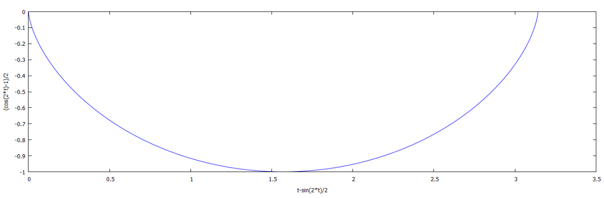


図 9.2.2: 最速降下線　$C=1$

9.2.3 光の屈折

屈折率：μ が異なる媒体 ($x<0$ で μ_1,$x>0$ で μ_2) の中を進む光の光路を求める。ここで光速：$v(x)$ と屈折率の関係は $\mu(x)\,v(x)=C$ とし、ある二点間を通過する経過時間：T が最小となるフェルマーの光路程最小の原理によるものとする。

```
kill(all);
depends(H,x,y,p);
depends(y,x);
S1:ds=sqrt(dx^2+dy^2);
S2:ds=sqrt(1+diff(y,x,1)^2)*dx;
T1:dt=rhs(S2)/v(x);
T2:T='integrate(rhs(T1)/dx,x,x[1],x[2]);
H1:H=rhs(T1)/dx;
P1:p(x)=diff(y,x,1);
P2:diff(y,x,1)=p(x);
H2:subst([P2],H1);
E1:'diff(H,y,1)-'diff('diff(H,p(x),1),x,1)
 =0;
H3:subst([H2],E1);
first(lhs(H3));
ev(%,diff);
last(lhs(H3))=0;
diff(rhs(H2),p(x),1)=%c1;
subst([P1],%);
H4:%*v(x);
assume(cos(\theta(x))>0);
subst(['diff(y,x,1)=tan(\theta(x))],H4);
trigsimp(%);
subst([v(x)=C/\mu(x)],%);
%*\mu(x);
lhs(%)=%c;
\mu[1]*sin(\theta[1])=\mu[2]*
 sin(\theta[2]);
%/\mu[1]/sin(\theta[2]);
```

曲線の線分：ds は次式で表せる。

$$ds=\sqrt{dy^2+dx^2}=dx\sqrt{\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)^2+1} \tag{9.2.12}$$

経過時間は上式を速度：$v(x)$ で割って、

$$dt=\frac{dx\,\sqrt{\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)^2+1}}{\mathrm{v}\,(x)}$$

上式を積分し、$x_1\to x_2$ までの経過時間：T は、

$$T=\int_{x_1}^{x_2}\frac{\sqrt{\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)^2+1}}{\mathrm{v}\,(x)}dx$$

上式の T の最小を与える条件を求める。上式は (9.1.1) 式に対応しており、ここにおける H は下記となる。

$$H=\frac{\sqrt{\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)^2+1}}{\mathrm{v}\,(x)}$$

ここで下記とすると、

$$\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{y}\,(x)=\mathrm{p}\,(x) \tag{9.2.13}$$

H は、

$$H=\frac{\sqrt{\mathrm{p}\,(x)^2+1}}{\mathrm{v}\,(x)} \tag{9.2.14}$$

(9.1.6) 式のオイラーの微分方程式は、

$$\frac{d}{d\,y}\,H-\frac{d^2}{d\,x\,d\,\mathrm{p}\,(x)}\,H=0$$

左辺第一項は零となり、左辺第二項は

$$-\frac{d^2}{d\,x\,d\,\mathrm{p}\,(x)}\,\frac{\sqrt{\mathrm{p}\,(x)^2+1}}{\mathrm{v}\,(x)}=0$$

$p(x)$ で微分を実行し、x で積分すると、

$$\frac{\mathrm{p}\,(x)}{\sqrt{\mathrm{p}\,(x)^2+1}\,\mathrm{v}\,(x)}=\%c1$$

上式に (9.2.13) 式を代入し、$\frac{d}{d\,x}\,y=\tan(\theta\,(x))$ と置くと

$$\frac{\tan(\theta\,(x))}{\sqrt{\tan(\theta\,(x))^2+1}}=\%c1\,\mathrm{v}\,(x)$$

上式を整理し、

$$\sin(\theta\,(x))=\%c1\,\mathrm{v}\,(x)$$

$\mu(x)\,v(x)=C$ とすると、

$$\mu\,(x)\,\sin(\theta\,(x))=\%c1\,C$$

上式の右辺は一定となり、スネルの法則が得られた。

$$\mu_1\sin(\theta_1)=\mu_2\sin(\theta_2)$$

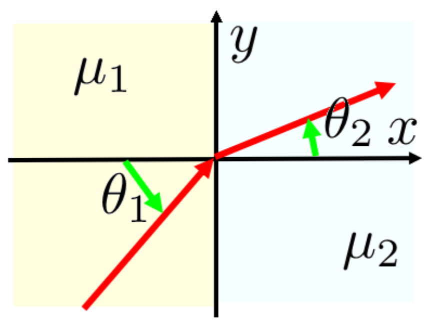


図 9.2.3: 光の屈折

9.2.4 高さにより光速が変化する場合の光路

x 軸を水平方向、y 軸を鉛直上方とする。いま、光速：v が高さ方向に線形な関係：$v = v_0\,(1-\mathrm{y}(x)\,C)$ とする。ここで、x 軸上のある二点間を通過する経過時間：T が最小となるフェルマーの光路程最小の原理によるときの光路を求める。

```
kill(all);
depends(H,x,y,p);
S1:ds=sqrt(dx^2+dy^2);
S2:ds=sqrt(1+diff(y(x),x,1)^2)*dx;
T1:dt=rhs(S2)/v;
V1:v=v[0]*(1-C*y(x));
T2:subst([V1],T1);
T3:T='integrate(rhs(T2)/dx,x,x[1],x[2]);
H1:H=rhs(T2)/dx;
P1:p(x)=diff(y(x),x,1);
P2:diff(y(x),x,1)=p(x);
H2:subst([P2],H1);
E1:'diff(H,y(x),1)-'diff('diff(H,p(x),1),
 x,1)=0;
rhs(H2)-p(x)*'diff(rhs(H2),p(x),1)=%c1;
ev(%,diff);
factor(%);
%*v[0]*(1-y(x)*C);
factor(%);
%^2;
subst([v[0]=%c2/%c1],%);
solve(%,p(x))[1];
H4:subst([P1],%);
ode2(%,y(x),x);
ode2(lhs(H4)=-rhs(H4),y(x),x);
%^2;
expand(lhs(%))=rhs(%);
H5:%-((2*y(x))/C-1/C^2-y(x)^2);
rhs(%)-last(rhs(%));
factor(%);
lhs(H5)=%+last(rhs(H5));
subst([%c2=v[0]*%c1],%);
lhs(%)=(y(x)-1/C)^2+last(rhs(%));
```

曲線の線分：ds は次式で表せる。

$$ds = \sqrt{dy^2+dx^2} = dx\sqrt{\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)^2+1} \tag{9.2.15}$$

光速：v の高さ方向に線形な関係は、

$$v = v_0\,(1-\mathrm{y}(x)\,C) \tag{9.2.16}$$

経過時間は (9.2.15) 式を上式の速度：v で割って、

$$dt = \frac{dx\sqrt{\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{y}(x)\right)^2+1}}{v_0\,(1-\mathrm{y}(x)\,C)}$$

上式を積分して経過時間を求めると、

$$T = \frac{1}{v_0}\int_{x_1}^{x_2}\frac{\sqrt{\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{y}(x)\right)^2+1}}{1-\mathrm{y}(x)\,C}dx$$

上式の T の最小を与える条件を求める。上式は (9.1.1) 式に対応しており、ここにおける H は下記となる。

$$H = \frac{\sqrt{\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{y}(x)\right)^2+1}}{v_0\,(1-\mathrm{y}(x)\,C)}$$

ここで下記とすると、

$$\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{y}(x) = \mathrm{p}(x) \tag{9.2.17}$$

H は、

$$H = \frac{\sqrt{\mathrm{p}(x)^2+1}}{v_0\,(1-\mathrm{y}(x)\,C)} \tag{9.2.18}$$

オイラーの微分方程式を y で積分した (9.1.7) 式は、

$$H - p\left(\frac{d}{d\,p}\,H\right) = \%c1 \tag{9.2.19}$$

(9.2.18) 式を上式に代入すると、

$$\frac{\sqrt{\mathrm{p}(x)^2+1}}{v_0\,(1-\mathrm{y}(x)\,C)} - \mathrm{p}(x)\left(\frac{d}{d\,\mathrm{p}(x)}\,\frac{\sqrt{\mathrm{p}(x)^2+1}}{v_0\,(1-\mathrm{y}(x)\,C)}\right) = \%c1$$

$p(x)$ で微分すると、

$$\frac{\sqrt{\mathrm{p}(x)^2+1}}{v_0\,(1-\mathrm{y}(x)\,C)} - \frac{\mathrm{p}(x)^2}{v_0\sqrt{\mathrm{p}(x)^2+1}\,(1-\mathrm{y}(x)\,C)} = \%c1$$

上式を整理すると、

$$-\frac{1}{v_0\sqrt{\mathrm{p}(x)^2+1}\,(\mathrm{y}(x)\,C-1)} = \%c1$$

両辺に $v_0\,(1-\mathrm{y}(x)\,C)$ を掛け、

$$\frac{1}{\sqrt{\mathrm{p}(x)^2+1}} = -v_0\,\%c1\,(\mathrm{y}(x)\,C-1)$$

両辺を自乗し、

$$\frac{1}{\mathrm{p}(x)^2+1} = v_0^2\,\%c1^2\,(\mathrm{y}(x)\,C-1)^2$$

$v_0^2\,\%c1^2 \to \%c2^2$ に置き換え、

$$\frac{1}{\mathrm{p}(x)^2+1} = \%c2^2\,(\mathrm{y}(x)\,C-1)^2$$

$\mathrm{p}(x)$ を求め、

$$\mathrm{p}(x) = -\frac{\sqrt{-\%c2^2\,\mathrm{y}(x)^2\,C^2 + 2\,\%c2^2\,\mathrm{y}(x)\,C - \%c2^2 + 1}}{\%c2\,\mathrm{y}(x)\,C - \%c2}$$

(9.2.17) 式を上式に代入すると、

$$\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{y}(x) = -\frac{\sqrt{-\%c2^2\,\mathrm{y}(x)^2\,C^2 + 2\,\%c2^2\,\mathrm{y}(x)\,C - \%c2^2 + 1}}{\%c2\,\mathrm{y}(x)\,C - \%c2}$$

上式を積分し、

$$\frac{\sqrt{-\%c2^2\,\mathrm{y}(x)^2\,C^2 + 2\,\%c2^2\,\mathrm{y}(x)\,C - \%c2^2 + 1}}{\%c2\,C} = x + \%c$$

両辺を自乗し、

$$\frac{-\%c2^2\,\mathrm{y}(x)^2\,C^2 + 2\,\%c2^2\,\mathrm{y}(x)\,C - \%c2^2 + 1}{\%c2^2\,C^2} = (x + \%c)^2$$

上式を整理すると、

$$\frac{1}{\%c2^2\,C^2} = -\frac{2\,\mathrm{y}(x)}{C} + \frac{1}{C^2} + \mathrm{y}(x)^2 + (x + \%c)^2$$

上式から、

$$\frac{1}{v_0^2\,\%c1^2\,C^2} = \left(\mathrm{y}(x) - \frac{1}{C}\right)^2 + (x + \%c)^2$$

上式から光路は円弧となる。

9.2.5　曲線長さ一定で面積最大の曲線

x, y 座標で、二点：$(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ を結ぶ曲線の長さ：L が与えられ、x 軸と曲線間の面積が最大となる曲線を求める。

```
kill(all);
depends(H,x,y,p);
S1:ds=sqrt(dx^2+dy^2);
S2:ds=sqrt(1+diff(y(x),x,1)^2)*dx;
S3:L='integrate(rhs(S2)/dx,x,x[1],x[2]);
G1:G=rhs(S2)/dx;
S4:S='integrate(y(x),x,x[1],x[2]);
F1:F=y(x);
H1:H=F+K*G;
H2:subst([F1,G1],%);
P1:p(x)=diff(y(x),x,1);
P2:diff(y(x),x,1)=p(x);
H3:subst([P2],H2);
E1:'diff(H,y(x),1)-'diff('diff(H,p(x),1),
 x,1)=0;
H4:subst([H3],E1);
first(lhs(H4));
H41:%=ev(%,diff);
H42:diff(rhs(H3),p(x),1);
rhs(H41)-'diff(%,x,1)=0;
-(%-1);
integrate(%,x);
H42=x+%d;
%^2;
solve(%,p(x))[2];
subst([P1],%);
ode2(%,y(x),x);
%-%c;
%^2;
lhs(%)+(x+%d)^2=K^2;
```

曲線の線分：ds は次式で表せる。

$$ds = \sqrt{dy^2 + dx^2} = dx\sqrt{\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)^2 + 1} \tag{9.2.20}$$

x_1 から x_2 までの曲線長さ：L は、

$$L = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{y}\,(x)\right)^2 + 1}dx \tag{9.2.21}$$

x_1 から x_2 までの x 軸と曲線間の面積：S は、

$$S = \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{y}\,(x)\,dx \tag{9.2.22}$$

S を最大にする問題は、付帯条件のついた変分問題であり、(9.1.50) 式、(9.1.51) 式、(9.1.52) 式から

$$G = \sqrt{\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{y}\,(x)\right)^2 + 1}$$
$$F = \mathrm{y}\,(x)$$

ここで下記とすると、

$$\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{y}\,(x) = \mathrm{p}\,(x)$$

オイラーの微分方程式として、

$$\frac{d}{d\,\mathrm{y}\,(x)}\,H - \frac{d^2}{d\,x\,d\,\mathrm{p}\,(x)}\,H = 0 \tag{9.2.23}$$

としたとき、オイラーの微分方程式の H として

$$\begin{aligned} H =& G\,K + F = \sqrt{\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{y}\,(x)\right)^2 + 1}\,K + \mathrm{y}\,(x) \\ =& \sqrt{\mathrm{p}\,(x)^2 + 1}\,K + \mathrm{y}\,(x) \end{aligned}$$

上式を (9.2.23) 式のオイラーの微分方程式に代入し、

$$\begin{aligned} &\frac{d}{d\,\mathrm{y}\,(x)}\left(\sqrt{\mathrm{p}\,(x)^2 + 1}\,K + \mathrm{y}\,(x)\right) \\ &\quad - \frac{d^2}{d\,x\,d\,\mathrm{p}\,(x)}\left(\sqrt{\mathrm{p}\,(x)^2 + 1}\,K + \mathrm{y}\,(x)\right) = 0 \end{aligned} \tag{9.2.24}$$

左辺第一項は、

$$\frac{d}{d\,\mathrm{y}\,(x)}\,H = \frac{d}{d\,\mathrm{y}\,(x)}\left(\sqrt{\mathrm{p}\,(x)^2 + 1}\,K + \mathrm{y}\,(x)\right) = 1$$

左辺第二項の $\mathrm{p}\,(x)$ での微分結果は、

$$\frac{d}{d\,\mathrm{p}\,(x)}\,H = \frac{\mathrm{p}\,(x)\;K}{\sqrt{\mathrm{p}\,(x)^2 + 1}}$$

以上から、(9.2.24) 式は、

$$1 - \frac{d}{d\,x}\,\frac{\mathrm{p}\,(x)\;K}{\sqrt{\mathrm{p}\,(x)^2 + 1}} = 0$$

上式を変形し、

$$\frac{d}{d\,x}\,\frac{\mathrm{p}\,(x)\;K}{\sqrt{\mathrm{p}\,(x)^2 + 1}} = 1$$

x で積分すると、

$$\frac{\mathrm{p}\,(x)\;K}{\sqrt{\mathrm{p}\,(x)^2 + 1}} = x + \%d$$

自乗すると、

$$\frac{\mathrm{p}\,(x)^2\,K^2}{\mathrm{p}\,(x)^2 + 1} = (x + \%d)^2$$

$\mathrm{p}(x)$ を求めると、

$$\mathrm{p}(x) = \frac{d}{d\,x}\,\mathrm{y}(x) = \frac{x + \%d}{\sqrt{K^2 - x^2 - 2\,\%d\,x - \%d^2}}$$

$ode2$ 関数で解：$\mathrm{y}(x)$ を求めると、

$$\mathrm{y}(x) = \%c - \sqrt{K^2 - x^2 - 2\,\%d\,x - \%d^2}$$

変形し、

$$\mathrm{y}(x) - \%c = -\sqrt{K^2 - x^2 - 2\,\%d\,x - \%d^2}$$

自乗すると、

$$(\mathrm{y}(x) - \%c)^2 = K^2 - x^2 - 2\,\%d\,x - \%d^2$$

以上から、次式が得られ、曲線の長さ：L が与えられ、
x 軸と曲線間の面積が最大となる曲線は円弧である。

$$(\mathrm{y}(x) - \%c)^2 + (x + \%d)^2 = K^2$$

9.2.6 鎖の形状

x, y 座標で、二点 : $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ に長さ : L の鎖の両端を吊した時の鎖の形状を求める。鎖の単位長さあたりの質量 : m、重力加速度 : g とする。

```
kill(all);
depends(H,x,y,p);
S1:ds=sqrt(dx^2+dy^2);
S2:ds=sqrt(1+diff(y(x),x,1)^2)*dx;
S3:L='integrate(rhs(S2)/dx,x,x[1],x[2]);
G1:G=rhs(S2)/dx;
U1:dU=m*g*y(x)*ds;
U2:subst([S2],%);
U3:U='integrate(rhs(U2)/dx,x,x[1],x[2]);
F1:F=rhs(U2)/dx;
H1:H=F+K*G;
H2:subst([F1,G1],%);
P1:p(x)=diff(y(x),x,1);
P2:diff(y(x),x,1)=p(x);
H3:subst([P2],H2);
E1:H-p(x)*'diff(H,p(x),1)=C;
H42:diff(rhs(H3),p(x),1);
rhs(H3)-p(x)*H42=C;
%*sqrt(p(x)^2+1);
expand(%);
subst([g=1/m],%);
%^2;
%/C^2-1;
H5:p(x)=sqrt(lhs(%));
H51:h(x)=(y(x)+K)/C;
H52:solve(H51,y(x))[1];
subst([P1,H52],H5);
H6:ev(%,diff);
ode2(%,h(x),x);
1/rhs(H6)*dh(x)=1/C*dx;
acosh(x);
'diff(%,x,1)=diff(%,x,1);
acosh(h(x))=(x-d)/C;
h(x)=cosh(rhs(%));
subst([H51],%);
```

鎖の微小長さ : ds は次式で表せる。

$$ds = \sqrt{dy^2 + dx^2} = dx \sqrt{\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)^2 + 1} \qquad (9.2.25)$$

x_1 から x_2 までの鎖の長さ : L は、

$$L = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{y}\left(x\right)\right)^2 + 1}dx \qquad (9.2.26)$$

鎖の微小長さ : ds の位置ポテンシャル : dU とすると、

$$\begin{aligned} dU =& ds\,g\,m\,\mathrm{y}\left(x\right) \\ =& dx\,g\,m\,\mathrm{y}\left(x\right)\,\sqrt{\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{y}\left(x\right)\right)^2 + 1} \end{aligned}$$

x_1 から x_2 までの鎖の位置ポテンシャル : U は、

$$U = g\,m \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{y}\left(x\right)\,\sqrt{\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{y}\left(x\right)\right)^2 + 1}dx$$

鎖は位置ポテンシャル : U が最小になるような形状となる。鎖の長さ : L が一定で、U を最小にする問題は、付帯条件のついた変分問題であり、(9.1.50) 式、(9.1.51) 式、(9.1.52) 式から

$$G = \sqrt{\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{y}\left(x\right)\right)^2 + 1}$$

$$F = g\,m\,\mathrm{y}\left(x\right)\,\sqrt{\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{y}\left(x\right)\right)^2 + 1}$$

$$H = G\,K + F$$

以上からオイラーの微分方程式の H は、

$$\begin{aligned} H =& \sqrt{\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{y}\left(x\right)\right)^2 + 1}\,K \\ &+ g\,m\,\mathrm{y}\left(x\right)\,\sqrt{\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{y}\left(x\right)\right)^2 + 1} \end{aligned}$$

ここで下記とすると、

$$\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{y}\left(x\right) = \mathrm{p}\left(x\right)$$

H は、

$$H = \sqrt{\mathrm{p}\left(x\right)^2 + 1}\,K + g\,m\,\sqrt{\mathrm{p}\left(x\right)^2 + 1}\,\mathrm{y}\left(x\right) \qquad (9.2.27)$$

オイラーの微分方程式として、y で積分した (9.1.7) 式を用い、

$$H - \mathrm{p}\left(x\right)\,\left(\frac{d}{d\,\mathrm{p}\left(x\right)}\,H\right) = C \qquad (9.2.28)$$

上式の $\frac{d}{d\,\mathrm{p}(x)}\,H$ は、

$$\frac{d}{d\,\mathrm{p}\left(x\right)}\,H = \frac{\mathrm{p}\left(x\right)\,K}{\sqrt{\mathrm{p}\left(x\right)^2 + 1}} + \frac{g\,m\,\mathrm{p}\left(x\right)\,\mathrm{y}\left(x\right)}{\sqrt{\mathrm{p}\left(x\right)^2 + 1}}$$

上記の結果を (9.2.28) 式に代入すると、

$$\begin{aligned} &-\mathrm{p}\left(x\right)\,\left(\frac{\mathrm{p}\left(x\right)\,K}{\sqrt{\mathrm{p}\left(x\right)^2 + 1}} + \frac{g\,m\,\mathrm{p}\left(x\right)\,\mathrm{y}\left(x\right)}{\sqrt{\mathrm{p}\left(x\right)^2 + 1}}\right) \\ &+ \sqrt{\mathrm{p}\left(x\right)^2 + 1}\,K + g\,m\,\sqrt{\mathrm{p}\left(x\right)^2 + 1}\,\mathrm{y}\left(x\right) = C \end{aligned}$$

上式を整理すると、

$$K+g\,m\,\mathrm{y}\left(x\right)=\sqrt{{\mathrm{p}\left(x\right)}^{2}+1}\,C$$

定数を変え、

$$K+\mathrm{y}\left(x\right)=\sqrt{{\mathrm{p}\left(x\right)}^{2}+1}\,C$$

両辺を自乗し、

$${\left(K+\mathrm{y}\left(x\right)\right)}^{2}=\left({\mathrm{p}\left(x\right)}^{2}+1\right)\,C^{2}$$

$\mathrm{p}\left(x\right)$ を求めると、

$$\mathrm{p}\left(x\right)=\sqrt{\frac{{\left(K+\mathrm{y}\left(x\right)\right)}^{2}}{C^{2}}-1}$$

下記の置き換えを行い、

$$\mathrm{h}\left(x\right)=\frac{K+\mathrm{y}\left(x\right)}{C} \tag{9.2.29}$$

上式に代入すると、

$$\frac{d}{d\,x}\,\left(\mathrm{h}\left(x\right)\,C-K\right)=\sqrt{{\mathrm{h}\left(x\right)}^{2}-1}$$

微分を実行し、

$$\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{h}\left(x\right)\right)\,C=\sqrt{{\mathrm{h}\left(x\right)}^{2}-1} \tag{9.2.30}$$

$ode2$ 関数で解くと、

$$\log\left(2\,\sqrt{{\mathrm{h}\left(x\right)}^{2}-1}+2\,\mathrm{h}\left(x\right)\right)\,C=x+\%c$$

一方、(9.2.30) 式から、

$$\frac{\mathrm{dh}\left(x\right)}{\sqrt{{\mathrm{h}\left(x\right)}^{2}-1}}=\frac{dx}{C}$$

積分公式[1] から、

$$\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{acosh}\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{x^{2}-1}}$$

以上から、(9.2.30) 式の解は、

$$\mathrm{acosh}\left(\mathrm{h}\left(x\right)\right)=\frac{x-d}{C}$$

(9.2.29) 式を代入し、鎖の形状は、

$$\frac{K+\mathrm{y}\left(x\right)}{C}=\cosh\left(\frac{x-d}{C}\right)$$

[1]森口　繁一、宇田川　久、一松　信：岩波数学公式 1　微分積分・平面曲線、岩波書店　2003、 P.110

9.2.7 Lagrange の運動方程式

変分法の応用として、力学における一般座標による Lagrange の運動方程式を導出する。[1]

```
kill(all);
M1:m[i]*diff(r[i](t),t,2)=F[i];
F1:F[i]=R[i]+K[i];
subst([F1],M1);
T1:T=m[i]*diff(r[i](t),t,1)^2/2;
TI1:T[r]=sum(rhs(T1),i,1,N);
JI1:J[r]='integrate(rhs(TI1),t,t[0],t[1]);
R1:q[i](t)=r[i](t)+a*s[i](t);
TI2:T[q]=subst([r[i](t)=q[i](t)],rhs(TI1));
subst([R1],%);
ev(%,diff);
expand(%);
%-TI1;
subst([a^2=0,('diff(r[i](t),t,1))^2=0],%);
dJ='integrate(rhs(%),t,t[0],t[1]);
dJ=a*(sum(m[i]*('diff(r[i](t),t,1))*s[i](t)
 ,i,1,N)-integrate(sum(m[i]*('diff(
 r[i](t),t,2))*((s[i](t))),i,1,N),t,t[0],
 t[1]));
expand(%);
DJ1:dJ=last(rhs(%));
TI3:dT=T[q]-T[r];
DJ2:dJ='integrate(dT(t),t,t[0],t[1]);
solve(M1,m[i])[1];
subst([%],DJ1);
expand(subst([F1],%));
subst([R[i]=0],%);
rhs(DJ2)=rhs(%);
lhs(%)-rhs(%)=0;
subst([K[i]=-dU[i](t)/s[i](t)/a],%);
subst([sum(dU[i](t),i,1,N)=dU(t)],%);
```

N 個の質点からなる質点系で各質点の質量：m_i、位置ベクトル：r_i、外力：F_i とすると、質点の運動方程式は、

$$m_i \left(\frac{d^2}{d\,t^2}\, r_i\,(t)\right) = F_i$$

ここで、ある運動をしたときの拘束力：R_i、作用力：R_i とすると、

$$F_i = R_i + K_i$$

上式を代入すると、

$$m_i \left(\frac{d^2}{d\,t^2}\, r_i\,(t)\right) = R_i + K_i \tag{9.2.31}$$

[1]国井修二郎、千田香苗：力学　2、丸善 (株)　 1958、 P.47

質点の運動エネルギー：T は、

$$T = \frac{1}{2} m_i \left(\frac{d}{d\,t}\, r_i\,(t)\right)^2$$

質点系の運動エネルギー：T_r は、

$$T_r = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\frac{d}{d\,t}\, r_i\,(t)\right)^2 \tag{9.2.32}$$

上式の運動エネルギーの時間：$t_0 \to t_1$ の積分：J_r は、

$$J_r = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\frac{d}{d\,t}\, r_i\,(t)\right)^2 dt$$

いま、次式の仮想の運動：q_i を考え、実際の運動：$r_i\,(t)$ に仮想の運動：$a\,s_i$ を足す。ここで微少定数：a、仮想運動：s_i とし、$t = t_0$ および $t = t_1$ で $s_i = 0$ とする。

$$q_i\,(t) = a\,s_i\,(t) + r_i\,(t) \tag{9.2.33}$$

仮想の運動：q_i による質点系の運動エネルギー：T_q は、

$$\begin{aligned}
T_q =& \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\frac{d}{d\,t}\, q_i\,(t)\right)^2 \\
=& \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \left(a \left(\frac{d}{d\,t}\, s_i\,(t)\right) + \frac{d}{d\,t}\, r_i\,(t)\right)^2 \\
=& \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{N} a^2\, m_i \left(\frac{d}{d\,t}\, s_i\,(t)\right)^2 \right.\\
&\quad + 2\,a\,m_i \left(\frac{d}{d\,t}\, r_i\,(t)\right) \left(\frac{d}{d\,t}\, s_i\,(t)\right) \\
&\quad \left. + m_i \left(\frac{d}{d\,t}\, r_i\,(t)\right)^2 \right)
\end{aligned}$$

上式と (9.2.32) 式の差は、a^2 が十分小さいとして、

$$dT = T_q - T_r = a \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\frac{d}{d\,t}\, r_i\,(t)\right) \left(\frac{d}{d\,t}\, s_i\,(t)\right)$$

上式の $t_0 \to t_1$ の積分は、部分積分を適用し、$t = t_0$ および $t = t_1$ で $s_i = 0$ であるから、

$$\begin{aligned}
dJ =& \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{dT}\,(t)\,dt \\
=& a \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\frac{d}{d\,t}\, r_i\,(t)\right) \left(\frac{d}{d\,t}\, s_i\,(t)\right) dt \\
=& \left[a \left(\sum_{i=1}^{N} m_i\, s_i\,(t) \left(\frac{d}{d\,t}\, r_i\,(t)\right)\right)\right]_{t_0}^{t_1} \\
& - a \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{N} m_i\, s_i\,(t) \left(\frac{d^2}{d\,t^2}\, r_i\,(t)\right) dt \\
=& - a \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{N} m_i\, s_i\,(t) \left(\frac{d^2}{d\,t^2}\, r_i\,(t)\right) dt
\end{aligned}$$

上式に (9.2.31) 式を代入し、拘束力：R_i は仕事をしないので、$R_i\,s_i\,(t)$ の項は零となり、

$$dJ = -\,a\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{N} R_i\,s_i\,(t) + K_i\,s_i\,(t)\,dt$$
$$= -\,a\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{N} K_i\,s_i\,(t)\,dt$$

以上から、

$$\int_{t_0}^{t_1} \mathrm{dT}\,(t)\,dt = -a\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{N} K_i\,s_i\,(t)\,dt$$

上式を変形し、

$$a\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{N} K_i\,s_i\,(t)\,dt + \int_{t_0}^{t_1}\mathrm{dT}\,(t)\,dt = 0$$

ここで、作用力：K_i がポテンシャル：U に基づくものとすると、$U_i = -K_i\,r_i$ であるから、

$$\int_{t_0}^{t_1}\mathrm{dT}\,(t)\,dt - \int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{N} dU_i\,(t)\,dt = 0$$

以上から、

$$\int_{t_0}^{t_1}\mathrm{dT}\,(t)\,dt - \int_{t_0}^{t_1}\mathrm{dU}\,(t)\,dt = 0 \qquad (9.2.34)$$

```
L1:L(t,r[i],'diff(r[i],t,1))=T(t,r[i],
 'diff(r[i],t,1))-U(t,r[i]);
'integrate(L(t,r[i],'diff(r[i],t,1)),t,
 t[0],t[1]);
H1:H=L(t,r[i],'diff(r[i],t,1));
subst([L1],%);
'diff(H,y,1)-'diff('diff(H,x,1),
 'diff(y,x,1),1)=0;
subst([H1,x=t,y=r[i]],%);
subst([L1],%);
'diff('diff(T(t,r[i],'diff(r[i],t,1)),
 'diff(r[i],t,1)),t,1)-'diff(T(t,r[i],
 'diff(r[i],t,1)),r[i],1)=
 'diff(U(t,r[i]),r[i],1);
```

いま、下記のラグランジェ関数：L を導入する。

$$\mathrm{L}\left(t, r_i, \frac{d}{d\,t}\,r_i\right) = \mathrm{T}\left(t, r_i, \frac{d}{d\,t}\,r_i\right) - \mathrm{U}\,(t, r_i)$$

上式の時間：$t_0 \to t_1$ の積分は、

$$\int_{t_0}^{t_1}\mathrm{L}\left(t, r_i, \frac{d}{d\,t}\,r_i\right) dt$$

上式の極値は (9.2.34) 式で与えられる。

$$\int_{t_0}^{t_1}\mathrm{dL}dt = \int_{t_0}^{t_1}\mathrm{dT}\,(t)\,dt - \int_{t_0}^{t_1}\mathrm{dU}\,(t)\,dt = 0$$

以上のことは、ラグランジェ関数:L の時間積分:$\int \mathrm{L}\,dt$ の値をいろいろの運動について比べたとき、実際の運動は $\int \mathrm{L}\,dt$ が最小となるように行動することを意味している。これを変分法に適用すると、

(9.1.6) 式のオイラーの微分方程式から、

$$\frac{d}{d\,y}\,H - \frac{d^2}{d\,p\,d\,x}\,H = 0$$

ここでオイラーの微分方程式の H として次式となる。

$$H = \mathrm{L}\left(t, r_i, \frac{d}{d\,t}\,r_i\right) = \mathrm{T}\left(t, r_i, \frac{d}{d\,t}\,r_i\right) - \mathrm{U}\,(t, r_i)$$

上式をオイラーの微分方程式に代入し、

$$\frac{d}{d\,r_i}\left(\mathrm{T}\left(t, r_i, \frac{d}{d\,t}\,r_i\right) - \mathrm{U}\,(t, r_i)\right)$$
$$-\frac{d^2}{d\,\left(\frac{d}{d\,t}\,r_i\right)\,d\,t}\left(\mathrm{T}\left(t, r_i, \frac{d}{d\,t}\,r_i\right) - \mathrm{U}\,(t, r_i)\right) = 0$$

微分を実行すると、次式の Lagrange の運動方程式が得られる。

$$\frac{d}{d\,t}\left(\frac{d}{d\,\left(\frac{d}{d\,t}\,r_i\right)}\,\mathrm{T}\left(t, r_i, \frac{d}{d\,t}\,r_i\right)\right) - \frac{d}{d\,r_i}\,\mathrm{T}\left(t, r_i, \frac{d}{d\,t}\,r_i\right)$$
$$= \frac{d}{d\,r_i}\,\mathrm{U}\,(t, r_i)$$

上式は多未知数の場合のオイラーの微分方程式となり、未知数の数だけ方程式ができる。

第10章　偏微分方程式

偏微分方程式は多くのタイプが考えられるが、ここでは物理でよく扱われる下記のタイプの偏微分方程式について記述する。

ラプラス方程式	$\nabla^2 u = 0$
ポアソン方程式	$\nabla^2 u = -\rho(x, y)$
ヘルムホルツ方程式	$\nabla^2 u + K u = 0$
熱伝導方程式	$\frac{d}{d t} u = \nabla^2 u C^2$
波動方程式	$\frac{d^2}{d t^2} u = \nabla^2 u C^2$

10.1　ラプラス方程式とグリーン関数

10.1.1　二次元グリーン関数

```
kill(all);
load("vect");
depends(r,[x,y,z]);
depends([\phi,\psi],[x,y]);
R1:r=sqrt(x^2+y^2);
R2:rhs(%)=lhs(%);
diff(R1,x,1);
DRX1:subst([R2],%);
diff(R1,y,1);
DRY1:subst([R2],%);
'diff(log(1/r),x,1)=diff(log(1/r),x,1);
DX1:lhs(%)=subst([DRX1],rhs(%));
diff(%,x,1);
DX2:subst([DRX1],%);
'diff(log(1/r),y,1)=diff(log(1/r),y,1);
DY1:lhs(%)=subst([DRY1],rhs(%));
diff(%,y,1);
DY2:subst([DRY1],%);
DX2+DY2;
DS1:'diff(Q,x,1)-'diff(P,y,1);
DS2:Q*dy+P*dx;
P1:P=-lhs(DY1);
Q1:Q=lhs(DX1);
subst([P1,Q1],DS1);
X1:x=r*cos(t);
Y1:y=r*sin(t);
DXT1:'diff(lhs(X1),t,1)=diff(rhs(X1),t,1);
DXT2:dx=rhs(%)*dt;
DYT1:'diff(lhs(Y1),t,1)=diff(rhs(Y1),t,1);
DYT2:dy=rhs(%)*dt;
P2:P=-rhs(DY1);
Q2:Q=rhs(DX1);
subst([P2,Q2],DS2);
subst([DXT2,DYT2],%);
subst([X1,Y1],%);
trigsimp(%);
```

二次元ラプラス方程式の基本解として、$\log\left(\frac{1}{r}\right)$ とする。これが二次元ラプラス方程式：$\frac{d^2}{d\,y^2}\,u+\frac{d^2}{d\,x^2}\,u=0$ を満足しているかどうか確かめる。

$$r=\sqrt{y^2+x^2}$$

$$\frac{d}{d\,x}\,r=\frac{x}{\sqrt{y^2+x^2}}=\frac{x}{r},\quad \frac{d}{d\,y}\,r=\frac{y}{\sqrt{y^2+x^2}}=\frac{y}{r}$$

$$\frac{d}{d\,x}\,\left(\log\left(\frac{1}{r}\right)\right)=-\frac{\frac{d}{d\,x}\,r}{r}=-\frac{x}{r^2}$$

$$\frac{d}{d\,y}\,\left(\log\left(\frac{1}{r}\right)\right)=-\frac{\frac{d}{d\,y}\,r}{r}=-\frac{y}{r^2}$$

$$\frac{d^2}{d\,x^2}\,\left(\log\left(\frac{1}{r}\right)\right)=\frac{2\,\left(\frac{d}{d\,x}\,r\right)\,x}{r^3}-\frac{1}{r^2}=\frac{2\,x^2}{r^4}-\frac{1}{r^2}$$

$$\frac{d^2}{d\,y^2}\,\left(\log\left(\frac{1}{r}\right)\right)=\frac{2\,\left(\frac{d}{d\,y}\,r\right)\,y}{r^3}-\frac{1}{r^2}=\frac{2\,y^2}{r^4}-\frac{1}{r^2}$$

$$\begin{aligned}&\frac{d^2}{d\,y^2}\,\left(\log\left(\frac{1}{r}\right)\right)+\frac{d^2}{d\,x^2}\,\left(\log\left(\frac{1}{r}\right)\right)\\&=\frac{2\,y^2}{r^4}+\frac{2\,x^2}{r^4}-\frac{2}{r^2}=0\end{aligned}\tag{10.1.1}$$

上式から基本解：$\log\left(\frac{1}{r}\right)$ が二次元ラプラス方程式を満足している。二次元グリーンの定理は (4.4.32) 式から次式となる。

$$\iint_S\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{Q}-\frac{d}{d\,y}\,\mathrm{P}\right)\,dydx=\oint_C\mathrm{Q}\,dy+\mathrm{P}\,dx\tag{10.1.2}$$

また、二次元グリーンの第二定理は (4.4.39) 式から次式となる。

$$\begin{aligned}&\iint_S\left(\phi\,\left(\nabla^2\,\psi\right)-\left(\nabla^2\,\phi\right)\,\psi\right)\,dydx\\&=\oint_C\left(\phi\,\left(\frac{d}{d\,n}\,\psi\right)-\left(\frac{d}{d\,n}\,\phi\right)\,\psi\right)\,ds\end{aligned}\tag{10.1.3}$$

上式で $\psi=\log\left(\frac{1}{r}\right)$ と置くと、

$$\begin{aligned}&\iint_S\left(\phi\,\left(\nabla^2\log\left(\frac{1}{r}\right)\right)-\left(\nabla^2\,\phi\right)\,\log\left(\frac{1}{r}\right)\right)\,dydx\\&=\oint_C\left(\phi\,\left(\frac{d}{d\,n}\log\left(\frac{1}{r}\right)\right)-\left(\frac{d}{d\,n}\,\phi\right)\,\log\left(\frac{1}{r}\right)\right)\,ds\end{aligned}$$

ここで、点：A,B は面積：S 内で、$r=|\overrightarrow{r_B}-\overrightarrow{r_A}|$ で点：B についての微分、積分の式とする。$B\rightarrow A$ のとき、$r\rightarrow 0$ で特異点になるので、特異点部分の微小面積：R とそれ以外に分ける。上式の左辺第一項：$\iint_S\phi\,\left(\nabla^2\log\left(\frac{1}{r}\right)\right)\,dydx$ は特異点部分の微小面積：R 以外は、(10.1.1) 式から零であるので、

$$\begin{aligned}&\phi\,(\overrightarrow{r_A})\iint_R\nabla^2\log\left(\frac{1}{r}\right)\,dydx-\iint_S\left(\nabla^2\,\phi\right)\,\log\left(\frac{1}{r}\right)\,dydx\\&=\oint_C\left(\phi\,\left(\frac{d}{d\,n}\log\left(\frac{1}{r}\right)\right)-\left(\frac{d}{d\,n}\,\phi\right)\,\log\left(\frac{1}{r}\right)\right)\,ds\end{aligned}\tag{10.1.4}$$

(10.1.2) 式の P,Q を下記とする。

$$P=-\frac{d}{d\,y}\,\left(\log\left(\frac{1}{r}\right)\right),\quad Q=\frac{d}{d\,x}\,\left(\log\left(\frac{1}{r}\right)\right)\tag{10.1.5}$$

(10.1.2) 式の左辺の被積分関数に上式を代入すると、

$$\begin{aligned}&\frac{d}{d\,x}\,Q-\frac{d}{d\,y}\,P\\&=\frac{d^2}{d\,x^2}\,\left(\log\left(\frac{1}{r}\right)\right)-\frac{d}{d\,y}\,\left(-\frac{d}{d\,y}\,\left(\log\left(\frac{1}{r}\right)\right)\right)\\&=\nabla^2\log\left(\frac{1}{r}\right)\end{aligned}\tag{10.1.6}$$

r,x,y の関係式は、

$$x=r\cos\left(t\right),\quad y=r\sin\left(t\right)$$

$$\frac{d}{d\,t}\,x=-r\sin\left(t\right),\quad \frac{d}{d\,t}\,y=r\cos\left(t\right)$$

$$dx=-dt\,r\sin\left(t\right),\quad dy=dt\,r\cos\left(t\right)$$

(10.1.2) 式の右辺の被積分関数に (10.1.5) 式と上式を代入すると、

$$\begin{aligned}dy\,Q+dx\,P&=\frac{dx\,y}{r^2}-\frac{dy\,x}{r^2}\\&=-\frac{dt\sin\left(t\right)\,y}{r}-\frac{dt\cos\left(t\right)\,x}{r}\\&=-dt\sin\left(t\right)^2-dt\cos\left(t\right)^2=-dt\end{aligned}$$

(10.1.6) 式と上式から (10.1.2) 式は、(10.1.4) 式の左辺第一項に対応しており、

$$\iint_R\nabla^2\log\left(\frac{1}{r}\right)\,dydx=\oint_C-dt=-2\,\pi$$

上式を (10.1.4) 式に代入すると、

$$\begin{aligned}&-2\,\pi\,\phi\,(\overrightarrow{r_A})-\iint_S\left(\nabla^2\,\phi\right)\,\log\left(\frac{1}{r}\right)\,dydx\\&=\oint_C\left(\phi\,\left(\frac{d}{d\,n}\log\left(\frac{1}{r}\right)\right)-\left(\frac{d}{d\,n}\,\phi\right)\,\log\left(\frac{1}{r}\right)\right)\,ds\end{aligned}$$

上式から、下記となり二次元のグリーン関数が得られた。

$$\begin{aligned}\phi\,(\overrightarrow{r_A})=&-\frac{1}{2\,\pi}\iint_S\left(\nabla^2\,\phi\right)\,\log\left(\frac{1}{r}\right)\,dydx\\&+\oint_C\left(\left(\frac{d}{d\,n}\,\phi\right)\,\log\left(\frac{1}{r}\right)-\phi\,\left(\frac{d}{d\,n}\log\left(\frac{1}{r}\right)\right)\right)\,ds\end{aligned}\tag{10.1.7}$$

いま、ϕ が二次元ラプラス方程式を満足するとすると、上式右辺第一項は零となり、右辺第二項の周辺の線積分：C から点：A の $\phi\,(\overrightarrow{r_A})$ が得られる。

10.1.2　三次元グリーン関数

```
kill(all);
load("vect");
depends(r,[x,y,z]);
R1:r=sqrt(x^2+y^2+z^2);
R2:rhs(%)=lhs(%);
diff(R1,x,1);
DRX1:subst([R2],%);
diff(R1,y,1);
DRY1:subst([R2],%);
diff(R1,z,1);
DRZ1:subst([R2],%);
diff(1/r,x,1);
subst([DRX1],%);
diff(%,x,1);
DX1:subst([DRX1],%);
diff(1/r,y,1);
subst([DRY1],%);
diff(%,y,1);
DY1:subst([DRY1],%);
diff(1/r,z,1);
subst([DRZ1],%);
diff(%,z,1);
DZ1:subst([DRZ1],%);
DX1+DY1+DZ1;
```

三次元ラプラス方程式の基本解として、$\frac{1}{r}$ とする。これが三次元ラプラス方程式：$\frac{d^2}{d\,z^2}\,u+\frac{d^2}{d\,y^2}\,u+\frac{d^2}{d\,x^2}\,u=0$ を満足しているかどうか確かめる。

$$r=\sqrt{z^2+y^2+x^2}$$

$$\frac{d}{d\,x}\,r=\frac{x}{\sqrt{z^2+y^2+x^2}}=\frac{x}{r}$$
$$\frac{d}{d\,y}\,r=\frac{y}{\sqrt{z^2+y^2+x^2}}=\frac{y}{r}$$
$$\frac{d}{d\,z}\,r=\frac{z}{\sqrt{z^2+y^2+x^2}}=\frac{z}{r}$$

$$\frac{d}{d\,x}\,\frac{1}{r}=-\frac{\frac{d}{d\,x}\,r}{r^2}=-\frac{x}{r^3}$$
$$\frac{d}{d\,y}\,\frac{1}{r}=-\frac{\frac{d}{d\,y}\,r}{r^2}=-\frac{y}{r^3}$$
$$\frac{d}{d\,z}\,\frac{1}{r}=-\frac{\frac{d}{d\,z}\,r}{r^2}=-\frac{z}{r^3}$$

$$\frac{d^2}{d\,x^2}\,\frac{1}{r}=\frac{3\,\left(\frac{d}{d\,x}\,r\right)\,x}{r^4}-\frac{1}{r^3}=\frac{3\,x^2}{r^5}-\frac{1}{r^3}$$
$$\frac{d^2}{d\,y^2}\,\frac{1}{r}=\frac{3\,\left(\frac{d}{d\,y}\,r\right)\,y}{r^4}-\frac{1}{r^3}=\frac{3\,y^2}{r^5}-\frac{1}{r^3}$$
$$\frac{d^2}{d\,z^2}\,\frac{1}{r}=\frac{3\,\left(\frac{d}{d\,z}\,r\right)\,z}{r^4}-\frac{1}{r^3}=\frac{3\,z^2}{r^5}-\frac{1}{r^3}$$

上式から次式となり、$\frac{1}{r}$ は三次元ラプラス方程式を満足している。

$$\begin{aligned}&\frac{d^2}{d\,z^2}\,\frac{1}{r}+\frac{d^2}{d\,y^2}\,\frac{1}{r}+\frac{d^2}{d\,x^2}\,\frac{1}{r}\\&\quad=\frac{3\,z^2}{r^5}+\frac{3\,y^2}{r^5}+\frac{3\,x^2}{r^5}-\frac{3}{r^3}=0\end{aligned}\tag{10.1.8}$$

(4.4.41) 式のグリーンの定理から、

$$\begin{aligned}&\iiint_V\phi\,\left(\nabla^2\,\psi\right)-\psi\,\left(\nabla^2\,\phi\right)dV\\&\quad=\iint_S\phi\,\frac{d}{dn}\psi-\psi\,\frac{d}{dn}\phi\,dS\end{aligned}\tag{10.1.9}$$

上式で $\psi=\frac{1}{r}$ と置くと、

$$\begin{aligned}&\iiint_V\phi\,\left(\nabla^2\,\left(\frac{1}{r}\right)\right)-\left(\frac{1}{r}\right)\,\left(\nabla^2\,\phi\right)dV\\&\quad=\iint_S\phi\,\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right)-\left(\frac{1}{r}\right)\,\frac{d}{dn}\phi\,dS\end{aligned}$$

ここで、点：A,B は体積：V 内で、$r=|\overrightarrow{r_B}-\overrightarrow{r_A}|$ で点：B についての微分、積分の式とする。$B\to A$ のとき、$r\to 0$ で特異点になるので、特異点部分の点：A 中心、微小半径：R の球体積とそれ以外に分ける。上式の左辺第一項：$\iiint_V\phi\,\left(\nabla^2\,\left(\frac{1}{r}\right)\right)dV$ は点：A 中心の微小体積以外は、(10.1.8) 式から零であるので、

$$\begin{aligned}&\phi\,(\overrightarrow{r_A})\,\iiint_R\left(\nabla^2\,\left(\frac{1}{r}\right)\right)dV-\iiint_V\left(\frac{1}{r}\right)\,\left(\nabla^2\,\phi\right)dV\\&\quad=\iint_S\phi\,\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right)-\left(\frac{1}{r}\right)\,\frac{d}{dn}\phi\,dS\end{aligned}\tag{10.1.10}$$

上式左辺第一項は、ガウスの定理から面積分となり、

$$\begin{aligned}&\iiint_R\nabla^2\,\left(\frac{1}{r}\right)dV=-\iiint_R\nabla\cdot\,\left(\frac{\overrightarrow{r}}{r^3}\right)dV\\&\quad=-\iint_S\frac{\overrightarrow{r}\cdot\overrightarrow{n}}{r^3}\,dS=-\frac{(R\overrightarrow{n})\cdot\overrightarrow{n}}{R^3}\,4\,\pi\,R^2=-4\,\pi\end{aligned}$$

(10.1.10) 式に上式を代入すると、

$$\begin{aligned}&-4\,\pi\,\phi\,(\overrightarrow{r_A})-\iiint_V\left(\frac{1}{r}\right)\,\left(\nabla^2\,\phi\right)dV\\&\quad=\iint_S\phi\,\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right)-\left(\frac{1}{r}\right)\,\frac{d}{dn}\phi\,dS\end{aligned}$$

上式から、

$$\begin{aligned}4\,\pi\,\phi\,(\overrightarrow{r_A})=&-\iiint_V\left(\frac{1}{r}\right)\,\left(\nabla^2\,\phi\right)dV\\&+\iint_S\left(\left(\frac{1}{r}\right)\,\frac{d}{dn}\phi-\phi\,\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right)\right)dS\end{aligned}\tag{10.1.11}$$

10.2 二次元ラプラスの方程式

10.2.1 xy 座標における二次元ラプラスの方程式

xy 座標の二次元ラプラスの方程式は次式で表現できる。

$$\nabla^2 u = \frac{d^2}{d\,y^2}\,u + \frac{d^2}{d\,x^2}\,u = 0 \tag{10.2.1}$$

```
kill(all);
load("vect");
depends(u,[x,y]);
depends(v,[x]);
depends(w,[y]);
assume(K>0);
assume(A>0);
assume(B>0);
EQ:'diff(u,x,2)+'diff(u,y,2)=0;
U1:u=v*w;
subst([U1],EQ);
ev(%,diff);
expand(%/v/w);
EQ1:%-last(lhs(%));
EQ2:rhs(EQ1)=K^2;
EQ3:lhs(EQ1)=K^2;
AN2:ode2(EQ2,v,x);
AN3:ode2(EQ3,w,y);
subst([%k1=%c1,%k2=%c2],%);
subst([AN2,%],U1);
```

ここで、u は x,y の関数であり、下記のように変数分離できるとして、v は x の関数、w は y の関数とする。

$$u = v\,w \tag{10.2.2}$$

(10.2.1) 式に上式を代入し、微分を実行すると、

$$v\left(\frac{d^2}{d\,y^2}\,w\right) + \left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,v\right)\,w = 0$$

上式を変形し、

$$\frac{\frac{d^2}{d\,y^2}\,w}{w} = -\frac{\frac{d^2}{d\,x^2}\,v}{v}$$

上式を K^2 と置くと、

$$-\frac{\frac{d^2}{d\,x^2}\,v}{v} = K^2 \tag{10.2.3}$$

$$\frac{\frac{d^2}{d\,y^2}\,w}{w} = K^2 \tag{10.2.4}$$

(10.2.3) 式を ode2 関数で解くと、

$$v = \%k1\sin\left(x\,K\right) + \%k2\cos\left(x\,K\right)$$

(10.2.4) 式を ode2 関数で解くと、

$$w = \%c1\,e^{y\,K} + \%c2\,e^{-y\,K}$$

上記二式から、(10.2.1) 式の解：u は、

$$\begin{aligned} u = &\left(\%c1\,e^{y\,K} + \%c2\,e^{-y\,K}\right) \\ &\times\ \left(\%k1\sin\left(x\,K\right) + \%k2\cos\left(x\,K\right)\right) \end{aligned} \tag{10.2.5}$$

```
subst([x=0,v=0],AN2);
C1:solve(%,%k2)[1];
subst([x=A,v=0,C1],AN2);
A*K=%pi*n;
C2:solve(%,K)[1];
AN21:subst([C1,C2],AN2);
C3:subst([y=B,w=0],AN3);
solve(C3,%c2);
subst([%],AN3);
expand(rhs(%)*%e^(-B*K));
AN31:w=%c1*sinh(K*(B-y));
AN4:subst([AN21,AN31,%c1=1,C2],U1);
AN5:u=sum(subst([%k1=B[n]],rhs(AN4)),n,1,
 inf);
f(x)=subst([y=0,%k1=B[n]],rhs(AN5));
B[n]*sinh((%pi*n*B)/A)=2/A*integrate(f(x)
 *sin((%pi*n*x)/A),x,0,A);
solve(%,B[n])[1];
subst([%],AN5);
```

(10.2.5) 式の解で、境界：$x=0, x=A$ で関数：u が零とすると、

$$\%k2 = 0, \quad 0 = \%k1\sin\left(A\,K\right)$$

下記となり、ここで、n は整数である。

$$K = \frac{\pi\,n}{A}$$

以上から、

$$v = \%k1\sin\left(\frac{\pi\,n\,x}{A}\right) \tag{10.2.6}$$

(10.2.5) 式の解で、境界：$y=B$ で関数：u が零とすると、

$$0 = \%c1\,e^{B\,K} + \%c2\,e^{-B\,K}$$

上式から、

$$\%c2 = -\%c1\,e^{2\,B\,K}$$

以上から、

$$w = \%c1\,e^{y\,K} - \%c1\,e^{2\,B\,K - y\,K}$$

上式を書き換えて、

$$w = \%c1\sinh\left(\left(B-y\right)\,K\right) \tag{10.2.7}$$

(10.2.6) 式と (10.2.7) 式から u は、

$$u=\%k1\sin\left(\frac{\pi\, n\, x}{A}\right)\sinh\left(\frac{\pi\, n\, \left(B-y\right)}{A}\right) \quad (10.2.8)$$

解は上式の $n=1\to\infty$ の和として得られるから、

$$u=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\left(\frac{\pi\, n\, x}{A}\right)\sinh\left(\frac{\pi\, n\, \left(B-y\right)}{A}\right) \quad (10.2.9)$$

境界値：$\mathrm{u}\left(x,0\right)=\mathrm{f}\left(x\right)$ は、上式で $y=0$ として、

$$\mathrm{f}\left(x\right)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\left(\frac{\pi\, n\, x}{A}\right)\sinh\left(\frac{\pi\, n\, B}{A}\right)$$

上式はフーリエ級数であるから、係数 : B_n は (6.1.5) 式から得られ、

$$B_n\sinh\left(\frac{\pi\, n\, B}{A}\right)=\frac{2}{A}\int_0^A\mathrm{f}\left(x\right)\,\sin\left(\frac{\pi\, n\, x}{A}\right)dx$$

以上から、

$$B_n=\frac{2}{A\sinh\left(\frac{\pi\, n\, B}{A}\right)}\int_0^A\mathrm{f}\left(x\right)\,\sin\left(\frac{\pi\, n\, x}{A}\right)dx$$

上式を (10.2.9) 式に代入すると、

$$u=\frac{2}{A}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{\pi\, n\, x}{A}\right)\,\sinh\left(\frac{\pi\, n\, \left(B-y\right)}{A}\right)}{\sinh\left(\frac{\pi\, n\, B}{A}\right)}\int_0^A\mathrm{f}\left(x\right)\,\sin\left(\frac{\pi\, n\, x}{A}\right)dx$$

10.2.2 xy 座標における二次元ラプラスの方程式 (x 方向無限境界)

xy 座標の二次元ラプラスの方程式は次式で表現できる。

$$\nabla^2 u = \frac{d^2}{d\,y^2}\,u + \frac{d^2}{d\,x^2}\,u = 0 \tag{10.2.10}$$

```
kill(all);
load("vect");
depends(u,[x,y]);
depends(v,[x]);
depends(w,[y]);
assume(\omega>0);
assume(A>0);
assume(B>0);
EQ:'diff(u,x,2)+'diff(u,y,2)=0;
U1:u=v*w;
subst([U1],EQ);
ev(%,diff);
expand(%/v/w);
EQ1:%-last(lhs(%));
EQ2:rhs(EQ1)=\omega^2;
EQ3:lhs(EQ1)=\omega^2;
ode2(EQ2,v,x);
AN2:v=%c1*%e^(%i*\omega*x);
AN3:ode2(EQ3,w,y);
AN2*AN3;
AN0:subst([%c1=1,%k1=A(\omega),%k2=
 B(\omega)],%);
AN01:u=1/(sqrt(2*%pi))*integrate(rhs(AN0),
 \omega,-inf,inf);
BAN01:subst([y=0,u=0],AN01);
BAN02:subst([y=D,u=f(x)],AN01);
subst([B(\omega)=-A(\omega)],%);
AN02:u='integrate(%e^(%i*omega*x)*(2*
 A(omega)*sinh(omega*y)),omega,-inf,inf)
 /(sqrt(2)*sqrt(%pi));
f(x)='integrate(%e^(%i*omega*x)*(2*
 A(omega)*sinh(omega*D)),omega,-inf,inf)
 /(sqrt(2)*sqrt(%pi));
2*A(omega)*sinh(omega*D)=1/(sqrt(2*%pi))
 *integrate(f(x)*%e^(-%i*\omega*x),x,
 -inf,inf);
solve(%,A(omega))[1];
subst([x=s],%);
subst([%],AN02);
```

ここで、u は x,y の関数であり、下記のように変数分離できるとして、v は x の関数、w は y の関数とする。

$$u = v\,w \tag{10.2.11}$$

(10.2.10) 式に上式を代入し、微分を実行すると、

$$v\left(\frac{d^2}{d\,y^2}\,w\right) + \left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,v\right)\,w = 0$$

上式を vw で割ると、

$$\frac{\frac{d^2}{d\,y^2}\,w}{w} = -\frac{\frac{d^2}{d\,x^2}\,v}{v}$$

上式を ω^2 と置くと

$$-\frac{\frac{d^2}{d\,x^2}\,v}{v} = \omega^2, \quad \frac{\frac{d^2}{d\,y^2}\,w}{w} = \omega^2$$

上式を ode2 関数で解くと、

$$v = \%k1\sin(\omega\,x) + \%k2\cos(\omega\,x) = \%c1\,e^{i\,\omega\,x}$$

$$w = \%k1\,e^{\omega\,y} + \%k2\,e^{-\omega\,y}$$

上記二式を (10.2.11) 式に代入し、

$$u = v\,w = \%c1\,e^{i\,\omega\,x}\left(\%k1\,e^{\omega\,y} + \%k2\,e^{-\omega\,y}\right)$$

上式から、係数：$\%c1, \%k1, \%k2$ を ω の関数として、

$$u = e^{i\,\omega\,x}\left(\mathrm{A}(\omega)\,e^{\omega\,y} + \mathrm{B}(\omega)\,e^{-\omega\,y}\right)$$

上式をフーリエ積分を用いて表すと、

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\,\omega\,x}\left(\mathrm{A}(\omega)\,e^{\omega\,y} + \mathrm{B}(\omega)\,e^{-\omega\,y}\right)d\omega \tag{10.2.12}$$

上式の境界条件として、$u = 0$ at $y = 0, u = f(x)$ at $y = D$ とすると、

$$0 = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(\mathrm{B}(\omega) + \mathrm{A}(\omega))\,e^{i\,\omega\,x}d\omega \tag{10.2.13}$$

$$\mathrm{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\,\omega\,x}\left(\mathrm{A}(\omega)\,e^{\omega\,D} + \mathrm{B}(\omega)\,e^{-\omega\,D}\right)d\omega \tag{10.2.14}$$

(10.2.13) 式が成り立つには、$\mathrm{B}(\omega) = -\mathrm{A}(\omega)$ となり、(10.2.14) 式に代入すると、

$$\mathrm{f}(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{A}(\omega)\,e^{i\,\omega\,x}\sinh(\omega\,D)\,d\omega$$

フーリエ積分から、

$$2\,\mathrm{A}(\omega)\,\sinh(\omega\,D) = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\,\omega\,x}\,\mathrm{f}(x)\,dx$$

上式から、$\mathrm{A}(\omega)$ は、

$$\mathrm{A}(\omega) = \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}\sqrt{\pi}\sinh(\omega\,D)}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\,\omega\,s}\,\mathrm{f}(s)\,ds$$

(10.2.12) 式に $\mathrm{B}(\omega) = -\mathrm{A}(\omega)$ および上式を代入すると、

$$\begin{aligned} u =& \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{A}(\omega)\,e^{i\,\omega\,x}\sinh(\omega\,y)\,d\omega \\ =& \frac{1}{2\,\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\,\omega\,x}\sinh(\omega\,y)}{\sinh(\omega\,D)}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\,\omega\,s}\,\mathrm{f}(s)\,ds\,d\omega \end{aligned}$$

10.2.3 極座標における二次元ラプラスの方程式

極 $(r-\theta)$ 座標の二次元ラプラスの方程式は (4.5.15) 式、168 頁から次式で表現できる。

$$\nabla^2 u = \frac{\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,u}{r^2} + \frac{d^2}{d\,r^2}\,u + \frac{\frac{d}{d\,r}\,u}{r} = 0 \qquad (10.2.15)$$

```
kill(all);
load("vect");
depends(u,[r,\theta]);
depends(v,[r]);
depends(w,[\theta]);
assume(r>0 and r<A);
assume(m>0);
EQ:'diff(u,theta,2)/r^2+'diff(u,r,2)
 +'diff(u,r,1)/r=0;
U1:u=v*w;
subst([U1],EQ);
ev(%,diff);
expand(%/v/w*r^2);
EQ1:%-first(lhs(%));
EQ2:rhs(EQ1)=m^2;
EQ3:lhs(EQ1)=m^2;
%-m^2;
EQ31:expand(%*v/r^2);
AN2:ode2(EQ2,w,\theta);
ode2(EQ31,v,r);
expand(radcan(%));
AN3:subst([%k1=%c1,%k2=%c2],%);
subst([m=0],EQ3);
AN4:ode2(%,v,r);
subst([AN2,AN3],U1);
```

ここで、u は r,θ の関数であり、$x-y$ 座標との関係を図 4.5.1、164 頁に示す。下記のように変数分離できるとして、v は r の関数、w は θ の関数とする。

$$u = v\,w \qquad (10.2.16)$$

(10.2.15) 式に上式を代入し、微分を実行すると、

$$\frac{v\,\left(\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,w\right)}{r^2} + \left(\frac{d^2}{d\,r^2}\,v\right)\,w + \frac{\left(\frac{d}{d\,r}\,v\right)\,w}{r} = 0$$

上式を変形し、

$$\frac{r^2\,\left(\frac{d^2}{d\,r^2}\,v\right)}{v} + \frac{r\,\left(\frac{d}{d\,r}\,v\right)}{v} = -\frac{\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,w}{w}$$

上式を m^2 と置くと、

$$-\frac{\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,w}{w} = m^2 \qquad (10.2.17)$$

$$\frac{r^2\,\left(\frac{d^2}{d\,r^2}\,v\right)}{v} + \frac{r\,\left(\frac{d}{d\,r}\,v\right)}{v} = m^2 \qquad (10.2.18)$$

上式を変形し、

$$\frac{d^2}{d\,r^2}\,v + \frac{\frac{d}{d\,r}\,v}{r} - \frac{m^2\,v}{r^2} = 0 \qquad (10.2.19)$$

(10.2.17) 式を ode2 関数で解くと、

$$w = \%k1\sin(m\,\theta) + \%k2\cos(m\,\theta) \quad m：正の整数 \qquad (10.2.20)$$

ここで上式が $\theta=0$ と $\theta=2\,\pi$ が連続で繋がるためには、m は整数となる。(10.2.19) 式を ode2 関数で解くと、

$$v = \%c1\,r^m + \frac{\%c2}{r^m} \qquad (10.2.21)$$

(10.2.18) 式で $m=0$、即ち、軸対称とすると、

$$\frac{r^2\,\left(\frac{d^2}{d\,r^2}\,v\right)}{v} + \frac{r\,\left(\frac{d}{d\,r}\,v\right)}{v} = 0$$

上式を ode2 関数で解くと、

$$v = \%k1\log(r) + \%k2 \qquad (10.2.22)$$

(10.2.20) 式と (10.2.21) 式から、解：u は下記となる。

$$u = \left(\%c1\,r^m + \frac{\%c2}{r^m}\right) \times (\%k1\sin(\theta\,K) + \%k2\cos(\theta\,K)) \qquad (10.2.23)$$

```
AN31:u=subst([%c1=1/A^m,%c2=0],
 rhs(AN3))*rhs(AN2);
AN5:u=a[0]/2+sum(subst([%k1=b[m],
 %k2=a[m]],rhs(AN31)),m,1,inf);
subst([r=A],%);
AK1:a[m]=1/%pi*integrate(f(\phi)
 *cos(m*\phi),\phi,-%pi,%pi);
BK1:b[m]=1/%pi*integrate(f(\phi)
 *sin(m*\phi),\phi,-%pi,%pi);
A01:a[0]=1/%pi*integrate(f(\phi),
 \phi,-%pi,%pi);
subst([AK1,BK1,A01],AN5);
u=(sum((r/A)^m*((sin(theta*m)*f(phi)
 *sin(phi*m))/%pi+(cos(theta*m)*f(phi)
 *cos(phi*m))/%pi),m,1,inf))+(f(phi))
 /(2*%pi);
trigreduce(%);
factor(%);
AN6:u='integrate(rhs(%),\phi,-%pi,%pi);
AN61:subst([A^m=1,r^m=(r/A)^m],%);
```

```
assume(abs(a)<1);
sum(a^n*cos(n*x),n,1,inf)=(a*cos(x)-a^2)
 /(1-2*a*cos(x)+a^2);
subst([a=r/A,n=m,x=\theta-\phi],%);
factor(%);
subst([%],AN61);
factor(%);
```

(10.2.23) 式で $0<r<A$ では、範囲内で有限であるためには r^m の項を残し、$r>A$ では、範囲内で有限であるためには $\frac{1}{r^m}$ の項を残す。いま、$0<r<A$ とし、$r=A$ で $u=\mathrm{f}(\theta)$ の境界条件とする。基本解は (10.2.23) 式から、

$$u=\frac{r^m\ (\%k1\sin(m\,\theta)+\%k2\cos(m\,\theta))}{A^m}$$

上式を基に m の級数の形にすると、

$$u=\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{r^m\ (b_m\sin(m\,\theta)+a_m\cos(m\,\theta))}{A^m}\right)+\frac{a_0}{2} \tag{10.2.24}$$

$r=A$ の境界では、

$$u=\mathrm{f}(\theta)=\left(\sum_{m=1}^{\infty}b_m\sin(m\,\theta)+a_m\cos(m\,\theta)\right)+\frac{a_0}{2}$$

上式はフーリエ級数であるから、(6.1.5) 式から

$$\begin{aligned}a_m=&\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{f}(\phi)\ \cos(m\,\phi)\,d\phi\\ b_m=&\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{f}(\phi)\ \sin(m\,\phi)\,d\phi\\ a_0=&\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{f}(\phi)\,d\phi\end{aligned} \tag{10.2.25}$$

(10.2.24) 式に (10.2.25) 式を代入すると、

$$u=\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{r^m}{A^m}\ \left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{f}(\phi)\ \sin(m\,\phi)\,d\phi\sin(m\,\theta)+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{f}(\phi)\ \cos(m\,\phi)\,d\phi\cos(m\,\theta)\right)\right)+\frac{1}{2\,\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{f}(\phi)\,d\phi$$

上式の積分と級数の順序を入れ替え、被積分関数：du は、

$$\begin{aligned}du=&\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{r^m}{A^m}\ \left(\frac{\mathrm{f}(\phi)\ \sin(m\,\phi)\ \sin(m\,\theta)}{\pi}+\frac{\mathrm{f}(\phi)\ \cos(m\,\phi)\ \cos(m\,\theta)}{\pi}\right)\right)+\frac{\mathrm{f}(\phi)}{2\,\pi}\\ =&\frac{\mathrm{f}(\phi)}{2\,\pi}\ \left(2\ \left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{r^m\cos(m\ (\theta-\phi))}{A^m}\right)+1\right)\end{aligned}$$

上式を積分すると、

$$u=\frac{1}{2\,\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{f}(\phi)\ \left(2\ \left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{r^m\cos(m\ (\theta-\phi))}{A^m}\right)+1\right)d\phi \tag{10.2.26}$$

次式の無限級数の公式[1] から、

$$\sum_{n=1}^{\infty}a^n\cos(n\,x)=\frac{a\cos(x)-a^2}{-2\,a\cos(x)+a^2+1}$$

上式から、

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{r^m\cos(m\ (\theta-\phi))}{A^m}=\frac{\frac{r\cos(\theta-\phi)}{A}-\frac{r^2}{A^2}}{-\frac{2\,r\cos(\theta-\phi)}{A}+\frac{r^2}{A^2}+1}=\frac{r\ (\cos(\theta-\phi)\ A-r)}{A^2-2\,r\cos(\theta-\phi)\ A+r^2}$$

(10.2.26) 式に上式を代入すると、

$$u=\frac{1}{2\,\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{f}(\phi)\ \left(\frac{2\,r\ (\cos(\theta-\phi)\ A-r)}{A^2-2\,r\cos(\theta-\phi)\ A+r^2}+1\right)d\phi=\frac{(A-r)\ (A+r)}{2\,\pi}\ \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{f}(\phi)}{A^2-2\,r\cos(\theta-\phi)\ A+r^2}d\phi$$

上式をポアソンの積分公式という。

[1] 森口　繁一、宇田川　久、一松　信：岩波数学公式２　級数・フーリエ解析、岩波書店　1998　P.76

軸対称の場合：

```
AN41:subst([v=u],AN4);
subst([%k1=0],AN41);
AN42:subst([r=R[1],u=u[1]],AN41);
AN43:subst([r=R[2],u=u[2]],AN41);
solve([AN42,AN43],[%k1,%k2])[1];
subst([%],AN41);
AN44:radcan(%);
```

軸対称の解は、(10.2.22) 式から、

$$u = \%k1 \log(r) + \%k2 \tag{10.2.27}$$

中実の場合、$r = 0$ で $\log(r)$ 項は不適であるから、解は次式の一定値となる。

$$u = \%k2$$

中空の場合、$r = R_1, r = R_2$ の場合、各々$u = u_1, u = u_2$ とすると、

$$u_1 = \%k2 + \log(R_1)\ \%k1$$

$$u_2 = \%k2 + \log(R_2)\ \%k1$$

上式を解くと、

$$\%k1 = \frac{u_1 - u_2}{\log(R_1) - \log(R_2)},$$

$$\%k2 = \frac{u_2 \log(R_1) - u_1 \log(R_2)}{\log(R_1) - \log(R_2)}$$

上式を (10.2.27) 式に代入すると、

$$u = \frac{(u_2 - u_1)\ \log(r) + u_1 \log(R_2) - u_2 \log(R_1)}{\log(R_2) - \log(R_1)}$$

10.3 三次元ラプラスの方程式

10.3.1 xyz 座標における三次元ラプラスの方程式

xyz 座標の三次元ラプラスの方程式は次式で表現できる。

$$\nabla^2 u = \frac{d^2}{d z^2} u + \frac{d^2}{d y^2} u + \frac{d^2}{d x^2} u = 0 \qquad (10.3.1)$$

```
kill(all);
load("vect");
depends(u,[x,y,z]);
depends(s,[x]);
depends(v,[y]);
depends(w,[z]);
assume(K[1]>0);
assume(K[2]>0);
assume(K[3]>0);
assume(A>0);
assume(B>0);
declare([j,k,m,n],integer);
EQ:'diff(u,x,2)+'diff(u,y,2)+'diff(u,z,2)
 =0;
U1:u=s*v*w;
subst([U1],EQ);
ev(%,diff);
expand(%/s/v/w);
%-last(lhs(%));
EQ1:%-last(lhs(%));
EKX1:-'diff(s,x,2)/s=K[1]^2;
EKY1:-'diff(v,y,2)/v=K[2]^2;
EKZ1:'diff(w,z,2)/w=K[3]^2;
K123:K[3]^2=K[1]^2+K[2]^2;
K1231:K[3]=sqrt(rhs(K123));
S1:ode2(EKX1,s,x);
S11:subst([s=0,x=0],S1);
S12:subst([s=0,x=A],S1);
K[1]*A=%pi*m;
K11:solve(%,K[1])[1];
S0:subst([%k2=0,K11,%k1=A[m]],S1);
V1:ode2(EKY1,v,y);
V11:subst([v=0,y=0],S1);
V12:subst([v=0,y=B],V1);
K[2]*B=%pi*n;
K21:solve(%,K[2])[1];
```

```
V0:subst([%k2=0,K21,%k1=A[n]],V1);
W1:ode2(EKZ1,w,z);
W11:subst([w=0,z=0],W1);
subst([%k2=-%k1],W1);
W0:w=%k1*2*sinh(K[3]*z);
subst([S0,V0,W0,K1231],U1);
subst([K11,K21],%);
U2:subst([%k1=1/2,A[m]=A[m,n],A[n]=1],%);
U21:u=sum(sum(rhs(%),m,1,inf),n,1,inf);
subst([z=C,u=f(x,y)],U2);
DA1:%*sin((%pi*j*x)/A)*sin((%pi*k*y)/B);
IA1:'integrate('integrate(rhs(DA1),x,0,A),
 y,0,B);
ev(%,integrate);
subst([j=m,k=n],IA1);
IA11:ev(%,integrate);
IA2:'integrate('integrate(lhs(DA1),x,0,A),
 y,0,B);
IA21:subst([j=m,k=n],IA2);
IA21=IA11;
solve(%,A[m,n])[1];
```

ここで、u は x,y,z の関数であり、下記のように変数分離できるとして、v は x の関数、w は y の関数、s は z の関数とする。

$$u = s\,v\,w \qquad (10.3.2)$$

(10.3.1) 式に上式を代入し、微分を実行すると、

$$s\,v\left(\frac{d^2}{d z^2} w\right) + s\left(\frac{d^2}{d y^2} v\right) w + \left(\frac{d^2}{d x^2} s\right) v\,w = 0$$

上式を変形し、

$$\frac{\frac{d^2}{d z^2} w}{w} = -\frac{\frac{d^2}{d y^2} v}{v} - \frac{\frac{d^2}{d x^2} s}{s}$$

上式で K_1, K_2, K_3 を導入し、

$$-\frac{\frac{d^2}{d x^2} s}{s} = K_1^2 \qquad (10.3.3)$$

$$-\frac{\frac{d^2}{d y^2} v}{v} = K_2^2 \qquad (10.3.4)$$

$$\frac{\frac{d^2}{d z^2} w}{w} = K_3^2 \qquad (10.3.5)$$

K_1, K_2, K_3 の関係は、

$$K_3^2 = K_2^2 + K_1^2$$

$$K_3 = \sqrt{K_2^2 + K_1^2}$$

(10.3.3) 式を ode2 関数で解くと、

$$s = \%k1 \sin\left(K_1\,x\right) + \%k2 \cos\left(K_1\,x\right)$$

上記の境界条件として、$x=0, x=A$ で $s=0$ とすると、

$$0=\%k2,\quad 0=\%k1\sin\left(K_1\,A\right)+\%k2\cos\left(K_1\,A\right)$$

$$K_1=\frac{\pi\,m}{A}$$

上記から、

$$s=A_m\sin\left(\frac{\pi\,m\,x}{A}\right) \tag{10.3.6}$$

(10.3.4) 式を ode2 関数で解くと、

$$v=\%k1\sin\left(K_2\,y\right)+\%k2\cos\left(K_2\,y\right)$$

上記の境界条件として、$y=0, y=B$ で $v=0$ とすると、

$$0=\%k2,\quad 0=\%k1\sin\left(K_2\,B\right)+\%k2\cos\left(K_2\,B\right)$$

$$K_2=\frac{\pi\,n}{B}$$

上記から、

$$v=A_n\sin\left(\frac{\pi\,n\,y}{B}\right) \tag{10.3.7}$$

(10.3.5) 式を ode2 関数で解くと、

$$w=\%k1\,e^{K_3\,z}+\%k2\,e^{-K_3\,z}$$

上記の境界条件として、$z=0$ で $w=0$ とすると、

$$0=\%k2+\%k1$$

上記から、

$$\begin{aligned} w=&\%k1\,e^{K_3\,z}-\%k1\,e^{-K_3\,z}\\ =&2\,\%k1\sinh\left(K_3\,z\right)\end{aligned} \tag{10.3.8}$$

(10.3.2) 式に (10.3.6) 式、(10.3.7) 式、(10.3.8) 式を代入し、

$$\begin{aligned} u=&2\,\%k1\,A_m\,A_n\sinh\left(\sqrt{K_2^2+K_1^2}\,z\right)\sin\left(\frac{\pi\,m\,x}{A}\right)\sin\left(\frac{\pi\,n\,y}{B}\right)\\ =&A_{m,n}\sin\left(\frac{\pi\,m\,x}{A}\right)\sinh\left(z\sqrt{\frac{\pi^2\,n^2}{B^2}+\frac{\pi^2\,m^2}{A^2}}\right)\sin\left(\frac{\pi\,n\,y}{B}\right)\end{aligned}$$

上式を m, n の級数の形に変形し、

$$u=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty}A_{m,n}\sin\left(\frac{\pi\,m\,x}{A}\right)\sinh\left(z\sqrt{\frac{\pi^2\,n^2}{B^2}+\frac{\pi^2\,m^2}{A^2}}\right)\right)\sin\left(\frac{\pi\,n\,y}{B}\right) \tag{10.3.9}$$

境界条件として、$z=C$ の時、$f(x,y)$ とすると、

$$\mathrm{f}\left(x,y\right)=A_{m,n}\sin\left(\frac{\pi\,m\,x}{A}\right)\sin\left(\frac{\pi\,n\,y}{B}\right)\sinh\left(\sqrt{\frac{\pi^2\,n^2}{B^2}+\frac{\pi^2\,m^2}{A^2}}\,C\right)$$

上式に $\sin\left(\frac{\pi\,j\,x}{A}\right)\sin\left(\frac{\pi\,k\,y}{B}\right)$ を掛けると、

$$\begin{aligned} &\mathrm{f}\left(x,y\right)\sin\left(\frac{\pi\,j\,x}{A}\right)\sin\left(\frac{\pi\,k\,y}{B}\right)\\ &=A_{m,n}\sin\left(\frac{\pi\,j\,x}{A}\right)\sin\left(\frac{\pi\,m\,x}{A}\right)\sin\left(\frac{\pi\,k\,y}{B}\right)\sin\left(\frac{\pi\,n\,y}{B}\right)\sinh\left(\sqrt{\frac{\pi^2\,n^2}{B^2}+\frac{\pi^2\,m^2}{A^2}}\,C\right)\end{aligned} \tag{10.3.10}$$

上式を x で $0\to A$、y で $0\to B$ の積分を行うと、$j\neq m, k\neq n$ の時は右辺は零となるので、$j=m, k=n$ の項だけが残り、

$$\begin{aligned} &\int_0^B\int_0^A\mathrm{f}\left(x,y\right)\sin\left(\frac{\pi\,m\,x}{A}\right)dx\sin\left(\frac{\pi\,n\,y}{B}\right)dy\\ &=A_{m,n}\int_0^A\sin\left(\frac{\pi\,m\,x}{A}\right)^2dx\int_0^B\sin\left(\frac{\pi\,n\,y}{B}\right)^2dy\sinh\left(\sqrt{\frac{\pi^2\,n^2}{B^2}+\frac{\pi^2\,m^2}{A^2}}\,C\right)\\ &=\frac{A_{m,n}\,A\,B\sinh\left(\sqrt{\frac{\pi^2\,n^2}{B^2}+\frac{\pi^2\,m^2}{A^2}}\,C\right)}{4}\end{aligned} \tag{10.3.11}$$

上式から、$A_{m,n}$ が得られた。

$$A_{m,n}=\frac{4}{A\,B\sinh\left(\sqrt{\frac{\pi^2\,n^2}{B^2}+\frac{\pi^2\,m^2}{A^2}}\,C\right)}\int_0^B\int_0^A\mathrm{f}\left(x,y\right)\sin\left(\frac{\pi\,m\,x}{A}\right)dx\sin\left(\frac{\pi\,n\,y}{B}\right)dy$$

10.3.2 円柱座標における三次元ラプラスの方程式

円柱座標における三次元ラプラスの方程式は (4.5.15) 式、168 頁から次式で表現できる。

$$\frac{d^2}{d\,z^2}\,u+\frac{\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,u}{r^2}+\frac{d^2}{d\,r^2}\,u+\frac{\frac{d}{d\,r}\,u}{r}=0 \tag{10.3.12}$$

```
kill(all);
load("vect");
depends(u,[r,\theta,z]);
depends(s,[r]);
depends(v,[\theta]);
depends(w,[z]);
assume(K>0);
assume(N>0);
EQ:diff(u,r,2)+diff(u,r,1)/r+\diff(u,
 \theta,2)/r^2+diff(u,z,2)=0;
U1:u=s*v*w;
subst([U1],EQ);
ev(%,diff);
U2:expand(%/s/v/w);
W1:'diff(w,z,2)/w=K^2;
V1:'diff(v,theta,2)/(r^2*v)=-(N^2)/(r^2);
subst([W1,V1],U2);
S1:expand(%*s);
ode2(W1,w,z);
W2:subst([%k1=W[1],%k2=W[2]],%);
ode2(V1,v,\theta);
V2:subst([%k1=0,%k2=V[2]],%);
S1;
BEEQ4:v*(x^(2*C-2)*B^2*C^2+(A^2-n^2*C^2)/
 x^2)+'diff (v,x,1)*(1-2*A)/x+'diff(v,x,2)
 =0;
AN4:v=%k1*bessel_j(n,x^C*B)*x^A+%k2*
bessel_j(-n,x^C*B)*x^A;
BEA1:1-2*A=1;
BEA2:A^2-n^2*C^2=-N^2;
BEA3:B^2*C^2=K^2;
BEA4:2*C-2=1;
solve([BEA1,BEA2,BEA3,BEA4],[A,B,C,n]);
subst([%[3]],AN4);
S2:subst([%k1=S[1],%k2=0,v=s,x=r],%);
U01:subst([W2,V2,S2,S[1]=1,V[2]=1],U1);
```

ここで、u は r,θ,z の関数であり、下記のように変数分離できるとして、v は θ の関数、w は z の関数、s は r の関数とする。

$$u=s\,v\,w \tag{10.3.13}$$

(10.3.12) 式に上式を代入し、微分を実行すると、

$$s\,v\,\left(\frac{d^2}{d\,z^2}\,w\right)+\frac{s\,\left(\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,v\right)\,w}{r^2}+\left(\frac{d^2}{d\,r^2}\,s\right)\,v\,w+\frac{\left(\frac{d}{d\,r}\,s\right)\,v\,w}{r}=0$$

上式を $s\,v\,w$ で割ると、、

$$\frac{\frac{d^2}{d\,z^2}\,w}{w}+\frac{\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,v}{r^2\,v}+\frac{\frac{d^2}{d\,r^2}\,s}{s}+\frac{\frac{d}{d\,r}\,s}{r\,s}=0$$

上式を変形し、

$$\frac{\frac{d^2}{d\,z^2}\,w}{w}=K^2 \tag{10.3.14}$$

$$\frac{\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,v}{r^2\,v}=-\frac{N^2}{r^2} \tag{10.3.15}$$

$$-\frac{s\,N^2}{r^2}+s\,K^2+\frac{d^2}{d\,r^2}\,s+\frac{\frac{d}{d\,r}\,s}{r}=0 \tag{10.3.16}$$

(10.3.14) 式を ode2 関数で解くと。

$$w=W_1\,e^{z\,K}+W_2\,e^{-z\,K} \tag{10.3.17}$$

(10.3.15) 式を ode2 関数で解くと。

$$v=\%k1\sin\left(\theta\,N\right)+\%k2\cos\left(\theta\,N\right)$$

ここで θ が 0 と $2\,\pi$ で連続であるから、N は整数となる。

$$v=V_1\cos\left(\theta\,N\right) \tag{10.3.18}$$

(10.3.16) 式は Bessel の微分方程式の方程式である。Bessel の微分方程式の一般形は (3.3.16) 式から、

$$v\,\left(\frac{A^2-n^2\,C^2}{x^2}+x^{2\,C-2}\,B^2\,C^2\right)+\frac{\left(\frac{d}{d\,x}\,v\right)\,\left(1-2\,A\right)}{x}+\frac{d^2}{d\,x^2}\,v=0 \tag{10.3.19}$$

上式と (10.3.16) 式の比較から、

$$1-2\,A=1 \qquad A^2-n^2\,C^2=-N^2$$

$$B^2\,C^2=K^2 \qquad 2\,C-2=1$$

上式から (10.3.19) 式の係数は、

$$A=0,B=\frac{2\,K}{3},C=\frac{3}{2},n=\frac{2\,N}{3}$$

上式から n は整数でないので、解は (3.3.17) 式から、

$$v=\%k1\,\mathrm{bessel\_j}\left(n,x^C\,B\right)\,x^A+\%k2\,\mathrm{bessel\_j}\left(-n,x^C\,B\right)\,x^A$$

上式に係数結果を代入し、

$$s=\%k1\,\mathrm{bessel\_j}\left(\frac{2\,N}{3},\frac{2\,r^{\frac{3}{2}}\,K}{3}\right)+\%k2\,\mathrm{bessel\_j}\left(-\frac{2\,N}{3},\frac{2\,r^{\frac{3}{2}}\,K}{3}\right)$$

44 頁の図から上式右辺第二項は $r \to 0$ で $\pm\infty$ となるので省き、(10.3.16) 式の解は、

$$s = S_1\, \mathrm{bessel\_j}\left(\frac{2\,N}{3}, \frac{2\,r^{\frac{3}{2}}\,K}{3}\right) \tag{10.3.20}$$

以上から、

$$u = \left(W_1\, e^{z\,K} + W_2\, e^{-z\,K}\right)\, \mathrm{bessel\_j}\left(\frac{2\,N}{3}, \frac{2\,r^{\frac{3}{2}}\,K}{3}\right) \cos\left(\theta\,N\right)$$

10.3.3 極座標における三次元ラプラスの方程式

極座標における三次元ラプラスの方程式は (4.5.31) 式、176 頁から次式で表現できる。

$$\nabla^2 u = \frac{\frac{d^2}{d\theta^2} u}{r^2} + \frac{\cos(\theta)\left(\frac{d}{d\theta} u\right)}{r^2 \sin(\theta)} + \frac{d^2}{d r^2} u + \frac{2\left(\frac{d}{d r} u\right)}{r} + \frac{\frac{d^2}{d\phi^2} u}{r^2 \sin(\theta)^2} = 0 \tag{10.3.21}$$

```
kill(all);
load("vect");
depends(u,[r,\theta,\phi]);
depends(v,[r]);
depends(w,[\theta,\phi]);
depends(p,[\theta]);
depends(q,[\phi]);
assume(K>0);
assume(n>0);
assume(m>0);
EQ:'diff(u,x,2)+'diff(u,y,2)+'diff(u,z,2)
  =0;
EQ1:'diff(u,\theta,2)/r^2+(cos(\theta)*
   ('diff(u,\theta,1)))/(r^2*sin(\theta))
  +'diff(u,r,2)+(2*('diff(u,r,1)))/r
  +'diff(u,\phi,2)/(r^2*sin(\theta)^2)=0;
U1:u=v*w;
subst([U1],EQ1);
ev(%,diff);
EQ3:expand(%/v/w*r^2);
EQ31:%-rest(lhs(%),-2);
EQ32:lhs(EQ31)=n*(n+1);
EQ33:rhs(EQ31)=n*(n+1);
EQ4:expand((EQ32-n*(n+1))*v/r^2);
EQ5:expand(-(EQ33-n*(n+1))*w);
ode2(EQ4,v,r);
subst([4*n^2+4*n+1=(2*n+1)^2],%);
V1:expand(%);
```

ここで、u は r,θ,ϕ の関数であり、$x-y-z$ 座標と極座標：$r-\theta-\phi$ の関係を図 4.5.2、169 頁に示す。下記のように変数分離できるとして、v は r の関数、w は θ,ϕ の関数とする。

$$u = v\,w$$

上式を (10.3.21) 式に代入し、微分を実行し、整理すると、

$$\frac{v\left(\frac{d^2}{d\theta^2} w\right)}{r^2} + \frac{\cos(\theta)\, v\left(\frac{d}{d\theta} w\right)}{r^2 \sin(\theta)} + \frac{v\left(\frac{d^2}{d\phi^2} w\right)}{r^2 \sin(\theta)^2} + \left(\frac{d^2}{d r^2} v\right) w + \frac{2\left(\frac{d}{d r} v\right) w}{r} = 0$$

上式を変形し、

$$\frac{r^2\left(\frac{d^2}{d r^2} v\right)}{v} + \frac{2 r\left(\frac{d}{d r} v\right)}{v} = -\frac{\frac{d^2}{d\theta^2} w}{w} - \frac{\cos(\theta)\left(\frac{d}{d\theta} w\right)}{\sin(\theta)\, w} - \frac{\frac{d^2}{d\phi^2} w}{\sin(\theta)^2 w}$$

更に上式を $n\,(n+1)$ と置くと、次の二式が得られる。

$$\frac{r^2\left(\frac{d^2}{d r^2} v\right)}{v} + \frac{2 r\left(\frac{d}{d r} v\right)}{v} = n\,(n+1)$$

$$-\frac{\frac{d^2}{d\theta^2} w}{w} - \frac{\cos(\theta)\left(\frac{d}{d\theta} w\right)}{\sin(\theta)\, w} - \frac{\frac{d^2}{d\phi^2} w}{\sin(\theta)^2 w} = n\,(n+1)$$

上式を変形し、

$$\frac{d^2}{d r^2} v + \frac{2\left(\frac{d}{d r} v\right)}{r} - \frac{n^2 v}{r^2} - \frac{n\, v}{r^2} = 0 \tag{10.3.22}$$

$$\frac{d^2}{d\theta^2} w + \frac{\cos(\theta)\left(\frac{d}{d\theta} w\right)}{\sin(\theta)} + \frac{\frac{d^2}{d\phi^2} w}{\sin(\theta)^2} + n^2 w + n\, w = 0 \tag{10.3.23}$$

(10.3.22) 式を ode2 関数で解くと、

$$v = \%k1\, r^{\frac{\sqrt{4 n^2+4 n+1}}{2}-\frac{1}{2}} + \%k2\, r^{-\frac{\sqrt{4 n^2+4 n+1}}{2}-\frac{1}{2}} = \%k1\, r^n + \%k2\, r^{-n-1} \tag{10.3.24}$$

```
W1:w=p*q;
subst([W1],EQ5);
ev(%,diff);
expand(%/p/q*sin(\theta)^2);
EQ51:%-last(lhs(%));
EQ52:lhs(EQ51)=m^2;
EQ53:rhs(EQ51)=m^2;
assume(m>0);
Q1:ode2(EQ53,q,\phi);
EQ52-m^2;
EQ54:expand(%*p/sin(\theta)^2);
depends([s],[\theta]);
depends([p],[s]);
CS1:cos(\theta)=s;
CS2:solve(%,s)[1];
```

```
CS21:diff(CS2,\theta,1);
CS22:diff(CS2,\theta,2);
ev(EQ54,diff);
subst([CS22,CS21],%);
subst([sin(\theta)^2=1-cos(\theta)^2],%);
EQ6:subst([CS1],%);
PN1:P[n](s)=diff((s^2-1)^n,s,n)/2^n/n!;
P0:p=(1-s^2)^(m/2)*diff(P[n](s),s,m);
P1:p=P[m,n](cos(\theta));
subst([Q1,P1],W1);
W2:w=A[0,n]*P[n](cos(\theta))+sum(A[m,n]
 *P[m,n](cos(\theta))*cos(m*\phi)
 +B[m,n]*P[m,n](cos(\theta))
 *sin(m*\phi),m,1,n);
subst([V1,W2],U1);
lhs(%)=sum(rhs(%),n,1,inf);
```

ここで、(10.3.23) 式について、w を下記のように変数分離できるとして、p は θ の関数、q は ϕ の関数とする。

$$w = p\,q$$

(10.3.23) 式に上式を代入し、微分を実行し、整理すると、

$$\frac{\left(\frac{d}{d\,\theta}\,p\right)\,q\cos(\theta)}{\sin(\theta)}+\frac{p\,\left(\frac{d^2}{d\,\phi^2}\,q\right)}{\sin(\theta)^2}+\left(\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,p\right)\,q +n^2\,p\,q+n\,p\,q=0$$

上式を変形し、

$$\frac{\left(\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,p\right)\,\sin(\theta)^2}{p}+n^2\sin(\theta)^2+n\sin(\theta)^2 +\frac{\left(\frac{d}{d\,\theta}\,p\right)\,\cos(\theta)\,\sin(\theta)}{p}=-\frac{\frac{d^2}{d\,\phi^2}\,q}{q}$$

上式を m^2 と置くと、次の二式が得られる。

$$\frac{\left(\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,p\right)\,\sin(\theta)^2}{p}+n^2\sin(\theta)^2+n\sin(\theta)^2 +\frac{\left(\frac{d}{d\,\theta}\,p\right)\,\cos(\theta)\,\sin(\theta)}{p}=m^2 \tag{10.3.25}$$

$$-\frac{\frac{d^2}{d\,\phi^2}\,q}{q}=m^2 \tag{10.3.26}$$

上式を ode2 関数で解くと、

$$q=\%k1\sin(m\,\phi)+\%k2\cos(m\,\phi) \tag{10.3.27}$$

ここで上式が $\phi=0$ と $\phi=2\pi$ で連続で繋がるためには、m は整数となる。(10.3.25) 式を変形し、

$$\frac{\left(\frac{d}{d\,\theta}\,p\right)\,\cos(\theta)}{\sin(\theta)}-\frac{m^2\,p}{\sin(\theta)^2}+\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,p+n^2\,p+n\,p=0$$

上式で、次式の変数変換を行う。

$$\cos(\theta)=s,\ \frac{d}{d\,\theta}\,s=-\sin(\theta)\ \frac{d^2}{d\,\theta^2}\,s=-\cos(\theta)$$

微分を実行すると、

$$\frac{\left(\frac{d}{d\,s}\,p\right)\,\left(\frac{d}{d\,\theta}\,s\right)\,\cos(\theta)}{\sin(\theta)}-\frac{m^2\,p}{\sin(\theta)^2}+\left(\frac{d}{d\,s}\,p\right)\,\left(\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,s\right) +\left(\frac{d^2}{d\,s^2}\,p\right)\,\left(\frac{d}{d\,\theta}\,s\right)^2+n^2\,p+n\,p=0$$

$\cos(\theta)=s$ の変数変換の関係式を代入し、整理すると、

$$-\frac{m^2\,p}{1-s^2}+\left(\frac{d^2}{d\,s^2}\,p\right)\,\left(1-s^2\right)-2\,\left(\frac{d}{d\,s}\,p\right)\,s +n^2\,p+n\,p=0 \tag{10.3.28}$$

上式は (3.4.53) 式、70 頁の Legendre の陪微分方程式であり、その解は (3.4.61) 式から、

$$p=\left(1-s^2\right)^{\frac{m}{2}}\,\left(\frac{d^m}{d\,s^m}\,P_n(s)\right)=P_{m,n}(s)$$
$$\text{ここで、}n\text{ は整数}\quad P_n(s)=\frac{\frac{d^n}{d\,s^n}\,\left(s^2-1\right)^n}{2^n\,n!} \tag{10.3.29}$$

上式と (10.3.27) 式から、$s\to\cos(\theta)$ と置き換えると、w は、

$$w=\left(\%k1\sin(m\,\phi)+\%k2\cos(m\,\phi)\right)\,P_{m,n}(\cos(\theta))$$

上式を m の級数の形にし、(10.3.24) 式から、三次元ラプラスの方程式の解：u は、

$$u=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\%k1\,r^n+\%k2\,r^{-n-1}\right)\,\left(\left(\sum_{m=1}^{n}B_{m,n}\sin(m\,\phi)\,P_{m,n}(\cos(\theta))+A_{m,n}\cos(m\,\phi)\,P_{m,n}(\cos(\theta))\right) +A_{0,n}\,P_n(\cos(\theta))\right) \tag{10.3.30}$$

10.3.4 極座標における三次元ラプラスの方程式の境界値問題

図 4.5.2、169 頁に示す極座標：$r-\theta-\phi$ の三次元ラプラスの方程式の解は (10.3.30) 式、468 頁から次式で表現できる。ここで u はポテンシャルで r,θ,ϕ の関数である。

$$u=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\%k1\,r^{n}+\%k2\,r^{-n-1}\right)\left(\left(\sum_{m=1}^{n}B_{m,n}\sin\left(m\,\phi\right)\,P_{m,n}\left(\cos\left(\theta\right)\right)+A_{m,n}\cos\left(m\,\phi\right)\,P_{m,n}\left(\cos\left(\theta\right)\right)\right)+A_{0,n}\,P_{n}\left(\cos\left(\theta\right)\right)\right)\qquad \text{ここで、}m,n\text{ は正の整数},\quad P_{m,n}\text{：Legendre の陪関数} \tag{10.3.31}$$

球の内部問題：$r<R$

```
kill(all);
AN1:u=sum((%k1*r^n+%k2*r^(-n-1))*((sum(B[m,n]*sin(m*phi)*P[m,n](cos(theta))+A[m,n]
  *cos(m*phi)*P[m,n](cos(theta)),m,1,n))+A[0,n]*P[n](cos(theta))),n,1,inf);
AN2:subst([%k1=1,r=r/R,%k2=0],AN1);
AN23:u(R,\theta,\phi)=subst([r=R],rhs(AN2));
A[0,n]=(2*n+1)/4/%pi*'integrate('integrate(u(R,\theta[d],\phi[d])*P[n](cos(\theta[d]))
 *sin(\theta[d]),\theta[d]),\phi[d]);
A[m,n]=(2*n+1)/2/%pi*(n-m)!/(n+m)!*'integrate('integrate(u(R,\theta[d],\phi[d])*P[m,n]
 (cos(\theta[d]))*cos(m*\phi[d])*sin(\theta[d]),\theta[d]),\phi[d]);
B[m,n]=(2*n+1)/2/%pi*(n-m)!/(n+m)!*'integrate('integrate(u(R,\theta[d],\phi[d])*P[m,n]
 (cos(\theta[d]))*sin(m*\phi[d])*sin(\theta[d]),\theta[d]),\phi[d]);
```

$r<R$ の球の内部問題では、$\%k2\,r^{-n-1}$ の項は発散するので省き、解は次式となる。

$$u=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\sum_{m=1}^{n}B_{m,n}\sin\left(m\,\phi\right)\,P_{m,n}\left(\cos\left(\theta\right)\right)+A_{m,n}\cos\left(m\,\phi\right)\,P_{m,n}\left(\cos\left(\theta\right)\right)\right)+A_{0,n}\,P_{n}\left(\cos\left(\theta\right)\right)\right)\left(\frac{r}{R}\right)^{n} \tag{10.3.32}$$

$r=R$ の境界におおいて $\mathrm{u}\left(R,\theta,\phi\right)$ とすると、

$$\mathrm{u}\left(R,\theta,\phi\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{n}B_{m,n}\sin\left(m\,\phi\right)\,P_{m,n}\left(\cos\left(\theta\right)\right)+A_{m,n}\cos\left(m\,\phi\right)\,P_{m,n}\left(\cos\left(\theta\right)\right)\right)+A_{0,n}\,P_{n}\left(\cos\left(\theta\right)\right)$$

上式は Legendre の陪関数の展開式であり、各係数は (7.2.47) 式、(7.2.48) 式、(7.2.49) 式から下記で与えられる。次式を (10.3.32) 式に代入すると、内部のポテンシャルが得られる。

$$\begin{aligned}
A_{0,n}=&\frac{\left(2\,n+1\right)}{4\,\pi}\int\int\sin\left(\theta_{d}\right)\,P_{n}\left(\cos\left(\theta_{d}\right)\right)\,\mathrm{u}\left(R,\theta_{d},\phi_{d}\right)d\theta_{d}d\phi_{d}\\
A_{m,n}=&\frac{\left(2\,n+1\right)\,\left(n-m\right)!}{2\,\pi\,\left(n+m\right)!}\int\cos\left(\phi_{d}\,m\right)\int\sin\left(\theta_{d}\right)\,P_{m,n}\left(\cos\left(\theta_{d}\right)\right)\,\mathrm{u}\left(R,\theta_{d},\phi_{d}\right)d\theta_{d}d\phi_{d}\\
B_{m,n}=&\frac{\left(2\,n+1\right)\,\left(n-m\right)!}{2\,\pi\,\left(n+m\right)!}\int\sin\left(\phi_{d}\,m\right)\int\sin\left(\theta_{d}\right)\,P_{m,n}\left(\cos\left(\theta_{d}\right)\right)\,\mathrm{u}\left(R,\theta_{d},\phi_{d}\right)d\theta_{d}d\phi_{d}
\end{aligned} \tag{10.3.33}$$

球で軸対称の内部問題：$r<R$

```
AN21:subst([B[m,n]=0,A[m,n]=0,cos(\theta)=x],AN2);
u(R,x)=subst([r=R],rhs(%));
A[0,n]=(2*n+1)/2*integrate(u(R,s)*P[n](s),s,-1,1);
AN22:u(r,\theta)=subst([%,x=cos(\theta)],rhs(AN21));
```

軸対称では、(10.3.32) 式で $m=0$ とし次式で得られる。

$$u=\sum_{n=1}^{\infty}A_{0,n}\,P_{n}\left(x\right)\,\left(\frac{r}{R}\right)^{n}\quad \text{ここで } x=\cos\left(\theta\right),\quad P_{n}\left(x\right)\text{：Legendre の多項式} \tag{10.3.34}$$

$r=R$ の境界においてu (R,x) とすると、Legendre の多項式による展開であり、(7.2.4) 式から、

$$\mathrm{u}\left(R,x\right)=\sum_{n=1}^{\infty}A_{0,n}\,P_n\left(x\right)\quad A_{0,n}=\frac{(2\,n+1)}{2}\int_{-1}^{1}P_n\left(s\right)\,\mathrm{u}\left(R,s\right)ds$$

以上から、

$$\mathrm{u}\left(r,\theta\right)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(2\,n+1\right)\,P_n\left(\cos\left(\theta\right)\right)\,\left(\frac{r}{R}\right)^n\int_{-1}^{1}P_n\left(s\right)\,\mathrm{u}\left(R,s\right)ds \tag{10.3.35}$$

球の外部問題：$r>R$

```
AN3:subst([%k2=1,r=r/R,%k1=0],AN1);
AN33:u(R,\theta,\phi)=subst([r=R],rhs(AN3));
```

$r>R$ の球の外部問題では、$\%k1\,r^n$ の項は発散するので省き、解は次式となる。

$$u=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\sum_{m=1}^{n}B_{m,n}\sin\left(m\,\phi\right)\,P_{m,n}\left(\cos\left(\theta\right)\right)+A_{m,n}\cos\left(m\,\phi\right)\,P_{m,n}\left(\cos\left(\theta\right)\right)\right)+A_{0,n}\,P_n\left(\cos\left(\theta\right)\right)\right)\,\left(\frac{r}{R}\right)^{-n-1} \tag{10.3.36}$$

$r=R$ の境界においてu (R,θ,ϕ) とすると、

$$\mathrm{u}\left(R,\theta,\phi\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{n}B_{m,n}\sin\left(m\,\phi\right)\,P_{m,n}\left(\cos\left(\theta\right)\right)+A_{m,n}\cos\left(m\,\phi\right)\,P_{m,n}\left(\cos\left(\theta\right)\right)\right)+A_{0,n}\,P_n\left(\cos\left(\theta\right)\right)$$

上式は上式は Legendre の陪関数の展開式であり、球の内部問題：$r<R$ の式と同じであり、各係数は (10.3.33) 式で与えられる。

球で軸対称の外部問題：$r>R$

```
AN31:subst([B[m,n]=0,A[m,n]=0,cos(\theta)=x],AN3);
u(R,x)=subst([r=R],rhs(%));
A[0,n]=(2*n+1)/2*integrate(u(R,s)*P[n](s),s,-1,1);
AN32:u(r,\theta)=subst([%,x=cos(\theta)],rhs(AN31));
```

軸対称では、(10.3.36) 式で $m=0$ とし次式で得られる。

$$u=\sum_{n=1}^{\infty}A_{0,n}\,P_n\left(x\right)\,\left(\frac{r}{R}\right)^{-n-1}\quad \text{ここで } x=\cos\left(\theta\right),\quad P_n\left(x\right)\text{：Legendre の多項式} \tag{10.3.37}$$

$r=R$ の境界においてu (R,x) とすると、Legendre の多項式による展開であり、(7.2.4) 式から、

$$\mathrm{u}\left(R,x\right)=\sum_{n=1}^{\infty}A_{0,n}\,P_n\left(x\right)\quad A_{0,n}=\frac{(2\,n+1)}{2}\int_{-1}^{1}P_n\left(s\right)\,\mathrm{u}\left(R,s\right)ds$$

以上から、

$$\mathrm{u}\left(r,\theta\right)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(2\,n+1\right)\,P_n\left(\cos\left(\theta\right)\right)\,\left(\frac{r}{R}\right)^{-n-1}\int_{-1}^{1}P_n\left(s\right)\,\mathrm{u}\left(R,s\right)ds \tag{10.3.38}$$

10.4 ポアソン方程式とグリーン関数

10.4.1 三次元グリーン関数

三次元ポアソン方程式は、

$$\nabla^2 u = \frac{d^2}{d\,z^2}\,u + \frac{d^2}{d\,y^2}\,u + \frac{d^2}{d\,x^2}\,u = -\rho\,(x,y,z) \tag{10.4.1}$$

(10.1.11) 式から三次元ラプラス方程式のグリーン関数は、

$$\begin{aligned} 4\,\pi\,u\,(\overrightarrow{r_A}) = &-\iiint_V \left(\frac{1}{r}\right)\left(\nabla^2 u\right) dV \\ &+\iint_S \left(\left(\frac{1}{r}\right)\frac{d}{dn}u - \phi\,\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right)\right) dS \\ &\text{ここで、}r = \sqrt{z^2+y^2+x^2} \end{aligned} \tag{10.4.2}$$

u が無限遠で $\frac{1}{r}$ 以上に速く零り、V を全空間となり、上記右辺第二項の表面積分は零となり、(10.4.1) 式から、

$$u\,(\overrightarrow{r_A}) = \frac{1}{4\,\pi}\iiint_V \left(\frac{\rho\,(x,y,z)}{r}\right) dV \tag{10.4.3}$$

10.4.2 三次元ポアソン方程式の特殊解

三次元の領域：V で下記の式が、

$$u\,(\overrightarrow{r}) = \frac{1}{4\,\pi}\iiint_V \frac{\rho\left(\overrightarrow{r'}\right)}{\left|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r'}\right|}\,dV \tag{10.4.4}$$

下記の三次元ポアソン方程式を満足していることを示す。

$$\nabla^2 u = \frac{d^2}{d\,z^2}\,u + \frac{d^2}{d\,y^2}\,u + \frac{d^2}{d\,x^2}\,u = -\rho\,(x,y,z) \tag{10.4.5}$$

```
kill(all);
R1:matrix([x],[y],[z]);
R2:matrix([a],[b],[c]);
ABR1:((R2-R1).(R2-R1))^(1/2);
F1:\rho(a,b,c);
F2:F1/ABR1;
diff(F2,x,2)+diff(F2,y,2)+diff(F2,z,2);
factor(%);
AB2:1/(ABR1)^(1-n);
diff(AB2,x,2)+diff(AB2,y,2)+diff(AB2,z,2);
AB21:factor(%);
AB32:(n-1)*n*((z-c)^2+(y-b)^2
 +(x-a)^2)^(n/2-3/2);
AB21-AB32;
factor(%);
assume(n>0 and n<1);
assume(\delta>0);
assume(\delta[0]>0);
(n-1)*n/4/%pi*(\delta^2)^(n/2-3/2)*
 \delta^2*sin(\theta);
factor(%);
'integrate('integrate('integrate(%,\delta,
 0,\delta[0]),\theta,0,%pi),%phi,0,2*%pi);
ev(%,integrate);
factor(%);
limit(%,n,0);
```

いま、$\overrightarrow{r}, \overrightarrow{r'}$ は下記とする。

$$\overrightarrow{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{r'} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

このとき、

$$\left|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r'}\right| = \sqrt{(c-z)^2 + (b-y)^2 + (a-x)^2}$$

(10.4.5) 式に (10.4.4) 式に代入する。ここで $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r'}$ のとき、発散するので、この部分を小さな球で囲み、これを V_i、その外部を V_e とすると、

V_e では ∇^2 を積分の内部に入れることができ、

$$\begin{aligned}\nabla^2 u(\vec{r}) =& \nabla^2 \frac{1}{4\pi} \iiint_{V_i} \frac{\rho\left(\vec{r'}\right)}{\left|\vec{r} - \vec{r'}\right|} dV + \nabla^2 \frac{1}{4\pi} \iiint_{V_e} \frac{\rho\left(\vec{r'}\right)}{\left|\vec{r} - \vec{r'}\right|} dV \\ =& \nabla^2 \frac{1}{4\pi} \iiint_{V_i} \frac{\rho\left(\vec{r'}\right)}{\left|\vec{r} - \vec{r'}\right|} dV + \frac{1}{4\pi} \iiint_{V_e} \nabla^2 \frac{\rho\left(\vec{r'}\right)}{\left|\vec{r} - \vec{r'}\right|} dV\end{aligned} \tag{10.4.6}$$

上式右辺第二項の被積分項は、次式より零となる。

$$\begin{aligned}\nabla^2 \frac{\rho\left(\vec{r'}\right)}{\left|\vec{r} - \vec{r'}\right|} =& \nabla^2 \frac{\rho(a,b,c)}{\sqrt{(c-z)^2 + (b-y)^2 + (a-x)^2}} \\ =& \frac{3\rho(a,b,c)\,(c-z)^2}{\left((c-z)^2 + (b-y)^2 + (a-x)^2\right)^{\frac{5}{2}}} - \frac{3\rho(a,b,c)}{\left((c-z)^2 + (b-y)^2 + (a-x)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \\ &+ \frac{3\rho(a,b,c)\,(b-y)^2}{\left((c-z)^2 + (b-y)^2 + (a-x)^2\right)^{\frac{5}{2}}} + \frac{3\rho(a,b,c)\,(a-x)^2}{\left((c-z)^2 + (b-y)^2 + (a-x)^2\right)^{\frac{5}{2}}} = 0\end{aligned} \tag{10.4.7}$$

上式右辺第一項の被積分項は、$\vec{r} = \vec{r'}$ のとき、発散するので、体積分の発散を防ぐため、次式のように n を導入して変形し、積分の後で $n \to 0$ として求める。このとき ∇^2 を積分の内部に入れることができる。また、小さな球の体積分：V_i として、$\vec{r}$ に中心があり、半径：δ_0 の球を考える。δ_0 は十分小さいので、$\rho\left(\vec{r'}\right)$ は一定の値となり、積分の外に出すことができ、球の中心の値で代表させ、$\rho(\vec{r})$ とする。

$$\nabla^2 \frac{1}{4\pi} \iiint_{V_i} \frac{\rho\left(\vec{r'}\right)}{\left|\vec{r} - \vec{r'}\right|} dV \to \nabla^2 \frac{1}{4\pi} \iiint_{V_i} \frac{\rho\left(\vec{r'}\right)}{\left|\vec{r} - \vec{r'}\right|^{1-n}} dV = \frac{\rho(\vec{r})}{4\pi} \iiint_{V_i} \nabla^2 \frac{1}{\left|\vec{r} - \vec{r'}\right|^{1-n}} dV \tag{10.4.8}$$

上式の被積分関数は、

$$\begin{aligned}\nabla^2 \frac{1}{\left|\vec{r} - \vec{r'}\right|^{1-n}} =& \frac{1}{\left((c-z)^2 + (b-y)^2 + (a-x)^2\right)^{\frac{1-n}{2}}} \\ =& -2\left(-\frac{1-n}{2} - 1\right)(1-n)\left((c-z)^2 + (b-y)^2 + (a-x)^2\right)^{-\frac{1-n}{2}-2}(c-z)^2 \\ &- 3\,(1-n)\left((c-z)^2 + (b-y)^2 + (a-x)^2\right)^{-\frac{1-n}{2}-1} \\ &- 2\left(-\frac{1-n}{2} - 1\right)(1-n)\,(b-y)^2\left((c-z)^2 + (b-y)^2 + (a-x)^2\right)^{-\frac{1-n}{2}-2} \\ &- 2\left(-\frac{1-n}{2} - 1\right)(1-n)\,(a-x)^2\left((c-z)^2 + (b-y)^2 + (a-x)^2\right)^{-\frac{1-n}{2}-2} \\ =& (n-1)\,n\left((z-c)^2 + (y-b)^2 + (x-a)^2\right)^{\frac{n}{2}-\frac{3}{2}}\end{aligned} \tag{10.4.9}$$

(10.4.8) 式に上式を代入し、$\vec{r'} - \vec{r} = \vec{\delta}$ とすると、$\sqrt{(c-z)^2 + (b-y)^2 + (a-x)^2} = \delta$ となる。極座標で体積分する。ここで $\delta > 0,\ \delta_0 > 0,\ 0 < n < 1$ とする。

$$\frac{\rho(\vec{r})}{4\pi} \iiint_{V_i} \nabla^2 \frac{1}{\left|\vec{r} - \vec{r'}\right|^{1-n}} dV = \frac{\rho(\vec{r})}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\delta_0} (n-1)\,n\,\delta^{n-1} \sin(\theta)\,d\delta\,d\theta\,d\phi = \rho(\vec{r})\,{\delta_0}^n\,(n-1)$$

(10.4.6) 式に (10.4.7) 式、(10.4.9) 式と上式を代入すると、下記となり、$n \to 0$ とすると、(10.4.4) 式が (10.4.5) 式を満足していることがわかる。

$$\nabla^2 u(\vec{r}) = \rho(\vec{r})\,{\delta_0}^n\,(n-1) = -\rho(\vec{r})$$

10.4.3 三次元波動方程式の特殊解

三次元の領域：V で下記の式が、

$$u\left(\vec{r},\,t\right)=\frac{1}{4\,\pi}\iiint_{V}\frac{\rho\left(\vec{r'},\,t\pm\frac{\left|\vec{r}-\vec{r'}\right|}{C}\right)}{\left|\vec{r}-\vec{r'}\right|}\,dV \tag{10.4.10}$$

下記の三次元波動方程式を満足していることを示す。

$$\begin{aligned}\nabla^2 u-\frac{1}{C^2}\frac{d^2}{d\,t^2}\,u &=\frac{d^2}{d\,z^2}\,u+\frac{d^2}{d\,y^2}\,u+\frac{d^2}{d\,x^2}\,u-\frac{1}{C^2}\frac{d^2}{d\,t^2}\,u\\ &=-\rho\left(\vec{r},\,t\pm\frac{\left|\vec{r}-\vec{r'}\right|}{C}\right)\end{aligned} \tag{10.4.11}$$

```
kill(all);
depends([\rho],[a,b,c,h]);
depends([h],[a,b,c,x,y,z,t]);
R1:matrix([x],[y],[z]);
R2:matrix([a],[b],[c]);
ABR1:((R1-R2).(R1-R2))^(1/2);
diff(A1,x,2)+diff(A1,y,2)+diff(A1,z,2);
factor(%);
U:t+ABR1*1/C;
U1:h=U;
UX1:diff(U1,x,1);
UY1:diff(U1,y,1);
UZ1:diff(U1,z,1);
UX2:diff(U1,x,2);
UY2:diff(U1,y,2);
UZ2:diff(U1,z,2);
UT1:diff(U1,t,1);
UT2:diff(U1,t,2);
G:\rho/ABR1;
diff(G,x,1);
diff(G,x,2)+diff(G,y,2)+diff(G,z,2)
 -1/(C^2)*diff(G,t,2);
subst([UX1,UY1,UZ1,UX2,UY2,UZ2,UT1,UT2],%);
G1:factor(%);
```

```
AB2:1/((ABR1)^(1-n));
diff(AB2,x,2)+diff(AB2,y,2)+diff(AB2,z,2)
 -1/(C^2)*diff(AB2,t,2);
subst([UX1,UY1,UZ1,UX2,UY2,UZ2,UT1,UT2],%);
AB21:factor(%);
AB22:(n-1)*n*((z-w)^2+(y-v)^2+(x-u)^2)^
 (n/2-3/2);
assume(r>0);
assume(n>0 and n<1);
assume(\delta>0);
\rho*(n-1)*n/4/%pi*(r^2)^(n/2-3/2)*r^2
 *sin(\theta);
factor(%);
'integrate('integrate('integrate(%,r,0,
 \delta),\theta,0,%pi),%phi,0,2*%pi);
ev(%,integrate);
factor(%);
limit(%,n,0);
```

いま、$\vec{r},\,\vec{r'}$ は下記とする。

$$\vec{r}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},\quad \vec{r'}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$$

このとき、

$$\left|\vec{r}-\vec{r'}\right|=\sqrt{\left(c-z\right)^2+\left(b-y\right)^2+\left(a-x\right)^2} \tag{10.4.12}$$

ここで、下記の置き換えを行う。

$$h=t+\frac{\left|\vec{r}-\vec{r'}\right|}{C}=\frac{\sqrt{\left(z-c\right)^2+\left(y-b\right)^2+\left(x-a\right)^2}}{C}+t \tag{10.4.13}$$

以上から、ρ は a,b,c,h の関数で、h は a,b,c,x,y,z,t の関数とする。(10.4.11) 式に (10.4.10) 式に代入する。ここで $\vec{r}=\vec{r'}$ のとき、発散するので、この部分を小さな球で囲み、これを V_i、その外部を V_e とし、V_e では ∇^2 を積分の内部に入れることができ、

$$\nabla^2 u-\frac{1}{C^2}\frac{d^2}{d\,t^2}\,u=\left(\nabla^2-\frac{1}{C^2}\frac{d^2}{d\,t^2}\right)\left(\frac{1}{4\,\pi}\iiint_{V_i}\frac{\rho\left(\vec{r'},\,h\right)}{\left|\vec{r}-\vec{r'}\right|}\,dV\right)+\frac{1}{4\,\pi}\iiint_{V_e}\left(\nabla^2-\frac{1}{C^2}\frac{d^2}{d\,t^2}\right)\frac{\rho\left(\vec{r'},\,h\right)}{\left|\vec{r}-\vec{r'}\right|}\,dV \tag{10.4.14}$$

ところで、(10.4.13) 式の関係式から、

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{d\,x}\,h=\frac{x-a}{\sqrt{{\left(z-c\right) }^{2}+{\left(y-b\right) }^{2}+{\left(x-a\right) }^{2}}\,C},\quad \frac{d}{d\,y}\,h=\frac{y-b}{\sqrt{{\left(z-c\right) }^{2}+{\left(y-b\right) }^{2}+{\left(x-a\right) }^{2}}\,C}\\
&\frac{d}{d\,z}\,h=\frac{z-c}{\sqrt{{\left(z-c\right) }^{2}+{\left(y-b\right) }^{2}+{\left(x-a\right) }^{2}}\,C},\\
&\frac{{d}^{2}}{d\,{x}^{2}}\,h=\frac{1}{\sqrt{{\left(z-c\right) }^{2}+{\left(y-b\right) }^{2}+{\left(x-a\right) }^{2}}\,C}-\frac{{\left(x-a\right) }^{2}}{{\left({\left(z-c\right) }^{2}+{\left(y-b\right) }^{2}+{\left(x-a\right) }^{2}\right) }^{\frac{3}{2}}\,C}\\
&\frac{{d}^{2}}{d\,{y}^{2}}\,h=\frac{1}{\sqrt{{\left(z-c\right) }^{2}+{\left(y-b\right) }^{2}+{\left(x-a\right) }^{2}}\,C}-\frac{{\left(y-b\right) }^{2}}{{\left({\left(z-c\right) }^{2}+{\left(y-b\right) }^{2}+{\left(x-a\right) }^{2}\right) }^{\frac{3}{2}}\,C}\\
&\frac{{d}^{2}}{d\,{z}^{2}}\,h=\frac{1}{\sqrt{{\left(z-c\right) }^{2}+{\left(y-b\right) }^{2}+{\left(x-a\right) }^{2}}\,C}-\frac{{\left(z-c\right) }^{2}}{{\left({\left(z-c\right) }^{2}+{\left(y-b\right) }^{2}+{\left(x-a\right) }^{2}\right) }^{\frac{3}{2}}\,C}\\
&\frac{d}{d\,t}\,h=1,\quad \frac{{d}^{2}}{d\,{t}^{2}}\,h=0
\end{aligned}
\tag{10.4.15}
$$

(10.4.14) 式の右辺第二項の被積分項は次式となり、微分を実行し、(10.4.15) 式の関係式を代入すると、零となる。

$$
\begin{aligned}
&\left({\nabla}^{2}-\frac{1}{{C}^{2}}\frac{{d}^{2}}{d\,{t}^{2}}\right) \frac{\rho}{\sqrt{{\left(z-c\right) }^{2}+{\left(y-b\right) }^{2}+{\left(x-a\right) }^{2}}}\\
&=-\frac{\frac{{\left(\frac{d}{d\,t}\,h\right) }^{2}\,\left(\frac{{d}^{2}}{d\,{h}^{2}}\,\rho\right) }{\sqrt{{\left(z-c\right) }^{2}+{\left(y-b\right) }^{2}+{\left(x-a\right) }^{2}}}+\frac{\left(\frac{{d}^{2}}{d\,{t}^{2}}\,h\right) \,\left(\frac{d}{d\,h}\,\rho\right) }{\sqrt{{\left(z-c\right) }^{2}+{\left(y-b\right) }^{2}+{\left(x-a\right) }^{2}}}}{{C}^{2}}+\frac{{\left(\frac{d}{d\,z}\,h\right) }^{2}\,\left(\frac{{d}^{2}}{d\,{h}^{2}}\,\rho\right) }{\sqrt{{\left(z-c\right) }^{2}+{\left(y-b\right) }^{2}+{\left(x-a\right) }^{2}}}\\
&\quad+\frac{{\left(\frac{d}{d\,y}\,h\right) }^{2}\,\left(\frac{{d}^{2}}{d\,{h}^{2}}\,\rho\right) }{\sqrt{{\left(z-c\right) }^{2}+{\left(y-b\right) }^{2}+{\left(x-a\right) }^{2}}}+\frac{{\left(\frac{d}{d\,x}\,h\right) }^{2}\,\left(\frac{{d}^{2}}{d\,{h}^{2}}\,\rho\right) }{\sqrt{{\left(z-c\right) }^{2}+{\left(y-b\right) }^{2}+{\left(x-a\right) }^{2}}}\\
&\quad+\frac{\left(\frac{{d}^{2}}{d\,{z}^{2}}\,h\right) \,\left(\frac{d}{d\,h}\,\rho\right) }{\sqrt{{\left(z-c\right) }^{2}+{\left(y-b\right) }^{2}+{\left(x-a\right) }^{2}}}+\frac{\left(\frac{{d}^{2}}{d\,{y}^{2}}\,h\right) \,\left(\frac{d}{d\,h}\,\rho\right) }{\sqrt{{\left(z-c\right) }^{2}+{\left(y-b\right) }^{2}+{\left(x-a\right) }^{2}}}\\
&\quad+\frac{\left(\frac{{d}^{2}}{d\,{x}^{2}}\,h\right) \,\left(\frac{d}{d\,h}\,\rho\right) }{\sqrt{{\left(z-c\right) }^{2}+{\left(y-b\right) }^{2}+{\left(x-a\right) }^{2}}}-\frac{2\,\left(\frac{d}{d\,z}\,h\right) \,\left(\frac{d}{d\,h}\,\rho\right) \,\left(z-c\right) }{{\left({\left(z-c\right) }^{2}+{\left(y-b\right) }^{2}+{\left(x-a\right) }^{2}\right) }^{\frac{3}{2}}}\\
&\quad-\frac{2\,\left(\frac{d}{d\,y}\,h\right) \,\left(\frac{d}{d\,h}\,\rho\right) \,\left(y-b\right) }{{\left({\left(z-c\right) }^{2}+{\left(y-b\right) }^{2}+{\left(x-a\right) }^{2}\right) }^{\frac{3}{2}}}-\frac{2\,\left(\frac{d}{d\,x}\,h\right) \,\left(\frac{d}{d\,h}\,\rho\right) \,\left(x-a\right) }{{\left({\left(z-c\right) }^{2}+{\left(y-b\right) }^{2}+{\left(x-a\right) }^{2}\right) }^{\frac{3}{2}}}\\
&\quad-\frac{3\,\rho}{{\left({\left(z-c\right) }^{2}+{\left(y-b\right) }^{2}+{\left(x-a\right) }^{2}\right) }^{\frac{3}{2}}}+\frac{3\,\rho\,{\left(z-c\right) }^{2}}{{\left({\left(z-c\right) }^{2}+{\left(y-b\right) }^{2}+{\left(x-a\right) }^{2}\right) }^{\frac{5}{2}}}\\
&\quad+\frac{3\,\rho\,{\left(y-b\right) }^{2}}{{\left({\left(z-c\right) }^{2}+{\left(y-b\right) }^{2}+{\left(x-a\right) }^{2}\right) }^{\frac{5}{2}}}+\frac{3\,\rho\,{\left(x-a\right) }^{2}}{{\left({\left(z-c\right) }^{2}+{\left(y-b\right) }^{2}+{\left(x-a\right) }^{2}\right) }^{\frac{5}{2}}}\\
&=0
\end{aligned}
\tag{10.4.16}
$$

(10.4.14) 式の右辺第一項の被積分項は、$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r'}$ のとき、発散するので、体積分の発散を防ぐため、次式のように n を導入して変形し、積分の後で $n \to 0$ として求める。このとき ∇^2 を積分の内部に入れることができる。また、小さな球の体積分 : V_i として、$\overrightarrow{r}$ に中心があり、半径 : δ_0 の球を考える。δ_0 は十分小さいので、$\rho\left(\overrightarrow{r'}, h\right)$ は一定の値となり、積分の外に出すことができ、球の中心の値で代表させ、$\rho\left(\overrightarrow{r}, h\right)$ とする。

$$\begin{aligned}
&\left(\nabla^2 - \frac{1}{C^2}\frac{d^2}{d\,t^2}\right)\left(\frac{1}{4\,\pi}\iiint_{V_i}\frac{\rho\left(\overrightarrow{r'},\,h\right)}{\left|\overrightarrow{r}-\overrightarrow{r'}\right|}\,dV\right) \to \left(\nabla^2 - \frac{1}{C^2}\frac{d^2}{d\,t^2}\right)\left(\frac{1}{4\,\pi}\iiint_{V_i}\frac{\rho\left(\overrightarrow{r'},\,h\right)}{\left|\overrightarrow{r}-\overrightarrow{r'}\right|^{1-n}}\,dV\right)\\
&= \frac{1}{4\,\pi}\iiint_{V_i}\left(\nabla^2 - \frac{1}{C^2}\frac{d^2}{d\,t^2}\right)\frac{\rho\left(\overrightarrow{r'},\,h\right)}{\left|\overrightarrow{r}-\overrightarrow{r'}\right|^{1-n}}\,dV = \frac{\rho\left(\overrightarrow{r},\,h\right)}{4\,\pi}\iiint_{V_i}\left(\nabla^2 - \frac{1}{C^2}\frac{d^2}{d\,t^2}\right)\frac{1}{\left|\overrightarrow{r}-\overrightarrow{r'}\right|^{1-n}}\,dV
\end{aligned} \tag{10.4.17}$$

上式の被積分関数は次式となり、(10.4.12) 式を代入し、微分すると、

$$\begin{aligned}
\left(\nabla^2 - \frac{1}{C^2}\frac{d^2}{d\,t^2}\right)\frac{1}{\left|\overrightarrow{r}-\overrightarrow{r'}\right|^{1-n}} &= \left(\nabla^2 - \frac{1}{C^2}\frac{d^2}{d\,t^2}\right)\frac{1}{\left((z-c)^2+(y-b)^2+(x-a)^2\right)^{\frac{1-n}{2}}}\\
&= (n-1)\,n\left((z-w)^2+(y-v)^2+(x-u)^2\right)^{\frac{n}{2}-\frac{3}{2}}
\end{aligned} \tag{10.4.18}$$

(10.4.17) 式に上式を代入し、$\overrightarrow{r'} - \overrightarrow{r} = \overrightarrow{\delta}$ とすると、$\sqrt{(c-z)^2+(b-y)^2+(a-x)^2} = \delta$ となる。極座標で体積分する。ここで $\delta > 0,\, \delta_0 > 0,\, 0 < n < 1$ とする。

$$\begin{aligned}
&\frac{\rho\left(\overrightarrow{r},\,h\right)}{4\,\pi}\iiint_{V_i}\left(\nabla^2 - \frac{1}{C^2}\frac{d^2}{d\,t^2}\right)\frac{1}{\left|\overrightarrow{r}-\overrightarrow{r'}\right|^{1-n}}\,dV\\
&\quad = \frac{\rho\left(\overrightarrow{r}, h\right)}{4\,\pi}\int_0^{2\,\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\delta_0}(n-1)\,n\,\delta^{n-1}\sin(\theta)\,d\delta\,d\theta\,d\phi = \rho\left(\overrightarrow{r}, h\right)\,{\delta_0}^n\,(n-1)
\end{aligned}$$

(10.4.14) 式に (10.4.16) 式、(10.4.17) 式と上式を代入すると、下記となり、$n \to 0$ とすると、(10.4.10) 式が (10.4.11) 式を満足していることがわかる。

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{C^2}\frac{d^2}{d\,t^2}\right)u\left(\overrightarrow{r}\right) = \rho\left(\overrightarrow{r}, h\right)\,{\delta_0}^n\,(n-1) = -\rho\left(\overrightarrow{r},\,t + \frac{\left|\overrightarrow{r}-\overrightarrow{r'}\right|}{C}\right)$$

$t - \frac{\left|\overrightarrow{r}-\overrightarrow{r'}\right|}{C}$ についても、同様に証明できる。

10.5　二次元ポアソンの方程式

10.5.1　xy 座標における二次元ポアソンの方程式

xy 座標の二次元ポアソンの方程式は次式で表現できる。

$$\nabla^2 u=\frac{d^2}{d\,y^2}\,u+\frac{d^2}{d\,x^2}\,u=-\rho\,(x,y,z) \qquad (10.5.1)$$

```
kill(all);
load("vect");
depends([u,\rho],[x,y]);
assume(A>0);
assume(B>0);
declare([j,k,m,n],integer);
EQ:'diff(u,x,2)+'diff(u,y,2)=-\rho(x,y);
sin((%pi*m*x)/A)*sin((%pi*n*y)/B);
U3:u=A[m,n]*%;
subst([U3],EQ);
ev(%,diff);
factor(-%);
EQ1:subst([A[m,n]=A[m,n]/%pi^2],%);
EQ2:EQ1*sin((%pi*j*x)/A)*sin((%pi*k*y)/B);
'integrate('integrate(lhs(EQ2),x,0,A),y,0,
 B)='integrate('integrate(rhs(EQ2),x,0,A),
 y,0,B);
ev(%,integrate);
EQ2:EQ1*sin((%pi*m*x)/A)*sin((%pi*n*y)/B);
'integrate('integrate(lhs(EQ2),x,0,A),y,0,
 B)='integrate('integrate(rhs(EQ2),x,0,A),
 y,0,B);
ev(%,integrate);
solve(%,A[m,n])[1];
subst([x=s,y=t],%);
subst([%],U3);
u=sum(sum(rhs(%),m,1,inf),n,1,inf);
```

境界条件：$x=0,\,x=A$ で $u=0$、$y=0,\,y=B$ で $u=0$ とすると、「xyz 座標における三次元ラプラスの方程式」の境界条件と同じことから、(10.7.6) 式、(10.7.7) 式から、下記となる。

$$\sin\left(\frac{\pi\,m\,x}{A}\right)\,\sin\left(\frac{\pi\,n\,y}{B}\right) \text{ ここで、} m,n\text{：整数}$$

上記を基に解として下記を考える。

$$u=A_{m,n}\sin\left(\frac{\pi\,m\,x}{A}\right)\,\sin\left(\frac{\pi\,n\,y}{B}\right) \qquad (10.5.2)$$

(10.5.1) 式に (10.5.2) 式を代入し、

$$-\frac{\pi^2\,A_{m,n}\,n^2\sin\left(\frac{\pi\,m\,x}{A}\right)\,\sin\left(\frac{\pi\,n\,y}{B}\right)}{B^2}-\frac{\pi^2\,m^2\,A_{m,n}\sin\left(\frac{\pi\,m\,x}{A}\right)\,\sin\left(\frac{\pi\,n\,y}{B}\right)}{A^2}=-\rho\,(x,y)$$

整理すると、

$$\frac{\pi^2 A_{m,n} \sin\left(\frac{\pi m x}{A}\right) \sin\left(\frac{\pi n y}{B}\right) \left(m^2 B^2 + n^2 A^2\right)}{A^2 B^2} = \rho(x,y)$$

新たに $A_{m,n}$ を定義して、

$$\frac{A_{m,n} \sin\left(\frac{\pi m x}{A}\right) \sin\left(\frac{\pi n y}{B}\right) \left(m^2 B^2 + n^2 A^2\right)}{A^2 B^2} = \rho(x,y)$$

上式の両辺に $\sin\left(\frac{\pi j x}{A}\right) \sin\left(\frac{\pi k y}{B}\right)$ を掛け、

$$\frac{A_{m,n} \sin\left(\frac{\pi j x}{A}\right) \sin\left(\frac{\pi m x}{A}\right) \sin\left(\frac{\pi k y}{B}\right) \sin\left(\frac{\pi n y}{B}\right) \left(m^2 B^2 + n^2 A^2\right)}{A^2 B^2} = \rho(x,y) \sin\left(\frac{\pi j x}{A}\right) \sin\left(\frac{\pi k y}{B}\right)$$

x 軸で $0 \to A$、y 軸で $0 \to B$ の範囲で積分すると、

$$\begin{aligned}\frac{A_{m,n} \left(m^2 B^2 + n^2 A^2\right)}{A^2 B^2} & \int_0^A \sin\left(\frac{\pi j x}{A}\right) \sin\left(\frac{\pi m x}{A}\right) dx \int_0^B \sin\left(\frac{\pi k y}{B}\right) \sin\left(\frac{\pi n y}{B}\right) dy \\ &= \int_0^B \int_0^A \rho(x,y) \sin\left(\frac{\pi j x}{A}\right) dx \sin\left(\frac{\pi k y}{B}\right) dy\end{aligned} \tag{10.5.3}$$

ここで、$m \neq j, n \neq k$ のとき、次式のように左辺は零となる。

$$0 = \int_0^B \int_0^A \rho(x,y) \sin\left(\frac{\pi j x}{A}\right) dx \sin\left(\frac{\pi k y}{B}\right) dy$$

また、$m = j, n = k$ のとき、次式となる。

$$\frac{A_{m,n} \left(m^2 B^2 + n^2 A^2\right)}{4 A B} = \int_0^B \int_0^A \rho(x,y) \sin\left(\frac{\pi m x}{A}\right) dx \sin\left(\frac{\pi n y}{B}\right) dy$$

上式から、$A_{m,n}$ を求めると、

$$A_{m,n} = \frac{4 A B}{m^2 B^2 + n^2 A^2} \int_0^B \int_0^A \rho(x,y) \sin\left(\frac{\pi m x}{A}\right) dx \sin\left(\frac{\pi n y}{B}\right) dy$$

$x \to s,\ y \to t$ に置き換えると、

$$A_{m,n} = \frac{4 A B}{m^2 B^2 + n^2 A^2} \int_0^B \int_0^A \rho(s,t) \sin\left(\frac{\pi m s}{A}\right) ds \sin\left(\frac{\pi n t}{B}\right) dt$$

(10.5.2) 式に上式を代入すると、

$$u = \frac{4 \sin\left(\frac{\pi m x}{A}\right) \sin\left(\frac{\pi n y}{B}\right) A B}{m^2 B^2 + n^2 A^2} \int_0^B \int_0^A \rho(s,t) \sin\left(\frac{\pi m s}{A}\right) ds \sin\left(\frac{\pi n t}{B}\right) dt$$

上式を n の級数の形にし、

$$u = 4 A B \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi n y}{B}\right) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2 B^2 + n^2 A^2} \sin\left(\frac{\pi m x}{A}\right) \int_0^B \int_0^A \rho(s,t) \sin\left(\frac{\pi m s}{A}\right) ds \sin\left(\frac{\pi n t}{B}\right) dt$$

10.6　二次元ヘルムホルツの方程式

10.6.1　xy 座標における二次元ヘルムホルツの方程式

二次元円柱座標ヘルムホルツの方程式は (4.5.15) 式、168 頁から次式で表現できる。

$$h\,K^2+\nabla^2 h=u\,K^2+\frac{d^2}{d\,y^2}\,u+\frac{d^2}{d\,x^2}\,u=0 \quad (10.6.1)$$

```
kill(all);
load("vect");
depends(u,[x,y]);
depends(v,[x]);
depends(w,[y]);
assume(L>0);
assume(J>0);
EQ:'diff(u,x,2)+'diff(u,y,2)+K^2*u=0;
U1:u=v*w;
subst([U1],EQ);
ev(%,diff);
U2:expand(%/v/w);
V1:'diff(v,x,2)/v=-L^2;
K1:K^2=L^2+J^2;
W1:subst([V1,K1],U2);
V2:ode2(V1,v,x);
subst([v=0,x=0],V2);
subst([v=0,x=A],V2);
L1:L=m*%pi/A;
V3:subst([%k2=0,L1],V2);
W2:ode2(W1,w,y);
subst([v=0,y=0],W2);
subst([v=0,y=B],W2);
J1:J=n*%pi/B;
W3:subst([%k2=0,J1],W2);
subst([V3,W3],U1);
U3:subst([%k1^2=A[m,n]],%);
L3:subst([J1,L1],K1);
u=sum(sum(rhs(U3),m,1,\inf),n,1,\inf);
```

ここで、u は x,y の関数であり、下記のように変数分離できるとして、v は x の関数、w は y の関数とする。

$$u=v\,w \quad (10.6.2)$$

(10.6.1) 式に上式を代入し、微分を実行すると、

$$v\,w\,K^2+v\,\left(\frac{d^2}{d\,y^2}\,w\right)+\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,v\right)\,w=0$$

上式を変形し、

$$K^2+\frac{\frac{d^2}{d\,y^2}\,w}{w}+\frac{\frac{d^2}{d\,x^2}\,v}{v}=0$$

上式左辺第三項を $-L^2$ と置くと、

$$\frac{\frac{d^2}{d\,x^2}\,v}{v}=-L^2 \quad (10.6.3)$$

上式の他の項は、

$$J^2+\frac{\frac{d^2}{d\,y^2}\,w}{w}=0 \quad (10.6.4)$$

ここで、

$$K^2=L^2+J^2 \quad (10.6.5)$$

(10.6.3) 式を ode2 関数で解くと、

$$v=\%k1\sin\left(x\,L\right)+\%k2\cos\left(x\,L\right)$$

境界条件として $x=0,\,x=A$ のとき、$u=0$ とすると、

$$v=\%k1\sin\left(\frac{\pi\,m\,x}{A}\right) \quad \text{ここで、}L=\frac{\pi\,m}{A} \quad (10.6.6)$$

(10.6.4) 式を ode2 関数で解くと、

$$w=\%k1\sin\left(y\,J\right)+\%k2\cos\left(y\,J\right)$$

境界条件として $y=0,\,y=A$ のとき、$u=0$ とすると、

$$w=\%k1\sin\left(\frac{\pi\,n\,y}{B}\right) \quad \text{ここで、}J=\frac{\pi\,n}{B} \quad (10.6.7)$$

(10.6.2) 式に (10.6.6) 式、(10.6.7) 式を代入すると、

$$u=\%k1^2\sin\left(\frac{\pi\,m\,x}{A}\right)\,\sin\left(\frac{\pi\,n\,y}{B}\right)$$

上式で、$\%k1^2\to A_{m,n}$ に置き換えると、

$$u=A_{m,n}\sin\left(\frac{\pi\,m\,x}{A}\right)\,\sin\left(\frac{\pi\,n\,y}{B}\right)$$

ここで、(10.6.5) 式、(10.6.6) 式、(10.6.7) 式から、

$$K^2=\frac{\pi^2\,n^2}{B^2}+\frac{\pi^2\,m^2}{A^2}$$

m,n の級数の形として解は、

$$u=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty}A_{m,n}\sin\left(\frac{\pi\,m\,x}{A}\right)\right)\,\sin\left(\frac{\pi\,n\,y}{B}\right)$$

10.6.2 極座標における二次元ヘルムホルツの方程式

二次元極座標ヘルムホルツの方程式は (4.5.15) 式、168 頁から次式で表現できる。

$$h\,K^2+\nabla^2 h=h\,K^2+\frac{\frac{d}{d\,r}\,h}{r}+\frac{\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,h}{r^2}+\frac{d^2}{d\,r^2}\,h=0 \tag{10.6.8}$$

```
kill(all);
load("vect");
depends(u,[r,\theta]);
depends(v,[r]);
depends(w,[\theta]);
assume(K>0);
EQ22:u*K^2+'diff(u,r,1)/r+'diff(u,theta,2)
 /r^2+'diff(u,r,2)=0;
TR1:u=v*w;
subst([TR1],EQ22);
ev(%,diff);
expand(%/w/v*r^2);
%-first(lhs(%));
%-first(lhs(%));
EQ23:%-first(rhs(%));
assume(n>0);
EQ24:lhs(EQ23)=n^2;
EQ25:rhs(EQ23)=n^2;
AN1:ode2(%,w,\theta);
EQ24-rhs(EQ24);
EQ26:expand(%*v/r^2);
BEEQ4:v*(x^(2*C-2)*B^2*C^2+(A^2-N^2*C^2)/
 x^2)+'diff(v,x,1)*(1-2*A)/x+'diff(v,x,2)=0;
BEA1:1-2*A=1;
BEA2:A^2-N^2*C^2=-n^2;
BEA3:B^2*C^2=K^2;
BEA4:2*C-2=0;
solve([BEA1,BEA2,BEA3,BEA4],[A,B,C,N]);
BEA5:%[3];
v=%k1*bessel_j(N,x^C*B)*x^A+%k2*bessel_y(
 N,x^C*B)*x^A;
subst([BEA5],%);
AN2:subst([x=r,%k1=%d1,%k2=%d2],%);
subst([AN1,AN2],TR1);
```

ここで、u は r,θ の関数であり、$x-y$ 座標との関係を図 4.5.1、164 頁に示す。下記のように変数分離できるとして、v は r の関数、w は θ の関数とする。

$$u=v\,w \tag{10.6.9}$$

(10.6.8) 式に上式を代入し、微分を実行すると、

$$v\,w\,K^2+\frac{v\,\left(\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,w\right)}{r^2}+\left(\frac{d^2}{d\,r^2}\,v\right)\,w+\frac{\left(\frac{d}{d\,r}\,v\right)\,w}{r}=0$$

上式を変形し、

$$r^2\,K^2+\frac{r^2\,\left(\frac{d^2}{d\,r^2}\,v\right)}{v}+\frac{r\,\left(\frac{d}{d\,r}\,v\right)}{v}=-\frac{\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,w}{w}$$

上式を n^2 と置くと、

$$r^2\,K^2+\frac{r^2\,\left(\frac{d^2}{d\,r^2}\,v\right)}{v}+\frac{r\,\left(\frac{d}{d\,r}\,v\right)}{v}=n^2 \tag{10.6.10}$$

$$-\frac{\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,w}{w}=n^2 \tag{10.6.11}$$

(10.6.11) 式を ode2 関数で解くと、

$$w=\%k1\sin\left(n\,\theta\right)+\%k2\cos\left(n\,\theta\right) \tag{10.6.12}$$

ここで上式が $\theta=0$ と $\theta=2\pi$ で連続で繋がるためには、n は整数となる。(10.6.10) 式を整理すると、

$$v\,K^2+\frac{d^2}{d\,r^2}\,v+\frac{\frac{d}{d\,r}\,v}{r}-\frac{n^2\,v}{r^2}=0 \tag{10.6.13}$$

上式は Bessel の微分方程式である。Bessel の微分方程式の一般型は (3.3.16) 式から次式となる。

$$\begin{aligned}&v\left(\frac{A^2-C^2\,N^2}{x^2}+x^{2\,C-2}\,B^2\,C^2\right)\\&\quad+\frac{\left(\frac{d}{d\,x}\,v\right)\,\left(1-2\,A\right)}{x}+\frac{d^2}{d\,x^2}\,v=0\end{aligned} \tag{10.6.14}$$

(10.6.13) 式と (10.6.14) 式を比較して、

$$1-2\,A=1,\quad A^2-C^2\,N^2=-n^2$$

$$B^2\,C^2=K^2,\quad 2\,C-2=0$$

上式を解いて、

$$[A=0,B=K,C=1,N=n]$$

Bessel の微分方程式の一般型の解は N が整数の時、(3.3.18) 式から次式となる。

$$\begin{aligned}v=&\%k2\,x^A\,\mathrm{bessel\_y}\left(N,x^C\,B\right)\\&+\%k1\,x^A\,\mathrm{bessel\_j}\left(N,x^C\,B\right)\end{aligned} \tag{10.6.15}$$

上式に係数を求めた結果を上式に代入し、(10.6.13) 式の解は、

$$v=\%d2\,\mathrm{bessel\_y}\left(n,r\,K\right)+\%d1\,\mathrm{bessel\_j}\left(n,r\,K\right)$$

上式右辺第一項は 44 頁の図から $r\to 0$ で $\pm\infty$ となるので省き、解は、

$$u=\mathrm{bessel\_j}\left(n,r\,K\right)\,\left(\%k1\sin\left(n\,\theta\right)+\%k2\cos\left(n\,\theta\right)\right) \tag{10.6.16}$$

10.7　三次元ヘルムホルツの方程式

10.7.1　極座標における三次元ヘルムホルツの方程式

図 4.5.2、169 頁に示す極座標：$r-\theta-\phi$ の三次元ヘルムホルツの方程式は (4.5.31) 式、176 頁から次式で表現できる。

$$\nabla^2 u+u\,K^2 = u\,K^2+\frac{\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,u}{r^2}+\frac{\cos(\theta)\,\left(\frac{d}{d\,\theta}\,u\right)}{r^2\sin(\theta)}+\frac{d^2}{d\,r^2}\,u+\frac{2\,\left(\frac{d}{d\,r}\,u\right)}{r}+\frac{\frac{d^2}{d\,\phi^2}\,u}{r^2\sin(\theta)^2}=0 \tag{10.7.1}$$

```
kill(all);
load("vect");
depends(u,[r,\theta,\phi]);
depends(v,[r]);
depends(w,[\theta,\phi]);
depends(q,[\phi]);
depends(p,[\theta]);
assume(K>0);
assume(n>0);
assume(m>0);
EQ:'diff(u,x,2)+'diff(u,y,2)+'diff(u,z,2)
 +K^2*u+K^2*u=0;
EQ1:'diff(u,\theta,2)/r^2+(cos(\theta)
 *('diff(u,\theta,1)))/(r^2*sin(\theta))
 +'diff(u,r,2)+(2*('diff(u,r,1)))/r
 +'diff(u,\phi,2)/(r^2*sin(\theta)^2)
 +K^2*u=0;
U1:u=v*w;
subst([U1],EQ1);
ev(%,diff);
expand(%/v/w*r^2);
EQ11:%+first(lhs(%))-rest(lhs(%),-2);
EQ12:lhs(EQ11)=n*(n+1);
EQ13:rhs(EQ11)=n*(n+1);
EQ12-n*(n+1);
EQ21:expand(%*v/r^2);
```

ここで、u は r,θ,ϕ の関数であり、下記のように変数分離できるとして、v は r の関数、w は θ,ϕ の関数とする。

$$u=v\,w$$

(10.7.1) 式に上式を代入し、微分を実行し、整理すると、

$$r^2\,K^2+\frac{\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,w}{w}+\frac{\cos(\theta)\,\left(\frac{d}{d\,\theta}\,w\right)}{\sin(\theta)\,w}+\frac{\frac{d^2}{d\,\phi^2}\,w}{\sin(\theta)^2\,w}+\frac{r^2\,\left(\frac{d^2}{d\,r^2}\,v\right)}{v}+\frac{2\,r\,\left(\frac{d}{d\,r}\,v\right)}{v}=0 \tag{10.7.2}$$

上式を変形し、

$$r^2\,K^2+\frac{r^2\,\left(\frac{d^2}{d\,r^2}\,v\right)}{v}+\frac{2\,r\,\left(\frac{d}{d\,r}\,v\right)}{v}=-\frac{\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,w}{w}-\frac{\cos(\theta)\,\left(\frac{d}{d\,\theta}\,w\right)}{\sin(\theta)\,w}-\frac{\frac{d^2}{d\,\phi^2}\,w}{\sin(\theta)^2\,w}$$

上式を $n\,(n+1)$ と置く。

$$r^2\,K^2+\frac{r^2\,\left(\frac{d^2}{d\,r^2}\,v\right)}{v}+\frac{2\,r\,\left(\frac{d}{d\,r}\,v\right)}{v}=n\,(n+1) \tag{10.7.3}$$

$$-\frac{\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,w}{w}-\frac{\cos(\theta)\,\left(\frac{d}{d\,\theta}\,w\right)}{\sin(\theta)\,w}-\frac{\frac{d^2}{d\,\phi^2}\,w}{\sin(\theta)^2\,w}=n\,(n+1) \tag{10.7.4}$$

(10.7.3) 式を変形し、

$$v\,K^2+\frac{d^2}{d\,r^2}\,v+\frac{2\,\left(\frac{d}{d\,r}\,v\right)}{r}-\frac{n^2\,v}{r^2}-\frac{n\,v}{r^2}=0 \tag{10.7.5}$$

```
BEEQ4:v*(x^(2*C-2)*B^2*C^2+(A^2-N^2*C^2)/
 x^2)+'diff(v,x,1)*(1-2*A)/x+'diff(v,x,2)=0;
BEA1:1-2*A=2;
BEA2:A^2-N^2*C^2=-(n+1)*n;
BEA3:B^2*C^2=K^2;
BEA4:2*C-2=0;
solve([BEA1,BEA2,BEA3,BEA4],[A,B,C,N]);
BEA5:%[3];
v=%k1*bessel_j(N,x^C*B)*x^A+%k2*bessel_j
 (-N,x^C*B)*x^A;
subst([BEA5],%);
V1:subst([%k2=0,x=r],%);
-EQ13+n*(n+1);
EQ22:expand(%*w);
W1:w=p*q;
subst([W1],EQ22);
ev(%,diff);
expand(%/p/q*sin(\theta)^2);
EQ31:%-last(lhs(%));
EQ32:lhs(EQ31)=m^2;
EQ33:rhs(EQ31)=m^2;
Q1:ode2(EQ33,q,\phi);
EQ32-m^2;
EQ34:expand(%/sin(\theta)^2*p);
```

(10.7.5) 式は Bessel の微分方程式である。Bessel の微分方程式の一般型は (3.3.16) 式、45 頁から次式となる。

$$v\left(\frac{A^2-N^2\,C^2}{x^2}+x^{2\,C-2}\,B^2\,C^2\right)+\frac{\left(\frac{d}{d\,x}\,v\right)\,(1-2\,A)}{x}+\frac{d^2}{d\,x^2}\,v=0$$

(10.7.5) 式と一般型の係数の関係は、

$$1-2\,A=2,\quad A^2-C^2\,N^2=(-n-1)\,n$$

$$B^2\,C^2=K^2,\quad 2\,C-2=0$$

上式を解くと、

$$[A=-\frac{1}{2},B=K,C=1,N=\frac{2\,n+1}{2}]$$

Bessel の微分方程式の一般型の解は N が整数でない時、(3.3.10) 式から次式となる。

$$v=\%k1\,x^A\,\mathrm{bessel\_j}\left(N,x^C\,B\right)+\%k2\,x^A\,\mathrm{bessel\_j}\left(-N,x^C\,B\right) \tag{10.7.6}$$

以上から (10.7.5) 式の解は、

$$v=\frac{\%k1}{\sqrt{r}}\,\mathrm{bessel\_j}\left(\frac{2\,n+1}{2},r\,K\right)+\frac{\%k2}{\sqrt{r}}\,\mathrm{bessel\_j}\left(-\frac{2\,n+1}{2},r\,K\right) \tag{10.7.7}$$

$r=0$ で有解であるためには、$\%k2=0$ として、

$$v=\frac{\%k1}{\sqrt{r}}\,\mathrm{bessel\_j}\left(\frac{2\,n+1}{2},r\,K\right) \tag{10.7.8}$$

(10.7.4) 式から

$$\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,w+\frac{\cos(\theta)\,\left(\frac{d}{d\,\theta}\,w\right)}{\sin(\theta)}+\frac{\frac{d^2}{d\,\phi^2}\,w}{\sin(\theta)^2}+n^2\,w+n\,w=0$$

ここで、w を下記のように変数分離できるとして、p は θ の関数、q は ϕ の関数とする。

$$w=p\,q$$

上式を代入し、微分を実行し、整理すると、

$$\frac{\left(\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,p\right)\,\sin(\theta)^2}{p}+n^2\sin(\theta)^2+n\sin(\theta)^2+\frac{\left(\frac{d}{d\,\theta}\,p\right)\,\cos(\theta)\,\sin(\theta)}{p}+\frac{\frac{d^2}{d\,\phi^2}\,q}{q}=0$$

上式を変形し、

$$\frac{\left(\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,p\right)\,\sin(\theta)^2}{p}+n^2\sin(\theta)^2+n\sin(\theta)^2+\frac{\left(\frac{d}{d\,\theta}\,p\right)\,\cos(\theta)\,\sin(\theta)}{p}=-\frac{\frac{d^2}{d\,\phi^2}\,q}{q}$$

上式を m^2 と置くと、

$$\frac{\left(\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,p\right)\,\sin(\theta)^2}{p}+n^2\sin(\theta)^2+n\sin(\theta)^2+\frac{\left(\frac{d}{d\,\theta}\,p\right)\,\cos(\theta)\,\sin(\theta)}{p}=m^2 \tag{10.7.9}$$

$$-\frac{\frac{d^2}{d\,\phi^2}\,q}{q}=m^2 \tag{10.7.10}$$

(10.7.10) 式を ode2 関数で解くと、

$$q=\%k1\sin(m\,\phi)+\%k2\cos(m\,\phi) \tag{10.7.11}$$

上式で $\phi=0\to 2\,\pi$ で連続とならないといけないので、m は整数となる。(10.7.9) 式を整理すると、

$$\frac{\left(\frac{d}{d\,\theta}\,p\right)\,\cos(\theta)}{\sin(\theta)}-\frac{m^2\,p}{\sin(\theta)^2}+\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,p+n^2\,p+n\,p=0 \tag{10.7.12}$$

```
depends([s],[\theta]);
depends([p],[s]);
CS1:cos(\theta)=s;
CS2:solve(%,s)[1];
CS21:diff(CS2,\theta,1);
CS22:diff(CS2,\theta,2);
ev(EQ34,diff);
subst([CS22,CS21],%);
subst([sin(\theta)^2=1-cos(\theta)^2],%);
EQ4:subst([CS1],%);
PN1:P[n](s)=diff((s^2-1)^n,s,n)/2^n/n!;
P0:p=(1-s^2)^(m/2)*diff(P[n](s),s,m);
P1:p=P[m,n](cos(\theta));
subst([P1,Q1],W1);
subst([%k1=B[m,n],%k2=A[m,n]],rhs(%));
expand(%);
w=sum(%,m,1,n)+subst([m=0],%);
W2:subst([P[0,n]=P[n]],%);
U2:subst([V1,W2,%k1=1],U1);
U3:lhs(%)=sum(rhs(%),n,1,inf);
K1:bessel_j((2*n+1)/2,R*K)=0;
K2:K=\alpha[n,i];
K3:solve(K2,K)[1];
subst([K3],U3);
U4:lhs(%)=sum(rhs(%),i,1,inf);
```

(10.7.12) 式を下記の変数変換 : $\theta\to s$ を行う。その関係式は、

$$\cos(\theta)=s \tag{10.7.13}$$

$$\frac{d}{d\,\theta}\,s=-\sin(\theta)\qquad \frac{d^2}{d\,\theta^2}\,s=-\cos(\theta)$$

上記の関係を (10.7.12) 式に代入し、微分を実行すると、

$$\frac{\left(\frac{d}{d\,s}\,p\right)\,\left(\frac{d}{d\,\theta}\,s\right)\,\cos\left(\theta\right)}{\sin\left(\theta\right)}-\frac{m^2\,p}{\sin\left(\theta\right)^2}+\left(\frac{d}{d\,s}\,p\right)\,\left(\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,s\right)+\left(\frac{d^2}{d\,s^2}\,p\right)\,\left(\frac{d}{d\,\theta}\,s\right)^2+n^2\,p+n\,p=0$$

上式を整理すると、

$$-\frac{m^2\,p}{1-s^2}+\left(\frac{d^2}{d\,s^2}\,p\right)\,\left(1-s^2\right)-2\,\left(\frac{d}{d\,s}\,p\right)\,s+n^2\,p+n\,p=0 \tag{10.7.14}$$

上式は (3.4.53) 式から Legendre の陪微分方程式で、その解は (3.4.61) 式、71 頁から、

$$\begin{gathered} p=P_{m,n}\left(\cos\left(\theta\right)\right)=\left(1-s^2\right)^{\frac{m}{2}}\,\left(\frac{d^m}{d\,s^m}\,P_n\left(s\right)\right) \\ \text{ここで、}P_n\left(s\right)=\frac{1}{2^n\,n!}\frac{d^n}{d\,s^n}\left(s^2-1\right)^n \quad n:\text{正の整数} \end{gathered} \tag{10.7.15}$$

上式と (10.7.11) 式から w は、

$$w=\left(\%k1\sin\left(m\,\phi\right)+\%k2\cos\left(m\,\phi\right)\right)\,P_{m,n}\left(\cos\left(\theta\right)\right)$$

上式を級数の形とすると、$m=1\to\infty$ の級数和とすべきであるが、$m>n$ では $P_{m,n}\left(\cos\left(\theta\right)\right)=0$ となるので、

$$w=\left(\sum_{m=1}^{n}B_{m,n}\sin\left(m\,\phi\right)\,P_{m,n}\left(\cos\left(\theta\right)\right)+A_{m,n}\cos\left(m\,\phi\right)\,P_{m,n}\left(\cos\left(\theta\right)\right)\right)+A_{0,n}\,P_n\left(\cos\left(\theta\right)\right)$$

上式と (10.7.8) 式から解：u は、

$$\begin{aligned} u=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{r}}\mathrm{bessel\_j}\left(\frac{2\,n+1}{2},r\,K\right)\Bigg(&\left(\sum_{m=1}^{n}B_{m,n}\sin\left(m\,\phi\right)\,P_{m,n}\left(\cos\left(\theta\right)\right)+A_{m,n}\cos\left(m\,\phi\right)\,P_{m,n}\left(\cos\left(\theta\right)\right)\right) \\ &+A_{0,n}\,P_n\left(\cos\left(\theta\right)\right)\Bigg) \end{aligned} \tag{10.7.16}$$

境界：$r=R$ で $u=0$ とすると、次式の条件となり、

$$\mathrm{bessel\_j}\left(\frac{2\,n+1}{2},K\,R\right)=0$$

上式が成り立つ根：K を求め、その i 番目の根を $\alpha_{n,i}$ とする。

$$K=\alpha_{n,i}$$

以上から、解：u は、

$$\begin{aligned} u=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{r}}\mathrm{bessel\_j}\left(\frac{2\,n+1}{2},\alpha_{n,i}\,r\right)\Bigg(&\left(\sum_{m=1}^{n}B_{m,n}\sin\left(m\,\phi\right)\,P_{m,n}\left(\cos\left(\theta\right)\right)+A_{m,n}\cos\left(m\,\phi\right)\,P_{m,n}\left(\cos\left(\theta\right)\right)\right) \\ &+A_{0,n}\,P_n\left(\cos\left(\theta\right)\right)\Bigg) \end{aligned} \tag{10.7.17}$$

10.8　一次元波動方程式

10.8.1　波動方程式の基本解

```
kill(all);
depends(u,[v,w]);
depends(v,[x,t]);
depends(w,[x,t]);
EQ1:'diff(u,t,2)=C^2*'diff(u,x,2);
XI1:v=x+C*t;
ET1:w=x-C*t;
XI2:diff(XI1,x,1);
XI3:diff(XI1,x,2);
XI4:diff(XI1,t,1);
XI5:diff(XI1,t,2);
ET2:diff(ET1,x,1);
ET3:diff(ET1,x,2);
ET4:diff(ET1,t,1);
ET5:diff(ET1,t,2);
EQ2:'diff(u,t,2);
EQ3:'diff(u,x,2);
EQ2=ev(EQ2,diff);
expand(%);
subst([XI2,XI3,XI4,XI5],%);
subst([ET2,ET3,ET4,ET5],%);
EQ21:factor(%);
EQ3=ev(EQ3,diff);
expand(%);
subst([XI2,XI3,XI4,XI5],%);
subst([ET2,ET3,ET4,ET5],%);
EQ31:factor(%);
subst([EQ21,EQ31],EQ1);
%-rhs(%);
factor(%);
EQ4:-%/C^2/4;
'diff(u,v,1)=A(v);
u=integrate(A(v),v)+B(w)+%k1;
'diff(u,w,1)=D(w);
u=integrate(D(w),w)+E(v)+%k2;
u=F(v)+G(w);
subst([XI1,ET1],%);
```

一次元波動問題（弦の振動問題等）は次式で表現できる。ここで弦の変位：u、時間：t、弦の長さ方向：x とする。

$$\frac{d^2}{d\,t^2}\,u=\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,u\right)\,C^2 \tag{10.8.1}$$

ダランベールの解

下記の新しい独立変数を導入する。

$$v=t\,C+x,\quad w=x-t\,C \tag{10.8.2}$$

上式を x,t で微分し、

$$\begin{gathered}\frac{d}{d\,x}\,v=1,\ \frac{d^2}{d\,x^2}\,v=0,\ \frac{d}{d\,t}\,v=C,\ \frac{d^2}{d\,t^2}\,v=0\\ \frac{d}{d\,x}\,w=1,\ \frac{d^2}{d\,x^2}\,w=0,\ \frac{d}{d\,t}\,w=-C,\ \frac{d^2}{d\,t^2}\,w=0\end{gathered} \tag{10.8.3}$$

u は v,w の関数とし、v,w は x,t の関数とする。このとき (10.8.1) 式の左辺は、

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{d\,t^2}\,u=&\left(\frac{d}{d\,w}\,u\right)\left(\frac{d^2}{d\,t^2}\,w\right)+\left(\frac{d^2}{d\,w^2}\,u\right)\left(\frac{d}{d\,t}\,w\right)^2\\&+2\left(\frac{d^2}{d\,v\,d\,w}\,u\right)\left(\frac{d}{d\,t}\,v\right)\left(\frac{d}{d\,t}\,w\right)\\&+\left(\frac{d}{d\,v}\,u\right)\left(\frac{d^2}{d\,t^2}\,v\right)+\left(\frac{d^2}{d\,v^2}\,u\right)\left(\frac{d}{d\,t}\,v\right)^2\end{aligned}$$

上式に (10.8.3) 式を代入すると、

$$\frac{d^2}{d\,t^2}\,u=\left(\frac{d^2}{d\,w^2}\,u+\frac{d^2}{d\,v^2}\,u-2\left(\frac{d^2}{d\,v\,d\,w}\,u\right)\right)C^2 \tag{10.8.4}$$

(10.8.1) 式の右辺は、

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{d\,x^2}\,u=&\left(\frac{d}{d\,w}\,u\right)\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,w\right)+\left(\frac{d^2}{d\,w^2}\,u\right)\left(\frac{d}{d\,x}\,w\right)^2\\&+2\left(\frac{d^2}{d\,v\,d\,w}\,u\right)\left(\frac{d}{d\,x}\,v\right)\left(\frac{d}{d\,x}\,w\right)\\&+\left(\frac{d}{d\,v}\,u\right)\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,v\right)+\left(\frac{d^2}{d\,v^2}\,u\right)\left(\frac{d}{d\,x}\,v\right)^2\end{aligned}$$

上式に (10.8.3) 式を代入すると、

$$\frac{d^2}{d\,x^2}\,u=\frac{d^2}{d\,w^2}\,u+\frac{d^2}{d\,v^2}\,u+2\left(\frac{d^2}{d\,v\,d\,w}\,u\right) \tag{10.8.5}$$

(10.8.1) 式に (10.8.4) 式、(10.8.5) 式を代入すると、

$$\frac{d^2}{d\,v\,d\,w}\,u=0 \tag{10.8.6}$$

上式から、

$$\frac{d}{d\,v}\,u=\mathrm{A}\,(v)$$

上式を v で積分し、

$$u=\mathrm{B}\,(w)+\int\mathrm{A}\,(v)\,dv+\%k1 \tag{10.8.7}$$

また、(10.8.6) 式から、

$$\frac{d}{d\,w}\,u=\mathrm{D}\,(w)$$

上式を w で積分し、

$$u=\int \mathrm{D}\left(w\right)dw+\mathrm{E}\left(v\right)+\%k2 \tag{10.8.8}$$

(10.8.7) 式、(10.8.8) 式、(10.8.3) 式から、

$$\begin{aligned}u=&\mathrm{G}\left(w\right)+\mathrm{F}\left(v\right)\\=&\mathrm{F}\left(t\,C+x\right)+\mathrm{G}\left(x-t\,C\right)\end{aligned} \tag{10.8.9}$$

上式は、速さ：C で x 軸負方向に $\mathrm{F}\left(t\,C+x\right)$ が進行し、速さ：C で x 軸負方向に $\mathrm{G}\left(x-t\,C\right)$ が進行する波が合わさった波形となる。

```
kill(all);
depends(u,[x,t]);
depends(v,[x]);
depends(w,[t]);
EQ:diff(u,t,2)=C^2*diff(u,x,2);
TR:u=v*w;
subst([TR],EQ);
ev(%,diff);
EQ1:%/w/C^2/v;
EQ11:lhs(EQ1)=-k^2;
EQ12:rhs(EQ1)=-k^2;
assume(C>0);
assume(k>0);
AN11:ode2(EQ11,w,t);
ode2(EQ12,v,x);
AN12:subst([%k1=%c1,%k2=%c2],%);
AN1:subst([AN11,AN12],TR);
trigrat(%);
subst([%c1*%k2+%c2*%k1=2*%d1,%c2*%k2-%c1*
  %k1=2*%d2,%c2*%k1-%c1*%k2=%d3*2,%c2
  *%k2+%c1*%k1=2*%d4],%);
AN2:expand(%);
k*t*C-k*x=k*(t+dt)*C-k*(x+dx);
solve(%,dx)[1];
%/dt;
```

変数分離法による解

ここで、u は x,t の関数であり、下記のように変数分離できるとして、v は x の関数、w は t の関数とする。

$$u=v\,w$$

(10.8.1) 式に上式を代入し、微分を実行すると、

$$v\,\left(\frac{d^2}{d\,t^2}\,w\right)=\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,v\right)\,w\,C^2$$

上式を変形し、

$$\frac{\frac{d^2}{d\,t^2}\,w}{w\,C^2}=\frac{\frac{d^2}{d\,x^2}\,v}{v}$$

上式を $-k^2$ と置くと、

$$\frac{\frac{d^2}{d\,t^2}\,w}{w\,C^2}=-k^2 \quad C>0,k>0 \tag{10.8.10}$$

$$\frac{\frac{d^2}{d\,x^2}\,v}{v}=-k^2 \quad k>0 \tag{10.8.11}$$

(10.8.10) 式を ode2 関数で解くと、

$$w=\%k1\sin\left(k\,t\,C\right)+\%k2\cos\left(k\,t\,C\right)$$

(10.8.11) 式を ode2 関数で解くと、

$$v=\%c1\sin\left(k\,x\right)+\%c2\cos\left(k\,x\right)$$

上記二式から、(10.8.1) 式の解：u は、

$$\begin{aligned}u=&\left(\%c1\sin\left(k\,x\right)+\%c2\cos\left(k\,x\right)\right)\\&\times\ \left(\%k1\sin\left(k\,t\,C\right)+\%k2\cos\left(k\,t\,C\right)\right)\end{aligned} \tag{10.8.12}$$

上式を変形すると、

$$\begin{aligned}u=&\%d1\sin\left(k\,t\,C+k\,x\right)+\%d2\cos\left(k\,t\,C+k\,x\right)\\&+\%d3\sin\left(k\,t\,C-k\,x\right)+\%d4\cos\left(k\,t\,C-k\,x\right)\end{aligned} \tag{10.8.13}$$

$F\left(k\,t\,C-k\,x\right)$ の形の関数は、基の関数：F と時間が dt、位置が dx ずれた関数：F で下記の関係が成り立つとき、

$$k\,t\,C-k\,x=k\,\left(t+dt\right)\,C-k\,\left(x+dx\right)$$

上式から、

$$\frac{dx}{dt}=C$$

上式の関係が成り立つとき、F は同じ値、即ち、同じ波形となる。以上から F の形が速度：C で移動することを表している。同様に、$F\left(k\,t\,C+k\,x\right)$ では速度：C で逆方向に移動することを表している。

10.8.2 波動方程式の固有値問題

波動方程式で座標：x に関する下記の (10.8.11) 式について、

$$v\,K^2+\frac{d^2}{d\,x^2}\,v=0$$

境界条件と固有値の関係について調べる。

```
kill(all);
assume(K>0);
depends(v,[x]);
declare(m,integer);
EQ:diff(v,x,2)+K^2*v=0;
AN1:ode2(EQ,v,x);
```

上式の解は ode2 関数から得られ、下記となる。

$$v=\%k1\sin\left(x\,K\right)+\%k2\cos\left(x\,K\right) \tag{10.8.14}$$

境界条件：$v(0)=v(1)=0$

```
B11:subst([x=0],rhs(AN1))=0;
B12:subst([x=1,v=0,B11],AN1);
K1:K=m*%pi;
AN11:subst([B11,K1],AN1);
```

(10.8.14) 式に $x=0$ で $v=0$ とすると、

$$\%k2=0$$

(10.8.14) 式に $x=1$ で $v=0$ とすると、上式から、

$$0=\%k1\sin\left(K\right)$$

上式から固有値：K は、

$$K=\pi\,m\quad m：整数$$

以上から解は、

$$v=\%k1\sin\left(\pi\,m\,x\right)$$

境界条件：$\frac{d}{d\,x}\,v(0)=\frac{d}{d\,x}\,v(1)=0$

```
subst([x=0],diff(rhs(AN1),x,1))=0;
B21:solve(%,%k1)[1];
subst([x=1],diff(rhs(AN1),x,1))=0;
subst([B21],%);
K1:K=m*%pi;
AN21:subst([B21,K1],AN1);
```

(10.8.14) 式に $x=0$ で $\frac{d}{d\,x}\,v=0$ とすると、

$$\%k1=0$$

(10.8.14) 式に $x=1$ で $\frac{d}{d\,x}\,v=0$ とすると、上式から、

$$-\%k2\,K\sin\left(K\right)=0$$

上式から固有値：K は、

$$K=\pi\,m\quad m：整数$$

以上から解は、

$$v=\%k2\cos\left(\pi\,m\,x\right)$$

境界条件：$v(0)=0,\frac{d}{d\,x}\,v(1)=0$

```
B31:subst([x=0],rhs(AN1))=0;
subst([x=1],diff(rhs(AN1),x,1))=0;
subst([B31],%);
m*%pi-1/2*%pi;
B32:K=factor(%);
AN31:subst([B31,B32],AN1);
```

(10.8.14) 式に $x=0$ で $v=0$ とすると、

$$\%k2=0$$

(10.8.14) 式に $x=1$ で $\frac{d}{d\,x}\,v=0$ とすると、上式から、

$$\%k1\,K\cos\left(K\right)=0$$

上式から固有値：K は、

$$K=\frac{\pi\,\left(2\,m-1\right)}{2}\quad m：整数$$

以上から解は、

$$v=\%k1\sin\left(\frac{\pi\,\left(2\,m-1\right)\,x}{2}\right)$$

境界条件：$v(0)=v(1),\frac{d}{d\,x}\,v(0)=\frac{d}{d\,x}\,v(1)$

```
K4:K=2*%pi*m;
AN4:subst([K4],AN1);
subst([x=0],AN4);
subst([x=1],AN4);
subst([x=0],diff(rhs(AN4),x,1));
subst([x=1],diff(rhs(AN4),x,1));
```

固有値：K として、下記とすると、境界で一周期となり、条件を満足できる。

$$K=2\,\pi\,m\quad m：整数$$

以上から解は、

$$v=\%k1\sin\left(2\,\pi\,m\,x\right)+\%k2\cos\left(2\,\pi\,m\,x\right)$$

境界条件：$v(0)=0,\frac{d}{d\,x}\,v(1)+h\,v(1)=0$

```
B51:subst([x=0],rhs(AN1))=0;
B52:subst([B51],AN1);
h*subst([x=1],rhs(B52))+subst([x=1],
  diff(rhs(B52),x,1))=0;
B53:expand(%/%k1);
PL1:subst([h=1],lhs(B53));
plot2d(PL1,[K,0,2*%pi]);
K1:K[1]=find_root(PL1,1.5,2.5);
K2:K[2]=find_root(PL1,4.5,5.5);
v[1]=subst([K=rhs(K1)],rhs(B52));
v[2]=subst([K=rhs(K2)],rhs(B52));
```

(10.8.14) 式に $x=0$ で $v=0$ とすると、

$$\%k2=0$$

上式から v は、

$$v=\%k1\sin\left(x\,K\right)$$

$h>0$ として、$x=1$ で $\frac{d}{d\,x}\,v+h\,v=0$ とすると、

$$\%k1\,h\sin\left(K\right)+\%k1\,K\cos\left(K\right)=0$$

上式を整理すると、

$$h\sin\left(K\right)+K\cos\left(K\right)=0$$

上式左辺で $h=1$ として、図示すると下記となり、横軸との交点が求める固有値：K となる。

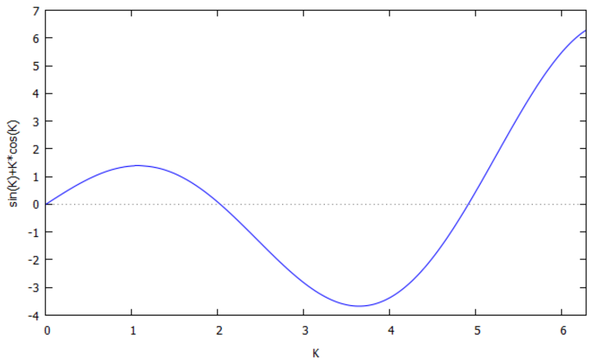


図 10.8.1: $h\sin\left(K\right)+K\cos\left(K\right)$

上図を参考に find_root 関数を用いて K を求めると、

$$K_1=2.028757838110434$$

$$K_2=4.913180439434884$$

上記から、解は、

$$v_1=\%k1\sin\left(2.028757838110434\,x\right)$$

$$v_2=\%k1\sin\left(4.913180439434884\,x\right)$$

10.8.3 波動方程式の有限境界問題

```
kill(all);
depends(u,[x,t]);
depends(v,[x]);
depends(w,[t]);
EQ:diff(u,t,2)=C^2*diff(u,x,2);
TR:u=v*w;
subst([TR],EQ);
ev(%,diff);
EQ1:%/w/C^2/v;
EQ11:lhs(EQ1)=-k^2;
EQ12:rhs(EQ1)=-k^2;
assume(C>0);
assume(k>0);
AN11:ode2(EQ11,w,t);
ode2(EQ12,v,x);
AN12:subst([%k1=%c1,%k2=%c2],%);
AN1:subst([AN11,AN12],TR);
assume(L>0);
declare(n,integer);
subst([x=0],rhs(AN1))=0;
C2:solve(%,%c2)[1];
subst([x=L],rhs(AN1))=0;
k*L=%pi*n;
K1:solve(%,k)[1];
W1:\omega[n]=(%pi*n*C)/L;
W2:solve(%,C)[1];
AN3:subst([C2,K1,W2,%c1=1],AN1);
subst([%k1=A[n],%k2=B[n]],%);
AN4:lhs(%)=sum(rhs(%),n,1,inf);
AN41:u(x,0)=subst([t=0],rhs(AN4));
diff(AN4,t,1);
AN42:du(x,0)=subst([t=0],rhs(%));
B1:B[n]=2/L*'integrate(u(x,0)*
 sin((%pi*n*x)/L),x,0,L);
A[n]*\omega[n]=2/L*'integrate(du(x,0)*
 sin((%pi*n*x)/L),x,0,L);
B2:%/\omega[n];
U1:u(x,0)=(16/L)*x-6;
U2:u(x,0)=-(16/L)*x+10;
B11:subst([U1],2/L*'integrate(u(x,0)*
 sin((%pi*n*x)/L),x,L/4,L/2));
B12:subst([U2],2/L*'integrate(u(x,0)*
 sin((%pi*n*x)/L),x,L/2,3*L/4));
B[n]=ev(B11,integrate)+ev(B12,integrate);
B3:trigsimp(%);
B4:A[n]=0;
AN5:subst([B3,B4],AN4);
```

一次元波動問題（弦の振動問題等）で、弦の変位：u、時間：t、弦の長さ方向：x とする。この基本解は下記の (10.8.12) 式で、

$$\begin{aligned} u = &(\%c1 \sin(k\,x) + \%c2 \cos(k\,x)) \\ &\times\ (\%k1 \sin(k\,t\,C) + \%k2 \cos(k\,t\,C)) \end{aligned} \tag{10.8.15}$$

境界：$x = 0, x = L$ で関数：u が零とすると、

$$\%c2\ (\%k1 \sin(k\,t\,C) + \%k2 \cos(k\,t\,C)) = 0$$

$$\begin{aligned} &(\%k1 \sin(k\,t\,C) + \%k2 \cos(k\,t\,C)) \\ &\times\ (\%c1 \sin(k\,L) + \%c2 \cos(k\,L)) = 0 \end{aligned}$$

時間：t に関係なく上式が成り立つには、

$$\%c2 = 0, \quad k = \frac{\pi\,n}{L} \quad n：整数$$

また、下記の置き換えを行う。

$$C = \frac{\omega_n\,L}{\pi\,n}, \quad \omega_n = \frac{\pi\,n\,C}{L}$$

上式を (10.8.15) 式に代入し、

$$u = (\%k1 \sin(\omega_n\,t) + \%k2 \cos(\omega_n\,t))\ \sin\left(\frac{\pi\,n\,x}{L}\right)$$

上式の $n = 1 \to \infty$ の級数に書き換えて、

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \sin(\omega_n\,t) + B_n \cos(\omega_n\,t))\ \sin\left(\frac{\pi\,n\,x}{L}\right) \tag{10.8.16}$$

上式を時間：t で微分して、

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\,t}\,\mathrm{u} =& \mathrm{u}_t\,(x,t) \\ =& \sum_{n=1}^{\infty} (\omega_n\,A_n \cos(\omega_n\,t) - \omega_n\,B_n \sin(\omega_n\,t)) \\ &\times\ \sin\left(\frac{\pi\,n\,x}{L}\right) \end{aligned} \tag{10.8.17}$$

初期値は、上記二式で $t = 0$ として、

$$\mathrm{u}\,(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{\pi\,n\,x}{L}\right)$$

$$\mathrm{u}_t\,(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n\,A_n \sin\left(\frac{\pi\,n\,x}{L}\right)$$

上式はフーリエ級数であるから、係数：A_n, B_n は (6.1.5) 式から得られ、

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L \mathrm{u}\,(x,0)\ \sin\left(\frac{\pi\,n\,x}{L}\right) dx \tag{10.8.18}$$

$$\omega_n\,A_n = \frac{2}{L} \int_0^L \mathrm{u}_t\,(x,0)\ \sin\left(\frac{\pi\,n\,x}{L}\right) dx$$

上式を変形し、

$$A_n = \frac{2}{\omega_n\,L} \int_0^L \mathrm{u}_t\,(x,0)\ \sin\left(\frac{\pi\,n\,x}{L}\right) dx \tag{10.8.19}$$

初期値：$\mathrm{u}(x,0)$ として、下記の三角形状とする。

$$\mathrm{u}(x,0)=\frac{16\,x}{L}-6,\quad \frac{3\,L}{8}<x<\frac{L}{2}$$

$$\mathrm{u}(x,0)=10-\frac{16\,x}{L},\quad \frac{L}{2}<x<\frac{5L}{8}$$

上式を (10.8.18) 式に代入し、

$$\begin{aligned}
B_n =&\frac{2}{L}\left(\frac{\left(16\sin\left(\frac{\pi\,n}{2}\right)+2\,\pi\,n\cos\left(\frac{\pi\,n}{2}\right)\right)\,L}{\pi^2\,n^2}\right.\\
&\left.-\frac{16\sin\left(\frac{5\,\pi\,n}{8}\right)\,L}{\pi^2\,n^2}\right)\\
&+\frac{2}{L}\left(\frac{\left(16\sin\left(\frac{\pi\,n}{2}\right)-2\,\pi\,n\cos\left(\frac{\pi\,n}{2}\right)\right)\,L}{\pi^2\,n^2}\right.\\
&\left.-\frac{16\sin\left(\frac{3\,\pi\,n}{8}\right)\,L}{\pi^2\,n^2}\right)\\
=&-\frac{32\sin\left(\frac{5\,\pi\,n}{8}\right)-64\sin\left(\frac{\pi\,n}{2}\right)+32\sin\left(\frac{3\,\pi\,n}{8}\right)}{\pi^2\,n^2}
\end{aligned}\tag{10.8.20}$$

また、初期値：$\frac{d}{d\,t}\,u=\mathrm{u}_t(x,0)=0\quad at\quad t=0$ として、

$$A_n=0\tag{10.8.21}$$

(10.8.20) 式と (10.8.21) 式を (10.8.16) 式に代入し、

$$\begin{aligned}
u=-\frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}&\left(32\sin\left(\frac{5\,\pi\,n}{8}\right)-64\sin\left(\frac{\pi\,n}{2}\right)\right.\\
&\left.+32\sin\left(\frac{3\,\pi\,n}{8}\right)\right)\\
&\times\cos\left(\omega_n\,t\right)\,\sin\left(\frac{\pi\,n\,x}{L}\right)
\end{aligned}\tag{10.8.22}$$

```
PL0:subst([inf=50,W1,K=2,L=1],rhs(AN5));
%pi*C*t=%pi/12;
solve(%,t)[1];
T1:rhs(%);
PL1:subst([t=0],PL0);
PL2:subst([t=T1],PL0);
PL3:subst([t=T1*2],PL0);
PL4:subst([t=T1*3],PL0);
PL5:subst([t=T1*4],PL0);
PL6:subst([t=T1*5],PL0);
PL7:subst([t=T1*6],PL0);
plot2d([PL1,PL2,PL3,PL4,PL5,PL6,PL7],
 [x,0,1],[legend,"t=0","t=L/6C","t=2L/6C",
 "t=3L/6C","t=4L/6C","t=5L/6C",
 "t=L/C"],[y,-2,2.5],[style,[lines,3,1],
 [lines,3,2],[lines,3,3],[lines,3,4],
 [lines,3,5],[lines,3,6],[lines,3,7]]);
```

```
PL1:subst([t=T1*6],PL0);
PL2:subst([t=T1*7],PL0);
PL3:subst([t=T1*8],PL0);
PL4:subst([t=T1*9],PL0);
PL5:subst([t=T1*10],PL0);
PL6:subst([t=T1*11],PL0);
PL7:subst([t=T1*12],PL0);
plot2d([PL1,PL2,PL3,PL4,PL5,PL6,PL7],
 [x,0,1],[legend,"t=L/C","t=7L/6C",
 "t=8L/6C","t=9L/6C","t=10L/6C",
 "t=11L/6C","t=2L/C"],[y,-2,2.5],[style,
 [lines,3,1],[lines,3,2],[lines,3,3],
 [lines,3,4],[lines,3,5],[lines,3,6],
 [lines,3,7]]);
```

(10.8.22) 式で、$n=1\to 50, L=1, K=2$ として、波の伝搬状態を求めると下図となる。

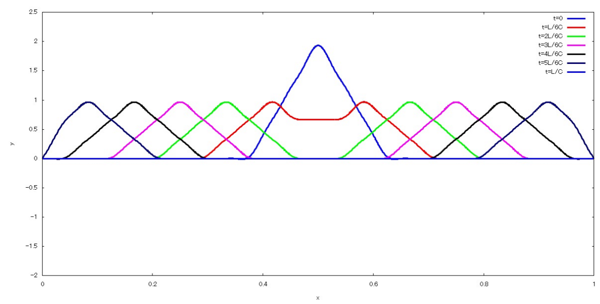


図 10.8.2: 有限境界における三角形波の伝搬状態　No.1

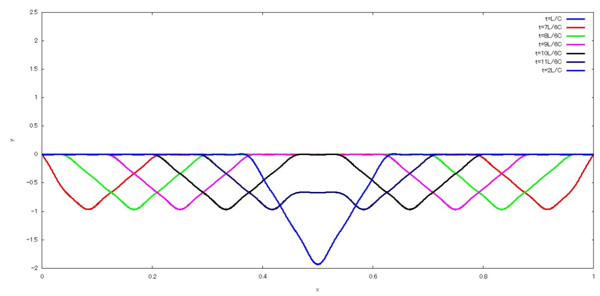


図 10.8.3: 有限境界における三角形波の伝搬状態　No.2

10.8.4 波動方程式の無限境界問題

```
expand(AN1);
u=A(k)*sin(k*x)*sin(k*t*C)+B(k)*cos(k*x)
 *sin(k*t*C)+C(k)*sin(k*x)*cos(k*t*C)
 +D(k)*cos(k*x)*cos(k*t*C);
AN6:u=1/%pi*integrate(rhs(%),k,0,inf);
UX0:u(x,0)=subst([t=0],rhs(AN6));
diff(AN6,t,1);
DUX0:diff(u(x,0),t,1)=subst([t=0],rhs(%));
D1:D(k)=integrate(u(x,0)*cos(k*x),x,
 minf,inf);
C1:C(k)=integrate(u(x,0)*sin(k*x),x,
 minf,inf);
B1:k*B(k)*C=integrate('diff(u(x,0),t,1)
 *cos(k*x),x,minf,inf);
A1:k*A(k)*C=integrate('diff(u(x,0),t,1)
 *sin(k*x),x,minf,inf);
assume(a>0);
UX0:u(x,0)=%e^(-a*x^2);
subst([UX0],D1);
D11:ev(%,integrate);
subst([UX0],C1);
C11:ev(%,integrate);
B11:B(k)=0;
A11:A(k)=0;
subst([A11,B11,C11,D11],AN6);
AN61:ev(%,integrate);
PL0:subst([a=1,C=0.5],rhs(AN61));
PL1:subst([t=0],PL0);
PL2:subst([t=1],PL0);
PL3:subst([t=2],PL0);
PL4:subst([t=5],PL0);
PL5:subst([t=10],PL0);
PL6:subst([t=20],PL0);
PL7:subst([t=30],PL0);
plot2d([PL1,PL2,PL3,PL4,PL5,PL6,PL7],
 [x,-20,20],[legend,"t=0","t=t1","t=t2",
 "t=t3","t=t4","t=t5","t=t6"],[y,0,1.2],
 [style,[lines,3,1],[lines,3,2],
 [lines,3,3],[lines,3,4],[lines,3,5],
 [lines,3,6],[lines,3,7]]);
```

一次元波動問題（弦の振動問題等）で、弦の変位 : u、時間 : t、弦の長さ方向 : x とする。この基本解は下記の (10.8.12) 式で、

$$\begin{aligned} u = &(\%c1 \sin(k\,x) + \%c2 \cos(k\,x)) \\ &\times (\%k1 \sin(k\,t\,C) + \%k2 \cos(k\,t\,C)) \end{aligned} \tag{10.8.23}$$

境界が無限遠となるので、上式を基に (6.2.4) 式、328 頁のフーリエ積分を利用し、

$$\begin{aligned} u = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} &\mathrm{A}(k)\,\sin(k\,x)\,\sin(k\,t\,C) \\ &+ \mathrm{B}(k)\,\cos(k\,x)\,\sin(k\,t\,C) \\ &+ \mathrm{C}(k)\,\sin(k\,x)\,\cos(k\,t\,C) \\ &+ \mathrm{D}(k)\,\cos(k\,x)\,\cos(k\,t\,C)\,dk \end{aligned} \tag{10.8.24}$$

上式を時間 : t で微分して、

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\,t}u = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} &- k\,\mathrm{C}(k)\,\sin(k\,x)\;C\sin(k\,t\,C) \\ &- k\,\mathrm{D}(k)\,\cos(k\,x)\;C\sin(k\,t\,C) \\ &+ k\,\mathrm{A}(k)\,\sin(k\,x)\;C\cos(k\,t\,C) \\ &+ k\,\mathrm{B}(k)\,\cos(k\,x)\;C\cos(k\,t\,C)\,dk \end{aligned} \tag{10.8.25}$$

いま、$t=0$ の初期状態では、

$$\mathrm{u}(x,0) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \mathrm{C}(k)\,\sin(k\,x) + \mathrm{D}(k)\,\cos(k\,x)\,dk \tag{10.8.26}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\,t}\mathrm{u}(x,0) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} &k\,\mathrm{A}(k)\,\sin(k\,x)\;C \\ &+ k\,\mathrm{B}(k)\,\cos(k\,x)\;Cdk \end{aligned} \tag{10.8.27}$$

ここで、$\mathrm{A}(k), \mathrm{B}(k), \mathrm{C}(k), \mathrm{D}(k)$ は (6.2.5) 式、328 頁から、

$$\begin{aligned} \mathrm{D}(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{u}(x,0)\,\cos(k\,x)\,dx \\ \mathrm{C}(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{u}(x,0)\,\sin(k\,x)\,dx \\ k\,\mathrm{B}(k)\;C &= \int_{-\infty}^{\infty} \cos(k\,x)\,\left(\frac{d}{d\,t}\mathrm{u}(x,0)\right)dx \\ k\,\mathrm{A}(k)\;C &= \int_{-\infty}^{\infty} \sin(k\,x)\,\left(\frac{d}{d\,t}\mathrm{u}(x,0)\right)dx \end{aligned} \tag{10.8.28}$$

いま、$t=0$ の初期値として、下記の形状とする。

$$\mathrm{u}(x,0) = e^{-a\,x^2} \quad a > 0$$

$$\frac{d}{d\,t}\mathrm{u}(x,0) = 0$$

上式を (10.8.28) 式に代入し、

$$\begin{aligned} \mathrm{D}(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\,x^2}\cos(k\,x)\,dx \\ &= \frac{\sqrt{\pi}\,e^{-\frac{k^2}{4\,a}}}{\sqrt{a}} \\ \mathrm{C}(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\,x^2}\sin(k\,x)\,dx = 0 \\ \mathrm{B}(k) &= 0 \\ \mathrm{A}(k) &= 0 \end{aligned} \tag{10.8.29}$$

上式を (10.8.24) 式に代入し、

$$
\begin{aligned}
u =& \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\sqrt{a}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{k^2}{4\,a}} \cos(k\,x)\, \cos(k\,t\,C)\, dk \\
=& \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\sqrt{a}} \left(\frac{\sqrt{\pi}\,\sqrt{a}\, e^{-a\,t^2\,C^2+2\,a\,t\,x\,C-a\,x^2}}{2} \right. \\
& \left. + \frac{\sqrt{\pi}\,\sqrt{a}\, e^{-a\,t^2\,C^2-2\,a\,t\,x\,C-a\,x^2}}{2} \right)
\end{aligned}
$$

上式で、$a = 1, C = 0.5$ として、波の伝搬状態を求めると下図となる。初期に中央にあった波が、左右に分かれ、同じ形状で伝搬していく様子がよく分かる。

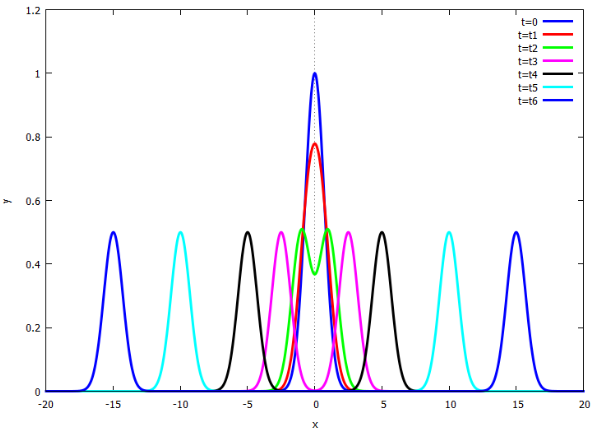


図 10.8.4: 無限境界における初期値：$e^{-a\,x^2}$ の波の伝搬状態

10.9 二次元波動方程式

10.9.1 xy 座標における二次元波動方程式：矩形膜の振動

```
kill(all);
depends(u,[x,y,t]);
depends(h,[x,y]);
depends(v,[x]);
depends(w,[y]);
depends(z,[t]);
EQ:diff(u,t,2)=C^2*(diff(u,x,2)
 +diff(u,y,2));
TR:u=h*z;
subst([TR],EQ);
ev(%,diff);
%/C^2/h/z;
EQ1:expand(%);
assume(K>0);
assume(C>0);
assume(P>0);
assume(Q>0);
EQ11:lhs(EQ1)=-K^2;
EQ12:rhs(EQ1)=-K^2;
EQ121:expand(%*h);
TR1:h=v*w;
subst([TR1],EQ121);
ev(%,diff);
EQ122:expand(%/v/w);
```

二次元波動問題で矩形膜の固有振動モードについて調べる。二次元波動方程式は次式で表現できる。ここで膜の変位：u、時間：t、膜は $x-y$ 座標面にあるとする。

$$\frac{d^2}{d\,t^2}\,u=\left(\frac{d^2}{d\,y^2}\,u+\frac{d^2}{d\,x^2}\,u\right)\,C^2 \tag{10.9.1}$$

ここで、u は x,y,t の関数であり、下記のように変数分離できるとして、h は x,y の関数、z は t の関数とする。

$$u=h\,z$$

(10.9.1) 式に上式を代入し、微分を実行すると、

$$h\,\left(\frac{d^2}{d\,t^2}\,z\right)=\left(\left(\frac{d^2}{d\,y^2}\,h\right)\,z+\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,h\right)\,z\right)\,C^2$$

上式を変形し、

$$\frac{\frac{d^2}{d\,t^2}\,z}{z\,C^2}=\frac{\frac{d^2}{d\,y^2}\,h}{h}+\frac{\frac{d^2}{d\,x^2}\,h}{h}$$

上式を $-K^2$ と置くと、

$$\frac{\frac{d^2}{d\,t^2}\,z}{z\,C^2}=-K^2 \quad C>0,K>0 \tag{10.9.2}$$

$$\frac{\frac{d^2}{d\,y^2}\,h}{h}+\frac{\frac{d^2}{d\,x^2}\,h}{h}=-K^2 \quad K>0 \tag{10.9.3}$$

上式を変形し、

$$\frac{d^2}{d\,y^2}\,h+\frac{d^2}{d\,x^2}\,h=-h\,K^2$$

上式はヘルムホルツ (Helmholtz) の方程式である。

```
EQ13:first(lhs(EQ122))=-P^2;
EQ14:last(lhs(EQ122))=-Q^2;
K1:K^2=P^2+Q^2;
AN1:ode2(EQ11,z,t);
AN3:ode2(EQ13,w,y);
AN4:ode2(EQ14,v,x);
```

ここで、h を下記のように変数分離できるとして、v は x の関数、w は y の関数とする。

$$h=v\,w$$

(10.9.3) 式に上式を代入し、微分を実行すると、

$$v\,\left(\frac{d^2}{d\,y^2}\,w\right)+\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,v\right)\,w=-v\,w\,K^2$$

上式を変形し、

$$\frac{\frac{d^2}{d\,y^2}\,w}{w}+\frac{\frac{d^2}{d\,x^2}\,v}{v}=-K^2$$

更に上式の左辺を下記と置く。

$$\frac{\frac{d^2}{d\,y^2}\,w}{w}=-P^2 \tag{10.9.4}$$

$$\frac{\frac{d^2}{d\,x^2}\,v}{v}=-Q^2 \tag{10.9.5}$$

ここで、

$$K^2=Q^2+P^2 \tag{10.9.6}$$

(10.9.2) 式を ode2 関数で解くと、

$$z=\%k1\sin\left(t\,C\,K\right)+\%k2\cos\left(t\,C\,K\right) \tag{10.9.7}$$

(10.9.4) 式を ode2 関数で解くと、

$$w=\%k1\sin\left(y\,P\right)+\%k2\cos\left(y\,P\right) \tag{10.9.8}$$

(10.9.5) 式を ode2 関数で解くと、

$$v=\%k1\sin\left(x\,Q\right)+\%k2\cos\left(x\,Q\right) \tag{10.9.9}$$

x 軸方向の波数ベクトル：$\overrightarrow{Q}$、y 軸方向の波数ベクトル：$\overrightarrow{P}$ と x 軸方向の波長：λ_x、y 軸方向の波長：λ_y の関係式は、

$$Q=\frac{2\,\pi}{\lambda_x},\quad P=\frac{2\,\pi}{\lambda_y}$$

x 軸方向の波と y 軸方向の波の合成波数ベクトルは (10.9.6) 式から $\overrightarrow{K}$ となり、合成波数の波長：λ は、

$$K = \frac{2\pi}{\lambda}$$

下図に示す $\overrightarrow{Q}$ と $\overrightarrow{K}$ の角度を θ とすると、下記の関係が成り立つ。

$$\cos(\theta) = \frac{Q}{K} = \frac{\lambda}{\lambda_x}, \quad \sin(\theta) = \frac{P}{K} = \frac{\lambda}{\lambda_y}$$

上記から、波長の関係は、

$$\frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{{\lambda_x}^2} + \frac{1}{{\lambda_y}^2}$$

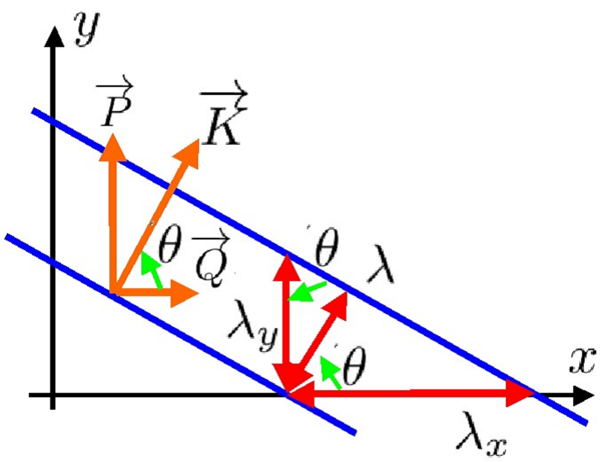


図 10.9.1: 波数ベクトル

```
subst([x=0],rhs(AN4))=0;
subst([x=A],rhs(AN4))=0;
A*Q=m*%pi;
Q1:solve(%,Q)[1];
AN41:subst([%,%k2=0],AN4);
subst([y=B],rhs(AN3))=0;
B*P=n*%pi;
P1:solve(%,P)[1];
AN31:subst([%,%k2=0],AN3);
subst([P1,Q1],K1);
solve(%,K)[2];
K2:subst([K=K[m,n]],%);
subst([TR1,AN41,AN31,AN1,K=K[m,n]],TR);
AN5:subst([%k1^2=1],%);
subst([%k1=B[m,n],%k2=A[m,n]],%);
AN6:lhs(AN5)=sum(sum(rhs(%),m,1,inf),n,
 1,inf);
AN61:u(x,y,0)=subst([t=0],rhs(AN6));
AN62:u[t](x,y,0)=subst([t=0],diff(rhs(AN6)
 ,t,1));
```

(10.9.9) 式の x 軸方向の境界条件：$x = 0, x = A$ で $u = 0$ とすると、

$$\%k2 = 0, \quad Q = \frac{\pi m}{A}$$

から、

$$v = \%k1 \sin\left(\frac{\pi m x}{A}\right) \quad m：整数 \tag{10.9.10}$$

(10.9.8) 式の y 軸方向の境界条件：$y = 0, y = B$ で $u = 0$ とすると、

$$\%k2 = 0, \quad P = \frac{\pi n}{B}$$

から、

$$w = \%k1 \sin\left(\frac{\pi n y}{B}\right) \quad n：整数 \tag{10.9.11}$$

また、(10.9.6) 式から、

$$K^2 = \frac{\pi^2 n^2}{B^2} + \frac{\pi^2 m^2}{A^2}$$

上式から、

$$K_{m,n} = \frac{\pi \sqrt{m^2 B^2 + n^2 A^2}}{A B} \tag{10.9.12}$$

(10.9.7) 式、(10.9.10) 式、(10.9.11) 式、(10.9.12) 式から、(10.9.1) 式の解：u は、

$$\begin{aligned} u =& \sin\left(\frac{\pi m x}{A}\right) \sin\left(\frac{\pi n y}{B}\right) \\ &\times \left(\%k1 \sin\left(\frac{\pi t \sqrt{m^2 B^2 + n^2 A^2}\, C}{A B}\right)\right. \\ &\left. + \%k2 \cos\left(\frac{\pi t \sqrt{m^2 B^2 + n^2 A^2}\, C}{A B}\right)\right) \end{aligned}$$

(10.9.12) 式を上式に代入し、$\%k1 \to B_{m,n}$, $\%k2 \to A_{m,n}$ に置き換えて、

$$\begin{aligned} u =& \sin\left(\frac{\pi m x}{A}\right) \sin\left(\frac{\pi n y}{B}\right) \\ &\times \left(B_{m,n} \sin(K_{m,n}\, t\, C) + A_{m,n} \cos(K_{m,n}\, t\, C)\right) \end{aligned}$$

上式を級数の形にすると、

$$\begin{aligned} u =& \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi n y}{B}\right) \sum_{m=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi m x}{A}\right) \\ &\times \left(B_{m,n} \sin(K_{m,n}\, t\, C) + A_{m,n} \cos(K_{m,n}\, t\, C)\right) \end{aligned} \tag{10.9.13}$$

初期条件：$t=0$ で $u=\mathrm{u}(x,y,0)$、$\frac{d}{d\,t}\,u=u_t\,(x,y,0)$ とすると、

$$\mathrm{u}\,(x,y,0)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty}A_{m,n}\sin\left(\frac{\pi\,m\,x}{A}\right)\right)\,\sin\left(\frac{\pi\,n\,y}{B}\right) \tag{10.9.14}$$

$$u_t\,(x,y,0)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty}B_{m,n}\,K_{m,n}\sin\left(\frac{\pi\,m\,x}{A}\right)\right)\times\,\sin\left(\frac{\pi\,n\,y}{B}\right)\right)C \tag{10.9.15}$$

```
declare([i,j,m,n],integer);
assume(A>0);
assume(B>0);
'integrate(u(x,y,0)*sin(%pi*i*x/A),x,0,A)
 =sum((sum('integrate(A[m,n]*
 sin((%pi*m*x)/A)*sin(%pi*i*x/A),x,0,A)
 ,m,1,inf))*sin((%pi*n*y)/B),n,1,inf);
```

```
lhs(%)=sum((sum('integrate(A[m,n]*sin((
 %pi*m*x)/A)*sin(%pi*i*x/A),x,0,A),m,i,i))
 *sin((%pi*n*y)/B),n,1,inf);
lhs(%)=ev(rhs(%),integrate);
'integrate('integrate(u(x,y,0)*sin((
 %pi*i*x)/A)*sin(%pi*j*y/B),x,0,A),y,0,B)
 =(A*sum('integrate(A[i,n]*sin((%pi*n*y)
 /B)*sin(%pi*j*y/B),y,0,B),n,1,inf))/2;
lhs(%)=(A*sum(A[i,n]*integrate(sin((
 %pi*j*y)/B)*sin((%pi*n*y)/B),y,0,B)
 ,n,j,j))/2;
solve(%,A[i,j])[1];
subst([i=m,j=n],%);
BMN1:B[m,n]=4/A/B/K[m,n]/C*'integrate(
 'integrate(u[t](x,y,0)*sin((%pi*m*x)/A)
 *sin((%pi*n*y)/B),x,0,A),y,0,B);
```

(10.9.14) 式に $\sin\left(\frac{\pi\,i\,x}{A}\right)$ を掛け、積分すると、$i=m$ の項のみが残り、下記となる。

$$\begin{aligned}\int_0^A \mathrm{u}\,(x,y,0)\,\sin\left(\frac{\pi\,i\,x}{A}\right)dx &=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty}A_{m,n}\int_0^A\sin\left(\frac{\pi\,i\,x}{A}\right)\,\sin\left(\frac{\pi\,m\,x}{A}\right)dx\right)\,\sin\left(\frac{\pi\,n\,y}{B}\right)\\ &=\int_0^A\sin\left(\frac{\pi\,i\,x}{A}\right)^2dx\,\sum_{n=1}^{\infty}A_{i,n}\sin\left(\frac{\pi\,n\,y}{B}\right)=\frac{A}{2}\sum_{n=1}^{\infty}A_{i,n}\sin\left(\frac{\pi\,n\,y}{B}\right)\end{aligned}$$

上式に $\sin\left(\frac{\pi\,j\,y}{B}\right)$ を掛け、積分すると、$j=n$ の項のみが残り、下記となる。

$$\begin{aligned}\int_0^B\int_0^A \mathrm{u}\,(x,y,0)\,\sin\left(\frac{\pi\,i\,x}{A}\right)dx\sin\left(\frac{\pi\,j\,y}{B}\right)dy &=\frac{A}{2}\sum_{n=1}^{\infty}A_{i,n}\int_0^B\sin\left(\frac{\pi\,j\,y}{B}\right)\,\sin\left(\frac{\pi\,n\,y}{B}\right)dy\\ &=\frac{A_{i,j}\,A\,B}{4}\end{aligned}$$

上式から $A_{i,j}$ を求めると、

$$A_{i,j}=\frac{4}{A\,B}\int_0^B\int_0^A \mathrm{u}\,(x,y,0)\,\sin\left(\frac{\pi\,i\,x}{A}\right)dx\sin\left(\frac{\pi\,j\,y}{B}\right)dy$$

$i\to m,\ j\to n$ に置き換えて、

$$A_{m,n}=\frac{4}{A\,B}\int_0^B\int_0^A \mathrm{u}\,(x,y,0)\,\sin\left(\frac{\pi\,m\,x}{A}\right)dx\sin\left(\frac{\pi\,n\,y}{B}\right)dy$$

(10.9.14) 式の $u_t\,(x,y,0)$ についても上記と同様の処理を行って、下記を得る。

$$B_{m,n}=\frac{4}{K_{m,n}\,A\,B\,C}\int_0^B\int_0^A u_t\,(x,y,0)\,\sin\left(\frac{\pi\,m\,x}{A}\right)dx\sin\left(\frac{\pi\,n\,y}{B}\right)dy$$

(10.9.13) 式に上記の $A_{m,n},B_{m,n}$ を代入して、解が得られる。

(10.9.13) 式から、固有振動モードは次式で表現できる。

$$\sin\left(\frac{\pi\, m\, x}{A}\right)\sin\left(\frac{\pi\, n\, y}{B}\right)$$

以下に固有振動モードの例を示す。

```
PL0:sin((%pi*m*x)/A)*sin((%pi*n*y)/B);
PL1:subst([A=1,B=1,m=1,n=1],PL0);
plot3d(PL1,[x,0,1],[y,0,1]);
PL1:subst([A=1,B=1,m=1,n=2],PL0);
plot3d(PL1,[x,0,1],[y,0,1]);
PL1:subst([A=1,B=1,m=2,n=2],PL0);
plot3d(PL1,[x,0,1],[y,0,1]);
```

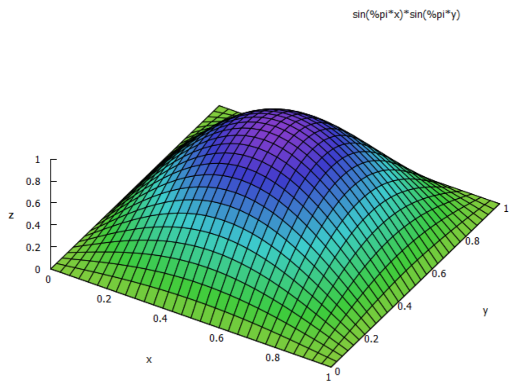


図 10.9.2: 矩形膜の固有振動モード　$m = 1, n = 1$

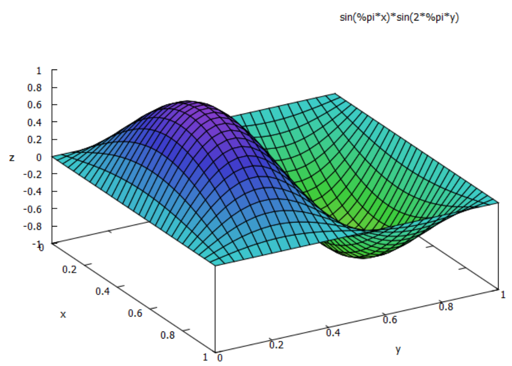


図 10.9.3: 矩形膜の固有振動モード　$m = 1, n = 2$

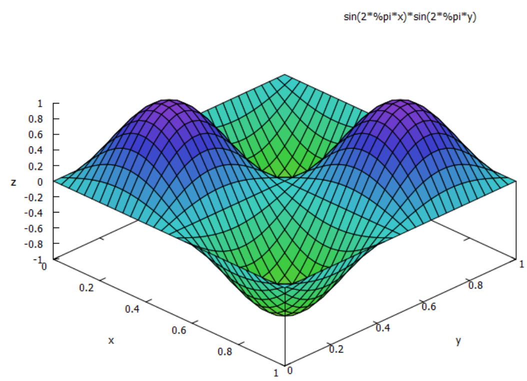


図 10.9.4: 矩形膜の固有振動モード　$m = 2, n = 2$

10.9.2 極座標における二次元波動方程式：円形膜の振動

```
kill(all);
load("vect");
depends(u,[r,\theta,t]);
depends([r,\theta],[x,y]);
depends(h,[r,\theta]);
depends(v,[r]);
depends(w,[\theta]);
depends(z,[t]);
declare([m,n,i,j],integer);
diff(u,t,2)=C^2*('diff(u,x,2)
 +'diff(u,y,2));
X1:x=r*cos(\theta);
Y1:y=r*sin(\theta);
'diff(u,t,2)=C^2*('diff(u,theta,2)/r^2
 +'diff(u,r,2)+'diff(u,r,1)/r);
EQ1:expand(%/C^2);
TR:u=h*z;
subst([TR],EQ1);
ev(%,diff);
%/z/h;
EQ2:expand(%);
assume(K>0);
assume(C>0);
assume(P>0);
assume(R>0);
EQ21:lhs(EQ2)=-K^2;
EQ22:rhs(EQ2)=-K^2;
expand(%*h+K^2*h);
```

二次元波動問題で円形膜の固有振動モードについて調べる。二次元波動方程式は (10.9.1) 式で表現でき、これを図 4.5.1、164 頁に示す円柱座標：$r-\theta$ 表記すると、(4.5.15) 式、168 頁から次式となる。ここで膜の変位：u、時間：t、膜は $r-\theta$ 座標面にあるとする。

$$\frac{d^2}{d\,t^2}\,u=\left(\frac{\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,u}{r^2}+\frac{d^2}{d\,r^2}\,u+\frac{\frac{d}{d\,r}\,u}{r}\right)C^2 \tag{10.9.16}$$

ここで、u は r,θ,t の関数であり、下記のように変数分離できるとして、h は r,θ の関数、z は t の関数とする。

$$u=h\,z$$

(10.9.16) 式に上式を代入し、微分を実行し、整理すると、

$$\frac{\frac{d^2}{d\,t^2}\,z}{z\,C^2}=\frac{\frac{d}{d\,r}\,h}{h\,r}+\frac{\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,h}{h\,r^2}+\frac{\frac{d^2}{d\,r^2}\,h}{h}$$

上式を $-K^2$ と置くと、

$$\frac{\frac{d^2}{d\,t^2}\,z}{z\,C^2}=-K^2\quad C>0,K>0 \tag{10.9.17}$$

$$\frac{\frac{d}{d\,r}\,h}{h\,r}+\frac{\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,h}{h\,r^2}+\frac{\frac{d^2}{d\,r^2}\,h}{h}=-K^2\quad K>0 \tag{10.9.18}$$

上式を変形し、

$$h\,K^2+\frac{\frac{d}{d\,r}\,h}{r}+\frac{\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,h}{r^2}+\frac{d^2}{d\,r^2}\,h=0$$

上式はヘルムホルツ (Helmholtz) の方程式の円柱座標表記である。

```
TR1:h=v*w;
subst([TR1],EQ22);
ev(%,diff);
EQ23:expand(%*r^2);
assume(n>0);
EQ24:first(lhs(EQ23))=-n^2;
subst([EQ24],EQ23);
expand(%*v/r^2);
EQ25:%-rhs(%);
AN1:ode2(EQ21,z,t);
AN2:ode2(EQ24,w,\theta);
BEEQ4:v*(x^(2*C-2)*B^2*C^2+(A^2-N^2*C^2)
 /x^2)+'diff(v,x,1)*(1-2*A)/x
 +'diff(v,x,2)=0;
EQ25;
BEA1:1-2*A=1;
BEA2:A^2-N^2*C^2=-n^2;
BEA3:B^2*C^2=K^2;
BEA4:2*C-2=0;
solve([BEA1,BEA2,BEA3,BEA4],[A,B,C,N]);
BEA5:%[3];
v=%k1*bessel_j(n,x^C*B)*x^A+%k2*bessel_
 y(n,x^C*B)*x^A;
subst([BEA5],%);
AN3:subst([%k1=1,%k2=0,x=r],%);
AN21:subst([%k1=%c1,%k2=%c2],AN2);
subst([TR1],TR);
AN4:subst([AN1,AN21,AN3],%);
```

ここで、h を下記のように変数分離できるとして、v は r の関数、w は θ の関数とする。

$$h=v\,w$$

(10.9.18) 式に上式を代入し、微分を実行し、整理すると、

$$\frac{\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,w}{r^2\,w}+\frac{\frac{d^2}{d\,r^2}\,v}{v}+\frac{\frac{d}{d\,r}\,v}{r\,v}=-K^2$$

上式を変形し、

$$\frac{\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,w}{w}+\frac{r^2\left(\frac{d^2}{d\,r^2}\,v\right)}{v}+\frac{r\left(\frac{d}{d\,r}\,v\right)}{v}=-r^2\,K^2$$

更に上式の一部を下記と置く。

$$\frac{\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,w}{w}=-n^2 \tag{10.9.19}$$

$$\frac{r^2\left(\frac{d^2}{d\,r^2}\,v\right)}{v}+\frac{r\,\left(\frac{d}{d\,r}\,v\right)}{v}-n^2=-r^2\,K^2 \qquad (10.9.20)$$

上式を整理し、

$$v\,K^2+\frac{d^2}{d\,r^2}\,v+\frac{\frac{d}{d\,r}\,v}{r}-\frac{n^2\,v}{r^2}=0 \qquad (10.9.21)$$

(10.9.17) 式を ode2 関数で解くと、

$$z=\%k1\sin\left(t\,C\,K\right)+\%k2\cos\left(t\,C\,K\right) \qquad (10.9.22)$$

(10.9.19) 式を ode2 関数で解くと、

$$w=\%c1\sin\left(n\,\theta\right)+\%c2\cos\left(n\,\theta\right) \qquad (10.9.23)$$

上式で $\theta=0$ と $\theta=2\,\pi$ で繋がらないといけないので、n は整数となる。(10.9.21) 式は Bessel の微分方程式である。Bessel の微分方程式の一般型は (3.3.16) 式、45 頁から次式となる。

$$v\,\left(\frac{A^2-N^2\,C^2}{x^2}+x^{2\,C-2}\,B^2\,C^2\right)+\frac{\left(\frac{d}{d\,x}\,v\right)\,\left(1-2\,A\right)}{x}+\frac{d^2}{d\,x^2}\,v=0$$

Bessel の微分方程式の一般型の解は N が整数の時、(3.3.18) 式から次式となる。

$$v=\%k2\,\mathrm{bessel\_y}\left(N,x^C\,B\right)\,x^A+\%k1\,\mathrm{bessel\_j}\left(N,x^C\,B\right)\,x^A$$

(10.9.21) 式と一般型の係数の関係は、

$$1-2\,A=1,\quad A^2-N^2\,C^2=-n^2$$

$$B^2\,C^2=K^2,\quad 2\,C-2=0$$

上式を解くと、

$$[A=0,B=K,C=1,N=n]$$

上式から v の解は、

$$v=\%k2\,\mathrm{bessel\_y}\left(n,x\,K\right)+\%k1\,\mathrm{bessel\_j}\left(n,x\,K\right)$$

また $r=0$ で有解であるためには $\%k2=0$ でなければならないから、

$$v=\mathrm{bessel\_j}\left(n,r\,K\right)$$

(10.9.22) 式、(10.9.23) 式と上式から、u の基本解は、

$$u=\mathrm{bessel\_j}\left(n,r\,K\right)\,\left(\%c1\sin\left(n\,\theta\right)+\%c2\cos\left(n\,\theta\right)\right)\times\left(\%k1\sin\left(t\,C\,K\right)+\%k2\cos\left(t\,C\,K\right)\right) \qquad (10.9.24)$$

```
\alpha[m,n]=R*K;
K1:solve(%,K)[1];
K2:K1*r;
AN5:subst([K2],AN4);
AN51:subst([%c1=B[m,n],%c2=A[m,n],K1],%);
AN6:lhs(AN5)=sum(sum(rhs(%),n,0,inf),m,1,
 inf);
diff(AN6,t,1);
subst([t=0],rhs(%))=0;
AN52:subst([%k2=1,%k1=0],AN6);
AN521:subst([%k2=1,%k1=0],AN51);
AN53:u(r,\theta,0)=subst([t=0],rhs(AN52));
AN531:subst([t=0],rhs(AN521));
'integrate(lhs(AN53)*cos(j*\theta),\theta,
 0,2*%pi)='integrate(rhs(AN53)*
 cos(j*\theta),\theta,0,2*%pi);
'integrate(lhs(AN53)*cos(j*\theta),\theta,
 0,2*%pi)=sum(sum('integrate(AN531*
 cos(j*\theta),\theta,0,2*%pi),n,0,inf),m,
 1,inf);
'integrate(lhs(AN53)*cos(j*\theta),\theta,
 0,2*%pi)=sum(sum('integrate(AN531*
 cos(j*\theta),\theta,0,2*%pi),n,j,j),m,
 1,inf);
expand(%);
ev(%,integrate);
AN541:lhs(%)=rhs(%)*C[j];
'integrate(lhs(AN541)*r*bessel_j(j,(
 alpha[i,j]*r)/R),r,0,R)='integrate(
 rhs(AN541)*r*bessel_j(j,(alpha[i,j]*r/R)),
 r,0,R);
subst([1=i,inf=i],%);
ev(%,sum);
lhs(%)=%pi*A[i,j]*C[j]*R^2*bessel_j(j+1,
 alpha[i,j])/2;
solve(%,A[i,j])[1];
AN551:subst([j=n,i=m,r=s,\theta=\phi],%);
AN552:subst([cos(n*theta)=sin(n*theta),
 A=B],%);
subst([AN551,AN552],AN52);
factor(%);
u=(2*sum(sum((bessel_j(n,(alpha[m,n]*r)/R)
 *(integrate(bessel_j(n,(alpha[m,n]*s)/R)*s
 *integrate(cos(n*\theta-n*\phi)
 *u(s,phi,0),phi,0,2*%pi),s,0,R))
 *cos((alpha[m,n]*t*C)/R))/(C[n]*
 bessel_j(n+1,alpha[m,n])),n,0,inf),
 m,1,inf))/(%pi*R^2);
```

円膜の境界を $r=R$ とすると、$\mathrm{bessel\_j}\left(n, R\,K\right)=0$ が成り立つ m 番目の根：$\alpha_{m,n}$ を導入する。

$$\alpha_{m,n}=K\,R, \quad K=\frac{\alpha_{m,n}}{R}$$

上記の関係を基本解：(10.9.24) 式に代入し、$\%c1 \to B_{m,n}, \quad \%c2 \to A_{m,n}$ に置き換えて、級数の形にすると解は、

$$\begin{aligned} u=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{bessel\_j}\left(n,\frac{\alpha_{m,n}\,r}{R}\right)\,\left(B_{m,n}\sin\left(n\,\theta\right)+A_{m,n}\cos\left(n\,\theta\right)\right)\\ \times\left(\%k1\sin\left(\frac{\alpha_{m,n}\,t\,C}{R}\right)+\%k2\cos\left(\frac{\alpha_{m,n}\,t\,C}{R}\right)\right) \end{aligned} \tag{10.9.25}$$

上式を時間：t で微分すると、

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\,t}\,u=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{bessel\_j}\left(n,\frac{\alpha_{m,n}\,r}{R}\right)\,\left(B_{m,n}\sin\left(n\,\theta\right)+A_{m,n}\cos\left(n\,\theta\right)\right)\\ \times\left(\frac{\%k1\,\alpha_{m,n}\,C\cos\left(\frac{\alpha_{m,n}\,t\,C}{R}\right)}{R}-\frac{\%k2\,\alpha_{m,n}\,C\sin\left(\frac{\alpha_{m,n}\,t\,C}{R}\right)}{R}\right) \end{aligned}$$

いま、初期状態：$t=0$ で $\frac{d}{d\,t}\,u=u_t\left(x,y,0\right)=0$ とすると、$\%k1=0,\%k2=1$ となり、(10.9.25) 式は、

$$u=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{bessel\_j}\left(n,\frac{\alpha_{m,n}\,r}{R}\right)\,\left(B_{m,n}\sin\left(n\,\theta\right)+A_{m,n}\cos\left(n\,\theta\right)\right)\,\cos\left(\frac{\alpha_{m,n}\,t\,C}{R}\right) \tag{10.9.26}$$

上式で初期状態：$t=0$ で

$$\mathrm{u}\left(r,\theta,0\right)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{bessel\_j}\left(n,\frac{\alpha_{m,n}\,r}{R}\right)\,\left(B_{m,n}\sin\left(n\,\theta\right)+A_{m,n}\cos\left(n\,\theta\right)\right) \tag{10.9.27}$$

(10.9.27) 式の両辺に $\cos\left(j\,\theta\right)$ を掛けて積分し、フーリエ級数の関係式：(6.1.6) 式、(6.1.7) 式、(6.1.8) 式から、$n=j$ の項のみが残り、

$$\begin{aligned} \int_0^{2\,\pi}\mathrm{u}\left(r,\theta,0\right)\,\cos\left(j\,\theta\right)d\theta&=\int_0^{2\,\pi}\cos\left(j\,\theta\right)\,\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{bessel\_j}\left(n,\frac{\alpha_{m,n}\,r}{R}\right)\,\left(B_{m,n}\sin\left(n\,\theta\right)+A_{m,n}\cos\left(n\,\theta\right)\right)d\theta\\ &=\sum_{m=1}^{\infty}\mathrm{bessel\_j}\left(j,\frac{\alpha_{m,j}\,r}{R}\right)\,\int_0^{2\,\pi}B_{m,j}\cos\left(j\,\theta\right)\,\sin\left(j\,\theta\right)+A_{m,j}\cos\left(j\,\theta\right)^2d\theta\\ &=\pi\,C_j\,\sum_{m=1}^{\infty}\mathrm{bessel\_j}\left(j,\frac{\alpha_{m,j}\,r}{R}\right)\,A_{m,j}\quad \text{ここで、}C_j=2\,(j=0),\,C_j=1\,(j>0) \end{aligned}$$

上式の両辺に $\mathrm{bessel\_j}\left(j,\frac{\alpha_{i,j}\,r}{R}\right)\,r$ を掛けて積分し、フーリエ・ベッセル展開の (7.1.11) 式から $m=i$ の項のみが残り、(7.1.18) 式から、

$$\begin{aligned} &\int_0^{R}\mathrm{bessel\_j}\left(j,\frac{\alpha_{i,j}\,r}{R}\right)\,r\,\int_0^{2\,\pi}\mathrm{u}\left(r,\theta,0\right)\,\cos\left(j\,\theta\right)d\theta dr\\ &=\pi\,C_j\,\int_0^{R}\mathrm{bessel\_j}\left(j,\frac{\alpha_{i,j}\,r}{R}\right)\,\left(\sum_{m=1}^{\infty}\mathrm{bessel\_j}\left(j,\frac{\alpha_{m,j}\,r}{R}\right)\,A_{m,j}\right)\,rdr\\ &=\pi\,A_{i,j}\,C_j\,\int_0^{R}\mathrm{bessel\_j}\left(j,\frac{\alpha_{i,j}\,r}{R}\right)^2\,rdr\\ &=\frac{\pi\,A_{i,j}\,C_j\,\mathrm{bessel\_j}\left(j+1,\alpha_{i,j}\right)\,R^2}{2} \end{aligned}$$

上式から、$A_{i,j}$ を求めて $i \to m, j \to n$ に置き換え、

$$A_{m,n} = \frac{2}{\pi\, C_n\, \mathrm{bessel\_j}\left(n+1, \alpha_{m,n}\right)\, R^2} \int_0^R \mathrm{bessel\_j}\left(n, \frac{\alpha_{m,n}\, s}{R}\right)\, s \int_0^{2\,\pi} \cos\left(n\,\phi\right)\, \mathrm{u}\left(s, \phi, 0\right) d\phi ds \tag{10.9.28}$$

(10.9.27) 式の両辺に $\sin\left(j\,\theta\right)$ を掛けて、同様に、

$$B_{m,n} = \frac{2}{\pi\, C_n\, \mathrm{bessel\_j}\left(n+1, \alpha_{m,n}\right)\, R^2} \int_0^R \mathrm{bessel\_j}\left(n, \frac{\alpha_{m,n}\, s}{R}\right)\, s \int_0^{2\,\pi} \sin\left(n\,\phi\right)\, \mathrm{u}\left(s, \phi, 0\right) d\phi ds \tag{10.9.29}$$

(10.9.25) 式に (10.9.28) 式、(10.9.29) 式を代入し、

$$\begin{aligned} u = \frac{2}{\pi\, R^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} & \frac{\mathrm{bessel\_j}\left(n, \frac{\alpha_{m,n}\, r}{R}\right)}{C_n\, \mathrm{bessel\_j}\left(n+1, \alpha_{m,n}\right)} \\ & \times \left(\int_0^R \mathrm{bessel\_j}\left(n, \frac{\alpha_{m,n}\, s}{R}\right)\, s \int_0^{2\,\pi} \sin\left(n\,\phi\right)\, \mathrm{u}\left(s, \phi, 0\right) d\phi ds \sin\left(n\,\theta\right) \right. \\ & \quad \left. + \int_0^R \mathrm{bessel\_j}\left(n, \frac{\alpha_{m,n}\, s}{R}\right)\, s \int_0^{2\,\pi} \cos\left(n\,\phi\right)\, \mathrm{u}\left(s, \phi, 0\right) d\phi ds \cos\left(n\,\theta\right) \right) \cos\left(\frac{\alpha_{m,n}\, t\, C}{R}\right) \end{aligned}$$

整理すると解は、

$$\begin{aligned} u = \frac{2}{\pi\, R^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} & \frac{\mathrm{bessel\_j}\left(n, \frac{\alpha_{m,n}\, r}{R}\right)}{C_n\, \mathrm{bessel\_j}\left(n+1, \alpha_{m,n}\right)} \\ & \times \int_0^R \mathrm{bessel\_j}\left(n, \frac{\alpha_{m,n}\, s}{R}\right)\, s \int_0^{2\,\pi} \mathrm{u}\left(s, \phi, 0\right)\, \cos\left(n\,\theta - n\,\phi\right) d\phi ds \cos\left(\frac{\alpha_{m,n}\, t\, C}{R}\right) \\ & \text{ここで、} C_n = 2\left(n=0\right),\ C_n = 1\left(n>0\right) \end{aligned} \tag{10.9.30}$$

```
subst([B[m,n]=0,A[m,n]=1,n=0],AN51);
subst([%k1=B[m],%k2=A[m]],rhs(%));
AN7:u=sum(%,m,1,inf);
DAN7:diff(AN7,t,1);
AN71:u(r,0)=subst([t=0],rhs(AN7));
AM1:A[m]=2/bessel_j(1,\alpha[m,0])^2/R^2*
 integrate(bessel_j(0,(alpha[m,0]*s)/R)*s*u(s,0),s,0,R);
AN72:u[t](r,0)=subst([t=0],rhs(DAN7));
B[m]*alpha[m,0]*C/R=2/bessel_j(1,\alpha[m,0])^2/R^2
 *integrate(bessel_j(0,(alpha[m,0]*s)/R)*s*u[t](s,0),s,0,R);
BM1:solve(%,B[m])[1];
subst([AM1,BM1],AN7);
```

軸対称の場合には、(10.9.25) 式で $n=0$ として、

$$u=\sum_{m=1}^{\infty}\mathrm{bessel\_j}\left(0,\frac{\alpha_{m,0}\,r}{R}\right)\left(B_m\sin\left(\frac{\alpha_{m,0}\,t\,C}{R}\right)+A_m\cos\left(\frac{\alpha_{m,0}\,t\,C}{R}\right)\right)\tag{10.9.31}$$

上式を時間：t で微分すると、

$$\frac{d}{d\,t}\,u=\sum_{m=1}^{\infty}\mathrm{bessel\_j}\left(0,\frac{\alpha_{m,0}\,r}{R}\right)\left(\frac{B_m\,\alpha_{m,0}\,C\cos\left(\frac{\alpha_{m,0}\,t\,C}{R}\right)}{R}-\frac{A_m\,\alpha_{m,0}\,C\sin\left(\frac{\alpha_{m,0}\,t\,C}{R}\right)}{R}\right)\tag{10.9.32}$$

初期条件：$t=0$ で、(10.9.31) 式では、

$$\mathrm{u}\left(r,0\right)=\sum_{m=1}^{\infty}\mathrm{bessel\_j}\left(0,\frac{\alpha_{m,0}\,r}{R}\right)\,A_m$$

上式はフーリエ・ベッセル展開であるから、係数：A_m は、

$$A_m=\frac{2}{\mathrm{bessel\_j}\left(1,\alpha_{m,0}\right)^2\,R^2}\int_0^R\mathrm{bessel\_j}\left(0,\frac{\alpha_{m,0}\,s}{R}\right)\,s\,\mathrm{u}\left(s,0\right)ds\tag{10.9.33}$$

初期条件：$t=0$ で、(10.9.32) 式では、

$$\frac{d}{d\,t}\,u\left(r,0\right)=u_t\left(r,0\right)=\frac{1}{R}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\mathrm{bessel\_j}\left(0,\frac{\alpha_{m,0}\,r}{R}\right)\,B_m\,\alpha_{m,0}\right)\,C$$

上式はフーリエ・ベッセル展開であるから、係数：B_m は、

$$\frac{B_m\,\alpha_{m,0}\,C}{R}=\frac{2}{\mathrm{bessel\_j}\left(1,\alpha_{m,0}\right)^2\,R^2}\int_0^R\mathrm{bessel\_j}\left(0,\frac{\alpha_{m,0}\,s}{R}\right)\,s\,u_t\left(s,0\right)ds$$

上式から、

$$B_m=\frac{2}{\mathrm{bessel\_j}\left(1,\alpha_{m,0}\right)^2\,\alpha_{m,0}\,C\,R}\int_0^R\mathrm{bessel\_j}\left(0,\frac{\alpha_{m,0}\,s}{R}\right)\,s\,u_t\left(s,0\right)ds\tag{10.9.34}$$

(10.9.31) 式に (10.9.33) 式、(10.9.34) 式を代入すると、軸対称の解は、

$$\begin{aligned}u=\sum_{m=1}^{\infty}\mathrm{bessel\_j}\left(0,\frac{\alpha_{m,0}\,r}{R}\right)\Bigg(&\frac{2}{\mathrm{bessel\_j}\left(1,\alpha_{m,0}\right)^2\,\alpha_{m,0}\,C\,R}\int_0^R\mathrm{bessel\_j}\left(0,\frac{\alpha_{m,0}\,s}{R}\right)\,s\,u_t\left(s,0\right)ds\sin\left(\frac{\alpha_{m,0}\,t\,C}{R}\right)\\&+\frac{2}{\mathrm{bessel\_j}\left(1,\alpha_{m,0}\right)^2\,R^2}\int_0^R\mathrm{bessel\_j}\left(0,\frac{\alpha_{m,0}\,s}{R}\right)\,s\,\mathrm{u}\left(s,0\right)ds\cos\left(\frac{\alpha_{m,0}\,t\,C}{R}\right)\Bigg)\end{aligned}\tag{10.9.35}$$

```
PL0:subst([%c1=0,%c2=1,t=0,%k2=1],rhs(AN4));
PL13:subst([n=0,r=1],rhs(AN3));
plot2d(PL13,[K,0,10]);
K1:find_root(PL13,2,3);
K2:find_root(PL13,5,6);
K3:find_root(PL13,8,9);
```

(10.9.24) 式から、振幅関数は次式となる。

$$\mathrm{bessel\_j}\,(n, r\,K)\,\cos\,(n\,\theta)$$

ここで半径 : $R=1$ を円膜の端とすると、下記の条件を満足せねばならない。

$$\mathrm{bessel\_j}\,(n, K) = 0$$

上記を満足する K は $\mathrm{bessel\_j}\,(n, K)$ を予め図で求めておき、その横軸との交点から得られる。ここでは $find\_root$ 関数を使用して K を求めた。

$n=0$ の場合、

$$K_0 = 2.404825557695773, \quad K_1 = 5.520078110286311$$

$$K_2 = 8.653727912911013$$

$n=1$ の場合、

$$K_1 = 3.831705970207513, \quad K_2 = 7.015586669815619$$

$n=3$ の場合、

$$K_1 = 5.135622301840683, \quad K_2 = 8.417244140399864$$

上記を使用して、振幅関数を求めると下図となる。

```
PL1:subst([n=0,K=K1],PL0);
plot3d (PL1, [r, 0, 1], [\theta, 0, 2*%pi],
  [grid, 20,50], [transform_xy,
   polar_to_xy]);
PL1:subst([n=0,K=K2],PL0);
plot3d (PL1, [r, 0, 1], [\theta, 0, 2*%pi],
 [grid, 20,50], [transform_xy,
 polar_to_xy]);
PL1:subst([n=0,K=K3],PL0);
plot3d (PL1, [r, 0, 1], [\theta, 0, 2*%pi],
  [grid, 20,50], [transform_xy,
  polar_to_xy]);
```

```
PL13:subst([n=1,r=1],rhs(AN3));
plot2d(PL13,[K,0,10]);
K1:find_root(PL13,3,4);
K2:find_root(PL13,6,8);
PL1:subst([n=1,K=K1],PL0);
plot3d (PL1, [r, 0, 1], [\theta, 0, 2*%pi]
 , [grid, 20,50], [transform_xy,
 polar_to_xy]);
PL1:subst([n=1,K=K2],PL0);
plot3d (PL1, [r, 0, 1], [\theta, 0, 2*%pi]
 , [grid, 20,50], [transform_xy,
 polar_to_xy]);
```

```
PL13:subst([n=2,r=1],rhs(AN3));
plot2d(PL13,[K,0,10]);
K1:find_root(PL13,4,6);
K2:find_root(PL13,8,9);
PL1:subst([n=2,K=K1],PL0);
plot3d (PL1, [r, 0, 1], [\theta, 0, 2*%pi]
 , [grid, 20,50], [transform_xy,
  polar_to_xy]);
PL1:subst([n=2,K=K2],PL0);
plot3d (PL1, [r, 0, 1], [\theta, 0, 2*%pi]
 , [grid, 20,50], [transform_xy,
 polar_to_xy]);
```

$n = 0$ の場合

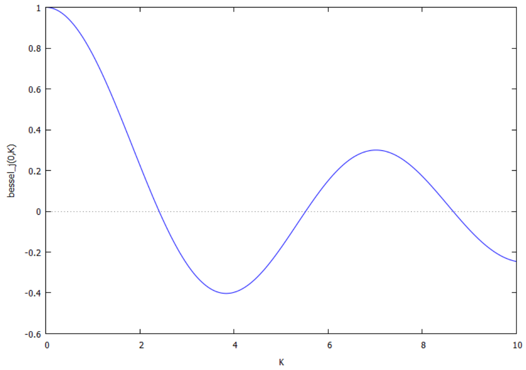


図 10.9.5: bessel_j $(0, K) = 0$

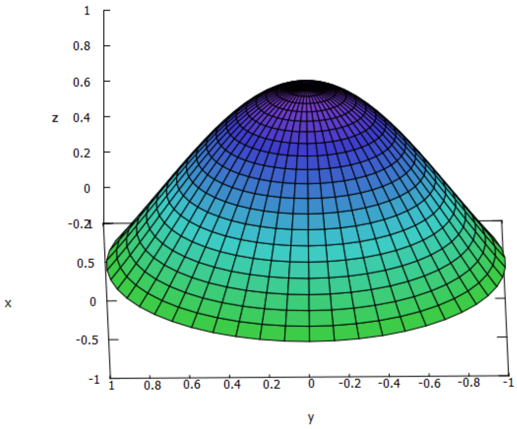


図 10.9.6: 円形膜の固有振動モード　$n = 0, K = K_0$

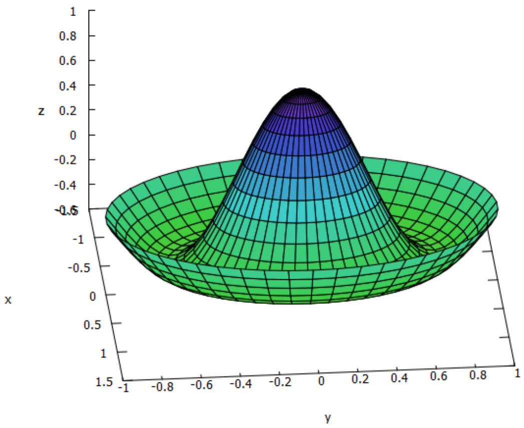


図 10.9.7: 円形膜の固有振動モード　$n = 0, K = K_1$

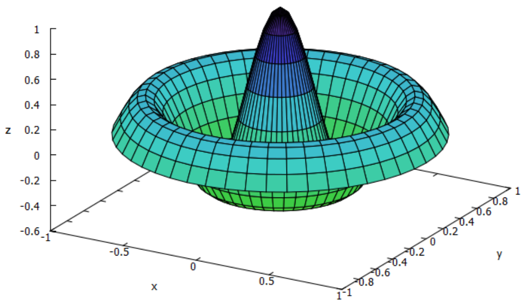


図 10.9.8: 円形膜の固有振動モード　$n = 0, K = K_2$

$n = 1$ の場合

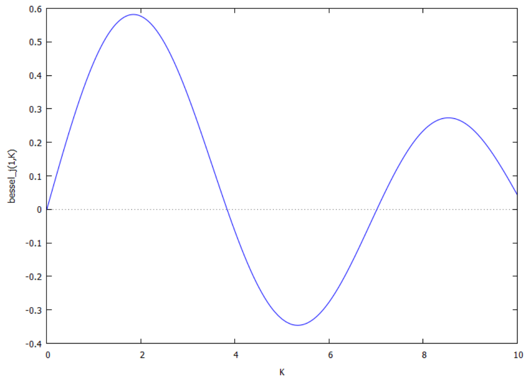


図 10.9.9: bessel_j $(1, K) = 0$

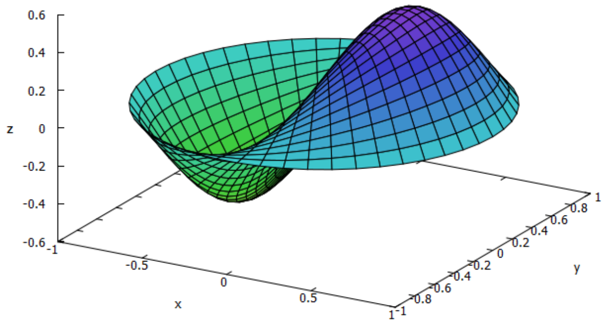


図 10.9.10: 円形膜の固有振動モード　$n = 1, K = K_1$

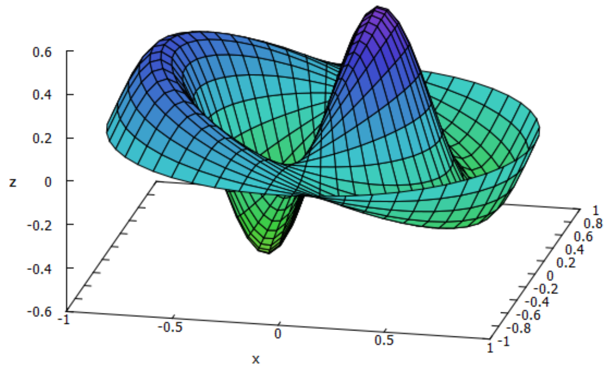


図 10.9.11: 円形膜の固有振動モード　$n = 1, K = K_2$

$n = 2$ の場合

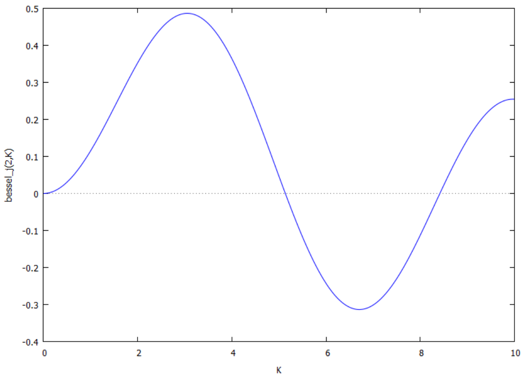


図 10.9.12: $\mathrm{bessel\_j}\,(2, K) = 0$

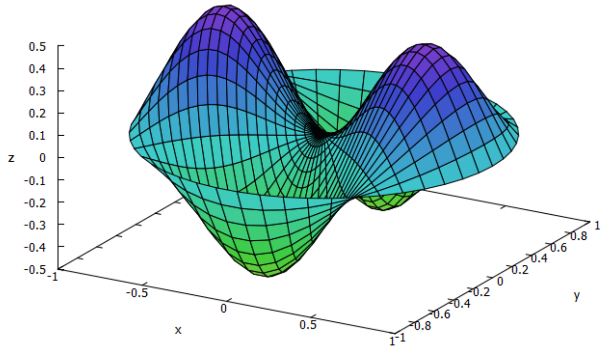


図 10.9.13: 円形膜の固有振動モード　$n = 2, K = K_1$

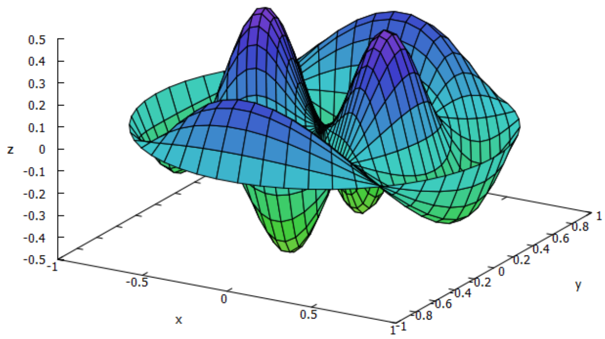


図 10.9.14: 円形膜の固有振動モード　$n = 2, K = K_2$

10.9.3 極座標における二次元波動方程式：軸対称　無限境界

```
kill(all);
assume(A>0);
assume(k>0);
assume(r>0);
U0:u(r,t)='integrate(bessel_j(0,r*k)*k*
 F(k)*cos(C*k*t),k,0,inf);
U11:u(r,0)=%e^(-A^2*r^2);
U1:subst([t=0],U0);
F1:F(k)='integrate(bessel_j(0,r*k)*r*
 u(r,0),r,0,inf);
subst([U11],F1);
F2:F(k)=%e^(-k^2/(4*A^2))/(2*A^2);
U2:subst([F2],U1);
B1:B^2=1/(4*(A^2));
B2:solve(%,A)[1];
subst([B2],U2);
lhs(%)=2*B^2*%e^(-r^2/(4*B^2))/(2*B^2);
subst([B1],%);
DF1:bessel_j(0,r*k)*k*F(k)*cos(C*k*t);
DF2:subst([F2],DF1);
```

極座標における二次元波動方程式の基本解は、(10.9.24) 式から、

$$\begin{aligned} u =& \mathrm{bessel\_j}\left(n, r\,K\right)\,\left(\%c1 \sin\left(n\,\theta\right) + \%c2 \cos\left(n\,\theta\right)\right) \\ &\times\,\left(\%k1 \sin\left(t\,C\,K\right) + \%k2 \cos\left(t\,C\,K\right)\right) \end{aligned} \tag{10.9.36}$$

上式で軸対称とすると、$n=0$ となり、

$$u = \%k2\,\mathrm{bessel\_j}\left(0, r\,K\right)\,\cos\left(t\,C\,K\right) \tag{10.9.37}$$

フーリエ・ベッセル展開に対応した無限積分のフーリエ積分は (6.2.23) 式、(6.2.1) 式に示す下記の Hunkel 変換である。

$$\mathrm{f}\left(r\right) = \int_0^\infty k\,F_\nu\left(k\right)\,\mathrm{bessel\_j}\left(\nu, k\,r\right)dk \tag{10.9.38}$$

ここで、

$$F_\nu\left(k\right) = \int_0^\infty \mathrm{bessel\_j}\left(\nu, k\,x\right)\,x\,\mathrm{f}\left(x\right)dx \tag{10.9.39}$$

上式から、無限積分のフーリエ積分の解は (10.9.37) 式から、

$$\mathrm{u}\left(r,t\right) = \int_0^\infty \mathrm{bessel\_j}\left(0, k\,r\right)\,k\,\mathrm{F}\left(k\right)\,\cos\left(k\,t\,C\right)dk \tag{10.9.40}$$

$t=0$ では、下記となり、(10.9.38) 式、(10.9.39) 式に示す Hunkel 変換から、

$$\mathrm{u}\left(r,0\right) = \int_0^\infty \mathrm{bessel\_j}\left(0, k\,r\right)\,k\,\mathrm{F}\left(k\right)dk \tag{10.9.41}$$

$$\mathrm{F}\left(k\right) = \int_0^\infty \mathrm{bessel\_j}\left(0, k\,r\right)\,r\,\mathrm{u}\left(r,0\right)dr \tag{10.9.42}$$

$t=0$ における初期条件として、次式とする。

$$\mathrm{u}\left(r,0\right) = e^{-r^2\,A^2} \tag{10.9.43}$$

(10.9.42) 式に上式を代入すると、Weber の積分公式[1]から、

$$\mathrm{F}\left(k\right) = \int_0^\infty \mathrm{bessel\_j}\left(0, k\,r\right)\,r\,e^{-r^2\,A^2}dr = \frac{e^{-\frac{k^2}{4\,A^2}}}{2\,A^2}$$

(10.9.40) 式に上式を代入すると、

$$\mathrm{u}\left(r,t\right) = \frac{1}{2\,A^2}\int_0^\infty \mathrm{bessel\_j}\left(0, k\,r\right)\,k\,e^{-\frac{k^2}{4\,A^2}}\cos\left(k\,t\,C\right)dk \tag{10.9.44}$$

```
DK:0.01;
LI2:[t=10,A=0.4,C=1];
DF21:subst(LI2,DF2);
DR:0.2;
for n:1 thru 200 do(
R1:r=DR*float(n-1),
DF3:subst([R1],DF21),
DF30:subst([k=0],DF3),
LIR:[[0,DF30]],
SUM:DF30*0.5*DK,
for m:1 thru 500 do(
KDK1:k=DK*float(m),
DF31:subst([KDK1],DF3),
LIR:append(LIR,[[rhs(KDK1),DF31]]),
SUM:SUM+DF31*DK),
if n=1 then LIH:[[rhs(R1),SUM]]
else LIH:append(LIH,[[rhs(R1),SUM]]));
U12:subst(LI2,U11);
assume(R>0);
U12;
integrate(rhs(U12)*2*%pi*r,r,0,R);
float(limit(%,R,inf));
VSUM2:%pi*DR^2*LIH[1][2];
for n:2 thru 200 do(
VSUM2:VSUM2+LIH[n][1]*LIH[n][2]*2*%pi*DR);
float(VSUM2);
plot2d([rhs(U12),[discrete,LIH]],[r,0,40],
 [style,[lines,3,1],[lines,3,2]],
 [legend, "given","t=10"]);
```

[1]森口　繁一、宇田川　久、一松　信：岩波数学公式 3　特殊函数、岩波書店　2002、P.200

(10.9.44) 式で $A = 0.4$, $C = 1$ とし、各種 t を計算した結果を下記に示す。波高は伝搬するに従い、低くなっていく。波の盛り上がりの体積は、当然、全て同じである。

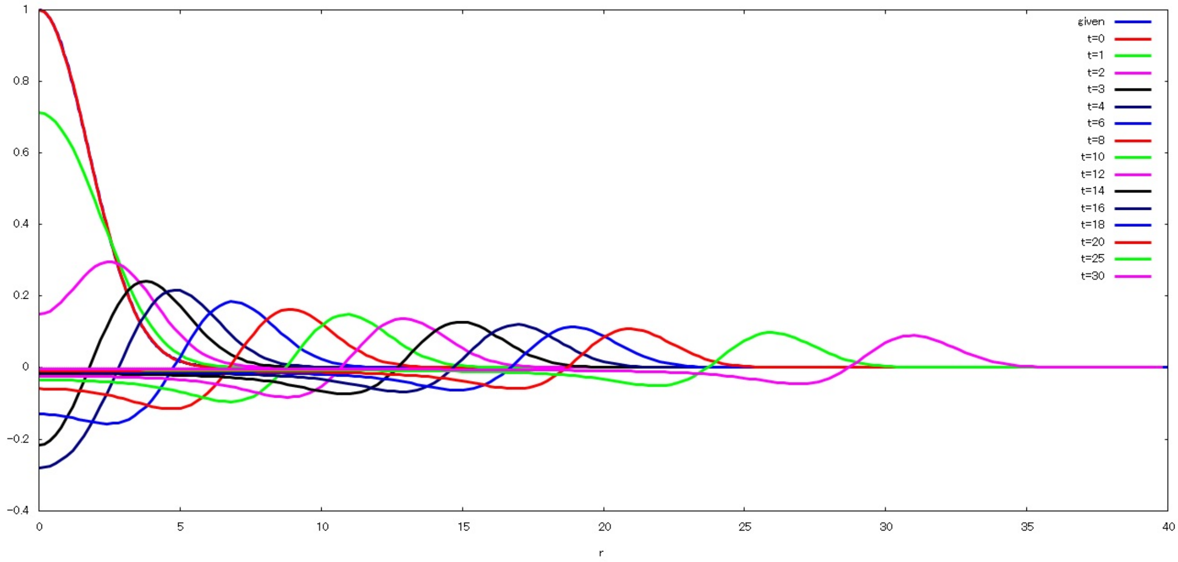


図 10.9.15: 二次元軸対称　無限境界における波の伝搬

10.10　三次元波動方程式

10.10.1　xyz 座標における三次元波動方程式 (平面波)

```
kill(all);
depends(u,[x,y,z,t]);
depends(h,[x,y,z]);
depends(s,[x]);
depends(v,[y]);
depends(w,[z]);
depends(p,[t]);
EQ:'diff(u,t,2)=C^2*('diff(u,x,2)
 +'diff(u,y,2)+'diff(u,z,2));
TR:u=h*p;
subst([TR],EQ);
ev(%,diff);
%/C^2/h/p;
EQ1:expand(%);
assume(K[0]>0);
assume(C>0);
assume(K[1]>0);
assume(K[2]>0);
assume(K[3]>0);
EQ11:lhs(EQ1)=-K[0]^2;
EQ12:rhs(EQ1)=-K[0]^2;
EQ121:expand(%*h);
TR1:h=s*v*w;
subst([TR1],EQ121);
ev(%,diff);
EQ122:expand(%/s/v/w);
EQX1:'diff(s,x,2)/s=-K[1]^2;
EQY1:'diff(v,y,2)/v=-K[2]^2;
EQZ1:'diff(w,z,2)/w=-K[3]^2;
K1:-subst([EQX1,EQY1,EQZ1],EQ122);
P1:ode2(EQ11,p,t);
X1:ode2(EQX1,s,x);
X2:s=%e^(-%i*K[1]*x);
Y2:v=%e^(-%i*K[2]*y);
Z2:w=%e^(-%i*K[3]*z);
subst([X2,Y2,Z2],TR1);
rectform(%);
h=%k1*cos(K[3]*z+K[2]*y+K[1]*x)+%k2
 *sin(K[3]*z+K[2]*y+K[1]*x);
subst([P1,%],TR);
```

```
u=%k1*sin(K[3]*z+K[2]*y+K[1]*x-t*C*K[0])+
 %k2*sin(K[3]*z+K[2]*y+K[1]*x+t*C*K[0]);
K2:matrix([K[1]],[K[2]],[K[3]]);
R2:matrix([x],[y],[z]);
KR2:K2.R2;
```

xyz 座標における三次元波動方程式について調べる。三次元波動方程式は次式で得られる。

$$\frac{d^2}{d\,t^2}\,u=\left(\frac{d^2}{d\,z^2}\,u+\frac{d^2}{d\,y^2}\,u+\frac{d^2}{d\,x^2}\,u\right)C^2 \tag{10.10.1}$$

ここで、u は x,y,z,t の関数で、下記のように変数分離できるとして、h は x,y,z の関数、p は時間：t の関数とする。

$$u=h\,p \tag{10.10.2}$$

(10.10.1) 式に上式を代入し、微分を実行し、変形すると、

$$\frac{\frac{d^2}{d\,t^2}\,p}{p\,C^2}=\frac{\frac{d^2}{d\,z^2}\,h}{h}+\frac{\frac{d^2}{d\,y^2}\,h}{h}+\frac{\frac{d^2}{d\,x^2}\,h}{h}$$

上式を $-K_0^2$ とすると、

$$\frac{\frac{d^2}{d\,t^2}\,p}{p\,C^2}=-K_0^2 \tag{10.10.3}$$

$$\frac{\frac{d^2}{d\,z^2}\,h}{h}+\frac{\frac{d^2}{d\,y^2}\,h}{h}+\frac{\frac{d^2}{d\,x^2}\,h}{h}=-K_0^2 \tag{10.10.4}$$

ここで h を下記のように変数分離できるとして、s は x、v は y、w は z の関数とする。

$$h=s\,v\,w \tag{10.10.5}$$

(10.10.4) 式に上式を代入し、微分を実行し、変形すると、

$$\frac{\frac{d^2}{d\,z^2}\,w}{w}+\frac{\frac{d^2}{d\,y^2}\,v}{v}+\frac{\frac{d^2}{d\,x^2}\,s}{s}=-K_0^2$$

更に上式の左辺を下記と置く。

$$\frac{\frac{d^2}{d\,x^2}\,s}{s}=-K_1^2 \tag{10.10.6}$$

$$\frac{\frac{d^2}{d\,y^2}\,v}{v}=-K_2^2 \tag{10.10.7}$$

$$\frac{\frac{d^2}{d\,z^2}\,w}{w}=-K_3^2 \tag{10.10.8}$$

ここで、

$$K_3^2+K_2^2+K_1^2=K_0^2 \tag{10.10.9}$$

(10.10.3) 式を ode2 関数で解くと、

$$p=\%k1\sin\left(K_0\,t\,C\right)+\%k2\cos\left(K_0\,t\,C\right) \tag{10.10.10}$$

(10.10.6) 式を ode2 関数で解くと下記となり複素表記すると、

$$s=\%k1\sin\left(K_1\,x\right)+\%k2\cos\left(K_1\,x\right)=e^{-i\,K_1\,x} \tag{10.10.11}$$

同様に、(10.10.7) 式を ode2 関数で解き、複素表記すると、

$$v = e^{-i\,K_2\,y} \tag{10.10.12}$$

同様に、(10.10.8) 式を ode2 関数で解き、複素表記すると、

$$w = e^{-i\,K_3\,z} \tag{10.10.13}$$

(10.10.5) 式に (10.10.11) 式、(10.10.12) 式、(10.10.13) 式を代入すると、

$$\begin{aligned} h =& e^{-i\,K_3\,z-i\,K_2\,y-i\,K_1\,x} \\ =& \%k2\sin\left(K_3\,z+K_2\,y+K_1\,x\right) \\ &+\%k1\cos\left(K_3\,z+K_2\,y+K_1\,x\right) \end{aligned}$$

(10.10.2) 式に (10.10.10) 式と上式を代入すると、

$$\begin{aligned} u =& (\%k2\sin\left(K_3\,z+K_2\,y+K_1\,x\right) \\ &+ \%k1\cos\left(K_3\,z+K_2\,y+K_1\,x\right)) \\ &\times\ (\%k1\sin\left(K_0\,t\,C\right)+\%k2\cos\left(K_0\,t\,C\right)) \end{aligned}$$

(10.8.12) 式と (10.8.13) 式の関係から、上式は、

$$\begin{aligned} u =& \%k2\sin\left(K_0\,t\,C+K_3\,z+K_2\,y+K_1\,x\right) \\ &-\%k1\sin\left(K_0\,t\,C-K_3\,z-K_2\,y-K_1\,x\right) \end{aligned}$$

ここで、$K_3\,z+K_2\,y+K_1\,x$ について、$\overrightarrow{K}$, $\overrightarrow{r}$ を使って表すと、

$$\overrightarrow{K} = \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$K_3\,z+K_2\,y+K_1\,x$ は $\overrightarrow{K}$ と $\overrightarrow{r}$ の内積になっているので、

$$\begin{aligned} u =& \%k2\sin\left(K_0\,t\,C+\overrightarrow{K}\cdot\overrightarrow{r}\right) \\ &-\%k1\sin\left(K_0\,t\,C-\overrightarrow{K}\cdot\overrightarrow{r}\right) \end{aligned}$$

$\overrightarrow{K}$ は波の進行方向を表しており、$K_0\,t\,C+\overrightarrow{K}\cdot\overrightarrow{r}$ が一定の位相のとき、$\overrightarrow{r}$ の $\overrightarrow{K}$ 方向への投影がある時点で一定であるので、$\overrightarrow{r}$ は $\overrightarrow{K}$ に垂直な波面になり、$2\,\pi$ ごとに波面が繰り返される。

10.10.2　極座標における三次元波動方程式 (球面波)

```
kill(all);
depends(u,[t,r,\theta,\phi]);
depends(h,[r,\theta,\phi]);
depends(z,[t]);
assume(K>0);
assume(n>0);
assume(m>0);
assume(C>0);
assume(r>0);
declare([i,m,n],integer);
EQ1:'diff(u,\theta,2)/r^2+(cos(\theta)*
 ('diff(u,\theta,1)))/(r^2*sin(\theta))
 +'diff(u,r,2)+(2*('diff(u,r,1)))/r
 +'diff(u,\phi,2)/(r^2*sin(\theta)^2)
 +K^2*u=0;
EQ6:diff(u,t,2)=C^2*(lhs(EQ1)
 -first(lhs(EQ1)));
TR5:u=h*z;
subst([TR5],EQ6);
ev(%,diff);
EQ61:expand(%/C^2/h/z);
EQ62:lhs(EQ61)=-K^2;
EQ63:rhs(EQ61)=-K^2;
EQ64:expand((EQ63+K^2)*h);
ZT1:ode2(EQ62,z,t);
EQ641:subst(['diff(h,theta,1)=0,
 'diff(h,phi,2)=0,'diff(h,theta,2)=0],
 EQ64);
BEEQ4:v*(x^(2*C-2)*B^2*C^2+(A^2-N^2*C^2)
 /x^2)+'diff(v,x,1)*(1-2*A)/x+'diff(v,x,2)
 =0;
BEA1:1-2*A=2;
BEA2:A^2-N^2*C^2=0;
BEA3:B^2*C^2=K^2;
BEA4:2*C-2=0;
solve([BEA1,BEA2,BEA3,BEA4],[A,B,C,N]);
BEA5:%[3];
subst([BEA5],BEEQ4);
v=%k1*bessel_j(N,x^C*B)*x^A+%k2*bessel_j
 (-N,x^C*B)*x^A;
subst([BEA5],%);
AN3:subst([%k1=1,%k2=0,x=r],%);
U1:u=rhs(AN3)*rhs(ZT1);
```

```
bessel_j(N,r*K)=sqrt(2/(%pi*r*K))*(A[n]
 (r*K)*cos(r*K-(2*N+1)*%pi/4)-B[n]
 (r*K)*sin(r*K-(2*N+1)*%pi/4));
BS1:subst([N=1/2],%);
subst([BS1],U1);
EQ601:subst(['diff(u,theta,2)=0,
 'diff(u,theta,1)=0,'diff(u,phi,2)=0],EQ6);
depends(w,[r,t]);
depends(v,[r,t]);
EQ7:diff(w,t,2)=C^2*diff(w,r,2);
V1:w=r*v;
subst([V1],EQ7);
ev(%,diff);
expand(%/r);
```

極座標における三次元波動方程式は (4.5.31) 式、176 頁から次式で表現できる。

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{d\,t^2}\,u =&\nabla^2\,u\\ =&\left(\frac{\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,u}{r^2}+\frac{\cos(\theta)\,\left(\frac{d}{d\,\theta}\,u\right)}{r^2\sin(\theta)}+\frac{d^2}{d\,r^2}\,u\right.\\ &\left.+\frac{2\,\left(\frac{d}{d\,r}\,u\right)}{r}+\frac{\frac{d^2}{d\,\phi^2}\,u}{r^2\sin(\theta)^2}\right)C^2\end{aligned} \tag{10.10.14}$$

ここで、u は r,θ,ϕ,t の関数で、下記のように変数分離できるとして、h は r,θ,ϕ の関数、p は時間：t の関数とする。

$$u = h\,z \tag{10.10.15}$$

(10.10.14) 式に上式を代入し、微分を実行し、変形すると、

$$\begin{aligned}\frac{\frac{d^2}{d\,t^2}\,z}{z\,C^2} =&\frac{\left(\frac{d}{d\,\theta}\,h\right)\,\cos(\theta)}{h\,r^2\sin(\theta)}+\frac{\frac{d^2}{d\,\phi^2}\,h}{h\,r^2\sin(\theta)^2}+\frac{2\,\left(\frac{d}{d\,r}\,h\right)}{h\,r}\\ &+\frac{\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,h}{h\,r^2}+\frac{\frac{d^2}{d\,r^2}\,h}{h}\end{aligned} \tag{10.10.16}$$

上式を $-K$ とすると、

$$\frac{\frac{d^2}{d\,t^2}\,z}{z\,C^2} = -K^2 \tag{10.10.17}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\left(\frac{d}{d\,\theta}\,h\right)\,\cos(\theta)}{h\,r^2\sin(\theta)}+\frac{\frac{d^2}{d\,\phi^2}\,h}{h\,r^2\sin(\theta)^2}\\ &\quad+\frac{2\,\left(\frac{d}{d\,r}\,h\right)}{h\,r}+\frac{\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,h}{h\,r^2}+\frac{\frac{d^2}{d\,r^2}\,h}{h} = -K^2\end{aligned}$$

上式を変形し、

$$\begin{aligned}&h\,K^2+\frac{\left(\frac{d}{d\,\theta}\,h\right)\,\cos(\theta)}{r^2\sin(\theta)}+\frac{\frac{d^2}{d\,\phi^2}\,h}{r^2\sin(\theta)^2}\\ &\quad+\frac{2\,\left(\frac{d}{d\,r}\,h\right)}{r}+\frac{\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,h}{r^2}+\frac{d^2}{d\,r^2}\,h = 0\end{aligned} \tag{10.10.18}$$

(10.10.17) 式を ode2 関数で解くと、

$$z = \%k1 \sin(t\,C\,K) + \%k2 \cos(t\,C\,K) \tag{10.10.19}$$

(10.10.18) 式で原点対称とすると、

$$h\,K^2 + \frac{2\,\left(\frac{d}{d\,r}\,h\right)}{r} + \frac{d^2}{d\,r^2}\,h = 0 \tag{10.10.20}$$

(10.7.5) 式は Bessel の微分方程式である。Bessel の微分方程式の一般型は (3.3.16) 式、45 頁から次式となる。

$$v\,\left(\frac{A^2 - N^2\,C^2}{x^2} + x^{2\,C-2}\,B^2\,C^2\right) + \frac{\left(\frac{d}{d\,x}\,v\right)\,(1 - 2\,A)}{x} + \frac{d^2}{d\,x^2}\,v = 0$$

(10.10.20) 式と一般型の係数の関係は、

$$1 - 2\,A = 2, \quad A^2 - C^2\,N^2 = 0$$

$$B^2\,C^2 = K^2, \quad 2\,C - 2 = 0$$

上式を解くと、

$$A = -\frac{1}{2}, B = K, C = 1, N = \frac{1}{2}$$

Bessel の微分方程式の一般型の解は N が整数でない時、(3.3.10) 式から次式となる。

$$v = \%k1\,x^A\,\mathrm{bessel\_j}\left(N, x^C\,B\right) + \%k2\,x^A\,\mathrm{bessel\_j}\left(-N, x^C\,B\right)$$

以上から (10.10.20) 式の解は、

$$h = \frac{\mathrm{bessel\_j}\left(-\frac{1}{2}, r\,K\right)\,\%k2}{\sqrt{r}} + \frac{\mathrm{bessel\_j}\left(\frac{1}{2}, r\,K\right)\,\%k1}{\sqrt{r}}$$

$r = 0$ で有解であるためには、$\%k2 = 0$ として、

$$h = \frac{\mathrm{bessel\_j}\left(\frac{1}{2}, r\,K\right)}{\sqrt{r}} \tag{10.10.21}$$

(10.10.15) 式に (10.10.19) 式、(10.10.21) 式を代入し、

$$u = \frac{1}{\sqrt{r}}\mathrm{bessel\_j}\left(\frac{1}{2}, r\,K\right) \times (\%k1 \sin(t\,C\,K) + \%k2 \cos(t\,C\,K)) \tag{10.10.22}$$

bessel 関数で $r\,K$ が十分大きいときには、次式で近似[1]できる。

$$\mathrm{bessel\_j}(N, r\,K) \approx \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\,\sqrt{r}\,\sqrt{K}} \times \left(B_n(r\,K)\,\sin\left(\frac{\pi\,(2\,N+1)}{4} - r\,K\right) + A_n(r\,K)\,\cos\left(\frac{\pi\,(2\,N+1)}{4} - r\,K\right)\right)$$

上式で $N = \frac{1}{2}$ とすると、

$$\mathrm{bessel\_j}\left(\frac{1}{2}, r\,K\right) \approx \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\,\sqrt{r}\,\sqrt{K}} \times (A_n(r\,K)\,\sin(r\,K) + B_n(r\,K)\,\cos(r\,K))$$

(10.10.22) 式に上式を代入し、

$$u = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\,r\,\sqrt{K}} \times (A_n(r\,K)\,\sin(r\,K) + B_n(r\,K)\,\cos(r\,K)) \times (\%k1 \sin(t\,C\,K) + \%k2 \cos(t\,C\,K))$$

(10.8.12) 式と (10.8.13) 式の関係から、上式は、半径方向の外方向と内方向の波があり、強さは $\frac{1}{r}$ の比例する。

また、(10.10.14) 式の極座標における三次元波動方程式で点対称とすると次式になる。

$$\frac{d^2}{d\,t^2}\,u = \left(\frac{d^2}{d\,r^2}\,u + \frac{2\,\left(\frac{d}{d\,r}\,u\right)}{r}\right)\,C^2 \tag{10.10.23}$$

ところで、次式の (10.8.1) 式の一次元波動方程式で、w は r, t の関数とする。

$$\frac{d^2}{d\,t^2}\,w = \left(\frac{d^2}{d\,r^2}\,w\right)\,C^2 \tag{10.10.24}$$

上式の解は (10.8.9) 式から、

$$w = \mathrm{F}(t\,C + x) + \mathrm{G}(x - t\,C) \tag{10.10.25}$$

w を下記のように変数分離できるとし、v は r, t の関数とする。

$$w = r\,v$$

(10.10.24) 式に上式を代入し、微分を実行し、整理すると、

$$\frac{d^2}{d\,t^2}\,v = \left(\frac{d^2}{d\,r^2}\,v\right)\,C^2 + \frac{2\,\left(\frac{d}{d\,r}\,v\right)\,C^2}{r}$$

上式は (10.10.23) 式と一致しており、v は点対称の極座標三次元波動方程式の解である。(10.10.25) 式から、点対称の極座標三次元波動方程式の解は、

$$v = \frac{1}{r}\,(\mathrm{F}(t\,C + x) + \mathrm{G}(x - t\,C))$$

[1]森口　繁一、宇田川　久、一松　信：岩波数学公式 3　特殊函数、岩波書店　2002　Bessel 関数 P.153

10.10.3 極座標における三次元波動方程式

```
kill(all);
depends(u,[t,r,\theta,\phi]);
depends(h,[r,\theta,\phi]);
depends(z,[t]);
assume(K>0);
assume(n>0);
assume(m>0);
assume(C>0);
assume(r>0);
declare([i,m,n],integer);
EQ1:'diff(u,\theta,2)/r^2+(cos(\theta)*
 ('diff(u,\theta,1)))/(r^2*sin(\theta))
 +'diff(u,r,2)+(2*('diff(u,r,1)))/r
 +'diff(u,\phi,2)/(r^2*sin(\theta)^2)
 +K^2*u=0;
EQ6:diff(u,t,2)=C^2*(lhs(EQ1)
 -first(lhs(EQ1)));
TR5:u=h*z;
```

```
subst([TR5],EQ6);
ev(%,diff);
EQ61:expand(%/C^2/h/z);
EQ62:lhs(EQ61)=-K^2;
EQ63:rhs(EQ61)=-K^2;
EQ64:expand((EQ63+K^2)*h);
ZT1:ode2(EQ62,z,t);
U2:h=(bessel_j((2*n+1)/2,r*K)*((sum(B[m,n]
 *sin(m*phi)*P[m,n](cos(theta))
 +A[m,n]*cos(m*phi)*P[m,n](cos(theta)),
 m,1,n))+A[0,n]*P[n](cos(theta)))
)/(sqrt(r));
K3:K=alpha[n,i];
rhs(ZT1)*rhs(U2);
subst([K3,%c=1,%k1=F[n],%k2=E[n]],%);
AN6:u=sum(sum(%,n,1,inf),i,1,inf);
```

極座標における三次元波動方程式は (4.5.31) 式、176 頁から次式で表現できる。

$$\frac{d^2}{d\,t^2}\,u=\nabla^2\,u=\left(\frac{\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,u}{r^2}+\frac{\cos\left(\theta\right)\,\left(\frac{d}{d\,\theta}\,u\right)}{r^2\sin\left(\theta\right)}+\frac{d^2}{d\,r^2}\,u+\frac{2\,\left(\frac{d}{d\,r}\,u\right)}{r}+\frac{\frac{d^2}{d\,\phi^2}\,u}{r^2\sin\left(\theta\right)^2}\right)\,C^2 \tag{10.10.26}$$

ここで、u は r,θ,ϕ,t の関数で、下記のように変数分離できるとして、h は r,θ,ϕ の関数、z は時間：t の関数とする。

$$u=h\,z$$

(10.10.26) 式に上式を代入し、微分を実行すると、

$$\frac{\frac{d^2}{d\,t^2}\,z}{z\,C^2}=\frac{\left(\frac{d}{d\,\theta}\,h\right)\,\cos\left(\theta\right)}{h\,r^2\sin\left(\theta\right)}+\frac{\frac{d^2}{d\,\phi^2}\,h}{h\,r^2\sin\left(\theta\right)^2}+\frac{2\,\left(\frac{d}{d\,r}\,h\right)}{h\,r}+\frac{\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,h}{h\,r^2}+\frac{\frac{d^2}{d\,r^2}\,h}{h}$$

上式を $-K^2$ と置き、変形すると、

$$\frac{\frac{d^2}{d\,t^2}\,z}{z\,C^2}=-K^2 \tag{10.10.27}$$

$$h\,K^2+\frac{\left(\frac{d}{d\,\theta}\,h\right)\,\cos\left(\theta\right)}{r^2\sin\left(\theta\right)}+\frac{\frac{d^2}{d\,\phi^2}\,h}{r^2\sin\left(\theta\right)^2}+\frac{2\,\left(\frac{d}{d\,r}\,h\right)}{r}+\frac{\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,h}{r^2}+\frac{d^2}{d\,r^2}\,h=0 \tag{10.10.28}$$

(10.10.27) 式を ode2 関数で解くと、

$$z=\%k1\sin\left(t\,C\,K\right)+\%k2\cos\left(t\,C\,K\right) \tag{10.10.29}$$

(10.10.28) 式の解は (10.7.17) 式となり、(10.10.29) 式で $K=\alpha_{n,i}$ とし、(10.10.26) 式の解は、

$$\begin{aligned}u=&\frac{1}{\sqrt{r}}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{bessel\_j}\left(\frac{2\,n+1}{2},\alpha_{n,i}\,r\right)\\&\times\left(\left(\sum_{m=1}^{n}B_{m,n}\sin\left(m\,\phi\right)\,P_{m,n}\left(\cos\left(\theta\right)\right)+A_{m,n}\cos\left(m\,\phi\right)\,P_{m,n}\left(\cos\left(\theta\right)\right)\right)+A_{0,n}\,P_n\left(\cos\left(\theta\right)\right)\right)\\&\times\left(F_n\sin\left(\alpha_{n,i}\,t\,C\right)+E_n\cos\left(\alpha_{n,i}\,t\,C\right)\right)\end{aligned}$$

10.11 一次元熱伝導方程式

10.11.1 熱伝導方程式の変数分離法による基本解

```
kill(all);
depends(u,[x,t]);
EQ:diff(u,t,1)=C^2*diff(u,x,2);
depends(v,[x]);
depends(w,[t]);
UVW:u=v*w;
subst([UVW],EQ);
EQ1:ev(%,diff);
EQ2:%/v/w/C^2;
assume(k>0);
EQ21:lhs(EQ2)=-k^2;
EQ22:rhs(EQ2)=-k^2;
AN1:ode2(EQ21,w,t);
AN2:ode2(EQ22,v,x);
AN3:subst([AN1,AN2,%c=1],UVW);
```

一次元熱伝導問題（棒の熱伝導問題等）は次式で表現できる。ここで棒の温度：u、時間：t、棒の長さ方向：x とする。

$$\frac{d}{d\,t}\,u=\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,u\right)\,C^2 \tag{10.11.1}$$

ここで、u は x,t の関数であり、下記のように変数分離できるとして、v は x の関数、w は t の関数とする。

$$u=v\,w$$

(10.11.1) 式に上式を代入し、微分を実行すると、

$$v\,\left(\frac{d}{d\,t}\,w\right)=\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,v\right)\,w\,C^2$$

上式を変形し、

$$\frac{\frac{d}{d\,t}\,w}{w\,C^2}=\frac{\frac{d^2}{d\,x^2}\,v}{v}$$

上式を $-k^2$ と置くと、

$$\frac{\frac{d}{d\,t}\,w}{w\,C^2}=-k^2 \quad C>0,k>0 \tag{10.11.2}$$

$$\frac{\frac{d^2}{d\,x^2}\,v}{v}=-k^2 \quad k>0 \tag{10.11.3}$$

(10.11.2) 式を ode2 関数で解くと、

$$w=\%c\,e^{-k^2\,t\,C^2}$$

(10.11.3) 式を ode2 関数で解くと、

$$v=\%k1\,\sin\left(k\,x\right)+\%k2\,\cos\left(k\,x\right)$$

上記二式から、(10.11.1) 式の解：u は、

$$u=\left(\%k1\,\sin\left(k\,x\right)+\%k2\,\cos\left(k\,x\right)\right)\,e^{-k^2\,t\,C^2} \tag{10.11.4}$$

10.11.2　熱伝導方程式　端部一定

```
assume(L>0);
declare(n,integer);
subst([x=0],rhs(AN3))=0;
C2:solve(%,%k2)[1];
subst([C2,x=L],rhs(AN3))=0;
k*L=%pi*n;
K1:solve(%,k)[1];
AN31:subst([C2,K1,%k1=B[n]],AN3);
AN4:lhs(%)=sum(rhs(AN31),n,1,inf);
AN41:u(x,0)=subst([t=0],rhs(AN4));
B1:B[n]=2/L*'integrate(u(x,0)*
 sin((%pi*n*x)/L),x,0,L);
B11:2/L*'integrate(sin((%pi*n*x)/L),
 x,L/4,L*3/4);
B[n]=ev(B11,integrate);
B3:trigsimp(%);
AN5:subst([B3],AN4);
PL0:subst([inf=200,L=1,C=0.15,K=1],
 rhs(AN5));
PL1:subst([t=0],PL0);
PL2:subst([t=0.05],PL0);
PL3:subst([t=0.2],PL0);
PL4:subst([t=0.5],PL0);
PL5:subst([t=1.0],PL0);
PL6:subst([t=2],PL0);
PL7:subst([t=5],PL0);
plot2d([PL1,PL2,PL3,PL4,PL5,PL6,PL7],
 [x,0,1],[legend,"t=0","t=0.05s","t=0.2s",
 "t=0.5s","t=1s","t=2s","t=5s"],
 [y,-0.5,1.5],[style,[lines,3,1],
 [lines,3,2],[lines,3,3],[lines,3,4],
 [lines,3,5],[lines,3,6],[lines,3,7]]);
```

一次元熱伝導問題（棒の熱伝導問題等）で棒の温度：u、時間:t、棒の長さ方向:x とする。この基本解は (10.11.4) 式で、

$$u = (\%k1 \sin(k\,x) + \%k2 \cos(k\,x))\; e^{-k^2\,t\,C^2}$$

境界：$x = 0, x = L$ で関数：u が零とすると、

$$\%k2\, e^{-k^2\,t\,C^2} = 0, \quad \%k1\, e^{-k^2\,t\,C^2} \sin(k\,L) = 0$$

上式から、

$$\%k2 = 0, \quad k = \frac{\pi\,n}{L} \quad n：整数$$

上式を (10.11.4) 式に代入し、$\%k1 \;\rightarrow\; B_n$ に置き換えると、

$$u = B_n \sin\left(\frac{\pi\,n\,x}{L}\right)\, e^{-\frac{\pi^2\,n^2\,t\,C^2}{L^2}}$$

上式から、解は $n = 1 \rightarrow \infty$ の和として得られるから、

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{\pi\,n\,x}{L}\right)\, e^{-\frac{\pi^2\,n^2\,t\,C^2}{L^2}} \tag{10.11.5}$$

初期値：$\mathrm{u}(x, 0)$ は、上式で $t = 0$ として、

$$\mathrm{u}(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{\pi\,n\,x}{L}\right)$$

上式はフーリエ級数であるから、係数：B_n は (6.1.5) 式から得られ、

$$B_n = \frac{2}{L}\int_0^L \mathrm{u}(x, 0)\,\sin\left(\frac{\pi\,n\,x}{L}\right) dx \tag{10.11.6}$$

初期値：$\mathrm{u}(x, 0)$ として、下記の矩形形状とすると、

$$\mathrm{u}(x, 0) = 0, \quad 0 < x < \frac{L}{4}, \quad \frac{3\,L}{4} < x < L,$$

$$\mathrm{u}(x, 0) = 1, \quad \frac{L}{4} < x < \frac{3\,L}{4}$$

上式を (10.11.6) 式に代入し、

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{2}{L}\int_0^L \mathrm{u}(x, 0)\,\sin\left(\frac{\pi\,n\,x}{L}\right) dx \\ &= \frac{2}{L}\int_{\frac{L}{4}}^{\frac{3\,L}{4}} \sin\left(\frac{\pi\,n\,x}{L}\right) dx \\ &= -\frac{2}{\pi\,n}\cos\left(\frac{3\,\pi\,n}{4}\right) - 2\cos\left(\frac{\pi\,n}{4}\right) \end{aligned}$$

上式を (10.11.5) 式に代入し、

$$\begin{aligned} u = -\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(2\cos\left(\frac{3\,\pi\,n}{4}\right) - 2\cos\left(\frac{\pi\,n}{4}\right)\right) \\ \times \sin\left(\frac{\pi\,n\,x}{L}\right)\, e^{-\frac{\pi^2\,n^2\,t\,C^2}{L^2}} \end{aligned}$$

上式で、$n = 1 \rightarrow 200, L = 1, C = 0.15, K = 1$ として、熱伝導状態を求めると下図となる。

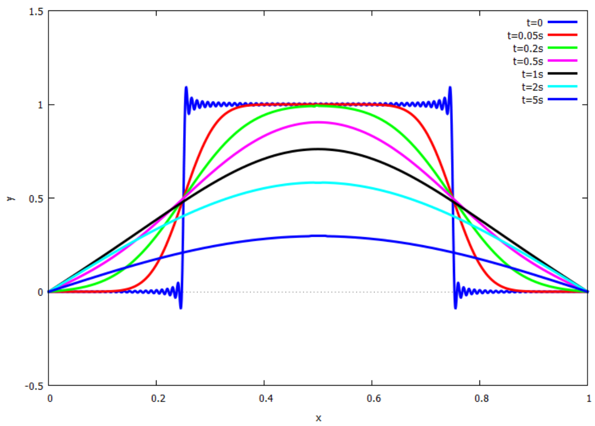


図 10.11.1: 初期値：矩形の有限境界熱伝導（端部一定）

上図から高次項は早く減衰し、なだらかな形状となる。これは $e^{-\frac{\pi^2\,n^2\,t\,C^2}{L^2}}$ の項により高次項が早く減衰するためである。

10.11.3 熱伝導方程式　端部反射

```
assume(L>0);
declare(n,integer);
DAN3:diff(AN3,x,1);
subst([x=0],rhs(DAN3))=0;
DC2:solve(%,%k1)[1];
subst([DC2,x=L],rhs(DAN3))=0;
k*L=%pi*n;
K1:solve(%,k)[1];
DAN31:subst([DC2,K1,%k2=A[n]],AN3);
DAN4:lhs(%)=sum(rhs(DAN31),n,1,inf)+A[0];
DAN41:u(x,0)=subst([t=0],rhs(DAN4));
A1:A[n]=2/L*'integrate(u(x,0)
 *cos((%pi*n*x)/L),x,0,L);
B11:subst([U1],2/L*'integrate(
 cos((%pi*n*x)/L),x,L/4,3*L/4));
A[n]=ev(B11,integrate);
B3:trigsimp(%);
DAN5:subst([B3],DAN4);
PL0:subst([inf=200,L=1,C=0.15,A[0]=0.5],
 rhs(DAN5));
PL1:subst([t=0],PL0);
PL2:subst([t=0.05],PL0);
PL3:subst([t=0.2],PL0);
PL4:subst([t=0.5],PL0);
PL5:subst([t=1],PL0);
PL6:subst([t=2],PL0);
PL7:subst([t=5],PL0);
plot2d([PL1,PL2,PL3,PL4,PL5,PL6,PL7],
 [x,0,1],[legend,"t=0","t=0.05s","t=0.2s",
 "t=0.5s","t=1s","t=2s","t=5s"],
 [y,-0.5,1.5],[style,[lines,3,1],
 [lines,3,2],[lines,3,3],[lines,3,4],
 [lines,3,5],[lines,3,6],[lines,3,7]]);
```

一次元熱伝導問題（棒の熱伝導問題等）で棒の温度：u、時間：t、棒の長さ方向：x とする。境界：$x=0, x=L$ で反射条件は $\frac{d}{d\,x}\,u=0$ であり、一次元熱伝導方程式の基本解：(10.11.4) 式を x で微分すると、

$$\frac{d}{d\,x}\,u=\left(\%k1\,k\cos\left(k\,x\right)-\%k2\,k\sin\left(k\,x\right)\right)\,e^{-k^2\,t\,C^2}$$

境界：$x=0, x=L$ で関数：$\frac{d}{d\,x}\,u=0$ とすると、

$$\%k1\,k\,e^{-k^2\,t\,C^2}=0,\quad -\%k2\,k\,e^{-k^2\,t\,C^2}\sin\left(k\,L\right)=0$$

上式から、

$$\%k1=0,\quad k=\frac{\pi\,n}{L}\qquad n：整数$$

上式を (10.11.4) 式に代入し、$\%k2\to A_n$ に置き換え、$n=1\to\infty$ の和として解は得られるから、

$$u=\left(\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\left(\frac{\pi\,n\,x}{L}\right)\,e^{-\frac{\pi^2\,n^2\,t\,C^2}{L^2}}\right)+A_0 \tag{10.11.7}$$

初期値：$\mathrm{u}\left(x,0\right)$ は、上式で $t=0$ として、

$$\mathrm{u}\left(x,0\right)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\left(\frac{\pi\,n\,x}{L}\right)\right)+A_0$$

上式はフーリエ級数であるから、係数：A_n は (6.1.5) 式から得られ、

$$A_n=\frac{2}{L}\int_0^L\mathrm{u}\left(x,0\right)\,\cos\left(\frac{\pi\,n\,x}{L}\right)dx \tag{10.11.8}$$

初期値：$\mathrm{u}\left(x,0\right)$ として、下記の矩形形状とすると、

$$\mathrm{u}\left(x,0\right)=0,\quad 0<x<\frac{L}{4},\quad \frac{3\,L}{4}<x<L,$$

$$\mathrm{u}\left(x,0\right)=1,\quad \frac{L}{4}<x<\frac{3\,L}{4}$$

上式を (10.11.8) 式に代入し、

$$\begin{aligned}A_n=&\frac{2}{L}\int_0^L\mathrm{u}\left(x,0\right)\,\cos\left(\frac{\pi\,n\,x}{L}\right)dx\\=&\frac{2}{L}\int_{\frac{L}{4}}^{\frac{3\,L}{4}}\cos\left(\frac{\pi\,n\,x}{L}\right)dx\\=&\frac{2}{\pi\,n}\sin\left(\frac{3\,\pi\,n}{4}\right)-2\sin\left(\frac{\pi\,n}{4}\right)\end{aligned}$$

上式を (10.11.7) 式に代入し、

$$\begin{aligned}u=&\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(2\sin\left(\frac{3\,\pi\,n}{4}\right)-2\sin\left(\frac{\pi\,n}{4}\right)\right)\\&\times\cos\left(\frac{\pi\,n\,x}{L}\right)\,e^{-\frac{\pi^2\,n^2\,t\,C^2}{L^2}}+A_0\end{aligned}$$

上式で、$n=1\to200, L=1, C=0.15, K=1, A[0]=0.5$ として、熱伝導状態を求めると下図となる。

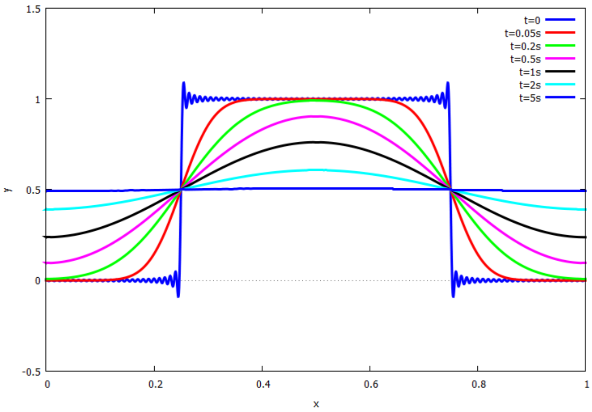


図 10.11.2: 初期値：矩形の有限境界熱伝導（端部反射）

10.11.4 熱伝導方程式 無限境界

```
assume(a>0);
assume(4*a*t*C^2+1>0);
subst([%k2=A(k),%k1=B(k)],AN3);
AN6:lhs(AN3)=integrate(rhs(%),k,0,inf)/%pi;
AK1:A(k)='integrate(u(x,0)*cos(k*x),x,
 -inf,inf);
BK1:B(k)='integrate(u(x,0)*sin(k*x),x,
 -inf,inf);
UX0:u(x,0)=%e^(-a*x^2);
subst([UX0],AK1);
AK2:ev(%,integrate);
subst([UX0],BK1);
BK2:ev(%,integrate);
subst([AK2,BK2],AN6);
AN61:ev(%,integrate);
PL0:subst([a=1,C=0.5],rhs(AN61));
PL1:subst([t=0],PL0);
PL2:subst([t=1],PL0);
PL3:subst([t=2],PL0);
PL4:subst([t=5],PL0);
PL5:subst([t=10],PL0);
PL6:subst([t=20],PL0);
PL7:subst([t=50],PL0);
plot2d([PL1,PL2,PL3,PL4,PL5,PL6,PL7],
 [x,-10,10],[legend,"t=0","t=t1","t=t2",
 "t=t3","t=t4","t=t5","t=t6"],[y,-0.2,1.0]
 ,[style,[lines,3,1],[lines,3,2],
 [lines,3,3], [lines,3,4],[lines,3,5],
 [lines,3,6],[lines,3,7]]);
```

一次元熱伝導問題（棒の熱伝導問題等）で棒の温度:u、時間:t、棒の長さ方向:x とする。このの基本解は (10.11.4) 式で、

$$u = (\%k1 \sin(k\,x) + \%k2 \cos(k\,x))\; e^{-k^2\,t\,C^2}$$

境界が無限遠となるので、上式を基に (6.2.4) 式のフーリエ積分を利用し、

$$\mathrm{u}(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} (\mathrm{B}(k)\, \sin(k\,x) + \mathrm{A}(k)\, \cos(k\,x)) \times e^{-k^2\,t\,C^2} dk \tag{10.11.9}$$

初期値：$t=0$ で $\mathrm{u}=\mathrm{u}(x,0)$ とすると、$\mathrm{A}(k), \mathrm{B}(k)$ は (6.2.5) 式から、

$$\begin{aligned}\mathrm{A}(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{u}(x,0)\, \cos(k\,x)\, dx \\ \mathrm{B}(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{u}(x,0)\, \sin(k\,x)\, dx\end{aligned} \tag{10.11.10}$$

いま、初期値：$=\mathrm{u}(x,0)$ として、下記の形状とする。

$$\mathrm{u}(x,0) = e^{-a\,x^2} \quad a>0$$

上式を (10.11.10) 式に代入し、

$$\begin{aligned}\mathrm{A}(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\,x^2} \cos(k\,x)\, dx \\ &= \frac{\sqrt{\pi}\, e^{-\frac{k^2}{4\,a}}}{\sqrt{a}} \\ \mathrm{B}(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\,x^2} \sin(k\,x)\, dx = 0\end{aligned} \tag{10.11.11}$$

上式を (10.11.9) 式に代入し、

$$\begin{aligned}u &= \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\sqrt{a}}\int_0^{\infty} \cos(k\,x)\; e^{-k^2\,t\,C^2 - \frac{k^2}{4\,a}} dk \\ &= \frac{e^{-\frac{a\,x^2}{4\,a\,t\,C^2+1}}}{\sqrt{4\,a\,t\,C^2+1}} \qquad 4\,a\,t\,C^2 > -1\end{aligned}$$

上式で、$a=1,, C=0.5$ として、熱伝導状態を求めると下図となる。

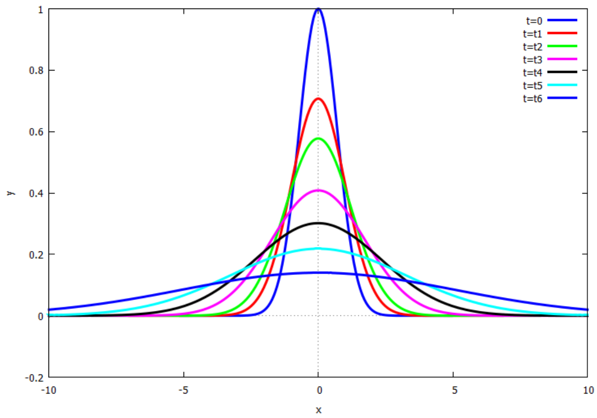


図 10.11.3: 初期値：$e^{-a\,x^2}$ の無限境界

10.12　二次元熱伝導の方程式

10.12.1　二次元 xy 座標における熱伝導方程式

```
kill(all);
load("vect");
depends(u,[x,y,t]);
depends(h,[x,y]);
depends(v,[x]);
depends(w,[y]);
depends(z,[t]);
declare([m,n,j,k],integer);
assume(K>0);
assume(C>0);
assume(P>0);
assume(Q>0);
assume(A>0);
assume(B>0);
'diff(u,t,1)=C^2*('diff(u,x,2)
 +'diff(u,y,2));
EQ1:expand(%/C^2);
TR:u=h*z;
TR1:h=v*w;
subst([TR],EQ1);
ev(%,diff);
%/z/h;
EQ2:expand(%);
EQ21:lhs(EQ2)=-K^2;
EQ22:rhs(EQ2)=-K^2;
ode2(EQ21,z,t);
Z1:ode2(EQ21,z,t);
EQ22-rhs(EQ22);
subst([TR1],%);
EQ23:ev(%,diff);
V1:last(lhs(EQ23))=-P^2;
K1:K^2=P^2+Q^2;
W1:subst([V1,K1],EQ23);
V2:ode2(V1,v,x);
subst([v=0,x=0],V2);
subst([v=0,x=A],V2);
P1:P=m*%pi/A;
V3:subst([%k2=0,P1],V2);
W2:ode2(W1,w,y);
subst([w=0,y=0],W2);
subst([w=0,y=B],W2);
Q1:Q=n*%pi/B;
W3:subst([%k2=0,Q1],W2);
K2:subst([P1,Q1],K1);
```

```
subst([V3,W3],TR1);
H1:subst([%k1^2=A[m,n]],%);
rhs(H1)=f(x,y);
%*sin((%pi*j*x)/A)*sin((%pi*k*y)/B);
F1:'integrate('integrate(lhs(%),x,0,A),y,
 0,B)='integrate('integrate(rhs(%),x,
 0,A),y,0,B);
ev(%,integrate);
subst([j=m,k=n,x=a,y=b],F1);
F2:ev(%,integrate);
A1:solve(F2,A[m,n])[1];
subst([A1],H1);
subst([%],TR);
DU1:subst([Z1,K2,%c=1],%);
U1:lhs(%)=sum(sum(rhs(%),m,1,inf),n,1,inf);
```

二次元熱伝導方程式を xy 座標表記すると下記となる。ここで、u は x,y,t の関数であり、t は時間を表す。

$$\frac{d}{d\,t}\,u=\left(\frac{d^2}{d\,y^2}\,u+\frac{d^2}{d\,x^2}\,u\right)\,C^2 \tag{10.12.1}$$

上式を変形し、

$$\frac{\frac{d}{d\,t}\,u}{C^2}=\frac{d^2}{d\,y^2}\,u+\frac{d^2}{d\,x^2}\,u \tag{10.12.2}$$

下記のように変数分離できるとして、h は x,y の関数、z は t の関数とする。また、v は x の関数、w は y の関数とする。

$$u=h\,z \tag{10.12.3}$$

$$h=v\,w \tag{10.12.4}$$

(10.12.2) 式に (10.12.3) 式を代入し、整理して、

$$\frac{\frac{d}{d\,t}\,z}{z\,C^2}=\frac{\frac{d^2}{d\,y^2}\,h}{h}+\frac{\frac{d^2}{d\,x^2}\,h}{h} \tag{10.12.5}$$

上式を $-K^2$ と置き、式を分けると、

$$\frac{\frac{d}{d\,t}\,z}{z\,C^2}=-K^2 \tag{10.12.6}$$

$$\frac{\frac{d^2}{d\,y^2}\,h}{h}+\frac{\frac{d^2}{d\,x^2}\,h}{h}=-K^2 \tag{10.12.7}$$

(10.12.6) 式を ode2 関数で解くと、

$$z=\%c\,e^{-t\,C^2\,K^2} \tag{10.12.8}$$

(10.12.7) 式を変形し、

$$K^2+\frac{\frac{d^2}{d\,y^2}\,h}{h}+\frac{\frac{d^2}{d\,x^2}\,h}{h}=0$$

(10.12.4) 式を代入し、整理すると、

$$K^2+\frac{\frac{d^2}{d\,y^2}\,w}{w}+\frac{\frac{d^2}{d\,x^2}\,v}{v}=0 \tag{10.12.9}$$

上式の左辺第三項を $-P^2$ と置き、左辺第二項を $-Q^2$ と置くと、

$$\frac{\frac{d^2}{d\,x^2}\,v}{v} = -P^2 \tag{10.12.10}$$

$$Q^2 + \frac{\frac{d^2}{d\,y^2}\,w}{w} = 0 \tag{10.12.11}$$

ここで、

$$K^2 = Q^2 + P^2 \tag{10.12.12}$$

(10.12.10) 式を ode2 関数で解くと、

$$v = \%k1\sin\left(x\,P\right) + \%k2\cos\left(x\,P\right)$$

$x = 0, x = A$ で $u = 0$ の境界条件とすると、

$$v = \%k1\sin\left(\frac{\pi\,m\,x}{A}\right),\quad P = \frac{\pi\,m}{A} \tag{10.12.13}$$

(10.12.11) 式を ode2 関数で解くと、

$$w = \%k1\sin\left(y\,Q\right) + \%k2\cos\left(y\,Q\right)$$

$y = 0, y = B$ で $u = 0$ の境界条件とすると、

$$w = \%k1\sin\left(\frac{\pi\,n\,y}{B}\right),\quad Q = \frac{\pi\,n}{B} \tag{10.12.14}$$

(10.12.12) 式に (10.12.13) 式、(10.12.14) 式を代入し、

$$K^2 = \frac{\pi^2\,n^2}{B^2} + \frac{\pi^2\,m^2}{A^2} \tag{10.12.15}$$

(10.12.4) 式に (10.12.14) 式、(10.12.15) 式を代入し、係数を $A_{m,n}$ とすると、

$$h = A_{m,n}\sin\left(\frac{\pi\,m\,x}{A}\right)\,\sin\left(\frac{\pi\,n\,y}{B}\right) \tag{10.12.16}$$

初期値：$\mathrm{f}\left(x,y\right)$ とすると、

$$A_{m,n}\sin\left(\frac{\pi\,m\,x}{A}\right)\,\sin\left(\frac{\pi\,n\,y}{B}\right) = \mathrm{f}\left(x,y\right)$$

両辺に $\sin\left(\frac{\pi\,j\,x}{A}\right)\,\sin\left(\frac{\pi\,k\,y}{B}\right)$ を掛け、積分すると、

$$\begin{aligned}A_{m,n}\int_0^A\sin\left(\frac{\pi\,j\,x}{A}\right)\,\sin\left(\frac{\pi\,m\,x}{A}\right)dx\int_0^B\sin\left(\frac{\pi\,k\,y}{B}\right)\,\sin\left(\frac{\pi\,n\,y}{B}\right)dy&\\ =\int_0^B\int_0^A\mathrm{f}\left(x,y\right)\,\sin\left(\frac{\pi\,j\,x}{A}\right)dx\sin\left(\frac{\pi\,k\,y}{B}\right)dy&\end{aligned}$$

$m \neq j,\, n \neq k$ の時、下記のように、左辺が零となる。

$$0 = \int_0^B\int_0^A\mathrm{f}\left(x,y\right)\,\sin\left(\frac{\pi\,j\,x}{A}\right)dx\sin\left(\frac{\pi\,k\,y}{B}\right)dy$$

$m = j,\, n = k$ の時、下記のようになる。

$$\begin{aligned}A_{m,n}\int_0^A\sin\left(\frac{\pi\,a\,m}{A}\right)^2da\int_0^B\sin\left(\frac{\pi\,b\,n}{B}\right)^2db = \frac{A_{m,n}\,A\,B}{4}&\\ =\int_0^B\int_0^A\mathrm{f}\left(a,b\right)\,\sin\left(\frac{\pi\,a\,m}{A}\right)da\sin\left(\frac{\pi\,b\,n}{B}\right)db&\end{aligned}$$

$m = j,\, n = k$ の時のみ値を持つので、上式から $A_{m,n}$ を求めると、

$$A_{m,n} = \frac{4}{A\,B}\int_0^B\int_0^A\mathrm{f}\left(a,b\right)\,\sin\left(\frac{\pi\,a\,m}{A}\right)da\sin\left(\frac{\pi\,b\,n}{B}\right)db$$

(10.12.16) 式に上式を代入すると、

$$h = \frac{4}{A\,B}\sin\left(\frac{\pi\,m\,x}{A}\right)\int_0^B\int_0^A\mathrm{f}\left(a,b\right)\,\sin\left(\frac{\pi\,a\,m}{A}\right)da\sin\left(\frac{\pi\,b\,n}{B}\right)db\sin\left(\frac{\pi\,n\,y}{B}\right)$$

(10.12.3) 式に上式と (10.12.8) 式を代入すると、

$$u = \frac{4}{A\,B}\sin\left(\frac{\pi\,m\,x}{A}\right)\int_0^B\int_0^A\mathrm{f}\left(a,b\right)\,\sin\left(\frac{\pi\,a\,m}{A}\right)da\sin\left(\frac{\pi\,b\,n}{B}\right)db\sin\left(\frac{\pi\,n\,y}{B}\right)\,e^{-t\left(\frac{\pi^2\,n^2}{B^2}+\frac{\pi^2\,m^2}{A^2}\right)C^2}$$

上式を m, n の和の形にすると、

$$u = \frac{4}{A\,B}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{\pi\,n\,y}{B}\right)\sum_{m=1}^{\infty}\sin\left(\frac{\pi\,m\,x}{A}\right)\int_0^B\int_0^A\mathrm{f}\left(a,b\right)\,\sin\left(\frac{\pi\,a\,m}{A}\right)da\sin\left(\frac{\pi\,b\,n}{B}\right)db\,e^{-t\left(\frac{\pi^2\,n^2}{B^2}+\frac{\pi^2\,m^2}{A^2}\right)C^2} \tag{10.12.17}$$

```
LI:[inf=10,C=1,A=2,B=1];
U11:subst(LI,U1);
F3:f(a,b)=sin((%pi*a*1)/A)^4
 *sin((%pi*b*1)/B)^4;
F31:subst(LI,F3);
U12:subst([F31],U11);
subst([t=0],U12);
ev(rhs(%),sum);
ev(%,integrate);
plot3d(%,[x,0,2],[y,0,1],[z,0,1]);
subst([t=0.01],U12);
ev(rhs(%),sum);
ev(%,integrate);
plot3d(%,[x,0,2],[y,0,1],[z,0,1]);
subst([t=0.03],U12);
ev(rhs(%),sum);
ev(%,integrate);
plot3d(%,[x,0,2],[y,0,1],[z,0,1]);
subst([t=0.06],U12);
ev(rhs(%),sum);
ev(%,integrate);
plot3d(%,[x,0,2],[y,0,1],[z,0,1]);
```

(10.12.17) 式に $\infty = 10, C = 1, A = 2, B = 1$ を代入し、$\mathrm{f}\,(a, b)$ として下記とする。

$$\mathrm{f}\,(a, b) = \sin\left(\frac{\pi\, a}{A}\right)^4 \sin\left(\frac{\pi\, b}{B}\right)^4$$

$t = 0, 0.01, 0.03, 0.06$ の図を右図に示す。

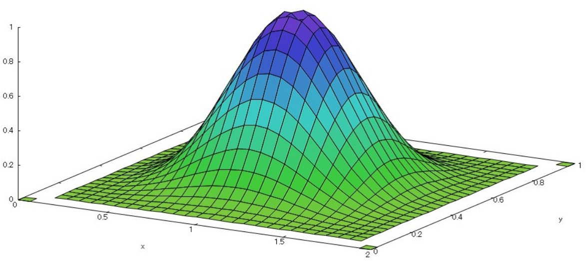


図 10.12.1: 二次元 xy 座標熱伝導境界値問題（境界温度一定）　t=0

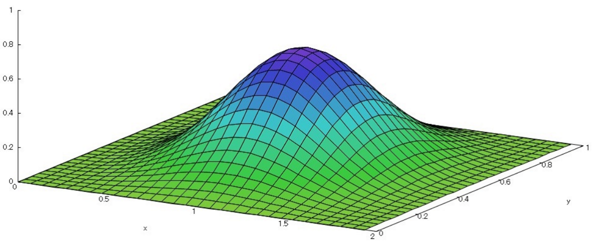


図 10.12.2: 二次元 xy 座標熱伝導境界値問題（境界温度一定）　t=0.01

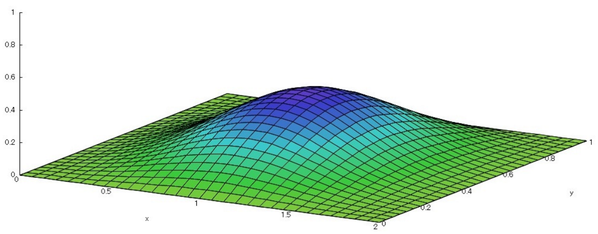


図 10.12.3: 二次元 xy 座標熱伝導境界値問題（境界温度一定）　t=0.03

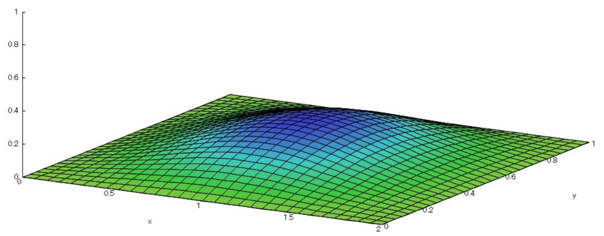


図 10.12.4: 二次元 xy 座標熱伝導境界値問題（境界温度一定）　t=0.06

10.12.2 二次元極座標における熱伝導方程式

```
kill(all);
load("vect");
depends(u,[r,\theta,t]);
depends([r,\theta],[x,y]);
depends(h,[r,\theta]);
depends(v,[r]);
depends(w,[\theta]);
depends(z,[t]);
declare([m,n,j,k],integer);
'diff(u,t,1)=C^2*('diff(u,theta,2)/r^2
 +'diff(u,r,2)+'diff(u,r,1)/r);
EQ1:expand(%/C^2);
TR:u=h*z;
subst([TR],EQ1);
ev(%,diff);
%/z/h;
EQ2:expand(%);
assume(K>0);
assume(C>0);
assume(P>0);
assume(R>0);
EQ21:lhs(EQ2)=-K^2;
EQ22:rhs(EQ2)=-K^2;
expand(%*h+K^2*h);
```

二次元熱伝導方程式を極座標:$r-\theta$ 表記すると、(4.5.15) 式、168 頁から次式となる。

$$\frac{d}{d\,t}\,u=\left(\frac{\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,u}{r^2}+\frac{d^2}{d\,r^2}\,u+\frac{\frac{d}{d\,r}\,u}{r}\right)\,C^2 \qquad (10.12.18)$$

ここで、u は r,θ,t の関数であり、t は時間を表す。$x-y$ 座標と円柱 $(r-\theta)$ 座標の関係を図 4.5.1、164 頁に示す。下記のように変数分離できるとして、h は r,θ の関数、z は t の関数とする。

$$u=h\,z$$

(10.12.18) 式に上式を代入し、微分を実行し、整理すると、

$$\frac{\frac{d}{d\,t}\,z}{z\,C^2}=\frac{\frac{d}{d\,r}\,h}{h\,r}+\frac{\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,h}{h\,r^2}+\frac{\frac{d^2}{d\,r^2}\,h}{h}$$

上式を $-K^2$ と置くと、

$$\frac{\frac{d}{d\,t}\,z}{z\,C^2}=-K^2 \quad C>0,K>0 \qquad (10.12.19)$$

$$\frac{\frac{d}{d\,r}\,h}{h\,r}+\frac{\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,h}{h\,r^2}+\frac{\frac{d^2}{d\,r^2}\,h}{h}=-K^2 \quad K>0 \qquad (10.12.20)$$

上式を変形し、

$$h\,K^2+\frac{\frac{d}{d\,r}\,h}{r}+\frac{\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,h}{r^2}+\frac{d^2}{d\,r^2}\,h=0$$

上式はヘルムホルツ (Helmholtz) の方程式の極座標表記である。

```
TR1:h=v*w;
subst([TR1],EQ22);
ev(%,diff);
EQ23:expand(%*r^2);
assume(n>0);
EQ24:first(lhs(EQ23))=-n^2;
subst([EQ24],EQ23);
expand(%*v/r^2);
EQ25:%-rhs(%);
AN1:ode2(EQ21,z,t);
AN2:ode2(EQ24,w,\theta);
BEEQ4:v*(x^(2*C-2)*B^2*C^2+(A^2-N^2*C^2)
 /x^2)+'diff(v,x,1)*(1-2*A)/x
 +'diff(v,x,2)=0;
EQ25;
BEA1:1-2*A=1;
BEA2:A^2-N^2*C^2=-n^2;
BEA3:B^2*C^2=K^2;
BEA4:2*C-2=0;
solve([BEA1,BEA2,BEA3,BEA4],[A,B,C,N]);
BEA5:%[3];
v=%k1*bessel_j(N,x^C*B)*x^A+%k2
 *bessel_y(N,x^C*B)*x^A;
subst([BEA5],%);
AN3:subst([x=r,%k1=%d1,%k2=%d2],%);
subst([AN3,AN2],TR1);
AN4:subst([%,AN1,%c=1],TR);
```

ここで、h を下記のように変数分離できるとして、v は r の関数、w は θ の関数とする。

$$h=v\,w$$

(10.12.20) 式に上式を代入し、微分を実行し、整理すると、

$$\frac{\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,w}{r^2\,w}+\frac{\frac{d^2}{d\,r^2}\,v}{v}+\frac{\frac{d}{d\,r}\,v}{r\,v}=-K^2$$

上式を変形し、

$$\frac{\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,w}{w}+\frac{r^2\,\left(\frac{d^2}{d\,r^2}\,v\right)}{v}+\frac{r\,\left(\frac{d}{d\,r}\,v\right)}{v}=-r^2\,K^2$$

更に上式の一部を下記と置く。

$$\frac{\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,w}{w}=-n^2 \qquad (10.12.21)$$

$$\frac{r^2\,\left(\frac{d^2}{d\,r^2}\,v\right)}{v}+\frac{r\,\left(\frac{d}{d\,r}\,v\right)}{v}-n^2=-r^2\,K^2$$

上式を整理し、

$$v\,K^2+\frac{d^2}{d\,r^2}\,v+\frac{\frac{d}{d\,r}\,v}{r}-\frac{n^2\,v}{r^2}=0 \qquad (10.12.22)$$

(10.12.19) 式を ode2 関数で解くと、

$$z = \%c\, e^{-t\, C^2\, K^2} \tag{10.12.23}$$

(10.12.21) 式を ode2 関数で解くと、

$$w = \%k1 \sin\left(n\, \theta\right) + \%k2 \cos\left(n\, \theta\right) \tag{10.12.24}$$

上式で $\theta = 0$ と $\theta = 2\, \pi$ で繋がらないといけないので、n は整数となる。(10.12.22) 式は Bessel の微分方程式である。Bessel の微分方程式の一般型は (3.3.16) 式、45 頁から次式となる。

$$\begin{aligned} & v \left(\frac{A^2 - N^2\, C^2}{x^2} + x^{2\, C-2}\, B^2\, C^2 \right) \\ & \quad + \frac{\left(\frac{d}{d\, x}\, v\right)\, \left(1 - 2\, A\right)}{x} + \frac{d^2}{d\, x^2}\, v = 0 \end{aligned}$$

Bessel の微分方程式の一般型の解は N が整数の時、(3.3.18) 式から次式となる。

$$\begin{aligned} v = & \%k2\, \mathrm{bessel\_y}\left(N, x^C\, B\right)\, x^A \\ & + \%k1\, \mathrm{bessel\_j}\left(N, x^C\, B\right)\, x^A \end{aligned}$$

(10.12.22) 式と一般型の係数の関係は、

$$1 - 2\, A = 1, \quad A^2 - C^2\, N^2 = -n^2$$

$$B^2\, C^2 = K^2, \quad 2\, C - 2 = 0$$

上式を解くと、

$$[A = 0, B = K, C = 1, N = n]$$

上式から (10.12.22) 式の解：v は、

$$v = \%d2\, \mathrm{bessel\_y}\left(n, r\, K\right) + \%d1\, \mathrm{bessel\_j}\left(n, r\, K\right)$$

$\mathrm{bessel\_y}\left(n, r\, K\right)$ は $r \to 0$ で $\pm\infty$ となるので、$\%d2 = 0$ とし、(10.12.23) 式、(10.12.24) 式と上式から、u の基本解は、

$$\begin{aligned} u = & \mathrm{bessel\_j}\left(n, r\, K\right) \\ & \times \left(\%k1 \sin\left(n\, \theta\right) + \%k2 \cos\left(n\, \theta\right)\right)\, e^{-t\, C^2\, K^2} \end{aligned} \tag{10.12.25}$$

10.12.3 中実円柱の熱伝導境界値問題（表面温度一定）

```
AN41:subst([%d2=0],AN4);
subst([u=0,t=0,r=R,%d1=1],AN41);
bessel_j(n,K*R)=0;
AL1:K*R=\alpha[m,n];
AL2:solve(AL1,K)[1];
AN42:subst([AL2,%k1=B[m,n],%k2=A[m,n],
 %d1=1],AN41);
AN43:lhs(AN42)=sum(sum(rhs(AN42),n,0,inf)
 ,m,1,inf);
AN44:u(r,\theta,0)=subst([t=0],rhs(AN43));
BS1:bessel_j(n,(alpha[m,n]*r)/R);
SN1:sin(n*theta);
CN1:cos(n*theta);
IN1:cos(k*\theta)*BS1*(A[m,n]*CN1+B[m,n]
 *SN1);
'integrate(lhs(AN44)*cos(k*\theta),
 \theta,-%pi,%pi)=sum(sum('integrate(IN1,
 \theta,-%pi,%pi),n,0,inf),m,1,inf);
lhs(%)=sum(sum('integrate(IN1,\theta,
 -%pi,%pi),n,k,k),m,1,inf);
expand(%);
ev(%,integrate);
'integrate(bessel_j(k,(alpha[j,k]*r)/R)*r*
 lhs(%),r,0,R)=%pi*C[k]*sum('integrate(
 bessel_j(k,(alpha[j,k]*r)/R)*r*bessel_j(
 k,(alpha[m,k]*r)/R)*A[m,k],r,0,R),
 m,1,inf);
lhs(%)=%pi*C[k]*sum('integrate(bessel_j(
 k,(alpha[j,k]*r)/R)*r*bessel_j(k,
 (alpha[m,k]*r)/R)*A[m,k],r,0,R),m,j,j);
lhs(%)=%pi*A[j,k]*C[k]*bessel_j(k+1,
 (alpha[j,k]*R)/R)^2*R^2/2;
AJK:solve(%,A[j,k])[1];
AJK1:subst([j=m,k=n,r=s,\theta=\phi],%);
'integrate(lhs(AN44)*sin(k*\theta),
 \theta,-%pi,%pi)=sum(sum('integrate(
 sin(k*\theta)*(bessel_j(n,(alpha[m,n]
 *r)/R)*(B[m,n]*sin(n*theta)+A[m,n]
 *cos(n*theta))),\theta,-%pi,%pi),
 n,0,inf),m,1,inf);
lhs(%)=sum(sum('integrate(sin(k*\theta)*
 (bessel_j(n,(alpha[m,n]*r)/R)*(B[m,n]*
 sin(n*theta)+A[m,n]*cos(n*theta))),
 \theta,-%pi,%pi),n,k,k),m,1,inf);
```

```
expand(%);
ev(%,integrate);
'integrate(bessel_j(k,(alpha[j,k]*r)/R)
 *r*lhs(%),r,0,R)=%pi*C[k]*sum('integrate(
 bessel_j(k,(alpha[j,k]*r)/R)*r*bessel_j(
 k,(alpha[m,k]*r)/R)*B[m,k],r,0,R),
 m,1,inf);
lhs(%)=%pi*C[k]*sum('integrate(bessel_j(
 k,(alpha[j,k]*r)/R)*r*bessel_j(k,
 (alpha[m,k]*r)/R)*B[m,k],r,0,R),m,j,j);
lhs(%)=%pi*B[j,k]*C[k]*bessel_j(k+1,
 (alpha[j,k]*R)/R)^2*R^2/2;
BJK:solve(%,B[j,k])[1];
BJK1:subst([j=m,k=n,r=s,\theta=\phi],%);
subst([AJK1,BJK1],AN43);
factor(%);
u=(2*
sum(sum((bessel_j(n,(alpha[m,n]*r)/R)
 *(integrate(bessel_j(n,(alpha[m,n]*s)/R)
 *s*integrate(sin(n*phi)*u(s,phi,0)*
 sin(n*theta)+cos(n*phi)*cos(n*
 \theta)*u(s,phi,0),phi,-%pi,%pi),s,0,R))
 *%e^(-(alpha[m,n]^2*t*C^2)/R^2))
 /(C[n]*bessel_j(n+1,alpha[m,n])^2),
 n,0,inf),m,1,inf)
)/(%pi*R^2);
AN45:factor(%);
sin(n*phi)*sin(n*theta)+cos(n*phi)
 *cos(n*theta);
TRG1:%=trigrat(%);
AN46:subst([TRG1],AN45);
```

u は温度で r,θ,t の関数であり、t は時間を表す。$x-y$ 座標と円柱 $(r-\theta)$ 座標の関係を図 4.5.1、164 頁に示す円柱の半径：R で、中実とすると、(10.12.25) 式で $r=0$ で有解であるためには $\%d2=0$ でなければならない。

$$\begin{aligned} u =& \%d1\,\mathrm{bessel\_j}\,(n, r\,K) \\ & \times\ (\%k1 \sin(n\,\theta) + \%k2\cos(n\,\theta))\ e^{-t\,C^2\,K^2} \end{aligned}$$

端部境界：$r=R$ で $u=0$ とすると、

$$\mathrm{bessel\_j}\,(n, K\,R) = 0$$

上式を満足する m 番目の根：α_m を導入する。

$$K\,R = \alpha_{m,n}, \quad K = \frac{\alpha_{m,n}}{R}$$

$\%k1 \to B_{m,n}$, $\%k2 \to A_{m,n}$ に置き換えて、級数の形にすると、

$$u=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{bessel\_j}\left(n,\frac{\alpha_{m,n}\,r}{R}\right)\,\left(B_{m,n}\sin\left(n\,\theta\right)+A_{m,n}\cos\left(n\,\theta\right)\right)\,e^{-\frac{\alpha_{m,n}^2\,t\,C^2}{R^2}} \tag{10.12.26}$$

いま、初期状態：$t=0$ では、

$$\mathrm{u}\left(r,\theta,0\right)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{bessel\_j}\left(n,\frac{\alpha_{m,n}\,r}{R}\right)\,\left(B_{m,n}\sin\left(n\,\theta\right)+A_{m,n}\cos\left(n\,\theta\right)\right) \tag{10.12.27}$$

(10.12.27) 式の両辺に $\cos\left(k\,\theta\right)$ を掛けて積分し、フーリエ級数の関係式：(6.1.6) 式、(6.1.7) 式、(6.1.8) 式から、$n=k$ の項のみが残り、

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{u}\left(r,\theta,0\right)\,\cos\left(k\,\theta\right)d\theta&=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{bessel\_j}\left(n,\frac{\alpha_{m,n}\,r}{R}\right)\int_{-\pi}^{\pi}\cos\left(k\,\theta\right)\,\left(B_{m,n}\sin\left(n\,\theta\right)+A_{m,n}\cos\left(n\,\theta\right)\right)d\theta\\&=\sum_{m=1}^{\infty}\mathrm{bessel\_j}\left(k,\frac{\alpha_{m,k}\,r}{R}\right)\int_{-\pi}^{\pi}B_{m,k}\cos\left(k\,\theta\right)\,\sin\left(k\,\theta\right)+A_{m,k}\cos\left(k\,\theta\right)^2d\theta\\&=\pi\,C_k\sum_{m=1}^{\infty}\mathrm{bessel\_j}\left(k,\frac{\alpha_{m,k}\,r}{R}\right)\,A_{m,k}\quad\text{ここで、}C_k=2\left(k=0\right),\,C_k=1\left(k>0\right)\end{aligned}$$

上式の両辺に $\mathrm{bessel\_j}\left(k,\frac{\alpha_{j,k}\,r}{R}\right)\,r$ を掛けて積分し、フーリエ・ベッセル展開の (7.1.11) 式から $m=j$ の項のみが残り、(7.1.18) 式から、

$$\begin{aligned}&\int_{0}^{R}\mathrm{bessel\_j}\left(k,\frac{\alpha_{j,k}\,r}{R}\right)\,r\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{u}\left(r,\theta,0\right)\,\cos\left(k\,\theta\right)d\theta dr\\&=\pi\,C_k\sum_{m=1}^{\infty}A_{m,k}\int_{0}^{R}\mathrm{bessel\_j}\left(k,\frac{\alpha_{j,k}\,r}{R}\right)\,\mathrm{bessel\_j}\left(k,\frac{\alpha_{m,k}\,r}{R}\right)\,rdr\\&=\pi\,A_{j,k}\,C_k\int_{0}^{R}\mathrm{bessel\_j}\left(k,\frac{\alpha_{j,k}\,r}{R}\right)^2rdr\\&=\frac{\pi\,A_{j,k}\,C_k\,\mathrm{bessel\_j}\left(k+1,\alpha_{j,k}\right)^2R^2}{2}\end{aligned}$$

上式から $A_{j,k}$ を求め、

$$A_{j,k}=\frac{2}{\pi\,C_k\,\mathrm{bessel\_j}\left(k+1,\alpha_{j,k}\right)^2R^2}\int_{0}^{R}\mathrm{bessel\_j}\left(k,\frac{\alpha_{j,k}\,r}{R}\right)\,r\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{u}\left(r,\theta,0\right)\,\cos\left(k\,\theta\right)d\theta dr$$

$j\to m,k\to n$ の置き換えを行い、

$$A_{m,n}=\frac{2}{\pi\,C_n\,\mathrm{bessel\_j}\left(n+1,\alpha_{m,n}\right)^2R^2}\int_{0}^{R}\mathrm{bessel\_j}\left(n,\frac{\alpha_{m,n}\,s}{R}\right)\,s\int_{-\pi}^{\pi}\cos\left(n\,\phi\right)\,\mathrm{u}\left(s,\phi,0\right)d\phi ds \tag{10.12.28}$$

(10.12.27) 式の両辺に $\sin\left(k\,\theta\right)$ を掛けて積分し、フーリエ級数の関係式：(6.1.6) 式、(6.1.7) 式、(6.1.8) 式から、$n=k$ の項のみが残り、

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{u}\left(r,\theta,0\right)\,\sin\left(k\,\theta\right)d\theta&=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{bessel\_j}\left(n,\frac{\alpha_{m,n}\,r}{R}\right)\int_{-\pi}^{\pi}\sin\left(k\,\theta\right)\,\left(B_{m,n}\sin\left(n\,\theta\right)+A_{m,n}\cos\left(n\,\theta\right)\right)d\theta\\&=\sum_{m=1}^{\infty}\mathrm{bessel\_j}\left(k,\frac{\alpha_{m,k}\,r}{R}\right)\int_{-\pi}^{\pi}B_{m,k}\sin\left(k\,\theta\right)^2+A_{m,k}\cos\left(k\,\theta\right)\,\sin\left(k\,\theta\right)d\theta\\&=\pi\sum_{m=1}^{\infty}\mathrm{bessel\_j}\left(k,\frac{\alpha_{m,k}\,r}{R}\right)\,B_{m,k}\quad\text{ここで、}C_k=2\left(k=0\right),\,C_k=1\left(k>0\right)\end{aligned}$$

上式の両辺に $\mathrm{bessel\_j}\left(k,\frac{\alpha_{j,k}\,r}{R}\right)\,r$ を掛けて積分し、フーリエ・ベッセル展開の (7.1.11) 式から $m=j$ の項のみ

が残り、(7.1.18) 式から、

$$
\begin{aligned}
&\int_0^R \mathrm{bessel\_j}\left(k, \frac{\alpha_{j,k}\,r}{R}\right)\, r \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{u}\left(r,\theta,0\right)\,\sin\left(k\,\theta\right)d\theta dr \\
&\qquad = \pi\,C_k \sum_{m=1}^{\infty} B_{m,k} \int_0^R \mathrm{bessel\_j}\left(k, \frac{\alpha_{j,k}\,r}{R}\right)\,\mathrm{bessel\_j}\left(k, \frac{\alpha_{m,k}\,r}{R}\right)\, rdr \\
&\qquad = \pi\,B_{j,k}\,C_k \int_0^R \mathrm{bessel\_j}\left(k, \frac{\alpha_{j,k}\,r}{R}\right)^2 rdr \\
&\qquad = \frac{\pi\,B_{j,k}\,C_k\,\mathrm{bessel\_j}\left(k+1,\alpha_{j,k}\right)^2 R^2}{2}
\end{aligned}
$$

上式から $B_{j,k}$ を求め、

$$
B_{j,k} = \frac{2\int_0^R \mathrm{bessel\_j}\left(k, \frac{\alpha_{j,k}\,r}{R}\right)\, r \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{u}\left(r,\theta,0\right)\,\sin\left(k\,\theta\right)d\theta dr}{\pi\,C_k\,\mathrm{bessel\_j}\left(k+1,\alpha_{j,k}\right)^2 R^2}
$$

$j \to m, k \to n$ の置き換えを行い、

$$
B_{m,n} = \frac{2}{\pi\,C_n\,\mathrm{bessel\_j}\left(n+1,\alpha_{m,n}\right)^2 R^2} \int_0^R \mathrm{bessel\_j}\left(n, \frac{\alpha_{m,n}\,s}{R}\right)\, s \int_{-\pi}^{\pi} \sin\left(n\,\phi\right)\,\mathrm{u}\left(s,\phi,0\right)d\phi ds \tag{10.12.29}
$$

(10.12.26) 式に (10.12.28) 式、(10.12.29) 式を代入し、

$$
\begin{aligned}
u = &\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{bessel\_j}\left(n, \frac{\alpha_{m,n}\,r}{R}\right) \left(\frac{2\int_0^R \mathrm{bessel\_j}\left(n, \frac{\alpha_{m,n}\,s}{R}\right)\, s \int_{-\pi}^{\pi} \sin\left(n\,\phi\right)\,\mathrm{u}\left(s,\phi,0\right)d\phi ds \sin\left(n\,\theta\right)}{\pi\,C_n\,\mathrm{bessel\_j}\left(n+1,\alpha_{m,n}\right)^2 R^2}\right. \\
&\qquad \left. + \frac{2\int_0^R \mathrm{bessel\_j}\left(n, \frac{\alpha_{m,n}\,s}{R}\right)\, s \int_{-\pi}^{\pi} \cos\left(n\,\phi\right)\,\mathrm{u}\left(s,\phi,0\right)d\phi ds \cos\left(n\,\theta\right)}{\pi\,C_n\,\mathrm{bessel\_j}\left(n+1,\alpha_{m,n}\right)^2 R^2}\right) e^{-\frac{\alpha_{m,n}^2\,t\,C^2}{R^2}} \\
= &\frac{2}{\pi\,R^2} \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{bessel\_j}\left(n, \frac{\alpha_{m,n}\,r}{R}\right)}{C_n\,\mathrm{bessel\_j}\left(n+1,\alpha_{m,n}\right)^2} \\
&\times \int_0^R \mathrm{bessel\_j}\left(n, \frac{\alpha_{m,n}\,s}{R}\right)\, s \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{u}\left(s,\phi,0\right)\,\left(\sin\left(n\,\phi\right)\,\sin\left(n\,\theta\right)+\cos\left(n\,\phi\right)\,\cos\left(n\,\theta\right)\right)d\phi ds\, e^{-\frac{\alpha_{m,n}^2\,t\,C^2}{R^2}}
\end{aligned}
$$

下記の関係があり、

$$
\sin\left(n\,\phi\right)\,\sin\left(n\,\theta\right)+\cos\left(n\,\phi\right)\,\cos\left(n\,\theta\right) = \cos\left(n\,\theta - n\,\phi\right)
$$

これを代入すると解は、

$$
\begin{aligned}
u = &\frac{2}{\pi\,R^2} \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{bessel\_j}\left(n, \frac{\alpha_{m,n}\,r}{R}\right)}{C_n\,\mathrm{bessel\_j}\left(n+1,\alpha_{m,n}\right)^2} \\
&\times \int_0^R \mathrm{bessel\_j}\left(n, \frac{\alpha_{m,n}\,s}{R}\right)\, s \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{u}\left(s,\phi,0\right)\,\cos\left(n\,\theta - n\,\phi\right)d\phi ds\, e^{-\frac{\alpha_{m,n}^2\,t\,C^2}{R^2}}
\end{aligned}
\tag{10.12.30}
$$

ここで、$C_n = 2\,(n=0),\; C_n = 1\,(n>0)$

軸対称の場合

```
AN5:subst([n=0,%k2=1],AN4);
AN51:subst([AL2,%d2=0],AN5);
AN511:u=sum(subst([%d1=A[m]],rhs(%)),
 m,1,inf);
```

軸対称では $n=0$ として、(10.12.26) 式は、

$$u=\sum_{m=1}^{\infty}\mathrm{bessel\_j}\left(0,\frac{\alpha_m\,r}{R}\right)\,A_m\,e^{-\frac{\alpha_m^2\,t\,C^2}{R^2}}$$

初期状態：$t=0$ では、

$$\mathrm{u}\left(r,0\right)=\sum_{m=1}^{\infty}\mathrm{bessel\_j}\left(0,\frac{\alpha_m\,r}{R}\right)\,A_m$$

上式はフーリエ・ベッセル展開で、その係数：A_m は、(7.1.5) 式から、

$$A_m=\frac{2}{\mathrm{bessel\_j}\left(1,\alpha_m\right)^2R^2}\times\int_0^R\mathrm{bessel\_j}\left(0,\frac{\alpha_m\,r}{R}\right)\,r\,\mathrm{u}\left(r,0\right)dr$$

上式から、

$$u=\frac{2}{R^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\mathrm{bessel\_j}\left(0,\frac{\alpha_m\,r}{R}\right)}{\mathrm{bessel\_j}\left(1,\alpha_m\right)^2}\times\int_0^R\mathrm{bessel\_j}\left(0,\frac{\alpha_m\,r}{R}\right)\,r\,\mathrm{u}\left(r,0\right)dr\,e^{-\frac{\alpha_m^2\,t\,C^2}{R^2}}\tag{10.12.31}$$

```
subst([t=0,u=u(r,0)],AN511);
AM1:A[m]=2/R^2/bessel_j(1,alpha[m])^2
 *integrate(r*u(r,0)*bessel_j(0,
 (alpha[m]*r)/R),r,0,R);
AN512:subst([AM1],AN511);
CG1:(r/2)^(\nu)*sum((-1)^i*(r/2)^(2*i)/
 (i!)/gamma(\nu+i+1),i,0,inf);
CG2:subst([inf=100],CG1);
LI1:[\nu=0];
subst([LI1],CG2);
CG4:subst([r=\alpha[n]*r],%);
FX41:2*(bessel_j(\nu,alpha[n]*r)*integrate
 (CG4*r*f(r),r,0,1/2))/bessel_j(\nu+1,
 alpha[n])^2*%e^(-(\alpha[n]^2*t*C^2));
FX3:f(r)=(1);
```

ここでベッセル関数を以下の (7.1.20) 式の多項式近似を使用する。これにより (10.12.31) 式の積分が容易に行える。

$$\mathrm{bessel\_j}\left(\nu,x\right)=\frac{x^{\nu}}{2^{\nu}}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^i x^{2\,i}}{2^{2\,i}\,i!\,\Gamma\left(\nu+i+1\right)}$$

$x\approx35$ 以上で数値計算の限界で値が得られていないので、$n=1\rightarrow10$ の範囲で計算する。$R=1, C=0.15$ で、$\mathrm{u}\left(r,0\right)$ として、

$$\mathrm{u}\left(r,0\right)=1\quad 0<r<0.5,\qquad \mathrm{u}\left(r,0\right)=0\quad 0.5<r<1$$

計算結果を以下に示す。

```
LI2:[t=0,C=0.15];
subst([LI1],FX41);
subst([FX3],%);
FX42:subst([LI2],%);
BS1:0;
for N:1 thru 10 do(
m:N,
AL1:subst([LI1],(2*%pi*nu+4*%pi*m-%pi)/4),
AL2:subst([LI1],(2*%pi*nu+4*%pi*(m+1)
 -%pi)/4),
DX1:(AL2-AL1)/4,
X1:AL1-DX1,
X2:AL1+DX1,
AL3:find_root(subst([LI1],bessel_j(\nu,x))
 ,x,X1,X2),
BS1:BS1+subst([\alpha[n]=AL3],FX42));
ev(BS1,sum);
PL1:ev(%,integrate);
plot2d([PL1,PL2,PL3,PL4,PL5,PL6,PL7],
 [r,0,1],[legend,"t=0","t=0.2s","t=0.5s",
 "t=1s","t=2s","t=5s","t=10s"],[style,
 [lines,3,1],[lines,3,2],[lines,3,3],
 [lines,3,4],[lines,3,5],[lines,3,6],
 [lines,3,7]]);
```

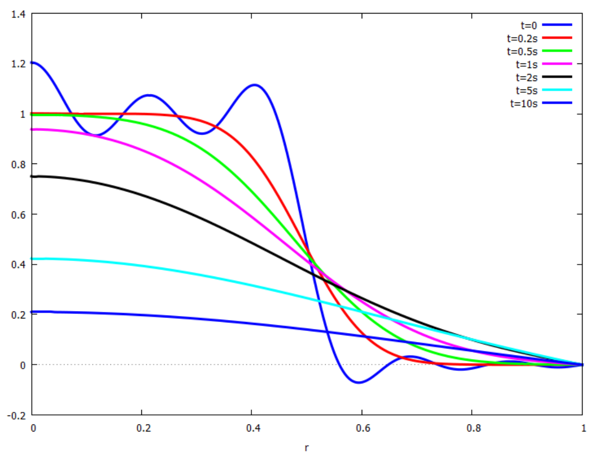


図 10.12.5: 円柱体の軸対称熱伝導境界値問題（表面温度一定）

10.12.4 中実円柱の軸対称熱伝導境界値問題（表面断熱）

```
AN61:subst([%d2=0,n=0,%d1=1],AN4);
diff(AN61,r,1);
diff(bessel_j(0,K*r),r,1)=0;
-%/K;
AL1:K*R=\alpha[i];
AL2:solve(AL1,K)[1];
AN62:subst([AL2,%k2=A[i]],AN61);
subst([t=0],%);
AL3:(x*'diff(bessel_j(\nu,x),x,1))+p*
 bessel_j(\nu,x)=0;
AI1:A[i]=2*\alpha[i]^2/bessel_j(\nu,
 \alpha[i])^2/R^2/(p^2-\nu^2+
 \alpha[i]^2)*integrate(bessel_j(\nu,
 \alpha[i]*r/R)*r*f(r),r,0,R);
AI2:subst([\nu=0,p=0],AI1);
D1:D='integrate('integrate(f(r)*r,
 \theta,0,2*%pi),r,0,R)/%pi/R^2;
D2:ev(%,integrate);
FX3:f(r)=(1);
D=(2*integrate(r,r,0,R/2))/R^2;
D3:subst([FX3,R=1],%);
subst([AI2],AN62);
AN63:u=D+sum(rhs(%),i,1,inf);
CG5:subst([\alpha[n]=\alpha[i]],CG4);
2/R^2*(bessel_j(0,(alpha[i]*r)/R)*
 integrate(bessel_j(0,(alpha[i]*r)/R)*r
 *f(r),r,0,R/2)*%e^(-(alpha[i]^2*t
 *C^2)/R^2))/bessel_j(0,alpha[i])^2;
FX61:2/R^2*(bessel_j(0,(alpha[i]*r)/R)*
 integrate(CG5*r*f(r),r,0,R/2)*
 %e^(-(alpha[i]^2*t*C^2)/R^2))/
 bessel_j(0,alpha[i])^2;
FX62:subst([R=1,f(r)=1],%);
```

u は温度で r,θ,t の関数であり、t は時間を表す。$x-y$ 座標と円柱 $(r-\theta)$ 座標の関係を図 4.5.1、164 頁に示す円柱の半径：R で、中実で軸対称とすると、(10.12.25) 式で $r=0$ で有解であるためには $\%d2=0, \%d1=1$、軸対称のためには $n=0$ でなければならない。

$$u=\mathrm{bessel\_j}\left(0,r\,K\right)\,\%k2\,e^{-t\,C^2\,K^2}$$

端部境界：$r=R$ で断熱条件：$\frac{d}{d\,r}\,u=0$ とすると、

$$\frac{d}{d\,r}\,u=-\mathrm{bessel\_j}\left(1,R\,K\right)\,\%k2\,K\,e^{-t\,C^2\,K^2}=0 \tag{10.12.32}$$

上式が常に成り立つ境界条件は、

$$\mathrm{bessel\_j}\left(1,R\,K\right)=0$$

上式を満足する i 番目の根：α_i を導入する。

$$K\,R=\alpha_i,\quad K=\frac{\alpha_i}{R}$$

$\%k2\rightarrow A_{in}$ に置き換えて、級数の形にすると、

$$u=\sum_{i=1}^{\infty}\mathrm{bessel\_j}\left(0,\frac{\alpha_i\,r}{R}\right)\,A_i\,e^{-\frac{\alpha_i^2\,t\,C^2}{R^2}} \tag{10.12.33}$$

上記の級数式と境界条件から、ディニ (Dini) 展開で、それを以下に示す。(7.1.22) 式、368 頁から、境界条件が次式で、$p=0$ の場合に相当し、

$$\left(\frac{d}{d\,x}\,\mathrm{bessel\_j}\left(\nu,x\right)\right)\,x+\mathrm{bessel\_j}\left(\nu,x\right)\,p=0 \tag{10.12.34}$$

上式の n 番目の根:：α_n とする。級数展開式は、(7.1.23) 式から、

$$\mathrm{f}\left(x\right)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\,\mathrm{bessel\_j}\left(\nu,\frac{\alpha_n\,x}{L}\right) \tag{10.12.35}$$

ここで、係数は、(7.1.24) 式から、

$$\begin{aligned}B_n=&\frac{2\,\alpha_n^2}{\mathrm{bessel\_j}\left(\nu,\alpha_n\right)^2\,\left(p^2-\nu^2+\alpha_n^2\right)\,L^2}\\&\times\int_0^L\mathrm{bessel\_j}\left(\nu,\frac{\alpha_n\,x}{L}\right)\,x\,\mathrm{f}\left(x\right)dx\end{aligned} \tag{10.12.36}$$

いま、初期状態：$t=0$ で $u=f(r)$ とすると、係数は上記のディニ (Dini) 展開の関係式から、

$$A_i=\frac{2\,\alpha_i^2\,\int_0^R\mathrm{bessel\_j}\left(\nu,\frac{\alpha_i\,r}{R}\right)\,r\,\mathrm{f}\left(r\right)dr}{\mathrm{bessel\_j}\left(\nu,\alpha_i\right)^2\,\left(p^2-\nu^2+\alpha_i^2\right)\,R^2}$$

ここで境界条件等から $p=0,\nu=0$ であるから、

$$A_i=\frac{2\,\int_0^R\mathrm{bessel\_j}\left(0,\frac{\alpha_i\,r}{R}\right)\,r\,\mathrm{f}\left(r\right)dr}{\mathrm{bessel\_j}\left(0,\alpha_i\right)^2\,R^2} \tag{10.12.37}$$

また、熱量は保存されるので、熱量：D は、

$$D=\frac{1}{\pi\,R^2}\int_0^R\int_0^{2\,\pi}r\,\mathrm{f}\left(r\right)d\theta dr=\frac{2}{R^2}\int_0^R r\,\mathrm{f}\left(r\right)dr \tag{10.12.38}$$

上記の D を考慮すると、(10.12.33) 式は、下記となり、(10.12.37) 式から、

$$\begin{aligned}u=&D+\sum_{i=1}^{\infty}\mathrm{bessel\_j}\left(0,\frac{\alpha_i\,r}{R}\right)\,A_i\,e^{-\frac{\alpha_i^2\,t\,C^2}{R^2}}\\=&\frac{2}{R^2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\mathrm{bessel\_j}\left(0,\frac{\alpha_i\,r}{R}\right)}{\mathrm{bessel\_j}\left(0,\alpha_i\right)^2}\\&\quad\times\int_0^R\mathrm{bessel\_j}\left(0,\frac{\alpha_i\,r}{R}\right)\,r\,\mathrm{f}\left(r\right)dr\,e^{-\frac{\alpha_i^2\,t\,C^2}{R^2}}\\&+\frac{2}{R^2}\int_0^R r\,\mathrm{f}\left(r\right)dr\end{aligned} \tag{10.12.39}$$

ここでベッセル関数を以下の (7.1.20) 式の関数近似を使用する。

$$\mathrm{bessel\_j}\,(\nu, x) = \frac{x^{\nu}}{2^{\nu}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^{i}\, x^{2\,i}}{2^{2\,i}\, i!\,\Gamma\,(\nu + i + 1)}$$

$x \approx 35$ 以上で数値計算の限界で値が得られていないので、$n = 1 \to 10$ の範囲で計算する。$R = 1, C = 0.15$ で、$\mathrm{f}\,(r)$ として、

$$\mathrm{f}\,(r) = 1 \quad 0 < r < 0.5, \qquad \mathrm{f}\,(r) = 0 \quad 0.5 < r < 1$$

計算結果を以下に示す。

```
LI1:[\nu=1];
LI2:[t=0,C=0.15];
subst([LI1],FX62);
FX63:subst([LI2],%);
BS1:rhs(D3);
for N:1 thru 10 do(
m:N,
AL1:subst([LI1],(2*%pi*nu+4*%pi*m-%pi)/4),
AL2:subst([LI1],(2*%pi*nu+4*%pi*(m+1)-%pi)
 /4),
DX1:(AL2-AL1)/4,
X1:AL1-DX1,
X2:AL1+DX1,
AL3:find_root(subst([LI1],bessel_j(\nu,x)),
 x,X1,X2),
BS1:BS1+subst([\alpha[i]=AL3],FX63));
ev(BS1,sum);
PL1:ev(%,integrate);
plot2d([PL1,PL2,PL3,PL4,PL5,PL6,PL7],
 [r,0,1],[legend,"t=0","t=0.2s","t=0.5s",
 "t=1s","t=2s","t=5s","t=20s"],[style,
 [lines,3,1],[lines,3,2],[lines,3,3],
 [lines,3,4],[lines,3,5],[lines,3,6],
 [lines,3,7]]);
```

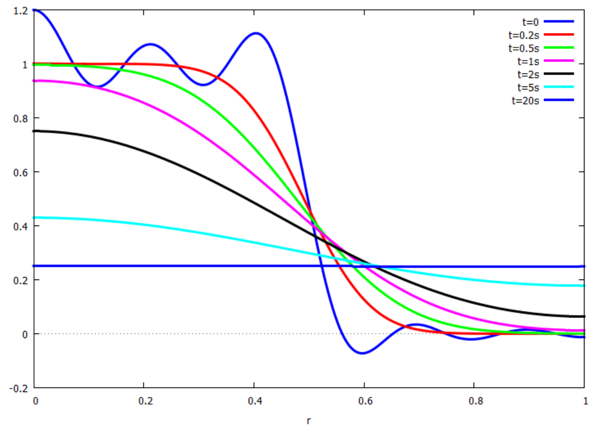


図 10.12.6: 円柱体の軸対称熱伝導境界値問題（表面断熱）

10.13 三次元熱伝導の方程式

10.13.1 極座標における三次元熱伝導方程式

熱伝導方程式は次式となり、

$$\frac{d}{d\,t}\,u=\nabla^2\,u$$

図 4.5.2、169 頁に示す極座標：$r-\theta-\phi$ の三次元熱伝導方程式は (4.5.31) 式、176 頁から次式で表現できる。

$$\frac{d}{d\,t}\,u=\left(\frac{\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,u}{r^2}+\frac{\cos\left(\theta\right)\,\left(\frac{d}{d\,\theta}\,u\right)}{r^2\,\sin\left(\theta\right)}+\frac{d^2}{d\,r^2}\,u+\frac{2\,\left(\frac{d}{d\,r}\,u\right)}{r}+\frac{\frac{d^2}{d\,\phi^2}\,u}{r^2\,\sin\left(\theta\right)^2}\right)C^2 \tag{10.13.1}$$

```
kill(all);
depends(u,[t,r,\theta,\phi]);
depends(h,[r,\theta,\phi]);
depends(z,[t]);
assume(K>0);
assume(n>0);
assume(m>0);
assume(C>0);
assume(r>0);
declare(m,integer);
declare(n,integer);
EQ1:'diff(u,\theta,2)/r^2+(cos(\theta)*(
 'diff(u,\theta,1)))/(r^2*sin(\theta))+
 'diff(u,r,2)+(2*('diff(u,r,1)))/r+'diff(u,
 \phi,2)/(r^2*sin(\theta)^2)+K^2*u=0;
EQ5:diff(u,t,1)=C^2*(lhs(EQ1)
 -first(lhs(EQ1)));
```

```
TR5:u=h*z;
subst([TR5],EQ5);
ev(%,diff);
EQ51:expand(%/C^2/h/z);
EQ52:lhs(EQ51)=-K^2;
EQ53:rhs(EQ51)=-K^2;
EQ54:expand((EQ53+K^2)*h);
U3:u=sum(bessel_j((2*n+1)/2,r*K)*((sum(
 B[m,n]*sin(m*phi)*P[m,n](cos(theta))+
 A[m,n]*cos(m*phi)*P[m,n](cos(theta)),m,1,
 n))+A[0,n]*P[n](cos(theta))),n,
 1,inf)/sqrt(r);
K3:K=alpha[n,i];
ode2(EQ52,z,t);
rhs(%)*rhs(U3);
subst([K3,%c=1],%);
AN1:u=sum(%,i,1,inf);
```

ここで、u は t,r,θ,ϕ の関数であり、下記のように変数分離できるとして、z は時間：t の関数、h は r,θ,ϕ の関数とする。

$$u=h\,z$$

(10.13.1) 式に上式を代入し、微分を実行し、整理すると、

$$h\,\left(\frac{d}{d\,t}\,z\right)=\left(\frac{\left(\frac{d}{d\,\theta}\,h\right)\,\cos\left(\theta\right)\,z}{r^2\,\sin\left(\theta\right)}+\frac{\left(\frac{d^2}{d\,\phi^2}\,h\right)\,z}{r^2\,\sin\left(\theta\right)^2}+\frac{2\,\left(\frac{d}{d\,r}\,h\right)\,z}{r}+\frac{\left(\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,h\right)\,z}{r^2}+\left(\frac{d^2}{d\,r^2}\,h\right)\,z\right)C^2$$

上式を変形し、

$$\frac{\frac{d}{d\,t}\,z}{z\,C^2}=\frac{\left(\frac{d}{d\,\theta}\,h\right)\,\cos\left(\theta\right)}{h\,r^2\,\sin\left(\theta\right)}+\frac{\frac{d^2}{d\,\phi^2}\,h}{h\,r^2\,\sin\left(\theta\right)^2}+\frac{2\,\left(\frac{d}{d\,r}\,h\right)}{h\,r}+\frac{\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,h}{h\,r^2}+\frac{\frac{d^2}{d\,r^2}\,h}{h}$$

上式を $-K^2$ と置く。

$$\frac{\frac{d}{d\,t}\,z}{z\,C^2}=-K^2 \tag{10.13.2}$$

$$\frac{\left(\frac{d}{d\,\theta}\,h\right)\,\cos\left(\theta\right)}{h\,r^2\,\sin\left(\theta\right)}+\frac{\frac{d^2}{d\,\phi^2}\,h}{h\,r^2\,\sin\left(\theta\right)^2}+\frac{2\,\left(\frac{d}{d\,r}\,h\right)}{h\,r}+\frac{\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,h}{h\,r^2}+\frac{\frac{d^2}{d\,r^2}\,h}{h}=-K^2 \tag{10.13.3}$$

(10.13.3) 式を変形し、

$$h\,K^2+\frac{\left(\frac{d}{d\,\theta}\,h\right)\,\cos\left(\theta\right)}{r^2\,\sin\left(\theta\right)}+\frac{\frac{d^2}{d\,\phi^2}\,h}{r^2\,\sin\left(\theta\right)^2}+\frac{2\,\left(\frac{d}{d\,r}\,h\right)}{r}+\frac{\frac{d^2}{d\,\theta^2}\,h}{r^2}+\frac{d^2}{d\,r^2}\,h=0$$

上式は (10.7.1) 式の三次元ヘルムホルツの方程式であり、その解は (10.7.16) 式から次式となる。

$$h=\frac{1}{\sqrt{r}}\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{bessel\_j}\left(\frac{2\,n+1}{2},r\,K\right)\left(\left(\sum_{m=1}^{n}B_{m,n}\sin\left(m\,\phi\right)\,P_{m,n}\left(\cos\left(\theta\right)\right)+A_{m,n}\cos\left(m\,\phi\right)\,P_{m,n}\left(\cos\left(\theta\right)\right)\right)+A_{0,n}\,P_n\left(\cos\left(\theta\right)\right)\right) \tag{10.13.4}$$

(10.13.2) 式の解は ode2 関数で得られ、

$$z=\%c\,e^{-t\,C^2\,K^2} \tag{10.13.5}$$

境界：$r=R$ で $u=0$ とすると、次式の条件となり、

$$\mathrm{bessel\_j}\left(\frac{2\,n+1}{2},K\,R\right)=0$$

上式が成り立つ根：K を求め、その i 番目の根を $\alpha_{n,i}$ とする。

$$K=\alpha_{n,i}$$

上式の関係と (10.13.4) 式と (10.13.5) 式から、解：u は、

$$u=\frac{1}{\sqrt{r}}\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{bessel\_j}\left(\frac{2\,n+1}{2},\alpha_{n,i}\,r\right)\left(\left(\sum_{m=1}^{n}B_{m,n}\sin\left(m\,\phi\right)\,P_{m,n}\left(\cos\left(\theta\right)\right)+A_{m,n}\cos\left(m\,\phi\right)\,P_{m,n}\left(\cos\left(\theta\right)\right)\right)+A_{0,n}\,P_n\left(\cos\left(\theta\right)\right)\right)\right)e^{-\alpha_{n,i}^2\,t\,C^2} \tag{10.13.6}$$

```
FI1:f(r,s,\phi)=subst([t=0,n=k,m=j,i=l,cos(\theta)=s],rhs(AN1));
BJ:bessel_j((2*k+1)/2,(alpha[k,l]*r));
SJ:sin(j*phi);
CJ:cos(j*phi);
PJ:P[j,k](s);
FI2L:'integrate(lhs(FI1)*cos(m*\phi),\phi,-%pi,%pi);
FI2R1:sum(sum(sum('integrate(BJ/sqrt(r)*B[j,k]*SJ*PJ*cos(m*\phi),\phi,-%pi,%pi),j,1,k)
 ,k,1,inf),l,1,inf);
FI2R2:sum(sum(sum('integrate(BJ/sqrt(r)*A[j,k]*CJ*PJ*cos(m*\phi),\phi,-%pi,%pi),j,1,k)
 ,k,1,inf),l,1,inf);
FI2R3:sum(sum(('integrate(BJ/sqrt(r)*A[0,k]*P[k](s)*cos(m*\phi),\phi,-%pi,%pi))
 ,k,1,inf),l,1,inf);
FI2:FI2L=FI2R1+FI2R2+FI2R3;
FI2R21:sum(sum(sum('integrate(BJ/sqrt(r)*A[j,k]*CJ*PJ*cos(m*\phi),\phi,-%pi,%pi),j,m,
 m),k,1,inf),l,1,inf);
ev(%,integrate);
FI2L=%;
FI3L:'integrate('integrate(lhs(FI1)*cos(m*\phi)*P[m,n](s),\phi,-%pi,%pi),s,-1,1);
FI3R:sum(sum('integrate(%pi*BJ/sqrt(r)*A[m,k]*P[m,k](s)*P[m,n](s),s,-1,1),k,1,inf)
 ,l,1,inf);
FI3R:sum(sum('integrate(%pi*BJ/sqrt(r)*A[m,k]*P[m,k](s)*P[m,n](s),s,-1,1),k,n,n)
 ,l,1,inf);
subst(['integrate(P[m,n](s)^2,s,-1,1)=2*(n+m)!/(2*n+1)/(n-m)!],%);
FI3L=%;
BJ1:subst([l=i,k=n],BJ);
```

```
FI4L:'integrate('integrate('integrate(lhs(FI1)*cos(m*\phi)*P[m,n](s)*%*r*sqrt(r),
 \phi,-%pi,%pi),s,-1,1),r,0,R);
FI4R:2*%pi*A[m,n]*(n+m)!*sum('integrate(bessel_j((2*n+1)/2,(alpha[n,l]*r))*BJ1
 *r,r,0,R),l,1,inf)/((2*n+1)*(n-m)!);
2*%pi*A[m,n]*(n+m)!*sum('integrate(bessel_j((2*n+1)/2,(alpha[n,l]*r))*BJ1
 *r,r,0,R),l,i,i)/((2*n+1)*(n-m)!);
subst(['integrate(bessel_j((2*n+1)/2,(alpha[n,i]*r))^2*r,r,0,R)=bessel_j(n+1/2+1,
 (alpha[n,i])*R)^2*R^2/2],%);
FI5:FI4L=%;
ANM1:factor(solve(%,A[m,n])[1]);
ANM2:A[m,n]=((2*n+1)*(n-m)!*'integrate(bessel_j((2*n+1)/2,alpha[n,i]*r)*r^(3/2)
 *'integrate('integrate(cos(m*phi)*f(r,\theta,phi),phi,-%pi,%pi)*P[m,n](
 cos(\theta))*sin(\theta),\theta,0,%pi),r,0,R))/(%pi*(n+m)!*bessel_j(
 (2*n+3)/2,alpha[n,i]*R)^2*R^2);
BMN1:subst([A[m,n]=B[m,n],cos(m*\phi)=sin(m*\phi)],ANM1);
BMN2:subst([A[m,n]=B[m,n],cos(m*\phi)=sin(m*\phi)],ANM2);
```

いま、$t=0$ の時の初期値：$\mathrm{f}(r,\theta,\phi)$ とする。(10.13.6) 式に $t=0, i\to l, n\to k, m\to j, cos(\theta)\to s$ に置いて、

$$\begin{aligned}\mathrm{f}(r,s,\phi)=\frac{1}{\sqrt{r}}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{bessel\_j}\left(\frac{2\,k+1}{2},\alpha_{k,l}\,r\right)\left(\left(\sum_{j=1}^{k}B_{j,k}\sin(j\,\phi)\;P_{j,k}(s)+A_{j,k}\cos(j\,\phi)\;P_{j,k}(s)\right)\right.\\ \left.+A_{0,k}\,P_k(s)\right)\end{aligned}$$

上式の両辺に $\cos(m\,\phi)$ を掛け、ϕ で積分して、$m=j$ のみ値を持ち、

$$\begin{aligned}&\int_{-\pi}^{\pi}\cos(m\,\phi)\,\mathrm{f}(r,s,\phi)\,d\phi\\ &=\frac{1}{\sqrt{r}}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{bessel\_j}\left(\frac{2\,k+1}{2},\alpha_{k,l}\,r\right)\sum_{j=1}^{k}B_{j,k}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(j\,\phi)\;\cos(m\,\phi)\,d\phi\,P_{j,k}(s)\\ &\quad+\frac{1}{\sqrt{r}}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{bessel\_j}\left(\frac{2\,k+1}{2},\alpha_{k,l}\,r\right)\sum_{j=1}^{k}A_{j,k}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(j\,\phi)\;\cos(m\,\phi)\,d\phi\,P_{j,k}(s)\\ &\quad+\frac{1}{\sqrt{r}}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(m\,\phi)\,d\phi\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}A_{0,k}\,\mathrm{bessel\_j}\left(\frac{2\,k+1}{2},\alpha_{k,l}\,r\right)\;P_k(s)\\ &=\frac{1}{\sqrt{r}}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(m\,\phi)^2d\phi\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{bessel\_j}\left(\frac{2\,k+1}{2},\alpha_{k,l}\,r\right)\;A_{m,k}\,P_{m,k}(s)\\ &=\frac{1}{\sqrt{r}}\pi\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{bessel\_j}\left(\frac{2\,k+1}{2},\alpha_{k,l}\,r\right)\;A_{m,k}\,P_{m,k}(s)\end{aligned}\tag{10.13.7}$$

上式の両辺に $P_{m,n}(s)$ を掛け、s で積分して、(7.2.22) 式から $n=k$ のみ値を持ち、(7.2.43) 式から

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^{1}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(m\,\phi)\,\mathrm{f}(r,s,\phi)\,d\phi\,P_{m,n}(s)\,ds\\ &=\frac{1}{\sqrt{r}}\pi\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{bessel\_j}\left(\frac{2\,k+1}{2},\alpha_{k,l}\,r\right)\;A_{m,k}\int_{-1}^{1}P_{m,k}(s)\;P_{m,n}(s)\,ds\\ &=\frac{1}{\sqrt{r}}\pi\,A_{m,n}\left(\sum_{l=1}^{\infty}\mathrm{bessel\_j}\left(\frac{2\,n+1}{2},\alpha_{n,l}\,r\right)\right)\int_{-1}^{1}P_{m,n}(s)^2ds\\ &=\frac{2\,\pi\,A_{m,n}\;(n+m)!}{(2\,n+1)\;(n-m)!\,\sqrt{r}}\sum_{l=1}^{\infty}\mathrm{bessel\_j}\left(\frac{2\,n+1}{2},\alpha_{n,l}\,r\right)\end{aligned}$$

上式の両辺に $\mathrm{bessel\_j}\left(\frac{2n+1}{2}, \alpha_{n,i}\, r\right) r^{\frac{3}{2}}$ を掛け、r で積分して、(7.1.11) 式から $i = l$ のみ値を持ち、(7.1.17) 式から

$$
\begin{aligned}
&\int_0^R \mathrm{bessel\_j}\left(\frac{2\,n+1}{2}, \alpha_{n,i}\, r\right) r^{\frac{3}{2}} \int_{-1}^1 \int_{-\pi}^{\pi} \cos(m\,\phi)\ \mathrm{f}(r,s,\phi)\, d\phi\, P_{m,n}(s)\, dsdr \\
&\quad = \frac{2\,\pi\, A_{m,n}\ (n+m)!}{(2\,n+1)\ (n-m)!} \sum_{l=1}^{\infty} \int_0^R \mathrm{bessel\_j}\left(\frac{2\,n+1}{2}, \alpha_{n,i}\, r\right) \mathrm{bessel\_j}\left(\frac{2\,n+1}{2}, \alpha_{n,l}\, r\right) rdr \\
&\quad = \frac{2\,\pi\, A_{m,n}\ (n+m)!}{(2\,n+1)\ (n-m)!} \int_0^R \mathrm{bessel\_j}\left(\frac{2\,n+1}{2}, \alpha_{n,i}\, r\right)^2 rdr \\
&\quad = \frac{\pi\, A_{m,n}\, \mathrm{bessel\_j}\left(n+\frac{3}{2}, \alpha_{n,i}\, R\right)^2\ (n+m)!\, R^2}{(2\,n+1)\ (n-m)!}
\end{aligned}
$$

上式から、$A_{m,n}$ を求めると、

$$
\begin{aligned}
A_{m,n} = &\frac{(2\,n+1)\ (n-m)!}{\pi\ (n+m)!\, \mathrm{bessel\_j}\left(\frac{2\,n+3}{2}, \alpha_{n,i}\, R\right)^2 R^2} \\
&\times \int_0^R \mathrm{bessel\_j}\left(\frac{2\,n+1}{2}, \alpha_{n,i}\, r\right) r^{\frac{3}{2}} \int_{-1}^1 \int_{-\pi}^{\pi} \cos(m\,\phi)\ \mathrm{f}(r,s,\phi)\, d\phi\, P_{m,n}(s)\, dsdr
\end{aligned}
$$

上式で、$s \to cos(\theta)$ に置き換えると、

$$
\begin{aligned}
A_{m,n} = &\frac{(2\,n+1)\ (n-m)!}{\pi\ (n+m)!\, \mathrm{bessel\_j}\left(\frac{2\,n+3}{2}, \alpha_{n,i}\, R\right)^2 R^2} \\
&\times \int_0^R \mathrm{bessel\_j}\left(\frac{2\,n+1}{2}, \alpha_{n,i}\, r\right) r^{\frac{3}{2}} \int_0^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(m\,\phi)\ \mathrm{f}(r,\theta,\phi)\, d\phi \sin(\theta)\ P_{m,n}(\cos(\theta))\, d\theta dr
\end{aligned}
\tag{10.13.8}
$$

上式と同様に $B_{m,n}$ を求めると、

$$
\begin{aligned}
B_{m,n} = &\frac{(2\,n+1)\ (n-m)!}{\pi\ (n+m)!\, \mathrm{bessel\_j}\left(\frac{2\,n+3}{2}, \alpha_{n,i}\, R\right)^2 R^2} \\
&\times \int_0^R \mathrm{bessel\_j}\left(\frac{2\,n+1}{2}, \alpha_{n,i}\, r\right) r^{\frac{3}{2}} \int_0^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(m\,\phi)\ \mathrm{f}(r,\theta,\phi)\, d\phi \sin(\theta)\ P_{m,n}(\cos(\theta))\, d\theta dr
\end{aligned}
\tag{10.13.9}
$$

```
subst([m=0],FI2);
ev(%,integrate);
FI6L:'integrate('integrate(f(r,s,phi)*P[n](s),phi,-%pi,%pi),s,-1,1);
(2*%pi*sum(sum('integrate(A[0,k]*bessel_j((2*k+1)/2,(alpha[k,l]*r))*P[k](s)*P[n](s)
 ,s,-1,1),k,1,inf),l,1,inf))/sqrt(r);
(2*%pi*sum(sum('integrate(A[0,k]*bessel_j((2*k+1)/2,(alpha[k,l]*r))*P[k](s)*P[n](s)
 ,s,-1,1),k,n,n),l,1,inf))/sqrt(r);
subst(['integrate(P[n](s)^2,s,-1,1)=2/(2*n+1)],%);
FI6L=%;
FI7L:'integrate('integrate('integrate(f(r,s,phi)*P[n](s)*BJ1*r*sqrt(r),phi,-%pi,%pi)
 ,s,-1,1),r,0,R);
(4*%pi*A[0,n]*sum('integrate(bessel_j((2*n+1)/2,(alpha[n,l]*r))*BJ1*r,r,0,R),l,1,inf
 ))/((2*n+1));
(4*%pi*A[0,n]*sum('integrate(bessel_j((2*n+1)/2,(alpha[n,l]*r))*BJ1*r,r,0,R),l,i,i
 ))/((2*n+1));
subst(['integrate(bessel_j((2*n+1)/2,(alpha[n,i]*r))^2*r,r,0,R)=bessel_j(n+1/2+1,
 (alpha[n,i]*R))^2*R^2/2],%);
```

```
FI7L=%;
factor(solve(%,A[0,n])[1]);
A[0,n]=((2*n+1)*'integrate(bessel_j((2*n+1)/2,alpha[n,i]*r)*r^(3/2)*'integrate(
 'integrate(f(r,\theta,phi),phi,-%pi,%pi)*P[n](cos(\theta))*sin(\theta),
 \theta,0,%pi),r,0,R))/(2*%pi*bessel_j((2*n+3)/2,alpha[n,i]*R)^2*R^2);
```

(10.13.7) 式で $m=0$ とすると、

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{f}(r,s,\phi)\,d\phi =&\frac{1}{\sqrt{r}}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{bessel\_j}\left(\frac{2\,k+1}{2},\alpha_{k,l}\,r\right)\sum_{j=1}^{k}B_{j,k}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(j\,\phi)\,d\phi\,P_{j,k}(s)\\&+\frac{1}{\sqrt{r}}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{bessel\_j}\left(\frac{2\,k+1}{2},\alpha_{k,l}\,r\right)\sum_{j=1}^{k}A_{j,k}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(j\,\phi)\,d\phi\,P_{j,k}(s)\\&+\frac{2\,\pi}{\sqrt{r}}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}A_{0,k}\,\mathrm{bessel\_j}\left(\frac{2\,k+1}{2},\alpha_{k,l}\,r\right)P_k(s)\end{aligned}$$

上式の両辺に $P_n(s)$ を掛け、s で積分して、(7.2.8) 式から $k=n$ のみ値を持ち、(7.2.17) 式から

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{f}(r,s,\phi)\,d\phi\,P_n(s)\,ds =&\frac{2\,\pi}{\sqrt{r}}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}A_{0,k}\,\mathrm{bessel\_j}\left(\frac{2\,k+1}{2},\alpha_{k,l}\,r\right)\int_{-1}^{1}P_k(s)\,P_n(s)\,ds\\=&\frac{2\,\pi}{\sqrt{r}}A_{0,n}\left(\sum_{l=1}^{\infty}\mathrm{bessel\_j}\left(\frac{2\,n+1}{2},\alpha_{n,l}\,r\right)\right)\int_{-1}^{1}P_n(s)^2ds\\=&\frac{4\,\pi\,A_{0,n}}{(2\,n+1)\sqrt{r}}\sum_{l=1}^{\infty}\mathrm{bessel\_j}\left(\frac{2\,n+1}{2},\alpha_{n,l}\,r\right)\end{aligned}$$

上式の両辺に $\mathrm{bessel\_j}\left(\frac{2\,n+1}{2},\alpha_{n,i}\,r\right)r^{\frac{3}{2}}$ を掛け、r で積分して、(7.1.11) 式から $l=i$ のみ値を持ち、(7.1.17) 式から

$$\begin{aligned}&\int_{0}^{R}\mathrm{bessel\_j}\left(\frac{2\,n+1}{2},\alpha_{n,i}\,r\right)r^{\frac{3}{2}}\int_{-1}^{1}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{f}(r,s,\phi)\,d\phi\,P_n(s)\,dsdr\\&=\frac{4\,\pi}{2\,n+1}A_{0,n}\sum_{l=1}^{\infty}\int_{0}^{R}\mathrm{bessel\_j}\left(\frac{2\,n+1}{2},\alpha_{n,i}\,r\right)\mathrm{bessel\_j}\left(\frac{2\,n+1}{2},\alpha_{n,l}\,r\right)rdr\\&=\frac{4\,\pi}{2\,n+1}A_{0,n}\int_{0}^{R}\mathrm{bessel\_j}\left(\frac{2\,n+1}{2},\alpha_{n,i}\,r\right)^2rdr\\&=\frac{2\,\pi}{2\,n+1}A_{0,n}\,\mathrm{bessel\_j}\left(n+\frac{3}{2},\alpha_{n,i}\,R\right)^2R^2\end{aligned}$$

上式から、$A_{0,n}$ を求めると、

$$A_{0,n}=\frac{(2\,n+1)}{2\,\pi\,\mathrm{bessel\_j}\left(\frac{2\,n+3}{2},\alpha_{n,i}\,R\right)^2R^2}\int_{0}^{R}\mathrm{bessel\_j}\left(\frac{2\,n+1}{2},\alpha_{n,i}\,r\right)r^{\frac{3}{2}}\int_{-1}^{1}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{f}(r,s,\phi)\,d\phi\,P_n(s)\,dsdr$$

上式で、$s\to cos(\theta)$ に置き換えると、

$$\begin{aligned}A_{0,n}=&\frac{(2\,n+1)}{2\,\pi\,\mathrm{bessel\_j}\left(\frac{2\,n+3}{2},\alpha_{n,i}\,R\right)^2R^2}\\&\times\int_{0}^{R}\mathrm{bessel\_j}\left(\frac{2\,n+1}{2},\alpha_{n,i}\,r\right)r^{\frac{3}{2}}\int_{0}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{f}(r,\theta,\phi)\,d\phi\sin(\theta)\,P_n(\cos(\theta))\,d\theta dr\end{aligned}\tag{10.13.10}$$

$t=0$ の時の初期値：$\mathrm{f}(r,\theta,\phi)$ を与え、(10.13.8) 式、(10.13.9) 式、(10.13.10) 式から $A_{m,n},B_{m,n},A_{0,n}$ を求め、(10.13.6) 式に代入すると、熱伝導状態が得られる。

第11章　積分方程式

積分方程式は未知の関数を含んだ積分がある関数方程式である。ここでは「近藤次郎：積分方程式とその応用 [12]」を主に参考にした。

11.1　積分方程式の種類

```
kill(all);
assume(t>0);
IE1:integrate(k(t,\xi)*x(\xi),\xi,a,b)=
 f(t);
IE2:x(t)-\alpha*integrate(k(t,\xi)*x(\xi),
 \xi,a,b)=f(t);
IE3:x(t)-\alpha*integrate(k(t,\xi)*x(\xi),
 \xi,a,b)=0;
IE4:integrate(k(t,\xi)*x(\xi),\xi,a,t)=
 f(t);
IE5:x(t)-\alpha*integrate(k(t,\xi)*x(\xi),
 \xi,a,t)=f(t);
IE6:x(t)-\alpha*integrate(k(t,\xi)*x(\xi),
 \xi,a,t)=0;
```

既知関数：$\mathrm{f}(t)$、既知関数：$\mathrm{k}(t,\xi)$、パラメタ：α、未知関数：$\mathrm{x}(\xi)$ とする。積分方程式として下記のように分類できる。

フレドホルム型第 1 種積分方程式：

$$\int_a^b \mathrm{k}(t,\xi)\,\mathrm{x}(\xi)\,d\xi = \mathrm{f}(t) \tag{11.1.1}$$

フレドホルム型第 2 種積分方程式：

$$\mathrm{x}(t) - \alpha\int_a^b \mathrm{k}(t,\xi)\,\mathrm{x}(\xi)\,d\xi = \mathrm{f}(t) \tag{11.1.2}$$

フレドホルム型同次積分方程式：

$$\mathrm{x}(t) - \alpha\int_a^b \mathrm{k}(t,\xi)\,\mathrm{x}(\xi)\,d\xi = 0 \tag{11.1.3}$$

ボルテラ型第 1 種積分方程式：

$$\int_a^t \mathrm{k}(t,\xi)\,\mathrm{x}(\xi)\,d\xi = \mathrm{f}(t) \tag{11.1.4}$$

ボルテラ型第 2 種積分方程式：

$$\mathrm{x}(t) - \alpha\int_a^t \mathrm{k}(t,\xi)\,\mathrm{x}(\xi)\,d\xi = \mathrm{f}(t) \tag{11.1.5}$$

ボルテラ型同次積分方程式：

$$\mathrm{x}(t) - \alpha\int_a^t \mathrm{k}(t,\xi)\,\mathrm{x}(\xi)\,d\xi = 0 \tag{11.1.6}$$

11.2 ボルテラ型積分方程式

11.2.1 ボルテラ型第二種積分方程式の解法（級数）

既知関数 : $\mathrm{f}(t)$、既知関数 : $\mathrm{K}(t,\xi)$、未知関数 : $\mathrm{x}(t)$ とする。下記のボルテラ型第二種積分方程式の解法を下記に示す。

$$\mathrm{x}(t)-\int_0^t \mathrm{K}(t,\xi)\,\mathrm{x}(\xi)\,d\xi=\mathrm{f}(t) \tag{11.2.1}$$

```
kill(all);
assume(t>0);
assume(\tau>0);
IE1:x(t)-'integrate(K(t,\xi)*x(\xi),
 \xi,0,t)=f(t);
IE2:x(t)=f(t)-'integrate(G(t,\xi)*f(\xi),
 \xi,0,t);
G1:G(t,\xi)=-sum(k[n](t,\xi),n,1,inf);
K1:k[1](t,\xi)=K(t,\xi);
```

```
K2:k[2](t,\xi)=integrate(K(t,\tau)
 *k[1](\tau,\xi),\tau,\xi,t);
K21:subst([\tau=\tau[2],t=\tau[1]],K2);
K3:k[3](t,\xi)=integrate(K(t,\tau)
 *k[2](\tau,\xi),\tau,\xi,t);
subst([\tau=\tau[1]],K3);
subst([K21],%);
K31:subst([\tau[2]=\tau[3],\tau[1]
 =\tau[2],t=\tau[1]],%);
K4:k[4](t,\xi)=integrate(K(t,\tau)
 *k[3](\tau,\xi),\tau,\xi,t);
subst([\tau=\tau[1]],K4);
subst([K31],%);
KN:k[n](t,\xi)=integrate(K(t,\tau)
 *k[n-1](\tau,\xi),\tau,\xi,t);
```

下記の級数を重複核という。

$$\begin{aligned}
k_1(t,\xi)&=\mathrm{K}(t,\xi)\\
k_2(t,\xi)&=\int_\xi^t \mathrm{K}(t,\tau)\,k_1(\tau,\xi)\,d\tau\\
k_3(t,\xi)&=\int_\xi^t \mathrm{K}(t,\tau)\,k_2(\tau,\xi)\,d\tau\\
&=\int_\xi^t\int_\xi^{\tau_1}\mathrm{K}(\tau_1,\tau_2)\,k_1(\tau_2,\xi)\,d\tau_2\,\mathrm{K}(t,\tau_1)\,d\tau_1\\
k_4(t,\xi)&=\int_\xi^t \mathrm{K}(t,\tau)\,k_3(\tau,\xi)\,d\tau\\
&=\int_\xi^t\int_\xi^{\tau_1}\mathrm{K}(\tau_1,\tau_2)\int_\xi^{\tau_2}\mathrm{K}(\tau_2,\tau_3)\,k_1(\tau_3,\xi)\,d\tau_3 d\tau_2\,\mathrm{K}(t,\tau_1)\,d\tau_1
\end{aligned}$$

上記から重複核は、

$$k_n(t,\xi)=\int_\xi^t \mathrm{K}(t,\tau)\,k_{n-1}(\tau,\xi)\,d\tau \tag{11.2.2}$$

上式から解の核は、

$$\mathrm{G}(t,\xi)=-\sum_{n=1}^{\infty}k_n(t,\xi) \tag{11.2.3}$$

積分方程式の解は、

$$\mathrm{x}(t)=\mathrm{f}(t)-\int_0^t \mathrm{G}(t,\xi)\,\mathrm{f}(\xi)\,d\xi \tag{11.2.4}$$

11.2.2　合成型積分方程式の解法（ラプラス変換）

既知関数：$\mathrm{f}(t)$、既知関数：$\mathrm{k}(t-\xi)$、未知関数：$\mathrm{x}(t)$ とする。下記の積分方程式を合成型積分方程式という。

$$\mathrm{x}(t)-\int_0^t \mathrm{k}(t-\xi)\,\mathrm{x}(\xi)\,d\xi=\mathrm{f}(t) \tag{11.2.5}$$

上式の左辺第 2 項は (8.1.21) 式、395 頁のインパルス応答関数の形をしており、(8.1.21) 式をラプラス変換すると (8.1.22) 式となる。

```
kill(all);
assume(t>0);
IE1:x(t)-integrate(k(t-\xi)*x(\xi),\xi,
 0,t)=f(t);
LR1:X(s)-K(s)*X(s)=F(s);
solve(LR1,X(s))[1];
X(s)=(F(s)*K(s))/(1-K(s))+F(s);
X(s)=F(s)-F(s)*G(s);
G1:G(s)=-K(s)/(1-K(s));
IE2:x(t)=f(t)-\integrate(g(t-\xi)*
 f(\xi),\xi,0,t);
```

$\mathrm{k}(t-\xi)\rightarrow\mathrm{k}(t)$ に置き換え、上式をラプラス変換すると、下記となる。

$$\begin{gathered}\mathrm{X}(s)-\mathrm{K}(s)\,\mathrm{X}(s)=\mathrm{F}(s)\\ \text{ここで、}\quad \mathcal{L}[\mathrm{f}(t)]=\mathrm{F}(s),\quad \mathcal{L}[\mathrm{x}(t)]=\mathrm{X}(s),\\ \mathcal{L}[\mathrm{k}(t)]=\mathrm{K}(s)\end{gathered} \tag{11.2.6}$$

上式の $\mathrm{X}(s)$ を求め、変形すると、

$$\mathrm{X}(s)=-\frac{\mathrm{F}(s)}{\mathrm{K}(s)-1}=\frac{\mathrm{F}(s)\,\mathrm{K}(s)}{1-\mathrm{K}(s)}+\mathrm{F}(s) \tag{11.2.7}$$

下記の関数：$\mathrm{G}(s)$ を導入する。

$$\mathrm{G}(s)=-\frac{\mathrm{K}(s)}{1-\mathrm{K}(s)} \tag{11.2.8}$$

(11.2.7) 式に上式を代入すると、

$$\mathrm{X}(s)=\mathrm{F}(s)-\mathrm{G}(s)\,\mathrm{F}(s) \tag{11.2.9}$$

上式をラプラス逆変換して、$\mathcal{L}[\mathrm{g}(t)]=\mathrm{G}(s)$ とすると、

$$\mathrm{x}(t)=\mathrm{f}(t)-\int_0^t \mathrm{g}(t-\xi)\,\mathrm{f}(\xi)\,d\xi \tag{11.2.10}$$

11.2.3　ボルテラ型第一種積分方程式の解法

既知関数：$\mathrm{f}(t)$、既知関数：$\mathrm{k}(t,\xi)$、未知関数：$\mathrm{x}(t)$ とする。下記の積分方程式をボルテラ型第 1 種積分方程式という。

$$\int_0^t \mathrm{k}(t,\xi)\,\mathrm{x}(\xi)\,d\xi=\mathrm{f}(t) \tag{11.2.11}$$

```
kill(all);
assume(t>0);
IE3:integrate(k(t,\xi)*x(\xi),\xi,0,t)
 =f(t);
diff(IE3,t,1);
%/k(t,t);
expand(%);
IX3:X(t)=integrate(x(\xi),\xi,0,t);
k(t,t)*X(t)-k(t,0)*X(0)-\integrate(diff(
 k(t,\xi),\xi,1)*X(\xi),\xi,0,t)=rhs(IE3);
subst([X(0)=0],%);
IEX3:expand(%/k(t,t));
first(lhs(IEX3))=rhs(IEX3)-integrate(
 G(t,\xi)*f(xi)/k(\xi,\xi),xi,0,t);
```

上式を t で微分して、

$$\int_0^t\left(\frac{d}{d\,t}\mathrm{k}(t,\xi)\right)\mathrm{x}(\xi)\,d\xi+\mathrm{x}(t)\,\mathrm{k}(t,t)=\frac{d}{d\,t}\mathrm{f}(t)$$

$\mathrm{k}(t,t)\neq 0$ なら、次式となり、第二種積分方程式が得られた。

$$\frac{\int_0^t\left(\frac{d}{d\,t}\mathrm{k}(t,\xi)\right)\mathrm{x}(\xi)\,d\xi}{\mathrm{k}(t,t)}+\mathrm{x}(t)=\frac{\frac{d}{d\,t}\mathrm{f}(t)}{\mathrm{k}(t,t)} \tag{11.2.12}$$

$\mathrm{X}(t)$ を下記とし、

$$\mathrm{X}(t)=\int_0^t \mathrm{x}(\xi)\,d\xi \tag{11.2.13}$$

(11.2.11) 式を部分積分すると、

$$-\int_0^t\left(\frac{d}{d\xi}\mathrm{k}(t,\xi)\right)\mathrm{X}(\xi)\,d\xi+\mathrm{X}(t)\,\mathrm{k}(t,t)-\mathrm{X}(0)\,\mathrm{k}(t,0)=\mathrm{f}(t)$$

$\mathrm{X}(0)=0$ で $\mathrm{k}(t,t)\neq 0$ なら、

$$\mathrm{X}(t)-\frac{\int_0^t\left(\frac{d}{d\xi}\mathrm{k}(t,\xi)\right)\mathrm{X}(\xi)\,d\xi}{\mathrm{k}(t,t)}=\frac{\mathrm{f}(t)}{\mathrm{k}(t,t)}$$

上式から、下記の第二種積分方程式の解：$\mathrm{X}(t)$ が得られ、$\mathrm{x}(\xi)$ は $\mathrm{X}(t)$ を微分して得られる。

$$\mathrm{X}(t)=\frac{\mathrm{f}(t)}{\mathrm{k}(t,t)}-\int_0^t\frac{\mathrm{G}(t,\xi)\,\mathrm{f}(\xi)}{\mathrm{k}(\xi,\xi)}d\xi \tag{11.2.14}$$

11.2.4 ボルテラ型第一種積分方程式 例 1

下記の積分方程式を解き、$\mathrm{x}(t)$ を求める。

$$\int_0^t \xi\,\mathrm{x}(\xi)\,d\xi = (t-1)\,e^t + 1 \tag{11.2.15}$$

```
kill(all);
assume(t>0);
IE1:integrate(\xi*x(\xi),\xi,0,t)=(t-1)
 *%e^t+1;
diff(%,t,1);
solve(%,x(t))[1];
```

(11.2.15) 式を微分し、

$$t\,\mathrm{x}(t) = (t-1)\,e^t + e^t$$

$\mathrm{x}(t)$ を求めると、

$$\mathrm{x}(t) = e^t \tag{11.2.16}$$

11.2.5 ボルテラ型第二種積分方程式 例 1

下記の積分方程式を解き、$\mathrm{x}(t)$ を求める。

$$\int_0^t (-6\,\xi + 6\,t - 5)\,\mathrm{x}(\xi)\,d\xi + \mathrm{x}(t) = -t \tag{11.2.17}$$

```
kill(all);
assume(t>0);
IE1:x(t)+integrate((6*t-6*\xi-5)*x(\xi),
 \xi,0,t)=-t;
K1:k(t)=6*t-5;
KS1:K(s)=laplace(rhs(K1),t,s);
F1:f(t)=-t;
FS1:F(s)=laplace(rhs(F1),t,s);
X(s)+K(s)*X(s)=F(s);
subst([KS1,FS1],%);
solve(%,X(s))[1];
X1:x(t)=ilt(rhs(%),s,t);
X11:subst([t=\xi],%);
subst([X1,X11],IE1);
ev(%,integrate);
```

(11.2.17) 式は合成型積分方程式であるから、$\mathrm{k}(t-\xi) \to \mathrm{k}(t)$ に置き換え、ラプラス変換して求める。(11.2.17) 式から、$t-\xi \to t$ として、

$$\mathrm{k}(t) = 6\,t - 5$$

$$\mathrm{f}(t) = -t$$

上式をラプラス変換して、

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\mathrm{k}(t)] &= \mathrm{K}(s) = \frac{6}{s^2} - \frac{5}{s} \\ \mathcal{L}[\mathrm{f}(t)] &= \mathrm{F}(s) = -\frac{1}{s^2} \end{aligned} \tag{11.2.18}$$

(11.2.17) 式のラプラス変換は、

$$\mathrm{K}(s)\ \mathrm{X}(s) + \mathrm{X}(s) = \mathrm{F}(s)$$

上式に (11.2.18) 式を代入し、$\mathrm{X}(s)$ を求めると、

$$\mathrm{X}(s) = -\frac{1}{s^2 - 5\,s + 6}$$

上式をラプラス逆変換して、

$$\mathrm{x}(t) = e^{2\,t} - e^{3\,t} \tag{11.2.19}$$

11.2.6　ボルテラ型第二種積分方程式　例 2

下記の積分方程式を解き、$\mathrm{x}(t)$ を求める。

$$\mathrm{x}(t)-\int_0^t e^{t-\xi}\,\mathrm{x}(\xi)\,d\xi=\mathrm{f}(t) \tag{11.2.20}$$

```
kill(all);
assume(t>0);
IE1:x(t)-integrate(%e^(t-\xi)*x(\xi),
 \xi,0,t)=f(t);
IE2:x(t)=f(t)-'integrate(G(t,\xi)*f(\xi),
 \xi,0,t);
G1:G(t,\xi)=-sum(k[n](t,\xi),n,1,inf);
KN:k[n](t,\xi)=integrate(K(t,\tau)*
 k[n-1](\tau,\xi),\tau,\xi,t);
KK0:K(t,\xi)=%e^(t-\xi);
KT0:subst([\xi=\tau],KK0);
KK1:k[1](t,\xi)=%e^(t-\xi);
KT1:subst([t=\tau],KK1);
subst([n=2],KN);
KK2:subst([KT0,KT1],%);
KT2:subst([t=\tau],%);
subst([n=3],KN);
subst([KT0,KT2],%);
ev(%,integrate);
KK3:factor(%);
KT3:subst([t=\tau],%);
subst([n=4],KN);
subst([KT0,KT3],%);
ev(%,integrate);
KK4:factor(%);
KT4:subst([t=\tau],%);
subst([n=5],KN);
subst([KT0,KT4],%);
ev(%,integrate);
KK5:factor(%);
KT5:subst([t=\tau],%);
KKN:k[n](t,\xi)=(t-\xi)^(n-1)/((n-1)!)
 *%e^(t-\xi);
subst([n=1],KKN);
KK1;
subst([n=2],KKN);
KK2;
subst([n=3],KKN);
KK3;
subst([n=4],KKN);
KK4;
subst([n=5],KKN);
KK5;
```

```
subst([KKN],G1);
sum(a^(n)/(n!),n,0,inf)=%e^(a);
lhs(G1)=-%e^(t-\xi)*%e^(t-\xi);
subst([%],IE2);
```

「11.2.1 ボルテラ型第二種積分方程式の解法（級数）」の (11.2.4) 式から上式の解は、

$$\mathrm{x}(t)=\mathrm{f}(t)-\int_0^t \mathrm{G}(t,\xi)\,\mathrm{f}(\xi)\,d\xi \tag{11.2.21}$$

ここで、(11.2.2) 式、(11.2.3) 式から、

$$\mathrm{G}(t,\xi)=-\sum_{n=1}^{\infty}k_n(t,\xi) \tag{11.2.22}$$

$$k_n(t,\xi)=\int_\xi^t \mathrm{K}(t,\tau)\,k_{n-1}(\tau,\xi)\,d\tau \tag{11.2.23}$$

(11.2.20) 式から、

$$\mathrm{K}(t,\xi)=e^{t-\xi}$$

(11.2.23) 式から $k_n(t,\xi)$ を求める。

$$\begin{aligned}
k_1(t,\xi)&=e^{t-\xi}\\
k_2(t,\xi)&=\int_\xi^t \mathrm{K}(t,\tau)\,k_1(\tau,\xi)\,d\tau\\
&=(t-\xi)\,e^{t-\xi}\\
k_3(t,\xi)&=\int_\xi^t \mathrm{K}(t,\tau)\,k_2(\tau,\xi)\,d\tau\\
&=\frac{(\xi-t)^2\,e^{t-\xi}}{2}\\
k_4(t,\xi)&=\int_\xi^t \mathrm{K}(t,\tau)\,k_3(\tau,\xi)\,d\tau\\
&=-\frac{(\xi-t)^3\,e^{t-\xi}}{6}\\
k_5(t,\xi)&=\int_\xi^t \mathrm{K}(t,\tau)\,k_4(\tau,\xi)\,d\tau\\
&=\frac{(\xi-t)^4\,e^{t-\xi}}{24}
\end{aligned}$$

上式から、

$$k_n(t,\xi)=\frac{(t-\xi)^{n-1}\,e^{t-\xi}}{(n-1)!}$$

(11.2.22) 式から、

$$\mathrm{G}(t,\xi)=-\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(t-\xi)^{n-1}}{(n-1)!}\right)e^{t-\xi}$$

上記の級数和は下記の公式 [1] を用いて、

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n!}=e^a \tag{11.2.24}$$

[1] 森口　繁一、宇田川　久、一松　信：岩波数学公式 2　級数・フーリエ解析　P.56 [29)]

上式から、

$$\mathrm{G}\left(t,\xi\right)=-e^{2\,t-2\,\xi}$$

(11.2.21) 式に上式を代入し、

$$\mathrm{x}\left(t\right)=\int_{0}^{t}e^{2\,t-2\,\xi}\,\mathrm{f}\left(\xi\right)d\xi+\mathrm{f}\left(t\right)$$

```
K1:k(t)=%e^(t);
K2:K(s)=laplace(rhs(K1),t,s);
LG1:G(s)=-K(s)/(1-K(s));
subst([K2],LG1);
factor(%);
G1:g(t)=ilt(rhs(%),s,t);
G2:subst([t=t-\xi],G1);
IE2:x(t)=f(t)-\integrate(g(t-\xi)*f(\xi),
 \xi,0,t);
subst([G2],%);
```

また、(11.2.20) 式は合成型積分方程式であるから、$\mathrm{k}\left(t-\xi\right)\to\mathrm{k}\left(t\right)$ に置き換え、ラプラス変換して求めることができる。(11.2.20) 式から、

$$\mathrm{k}\left(t\right)=e^{t}$$

上式をラプラス変換して、

$$\mathcal{L}\left[\mathrm{k}\left(t\right)\right]=\mathrm{K}\left(s\right)=\frac{1}{s-1}$$

(11.2.8) 式から、

$$\mathrm{G}\left(s\right)=-\frac{\mathrm{K}\left(s\right)}{1-\mathrm{K}\left(s\right)}=-\frac{1}{s-2}$$

上式をラプラス逆変換して、

$$\mathrm{g}\left(t\right)=-e^{2\,t}$$

(11.2.10) 式に上記の結果を代入し、

$$\begin{aligned}\mathrm{x}\left(t\right)=&\mathrm{f}\left(t\right)-\int_{0}^{t}\mathrm{g}\left(t-\xi\right)\,\mathrm{f}\left(\xi\right)d\xi\\=&\int_{0}^{t}e^{2\,(t-\xi)}\,\mathrm{f}\left(\xi\right)d\xi+\mathrm{f}\left(t\right)\end{aligned}$$

11.2.7　ボルテラ型第二種積分方程式　例 3

下記の積分方程式を解き、$\mathrm{x}(t)$ を求める。

$$\mathrm{x}(t)-\int_0^t (t-\xi)\ \mathrm{x}(\xi)\,d\xi=t \tag{11.2.25}$$

```
kill(all);
assume(t>0);
IE1:x(t)-integrate((t-\xi)*x(\xi),
 \xi,0,t)=t;
IE2:x(t)=f(t)-'integrate(G(t,\xi)*f(\xi),
 \xi,0,t);
G1:G(t,\xi)=-sum(k[n](t,\xi),n,1,inf);
KN:k[n](t,\xi)=integrate(K(t,\tau)*
 k[n-1](\tau,\xi),\tau,\xi,t);
KK0:K(t,\xi)=t-\xi;
KT0:subst([\xi=\tau],KK0);
KK1:k[1](t,\xi)=(t-\xi);
KT1:subst([t=\tau],KK1);
subst([n=2],KN);
subst([KT0,KT1],%);
ev(%,integrate);
KK2:factor(%);
KT2:subst([t=\tau],%);
subst([n=3],KN);
subst([KT0,KT2],%);
ev(%,integrate);
KK3:factor(%);
KT3:subst([t=\tau],%);
subst([n=4],KN);
subst([KT0,KT3],%);
ev(%,integrate);
KK4:factor(%);
KT4:subst([t=\tau],%);
subst([n=5],KN);
subst([KT0,KT4],%);
ev(%,integrate);
KK5:factor(%);
KT5:subst([t=\tau],%);
KKN:k[n](t,\xi)=(t-\xi)^(2*n-1)/((2*n-1)!);
subst([n=1],KKN);
KK1;
subst([n=2],KKN);
KK2;
subst([n=3],KKN);
KK3;
subst([n=4],KKN);
KK4;
subst([n=5],KKN);
KK5;
```

```
subst([KKN],G1);
sum(a^(2*n+1)/((2*n+1)!),n,0,inf)=sinh(a);
lhs(G1)=-sinh(t-\xi);
subst([%],IE2);
subst([f(t)=t,f(\xi)=\xi],%);
ev(%,integrate);
expand(%);
x(t)=sinh(t);
```

「11.2.1 ボルテラ型第二種積分方程式の解法（級数）」の (11.2.4) 式から上式の解は、

$$\mathrm{x}(t)=\mathrm{f}(t)-\int_0^t \mathrm{G}(t,\xi)\ \mathrm{f}(\xi)\,d\xi \tag{11.2.26}$$

ここで、(11.2.2) 式、(11.2.3) 式から、

$$\mathrm{G}(t,\xi)=-\sum_{n=1}^{\infty} k_n(t,\xi) \tag{11.2.27}$$

$$k_n(t,\xi)=\int_\xi^t \mathrm{K}(t,\tau)\ k_{n-1}(\tau,\xi)\,d\tau \tag{11.2.28}$$

(11.2.25) 式から、

$$\mathrm{K}(t,\xi)=t-\xi$$

(11.2.28) 式から $k_n(t,\xi)$ を求める。

$$\begin{aligned}
k_1(t,\xi)=&t-\xi\\
k_2(t,\xi)=&\int_\xi^t \mathrm{K}(t,\tau)\ k_1(\tau,\xi)\,d\tau\\
=&-\frac{(\xi-t)^3}{6}\\
k_3(t,\xi)=&\int_\xi^t \mathrm{K}(t,\tau)\ k_2(\tau,\xi)\,d\tau\\
=&-\frac{(\xi-t)^5}{120}\\
k_4(t,\xi)=&\int_\xi^t \mathrm{K}(t,\tau)\ k_3(\tau,\xi)\,d\tau\\
=&-\frac{(\xi-t)^7}{5040}\\
k_5(t,\xi)=&\int_\xi^t \mathrm{K}(t,\tau)\ k_4(\tau,\xi)\,d\tau\\
=&-\frac{(\xi-t)^9}{362880}
\end{aligned}$$

上式から、

$$k_n(t,\xi)=\frac{(t-\xi)^{2\,n-1}}{(2\,n-1)!}$$

(11.2.27) 式から、

$$\mathrm{G}(t,\xi)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(t-\xi)^{2\,n-1}}{(2\,n-1)!}$$

上記の級数和は公式[1]から、

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!} = \sinh(a)$$

上式から、

$$\mathrm{G}(t,\xi) = \sinh(\xi - t)$$

(11.2.26) 式に上式を代入し、

$$\mathrm{x}(t) = t - \int_0^t \xi \sinh(\xi - t)\, d\xi = \sinh(t)$$

```
LR1:X(s)-K(s)*X(s)=F(s);
KS1:K(s)=laplace(t,t,s);
FS1:F(s)=laplace(t,t,s);
subst([KS1,FS1],LR1);
solve(%,X(s))[1];
x(t)=ilt(rhs(%),s,t);
x(t)=sinh(t);
```

また、(11.2.25) 式は合成型積分方程式であるから、$\mathrm{k}(t-\xi) \to \mathrm{k}(t)$ に置き換え、ラプラス変換して求めることができる。(11.2.25) 式から、

$$\mathrm{k}(t) = t, \quad \mathrm{f}(t) = t$$

上式をラプラス変換して、

$$\mathcal{L}[\mathrm{k}(t)] = \mathrm{K}(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$\mathcal{L}[\mathrm{f}(t)] = \mathrm{F}(s) = \frac{1}{s^2}$$

(11.2.9) 式から、

$$\mathrm{X}(s) - \frac{\mathrm{X}(s)}{s^2} = \frac{1}{s^2}$$

$\mathrm{X}(s)$ を求めると、

$$\mathrm{X}(s) = \frac{1}{s^2 - 1}$$

上式をラプラス逆変換して、

$$\mathrm{x}(t) = \sinh(t)$$

[1]森口　繁一、宇田川　久、一松　信：岩波数学公式２　級数・フーリエ解析　P.56 [29)]

11.2.8　ボルテラ型第二種積分方程式　例 4

下記の積分方程式を解き、$\mathrm{x}(t)$ を求める。

$$\mathrm{x}(t)-\int_0^t \mathrm{x}(\xi)\ ((t-\xi)\ D+C)\,d\xi = t\,B+A \quad (11.2.29)$$

```
kill(all);
assume(t>0);
IE1:x(t)-integrate((C+D*(t-\xi))*x(\xi),
 \xi,0,t)=A+B*t;
LR1:X(s)-K(s)*X(s)=F(s);
K1:k(t)=C+D*t;
K2:K(s)=laplace(rhs(K1),t,s);
F1:f(t)=A+B*t;
F2:F(s)=laplace(rhs(F1),t,s);
G1:G(s)=-K(s)/(1-K(s));
LR2:X(s)=F(s)-G(s)*F(s);
subst([G1,K2,F2],LR2);
X2:factor(%);
assume(4*D+C^2>0);
x(t)=ilt(rhs(X2),s,t);
forget(4*D+C^2>0);
assume(4*D+C^2<0);
x(t)=ilt(rhs(X2),s,t);
D1:4*D+C^2=0;
D2:solve(D1,D)[1];
subst([D2],X2);
x(t)=ilt(rhs(%),s,t);
```

上式は合成型積分方程式であるから、ラプラス変換して求める。$\mathrm{k}(t-\xi)\rightarrow \mathrm{k}(t)$ に置き換え、上式をラプラス変換して、

$$\mathrm{X}(s)-\mathrm{K}(s)\,\mathrm{X}(s)=\mathrm{F}(s)$$

ここで、
$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}[\mathrm{x}(t)]=\mathrm{X}(s)\\
&\mathrm{k}(t)=t\,D+C\\
&\mathcal{L}[\mathrm{k}(t)]=\mathrm{K}(s)=\frac{D}{s^2}+\frac{C}{s} \qquad (11.2.30)\\
&\mathrm{f}(t)=t\,B+A\\
&\mathcal{L}[\mathrm{f}(t)]=\mathrm{F}(s)=\frac{B}{s^2}+\frac{A}{s}
\end{aligned}$$

(11.2.8) 式、(11.2.9) 式から、

$$\mathrm{G}(s)=-\frac{\mathrm{K}(s)}{1-\mathrm{K}(s)}$$

$$\mathrm{X}(s)=\mathrm{F}(s)-\mathrm{F}(s)\ \mathrm{G}(s)$$

上式に (11.2.30) 式を代入し、

$$\mathrm{X}(s)=-\frac{B+s\,A}{D+s\,C-s^2} \qquad (11.2.31)$$

$4\,D+C^2>0$ のとき、

(11.2.31) 式をラプラス逆変換すると、

$$\mathrm{x}(t)=e^{\frac{t\,C}{2}}\left(\frac{(A\,C+2\,B)\,\sinh\left(\frac{t\,\sqrt{4\,D+C^2}}{2}\right)}{\sqrt{4\,D+C^2}}+A\cosh\left(\frac{t\,\sqrt{4\,D+C^2}}{2}\right)\right)$$

$4\,D+C^2<0$ のとき、

(11.2.31) 式をラプラス逆変換すると、

$$\mathrm{x}(t)=e^{\frac{t\,C}{2}}\left(\frac{(A\,C+2\,B)\,\sin\left(\frac{t\,\sqrt{-4\,D-C^2}}{2}\right)}{\sqrt{-4\,D-C^2}}+A\cos\left(\frac{t\,\sqrt{-4\,D-C^2}}{2}\right)\right)$$

$4\,D+C^2=0$ のとき、

(11.2.31) 式は、

$$\mathrm{X}(s)=-\frac{B+s\,A}{-\frac{C^2}{4}+s\,C-s^2}$$

上式をラプラス逆変換すると、

$$\mathrm{x}(t)=\frac{t\,A\,C\,e^{\frac{t\,C}{2}}}{2}+t\,B\,e^{\frac{t\,C}{2}}+A\,e^{\frac{t\,C}{2}}$$

11.2.9　ボルテラ型第二種積分方程式　例 5

下記の積分方程式を解き、$\mathrm{x}(t)$ を求める。

$$\mathrm{x}(t)-\int_{-\infty}^{t}(t-\xi)\,e^{-2\,(t-\xi)}\,\mathrm{x}(\xi)\,d\xi=t\,e^{t} \tag{11.2.32}$$

```
kill(all);
assume(t>0);
IE1:x(t)-integrate(%e^(-2*(t-\xi))*(t
 -\xi)*x(\xi),\xi,\minf,t)=t*%e^(t);
x(t)-%e^(-2*(t))*integrate(%e^(-2*(-\xi))
 *(t-\xi)*x(\xi),\xi,\minf,t)=t*%e^(t);
IE2:x(t)-%e^(-2*(t))*integrate(%e^(-2
 *(-\xi))*(t)*x(\xi),xi,minf,t)-%e^(-2
 *(t))*integrate(%e^(-2*(-\xi))*(-\xi)
 *x(\xi),\xi,\minf,t)=t*%e^(t);
X1:x(t)=A*t*%e^(t)+B*%e^(t);
X2:subst([t=\xi],X1);
subst([X1,X2],IE2);
ev(%,integrate);
%-rhs(%);
expand(%);
%/%e^t;
X3:expand(%);
A1:coeff(X3,t,1);
A2:coeff(X3,t,0);
A3:solve([A1,A2],[A,B])[1];
X4:subst([A3],X1);
X5:subst([t=\xi],X4);
subst([X4,X5],IE1);
ev(%,integrate);
factor(%);
%-rhs(%);
```

(11.2.32) 式を展開すると、

$$e^{-2\,t}\int_{-\infty}^{t}\xi\,e^{2\,\xi}\,\mathrm{x}(\xi)\,d\xi \\ -t\,e^{-2\,t}\int_{-\infty}^{t}e^{2\,\xi}\,\mathrm{x}(\xi)\,d\xi+\mathrm{x}(t)=t\,e^{t}$$

上式から解は次式の形が予測できる。

$$\mathrm{x}(t)=e^{t}\,B+t\,e^{t}\,A \tag{11.2.33}$$

(11.2.32) 式に上式を代入し、積分を実行し、右辺を左辺に移行すると、

$$\frac{8\,e^{t}\,B}{9}+\frac{8\,t\,e^{t}\,A}{9}+\frac{2\,e^{t}\,A}{27}-t\,e^{t}=0$$

上式を e^{t} で割り、

$$\frac{8\,B}{9}+\frac{8\,t\,A}{9}+\frac{2\,A}{27}-t=0$$

t の同じ次数の係数を比較して、

$$\frac{8\,A}{9}-1=0,\quad \frac{8\,B}{9}+\frac{2\,A}{27}=0$$

上式を解いて、

$$A=\frac{9}{8},B=-\frac{3}{32}$$

(11.2.33) 式に上記結果を代入し、

$$\mathrm{x}(t)=\frac{9\,t\,e^{t}}{8}-\frac{3\,e^{t}}{32}$$

11.2.10　ボルテラ型第二種積分方程式　例 6

下記の積分方程式を解き、$\mathrm{x}(t)$ を求める。

$$\mathrm{x}(t)-\frac{\alpha^4\int_0^t(t-\xi)^3\,\mathrm{x}(\xi)\,d\xi}{6}=\alpha^4\left(\frac{t^3\,B}{6}+\frac{t^2\,A}{2}\right) \tag{11.2.34}$$

```
kill(all);
assume(t>0);
assume(\alpha>0);
IE1:x(t)-\alpha^4*integrate(((t-\xi)^3/
 (3!))*x(\xi),\xi,0,t)=\alpha^4*
 (A*t^2/(2!)+B*t^3/(3!));
IE2:x(t)=f(t)-'integrate(G(t,\xi)*f(\xi),
 \xi,0,t);
G1:G(t,\xi)=-sum(k[n](t,\xi),n,1,inf);
KN:k[n](t,\xi)=integrate(K(t,\tau)
 *k[n-1](\tau,\xi),\tau,\xi,t);
KK0:K(t,\xi)=((t-\xi)^3/(3!));
KT0:subst([\xi=\tau],KK0);
KK1:k[1](t,\xi)=((t-\xi)^3/(3!));
KT1:subst([t=\tau],KK1);
subst([n=2],KN);
subst([KT0,KT1],%);
ev(%,integrate);
KK2:factor(%);
KT2:subst([t=\tau],%);
subst([n=3],KN);
subst([KT0,KT2],%);
ev(%,integrate);
KK3:factor(%);
KT3:subst([t=\tau],%);
subst([n=4],KN);
subst([KT0,KT3],%);
ev(%,integrate);
KK4:factor(%);
KT4:subst([t=\tau],%);
subst([n=5],KN);
subst([KT0,KT4],%);
ev(%,integrate);
KK5:factor(%);
KT5:subst([t=\tau],%);
KKN:k[n](t,\xi)=(t-\xi)^(4*n-1)
 /((4*n-1)!);
subst([n=1],KKN);
KK1;
subst([n=2],KKN);
KK2;
subst([n=3],KKN);
KK3;
subst([n=4],KKN);
KK4;
subst([n=5],KKN);
KK5;
subst([KKN],G1);
G(t,xi)=-sum(rhs(KKN),n,1,5);
IE21:subst([%],IE2);
F1:f(t)=\alpha^4*(A*t^2/(2!)+B*t^3/(3!));
F2:subst([t=\xi],F1);
subst([F1,F2],IE21);
ev(%,integrate);
X4:expand(%);
```

「11.2.1 ボルテラ型第二種積分方程式の解法（級数）」の (11.2.4) 式から上式の解は、

$$\mathrm{x}(t)=\mathrm{f}(t)-\int_0^t\mathrm{G}(t,\xi)\,\mathrm{f}(\xi)\,d\xi \tag{11.2.35}$$

ここで、(11.2.2) 式、(11.2.3) 式から、

$$\mathrm{G}(t,\xi)=-\sum_{n=1}^{\infty}k_n(t,\xi) \tag{11.2.36}$$

$$k_n(t,\xi)=\int_\xi^t\mathrm{K}(t,\tau)\,k_{n-1}(\tau,\xi)\,d\tau \tag{11.2.37}$$

(11.2.34) 式から、

$$\mathrm{K}(t,\xi)=\frac{(t-\xi)^3}{6}$$

(11.2.37) 式から $k_n(t,\xi)$ を求める。

$$\begin{aligned}
k_1(t,\xi)&=\frac{(t-\xi)^3}{6}\\
k_2(t,\xi)&=\int_\xi^t\mathrm{K}(t,\tau)\,k_1(\tau,\xi)\,d\tau\\
&=-\frac{(\xi-t)^7}{5040}\\
k_3(t,\xi)&=\int_\xi^t\mathrm{K}(t,\tau)\,k_2(\tau,\xi)\,d\tau\\
&=-\frac{(\xi-t)^{11}}{39916800}\\
k_4(t,\xi)&=\int_\xi^t\mathrm{K}(t,\tau)\,k_3(\tau,\xi)\,d\tau\\
&=-\frac{(\xi-t)^{15}}{1307674368000}\\
k_5(t,\xi)&=\int_\xi^t\mathrm{K}(t,\tau)\,k_4(\tau,\xi)\,d\tau\\
&=-\frac{(\xi-t)^{19}}{121645100408832000}
\end{aligned}$$

上式から、

$$k_n(t,\xi)=\frac{(t-\xi)^{4\,n-1}}{(4\,n-1)!}$$

(11.2.36) 式から、

$$\mathrm{G}\left(t,\xi\right)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(t-\xi\right)^{4\,n-1}}{\left(4\,n-1\right)!}$$

上式から、$n=5$ とすると、

$$\begin{aligned}\mathrm{G}\left(t,\xi\right)=&-\frac{\left(t-\xi\right)^{19}}{121645100408832000}-\frac{\left(t-\xi\right)^{15}}{1307674368000}\\&-\frac{\left(t-\xi\right)^{11}}{39916800}-\frac{\left(t-\xi\right)^{7}}{5040}-\frac{\left(t-\xi\right)^{3}}{6}\end{aligned}$$

(11.2.35) 式に上式を代入し、$\mathrm{f}\left(t\right)=\alpha^4\left(\frac{t^3\,B}{6}+\frac{t^2\,A}{2}\right)$ とし、解：$\mathrm{x}\left(t\right)$ を求めると、

$$\begin{aligned}\mathrm{x}\left(t\right)=&\frac{\alpha^4\,t^{23}\,B}{25852016738884976640000}\\&+\frac{\alpha^4\,t^{19}\,B}{121645100408832000}+\frac{\alpha^4\,t^{15}\,B}{1307674368000}\\&+\frac{\alpha^4\,t^{11}\,B}{39916800}+\frac{\alpha^4\,t^{7}\,B}{5040}+\frac{\alpha^4\,t^{3}\,B}{6}\\&+\frac{\alpha^4\,t^{22}\,A}{1124000727777607680000}\\&+\frac{\alpha^4\,t^{18}\,A}{6402373705728000}+\frac{\alpha^4\,t^{14}\,A}{87178291200}\\&+\frac{\alpha^4\,t^{10}\,A}{3628800}+\frac{\alpha^4\,t^{6}\,A}{720}+\frac{\alpha^4\,t^{2}\,A}{2}\end{aligned}\tag{11.2.38}$$

```
LR1:X(s)-K(s)*X(s)=F(s);
K1:k(t)=\alpha^4*(t)^3/(3!);
K2:K(s)=laplace(rhs(K1),t,s);
F1:f(t)=\alpha^4*(A*t^2/(2!)+B*t^3/(3!));
F2:F(s)=laplace(rhs(F1),t,s);
solve(LR1,X(s))[1];
subst([K2,F2],%);
X2:factor(%);
X3:x(t)=ilt(rhs(%),s,t);
X31:subst([t=\xi],X3);
subst([X3,X31],IE1);
ev(%,integrate);
factor(%);
X31:subst([\alpha=1,A=1,B=1],rhs(X3));
taylor(X31,t,0,23);
X41:subst([\alpha=1,A=1,B=1],rhs(X4));
```

(11.2.34) 式は合成型積分方程式であるから、$\mathrm{k}\left(t-\xi\right)\to\mathrm{k}\left(t\right)$ に置き換え、ラプラス変換して求める。(11.2.34) 式から、

$$\mathrm{k}\left(t\right)=\frac{\alpha^4\,t^3}{6}$$

$$\mathrm{f}\left(t\right)=\alpha^4\left(\frac{t^3\,B}{6}+\frac{t^2\,A}{2}\right)$$

上式をラプラス変換して、

$$\mathcal{L}\left[\mathrm{k}\left(t\right)\right]=\mathrm{K}\left(s\right)=\frac{\alpha^4}{s^4}$$

$$\mathcal{L}\left[\mathrm{f}\left(t\right)\right]=\mathrm{F}\left(s\right)=\alpha^4\left(\frac{B}{s^4}+\frac{A}{s^3}\right)$$

(11.2.6) 式から、

$$\mathrm{X}\left(s\right)-\mathrm{K}\left(s\right)\,\mathrm{X}\left(s\right)=\mathrm{F}\left(s\right)$$

$\mathrm{X}\left(s\right)$ を求めると、

$$\mathrm{X}\left(s\right)=-\frac{\mathrm{F}\left(s\right)}{\mathrm{K}\left(s\right)-1}=\frac{\alpha^4\,\left(B+s\,A\right)}{\left(s-\alpha\right)\,\left(s+\alpha\right)\,\left(s^2+\alpha^2\right)}$$

上式をラプラス逆変換して、

$$\begin{aligned}\mathrm{x}\left(t\right)=&\frac{e^{\alpha\,t}\,\left(\alpha\,B+\alpha^2\,A\right)}{4}-\frac{e^{-\alpha\,t}\,\left(\alpha\,B-\alpha^2\,A\right)}{4}\\&-\frac{\alpha\sin\left(\alpha\,t\right)\,B}{2}-\frac{\alpha^2\cos\left(\alpha\,t\right)\,A}{2}\end{aligned}\tag{11.2.39}$$

上式で $\alpha=1,A=1,B=1$ とし、Taylor 展開すると、

$$\begin{aligned}\mathrm{x}\left(t\right)=&\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6}+\frac{t^6}{720}+\frac{t^7}{5040}+\frac{t^{10}}{3628800}+\frac{t^{11}}{39916800}\\&+\frac{t^{14}}{87178291200}+\frac{t^{15}}{1307674368000}\\&+\frac{t^{18}}{6402373705728000}+\frac{t^{19}}{121645100408832000}\\&+\frac{t^{22}}{1124000727777607680000}\\&+\frac{t^{23}}{25852016738884976640000}+\ldots\end{aligned}$$

級数から得られた解:(11.2.38) 式で $\alpha=1,A=1,B=1$ とすると、

$$\begin{aligned}\mathrm{x}\left(t\right)=&\frac{t^{23}}{25852016738884976640000}\\&+\frac{t^{22}}{1124000727777607680000}\\&+\frac{t^{19}}{121645100408832000}\\&+\frac{t^{18}}{6402373705728000}+\frac{t^{15}}{1307674368000}\\&+\frac{t^{14}}{87178291200}+\frac{t^{11}}{39916800}+\frac{t^{10}}{3628800}\\&+\frac{t^7}{5040}+\frac{t^6}{720}+\frac{t^3}{6}+\frac{t^2}{2}\end{aligned}$$

ラプラス変換から得られた解と級数解は一致している。

11.2.11 ボルテラ型第二種積分方程式 例 7

下記の積分方程式を解き、$\mathrm{x}(t)$ を求める。

$$\mathrm{x}(t)-\int_0^t (t-\xi)^2\,\mathrm{x}(\xi)\,d\xi=t \tag{11.2.40}$$

```
kill(all);
assume(t>0);
IE1:x(t)-integrate((t-\xi)^2*x(\xi),
 \xi,0,t)=t;
IE2:x(t)=f(t)-'integrate(G(t,\xi)*f(\xi),
 \xi,0,t);
G1:G(t,\xi)=-sum(k[n](t,\xi),n,1,inf);
KN:k[n](t,\xi)=integrate(K(t,\tau)
 *k[n-1](\tau,\xi),\tau,\xi,t);
KK0:K(t,\xi)=(t-\xi)^2;
KT0:subst([\xi=\tau],KK0);
KK1:k[1](t,\xi)=(t-\xi)^2;
KT1:subst([t=\tau],KK1);
subst([n=2],KN);
subst([KT0,KT1],%);
ev(%,integrate);
KK2:factor(%);
KT2:subst([t=\tau],%);
subst([n=3],KN);
subst([KT0,KT2],%);
ev(%,integrate);
KK3:factor(%);
KT3:subst([t=\tau],%);
subst([n=4],KN);
subst([KT0,KT3],%);
ev(%,integrate);
KK4:factor(%);
KT4:subst([t=\tau],%);
subst([n=5],KN);
subst([KT0,KT4],%);
ev(%,integrate);
KK5:factor(%);
KT5:subst([t=\tau],%);
KKN:k[n](t,\xi)=(t-\xi)^(3*n-1)/
 ((3*n-1)!)*2^n;
subst([n=1],KKN);
KK1;
subst([n=2],KKN);
KK2;
```

```
subst([n=3],KKN);
KK3;
subst([n=4],KKN);
KK4;
subst([n=5],KKN);
KK5;
subst([KKN],G1);
G(t,\xi)=-sum(rhs(KKN),n,1,5);
subst([%],IE2);
subst([f(t)=t,f(\xi)=\xi],%);
ev(%,integrate);
X3:expand(%);
```

「11.2.1 ボルテラ型第二種積分方程式の解法（級数）」の (11.2.4) 式から上式の解は、

$$\mathrm{x}(t)=\mathrm{f}(t)-\int_0^t \mathrm{G}(t,\xi)\,\mathrm{f}(\xi)\,d\xi \tag{11.2.41}$$

ここで、(11.2.2) 式、(11.2.3) 式から、

$$\mathrm{G}(t,\xi)=-\sum_{n=1}^{\infty} k_n(t,\xi) \tag{11.2.42}$$

$$k_n(t,\xi)=\int_\xi^t \mathrm{K}(t,\tau)\,k_{n-1}(\tau,\xi)\,d\tau \tag{11.2.43}$$

(11.2.40) 式から、

$$\mathrm{K}(t,\xi)=(t-\xi)^2$$

(11.2.43) 式から $k_n(t,\xi)$ を求める。

$$\begin{aligned}
k_1(t,\xi)=&(t-\xi)^2\\
k_2(t,\xi)=&\int_\xi^t \mathrm{K}(t,\tau)\,k_1(\tau,\xi)\,d\tau\\
=&-\frac{(\xi-t)^5}{30}\\
k_3(t,\xi)=&\int_\xi^t \mathrm{K}(t,\tau)\,k_2(\tau,\xi)\,d\tau\\
=&\frac{(\xi-t)^8}{5040}\\
k_4(t,\xi)=&\int_\xi^t \mathrm{K}(t,\tau)\,k_3(\tau,\xi)\,d\tau\\
=&-\frac{(\xi-t)^{11}}{2494800}\\
k_5(t,\xi)=&\int_\xi^t \mathrm{K}(t,\tau)\,k_4(\tau,\xi)\,d\tau\\
=&\frac{(\xi-t)^{14}}{2724321600}
\end{aligned}$$

上式から、

$$k_n(t,\xi)=\frac{2^n\,(t-\xi)^{3\,n-1}}{(3\,n-1)!}$$

(11.2.42) 式から、

$$\mathrm{G}(t,\xi)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\,(t-\xi)^{3\,n-1}}{(3\,n-1)!}$$

上式から、$n=5$ とすると、

$$\begin{aligned}\mathrm{G}(t,\xi)=&-\frac{(t-\xi)^{14}}{2724321600}-\frac{(t-\xi)^{11}}{2494800}\\&-\frac{(t-\xi)^{8}}{5040}-\frac{(t-\xi)^{5}}{30}-(t-\xi)^2\end{aligned}$$

(11.2.41) 式に上式を代入し、$\mathrm{f}(t)=t$ とし、解 : $\mathrm{x}(t)$ を求めると、

$$\begin{aligned}\mathrm{x}(t)=&\frac{t^{16}}{653837184000}+\frac{t^{13}}{389188800}\\&+\frac{t^{10}}{453600}+\frac{t^{7}}{1260}+\frac{t^{4}}{12}+t\end{aligned}\tag{11.2.44}$$

```
LR1:X(s)-K(s)*X(s)=F(s);
KS1:K(s)=laplace(t^2,t,s);
FS1:F(s)=laplace(t,t,s);
subst([KS1,FS1],LR1);
solve(%,X(s))[1];
X4:x(t)=ilt(rhs(%),s,t);
X41:lhs(%)=taylor(rhs(%),t,0,16);
```

(11.2.40) 式は合成型積分方程式であるから、
$\mathrm{k}(t-\xi)\to\mathrm{k}(t)$ に置き換え、ラプラス変換して求める。
(11.2.40) 式から、

$$\mathrm{k}(t)=t^2,\quad \mathrm{f}(t)=t$$

上式をラプラス変換して、

$$\mathcal{L}[\mathrm{k}(t)]=\mathrm{K}(s)=\frac{2}{s^3}$$

$$\mathcal{L}[\mathrm{f}(t)]=\mathrm{F}(s)=\frac{1}{s^2}$$

(11.2.6) 式から、

$$\mathrm{X}(s)-\mathrm{K}(s)\,\mathrm{X}(s)=\mathrm{F}(s)$$

$\mathrm{X}(s)$ を求めると、

$$\mathrm{X}(s)=-\frac{\mathrm{F}(s)}{\mathrm{K}(s)-1}=\frac{s}{s^3-2}$$

上式をラプラス逆変換して、

$$\mathrm{x}(t)=e^{-\frac{t}{2^{\frac{2}{3}}}}\left(\frac{\sin\left(\frac{\sqrt{3}\,t}{2^{\frac{2}{3}}}\right)}{2^{\frac{1}{3}}\sqrt{3}}-\frac{\cos\left(\frac{\sqrt{3}\,t}{2^{\frac{2}{3}}}\right)}{3\,2^{\frac{1}{3}}}\right)+\frac{e^{2^{\frac{1}{3}}\,t}}{3\,2^{\frac{1}{3}}}\tag{11.2.45}$$

上式を Taylor 展開すると、

$$\begin{aligned}\mathrm{x}(t)=&t+\frac{t^4}{12}+\frac{t^7}{1260}+\frac{t^{10}}{453600}+\frac{t^{13}}{389188800}\\&+\frac{t^{16}}{653837184000}+\ldots\end{aligned}$$

ラプラス変換から得られた解と級数解は一致している。

11.2.12　ボルテラ型第二種積分方程式　例 8

下記の積分方程式を解き、$\mathrm{x}\left(t\right)$ を求める。

$$\mathrm{x}\left(t\right)-\int_{0}^{t}t\,\xi\,\mathrm{x}\left(\xi\right)d\xi=t \tag{11.2.46}$$

```
kill(all);
assume(t>0);
IE1:x(t)-integrate((t*\xi)*x(\xi),
 \xi,0,t)=t;
IE2:x(t)=f(t)-'integrate(G(t,\xi)*f(\xi),
 \xi,0,t);
G1:G(t,\xi)=-sum(k[n](t,\xi),n,1,inf);
KN:k[n](t,\xi)=integrate(K(t,\tau)
 *k[n-1](\tau,\xi),\tau,\xi,t);
KK0:K(t,\xi)=(t*\xi);
KT0:subst([\xi=\tau],KK0);
KK1:k[1](t,\xi)=(t*\xi);
KT1:subst([t=\tau],KK1);
subst([n=2],KN);
subst([KT0,KT1],%);
KK2:ev(%,integrate);
KT2:subst([t=\tau],%);
subst([n=3],KN);
subst([KT0,KT2],%);
ev(%,integrate);
factor(%);
KK3:lhs(%)=(t*\xi*(t^3-\xi^3)^2)/18;
KT3:subst([t=\tau],%);
subst([n=4],KN);
subst([KT0,KT3],%);
ev(%,integrate);
factor(%);
KK4:lhs(%)=(t*\xi*(t^3-\xi^3)^3)/162;
KT4:subst([t=\tau],%);
subst([n=5],KN);
subst([KT0,KT4],%);
ev(%,integrate);
factor(%);
KK5:lhs(%)=(t*\xi*(t^3-\xi^3)^4)/1944;
KT5:subst([t=\tau],%);
KKN:k[n](t,\xi)=(t*\xi)*(t^3-\xi^3)^(n-1)
 /((n-1)!)/3^(n-1);
subst([n=1],KKN);
KK1;
subst([n=2],KKN);
KK2;
subst([n=3],KKN);
KK3;
subst([n=4],KKN);
KK4;
subst([n=5],KKN);
KK5;
G2:subst([KKN],G1);
G21:(t^3-\xi^3)/3=a;
G22:solve(%,a)[1];
solve(G21,t^3)[1];
subst([%],G2);
lhs(%)=-t*\xi*%e^a;
G3:subst([G22],%);
subst([%],IE2);
subst([f(t)=t,f(\xi)=\xi],%);
ev(%,integrate);
X3:expand(%);
```

「11.2.1 ボルテラ型第二種積分方程式の解法（級数）」の (11.2.4) 式から上式の解は、

$$\mathrm{x}\left(t\right)=\mathrm{f}\left(t\right)-\int_{0}^{t}\mathrm{G}\left(t,\xi\right)\,\mathrm{f}\left(\xi\right)d\xi \tag{11.2.47}$$

ここで、(11.2.2) 式、(11.2.3) 式から、

$$\mathrm{G}\left(t,\xi\right)=-\sum_{n=1}^{\infty}k_{n}\left(t,\xi\right) \tag{11.2.48}$$

$$k_{n}\left(t,\xi\right)=\int_{\xi}^{t}\mathrm{K}\left(t,\tau\right)\,k_{n-1}\left(\tau,\xi\right)d\tau \tag{11.2.49}$$

(11.2.46) 式から、

$$\mathrm{K}\left(t,\xi\right)=t\,\xi$$

(11.2.49) 式から $k_{n}\left(t,\xi\right)$ を求める。

$$\begin{aligned}
k_{1}\left(t,\xi\right)&=t\,\xi\\
k_{2}\left(t,\xi\right)&=\int_{\xi}^{t}\mathrm{K}\left(t,\tau\right)\,k_{1}\left(\tau,\xi\right)d\tau\\
&=t\,\xi\,\left(\frac{t^{3}}{3}-\frac{\xi^{3}}{3}\right)\\
k_{3}\left(t,\xi\right)&=\int_{\xi}^{t}\mathrm{K}\left(t,\tau\right)\,k_{2}\left(\tau,\xi\right)d\tau\\
&=\frac{t\,\xi\,\left(t^{3}-\xi^{3}\right)^{2}}{18}\\
k_{4}\left(t,\xi\right)&=\int_{\xi}^{t}\mathrm{K}\left(t,\tau\right)\,k_{3}\left(\tau,\xi\right)d\tau\\
&=\frac{t\,\xi\,\left(t^{3}-\xi^{3}\right)^{3}}{162}\\
k_{5}\left(t,\xi\right)&=\int_{\xi}^{t}\mathrm{K}\left(t,\tau\right)\,k_{4}\left(\tau,\xi\right)d\tau\\
&=\frac{t\,\xi\,\left(t^{3}-\xi^{3}\right)^{4}}{1944}
\end{aligned}$$

上式から、

$$k_n(t,\xi)=\frac{3^{1-n}\,t\,\xi\left(t^3-\xi^3\right)^{n-1}}{(n-1)!}$$

(11.2.48) 式から、

$$\mathrm{G}(t,\xi)=-t\,\xi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{1-n}\left(t^3-\xi^3\right)^{n-1}}{(n-1)!}\qquad(11.2.50)$$

上式で、下記の置き換えを行うと、

$$\frac{t^3-\xi^3}{3}=a$$

(11.2.50) 式は、級数和の公式 : (11.2.24) 式を用いて、

$$\begin{aligned}\mathrm{G}(t,\xi)&=-\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^{n-1}}{(n-1)!}\right)t\,\xi\\&=-\,e^{a}\,t\,\xi=-t\,\xi\,e^{-\frac{\xi^3-t^3}{3}}\end{aligned}$$

(11.2.47) 式に上式を代入し、$\mathrm{f}(t)=t$ とし、積分すると解 : $\mathrm{x}(t)$ は、

$$\begin{aligned}\mathrm{x}(t)=&t\int_0^t\xi\,e^{-\frac{\xi^3-t^3}{3}}\,\mathrm{f}(\xi)\,d\xi+\mathrm{f}(t)\\=&t\int_0^t\xi^2\,e^{-\frac{\xi^3-t^3}{3}}d\xi+t\\=&t\left(e^{\frac{t^3}{3}}-1\right)+t=t\,e^{\frac{t^3}{3}}\end{aligned}$$

11.3　ボルテラ型積分方程式と常微分方程式

11.3.1　常微分方程式の解法

下記の積分方程式を解き、$\mathrm{x}(t)$ を求める。

$$a_n(t)\left(\frac{d^n}{d\,t^n}\mathrm{x}(t)\right)+a_{n-1}(t)\left(\frac{d^{n-1}}{d\,t^{n-1}}\mathrm{x}(t)\right)+\cdots+a_0(t)\,\mathrm{x}(t)=\mathrm{f}(t)$$

上式を級数で記述すると、 $$\sum_{i=0}^{n}a_i(t)\left(\frac{d^i}{d\,t^i}\mathrm{x}(t)\right)=\mathrm{f}(t) \tag{11.3.1}$$

```
kill(all);
assume(t>0);
DE1:a[n](t)*diff(x(t),t,n)+a[n-1](t)
 *diff(x(t),t,n-1)+a[0](t)*x(t)=f(t);
DEN1:sum(a[i](t)*diff(x(t),t,i),i,0,n)
 =f(t);
subst([n=5],DEN1);
DE5:ev(%,sum);
DIN5:diff(x(t),t,5)=X(t);
DIN51:subst([t=\xi],%);
DIN52:rhs(DIN51);
integrate(lhs(DIN5),t);
DIN40:%-subst([x(t)=x(0)],%)
 =integrate(DIN52,\xi,0,t);
DIN42:DIN52;
DIN4:lhs(DIN40)-last(lhs(DIN40))
 =rhs(DIN40)+x[4](0);
DIN43:last(rhs(%));
integrate(lhs(DIN4),t);
DIN30:%-subst([x(t)=x(0)],%)=integrate(
 integrate(DIN42,\xi,0,t),t,0,t)
 +integrate(DIN43,t,0,t);
integrate(DIN42,t,\xi,t);
DIN32:factor(%);
DIN33:integrate(DIN43,t,0,t)+x[3](0);
DIN3:lhs(DIN30)-last(lhs(DIN30))
 =integrate(DIN32,\xi,0,t)+DIN33;
integrate(lhs(DIN3),t);
```

```
DIN20:%-subst([x(t)=x(0)],%)=integrate(
 integrate(DIN32,\xi,0,t),t,0,t)
 +integrate(DIN33,t,0,t);
integrate(DIN32,t,\xi,t);
DIN22:factor(%);
DIN23:expand(integrate(DIN33,t,0,t))
 +x[2](0);
DIN2:lhs(DIN20)-last(lhs(DIN20))
 =integrate(DIN22,\xi,0,t)+DIN23;
integrate(lhs(DIN2),t);
DIN10:%-subst([x(t)=x(0)],%)=integrate(
 integrate(DIN22,\xi,0,t),t,0,t)
 +integrate(DIN23,t,0,t);
integrate(DIN22,t,\xi,t);
DIN12:factor(%);
DIN13:expand(integrate(DIN23,t,0,t))
 +x[1](0);
DIN1:lhs(DIN10)-last(lhs(DIN10))
 =integrate(DIN12,\xi,0,t)+DIN13;
integrate(lhs(DIN1),t);
DIN00:%-subst([x(t)=x(0)],%)=integrate(
 integrate(DIN12,\xi,0,t),t,0,t)
 +integrate(DIN13,t,0,t);
integrate(DIN12,t,\xi,t);
DIN02:factor(%);
DIN03:expand(integrate(DIN13,t,0,t))
 +x[0](0);
DIN0:lhs(DIN00)-last(lhs(DIN00))
 =integrate(DIN02,\xi,0,t)+DIN03;
```

(11.3.1) 式で $n=5$ とすると、

$$\begin{aligned}a_5(t)\left(\frac{d^5}{d\,t^5}\mathrm{x}(t)\right)+a_4(t)\left(\frac{d^4}{d\,t^4}\mathrm{x}(t)\right)+a_3(t)\left(\frac{d^3}{d\,t^3}\mathrm{x}(t)\right)\\+a_2(t)\left(\frac{d^2}{d\,t^2}\mathrm{x}(t)\right)+a_1(t)\left(\frac{d}{d\,t}\mathrm{x}(t)\right)+a_0(t)\,\mathrm{x}(t)=\mathrm{f}(t)\end{aligned} \tag{11.3.2}$$

いま、$\mathrm{X}(t)$ を下記とする、

$$\frac{d^5}{d\,t^5}\mathrm{x}(t)=\mathrm{X}(t) \tag{11.3.3}$$

上式を t で積分すると、

$$\frac{d^4}{d\,t^4}\mathrm{x}(t)=\int_0^t\mathrm{X}(\xi)\,d\xi+x_4(0)\quad ここで、\frac{d^4}{d\,t^4}\mathrm{x}(0)=x_4(0) \tag{11.3.4}$$

上式を t で積分し、積分順序を変更すると、

$$\frac{d^3}{d\,t^3}\,\mathrm{x}\,(t)-\frac{d^3}{d\,t^3}\,\mathrm{x}\,(0)=\int_0^t\int_0^t \mathrm{X}\,(\xi)\,d\xi dt+x_4\,(0)\;t=\int_0^t\int_\xi^t \mathrm{X}\,(\xi)\,dt d\xi+x_4\,(0)\;t$$

上式から、

$$\frac{d^3}{d\,t^3}\,\mathrm{x}\,(t)=-\int_0^t(\xi-t)\;\mathrm{X}\,(\xi)\,d\xi+x_4\,(0)\;t+x_3\,(0)\quad \text{ここで、}\frac{d^3}{d\,t^3}\,\mathrm{x}\,(0)=x_3\,(0) \tag{11.3.5}$$

上式を t で積分し、積分順序を変更すると、

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{d\,t^2}\,\mathrm{x}\,(t)-\frac{d^2}{d\,t^2}\,\mathrm{x}\,(0)=&\frac{x_4\,(0)\;t^2+2\,x_3\,(0)\;t}{2}-\int_0^t\int_0^t(\xi-t)\;\mathrm{X}\,(\xi)\,d\xi dt\\=&\frac{x_4\,(0)\;t^2+2\,x_3\,(0)\;t}{2}-\int_0^t\int_\xi^t(\xi-t)\;\mathrm{X}\,(\xi)\,dt d\xi\end{aligned}$$

上式から、

$$\frac{d^2}{d\,t^2}\,\mathrm{x}\,(t)=\frac{1}{2}\int_0^t(\xi-t)^2\,\mathrm{X}\,(\xi)\,d\xi+\frac{x_4\,(0)\;t^2}{2}+x_3\,(0)\;t+x_2\,(0)\quad \text{ここで、}\frac{d^2}{d\,t^2}\,\mathrm{x}\,(0)=x_2\,(0) \tag{11.3.6}$$

上式を t で積分し、積分順序を変更すると、

$$\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{x}\,(t)-\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{x}\,(0)=\frac{1}{2}\int_0^t\int_\xi^t(\xi-t)^2\,\mathrm{X}\,(\xi)\,dt d\xi+\frac{x_4\,(0)\;t^3+3\,x_3\,(0)\;t^2+6\,x_2\,(0)\;t}{6}$$

上式から、

$$\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{x}\,(t)=-\frac{1}{6}\int_0^t(\xi-t)^3\,\mathrm{X}\,(\xi)\,d\xi+\frac{x_4\,(0)\;t^3}{6}+\frac{x_3\,(0)\;t^2}{2}+x_2\,(0)\;t+x_1\,(0)\quad \text{ここで、}\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{x}\,(0)=x_1\,(0) \tag{11.3.7}$$

上式を t で積分し、積分順序を変更すると、

$$\mathrm{x}\,(t)-\mathrm{x}\,(0)=\frac{x_4\,(0)\;t^4+4\,x_3\,(0)\;t^3+12\,x_2\,(0)\;t^2+24\,x_1\,(0)\;t}{24}-\frac{1}{6}\int_0^t\int_\xi^t(\xi-t)^3\,\mathrm{X}\,(\xi)\,dt d\xi$$

上式から、

$$\mathrm{x}\,(t)=\frac{1}{24}\int_0^t(\xi-t)^4\,\mathrm{X}\,(\xi)\,d\xi+\frac{x_4\,(0)\;t^4}{24}+\frac{x_3\,(0)\;t^3}{6}+\frac{x_2\,(0)\;t^2}{2}+x_1\,(0)\;t+x_0\,(0)\quad \text{ここで、}\mathrm{x}\,(0)=x_0\,(0) \tag{11.3.8}$$

```
subst([DIN5,DIN4,DIN3,DIN2,DIN1,DIN0],
 DE5);
last(lhs(%))+integrate((a[4](t)*DIN42/
 X(\xi)+a[3](t)*DIN32/X(\xi)+a[2](t)*
 DIN22/X(\xi)+a[1](t)*DIN12/X(\xi)
 +a[0](t)*DIN02/X(\xi))*X(\xi),\xi,0,t)
 +a[4](t)*DIN43+a[3](t)*DIN33
 +a[2](t)*DIN23+a[1](t)*DIN13
 +a[0](t)*DIN03=rhs(%);
%-last(lhs(%));
%-last(lhs(%));
%-last(lhs(%));
%-last(lhs(%));
IDE5:%-last(lhs(%));
a[n](t)*
X(t)-integrate(K(t,\xi)*X(\xi),\xi,0,t)
 =F(t);
```

```
K1:K(t,\xi)=-sum((t-\xi)^i/(i!)
 *a[n-i-1](t),i,0,n-1);
F1:F(t)=f(t)-sum(a[n-i-1](t)*
 sum(x[(j-i+n-1)](0)*t^(j)/(j!),j,0,i)
 ,i,0,n-1);
X1:x(t)=integrate((t-\xi)^(n-1)/((n-1)!)
 *X(\xi),\xi,0,t)+sum(x[j](0)*t^(j)/(j!)
 ,j,0,n-1);
subst([n=5],K1);
ev(%,sum);
lhs(IDE5);
subst([n=5],F1);
ev(%,sum);
rhs(IDE5);
subst([n=5],X1);
ev(%,sum);
DIN0;
```

(11.3.2) 式に (11.3.3) 式から (11.3.8) 式を代入すると、

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \left(\frac{a_0(t)\,(\xi - t)^4}{24} - \frac{a_1(t)\,(\xi - t)^3}{6} + \frac{a_2(t)\,(\xi - t)^2}{2} - a_3(t)\,(\xi - t) + a_4(t) \right) \mathrm{X}(\xi)\, d\xi + a_5(t)\,\mathrm{X}(t) \\
&= \mathrm{f}(t) - x_4(0)\,a_4(t) - (x_4(0)\,t + x_3(0))\,a_3(t) - \left(\frac{x_4(0)\,t^2}{2} + x_3(0)\,t + x_2(0) \right) a_2(t) \\
&\quad - \left(\frac{x_4(0)\,t^3}{6} + \frac{x_3(0)\,t^2}{2} + x_2(0)\,t + x_1(0) \right) a_1(t) \\
&\quad - \left(\frac{x_4(0)\,t^4}{24} + \frac{x_3(0)\,t^3}{6} + \frac{x_2(0)\,t^2}{2} + x_1(0)\,t + x_0(0) \right) a_0(t)
\end{aligned}$$

上式を下記としてまとめると、

$$\begin{aligned}
&a_5(t)\,\mathrm{X}(t) - \int_0^t \mathrm{K}(t,\xi)\,\mathrm{X}(\xi)\,d\xi = \mathrm{F}(t) \\
&\qquad \text{ここで、} \\
&\mathrm{K}(t,\xi) = -\,a_3(t)\,(t-\xi) - \frac{a_0(t)\,(t-\xi)^4}{24} - \frac{a_1(t)\,(t-\xi)^3}{6} - \frac{a_2(t)\,(t-\xi)^2}{2} - a_4(t) \\
&\mathrm{F}(t) = \mathrm{f}(t) - x_4(0)\,a_4(t) - (x_4(0)\,t + x_3(0))\,a_3(t) - \left(\frac{x_4(0)\,t^2}{2} + x_3(0)\,t + x_2(0) \right) a_2(t) \\
&\qquad - \left(\frac{x_4(0)\,t^3}{6} + \frac{x_3(0)\,t^2}{2} + x_2(0)\,t + x_1(0) \right) a_1(t) \\
&\qquad - \left(\frac{x_4(0)\,t^4}{24} + \frac{x_3(0)\,t^3}{6} + \frac{x_2(0)\,t^2}{2} + x_1(0)\,t + x_0(0) \right) a_0(t)
\end{aligned} \tag{11.3.9}$$

上式の積分方程式から $\mathrm{X}(t)$ を求めることができると、(11.3.8) 式に代入し、解：$\mathrm{x}(t)$ が得られる。

$$\mathrm{x}(t) = \frac{1}{24}\int_0^t (\xi - t)^4\,\mathrm{X}(\xi)\,d\xi + \frac{x_4(0)\,t^4}{24} + \frac{x_3(0)\,t^3}{6} + \frac{x_2(0)\,t^2}{2} + x_1(0)\,t + x_0(0) \qquad \text{ここで、}\mathrm{x}(0) = x_0(0) \tag{11.3.10}$$

上記を一般化すると、

$$\begin{aligned}
&a_n(t)\,\mathrm{X}(t) - \int_0^t \mathrm{K}(t,\xi)\,\mathrm{X}(\xi)\,d\xi = \mathrm{F}(t) \\
&\qquad \text{ここで、} \\
&\mathrm{K}(t,\xi) = -\sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_{n-i-1}(t)\,(t-\xi)^i}{i!} \\
&\mathrm{F}(t) = \mathrm{f}(t) - \sum_{i=0}^{n-1} a_{n-i-1}(t) \sum_{j=0}^{i} \frac{x_{n+j-i-1}(0)\,t^j}{j!}
\end{aligned} \tag{11.3.11}$$

上式の積分方程式から $\mathrm{X}(t)$ を求めることができると、次式に代入し、解：$\mathrm{x}(t)$ が得られる。

$$\mathrm{x}(t) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^t (t-\xi)^{n-1}\,\mathrm{X}(\xi)\,d\xi + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{x_j(0)\,t^j}{j!} \tag{11.3.12}$$

11.3.2 Bessel の微分方程式

下記の Bessel の微分方程式で第 1 種 0 次ベッセル関数：$\alpha = 0$ を積分方程式を用いて解く。

$$t^2 \left(\frac{d^2}{d\,t^2}\,\mathrm{x}\left(t\right)\right) + t\,\left(\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{x}\left(t\right)\right) + \left(t^2-\alpha\right)\,\mathrm{x}\left(t\right) = 0$$

$$\text{初期条件：} x_0\left(0\right) = 1,\ \frac{d}{d\,t}\,\mathrm{x}\left(0\right) = x_1\left(0\right) = 0 \tag{11.3.13}$$

```
kill(all);
assume(t>0);
EQ1:t^2*diff(x(t),t,2)+t*diff(x(t),t,1)
 +(t^2-\alpha)*x(t)=0;
DEN1:sum(a[i](t)*diff(x(t),t,i),i,0,n)
 =f(t);
EQ2:a[n](t)*
X(t)-integrate(K(t,\xi)*X(\xi),\xi,0,t)
 =F(t);
K1:K(t,\xi)=-sum((t-\xi)^i/(i!)
 *a[n-i-1](t),i,0,n-1);
F1:F(t)=f(t)-sum(a[n-i-1](t)*sum(
 x[(j-i+n-1)](0)*t^(j)/(j!),j,0,i),i,0,
 n-1);
X1:x(t)=integrate((t-\xi)^(n-1)/((n-1)!)
 *X(\xi),\xi,0,t)+sum(x[j](0)*t^(j)/(j!)
 ,j,0,n-1);
subst([n=2],DEN1);
DE1:ev(%,sum);
A2:a[2](t)=t^2;
A1:a[1](t)=t;
A0:a[0](t)=t^2-\alpha;
FT1:f(t)=0;
subst([n=2],K1);
ev(%,sum);
K11:subst([A2,A1,A0,\alpha=0],%);
subst([n=2],F1);
ev(%,sum);
F11:subst([A2,A1,A0,FT1,\alpha=0,
 x[0](0)=1,x[1](0)=0],%);
subst([n=2],X1);
ev(%,sum);
X11:subst([x[0](0)=1,x[1](0)=0],%);
subst([n=2],EQ2);
EQ21:subst([A2,K11,F11],%);
```

(11.3.1) 式で $n = 2$ とすると、

$$a_2\left(t\right)\,\left(\frac{d^2}{d\,t^2}\,\mathrm{x}\left(t\right)\right) + a_1\left(t\right)\,\left(\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{x}\left(t\right)\right) + a_0\left(t\right)\,\mathrm{x}\left(t\right) = \mathrm{f}\left(t\right) \tag{11.3.14}$$

(11.3.13) 式で $\alpha = 0$ として、上式と比較すると、

$$a_2\left(t\right) = t^2, a_1\left(t\right) = t, a_0\left(t\right) = t^2, \mathrm{f}\left(t\right) = 0 \tag{11.3.15}$$

(11.3.11) 式で $n = 2$ とし、初期条件および (11.3.15) 式を代入し、$\mathrm{K}\left(t,\xi\right), \mathrm{F}\left(t\right)$ を求めると、

$$\begin{aligned}\mathrm{K}\left(t,\xi\right) &= -\,a_0\left(t\right)\,\left(t-\xi\right) - a_1\left(t\right)\\ &= -\,t^2\,\left(t-\xi\right) - t\\ \mathrm{F}\left(t\right) &= \mathrm{f}\left(t\right) - x_1\left(0\right)\,a_1\left(t\right) - \left(x_1\left(0\right)\,t + x_0\left(0\right)\right)\,a_0\left(t\right)\\ &= -\,t^2\end{aligned} \tag{11.3.16}$$

(11.3.12) 式で $n = 2$ とし、初期条件および (11.3.15) 式を代入し、

$$\begin{aligned}\mathrm{x}\left(t\right) &= \int_0^t \left(t-\xi\right)\,\mathrm{X}\left(\xi\right)d\xi + x_1\left(0\right)\,t + x_0\left(0\right)\\ &= \int_0^t \left(t-\xi\right)\,\mathrm{X}\left(\xi\right)d\xi + 1\end{aligned} \tag{11.3.17}$$

(11.3.11) 式の積分方程式で $n = 2$ とすると、

$$a_2\left(t\right)\,\mathrm{X}\left(t\right) - \int_0^t \mathrm{K}\left(t,\xi\right)\,\mathrm{X}\left(\xi\right)d\xi = \mathrm{F}\left(t\right)$$

上式に (11.3.16) 式および (11.3.15) 式を代入し、

$$t^2\,\mathrm{X}\left(t\right) - \int_0^t \left(-t^2\,\left(t-\xi\right) - t\right)\,\mathrm{X}\left(\xi\right)d\xi = -t^2 \tag{11.3.18}$$

```
XX0:X(t)=sum(a[n]*t^n,n,0,10);
XX1:ev(%,sum);
XX2:subst([t=\xi],XX1);
subst([XX1,XX2],EQ21);
ev(%,integrate);
%-rhs(%);
EQ3:expand(%);
C0:coeff(EQ3,t,0);
C1:coeff(EQ3,t,1);
C2:coeff(EQ3,t,2);
C3:coeff(EQ3,t,3);
C4:coeff(EQ3,t,4);
C5:coeff(EQ3,t,5);
C6:coeff(EQ3,t,6);
C7:coeff(EQ3,t,7);
C8:coeff(EQ3,t,8);
C9:coeff(EQ3,t,9);
C10:coeff(EQ3,t,10);
C11:coeff(EQ3,t,11);
C12:coeff(EQ3,t,12);
C13:coeff(EQ3,t,13);
C14:coeff(EQ3,t,14);
```

```
A1:solve([C2,C3,C4,C5,C6,C7,C8,C9,C10],
 [a[0],a[1],a[2],a[3],a[4],a[5],a[6],
 a[7],a[8]])[1];
subst([A1],XX1);
XX3:subst([a[9]=0,a[10]=0],%);
XX31:subst([t=\xi],%);
subst([XX31],X11);
ev(%,integrate);
expand(%);
x(t)=bessel_j (0, t);
lhs(%)=taylor(rhs(%),t,0,10);
```

(11.3.18) 式の積分方程式の解として下記を想定する。

$$\mathrm{X}(t) = a_{10}\,t^{10}+a_9\,t^9+a_8\,t^8+a_7\,t^7+a_6\,t^6+a_5\,t^5 + a_4\,t^4+a_3\,t^3+a_2\,t^2+a_1\,t+a_0 \tag{11.3.19}$$

上式を (11.3.18) 式の積分方程式に代入し、積分を実行し、整理すると、

$$\frac{a_{10}\,t^{14}}{132}+\frac{a_9\,t^{13}}{110}+\frac{12\,a_{10}\,t^{12}}{11}+\frac{a_8\,t^{12}}{90}+\frac{11\,a_9\,t^{11}}{10} +\frac{a_7\,t^{11}}{72}+\frac{10\,a_8\,t^{10}}{9}+\frac{a_6\,t^{10}}{56}+\frac{9\,a_7\,t^9}{8}+\frac{a_5\,t^9}{42} +\frac{8\,a_6\,t^8}{7}+\frac{a_4\,t^8}{30}+\frac{7\,a_5\,t^7}{6}+\frac{a_3\,t^7}{20}+\frac{6\,a_4\,t^6}{5} +\frac{a_2\,t^6}{12}+\frac{5\,a_3\,t^5}{4}+\frac{a_1\,t^5}{6}+\frac{4\,a_2\,t^4}{3}+\frac{a_0\,t^4}{2} +\frac{3\,a_1\,t^3}{2}+2\,a_0\,t^2+t^2=0$$

上式の t の同じ次数の係数比較を行い。

$$2\,a_0+1=0,\quad \frac{3\,a_1}{2}=0,\quad \frac{4\,a_2}{3}+\frac{a_0}{2}=0,\quad \frac{5\,a_3}{4}+\frac{a_1}{6}=0,\quad \frac{6\,a_4}{5}+\frac{a_2}{12}=0,\quad \frac{7\,a_5}{6}+\frac{a_3}{20}=0,\quad \frac{8\,a_6}{7}+\frac{a_4}{30}=0,\quad \frac{9\,a_7}{8}+\frac{a_5}{42}=0,\quad \frac{10\,a_8}{9}+\frac{a_6}{56}=0$$

上式を解いて、

$$a_0=-\frac{1}{2},a_1=0,a_2=\frac{3}{16},a_3=0,a_4=-\frac{5}{384}, a_5=0,a_6=\frac{7}{18432},a_7=0,a_8=-\frac{1}{163840}$$

上式を (11.3.19) 式に代入し、

$$\mathrm{X}(t)=-\frac{t^8}{163840}+\frac{7\,t^6}{18432}-\frac{5\,t^4}{384}+\frac{3\,t^2}{16}-\frac{1}{2}$$

上式を (11.3.17) 式に代入し、

$$\begin{aligned}\mathrm{x}(t) &= \int_0^t (t-\xi) \times \left(-\frac{\xi^8}{163840}+\frac{7\,\xi^6}{18432}-\frac{5\,\xi^4}{384}+\frac{3\,\xi^2}{16}-\frac{1}{2}\right)d\xi + 1\\ &= -\frac{t^{10}}{14745600}+\frac{t^8}{147456}-\frac{t^6}{2304}+\frac{t^4}{64}-\frac{t^2}{4}+1\end{aligned}$$

第 1 種 0 次ベッセル関数を Taylor 展開すると下記となり、上記の結果と一致している。

$$\begin{aligned}\mathrm{x}(t) &= \mathrm{bessel\_j}(0,t)\\ &= 1-\frac{t^2}{4}+\frac{t^4}{64}-\frac{t^6}{2304}+\frac{t^8}{147456}-\frac{t^{10}}{14745600}+\ldots\end{aligned}$$

11.3.3 鉛直放出体の運動

鉛直上方に放出された単位質量の運動を求める。運動方程式は下記となる。これを積分方程式を用いて解く。

$$\frac{d^2}{d\,t^2}\,\mathrm{x}\,(t)-\left(\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{x}\,(t)\right)\,C=-G$$

$$\text{初期条件}: x_0\,(0)=0,\ \frac{d}{d\,t}\,\mathrm{x}\,(0)=x_1\,(0)=A \tag{11.3.20}$$

```
kill(all);
assume(t>0);
assume(A>0);
assume(C>0);
assume(G>0);
EQ1:diff(x(t),t,2)-C*diff(x(t),t,1)=-G;
DEN1:sum(a[i](t)*diff(x(t),t,i),i,0,n)
 =f(t);
EQ2:a[n](t)*
X(t)-integrate(K(t,\xi)*X(\xi),\xi,0,t)
 =F(t);
K1:K(t,\xi)=-sum((t-\xi)^i/(i!)*
 a[n-i-1](t),i,0,n-1);
F1:F(t)=f(t)-sum(a[n-i-1](t)*sum(
 x[(j-i+n-1)](0)*
 t^(j)/(j!),j,0,i),i,0,n-1);
X1:x(t)=integrate((t-\xi)^(n-1)/((n-1)!)
 *X(\xi),\xi,0,t)+sum(x[j](0)
 *t^(j)/(j!),j,0,n-1);
subst([n=2],DEN1);
DE1:ev(%,sum);
A2:a[2](t)=1;
A1:a[1](t)=-C;
A0:a[0](t)=0;
FT1:f(t)=-G;
X00:x[0](0)=0;
X01:x[1](0)=A;
subst([n=2],K1);
ev(%,sum);
K11:subst([A2,A1,A0],%);
subst([n=2],F1);
ev(%,sum);
F11:subst([A2,A1,A0,FT1,X00,X01],%);
subst([n=2],EQ2);
EQ21:subst([A2,A1,A0,F11,K11],%);
X2:X(t)=D*%e^(C*t)+H;
X21:subst([t=\xi],X2);
subst([X2,X21],EQ21);
ev(%,integrate);
%-rhs(%);
```

```
X22:expand(%);
CX1:coeff(lhs(X22),t,1)=0;
CX2:coeff(lhs(X22),t,0)=0;
subst([H=0],CX2);
D1:solve(%,D)[1];
X3:subst([H=0,D1],X2);
X31:subst([t=\xi],X3);
subst([n=2],X1);
ev(%,sum);
subst([X31],%);
ev(%,integrate);
subst([X00,X01],%);
X41:expand(%);
X42:ode2(EQ1,x(t),t);
CX421:subst([t=0],rhs(X42)=0);
CX422:subst([t=0],diff(rhs(X42),t,1)=A);
solve([CX421,CX422],[%k1,%k2])[1];
subst([%],X42);
expand(%);
```

常微分方程式の積分方程式による解法の一般化した式で、常微分方程式は、(11.3.1) 式から、

$$\sum_{i=0}^{n} a_i\,(t)\,\left(\frac{d^i}{d\,t^i}\,\mathrm{x}\,(t)\right)=\mathrm{f}\,(t) \tag{11.3.21}$$

積分方程式は (11.3.11) 式から、

$$a_n\,(t)\,\mathrm{X}\,(t)-\int_0^t \mathrm{K}\,(t,\xi)\,\mathrm{X}\,(\xi)\,d\xi=\mathrm{F}\,(t)$$

ここで、

$$\mathrm{K}\,(t,\xi)=-\sum_{i=0}^{n-1}\frac{a_{n-i-1}\,(t)\,(t-\xi)^i}{i!}$$

$$\mathrm{F}\,(t)=\mathrm{f}\,(t)-\sum_{i=0}^{n-1}a_{n-i-1}\,(t)\sum_{j=0}^{i}\frac{x_{n+j-i-1}\,(0)\,t^j}{j!} \tag{11.3.22}$$

解は (11.3.12) 式から、

$$\mathrm{x}\,(t)=\frac{\int_0^t (t-\xi)^{n-1}\,\mathrm{X}\,(\xi)\,d\xi}{(n-1)!}+\sum_{j=0}^{n-1}\frac{x_j\,(0)\,t^j}{j!} \tag{11.3.23}$$

(11.3.21) 式に $n=2$ を代入し、

$$a_2\,(t)\,\left(\frac{d^2}{d\,t^2}\,\mathrm{x}\,(t)\right)+a_1\,(t)\,\left(\frac{d}{d\,t}\,\mathrm{x}\,(t)\right)+a_0\,(t)\,\mathrm{x}\,(t)=\mathrm{f}\,(t)$$

上式と (11.3.20) 式を比較し、

$$a_2\,(t)=1,\ a_1\,(t)=-C,\ a_0\,(t)=0,\ \mathrm{f}\,(t)=-G \tag{11.3.24}$$

(11.3.22) 式の $\mathrm{K}\,(t,\xi)$ 式に (11.3.24) 式を代入すると、

$$\mathrm{K}\,(t,\xi)=-a_0\,(t)\,(t-\xi)-a_1\,(t)=C \tag{11.3.25}$$

(11.3.22) 式の $\mathrm{F}(t)$ 式に (11.3.24) 式を代入すると、

$$\begin{aligned}\mathrm{F}(t) =& \mathrm{f}(t) - x_1(0)\ a_1(t) - (x_1(0)\ t + x_0(0))\ a_0(t)\\ =& A\,C - G\end{aligned} \tag{11.3.26}$$

(11.3.22) 式の積分方程式に $n = 2$ 式を代入し、

$$a_2(t)\ \mathrm{X}(t) - \int_0^t \mathrm{K}(t,\xi)\ \mathrm{X}(\xi)\,d\xi = \mathrm{F}(t)$$

上式に (11.3.25) 式、(11.3.26) 式を代入すると、

$$\mathrm{X}(t) - \int_0^t \mathrm{X}(\xi)\,d\xi\,C = A\,C - G \tag{11.3.27}$$

上式から下記の解が予測でき、

$$\mathrm{X}(t) = H + e^{t\,C}\,D \tag{11.3.28}$$

(11.3.27) 式に上式を代入し、その積分結果から次式が得られる。

$$-t\,C\,H + H + G + D - A\,C = 0$$

上式で t の同じ次数を比較して、

$$-C\,H = 0, \quad H + G + D - A\,C = 0$$

上式から、

$$H = 0, \quad D = A\,C - G$$

(11.3.28) 式に上式を代入し、積分方程式の解：$\mathrm{X}(t)$ は、

$$\mathrm{X}(t) = e^{t\,C}\ (A\,C - G)$$

(11.3.23) 式に上式を代入すると、常微分方程式の解：$\mathrm{x}(t)$ は、初期条件を代入し、

$$\begin{aligned}\mathrm{x}(t) =& \int_0^t (t-\xi)\ \mathrm{X}(\xi)\,d\xi + x_1(0)\ t + x_0(0)\\ =& \int_0^t (t-\xi)\ e^{\xi\,C}d\xi\ (A\,C - G) + x_1(0)\ t + x_0(0)\\ =& \left(\frac{e^{t\,C}}{C^2} - \frac{t\,C+1}{C^2}\right)(A\,C - G) + t\,A\\ =& -\frac{e^{t\,C}\,G}{C^2} + \frac{t\,G}{C} + \frac{G}{C^2} + \frac{A\,e^{t\,C}}{C} - \frac{A}{C}\end{aligned} \tag{11.3.29}$$

(11.3.20) 式の常微分方程式を ode2 関数で解くと、

$$\mathrm{x}(t) = \frac{(t\,C+1)\ G}{C^2} + \%k1\,e^{t\,C} + \%k2 \tag{11.3.30}$$

(11.3.20) 式の初期条件を上式に代入すると、

$$\frac{G}{C^2} + \%k2 + \%k1 = 0, \quad \frac{G}{C} + \%k1\,C = A$$

上式を解いて $\%k1, \%k2$ を求めると、

$$\%k1 = -\frac{G - A\,C}{C^2}, \quad \%k2 = -\frac{A}{C}$$

(11.3.30) 式に上記の結果を代入すると、解は、

$$\mathrm{x}(t) = -\frac{e^{t\,C}\,G}{C^2} + \frac{t\,G}{C} + \frac{G}{C^2} + \frac{A\,e^{t\,C}}{C} - \frac{A}{C}$$

上記の結果は、積分方程式で得られた (11.3.29) 式と一致している。

11.4 ボルテラ型積分方程式の数値解法

11.4.1 ボルテラ型第二種積分方程式 例 1

「11.2.5 ボルテラ型第二種積分方程式 例 1」で示されている下記の積分方程式を数値解法で解く。

$$\int_0^t (-6\,y+6\,t-5)\,\mathrm{x}(y)\,dy+\mathrm{x}(t)=-t \qquad (11.4.1)$$

```
kill(all);
assume(t>0);
IE1:x(t)+integrate((6*t-6*y-5)*x(y),y,
 0,t)=-t;
F1:f(t)=rhs(IE1);
F2:F[i]=subst([t=T[i]],rhs(%));
K1:k(t,y)=6*t-6*y-5;
K2:K[i,j]=6*T[i]-6*Y[j]-5;
K3:K[i,j-1]=6*T[i]-6*Y[j-1]-5;
IEI1:X[i]+sum(K[i,j-1]*X[j-1]*W+K[i,j]*
 X[j]*W,j,2,i)=F[i];
T1:T[i]=(i)*1/N;
Y1:Y[j]=(j)*1/N;
Y2:Y[j-1]=(j-1)*1/N;
W1:W=1/N/2;
subst([K2,K3],IEI1);
subst([F2],%);
subst([W1,T1,Y1,Y2],%);
subst([N=10],%);
EQ0:ev(%,sum);
EQ1:X[1]=0;
subst([i=2],EQ0);
EQ2:ev(%,sum);
subst([i=3],EQ0);
EQ3:ev(%,sum);
subst([i=4],EQ0);
EQ4:ev(%,sum);
subst([i=5],EQ0);
EQ5:ev(%,sum);
subst([i=6],EQ0);
EQ6:ev(%,sum);
subst([i=7],EQ0);
EQ7:ev(%,sum);
subst([i=8],EQ0);
EQ8:ev(%,sum);
subst([i=9],EQ0);
EQ9:ev(%,sum);
subst([i=10],EQ0);
EQA:ev(%,sum);
```

```
solve([EQ1,EQ2,EQ3,EQ4,EQ5,EQ6,EQ7,EQ8,
 EQ9,EQA],[X[1],X[2],X[3],X[4],X[5],X[6],
 X[7],X[8],X[9],X[10]])[1];
XX:float(%);
T2:subst([N=10],rhs(T1));
LX1:[[subst([i=1],T2),rhs(XX[1])],
 [subst([i=2],T2),rhs(XX[2])],
 [subst([i=3],T2),rhs(XX[3])],
 [subst([i=4],T2),rhs(XX[4])],
 [subst([i=5],T2),rhs(XX[5])],
 [subst([i=6],T2),rhs(XX[6])],
 [subst([i=7],T2),rhs(XX[7])],
 [subst([i=8],T2),rhs(XX[8])],
 [subst([i=9],T2),rhs(XX[9])],
 [subst([i=10],T2),rhs(XX[10])]];
X1:x(y)=%e^(2*y)-%e^(3*y);
X2:subst([y=t],%);
subst([X1,X2],IE1);
ev(%,integrate);
%-rhs(%);
plot2d([[discrete,LX1],rhs(X2)],[t,0,1],
 [style, points,[lines,4,2]],[legend,
 "Numerical solution",
 "Analytic solution"]);
```

(11.4.1) 式の積分を N 分割したシンプソン数値積分で置き換えると、下記の級数となる。

$$\left(\sum_{j=2}^{i} K_{i,j}\,X_j\,W+K_{i,j-1}\,X_{j-1}\,W\right)+X_i=F_i \quad (i=1\to N)$$

$$\begin{aligned}
\text{ここで、}\quad F_i&=-\,T_i\\
K_{i,j-1}&=-\,6\,Y_{j-1}+6\,T_i-5\\
K_{i,j}&=-\,6\,Y_j+6\,T_i-5\\
T_i&=\frac{i}{N}\\
Y_j&=\frac{j}{N}\\
Y_{j-1}&=\frac{j-1}{N}\\
W&=\frac{1}{2\,N}
\end{aligned} \qquad (11.4.2)$$

上式を整理すると、

$$\left(\sum_{j=2}^{i}\frac{X_j\,\left(-\frac{6\,j}{N}+\frac{6\,i}{N}-5\right)}{2\,N}+\frac{X_{j-1}\,\left(-\frac{6\,(j-1)}{N}+\frac{6\,i}{N}-5\right)}{2\,N}\right)+X_i=-\frac{i}{N} \quad (i=1\to N) \qquad (11.4.3)$$

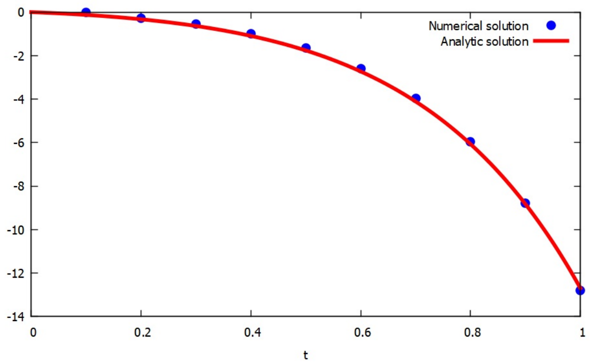
上式で $N=10$ として連立方程式を解き、$[T_i, X_i]$ を求める。ここで $t=0$ のとき (11.4.1) 式から $\mathrm{x}\,(0)=-t=0$ であるから、$X_1=0$ である。

$$[\frac{1}{10}, 0.0], [\frac{1}{5}, -0.26666666666667],$$
$$[\frac{3}{10}, -0.55644444444444], [\frac{2}{5}, -0.99489185185185],$$
$$[\frac{1}{2}, -1.646046182716049], [\frac{3}{5}, -2.599619706205761],$$
$$[\frac{7}{10}, -3.980939335525487], [\frac{4}{5}, -5.964663570882991],$$
$$[\frac{9}{10}, -8.793697544141525], [1, -12.80525836270776]$$

(11.4.1) 式の解析解は (11.2.19) 式から、

$$\mathrm{x}\,(t)=e^{2\,t}-e^{3\,t}$$

上記数値計算結果と解析結果を比較すると下図となる。



11.4.2 ボルテラ型第一種積分方程式　例 1

「11.2.4 ボルテラ型第一種積分方程式　例 1」で示されている下記の積分方程式を数値解法で解く。

$$\int_0^t y\,\mathrm{x}(y)\,dy = (t-1)\,e^t + 1 \tag{11.4.4}$$

```
kill(all);
assume(t>0);
IE1:integrate(y*x(y),y,0,t)=(t-1)*
 %e^(t)+1;
F1:f(t)=rhs(IE1);
F2:F[i]=subst([t=T[i]],rhs(%));
K1:k(t,y)=y;
K2:K[i,j]=Y[j];
IEI1:sum(K[i,j]*X[j]*W,j,1,i)=F[i];
T1:T[i]=(i)*1/N;
Y1:Y[j]=(j-1/2)*1/N;
W1:W=1/N;
subst([K2],IEI1);
subst([F2],%);
subst([W1,T1,Y1],%);
subst([N=10],%);
EQ0:ev(%,sum);
subst([i=1],EQ0);
EQ1:ev(%,sum);
subst([i=2],EQ0);
EQ2:ev(%,sum);
subst([i=3],EQ0);
EQ3:ev(%,sum);
subst([i=4],EQ0);
EQ4:ev(%,sum);
subst([i=5],EQ0);
EQ5:ev(%,sum);
subst([i=6],EQ0);
EQ6:ev(%,sum);
subst([i=7],EQ0);
EQ7:ev(%,sum);
subst([i=8],EQ0);
EQ8:ev(%,sum);
subst([i=9],EQ0);
EQ9:ev(%,sum);
subst([i=10],EQ0);
EQA:ev(%,sum);
```

```
solve([EQ1,EQ2,EQ3,EQ4,EQ5,EQ6,EQ7,EQ8,
 EQ9,EQA],[X[1],X[2],X[3],X[4],X[5],X[6],
 X[7],X[8],X[9],X[10]])[1];
XX:float(%);
T2:subst([N=10],rhs(T1));
LX1:[[subst([i=1],T2),rhs(XX[1])],
 [subst([i=2],T2),rhs(XX[2])],
 [subst([i=3],T2),rhs(XX[3])],
 [subst([i=4],T2),rhs(XX[4])],
 [subst([i=5],T2),rhs(XX[5])],
 [subst([i=6],T2),rhs(XX[6])],
 [subst([i=7],T2),rhs(XX[7])],
 [subst([i=8],T2),rhs(XX[8])],
 [subst([i=9],T2),rhs(XX[9])],
 [subst([i=10],T2),rhs(XX[10])]];
subst([x(y)=%e^y],IE1);
ev(%,integrate);
%-rhs(%);
plot2d([[discrete,LX1],%e^t],[t,0,1],
 [style, points,lines],[y,0,3],
 [style, points,[lines,4,2]],
 [legend,"Numerical solution",
 "Analytic solution"]);
```

$t = 0$ のとき、$x(0)$ は得られないので、シンプソン積分は使用できない。ここでは、(11.4.1) 式の積分を N 分割した矩形数値積分で置き換えると、下記の級数となる。

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{j=1}^{i} K_{i,j}\,X_j\right) W =& F_i \quad (i = 1 \to N)\\
\text{ここで、}\quad K_{i,j} =& Y_j\\
F_i =& e^{T_i}\,(T_i - 1) + 1\\
T_i =& \frac{i}{N}\\
Y_j =& \frac{j-\frac{1}{2}}{N}\\
W =& \frac{1}{N}
\end{aligned} \tag{11.4.5}$$

上式を整理すると、

$$\frac{\sum_{j=1}^{i}\left(j-\frac{1}{2}\right)\,X_j}{N^2} = \left(\frac{i}{N} - 1\right)\,e^{\frac{i}{N}} + 1$$

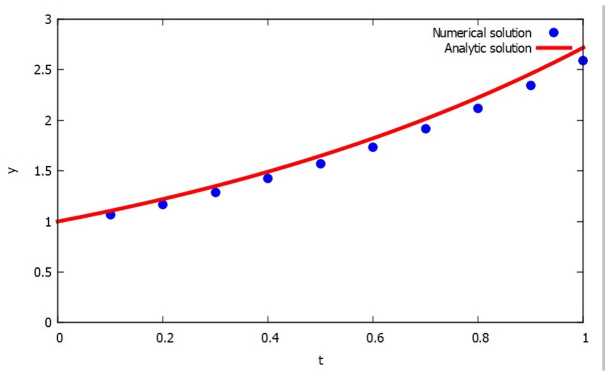
上式で $N=10$ として連立方程式を解き、$[T_i, X_i]$ を求める。

$$[\frac{1}{10}, 1.069234746383415], [\frac{1}{5}, 1.168774649329805],$$
$$[\frac{3}{10}, 1.288841648997348], [\frac{2}{5}, 1.423038477669715],$$
$$[\frac{1}{2}, 1.571870738548846], [\frac{3}{5}, 1.736602094433829],$$
$$[\frac{7}{10}, 1.918795506385547], [\frac{4}{5}, 2.120235020568658],$$
$$[\frac{9}{10}, 2.342916171562336], [1, 2.589055906481]$$

(11.4.4) 式の解析解は (11.2.16) 式から、

$$\mathrm{x}\left(t\right) = e^t$$

上記数値計算結果と解析結果を比較すると下図となる。



11.5 フレドホルム型積分方程式

11.5.1 フレドホルム型第二種積分方程式の解法 (級数)

既知関数：$\mathrm{f}\left(t\right)$、既知関数：$\mathrm{K}\left(t,\xi\right)$、未知関数：$\mathrm{x}\left(t\right)$とする。下記のフレドホルム型第二種積分方程式の解法を下記に示す。

$$\mathrm{x}\left(t\right)-\alpha\int_{A}^{B}\mathrm{K}\left(t,\xi\right)\,\mathrm{x}\left(\xi\right)d\xi=\mathrm{f}\left(t\right)\tag{11.5.1}$$

```
kill(all);
assume(t>0);
assume(\tau>0);
IE1:x(t)-\alpha*'integrate(K(t,\xi)*
 x(\xi),\xi,A,B)=f(t);
IE2:x(t)=f(t)-\alpha*'integrate(G(t,\xi)
 *f(\xi),\xi,A,B);
G1:G(t,\xi)=-sum(\alpha^(n-1)*k[n](t,\xi)
 ,n,1,inf);
K1:k[1](t,\xi)=K(t,\xi);
K2:k[2](t,\xi)=integrate(K(t,\tau)
 *k[1](\tau,\xi),\tau,A,B);
K21:subst([\tau=\tau[2],t=\tau[1]],K2);
K3:k[3](t,\xi)=integrate(K(t,\tau)
 *k[2](\tau,\xi),\tau,A,B);
subst([\tau=\tau[1]],K3);
subst([K21],%);
K31:subst([\tau[2]=\tau[3],\tau[1]=
 \tau[2],t=\tau[1]],%);
K4:k[4](t,\xi)=integrate(K(t,\tau)
 *k[3](\tau,\xi),\tau,A,B);
subst([\tau=\tau[1]],K4);
subst([K31],%);
KN:k[n](t,\xi)=integrate(K(t,\tau)
 *k[n-1](\tau,\xi),\tau,A,B);
```

(11.5.1) 式の解：$\mathrm{x}\left(t\right)$ は次式で得られる。

$$\mathrm{x}\left(t\right)=\mathrm{f}\left(t\right)-\alpha\int_{A}^{B}\mathrm{G}\left(t,\xi\right)\,\mathrm{f}\left(\xi\right)d\xi\tag{11.5.2}$$

ここで、

$$\mathrm{G}\left(t,\xi\right)=-\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^{n-1}\,k_n\left(t,\xi\right)\tag{11.5.3}$$

$k_n\left(t,\xi\right)$ は「11.2.1 ボルテラ型第二種積分方程式の解法（級数)」と同様に、

$$\begin{aligned}
k_1\left(t,\xi\right)=&\mathrm{K}\left(t,\xi\right)\\
k_2\left(t,\xi\right)=&\int_{A}^{B}\mathrm{K}\left(t,\tau\right)\,k_1\left(\tau,\xi\right)d\tau\\
k_3\left(t,\xi\right)=&\int_{A}^{B}\mathrm{K}\left(t,\tau\right)\,k_2\left(\tau,\xi\right)d\tau\\
=&\int_{A}^{B}k_2\left(\tau_1,\xi\right)\,\mathrm{K}\left(t,\tau_1\right)d\tau_1\\
=&\int_{A}^{B}\int_{A}^{B}\mathrm{K}\left(\tau_1,\tau_2\right)\,k_1\left(\tau_2,\xi\right)d\tau_2\,\mathrm{K}\left(t,\tau_1\right)d\tau_1\\
k_4\left(t,\xi\right)=&\int_{A}^{B}\mathrm{K}\left(t,\tau\right)\,k_3\left(\tau,\xi\right)d\tau\\
=&\int_{A}^{B}k_3\left(\tau_1,\xi\right)\,\mathrm{K}\left(t,\tau_1\right)d\tau_1\\
=&\int_{A}^{B}\int_{A}^{B}\mathrm{K}\left(\tau_1,\tau_2\right)\\
&\times\int_{A}^{B}\mathrm{K}\left(\tau_2,\tau_3\right)\,k_1\left(\tau_3,\xi\right)d\tau_3 d\tau_2\,\mathrm{K}\left(t,\tau_1\right)d\tau_1
\end{aligned}\tag{11.5.4}$$

上記から、$k_n\left(t,\xi\right)$ は一般的に、

$$k_n\left(t,\xi\right)=\int_{A}^{B}\mathrm{K}\left(t,\tau\right)\,k_{n-1}\left(\tau,\xi\right)d\tau\tag{11.5.5}$$

11.5.2　フレドホルム型第二種積分方程式の解法 (行列式)

既知関数：f (t)、既知関数：K (t,ξ)、未知関数：x (t) とする。下記のフレドホルム型第二種積分方程式の解法を下記に示す。

$$\mathrm{x}\,(t)-\alpha\int_{A}^{B}\mathrm{K}\,(t,\xi)\,\mathrm{x}\,(\xi)\,d\xi=\mathrm{f}\,(t) \tag{11.5.6}$$

```
kill(all);
assume(t>0);
assume(\tau>0);
IE1:x(t)-\alpha*'integrate(K(t,\xi)*x(\xi),\xi,A,B)=f(t);
IE2:x(t)=f(t)-\alpha*'integrate(G(t,\xi)*f(\xi),\xi,A,B);
G1:G(t,\xi)=-\Delta(t,\xi)/\Delta(\alpha);
M21:matrix([K(t,\xi),K(t,\xi[1])],[K(\xi[1],\xi),K(\xi[1],\xi[1])]);
M22:matrix([K(t,\xi),K(t,\xi[1]),K(t,\xi[2])],[K(\xi[1],\xi),K(\xi[1],\xi[1]),
 K(\xi[1],\xi[2])],[K(\xi[2],\xi),K(\xi[2],\xi[1]),K(\xi[2],\xi[2])]);
M23:matrix([K(t,\xi),K(t,\xi[1]),K(t,\xi[2]),K(t,\xi[3])],[K(\xi[1],\xi),
 K(\xi[1],\xi[1]),K(\xi[1],\xi[2]),K(\xi[1],\xi[3])],[K(\xi[2],\xi),K(\xi[2],\xi[1]),
 K(\xi[2],\xi[2]),K(\xi[2],\xi[3])],[K(\xi[3],\xi),K(\xi[3],\xi[1]),K(\xi[3],\xi[2]),
 K(\xi[3],\xi[3])]);
M24:matrix([K(t,\xi),K(t,\xi[1]),K(t,\xi[2]),K(t,\xi[3]),K(t,\xi[4])],[K(\xi[1],\xi),
 K(\xi[1],\xi[1]),K(\xi[1],\xi[2]),K(\xi[1],\xi[3]),K(\xi[1],\xi[4])],[K(\xi[2],\xi),
 K(\xi[2],\xi[1]),K(\xi[2],\xi[2]),K(\xi[2],\xi[3]),K(\xi[2],\xi[4])],[K(\xi[3],\xi),
 K(\xi[3],\xi[1]),K(\xi[3],\xi[2]),K(\xi[3],\xi[3]),K(\xi[3],\xi[4])],[K(\xi[4],\xi),
 K(\xi[4],\xi[1]),K(\xi[4],\xi[2]),K(\xi[4],\xi[3]),K(\xi[4],\xi[4])]);
M2N:matrix([K(t,\xi),K(t,\xi[1]),K(t,\xi[2]),K(t,\xi[3]),K(t,\xi[n])],[K(\xi[1],\xi),
 K(\xi[1],\xi[1]),K(\xi[1],\xi[2]),K(\xi[1],\xi[3]),K(\xi[1],\xi[n])],[K(\xi[2],\xi),
 K(\xi[2],\xi[1]),K(\xi[2],\xi[2]),K(\xi[2],\xi[3]),K(\xi[2],\xi[n])],[K(\xi[3],\xi),
 K(\xi[3],\xi[1]),K(\xi[3],\xi[2]),K(\xi[3],\xi[3]),K(\xi[3],\xi[n])],[K(\xi[n],\xi),
 K(\xi[n],\xi[1]),K(\xi[n],\xi[2]),K(\xi[n],\xi[3]),K(\xi[n],\xi[n])]);
G2:\Delta(t,\xi)=K(t,\xi)+(-1*\alpha)^(1)/(1!)*'integrate(M21,\xi[1],A,B)
 +(-1*\alpha)^(2)/(2!)*'integrate('integrate(M22,\xi[1],A,B),\xi[2],A,B)
 +(-1*\alpha)^(3)/(3!)*'integrate('integrate('integrate(M23,\xi[1],A,B),\xi[2],A,B),
 \xi[3],A,B)
 +(-1*\alpha)^(4)/(4!)*'integrate('integrate('integrate('integrate(M24,\xi[1],A,B),
 \xi[2],A,B),\xi[3],A,B),\xi[4],A,B)
 +(-1*\alpha)^(n)/(n!)*'integrate('integrate('integrate('integrate(M2N,\xi[1],A,B),
 \xi[2],A,B),\xi[3],A,B),\xi[n],A,B);
G21:\Delta(t,\xi)=K(t,\xi)+'sum((-1*\alpha)^(n)/(n!)*'integrate('integrate('integrate
 ('integrate(M2N,\xi[1],A,B),\xi[2],A,B),\xi[3],A,B),\xi[n],A,B),n,1,inf);
M31:K(\xi[1],\xi[1]);
M32:matrix([K(\xi[1],\xi[1]),K(\xi[1],\xi[2])],[K(\xi[2],\xi[1]),K(\xi[2],\xi[2])]);
M33:matrix([K(\xi[1],\xi[1]),K(\xi[1],\xi[2]),K(\xi[1],\xi[3])],[K(\xi[2],\xi[1]),
 K(\xi[2],\xi[2]),K(\xi[2],\xi[3])],[K(\xi[3],\xi[1]),K(\xi[3],\xi[2]),
 K(\xi[3],\xi[3])]);
```

```
M34:matrix([K(\xi[1],\xi[1]),K(\xi[1],\xi[2]),K(\xi[1],\xi[3]),K(\xi[1],\xi[4])],
 [K(\xi[2],\xi[1]),K(\xi[2],\xi[2]),K(\xi[2],\xi[3]),K(\xi[2],\xi[4])],
 [K(\xi[3],\xi[1]),K(\xi[3],\xi[2]),K(\xi[3],\xi[3]),K(\xi[3],\xi[4])],
 [K(\xi[4],\xi[1]),K(\xi[4],\xi[2]),K(\xi[4],\xi[3]),K(\xi[4],\xi[4])]);
M3N:matrix([K(\xi[1],\xi[1]),K(\xi[1],\xi[2]),K(\xi[1],\xi[3]),K(\xi[1],\xi[n])],
 [K(\xi[2],\xi[1]),K(\xi[2],\xi[2]),K(\xi[2],\xi[3]),K(\xi[2],\xi[n])],
 [K(\xi[3],\xi[1]),K(\xi[3],\xi[2]),K(\xi[3],\xi[3]),K(\xi[3],\xi[n])],
 [K(\xi[n],\xi[1]),K(\xi[n],\xi[2]),K(\xi[n],\xi[3]),K(\xi[n],\xi[n])]);
G3:\Delta(\alpha)=1+(-1*\alpha)^(1)/(1!)*'integrate(M31,\xi[1],A,B)
 +(-1*\alpha)^(2)/(2!)*'integrate('integrate(M32,\xi[1],A,B),\xi[2],A,B)
 +(-1*\alpha)^(3)/(3!)*'integrate('integrate('integrate(M33,\xi[1],A,B),\xi[2],A,B),
 \xi[3],A,B)
 +(-1*\alpha)^(4)/(4!)*'integrate('integrate('integrate('integrate(M34,\xi[1],A,B),
 \xi[2],A,B),\xi[3],A,B),xi[4],A,B)+(-1*\alpha)^(n)/(n!)*'integrate('integrate
 ('integrate('integrate(M3N,\xi[1],A,B),\xi[2],A,B),\xi[3],A,B),\xi[n],A,B);
G31:\Delta(\alpha)=1+'sum((-1*\alpha)^(n)/(n!)*'integrate('integrate('integrate
 ('integrate(M3N,\xi[1],A,B),\xi[2],A,B),\xi[3],A,B),\xi[n],A,B),n,1,inf);
```

(11.5.6) 式の解：$\mathrm{x}(t)$ は次式で得られる。

$$\mathrm{x}(t) = \mathrm{f}(t) - \alpha \int_A^B \mathrm{G}(t,\xi)\,\mathrm{f}(\xi)\,d\xi \tag{11.5.7}$$

ここで、

$$\mathrm{G}(t,\xi) = -\frac{\Delta(t,\xi)}{\Delta(\alpha)} \tag{11.5.8}$$

(11.5.8) 式の $\Delta(t,\xi)$ は、

$$\begin{aligned}\Delta(t,\xi) =& \frac{(-\alpha)^n}{n!}\int_A^B\int_A^B\int_A^B\cdots\int_A^B \begin{bmatrix} \mathrm{K}(t,\xi) & \mathrm{K}(t,\xi_1) & \mathrm{K}(t,\xi_2) & \mathrm{K}(t,\xi_3) & \dots & \mathrm{K}(t,\xi_n) \\ \mathrm{K}(\xi_1,\xi) & \mathrm{K}(\xi_1,\xi_1) & \mathrm{K}(\xi_1,\xi_2) & \mathrm{K}(\xi_1,\xi_3) & \dots & \mathrm{K}(\xi_1,\xi_n) \\ \mathrm{K}(\xi_2,\xi) & \mathrm{K}(\xi_2,\xi_1) & \mathrm{K}(\xi_2,\xi_2) & \mathrm{K}(\xi_2,\xi_3) & \dots & \mathrm{K}(\xi_2,\xi_n) \\ \mathrm{K}(\xi_3,\xi) & \mathrm{K}(\xi_3,\xi_1) & \mathrm{K}(\xi_3,\xi_2) & \mathrm{K}(\xi_3,\xi_3) & \dots & \mathrm{K}(\xi_3,\xi_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{K}(\xi_n,\xi) & \mathrm{K}(\xi_n,\xi_1) & \mathrm{K}(\xi_n,\xi_2) & \mathrm{K}(\xi_n,\xi_3) & \dots & \mathrm{K}(\xi_n,\xi_n) \end{bmatrix} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \dots d\xi_n \\ &+ \cdots + \frac{\alpha^4}{24}\int_A^B\int_A^B\int_A^B\int_A^B \begin{bmatrix} \mathrm{K}(t,\xi) & \mathrm{K}(t,\xi_1) & \mathrm{K}(t,\xi_2) & \mathrm{K}(t,\xi_3) & \mathrm{K}(t,\xi_4) \\ \mathrm{K}(\xi_1,\xi) & \mathrm{K}(\xi_1,\xi_1) & \mathrm{K}(\xi_1,\xi_2) & \mathrm{K}(\xi_1,\xi_3) & \mathrm{K}(\xi_1,\xi_4) \\ \mathrm{K}(\xi_2,\xi) & \mathrm{K}(\xi_2,\xi_1) & \mathrm{K}(\xi_2,\xi_2) & \mathrm{K}(\xi_2,\xi_3) & \mathrm{K}(\xi_2,\xi_4) \\ \mathrm{K}(\xi_3,\xi) & \mathrm{K}(\xi_3,\xi_1) & \mathrm{K}(\xi_3,\xi_2) & \mathrm{K}(\xi_3,\xi_3) & \mathrm{K}(\xi_3,\xi_4) \\ \mathrm{K}(\xi_4,\xi) & \mathrm{K}(\xi_4,\xi_1) & \mathrm{K}(\xi_4,\xi_2) & \mathrm{K}(\xi_4,\xi_3) & \mathrm{K}(\xi_4,\xi_4) \end{bmatrix} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 d\xi_4 \\ &- \frac{\alpha^3}{6}\int_A^B\int_A^B\int_A^B \begin{bmatrix} \mathrm{K}(t,\xi) & \mathrm{K}(t,\xi_1) & \mathrm{K}(t,\xi_2) & \mathrm{K}(t,\xi_3) \\ \mathrm{K}(\xi_1,\xi) & \mathrm{K}(\xi_1,\xi_1) & \mathrm{K}(\xi_1,\xi_2) & \mathrm{K}(\xi_1,\xi_3) \\ \mathrm{K}(\xi_2,\xi) & \mathrm{K}(\xi_2,\xi_1) & \mathrm{K}(\xi_2,\xi_2) & \mathrm{K}(\xi_2,\xi_3) \\ \mathrm{K}(\xi_3,\xi) & \mathrm{K}(\xi_3,\xi_1) & \mathrm{K}(\xi_3,\xi_2) & \mathrm{K}(\xi_3,\xi_3) \end{bmatrix} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \\ &+ \frac{\alpha^2}{2}\int_A^B\int_A^B \begin{bmatrix} \mathrm{K}(t,\xi) & \mathrm{K}(t,\xi_1) & \mathrm{K}(t,\xi_2) \\ \mathrm{K}(\xi_1,\xi) & \mathrm{K}(\xi_1,\xi_1) & \mathrm{K}(\xi_1,\xi_2) \\ \mathrm{K}(\xi_2,\xi) & \mathrm{K}(\xi_2,\xi_1) & \mathrm{K}(\xi_2,\xi_2) \end{bmatrix} d\xi_1 d\xi_2 \\ &- \alpha\int_A^B \begin{bmatrix} \mathrm{K}(t,\xi) & \mathrm{K}(t,\xi_1) \\ \mathrm{K}(\xi_1,\xi) & \mathrm{K}(\xi_1,\xi_1) \end{bmatrix} d\xi_1 + \mathrm{K}(t,\xi)\end{aligned} \tag{11.5.9}$$

上式を一般化すると、

$$\begin{aligned}\Delta(t,\xi) =& \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^n(-1)^n}{n!}\int_A^B\int_A^B\int_A^B\cdots\int_A^B \begin{bmatrix} \mathrm{K}(t,\xi) & \mathrm{K}(t,\xi_1) & \mathrm{K}(t,\xi_2) & \mathrm{K}(t,\xi_3) & \dots & \mathrm{K}(t,\xi_n) \\ \mathrm{K}(\xi_1,\xi) & \mathrm{K}(\xi_1,\xi_1) & \mathrm{K}(\xi_1,\xi_2) & \mathrm{K}(\xi_1,\xi_3) & \dots & \mathrm{K}(\xi_1,\xi_n) \\ \mathrm{K}(\xi_2,\xi) & \mathrm{K}(\xi_2,\xi_1) & \mathrm{K}(\xi_2,\xi_2) & \mathrm{K}(\xi_2,\xi_3) & \dots & \mathrm{K}(\xi_2,\xi_n) \\ \mathrm{K}(\xi_3,\xi) & \mathrm{K}(\xi_3,\xi_1) & \mathrm{K}(\xi_3,\xi_2) & \mathrm{K}(\xi_3,\xi_3) & \dots & \mathrm{K}(\xi_3,\xi_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{K}(\xi_n,\xi) & \mathrm{K}(\xi_n,\xi_1) & \mathrm{K}(\xi_n,\xi_2) & \mathrm{K}(\xi_n,\xi_3) & \dots & \mathrm{K}(\xi_n,\xi_n) \end{bmatrix} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \dots d\xi_n \\ &+ \mathrm{K}(t,\xi)\end{aligned} \tag{11.5.10}$$

(11.5.8) 式の $\Delta(\alpha)$ は、

$$\begin{aligned}
\Delta(\alpha) =& \frac{(-\alpha)^n}{n!}\int_A^B\int_A^B\int_A^B\cdots\int_A^B \begin{bmatrix} \mathrm{K}(\xi_1,\xi_1) & \mathrm{K}(\xi_1,\xi_2) & \mathrm{K}(\xi_1,\xi_3) & \dots & \mathrm{K}(\xi_1,\xi_n) \\ \mathrm{K}(\xi_2,\xi_1) & \mathrm{K}(\xi_2,\xi_2) & \mathrm{K}(\xi_2,\xi_3) & \dots & \mathrm{K}(\xi_2,\xi_n) \\ \mathrm{K}(\xi_3,\xi_1) & \mathrm{K}(\xi_3,\xi_2) & \mathrm{K}(\xi_3,\xi_3) & \dots & \mathrm{K}(\xi_3,\xi_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{K}(\xi_n,\xi_1) & \mathrm{K}(\xi_n,\xi_2) & \mathrm{K}(\xi_n,\xi_3) & \dots & \mathrm{K}(\xi_n,\xi_n) \end{bmatrix} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \dots d\xi_n \\
&+\cdots+\frac{\alpha^4}{24}\int_A^B\int_A^B\int_A^B\int_A^B \begin{bmatrix} \mathrm{K}(\xi_1,\xi_1) & \mathrm{K}(\xi_1,\xi_2) & \mathrm{K}(\xi_1,\xi_3) & \mathrm{K}(\xi_1,\xi_4) \\ \mathrm{K}(\xi_2,\xi_1) & \mathrm{K}(\xi_2,\xi_2) & \mathrm{K}(\xi_2,\xi_3) & \mathrm{K}(\xi_2,\xi_4) \\ \mathrm{K}(\xi_3,\xi_1) & \mathrm{K}(\xi_3,\xi_2) & \mathrm{K}(\xi_3,\xi_3) & \mathrm{K}(\xi_3,\xi_4) \\ \mathrm{K}(\xi_4,\xi_1) & \mathrm{K}(\xi_4,\xi_2) & \mathrm{K}(\xi_4,\xi_3) & \mathrm{K}(\xi_4,\xi_4) \end{bmatrix} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 d\xi_4 \\
&-\frac{\alpha^3}{6}\int_A^B\int_A^B\int_A^B \begin{bmatrix} \mathrm{K}(\xi_1,\xi_1) & \mathrm{K}(\xi_1,\xi_2) & \mathrm{K}(\xi_1,\xi_3) \\ \mathrm{K}(\xi_2,\xi_1) & \mathrm{K}(\xi_2,\xi_2) & \mathrm{K}(\xi_2,\xi_3) \\ \mathrm{K}(\xi_3,\xi_1) & \mathrm{K}(\xi_3,\xi_2) & \mathrm{K}(\xi_3,\xi_3) \end{bmatrix} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \\
&+\frac{\alpha^2}{2}\int_A^B\int_A^B \begin{bmatrix} \mathrm{K}(\xi_1,\xi_1) & \mathrm{K}(\xi_1,\xi_2) \\ \mathrm{K}(\xi_2,\xi_1) & \mathrm{K}(\xi_2,\xi_2) \end{bmatrix} d\xi_1 d\xi_2 \; - \alpha\int_A^B \mathrm{K}(\xi_1,\xi_1)\, d\xi_1 \; +1
\end{aligned} \tag{11.5.11}$$

上式を一般化すると、

$$\Delta(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^n(-1)^n}{n!}\int_A^B\int_A^B\int_A^B\cdots\int_A^B \begin{bmatrix} \mathrm{K}(\xi_1,\xi_1) & \mathrm{K}(\xi_1,\xi_2) & \mathrm{K}(\xi_1,\xi_3) & \dots & \mathrm{K}(\xi_1,\xi_n) \\ \mathrm{K}(\xi_2,\xi_1) & \mathrm{K}(\xi_2,\xi_2) & \mathrm{K}(\xi_2,\xi_3) & \dots & \mathrm{K}(\xi_2,\xi_n) \\ \mathrm{K}(\xi_3,\xi_1) & \mathrm{K}(\xi_3,\xi_2) & \mathrm{K}(\xi_3,\xi_3) & \dots & \mathrm{K}(\xi_3,\xi_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{K}(\xi_n,\xi_1) & \mathrm{K}(\xi_n,\xi_2) & \mathrm{K}(\xi_n,\xi_3) & \dots & \mathrm{K}(\xi_n,\xi_n) \end{bmatrix} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \dots d\xi_n +1 \tag{11.5.12}$$

11.5.3　パンシュール・グルサー核を持つフレドホルム型第二種積分方程式の解法

既知関数：$\mathrm{f}(t)$、既知関数：$\mathrm{K}(t,\xi)$、未知関数：$\mathrm{x}(t)$ とする。下記のフレドホルム型第二種積分方程式の解法を下記に示す。

$$\mathrm{x}(t)-\alpha\int_A^B \mathrm{K}(t,\xi)\,\mathrm{x}(\xi)\,d\xi=\mathrm{f}(t) \tag{11.5.13}$$

ここで $\mathrm{K}(t,\xi)$ が下記のように表せるとき、パンシュール・グルサー核という。

$$\mathrm{K}(t,\xi)=\sum_{i=1}^{n} a_i(t)\;b_i(\xi) \tag{11.5.14}$$

```
kill(all);
assume(t>0);
assume(\xi>0);
IE1:x(t)-\alpha*'integrate(K(t,\xi)
 *x(\xi),\xi,A,B)=f(t);
K1:K(t,\xi)=sum(a[i](t)*b[i](\xi),i,1,n);
DL1:integrate(b[i](\xi)*x(\xi),\xi,A,B)
 =\delta[i];
DL2:rhs(%)=lhs(%);
DL3:subst([i=j,\xi=t],DL1);
subst([K1],IE1);
x(t)-\alpha*sum(integrate(x(xi)*a[i](t)
 *b[i](xi),xi,A,B),i,1,n)=f(t);
IE2:subst([DL1],%);
IE2*b[j](t);
IE21:expand(%);
IE22:first(lhs(IE21));
IE23:last(lhs(IE21));
IE231:-\alpha*b[j](t)*delta[i]*a[i](t);
IE24:rhs(IE21);
IE3:integrate(IE22,t,A,B)+sum(integrate
 (IE231,t,A,B),i,1,n)=integrate(IE24,t,
 A,B);
IE31:integrate(a[i](t)*b[j](t),t,A,B)
 =k[j,i];
IE32:integrate(f(t)*b[j](t),t,A,B)=c[j];
IE4:subst([DL3,IE31,IE32],IE3);
IE2-last(lhs(IE2));
```

(11.5.13) 式に (11.5.14) 式を代入すると、

$$\mathrm{x}(t)-\alpha\int_A^B \mathrm{x}(\xi)\sum_{i=1}^{n} a_i(t)\;b_i(\xi)\,d\xi=\mathrm{f}(t)$$

和と積分の順序を変え、

$$\mathrm{x}(t)-\alpha\sum_{i=1}^{n} a_i(t)\int_A^B b_i(\xi)\;\mathrm{x}(\xi)\,d\xi=\mathrm{f}(t) \tag{11.5.15}$$

上式の積分を下記に置き換える。

$$\int_A^B b_i(\xi)\;\mathrm{x}(\xi)\,d\xi=\delta_i \tag{11.5.16}$$

(11.5.13) 式に上式を代入すると、

$$\mathrm{x}(t)-\alpha\sum_{i=1}^{n}\delta_i\,a_i(t)=\mathrm{f}(t) \tag{11.5.17}$$

上式に $b_j(t)$ を掛け、積分すると、

$$\begin{aligned}\int_A^B b_j(t)\;\mathrm{x}(t)\,dt-\alpha\sum_{i=1}^{n}\delta_i\int_A^B a_i(t)\;b_j(t)\,dt\\=\int_A^B \mathrm{f}(t)\;b_j(t)\,dt\end{aligned} \tag{11.5.18}$$

ここで、下記とすると、

$$\int_A^B a_i(t)\;b_j(t)\,dt=k_{j,i},\quad \int_A^B \mathrm{f}(t)\;b_j(t)\,dt=c_j \tag{11.5.19}$$

(11.5.18) 式は、

$$\delta_j-\alpha\sum_{i=1}^{n}\delta_i\,k_{j,i}=c_j \tag{11.5.20}$$

上式の連立方程式から、δ_i が得られる。これを用いて、(11.5.17) 式から解：$\mathrm{x}(t)$ が得られる。

$$\mathrm{x}(t)=\alpha\left(\sum_{i=1}^{n}\delta_i\,a_i(t)\right)+\mathrm{f}(t) \tag{11.5.21}$$

11.5.4　フレドホルム型同次積分方程式の解法

既知関数 : $\mathrm{K}\,(t,\xi)$、未知関数 : $\mathrm{x}\,(t)$ とする。下記のフレドホルム型同次積分方程式の解法を下記に示す。

$$\mathrm{x}\,(t) - \alpha \int_A^B \mathrm{K}\,(t,\xi)\;\mathrm{x}\,(\xi)\,d\xi = 0 \tag{11.5.22}$$

```
kill(all);
assume(t>0);
assume(\tau>0);
IE1:x(t)-\alpha*'integrate(K(t,\xi)*
 x(\xi),\xi,A,B)=0;
\Delta(\alpha)=0;
x(t)=sum(\Delta(t,C[i],\alpha[i]),i,1,N);
```

「11.5.2 フレドホルム型第二種積分方程式の解法 (行列式)」で (11.5.11) 式、(11.5.12) 式の $\Delta\,(\alpha)$ および (11.5.9) 式、(11.5.10) 式の $\Delta\,(t,\xi)$ から、

$$\begin{aligned} \Delta\,(\alpha) \neq 0 \quad & \text{なら、解は} \quad x = 0 \\ \Delta\,(\alpha) =\, 0,\ \frac{d}{d\,\alpha}\,\Delta\,(\alpha) \neq 0 \quad & \text{なら、解は} \\ & x(t) = \Delta\,(t, C_i, \alpha_i) \end{aligned} \tag{11.5.23}$$

ここで、$\Delta\,(t, C_i, \alpha_i)$ は $\Delta\,(\alpha) =\, 0,$ となる α_i で $\Delta\,(t,\xi)$ の ξ を適当な係数 : C_i に置き換えたものである。以上から解は、

$$\mathrm{x}\,(t) = \sum_{i=1}^{N} \Delta\,(t, C_i, \alpha_i) \tag{11.5.24}$$

11.5.5 フレドホルム型第一種積分方程式の解法

既知関数 : $\mathrm{f}(t)$、既知関数 : $\mathrm{K}(t,\xi)$、未知関数 : $\mathrm{x}(t)$ とする。下記のフレドホルム型第一種積分方程式の解法を下記に示す。

$$\int_{A}^{B}\mathrm{K}(t,\xi)\ \mathrm{x}(\xi)\,d\xi=\mathrm{f}(t) \tag{11.5.25}$$

```
kill(all);
assume(t>0);
assume(\xi>0);
IE1:'integrate(K(t,\xi)*x(\xi),\xi,A,B)
 =f(t);
IE11:'integrate(K(t,\xi)*x(\xi),\xi,A,t)
 -'integrate(K(t,\xi)*x(\xi),\xi,B,t)
 =f(t);
diff(first(lhs(IE11)),t,1);
IE12:first(%)+subst([K(t,t)=K(t,t[m])],
 last(%));
diff(last(lhs(IE11)),t,1);
IE13:first(%)+subst([K(t,t)=K(t,t[p])],
 last(%));
IE14:diff(rhs(IE11),t,1);
IE12+IE13=IE14;
IE2:integrate(('diff(K(t,xi),t,1))*x(xi),
 xi,A,B)+factor(x(t)*K(t,t[m])-x(t)*
 K(t,t[p]))=rhs(%);
LT3:K(t,t[p])-K(t,t[m])=-L(t);
subst([LT3],IE2);
expand(%/L(t));
```

(11.5.25) 式の左辺の積分を次式のように t で分け、

$$\int_{A}^{t}\mathrm{K}(t,\xi)\ \mathrm{x}(\xi)\,d\xi-\int_{B}^{t}\mathrm{K}(t,\xi)\ \mathrm{x}(\xi)\,d\xi=\mathrm{f}(t)$$

上式を t で微分すると、

$$-\int_{B}^{t}\left(\frac{d}{d\,t}\mathrm{K}(t,\xi)\right)\mathrm{x}(\xi)\,d\xi+\int_{A}^{t}\left(\frac{d}{d\,t}\mathrm{K}(t,\xi)\right)\mathrm{x}(\xi)\,d\xi$$
$$-\mathrm{x}(t)\ \mathrm{K}(t,t+)+\mathrm{x}(t)\ \mathrm{K}(t,t-)=\frac{d}{d\,t}\mathrm{f}(t)$$

上式を整理し、

$$\int_{A}^{B}\left(\frac{d}{d\,t}\mathrm{K}(t,\xi)\right)\mathrm{x}(\xi)\,d\xi$$
$$-\mathrm{x}(t)\ \left(\mathrm{K}(t,t_p)-\mathrm{K}(t,t_m)\right)=\frac{d}{d\,t}\mathrm{f}(t) \tag{11.5.26}$$

上式の次式で $\mathrm{K}(t,\xi)$ が ξ で $\mathrm{L}(t)$ の跳躍がある場合、下記の置き換えを行い、

$$\mathrm{K}(t,t+)-\mathrm{K}(t,t-)=-\mathrm{L}(t) \tag{11.5.27}$$

(11.5.26) 式に上式を代入し、

$$\frac{\int_{A}^{B}\left(\frac{d}{d\,t}\mathrm{K}(t,\xi)\right)\mathrm{x}(\xi)\,d\xi}{\mathrm{L}(t)}+\mathrm{x}(t)=\frac{\frac{d}{d\,t}\mathrm{f}(t)}{\mathrm{L}(t)} \tag{11.5.28}$$

```
PH1:\xi=\phi(t);
PH2:t=\psi(\xi);
IE21:'integrate(K(t,\xi)*x(\xi),\xi,A,
 \phi(t))-'integrate(K(t,\xi)*x(\xi),
 \xi,B,\phi(t))=f(t);
diff(first(lhs(IE21)),t,1);
IE22:first(%)+subst([K(t,\phi(t))=
 K(t,\phi[m](t))],last(%));
diff(last(lhs(IE21)),t,1);
IE23:first(%)+subst([K(t,\phi(t))=
 K(t,\phi[p](t))],last(%));
IE22+IE23=IE14;
IE24:subst([x(\phi(t))=x(t)],%);
IE25:factor(rest(lhs(IE24),2));
LT1:K(t,\phi[p](t))-K(t,\phi[m](t))=-L(t);
LT2:rhs(%)=lhs(%);
subst([LT1],IE25);
integrate(('diff(K(t,xi),t,1))*x(xi),
 xi,A,B)+%=IE14;
%/(L(t)*('diff(\phi(t),t,1)));
IE3:expand(%);
```

$\mathrm{K}(t,\xi)$ が下記の $\xi=\phi(t)$ で連続的に $\mathrm{L}(t)$ の跳躍がある場合は、

$$\xi=\phi(t),\quad \text{逆関数}\ :t=\psi(\xi)$$

(11.5.25) 式の左辺の積分を次式のように $\phi(t)$ で分け、

$$\int_{A}^{\phi(t)}\mathrm{K}(t,\xi)\ \mathrm{x}(\xi)\,d\xi-\int_{B}^{\phi(t)}\mathrm{K}(t,\xi)\ \mathrm{x}(\xi)\,d\xi=\mathrm{f}(t)$$

上式を t で微分すると、

$$-\int_{B}^{\phi(t)}\left(\frac{d}{d\,t}\mathrm{K}(t,\xi)\right)\mathrm{x}(\xi)\,d\xi+\int_{A}^{\phi(t)}\left(\frac{d}{d\,t}\mathrm{K}(t,\xi)\right)\mathrm{x}(\xi)\,d\xi$$
$$+\mathrm{x}(\phi(t))\left(\frac{d}{d\,t}\phi(t)\right)\left(-\mathrm{K}(t,\phi(t)+)+\mathrm{K}(t,\phi(t)-)\right)$$
$$=\frac{d}{d\,t}\mathrm{f}(t) \tag{11.5.29}$$

下記の置き換えを行い、

$$\mathrm{K}(t,\phi(t)+)-\mathrm{K}(t,\phi(t)-)=-\mathrm{L}(t) \tag{11.5.30}$$

(11.5.29) 式に上式を代入し、

$$\int_{A}^{B}\left[\frac{\left(\frac{d}{d\,t}\mathrm{K}(t,\xi)\right)}{\mathrm{L}(t)\ \left(\frac{d}{d\,t}\phi(t)\right)}\right]_{t=\psi(\tau)}\mathrm{x}(\xi)\,d\xi+\mathrm{x}(\tau)$$
$$=\left[\frac{\frac{d}{d\,t}\mathrm{f}(t)}{\mathrm{L}(t)\ \left(\frac{d}{d\,t}\phi(t)\right)}\right]_{t=\psi(\tau)} \tag{11.5.31}$$

11.5.6 フレドホルム型同次積分方程式 例 1

下記の積分方程式を解き、$\mathrm{x}(t)$ を求める。

$$\mathrm{x}(t) = \alpha \int_0^1 (t - 4\xi)\, \mathrm{x}(\xi)\, d\xi \tag{11.5.32}$$

```
kill(all);
IE1:x(t)=\alpha*integrate((t-4*\xi)*
 x(\xi),\xi,0,1);
X1:x(t)=a[3]*t^3+a[2]*t^2+a[1]*t+a[0];
X2:subst([t=\xi],X1);
X3:subst([X1,X2],IE1);
ev(%,integrate);
%-rhs(%);
IE2:expand(%);
A3:coeff(IE2,t,3);
A2:coeff(IE2,t,2);
coeff(IE2,t,1);
A1:subst([A2,A3],%);
coeff(IE2,t,0);
A0:subst([A2,A3],%);
solve([A0,A1],[a[0],a[1]]);
A11:coeff(lhs(A0),a[1],1);
A12:coeff(lhs(A0),a[0],1);
A21:coeff(lhs(A1),a[1],1);
A22:coeff(lhs(A1),a[0],1);
MTA1:matrix([A11,A12],[A21,A22]);
determinant (MTA1)=0;
AL1:solve(%,\alpha);
AL11:AL1[1];
AL12:AL1[2];
```

(11.5.32) 式の被積分関数の形から、$\mathrm{x}(t)$ は t の多項式であることが予測される。そこで $\mathrm{x}(t)$ を次式のように置き、

$$\mathrm{x}(t) = a_3\, t^3 + a_2\, t^2 + a_1\, t + a_0 \tag{11.5.33}$$

(11.5.32) 式に上式を代入すると、

$$\begin{aligned} &a_3\, t^3 + a_2\, t^2 + a_1\, t + a_0 \\ &\quad = \alpha \int_0^1 (t - 4\xi)\, \left(a_3\, \xi^3 + a_2\, \xi^2 + a_1\, \xi + a_0\right) d\xi \end{aligned}$$

上式の積分を実行し、右辺項を左辺に移項し整理すると、

$$\begin{aligned} &a_3\, t^3 + a_2\, t^2 - \frac{a_3\, \alpha\, t}{4} - \frac{a_2\, \alpha\, t}{3} - \frac{a_1\, \alpha\, t}{2} - a_0\, \alpha\, t \\ &\quad + a_1\, t + \frac{4\, a_3\, \alpha}{5} + a_2\, \alpha + \frac{4\, a_1\, \alpha}{3} + 2\, a_0\, \alpha + a_0 = 0 \end{aligned}$$

t の同じ次数の係数比較を行い、

$$\begin{aligned} &a_3 = 0 \\ &a_2 = 0 \\ &-\frac{a_3\, \alpha}{4} - \frac{a_2\, \alpha}{3} - \frac{a_1\, \alpha}{2} - a_0\, \alpha + a_1 = 0 \\ &-\frac{a_1\, \alpha}{2} - a_0\, \alpha + a_1 = 0 \end{aligned}$$

上式から、$a_3 = 0, a_2 = 0$ であるから、この結果を上式に代入し、

$$\begin{aligned} \frac{4\, a_1\, \alpha}{3} + 2\, a_0\, \alpha + a_0 = 0 \\ -\frac{a_1\, \alpha}{2} - a_0\, \alpha + a_1 = 0 \end{aligned} \tag{11.5.34}$$

上式を解くと、下記となり解が得られない。

$$a_0 = 0, a_1 = 0$$

そこで (11.5.34) 式の係数行列式から α を求める。

$$\begin{bmatrix} \frac{4\alpha}{3} & 2\,\alpha + 1 \\ 1 - \frac{\alpha}{2} & -\alpha \end{bmatrix} = 0$$

上記の行列式は、

$$-\frac{4\,\alpha^2}{3} - \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)(2\,\alpha + 1) = 0$$

上式を解いて、

$$\alpha = -\frac{\sqrt{33} + 9}{4}, \quad \alpha = \frac{\sqrt{33} - 9}{4} \tag{11.5.35}$$

```
A31:subst([AL11],A0);
A32:subst([AL11],A1);
A41:solve([A31,A32],[a[0],a[1]])[1];
subst([%r1=1],A41);
subst([%],X1);
X11:subst([A2,A3],%);
X13:subst([t=\xi],X11);
subst([X11,X13,AL11],IE1);
ev(%,integrate);
%-rhs(%);
factor(%);
```

$\alpha = -\frac{\sqrt{33}+9}{4}$ の場合、(11.5.34) 式は、

$$-\frac{\left(\sqrt{33} + 9\right)\, a_1}{3} - \frac{\left(\sqrt{33} + 9\right)\, a_0}{2} + a_0 = 0$$

$$\frac{\left(\sqrt{33} + 9\right)\, a_1}{8} + a_1 + \frac{\left(\sqrt{33} + 9\right)\, a_0}{4} = 0$$

上式を解くと、

$$a_0 = \frac{\sqrt{33}\,\%r1 - 15\,\%r1}{12}, a_1 = \%r1$$

$a_1=1$ とすると、

$$a_0=\frac{\sqrt{33}-15}{12}, a_1=1$$

上式から、$\mathrm{x}(t)$ は、

$$\mathrm{x}(t)=t+\frac{\sqrt{33}-15}{12}$$

上式を (11.5.32) 式に代入すると、確かに満足している。

```
A31:subst([AL12],A0);
A32:subst([AL12],A1);
A42:solve([A31,A32],[a[0],a[1]])[1];
subst([%r2=1],A42);
subst([%],X1);
X11:subst([A2,A3],%);
X13:subst([t=\xi],X11);
subst([X11,X13,AL12],IE1);
ev(%,integrate);
%-rhs(%);
factor(%);
```

$\alpha=\frac{\sqrt{33}-9}{4}$ の場合、(11.5.34) 式は、

$$\frac{\left(\sqrt{33}-9\right)\,a_1}{3}+\frac{\left(\sqrt{33}-9\right)\,a_0}{2}+a_0=0$$

$$-\frac{\left(\sqrt{33}-9\right)\,a_1}{8}+a_1-\frac{\left(\sqrt{33}-9\right)\,a_0}{4}=0$$

上式を解くと、

$$a_0=-\frac{\sqrt{33}\,\%r2+15\,\%r2}{12}, a_1=\%r2$$

$a_1=1$ とすると、

$$a_0=-\frac{\sqrt{33}+15}{12}, a_1=1$$

上式から、$\mathrm{x}(t)$ は、

$$\mathrm{x}(t)=t-\frac{\sqrt{33}+15}{12}$$

上式を (11.5.32) 式に代入すると、確かに満足している。

11.5.7　フレドホルム型第二種積分方程式　例 1

下記の積分方程式を解き、$\mathrm{x}(t)$ を求める。

$$\mathrm{x}(t)-\alpha\int_0^1(\xi+t)\,\mathrm{x}(\xi)\,d\xi=\mathrm{f}(t) \tag{11.5.36}$$

```
kill(all);
IE1:x(t)-\alpha*integrate((t+\xi)*x(\xi),
 \xi,0,1)=f(t);
x(t)=f(t)+\alpha*integrate((t)*x(\xi),
 \xi,0,1)+\alpha*integrate((\xi)*x(\xi),
 \xi,0,1);
X1:x(t)=f(t)+(a[1]*t+a[0]);
X2:subst([t=\xi],X1);
X3:subst([X1,X2],IE1);
DX3:-\alpha*(t+\xi)*x(\xi);
subst([X2],DX3);
DX4:expand(%);
%-first(%);
%-first(%);
IE2:lhs(X3)-first(lhs(X3))+'integrate(%,
 \xi,0,1)-\alpha*integrate(t*f(\xi),\xi,
 0,1)-\alpha*integrate(\xi*f(\xi),\xi,
 0,1)=f(t);
IF1:integrate(\xi*f(\xi),\xi,0,1)=F[2];
IF11:rhs(%)=lhs(%);
IF2:integrate(f(\xi),\xi,0,1)=F[1];
IF21:rhs(%)=lhs(%);
subst([IF1,IF2],IE2);
expand(%);
ev(%,integrate);
%-rhs(%);
IE3:expand(%);
C1:expand(coeff(IE3,t,1));
C0:expand(coeff(IE3,t,0));
A01:solve([C0,C1],[a[0],a[1]])[1];
A0:A01[1];
A1:A01[2];
```

(11.5.36) 式を展開すると、

$$\mathrm{x}(t)=\alpha\int_0^1\xi\,\mathrm{x}(\xi)\,d\xi+\alpha\,t\int_0^1\mathrm{x}(\xi)\,d\xi+\mathrm{f}(t)$$

上式から解が下記の形となる。

$$\mathrm{x}(t)=\mathrm{f}(t)+a_1\,t+a_0 \tag{11.5.37}$$

(11.5.36) 式に上式を代入し、展開すると、

$$\begin{aligned}&-\alpha\int_0^1\xi\,\mathrm{f}(\xi)\,d\xi-\alpha\,t\int_0^1\mathrm{f}(\xi)\,d\xi\\&+\int_0^1-a_1\,\alpha\,\xi^2-a_1\,\alpha\,t\,\xi-a_0\,\alpha\,\xi-a_0\,\alpha\,td\xi\\&+\mathrm{f}(t)+a_1\,t+a_0\\&=\mathrm{f}(t)\end{aligned} \tag{11.5.38}$$

上式の積分の一部を下記と置き、

$$\int_0^1\xi\,\mathrm{f}(\xi)\,d\xi=F_2,\quad\int_0^1\mathrm{f}(\xi)\,d\xi=F_1 \tag{11.5.39}$$

(11.5.38) 式に上式を代入し、整理すると、

$$\begin{aligned}-F_1\,\alpha\,t-\frac{a_1\,\alpha\,t}{2}-a_0\,\alpha\,t+a_1\,t-F_2\,\alpha-\frac{a_1\,\alpha}{3}\\-\frac{a_0\,\alpha}{2}+a_0=0\end{aligned} \tag{11.5.40}$$

t の同じ次数の係数比較を行い、

$$\begin{aligned}-F_1\,\alpha-\frac{a_1\,\alpha}{2}-a_0\,\alpha+a_1&=0\\-F_2\,\alpha-\frac{a_1\,\alpha}{3}-\frac{a_0\,\alpha}{2}+a_0&=0\end{aligned}$$

上式を解いて $a_0,\,a_1$ を求めると、

$$\begin{aligned}a_0&=\frac{(6\,F_2-4\,F_1)\,\alpha^2-12\,F_2\,\alpha}{\alpha^2+12\,\alpha-12}\\a_1&=-\frac{(12\,F_2-6\,F_1)\,\alpha^2+12\,F_1\,\alpha}{\alpha^2+12\,\alpha-12}\end{aligned} \tag{11.5.41}$$

```
subst([A0,A1],X1);
X4:expand(%);
CF1:factor(coeff(rhs(X4),F[1],1));
CF2:factor(coeff(rhs(X4),F[2],1));
X5:lhs(X4)=first(rhs(X4))+CF1*F[1]
 +CF2*F[2];
subst([IF11,IF21],%);
(-(6*alpha*(2*alpha*t-alpha+2))*\xi
 +2*alpha*(3*alpha*t-6*t-2*alpha))
 /(alpha^2+12*alpha-12);
factor(%);
lhs(X4)=first(rhs(X4))+integrate(
 %*f(\xi),\xi,0,1);
(CF1+CF2*\xi);
CF3:factor(%);
```

```
lhs(X4)=first(rhs(X4))+integrate(
 %*f(\xi),\xi,0,1);
A11:coeff(lhs(C0),a[1],1);
A12:coeff(lhs(C0),a[0],1);
A21:coeff(lhs(C1),a[1],1);
A22:coeff(lhs(C1),a[0],1);
MTA1:matrix([A11,A12],[A21,A22]);
determinant (MTA1)=0;
expand(%);
AL1:solve(%,\alpha);
```

(11.5.37) 式に (11.5.41) 式、(11.5.39) 式を代入し、整理すると、

$$\begin{aligned}\mathrm{x}(t)=&-\frac{6\,\alpha\,(2\,\alpha\,t-\alpha+2)}{\alpha^2+12\,\alpha-12}\int_0^1\xi\,\mathrm{f}(\xi)\,d\xi+\frac{2\,\alpha\,(3\,\alpha\,t-6\,t-2\,\alpha)}{\alpha^2+12\,\alpha-12}\int_0^1\mathrm{f}(\xi)\,d\xi+\mathrm{f}(t)\\=&\mathrm{f}(t)-\frac{2\,\alpha}{\alpha^2+12\,\alpha-12}\int_0^1(6\,\alpha\,t\,\xi-3\,\alpha\,\xi+6\,\xi-3\,\alpha\,t+6\,t+2\,\alpha)\,\mathrm{f}(\xi)\,d\xi\end{aligned}$$

ここで、下記から、

$$\frac{\alpha^2}{12}+\alpha-1=0$$

α が下記の時、解はない。

$$\alpha=-4\sqrt{3}-6,\quad \alpha=4\sqrt{3}-6$$

11.5.8 フレドホルム型第二種積分方程式例 2

下記の積分方程式を解き、$\mathrm{x}(t)$ を求める。

$$\mathrm{x}(t)-\alpha\int_0^1 t\,\xi\,\mathrm{x}(\xi)\,d\xi=\mathrm{f}(t) \qquad (11.5.42)$$

```
kill(all);
assume(t>0);
assume(\tau>0);
IE1:x(t)-\alpha*'integrate((t*\xi)*
 x(\xi),\xi,0,1)=f(t);
IE2:x(t)=f(t)-\alpha*'integrate(G(t,\xi)
 *f(\xi),\xi,0,1);
G1:G(t,\xi)=-sum(\alpha^(n-1)*k[n]
 (t,\xi),n,1,inf);
K0:K(t,\xi)=t*\xi;
K01:subst([\xi=\tau],K0);
K1:k[1](t,\xi)=K(t,\xi);
K11:subst([K0],K1);
K12:subst([t=\tau],K11);
K2:k[2](t,\xi)=integrate(K(t,\tau)
 *k[1](\tau,\xi),\tau,0,1);
subst([K12,K01],%);
K21:ev(%,integrate);
K22:subst([t=\tau],K21);
K3:k[3](t,\xi)=integrate(K(t,\tau)
 *k[2](\tau,\xi),\tau,0,1);
subst([K22,K01],%);
K31:ev(%,integrate);
K32:subst([t=\tau],K31);
K4:k[4](t,\xi)=integrate(K(t,\tau)
 *k[3](\tau,\xi),\tau,0,1);
subst([K32,K01],%);
K41:ev(%,integrate);
KN:k[n](t,\xi)=(1/3)^(n-1)*t*\xi;
subst([KN],G1);
sum(a^(n-1),n,1,inf);
1/(1-a);
subst([a=\alpha/3],%);
G2:lhs(G1)=-%*t*\xi;
subst([G2],IE2);
```

「11.5.1 フレドホルム型第二種積分方程式の解法 (級数)」の (11.5.2) 式から上式の解は、

$$\mathrm{x}(t)=\mathrm{f}(t)-\alpha\int_0^1 \mathrm{G}(t,\xi)\,\mathrm{f}(\xi)\,d\xi \qquad (11.5.43)$$

ここで、(11.5.3) 式から

$$\mathrm{G}(t,\xi)=-\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^{n-1}\,k_n(t,\xi) \qquad (11.5.44)$$

(11.5.5) 式から

$$k_n(t,\xi)=\int_0^1 \mathrm{K}(t,\tau)\;k_{n-1}(\tau,\xi)\,d\tau \qquad (11.5.45)$$

(11.5.42) 式から、

$$\mathrm{K}(t,\xi)=t\,\xi$$

(11.5.4) 式、11.5.45) 式から、

$$k_1(t,\xi)=\mathrm{K}(t,\xi)=t\,\xi$$
$$k_2(t,\xi)=\int_0^1 \mathrm{K}(t,\tau)\;k_1(\tau,\xi)\,d\tau=t\int_0^1\tau^2 d\tau\,\xi=\frac{t\,\xi}{3}$$
$$k_3(t,\xi)=\int_0^1 \mathrm{K}(t,\tau)\;k_2(\tau,\xi)\,d\tau=\frac{t}{3}\int_0^1\tau^2 d\tau\,\xi=\frac{t\,\xi}{9}$$
$$k_4(t,\xi)=\int_0^1 \mathrm{K}(t,\tau)\;k_3(\tau,\xi)\,d\tau=\frac{t}{9}\int_0^1\tau^2 d\tau\,\xi=\frac{t\,\xi}{27}$$

上式から、

$$k_n(t,\xi)=3^{1-n}\,t\,\xi \qquad (11.5.46)$$

(11.5.44) 式に上式を代入し、

$$\mathrm{G}(t,\xi)=-\left(\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^{n-1}\,3^{1-n}\right)t\,\xi \qquad (11.5.47)$$

ここで、上式の級数和は下記の公式[1]、

$$\sum_{n=1}^{\infty}a^{n-1}=\frac{1}{1-a} \qquad |a|<1 \qquad (11.5.48)$$

上式で $a=\frac{\alpha}{3}$ として、

$$\mathrm{G}(t,\xi)=-\frac{t\,\xi}{1-\frac{\alpha}{3}}$$

(11.5.43) 式に上式を代入し、

$$\mathrm{x}(t)=\frac{\alpha\,t}{1-\frac{\alpha}{3}}\int_0^1\xi\,\mathrm{f}(\xi)\,d\xi+\mathrm{f}(t)$$

[1]森口　繁一、宇田川　久、一松　信 : 岩波数学公式 2　級数・フーリエ解析 [29]、P.49

11.5.9 フレドホルム型第二種積分方程式　例 3

下記の積分方程式を解き、$\mathrm{x}(t)$ を求める。前節と同じ問題を行列式の方法で解く。

$$\mathrm{x}(t)-\alpha\int_0^1 t\,\xi\,\mathrm{x}(\xi)\,d\xi=\mathrm{f}(t) \tag{11.5.49}$$

```
kill(all);
assume(t>0);
assume(\xi>0);
IE1:x(t)-\alpha*'integrate(t*\xi*x(\xi),\xi,0,1)=f(t);
IE2:x(t)=f(t)-\alpha*'integrate(G(t,\xi)*f(\xi),\xi,0,1);
G1:G(t,\xi)=-\Delta(t,\xi)/\Delta(\alpha);
K0:K(t,\xi)=t*\xi;
M21:matrix([K(t,\xi),K(t,\xi[1])],[K(\xi[1],\xi),K(\xi[1],\xi[1])]);
K11:subst([\xi=\xi[1]],K0);
K12:subst([t=\xi[1]],K0);
K13:subst([\xi=\xi[1],t=\xi[1]],K0);
subst([K0,K11,K12,K13],M21);
M21D:determinant(%);
M22:matrix([K(t,\xi),K(t,\xi[1]),K(t,\xi[2])],[K(\xi[1],\xi),K(\xi[1],\xi[1]),
 K(\xi[1],\xi[2])],[K(\xi[2],\xi),K(\xi[2],\xi[1]),K(\xi[2],\xi[2])]);
K21:subst([\xi=\xi[2]],K0);
K22:subst([t=\xi[2]],K0);
K23:subst([\xi=\xi[1],t=\xi[2]],K0);
K24:subst([\xi=\xi[2],t=\xi[1]],K0);
K25:subst([\xi=\xi[2],t=\xi[2]],K0);
subst([K0,K11,K12,K13],M22);
subst([K21,K22,K23,K24,K25],%);
M22D:determinant(%);
M23:matrix([K(t,\xi),K(t,\xi[1]),K(t,\xi[2]),K(t,\xi[3])],[K(\xi[1],\xi),
 K(\xi[1],\xi[1]),K(\xi[1],\xi[2]),K(\xi[1],\xi[3])],[K(\xi[2],\xi),
 K(\xi[2],\xi[1]),K(\xi[2],\xi[2]),K(\xi[2],\xi[3])],[K(\xi[3],\xi),
 K(\xi[3],\xi[1]),K(\xi[3],\xi[2]),K(\xi[3],\xi[3])]);
K31:subst([\xi=\xi[3]],K0);
K32:subst([t=\xi[3]],K0);
K33:subst([\xi=\xi[1],t=\xi[3]],K0);
K34:subst([\xi=\xi[2],t=\xi[3]],K0);
K35:subst([\xi=\xi[3],t=\xi[1]],K0);
K36:subst([\xi=\xi[3],t=\xi[2]],K0);
K37:subst([\xi=\xi[3],t=\xi[3]],K0);
subst([K0,K11,K12,K13],M23);
subst([K21,K22,K23,K24,K25],%);
subst([K31,K32,K33,K34,K35,K36,K37],%);
M23D:determinant(%);
```

```
M24:matrix([K(t,\xi),K(t,\xi[1]),K(t,\xi[2]),K(t,\xi[3]),K(t,\xi[4])],[K(\xi[1],\xi),
 K(\xi[1],\xi[1]),K(\xi[1],\xi[2]),K(\xi[1],\xi[3]),K(\xi[1],\xi[4])],
 [K(\xi[2],\xi),K(\xi[2],\xi[1]),K(\xi[2],\xi[2]),K(\xi[2],\xi[3]),
 K(\xi[2],\xi[4])],[K(\xi[3],\xi),K(\xi[3],\xi[1]),K(\xi[3],\xi[2]),
 K(\xi[3],\xi[3]),K(\xi[3],\xi[4])],[K(\xi[4],\xi),K(\xi[4],\xi[1]),
 K(\xi[4],\xi[2]),K(\xi[4],\xi[3]),K(\xi[4],\xi[4])]);
K41:subst([\xi=\xi[4]],K0);
K42:subst([t=\xi[4]],K0);
K43:subst([\xi=\xi[1],t=\xi[4]],K0);
K44:subst([\xi=\xi[2],t=\xi[4]],K0);
K45:subst([\xi=\xi[3],t=\xi[4]],K0);
K46:subst([\xi=\xi[4],t=\xi[1]],K0);
K47:subst([\xi=\xi[4],t=\xi[2]],K0);
K48:subst([\xi=\xi[4],t=\xi[3]],K0);
K49:subst([\xi=\xi[4],t=\xi[4]],K0);
subst([K0,K11,K12,K13],M24);
subst([K21,K22,K23,K24,K25],%);
subst([K31,K32,K33,K34,K35,K36,K37],%);
subst([K41,K42,K43,K44,K45,K46,K47,K48,K49],%);
M24D:determinant(%);
G2:\Delta(t,\xi)=K(t,\xi)+(-1*\alpha)^(1)/(1!)*'integrate(M21D,\xi[1],0,1)+(-1*\alpha)
 ^(2)/(2!)*'integrate('integrate(M22D,\xi[1],0,1),\xi[2],0,1)+(-1*\alpha)^(3)/(3!)
 *'integrate('integrate('integrate(M23D,\xi[1],0,1),\xi[2],0,1),
 \xi[3],0,1)+(-1*\alpha)^(4)/(4!)*'integrate('integrate('integrate
 ('integrate(M24D,\xi[1],0,1),\xi[2],0,1),\xi[3],0,1),\xi[4],0,1);
G21:subst([K0],%);
M31:K(\xi[1],\xi[1]);
M31D:subst([K0,K11,K12,K13],M31);
M32:matrix([K(\xi[1],\xi[1]),K(\xi[1],\xi[2])],[K(\xi[2],\xi[1]),K(\xi[2],\xi[2])]);
subst([K0,K11,K12,K13],M32);
subst([K21,K22,K23,K24,K25],%);
M32D:determinant(%);
M33:matrix([K(\xi[1],\xi[1]),K(\xi[1],\xi[2]),K(\xi[1],\xi[3])],[K(\xi[2],\xi[1]),
 K(\xi[2],\xi[2]),K(\xi[2],\xi[3])],[K(\xi[3],\xi[1]),K(\xi[3],\xi[2]),
 K(\xi[3],\xi[3])]);
subst([K0,K11,K12,K13],M33);
subst([K21,K22,K23,K24,K25],%);
subst([K31,K32,K33,K34,K35,K36,K37],%);
M33D:determinant(%);
M34:matrix([K(\xi[1],\xi[1]),K(\xi[1],\xi[2]),K(\xi[1],\xi[3]),K(\xi[1],\xi[4])],
 [K(\xi[2],\xi[1]),K(\xi[2],\xi[2]),K(\xi[2],\xi[3]),K(\xi[2],\xi[4])],
 [K(\xi[3],\xi[1]),K(\xi[3],\xi[2]),K(\xi[3],\xi[3]),K(\xi[3],\xi[4])],
 [K(\xi[4],\xi[1]),K(\xi[4],\xi[2]),K(\xi[4],\xi[3]),K(\xi[4],\xi[4])]);
subst([K0,K11,K12,K13],M34);
subst([K21,K22,K23,K24,K25],%);
subst([K31,K32,K33,K34,K35,K36,K37],%);
subst([K41,K42,K43,K44,K45,K46,K47,K48,K49],%);
M34D:determinant(%);
```

```
G3:\Delta(\alpha)=1+(-1*\alpha)^(1)/(1!)*'integrate(M31D,\xi[1],0,1)+(-1*\alpha)
 ^(2)/(2!)*'integrate('integrate(M32D,\xi[1],0,1),\xi[2],0,1)+(-1*\alpha)^(3)/(3!)
 *'integrate('integrate('integrate(M33D,\xi[1],0,1),\xi[2],0,1),\xi[3],0,1)+(-1*\alpha)
 ^(4)/(4!)*'integrate('integrate('integrate('integrate(M34D,\xi[1],0,1),\xi[2],0,1),
 \xi[3],0,1),\xi[4],0,1);
G31:ev(%,integrate);
G11:subst([G21,G31],G1);
subst([G11],IE2);
```

「11.5.2 フレドホルム型第二種積分方程式の解法 (行列式)」の (11.5.7) 式から (11.5.49) 式の解は、

$$\mathrm{x}\,(t) = \mathrm{f}\,(t) - \alpha \int_0^1 \mathrm{G}\,(t,\xi)\;\mathrm{f}\,(\xi)\,d\xi \tag{11.5.50}$$

ここで、(11.5.8) 式から

$$\mathrm{G}\,(t,\xi) = -\frac{\Delta\,(t,\xi)}{\Delta\,(\alpha)} \tag{11.5.51}$$

(11.5.49) 式から、

$$\mathrm{K}\,(t,\xi) = t\,\xi \tag{11.5.52}$$

(11.5.51) 式の $\Delta\,(t,\xi)$ は、(11.5.9) 式から各行列式を求めると、

$$\begin{bmatrix} \mathrm{K}\,(t,\xi) & \mathrm{K}\,(t,\xi_1) \\ \mathrm{K}\,(\xi_1,\xi) & \mathrm{K}\,(\xi_1,\xi_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t\,\xi & \xi_1\,t \\ \xi_1\,\xi & \xi_1^2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} \mathrm{K}\,(t,\xi) & \mathrm{K}\,(t,\xi_1) & \mathrm{K}\,(t,\xi_2) \\ \mathrm{K}\,(\xi_1,\xi) & \mathrm{K}\,(\xi_1,\xi_1) & \mathrm{K}\,(\xi_1,\xi_2) \\ \mathrm{K}\,(\xi_2,\xi) & \mathrm{K}\,(\xi_2,\xi_1) & \mathrm{K}\,(\xi_2,\xi_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t\,\xi & \xi_1\,t & \xi_2\,t \\ \xi_1\,\xi & \xi_1^2 & \xi_1\,\xi_2 \\ \xi_2\,\xi & \xi_1\,\xi_2 & \xi_2^2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} \mathrm{K}\,(t,\xi) & \mathrm{K}\,(t,\xi_1) & \mathrm{K}\,(t,\xi_2) & \mathrm{K}\,(t,\xi_3) \\ \mathrm{K}\,(\xi_1,\xi) & \mathrm{K}\,(\xi_1,\xi_1) & \mathrm{K}\,(\xi_1,\xi_2) & \mathrm{K}\,(\xi_1,\xi_3) \\ \mathrm{K}\,(\xi_2,\xi) & \mathrm{K}\,(\xi_2,\xi_1) & \mathrm{K}\,(\xi_2,\xi_2) & \mathrm{K}\,(\xi_2,\xi_3) \\ \mathrm{K}\,(\xi_3,\xi) & \mathrm{K}\,(\xi_3,\xi_1) & \mathrm{K}\,(\xi_3,\xi_2) & \mathrm{K}\,(\xi_3,\xi_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t\,\xi & \xi_1\,t & \xi_2\,t & \xi_3\,t \\ \xi_1\,\xi & \xi_1^2 & \xi_1\,\xi_2 & \xi_1\,\xi_3 \\ \xi_2\,\xi & \xi_1\,\xi_2 & \xi_2^2 & \xi_2\,\xi_3 \\ \xi_3\,\xi & \xi_1\,\xi_3 & \xi_2\,\xi_3 & \xi_3^2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} \mathrm{K}\,(t,\xi) & \mathrm{K}\,(t,\xi_1) & \mathrm{K}\,(t,\xi_2) & \mathrm{K}\,(t,\xi_3) & \mathrm{K}\,(t,\xi_4) \\ \mathrm{K}\,(\xi_1,\xi) & \mathrm{K}\,(\xi_1,\xi_1) & \mathrm{K}\,(\xi_1,\xi_2) & \mathrm{K}\,(\xi_1,\xi_3) & \mathrm{K}\,(\xi_1,\xi_4) \\ \mathrm{K}\,(\xi_2,\xi) & \mathrm{K}\,(\xi_2,\xi_1) & \mathrm{K}\,(\xi_2,\xi_2) & \mathrm{K}\,(\xi_2,\xi_3) & \mathrm{K}\,(\xi_2,\xi_4) \\ \mathrm{K}\,(\xi_3,\xi) & \mathrm{K}\,(\xi_3,\xi_1) & \mathrm{K}\,(\xi_3,\xi_2) & \mathrm{K}\,(\xi_3,\xi_3) & \mathrm{K}\,(\xi_3,\xi_4) \\ \mathrm{K}\,(\xi_4,\xi) & \mathrm{K}\,(\xi_4,\xi_1) & \mathrm{K}\,(\xi_4,\xi_2) & \mathrm{K}\,(\xi_4,\xi_3) & \mathrm{K}\,(\xi_4,\xi_4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t\,\xi & \xi_1\,t & \xi_2\,t & \xi_3\,t & \xi_4\,t \\ \xi_1\,\xi & \xi_1^2 & \xi_1\,\xi_2 & \xi_1\,\xi_3 & \xi_1\,\xi_4 \\ \xi_2\,\xi & \xi_1\,\xi_2 & \xi_2^2 & \xi_2\,\xi_3 & \xi_2\,\xi_4 \\ \xi_3\,\xi & \xi_1\,\xi_3 & \xi_2\,\xi_3 & \xi_3^2 & \xi_3\,\xi_4 \\ \xi_4\,\xi & \xi_1\,\xi_4 & \xi_2\,\xi_4 & \xi_3\,\xi_4 & \xi_4^2 \end{bmatrix} = 0$$

(11.5.9) 式と上記の結果から、

$$\Delta\,(t,\xi) = \mathrm{K}\,(t,\xi) = t\,\xi \tag{11.5.53}$$

(11.5.51) 式の $\Delta\,(\alpha)$ は、(11.5.11) 式から各行列式を求めると、

$$\mathrm{K}\,(\xi_1,\xi_1) = \xi_1^2$$

$$\begin{bmatrix} \mathrm{K}\,(\xi_1,\xi_1) & \mathrm{K}\,(\xi_1,\xi_2) \\ \mathrm{K}\,(\xi_2,\xi_1) & \mathrm{K}\,(\xi_2,\xi_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_1^2 & \xi_1\,\xi_2 \\ \xi_1\,\xi_2 & \xi_2^2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} \mathrm{K}\,(\xi_1,\xi_1) & \mathrm{K}\,(\xi_1,\xi_2) & \mathrm{K}\,(\xi_1,\xi_3) \\ \mathrm{K}\,(\xi_2,\xi_1) & \mathrm{K}\,(\xi_2,\xi_2) & \mathrm{K}\,(\xi_2,\xi_3) \\ \mathrm{K}\,(\xi_3,\xi_1) & \mathrm{K}\,(\xi_3,\xi_2) & \mathrm{K}\,(\xi_3,\xi_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_1^2 & \xi_1\,\xi_2 & \xi_1\,\xi_3 \\ \xi_1\,\xi_2 & \xi_2^2 & \xi_2\,\xi_3 \\ \xi_1\,\xi_3 & \xi_2\,\xi_3 & \xi_3^2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} \mathrm{K}\,(\xi_1,\xi_1) & \mathrm{K}\,(\xi_1,\xi_2) & \mathrm{K}\,(\xi_1,\xi_3) & \mathrm{K}\,(\xi_1,\xi_4) \\ \mathrm{K}\,(\xi_2,\xi_1) & \mathrm{K}\,(\xi_2,\xi_2) & \mathrm{K}\,(\xi_2,\xi_3) & \mathrm{K}\,(\xi_2,\xi_4) \\ \mathrm{K}\,(\xi_3,\xi_1) & \mathrm{K}\,(\xi_3,\xi_2) & \mathrm{K}\,(\xi_3,\xi_3) & \mathrm{K}\,(\xi_3,\xi_4) \\ \mathrm{K}\,(\xi_4,\xi_1) & \mathrm{K}\,(\xi_4,\xi_2) & \mathrm{K}\,(\xi_4,\xi_3) & \mathrm{K}\,(\xi_4,\xi_4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_1^2 & \xi_1\,\xi_2 & \xi_1\,\xi_3 & \xi_1\,\xi_4 \\ \xi_1\,\xi_2 & \xi_2^2 & \xi_2\,\xi_3 & \xi_2\,\xi_4 \\ \xi_1\,\xi_3 & \xi_2\,\xi_3 & \xi_3^2 & \xi_3\,\xi_4 \\ \xi_1\,\xi_4 & \xi_2\,\xi_4 & \xi_3\,\xi_4 & \xi_4^2 \end{bmatrix} = 0$$

(11.5.11) 式と上記の結果から、

$$\Delta\left(\alpha\right)=1-\int_{0}^{1}\xi_1^2 d\xi_1\,\alpha=1-\frac{\alpha}{3} \tag{11.5.54}$$

(11.5.51) 式に (11.5.53) 式と (11.5.54) 式を代入し、

$$\mathrm{G}\left(t,\xi\right)=-\frac{t\,\xi}{1-\frac{\alpha}{3}}$$

(11.5.50) 式に上式を代入すると、下記となり、前節と同じ結果が得られた。

$$\mathrm{x}\left(t\right)=\frac{\alpha\,t}{1-\frac{\alpha}{3}}\int_{0}^{1}\xi\,\mathrm{f}\left(\xi\right)d\xi+\mathrm{f}\left(t\right)$$

11.5.10 フレドホルム型第一種積分方程式例 1

下記の積分方程式を解き、$\mathrm{x}(t)$ を求める。

$$\begin{aligned}\int_0^1 \mathrm{K}(t,\xi)\,\mathrm{x}(\xi)\,d\xi &= 67\,t^3-40\,t^2+52\,t+17\\ \mathrm{K}(t,\xi) &= t\,(t-\xi)^2\,\xi+1 \qquad t>\xi\\ \mathrm{K}(t,\xi) &= t\,(t-\xi)^2\,\xi \qquad t<\xi\end{aligned} \tag{11.5.55}$$

```
kill(all);
assume(t>0);
assume(\tau>0);
IE1:x(t)-\alpha*'integrate((%e^(t-\xi))
 *x(\xi),\xi,0,1)=f(t);
IE2:x(t)=f(t)-\alpha*'integrate(G(t,\xi)
 *f(\xi),\xi,0,1);
G1:G(t,\xi)=-sum(\alpha^(n-1)*
 k[n](t,\xi),n,1,inf);
K0:K(t,\xi)=%e^(t-\xi);
K01:subst([\xi=\tau],K0);
K1:k[1](t,\xi)=K(t,\xi);
K11:subst([K0],K1);
K12:subst([t=\tau],K11);
K2:k[2](t,\xi)=integrate(K(t,\tau)*
 k[1](\tau,\xi),\tau,0,1);
subst([K12,K01],%);
K21:ev(%,integrate);
K22:subst([t=\tau],K21);
K3:k[3](t,\xi)=integrate(K(t,\tau)*
 k[2](\tau,\xi),\tau,0,1);
subst([K22,K01],%);
K31:ev(%,integrate);
K32:subst([t=\tau],K31);
K4:k[4](t,\xi)=integrate(K(t,\tau)*
 k[3](\tau,\xi),\tau,0,1);
subst([K32,K01],%);
K41:ev(%,integrate);
KN:k[n](t,\xi)=%e^(t\xi);
subst([KN],G1);
sum(a^(n-1),n,1,inf);
1/(1-a);
subst([a=\alpha],%);
G2:lhs(G1)=-%*%e^(t-\xi);
subst([G2],IE2);
```

「11.5.5 フレドホルム型第一種積分方程式の解法」の (11.5.28) 式から、

$$\frac{\int_0^1 \left(\frac{d}{d\,t}\mathrm{K}(t,\xi)\right)\mathrm{x}(\xi)\,d\xi}{\mathrm{L}(t)}+\mathrm{x}(t)=\frac{\frac{d}{d\,t}\mathrm{f}(t)}{\mathrm{L}(t)} \tag{11.5.56}$$

ここで、(11.5.27) 式を基に (11.5.55) 式から、

$$\mathrm{K}(t,t+)-\mathrm{K}(t,t-)=-\mathrm{L}(t) \quad\rightarrow\quad \mathrm{L}(t)=1 \tag{11.5.57}$$

$$\frac{d}{d\,t}\mathrm{K}(t,\xi)=\xi\,(\xi-3\,t)\,(\xi-t) \tag{11.5.58}$$

$$\begin{aligned}&\mathrm{f}(t)=67\,t^3-40\,t^2+52\,t+17\\ &\quad\rightarrow \frac{d}{d\,t}\mathrm{f}(t)=201\,t^2-80\,t+52\end{aligned} \tag{11.5.59}$$

(11.5.56) 式に (11.5.57) 式、(11.5.58) 式、(11.5.59) 式を代入し、

$$\int_0^1 \xi\,(\xi-3\,t)\,(\xi-t)\,\mathrm{x}(\xi)\,d\xi+\mathrm{x}(t)=201\,t^2-80\,t+52 \tag{11.5.60}$$

上記の積分方程式の解は下記の多項式と予測されるので、

$$\mathrm{x}(t)=a_3\,t^3+a_2\,t^2+a_1\,t+a_0 \tag{11.5.61}$$

(11.5.60) 式に (11.5.61) 式を代入し、積分を実行し、右辺項を左辺に移行すると、

$$\begin{aligned}&a_3\,t^3+\frac{3\,a_3\,t^2}{5}+\frac{7\,a_2\,t^2}{4}+a_1\,t^2+\frac{3\,a_0\,t^2}{2}\\ &\quad-201\,t^2-\frac{2\,a_3\,t}{3}-\frac{4\,a_2\,t}{5}-\frac{4\,a_0\,t}{3}\\ &\quad+80\,t+\frac{a_3}{7}+\frac{a_2}{6}+\frac{a_1}{5}+\frac{5\,a_0}{4}-52=0\end{aligned} \tag{11.5.62}$$

上式で t の同じ次数の係数比較を行い、

$$\begin{aligned}&a_3=0\\ &\frac{3\,a_3}{5}+\frac{7\,a_2}{4}+a_1+\frac{3\,a_0}{2}-201=0\\ &-\frac{2\,a_3}{3}-\frac{4\,a_2}{5}-\frac{4\,a_0}{3}+80=0\\ &\frac{a_3}{7}+\frac{a_2}{6}+\frac{a_1}{5}+\frac{5\,a_0}{4}-52=0\end{aligned}$$

上式を解いて、

$$a_0=24, a_1=60, a_2=60, a_3=0$$

(11.5.61) 式に上式を代入し解は、

$$\mathrm{x}(t)=60\,t^2+60\,t+24$$

11.5.11 フレドホルム型第一種積分方程式例 2

下記の積分方程式を解き、$\mathrm{x}(t)$ を求める。

$$\int_0^1 \mathrm{K}(t,\xi)\,\mathrm{x}(\xi)\,d\xi = \frac{2\,t^3}{3} - \frac{5\,t^2}{2} - 3\,t + 1$$
$$\mathrm{K}(t,\xi) = -2\,\xi + t^2 + t + 1 \quad \xi < \frac{t^2+t}{2}$$
$$\mathrm{K}(t,\xi) = -2\,\xi + t^2 + t \qquad \xi > \frac{t^2+t}{2} \tag{11.5.63}$$

```
kill(all);
assume(t>0);
assume(\xi>0);
IE1:'integrate(K(t,\xi)*x(\xi),\xi,0,1)=
 2/3*t^3-5/2*t^2-3*t+1;
K1:K(t,\xi)=t^2+t-2*\xi+1;
K2:K(t,\xi)=t^2+t-2*\xi;
IE2:integrate(('diff(K(t,xi),t,1))*x(xi),
 xi,0,1)/(L(t)*('diff(phi(t),t,1)))+x(t)
 ='diff(f(t),t,1)/(L(t)*('diff(phi(t),t,
 1)));
diff(K1,t,1);
DK1:factor(%);
LT1:L(t)=1;
F1:f(t)=2/3*t^3-5/2*t^2-3*t+1;
DF1:diff(%,t,1);
PH1:\phi(t)=1/2*(t^2+t);
DPH1:diff(PH1,t,1);
subst([DK1,LT1,DF1,DPH1],IE2);
IE21:factor(%);
X1:x(t)=a[3]*t^3+a[2]*t^2+a[1]*t+a[0];
X2:subst([t=\xi],X1);
subst([X1,X2],IE21);
ev(%,integrate);
lhs(%)-rhs(%)=0;
IE22:expand(%);
A3:coeff(IE22,t,3);
A2:coeff(IE22,t,2);
A1:coeff(IE22,t,1);
A0:coeff(IE22,t,0);
solve([A3,A2,A1,A0],[a[0],a[1],a[2],
 a[3]])[1];
subst([%],X1);
```

「11.5.5 フレドホルム型第一種積分方程式の解法」の (11.5.31) 式から、

$$\frac{\int_0^1 \left(\frac{d}{d\,t}\mathrm{K}(t,\xi)\right)\mathrm{x}(\xi)\,d\xi}{\mathrm{L}(t)\,\left(\frac{d}{d\,t}\phi(t)\right)} + \mathrm{x}(t) = \frac{\frac{d}{d\,t}\mathrm{f}(t)}{\mathrm{L}(t)\,\left(\frac{d}{d\,t}\phi(t)\right)} \tag{11.5.64}$$

ここで、(11.5.30) 式を基に (11.5.63) 式から、

$$\mathrm{K}(t,\phi(t)+) - \mathrm{K}(t,\phi(t)-) = -\mathrm{L}(t) \quad \rightarrow \quad \mathrm{L}(t) = 1 \tag{11.5.65}$$

$$\frac{d}{d\,t}\mathrm{K}(t,\xi) = 2\,t + 1 \tag{11.5.66}$$

$$\mathrm{f}(t) = \frac{2\,t^3}{3} - \frac{5\,t^2}{2} - 3\,t + 1$$
$$\rightarrow \frac{d}{d\,t}\mathrm{f}(t) = 2\,t^2 - 5\,t - 3 \tag{11.5.67}$$

$$\phi(t) = \frac{t^2+t}{2} \quad \rightarrow \quad \frac{d}{d\,t}\phi(t) = \frac{2\,t+1}{2} \tag{11.5.68}$$

(11.5.64) 式に (11.5.65) 式、(11.5.66) 式、(11.5.67) 式、(11.5.68) 式を代入し、

$$2\int_0^1 \mathrm{x}(\xi)\,d\xi + \mathrm{x}(t) = 2\,(t-3) \tag{11.5.69}$$

上記積分方程式の解は下記の多項式と予測されるので、

$$\mathrm{x}(t) = a_3\,t^3 + a_2\,t^2 + a_1\,t + a_0 \tag{11.5.70}$$

(11.5.69) 式に (11.5.70) 式を代入し、積分を実行し、右辺項を左辺に移行すると、

$$a_3\,t^3 + a_2\,t^2 + a_1\,t - 2\,t + \frac{a_3}{2} + \frac{2\,a_2}{3} + a_1 + 3\,a_0 + 6 = 0 \tag{11.5.71}$$

上式で t の同じ次数の係数比較を行い、

$$a_3 = 0$$
$$a_2 = 0$$
$$a_1 - 2 = 0$$
$$\frac{a_3}{2} + \frac{2\,a_2}{3} + a_1 + 3\,a_0 + 6 = 0$$

上式を解いて、

$$a_0 = -\frac{8}{3}, a_1 = 2, a_2 = 0, a_3 = 0$$

(11.5.70) 式に上式を代入し解は、

$$\mathrm{x}(t) = 2\,t - \frac{8}{3}$$

11.5.12 フレドホルム型第二種積分方程式 例 4

下記の積分方程式を解き、$\mathrm{x}(t)$ を求める。

$$\mathrm{x}(t) - \alpha \int_0^1 e^{t-\xi}\,\mathrm{x}(\xi)\,d\xi = \mathrm{f}(t) \qquad (11.5.72)$$

```
kill(all);
assume(t>0);
assume(\tau>0);
IE1:x(t)-\alpha*'integrate((%e^(t-\xi))*
 x(\xi),\xi,0,1)=f(t);
IE2:x(t)=f(t)-\alpha*'integrate(G(t,\xi)
 *f(\xi),\xi,0,1);
G1:G(t,\xi)=-sum(\alpha^(n-1)*
 k[n](t,\xi),n,1,inf);
K0:K(t,\xi)=%e^(t-\xi);
K01:subst([\xi=\tau],K0);
K1:k[1](t,\xi)=K(t,\xi);
K11:subst([K0],K1);
K12:subst([t=\tau],K11);
K2:k[2](t,\xi)=integrate(K(t,\tau)*
 k[1](\tau,\xi),\tau,0,1);
subst([K12,K01],%);
K21:ev(%,integrate);
K22:subst([t=\tau],K21);
K3:k[3](t,\xi)=integrate(K(t,\tau)*
 k[2](\tau,\xi),\tau,0,1);
subst([K22,K01],%);
K31:ev(%,integrate);
K32:subst([t=\tau],K31);
K4:k[4](t,\xi)=integrate(K(t,\tau)*
 k[3](\tau,\xi),\tau,0,1);
subst([K32,K01],%);
K41:ev(%,integrate);
KN:k[n](t,\xi)=%e^(t-\xi);
subst([KN],G1);
sum(a^(n-1),n,1,inf);
1/(1-a);
subst([a=\alpha],%);
G2:lhs(G1)=-%*%e^(t-\xi);
subst([G2],IE2);
```

「11.5.1 フレドホルム型第二種積分方程式の解法 (級数)」の (11.5.2) 式から上式の解は、

$$\mathrm{x}(t) = \mathrm{f}(t) - \alpha \int_0^1 \mathrm{G}(t,\xi)\,\mathrm{f}(\xi)\,d\xi \qquad (11.5.73)$$

ここで (11.5.3) 式から、

$$\mathrm{G}(t,\xi) = -\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{n-1} k_n(t,\xi) \qquad (11.5.74)$$

$$k_n(t,\xi) = \int_0^1 \mathrm{K}(t,\tau)\; k_{n-1}(\tau,\xi)\,d\tau \qquad (11.5.75)$$

(11.5.72) 式から、

$$\mathrm{K}(t,\xi) = e^{t-\xi}$$

(11.5.4) 式、(11.5.75) 式から、

$$\begin{aligned}
k_1(t,\xi) =& \mathrm{K}(t,\xi) = e^{t-\xi} \\
k_2(t,\xi) =& \int_0^1 \mathrm{K}(t,\tau)\; k_1(\tau,\xi)\,d\tau = e^{t-\xi} \\
k_3(t,\xi) =& \int_0^1 \mathrm{K}(t,\tau)\; k_2(\tau,\xi)\,d\tau = e^{t-\xi} \\
k_4(t,\xi) =& \int_0^1 \mathrm{K}(t,\tau)\; k_3(\tau,\xi)\,d\tau = e^{t-\xi}
\end{aligned}$$

上式から、

$$k_n(t,\xi) = e^{t-\xi} \qquad (11.5.76)$$

(11.5.74) 式に上式を代入し、

$$\mathrm{G}(t,\xi) = -\left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{n-1}\right) e^{t-\xi} \qquad (11.5.77)$$

ここで (11.5.48) 式の公式から、

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^{n-1} = \frac{1}{1-a}$$

上式で $a=\alpha$ として、

$$\mathrm{G}(t,\xi) = -\frac{e^{t-\xi}}{1-\alpha}$$

(11.5.73) 式に上式を代入し、

$$\mathrm{x}(t) = \frac{\alpha}{1-\alpha} \int_0^1 e^{t-\xi}\,\mathrm{f}(\xi)\,d\xi + \mathrm{f}(t)$$

11.5.13　フレドホルム型第二種積分方程式例 5

下記の積分方程式を解き、$\mathrm{x}(t)$ を求める。

$$\mathrm{x}(t) - 6\int_0^1 t\,\xi^2\,\mathrm{x}(\xi)\,d\xi = 2\,e^t - t + 1 \qquad (11.5.78)$$

```
kill(all);
assume(t>0);
assume(\tau>0);
IE1:x(t)-6*'integrate((t*\xi^2)*x(\xi),
 \xi,0,1)=2*%e^t-t+1;
F1:f(t)=2*%e^t-t+1;
F11:subst([t=\xi],%);
IE2:x(t)=f(t)-6*'integrate(G(t,\xi)*
 f(\xi),\xi,0,1);
G1:G(t,\xi)=-sum(\alpha^(n-1)*
 k[n](t,\xi),n,1,inf);
K0:K(t,\xi)=t*\xi^2;
K01:subst([\xi=\tau],K0);
K1:k[1](t,\xi)=K(t,\xi);
K11:subst([K0],K1);
K12:subst([t=\tau],K11);
K2:k[2](t,\xi)=integrate(K(t,\tau)*
 k[1](\tau,\xi),\tau,0,1);
subst([K12,K01],%);
K21:ev(%,integrate);
K22:subst([t=\tau],K21);
K3:k[3](t,\xi)=integrate(K(t,\tau)*
 k[2](\tau,\xi),\tau,0,1);
subst([K22,K01],%);
K31:ev(%,integrate);
K32:subst([t=\tau],K31);
K4:k[4](t,\xi)=integrate(K(t,\tau)*
 k[3](\tau,\xi),\tau,0,1);
subst([K32,K01],%);
K41:ev(%,integrate);
KN:k[n](t,\xi)=((1/4)^(n-1))*t*\xi^2;
subst([KN,\alpha=6],G1);
KN1:\alpha^(n-1)*k[n](t,xi)=
sum(a^(n-1),n,1,inf);
1/(1-a);
subst([a=(3/2)],%);
G2:lhs(G1)=-%*t*\xi^2;
subst([G2],IE2);
subst([F1,F11],%);
ev(%,integrate);
```

```
X1:factor(%);
X11:subst([t=\xi],%);
subst([X1,X11],IE1);
ev(%,integrate);
%-rhs(%);
factor(%);
```

「11.5.1 フレドホルム型第二種積分方程式の解法 (級数)」の (11.5.2) 式から上式の解は、

$$\mathrm{x}(t) = \mathrm{f}(t) - 6\int_0^1 \mathrm{G}(t,\xi)\,\mathrm{f}(\xi)\,d\xi \qquad (11.5.79)$$

ここで (11.5.3) 式から、

$$\mathrm{G}(t,\xi) = -\sum_{n=1}^{\infty} 6^{n-1}\,k_n(t,\xi) \qquad (11.5.80)$$

(11.5.5) 式から、

$$k_n(t,\xi) = \int_0^1 \mathrm{K}(t,\tau)\,k_{n-1}(\tau,\xi)\,d\tau \qquad (11.5.81)$$

(11.5.78) 式から、

$$\mathrm{K}(t,\xi) = t\,\xi^2$$

(11.5.4) 式、(11.5.81) 式から、

$$\begin{aligned}
k_1(t,\xi) &= \mathrm{K}(t,\xi) = t\,\xi^2\\
k_2(t,\xi) &= \int_0^1 \mathrm{K}(t,\tau)\,k_1(\tau,\xi)\,d\tau = \frac{t\,\xi^2}{4}\\
k_3(t,\xi) &= \int_0^1 \mathrm{K}(t,\tau)\,k_2(\tau,\xi)\,d\tau = \frac{t\,\xi^2}{16}\\
k_4(t,\xi) &= \int_0^1 \mathrm{K}(t,\tau)\,k_3(\tau,\xi)\,d\tau = \frac{t\,\xi^2}{64}
\end{aligned}$$

上式から、

$$k_n(t,\xi) = 4^{1-n}\,t\,\xi^2 \qquad (11.5.82)$$

(11.5.80) 式に上式を代入し、

$$\mathrm{G}(t,\xi) = -\left(\sum_{n=1}^{\infty} 4^{1-n}\,6^{n-1}\right) t\,\xi^2 \qquad (11.5.83)$$

ここで (11.5.48) 式の公式から、

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^{n-1} = \frac{1}{1-a} \qquad |a| < 1$$

上式で $a = \frac{6}{4} > 1$ であるが、適用すると、

$$\mathrm{G}(t,\xi) = 2\,t\,\xi^2$$

(11.5.79) 式に上式を代入し、$\mathrm{f}(t) = 2\,e^t - t + 1$ であるから、

$$\mathrm{x}(t) = 2\,e^t - 24\,e\,t + 46\,t + 1$$

11.5.14 フレドホルム型第二種積分方程式 例 6

下記の積分方程式を解き、$\mathrm{x}(t)$ を求める。前節では (11.5.48) 式の公式の適用で問題があったので、前節と同じ問題を行列式の方法で解く。

$$\mathrm{x}(t) - 6\int_0^1 t\,\xi^2\,\mathrm{x}(\xi)\,d\xi = 2\,e^t - t + 1 \tag{11.5.84}$$

```
kill(all);
assume(t>0);
assume(\xi>0);
IE1:x(t)-6*'integrate(t*\xi*x(\xi),\xi,0,1)=2*%e^t-t+1;
IE2:x(t)=f(t)-\alpha*'integrate(G(t,\xi)*f(\xi),\xi,0,1);
F1:f(t)=2*%e^t-t+1;
F11:subst([t=\xi],%);
G1:G(t,\xi)=-\Delta(t,\xi)/\Delta(\alpha);
K0:K(t,\xi)=t*\xi^2;
M21:matrix([K(t,\xi),K(t,\xi[1])],[K(\xi[1],\xi),K(\xi[1],\xi[1])]);
K11:subst([\xi=\xi[1]],K0);
K12:subst([t=\xi[1]],K0);
K13:subst([\xi=\xi[1],t=\xi[1]],K0);
subst([K0,K11,K12,K13],M21);
M21D:determinant(%);
M22:matrix([K(t,\xi),K(t,\xi[1]),K(t,\xi[2])],[K(\xi[1],\xi),K(\xi[1],\xi[1]),
 K(\xi[1],\xi[2])],[K(\xi[2],\xi),K(\xi[2],\xi[1]),K(\xi[2],\xi[2])]);
K21:subst([\xi=\xi[2]],K0);
K22:subst([t=\xi[2]],K0);
K23:subst([\xi=\xi[1],t=\xi[2]],K0);
K24:subst([\xi=\xi[2],t=\xi[1]],K0);
K25:subst([\xi=\xi[2],t=\xi[2]],K0);
subst([K0,K11,K12,K13],M22);
subst([K21,K22,K23,K24,K25],%);
M22D:determinant(%);
M23:matrix([K(t,\xi),K(t,\xi[1]),K(t,\xi[2]),K(t,\xi[3])],[K(\xi[1],\xi),
 K(\xi[1],\xi[1]),K(\xi[1],\xi[2]),K(\xi[1],\xi[3])],[K(\xi[2],\xi),
 K(\xi[2],\xi[1]),K(\xi[2],\xi[2]),K(\xi[2],\xi[3])],[K(\xi[3],\xi),
 K(\xi[3],\xi[1]),K(\xi[3],\xi[2]),K(\xi[3],\xi[3])]);
K31:subst([\xi=\xi[3]],K0);
K32:subst([t=\xi[3]],K0);
K33:subst([\xi=\xi[1],t=\xi[3]],K0);
K34:subst([\xi=\xi[2],t=\xi[3]],K0);
K35:subst([\xi=\xi[3],t=\xi[1]],K0);
K36:subst([\xi=\xi[3],t=\xi[2]],K0);
K37:subst([\xi=\xi[3],t=\xi[3]],K0);
subst([K0,K11,K12,K13],M23);
subst([K21,K22,K23,K24,K25],%);
subst([K31,K32,K33,K34,K35,K36,K37],%);
M23D:determinant(%);
```

```
M24:matrix([K(t,\xi),K(t,\xi[1]),K(t,\xi[2]),K(t,\xi[3]),K(t,\xi[4])],[K(\xi[1],\xi),
 K(\xi[1],\xi[1]),K(\xi[1],\xi[2]),K(\xi[1],\xi[3]),K(\xi[1],\xi[4])],
 [K(\xi[2],\xi),K(\xi[2],\xi[1]),K(\xi[2],\xi[2]),K(\xi[2],\xi[3]),
 K(\xi[2],\xi[4])],[K(\xi[3],\xi),K(\xi[3],\xi[1]),K(\xi[3],\xi[2]),
 K(\xi[3],\xi[3]),K(\xi[3],\xi[4])],[K(\xi[4],\xi),K(\xi[4],\xi[1]),
 K(\xi[4],\xi[2]),K(\xi[4],\xi[3]),K(\xi[4],\xi[4])]);
K41:subst([\xi=\xi[4]],K0);
K42:subst([t=\xi[4]],K0);
K43:subst([\xi=\xi[1],t=\xi[4]],K0);
K44:subst([\xi=\xi[2],t=\xi[4]],K0);
K45:subst([\xi=\xi[3],t=\xi[4]],K0);
K46:subst([\xi=\xi[4],t=\xi[1]],K0);
K47:subst([\xi=\xi[4],t=\xi[2]],K0);
K48:subst([\xi=\xi[4],t=\xi[3]],K0);
K49:subst([\xi=\xi[4],t=\xi[4]],K0);
subst([K0,K11,K12,K13],M24);
subst([K21,K22,K23,K24,K25],%);
subst([K31,K32,K33,K34,K35,K36,K37],%);
subst([K41,K42,K43,K44,K45,K46,K47,K48,K49],%);
M24D:determinant(%);
G2:\Delta(t,\xi)=K(t,\xi)+(-1*\alpha)^(1)/(1!)*'integrate(M21D,\xi[1],0,1)+(-1*\alpha)
 ^(2)/(2!)*'integrate('integrate(M22D,\xi[1],0,1),\xi[2],0,1)+(-1*\alpha)^(3)/(3!)
 *'integrate('integrate('integrate(M23D,\xi[1],0,1),\xi[2],0,1),
 \xi[3],0,1)+(-1*\alpha)^(4)/(4!)*'integrate('integrate('integrate
 ('integrate(M24D,\xi[1],0,1),\xi[2],0,1),\xi[3],0,1),\xi[4],0,1);
G21:subst([K0],%);
M31:K(\xi[1],\xi[1]);
M31D:subst([K0,K11,K12,K13],M31);
M32:matrix([K(\xi[1],\xi[1]),K(\xi[1],\xi[2])],[K(\xi[2],\xi[1]),K(\xi[2],\xi[2])]);
subst([K0,K11,K12,K13],M32);
subst([K21,K22,K23,K24,K25],%);
M32D:determinant(%);
M33:matrix([K(\xi[1],\xi[1]),K(\xi[1],\xi[2]),K(\xi[1],\xi[3])],[K(\xi[2],\xi[1]),
 K(\xi[2],\xi[2]),K(\xi[2],\xi[3])],[K(\xi[3],\xi[1]),K(\xi[3],\xi[2]),
 K(\xi[3],\xi[3])]);
subst([K0,K11,K12,K13],M33);
subst([K21,K22,K23,K24,K25],%);
subst([K31,K32,K33,K34,K35,K36,K37],%);
M33D:determinant(%);
M34:matrix([K(\xi[1],\xi[1]),K(\xi[1],\xi[2]),K(\xi[1],\xi[3]),K(\xi[1],\xi[4])],
 [K(\xi[2],\xi[1]),K(\xi[2],\xi[2]),K(\xi[2],\xi[3]),K(\xi[2],\xi[4])],
 [K(\xi[3],\xi[1]),K(\xi[3],\xi[2]),K(\xi[3],\xi[3]),K(\xi[3],\xi[4])],
 [K(\xi[4],\xi[1]),K(\xi[4],\xi[2]),K(\xi[4],\xi[3]),K(\xi[4],\xi[4])]);
subst([K0,K11,K12,K13],M34);
subst([K21,K22,K23,K24,K25],%);
subst([K31,K32,K33,K34,K35,K36,K37],%);
subst([K41,K42,K43,K44,K45,K46,K47,K48,K49],%);
M34D:determinant(%);
```

```
G3:\Delta(\alpha)=1+(-1*\alpha)^(1)/(1!)*'integrate(M31D,\xi[1],0,1)+(-1*\alpha)
 ^(2)/(2!)*'integrate('integrate(M32D,\xi[1],0,1),\xi[2],0,1)+(-1*\alpha)^(3)/(3!)
 *'integrate('integrate('integrate(M33D,\xi[1],0,1),\xi[2],0,1),\xi[3],0,1)+(-1*\alpha)
 ^(4)/(4!)*'integrate('integrate('integrate('integrate(M34D,\xi[1],0,1),\xi[2],0,1),
 \xi[3],0,1),\xi[4],0,1);
G31:ev(%,integrate);
G11:subst([G21,G31],G1);
subst([G11,F1,F11,\alpha=6],IE2);
ev(%,integrate);
expand(%);
```

「11.5.2 フレドホルム型第二種積分方程式の解法 (行列式)」の (11.5.7) 式から (11.5.84) 式の解は、

$$\mathrm{x}\left(t\right)=\mathrm{f}\left(t\right)-\alpha\int_{0}^{1}\mathrm{G}\left(t,\xi\right)\,\mathrm{f}\left(\xi\right)d\xi \tag{11.5.85}$$

ここで (11.5.84) 式から、 $\mathrm{f}\left(t\right)=2\,e^{t}-t+1,\quad \alpha=6$

ここで、(11.5.8) 式から

$$\mathrm{G}\left(t,\xi\right)=-\frac{\Delta\left(t,\xi\right)}{\Delta\left(\alpha\right)} \tag{11.5.86}$$

(11.5.84) 式から、

$$\mathrm{K}\left(t,\xi\right)=t\,\xi^{2} \tag{11.5.87}$$

(11.5.86) 式の $\Delta\left(t,\xi\right)$ は、(11.5.9) 式から各行列式を求めると、

$$\begin{bmatrix}\mathrm{K}(t,\xi) & \mathrm{K}(t,\xi_1)\\ \mathrm{K}(\xi_1,\xi) & \mathrm{K}(\xi_1,\xi_1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}t\,\xi^2 & \xi_1^2\,t\\ \xi_1\,\xi^2 & \xi_1^3\end{bmatrix}=0$$

$$\begin{bmatrix}\mathrm{K}(t,\xi) & \mathrm{K}(t,\xi_1) & \mathrm{K}(t,\xi_2)\\ \mathrm{K}(\xi_1,\xi) & \mathrm{K}(\xi_1,\xi_1) & \mathrm{K}(\xi_1,\xi_2)\\ \mathrm{K}(\xi_2,\xi) & \mathrm{K}(\xi_2,\xi_1) & \mathrm{K}(\xi_2,\xi_2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}t\,\xi^2 & \xi_1^2\,t & \xi_2^2\,t\\ \xi_1\,\xi^2 & \xi_1^3 & \xi_1\,\xi_2^2\\ \xi_2\,\xi^2 & \xi_1^2\,\xi_2 & \xi_2^3\end{bmatrix}=0$$

$$\begin{bmatrix}\mathrm{K}(t,\xi) & \mathrm{K}(t,\xi_1) & \mathrm{K}(t,\xi_2) & \mathrm{K}(t,\xi_3)\\ \mathrm{K}(\xi_1,\xi) & \mathrm{K}(\xi_1,\xi_1) & \mathrm{K}(\xi_1,\xi_2) & \mathrm{K}(\xi_1,\xi_3)\\ \mathrm{K}(\xi_2,\xi) & \mathrm{K}(\xi_2,\xi_1) & \mathrm{K}(\xi_2,\xi_2) & \mathrm{K}(\xi_2,\xi_3)\\ \mathrm{K}(\xi_3,\xi) & \mathrm{K}(\xi_3,\xi_1) & \mathrm{K}(\xi_3,\xi_2) & \mathrm{K}(\xi_3,\xi_3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}t\,\xi^2 & \xi_1^2\,t & \xi_2^2\,t & \xi_3^2\,t\\ \xi_1\,\xi^2 & \xi_1^3 & \xi_1\,\xi_2^2 & \xi_1\,\xi_3^2\\ \xi_2\,\xi^2 & \xi_1^2\,\xi_2 & \xi_2^3 & \xi_2\,\xi_3^2\\ \xi_3\,\xi^2 & \xi_1^2\,\xi_3 & \xi_2^2\,\xi_3 & \xi_3^3\end{bmatrix}=0$$

$$\begin{bmatrix}\mathrm{K}(t,\xi) & \mathrm{K}(t,\xi_1) & \mathrm{K}(t,\xi_2) & \mathrm{K}(t,\xi_3) & \mathrm{K}(t,\xi_4)\\ \mathrm{K}(\xi_1,\xi) & \mathrm{K}(\xi_1,\xi_1) & \mathrm{K}(\xi_1,\xi_2) & \mathrm{K}(\xi_1,\xi_3) & \mathrm{K}(\xi_1,\xi_4)\\ \mathrm{K}(\xi_2,\xi) & \mathrm{K}(\xi_2,\xi_1) & \mathrm{K}(\xi_2,\xi_2) & \mathrm{K}(\xi_2,\xi_3) & \mathrm{K}(\xi_2,\xi_4)\\ \mathrm{K}(\xi_3,\xi) & \mathrm{K}(\xi_3,\xi_1) & \mathrm{K}(\xi_3,\xi_2) & \mathrm{K}(\xi_3,\xi_3) & \mathrm{K}(\xi_3,\xi_4)\\ \mathrm{K}(\xi_4,\xi) & \mathrm{K}(\xi_4,\xi_1) & \mathrm{K}(\xi_4,\xi_2) & \mathrm{K}(\xi_4,\xi_3) & \mathrm{K}(\xi_4,\xi_4)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}t\,\xi^2 & \xi_1^2\,t & \xi_2^2\,t & \xi_3^2\,t & \xi_4^2\,t\\ \xi_1\,\xi^2 & \xi_1^3 & \xi_1\,\xi_2^2 & \xi_1\,\xi_3^2 & \xi_1\,\xi_4^2\\ \xi_2\,\xi^2 & \xi_1^2\,\xi_2 & \xi_2^3 & \xi_2\,\xi_3^2 & \xi_2\,\xi_4^2\\ \xi_3\,\xi^2 & \xi_1^2\,\xi_3 & \xi_2^2\,\xi_3 & \xi_3^3 & \xi_3\,\xi_4^2\\ \xi_4\,\xi^2 & \xi_1^2\,\xi_4 & \xi_2^2\,\xi_4 & \xi_3^2\,\xi_4 & \xi_4^3\end{bmatrix}=0$$

(11.5.9) 式と上記の結果から、

$$\Delta\left(t,\xi\right)=\mathrm{K}\left(t,\xi\right)=t\,\xi^{2} \tag{11.5.88}$$

(11.5.86) 式の $\Delta\left(\alpha\right)$ は、(11.5.11) 式から各行列式を求めると、

$$\mathrm{K}\left(\xi_1,\xi_1\right)=\xi_1^3$$

$$\begin{bmatrix}\mathrm{K}(\xi_1,\xi_1) & \mathrm{K}(\xi_1,\xi_2)\\ \mathrm{K}(\xi_2,\xi_1) & \mathrm{K}(\xi_2,\xi_2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\xi_1^3 & \xi_1\,\xi_2^2\\ \xi_1^2\,\xi_2 & \xi_2^3\end{bmatrix}=0$$

$$\begin{bmatrix}\mathrm{K}(\xi_1,\xi_1) & \mathrm{K}(\xi_1,\xi_2) & \mathrm{K}(\xi_1,\xi_3)\\ \mathrm{K}(\xi_2,\xi_1) & \mathrm{K}(\xi_2,\xi_2) & \mathrm{K}(\xi_2,\xi_3)\\ \mathrm{K}(\xi_3,\xi_1) & \mathrm{K}(\xi_3,\xi_2) & \mathrm{K}(\xi_3,\xi_3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\xi_1^3 & \xi_1\,\xi_2^2 & \xi_1\,\xi_3^2\\ \xi_1^2\,\xi_2 & \xi_2^3 & \xi_2\,\xi_3^2\\ \xi_1^2\,\xi_3 & \xi_2^2\,\xi_3 & \xi_3^3\end{bmatrix}=0$$

$$\begin{bmatrix} \mathrm{K}(\xi_1,\xi_1) & \mathrm{K}(\xi_1,\xi_2) & \mathrm{K}(\xi_1,\xi_3) & \mathrm{K}(\xi_1,\xi_4) \\ \mathrm{K}(\xi_2,\xi_1) & \mathrm{K}(\xi_2,\xi_2) & \mathrm{K}(\xi_2,\xi_3) & \mathrm{K}(\xi_2,\xi_4) \\ \mathrm{K}(\xi_3,\xi_1) & \mathrm{K}(\xi_3,\xi_2) & \mathrm{K}(\xi_3,\xi_3) & \mathrm{K}(\xi_3,\xi_4) \\ \mathrm{K}(\xi_4,\xi_1) & \mathrm{K}(\xi_4,\xi_2) & \mathrm{K}(\xi_4,\xi_3) & \mathrm{K}(\xi_4,\xi_4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_1^3 & \xi_1\,\xi_2^2 & \xi_1\,\xi_3^2 & \xi_1\,\xi_4^2 \\ \xi_1^2\,\xi_2 & \xi_2^3 & \xi_2\,\xi_3^2 & \xi_2\,\xi_4^2 \\ \xi_1^2\,\xi_3 & \xi_2^2\,\xi_3 & \xi_3^3 & \xi_3\,\xi_4^2 \\ \xi_1^2\,\xi_4 & \xi_2^2\,\xi_4 & \xi_3^2\,\xi_4 & \xi_4^3 \end{bmatrix} = 0$$

(11.5.11) 式と上記の結果から、

$$\Delta(\alpha) = 1 - \int_0^1 \xi_1^3 d\xi_1\,\alpha = 1 - \frac{\alpha}{4} \tag{11.5.89}$$

(11.5.86) 式に (11.5.88) 式と (11.5.89) 式を代入し、

$$\mathrm{G}(t,\xi) = -\frac{t\,\xi^2}{1-\frac{\alpha}{4}}$$

(11.5.85) 式に上式を代入すると、下記となり、前節と同じ結果が得られた。

$$\mathrm{x}(t) = -12\,t\int_0^1 \xi^2\,\left(2\,e^{\xi} - \xi + 1\right) d\xi + 2\,e^t - t + 1 = 2\,e^t - 24\,e\,t + 46\,t + 1$$

11.5.15 フレドホルム型第二種積分方程式 例 7

下記の積分方程式を解き、$\mathrm{x}(t)$ を求める。

$$\mathrm{x}(t)-\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\,\xi\,\mathrm{x}(\xi)\,d\xi=\sin(t)-\frac{t}{4} \tag{11.5.90}$$

```
kill(all);
assume(t>0);
assume(\tau>0);
IE1:x(t)-1/4*'integrate((t*\xi)*x(\xi),
 \xi,0,1/2*%pi)=sin(t)-t/4;
F1:f(t)=sin(t)-t/4;
F11:subst([t=\xi],%);
IE2:x(t)=f(t)-1/4*'integrate(G(t,\xi)*
 f(\xi),\xi,0,1/2*%pi);
G1:G(t,\xi)=-sum(\alpha^(n-1)*
 k[n](t,\xi),n,1,inf);
K0:K(t,\xi)=t*\xi;
K01:subst([\xi=\tau],K0);
K1:k[1](t,\xi)=K(t,\xi);
K11:subst([K0],K1);
K12:subst([t=\tau],K11);
K2:k[2](t,\xi)=integrate(K(t,\tau)*
 k[1](\tau,\xi),\tau,0,1/2*%pi);
subst([K12,K01],%);
K21:ev(%,integrate);
K22:subst([t=\tau],K21);
K3:k[3](t,\xi)=integrate(K(t,\tau)*
 k[2](\tau,\xi),\tau,0,1/2*%pi);
subst([K22,K01],%);
K31:ev(%,integrate);
K32:subst([t=\tau],K31);
K4:k[4](t,\xi)=integrate(K(t,\tau)*
 k[3](\tau,\xi),\tau,0,1/2*%pi);
subst([K32,K01],%);
K41:ev(%,integrate);
KN:k[n](t,\xi)=((%pi^3/24)^(n-1))*t*\xi;
subst([KN,\alpha=1/4],G1);
KN1:alpha^(n-1)*k[n](t,xi)=
sum(a^(n-1),n,1,inf);
1/(1-a);
subst([a=(%pi^3/96)],%);
G2:lhs(G1)=-%*t*\xi;
subst([G2],IE2);
subst([F1,F11],%);
ev(%,integrate);
factor(%);
```

「11.5.1 フレドホルム型第二種積分方程式の解法 (級数)」の (11.5.2) 式から上式の解は、

$$\mathrm{x}(t)=\mathrm{f}(t)-\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{G}(t,\xi)\,\mathrm{f}(\xi)\,d\xi \tag{11.5.91}$$

ここで (11.5.3) 式から、

$$\mathrm{G}(t,\xi)=-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}k_n(t,\xi) \tag{11.5.92}$$

(11.5.5) 式から、

$$k_n(t,\xi)=\int_0^1\mathrm{K}(t,\tau)\,k_{n-1}(\tau,\xi)\,d\tau \tag{11.5.93}$$

(11.5.90) 式から、

$$\mathrm{K}(t,\xi)=t\,\xi$$

(11.5.4) 式、(11.5.93) 式から、

$$\begin{aligned}
k_1(t,\xi)=&\mathrm{K}(t,\xi)=t\,\xi\\
k_2(t,\xi)=&\int_0^1\mathrm{K}(t,\tau)\,k_1(\tau,\xi)\,d\tau=\frac{\pi^3\,t\,\xi}{24}\\
k_3(t,\xi)=&\int_0^1\mathrm{K}(t,\tau)\,k_2(\tau,\xi)\,d\tau=\frac{\pi^6\,t\,\xi}{576}\\
k_4(t,\xi)=&\int_0^1\mathrm{K}(t,\tau)\,k_3(\tau,\xi)\,d\tau=\frac{\pi^9\,t\,\xi}{13824}
\end{aligned}$$

上式から、

$$k_n(t,\xi)=24^{1-n}\,\pi^{3\,(n-1)}\,t\,\xi \tag{11.5.94}$$

(11.5.92) 式に上式を代入し、

$$\mathrm{G}(t,\xi)=-\left(\sum_{n=1}^{\infty}4^{1-n}\,24^{1-n}\,\pi^{3\,(n-1)}\right)t\,\xi \tag{11.5.95}$$

ここで (11.5.48) 式の公式から、

$$\sum_{n=1}^{\infty}a^{n-1}=\frac{1}{1-a}\qquad |a|<1$$

上式で $a=\frac{\pi^3}{96}$ として、

$$\mathrm{G}(t,\xi)=-\frac{t\,\xi}{1-\frac{\pi^3}{96}}$$

(11.5.91) 式に上式を代入し、$\mathrm{f}(t)=\sin(t)-\frac{t}{4}$ であるから、

$$\begin{aligned}
\mathrm{x}(t)=&\frac{t}{4\left(1-\frac{\pi^3}{96}\right)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\xi\left(\sin(\xi)-\frac{\xi}{4}\right)d\xi+\sin(t)-\frac{t}{4}\\
=&\sin(t)
\end{aligned}$$

11.5.16 パンシュール・グルサー核を持つフレドホルム型第二種積分方程式　例 1

下記の積分方程式を解き、$\mathrm{x}(t)$ を求める。

$$\mathrm{x}(t)-\alpha\int_0^1 (t\,\xi\,(\xi+t+1)+\xi-t-1)\,\mathrm{x}(\xi)\,d\xi = -2\,t^2+\frac{t}{5}+\frac{10}{3} \tag{11.5.96}$$

```
kill(all);
assume(t>0);
assume(\xi>0);
IE1:x(t)-\alpha*'integrate((t*\xi*
 (t+\xi+1)-t+\xi-1)*x(\xi),\xi,0,1)
 =-2*t^2+1/5*t+10/3;
K0:K(t,\xi)=(t*\xi*(t+\xi+1)-t+\xi-1);
expand(%);
K01:lhs(%)=rest(rhs(%),-4)+factor(rest(
 rhs(%),2));
F1:f(t)=-2*t^2+1/5*t+10/3;
A1:a[1](t)=t^2;
B1:b[1](\xi)=\xi;
A2:a[2](t)=t;
B2:b[2](\xi)=\xi^2;
A3:a[3](t)=t+1;
B3:b[3](\xi)=\xi-1;
BT1:subst([\xi=t],B1);
BT2:subst([\xi=t],B2);
BT3:subst([\xi=t],B3);
K1:K(t,\xi)=sum(a[i](t)*b[i](\xi),i,1,3);
ev(%,sum);
subst([A1,A2,A3,B1,B2,B3],%);
DL1:integrate(b[i](\xi)*x(\xi),\xi,0,1)
 =\delta[i];
DL2:rhs(%)=lhs(%);
DL3:subst([i=j,\xi=t],DL1);
DL11:subst([i=1,B1],DL1);
DL12:subst([i=2,B2],DL1);
DL13:subst([i=3,B3],DL1);
subst([K1],IE1);
x(t)-\alpha*sum(integrate(x(xi)*a[i](t)
 *b[i](xi),xi,A,B),i,1,n)=f(t);
IE2:subst([DL1],%);
```

(11.5.96) 式から、

$$\begin{aligned}\mathrm{K}(t,\xi) =& t\,\xi^2+t^2\,\xi+(t+1)\,(\xi-1)\\ =& a_3(t)\,b_3(\xi)+a_2(t)\,b_2(\xi)+a_1(t)\,b_1(\xi)\end{aligned} \tag{11.5.97}$$

$$\mathrm{f}(t)=-2\,t^2+\frac{t}{5}+\frac{10}{3} \tag{11.5.98}$$

(11.5.96) 式から「11.5.3 パンシュール・グルサー核を持つフレドホルム型第二種積分方程式の解法」からパンシュール・グルサー核を持つことがわかる。(11.5.97) 式から、

$$\begin{aligned} a_1(t) =& t^2, & b_1(\xi) &= \xi\\ a_2(t) =& t, & b_2(\xi) &= \xi^2\\ a_3(t) =& t+1, & b_3(\xi) &= \xi-1\end{aligned} \tag{11.5.99}$$

```
KJI:k[j,i]=integrate(a[i](t)*b[j](t),
 t,0,1);
subst([i=1,j=1,A1,BT1],KJI);
K11:ev(%,integrate);
subst([i=1,j=2,A1,BT2],KJI);
K21:ev(%,integrate);
subst([i=1,j=3,A1,BT3],KJI);
K31:ev(%,integrate);
subst([i=2,j=1,A2,BT1],KJI);
K12:ev(%,integrate);
subst([i=2,j=2,A2,BT2],KJI);
K22:ev(%,integrate);
subst([i=2,j=3,A2,BT3],KJI);
K32:ev(%,integrate);
subst([i=3,j=1,A3,BT1],KJI);
K13:ev(%,integrate);
subst([i=3,j=2,A3,BT2],KJI);
K23:ev(%,integrate);
subst([i=3,j=3,A3,BT3],KJI);
K33:ev(%,integrate);
CJ:c[j]=integrate(f(t)*b[j](t),t,0,1);
subst([j=1,F1,BT1],CJ);
CJ1:ev(%,integrate);
subst([j=2,F1,BT2],CJ);
CJ2:ev(%,integrate);
subst([j=3,F1,BT3],CJ);
CJ3:ev(%,integrate);
EQ:\delta[j]-\alpha*sum(\delta[i]*k[j,i],
 i,1,3)=c[j];
EQ1:subst([j=1,K11,K12,K13,CJ1],EQ);
EQ2:subst([j=2,K21,K22,K23,CJ2],EQ);
EQ3:subst([j=3,K31,K32,K33,CJ3],EQ);
DL1:solve([EQ1,EQ2,EQ3],[\delta[1],
 \delta[2],\delta[3]])[1];
X1:x(t)=\alpha*(sum(\delta[i]*a[i](t),
 i,1,3))+f(t);
subst([DL1],%);
X2:subst([A1,A2,A3,F1],%);
```

(11.5.20) 式から、下記の連立方程式が得られる。

$$\delta_j-\alpha\,(\delta_3\,k_{j,3}+\delta_2\,k_{j,2}+\delta_1\,k_{j,1})=c_j \quad j=1,2,3 \tag{11.5.100}$$

ここで、

$$\begin{aligned} k_{j,i}&=\int_0^1 a_i\,(t)\;b_j\,(t)\,dt\\ c_j&=\int_0^1 \mathrm{f}\,(t)\;b_j\,(t)\,dt \end{aligned} \tag{11.5.101}$$

上式から $k_{j,i},\,c_j$ を求めると、

$$\begin{aligned} k_{1,1}&=\int_0^1 t^3dt=\frac{1}{4}\\ k_{2,1}&=\int_0^1 t^4dt=\frac{1}{5}\\ k_{3,1}&=\int_0^1 (t-1)\;t^2dt=-\frac{1}{12}\\ k_{1,2}&=\int_0^1 t^2dt=\frac{1}{3}\\ k_{2,2}&=\int_0^1 t^3dt=\frac{1}{4}\\ k_{3,2}&=\int_0^1 (t-1)\;tdt=-\frac{1}{6}\\ k_{1,3}&=\int_0^1 t\;(t+1)\,dt=\frac{5}{6}\\ k_{2,3}&=\int_0^1 t^2\;(t+1)\,dt=\frac{7}{12}\\ k_{3,3}&=\int_0^1 (t-1)\;(t+1)\,dt=-\frac{2}{3}\\ c_1&=\int_0^1 t\,\left(-2\,t^2+\frac{t}{5}+\frac{10}{3}\right)dt=\frac{37}{30}\\ c_2&=\int_0^1 t^2\,\left(-2\,t^2+\frac{t}{5}+\frac{10}{3}\right)dt=\frac{137}{180}\\ c_3&=\int_0^1 (t-1)\,\left(-2\,t^2+\frac{t}{5}+\frac{10}{3}\right)dt=-\frac{23}{15} \end{aligned} \tag{11.5.102}$$

(11.5.100) 式に上式を代入すると、

$$\begin{aligned} \delta_1-\left(\frac{5\,\delta_3}{6}+\frac{\delta_2}{3}+\frac{\delta_1}{4}\right)\,\alpha&=\frac{37}{30}\\ \delta_2-\left(\frac{7\,\delta_3}{12}+\frac{\delta_2}{4}+\frac{\delta_1}{5}\right)\,\alpha&=\frac{137}{180}\\ \delta_3-\left(-\frac{2\,\delta_3}{3}-\frac{\delta_2}{6}-\frac{\delta_1}{12}\right)\,\alpha&=-\frac{23}{15} \end{aligned} \tag{11.5.103}$$

上式の連立方程式から、δ_i が得られ、

$$\begin{aligned} \delta_1&=\frac{2\,\alpha^2+1102\,\alpha-2664}{\alpha^3+369\,\alpha^2-360\,\alpha-2160},\\ \delta_2&=\frac{47\,\alpha^2+10713\,\alpha-24660}{15\,\alpha^3+5535\,\alpha^2-5400\,\alpha-32400},\\ \delta_3&=-\frac{10\,\alpha^2+3480\,\alpha-9936}{3\,\alpha^3+1107\,\alpha^2-1080\,\alpha-6480} \end{aligned} \tag{11.5.104}$$

(11.5.21) 式から解：$\mathrm{x}\,(t)$ が得られ、

$$\mathrm{x}\,(t)=\mathrm{f}\,(t)+\alpha\,(\delta_3\,a_3\,(t)+\delta_2\,a_2\,(t)+\delta_1\,a_1\,(t))$$

上式に (11.5.99) 式、(11.5.104) 式を代入し、

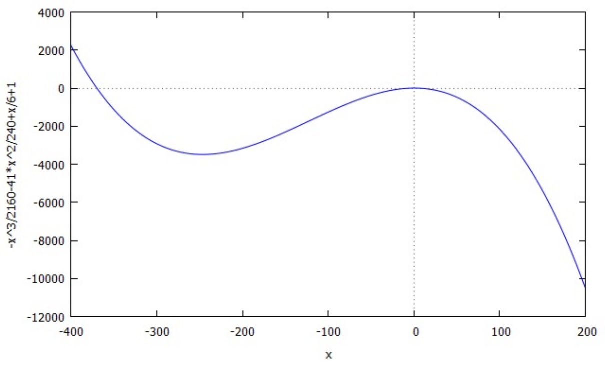
$$\begin{aligned} \mathrm{x}\,(t)=\alpha\Biggl(&\frac{\left(2\,\alpha^2+1102\,\alpha-2664\right)\,t^2}{\alpha^3+369\,\alpha^2-360\,\alpha-2160}\\ &-\frac{\left(10\,\alpha^2+3480\,\alpha-9936\right)\,(t+1)}{3\,\alpha^3+1107\,\alpha^2-1080\,\alpha-6480}\\ &+\frac{\left(47\,\alpha^2+10713\,\alpha-24660\right)\,t}{15\,\alpha^3+5535\,\alpha^2-5400\,\alpha-32400}\Biggr)\\ &-2\,t^2+\frac{t}{5}+\frac{10}{3} \end{aligned} \tag{11.5.105}$$

```
AL11:coeff(expand(lhs(EQ1)),\delta[1],1);
AL12:coeff(expand(lhs(EQ1)),\delta[2],1);
AL13:coeff(expand(lhs(EQ1)),\delta[3],1);
AL21:coeff(expand(lhs(EQ2)),\delta[1],1);
AL22:coeff(expand(lhs(EQ2)),\delta[2],1);
AL23:coeff(expand(lhs(EQ2)),\delta[3],1);
AL31:coeff(expand(lhs(EQ3)),\delta[1],1);
AL32:coeff(expand(lhs(EQ3)),\delta[2],1);
AL33:coeff(expand(lhs(EQ3)),\delta[3],1);
matrix([AL11,AL12,AL13],[AL21,AL22,AL23],
 [AL31,AL32,AL33]);
determinant (%)=0;
AL4:expand(%);
solve(%,\alpha);
subst([\alpha=x],lhs(AL4));
plot2d(%,[x,-400,200]);
find_root(lhs(AL4),\alpha,-400,-300);
find_root(lhs(AL4),\alpha,-100,0);
find_root(lhs(AL4),\alpha,0,100);
subst([\alpha=4],X2);
X3:expand(%);
X31:subst([t=\xi],%);
subst([X3,X31,\alpha=4],IE1);
ev(%,integrate);
%-rhs(%);
factor(%);
```

(11.5.103) 式の係数行列式から解が得られない α を求める。

$$\begin{bmatrix} 1-\frac{\alpha}{4} & -\frac{\alpha}{3} & -\frac{5\,\alpha}{6}\\ -\frac{\alpha}{5} & 1-\frac{\alpha}{4} & -\frac{7\,\alpha}{12}\\ \frac{\alpha}{12} & \frac{\alpha}{6} & \frac{2\,\alpha}{3}+1 \end{bmatrix}=-\frac{\alpha^3}{2160}-\frac{41\,\alpha^2}{240}+\frac{\alpha}{6}+1=0$$

solve 関数ではよい結果が得られなかったので、plot2d で解の存在する範囲を $\alpha=-400\rightarrow-300$、$\alpha=-100\rightarrow$



0、$\alpha = 0 \to 100$ とし、find_ root 関数で α を求めると下記となり、このとき解は得られない。

$$\alpha = -369.9573036804549, \ -1.98460193470313, \ 2.941905615157956$$

いま、$\alpha = 4$ とすると、解は、

$$\mathrm{x}(t) = t^2 + 1$$

11.5.17　フレドホルム型同次積分方程式　例 2

下記の積分方程式を解き、$\mathrm{x}(t)$ を求める。

$$\mathrm{x}(t) - \alpha \int_0^1 t\,\xi\,\mathrm{x}(\xi)\,d\xi = 0 \tag{11.5.106}$$

```
kill(all);
assume(t>0);
assume(\tau>0);
IE1:x(t)-\alpha*'integrate(t*\xi*x(\xi),
 \xi,0,1)=0;
DT1:\Delta(t,\xi)=t*xi;
DA1:\Delta(\alpha)=1-\alpha/3;
\Delta(\alpha)=0;
subst([%],DA1);
solve(%,\alpha)[1];
X1:x(t)=sum(\Delta(t,C[i],\alpha[i]),i,
 1,N);
\Delta(t,C[i],\alpha[i])=subst([\alpha=3,
 \xi=C],rhs(DT1));
X2:subst([N=1,%],X1);
X21:subst([t=\xi],%);
subst([X2,X21,\alpha=3],IE1);
ev(%,integrate);
```

「11.5.2 フレドホルム型第二種積分方程式の解法 (行列式)」で (11.5.11) 式、(11.5.12) 式の $\Delta(\alpha)$ および (11.5.9) 式、(11.5.10) 式の $\Delta(t,\xi)$ を用いて、(11.5.23) 式から、

$$\Delta(\alpha) \neq 0 \quad \text{なら、解は} \quad x = 0$$
$$\Delta(\alpha) = 0, \ \frac{d}{d\alpha}\Delta(\alpha) \neq 0 \quad \text{なら、解は}$$
$$x(t) = \Delta(t, C_i, \alpha_i) \tag{11.5.107}$$

(11.5.106) 式から、

$$\mathrm{K}(t,\xi) = t\,\xi$$

これは「11.5.9 フレドホルム型第二種積分方程式　例 3」と同じであり、ここで得られた $\Delta(t,\xi)$ および $\Delta(\alpha)$ が使用できる。(11.5.53) 式から、

$$\Delta(t,\xi) = t\,\xi \tag{11.5.108}$$

(11.5.54) 式から、

$$\Delta(\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{3} \tag{11.5.109}$$

上式から $\alpha = 3$ で下記の解となる。

$$\mathrm{x}(t) = \sum_{i=1}^{N} \Delta(t, C_i, \alpha_i) = t\,C$$

11.5.18　フレドホルム型同次積分方程式　例 3

下記の積分方程式を解き、$\mathrm{x}(t)$ を求める。

$$\mathrm{x}(t)-\alpha\int_0^1(\xi+t)\,\mathrm{x}(\xi)\,d\xi=0 \tag{11.5.110}$$

```
kill(all);
assume(t>0);
assume(\tau>0);
IE1:x(t)-\alpha*'integrate((t+\xi)*x(\xi),\xi,0,1)=0;
K0:K(t,\xi)=t+\xi;
M21:matrix([K(t,\xi),K(t,\xi[1])],[K(\xi[1],\xi),K(\xi[1],\xi[1])]);
K11:subst([\xi=\xi[1]],K0);
K12:subst([t=\xi[1]],K0);
K13:subst([\xi=\xi[1],t=\xi[1]],K0);
subst([K0,K11,K12,K13],M21);
M21D:determinant(%);
M22:matrix([K(t,\xi),K(t,\xi[1]),K(t,\xi[2])],[K(\xi[1],\xi),K(\xi[1],\xi[1]),
 K(\xi[1],\xi[2])],[K(\xi[2],\xi),K(\xi[2],\xi[1]),K(\xi[2],\xi[2])]);
K21:subst([\xi=\xi[2]],K0);
K22:subst([t=\xi[2]],K0);
K23:subst([\xi=\xi[1],t=\xi[2]],K0);
K24:subst([\xi=\xi[2],t=\xi[1]],K0);
K25:subst([\xi=\xi[2],t=\xi[2]],K0);
subst([K0,K11,K12,K13],M22);
subst([K21,K22,K23,K24,K25],%);
M22D:determinant(%);
M23:matrix([K(t,\xi),K(t,\xi[1]),K(t,\xi[2]),K(t,\xi[3])],[K(\xi[1],\xi),
 K(\xi[1],\xi[1]),K(\xi[1],\xi[2]),K(\xi[1],\xi[3])],[K(\xi[2],\xi),K(\xi[2],\xi[1]),
 K(\xi[2],\xi[2]),K(\xi[2],\xi[3])],[K(\xi[3],\xi),K(\xi[3],\xi[1]),K(\xi[3],\xi[2]),
 K(\xi[3],\xi[3])]);
K31:subst([\xi=\xi[3]],K0);
K32:subst([t=\xi[3]],K0);
K33:subst([\xi=\xi[1],t=\xi[3]],K0);
K34:subst([\xi=\xi[2],t=\xi[3]],K0);
K35:subst([\xi=\xi[3],t=\xi[1]],K0);
K36:subst([\xi=\xi[3],t=\xi[2]],K0);
K37:subst([\xi=\xi[3],t=\xi[3]],K0);
subst([K0,K11,K12,K13],M23);
subst([K21,K22,K23,K24,K25],%);
subst([K31,K32,K33,K34,K35,K36,K37],%);
M23D:determinant(%);
```

```
M24:matrix([K(t,\xi),K(t,\xi[1]),K(t,\xi[2]),K(t,\xi[3]),K(t,\xi[4])],[K(\xi[1],\xi),
 K(\xi[1],\xi[1]),K(\xi[1],\xi[2]),K(\xi[1],\xi[3]),K(\xi[1],\xi[4])],[K(\xi[2],\xi),
 K(\xi[2],\xi[1]),K(\xi[2],\xi[2]),K(\xi[2],\xi[3]),K(\xi[2],\xi[4])],[K(\xi[3],\xi),
 K(\xi[3],\xi[1]),K(\xi[3],\xi[2]),K(\xi[3],\xi[3]),K(\xi[3],\xi[4])],[K(\xi[4],\xi),
 K(\xi[4],\xi[1]),K(\xi[4],\xi[2]),K(\xi[4],\xi[3]),K(\xi[4],\xi[4])]);
K41:subst([\xi=\xi[4]],K0);
K42:subst([t=\xi[4]],K0);
K43:subst([\xi=\xi[1],t=\xi[4]],K0);
K44:subst([\xi=\xi[2],t=\xi[4]],K0);
K45:subst([\xi=\xi[3],t=\xi[4]],K0);
K46:subst([\xi=\xi[4],t=\xi[1]],K0);
K47:subst([\xi=\xi[4],t=\xi[2]],K0);
K48:subst([\xi=\xi[4],t=\xi[3]],K0);
K49:subst([\xi=\xi[4],t=\xi[4]],K0);
subst([K0,K11,K12,K13],M24);
subst([K21,K22,K23,K24,K25],%);
subst([K31,K32,K33,K34,K35,K36,K37],%);
subst([K41,K42,K43,K44,K45,K46,K47,K48,K49],%);
M24D:determinant(%);
G21:K(t,\xi);
G221:+(-1*\alpha)^(1)/(1!)*'integrate(M21D,\xi[1],0,1);
G221:ev(%,integrate);
+(-1*\alpha)^(2)/(2!)*'integrate('integrate(M22D,\xi[1],0,1),\xi[2],0,1);
G22:ev(%,integrate);
+(-1*\alpha)^(3)/(3!)*'integrate('integrate('integrate(M23D,\xi[1],0,1),
 \xi[2],0,1),\xi[3],0,1);
G23:ev(%,integrate);
+(-1*\alpha)^(4)/(4!)*'integrate('integrate('integrate('integrate(M24D,\xi[1],0,1),
 \xi[2],0,1),\xi[3],0,1),\xi[4],0,1);
G24:ev(%,integrate);
G2:\Delta(t,\xi)=G21+G221+G22+G23+G24;
G25:subst([K0],%);
M31:K(\xi[1],\xi[1]);
M31D:subst([K0,K11,K12,K13],M31);
M32:matrix([K(\xi[1],\xi[1]),K(\xi[1],\xi[2])],[K(\xi[2],\xi[1]),K(\xi[2],\xi[2])]);
subst([K0,K11,K12,K13],M32);
subst([K21,K22,K23,K24,K25],%);
M32D:determinant(%);
M33:matrix([K(\xi[1],\xi[1]),K(\xi[1],\xi[2]),K(\xi[1],\xi[3])],[K(\xi[2],\xi[1]),
 K(\xi[2],\xi[2]),K(\xi[2],\xi[3])],[K(\xi[3],\xi[1]),K(\xi[3],\xi[2]),
 K(\xi[3],\xi[3])]);
subst([K0,K11,K12,K13],M33);
subst([K21,K22,K23,K24,K25],%);
subst([K31,K32,K33,K34,K35,K36,K37],%);
M33D:determinant(%);
M34:matrix([K(\xi[1],\xi[1]),K(\xi[1],\xi[2]),K(\xi[1],\xi[3]),K(\xi[1],\xi[4])],
 [K(\xi[2],\xi[1]),K(\xi[2],\xi[2]),K(\xi[2],\xi[3]),K(\xi[2],\xi[4])],
 [K(\xi[3],\xi[1]),K(\xi[3],\xi[2]),K(\xi[3],\xi[3]),K(\xi[3],\xi[4])],
 [K(\xi[4],\xi[1]),K(\xi[4],\xi[2]),K(\xi[4],\xi[3]),K(\xi[4],\xi[4])]);
```

```
M34D:determinant(%);
subst([K0,K11,K12,K13],M34);
subst([K21,K22,K23,K24,K25],%);
subst([K31,K32,K33,K34,K35,K36,K37],%);
subst([K41,K42,K43,K44,K45,K46,K47,K48,K49],%);
+(-1*\alpha)^(1)/(1!)*'integrate(M31D,\xi[1],0,1);
G31:ev(%,integrate);
+(-1*\alpha)^(2)/(2!)*'integrate('integrate(M32D,\xi[1],0,1),\xi[2],0,1);
G32:ev(%,integrate);
+(-1*\alpha)^(3)/(3!)*'integrate('integrate('integrate(M33D,\xi[1],0,1),\xi[2],0,1),
 \xi[3],0,1);
G33:ev(%,integrate);
+(-1*\alpha)^(4)/(4!)*'integrate('integrate('integrate('integrate(M34D,\xi[1],0,1),
 \xi[2],0,1),\xi[3],0,1),\xi[4],0,1);
G34:ev(%,integrate);
G3:\Delta(\alpha)=1+G31+G32+G33+G34;
rhs(%)=0;
AL1:solve(%,\alpha);
float(%);
AL11:AL1[1];
AL12:AL1[2];
X1:x(t)=subst([\xi=C],rhs(G25));
X11:subst([t=\xi],%);
subst([X1,X11],IE1);
X12:ev(%,integrate);
subst([AL11],X12);
factor(%);
subst([AL12],X12);
factor(%);
```

「11.5.2 フレドホルム型第二種積分方程式の解法 (行列式)」で (11.5.11) 式、(11.5.12) 式の $\Delta(\alpha)$ および (11.5.9) 式、(11.5.10) 式の $\Delta(t,\xi)$ を用いて、(11.5.23) 式から、

$$\begin{aligned}\Delta(\alpha) \neq 0 \quad &\text{なら、解は} \quad x = 0\\ \Delta(\alpha) = 0,\ \frac{d}{d\alpha}\Delta(\alpha) \neq 0 \quad &\text{なら、解は} \quad x(t) = \Delta(t, C_i, \alpha_i)\end{aligned} \tag{11.5.111}$$

(11.5.110) 式から、

$$\mathrm{K}(t,\xi) = \xi + t$$

$$\begin{bmatrix}\mathrm{K}(t,\xi) & \mathrm{K}(t,\xi_1)\\ \mathrm{K}(\xi_1,\xi) & \mathrm{K}(\xi_1,\xi_1)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\xi+t & t+\xi_1\\ \xi+\xi_1 & 2\xi_1\end{bmatrix} = 2\xi_1\,(\xi+t) - (t+\xi_1)\,(\xi+\xi_1)$$

$$\begin{bmatrix}\mathrm{K}(t,\xi) & \mathrm{K}(t,\xi_1) & \mathrm{K}(t,\xi_2)\\ \mathrm{K}(\xi_1,\xi) & \mathrm{K}(\xi_1,\xi_1) & \mathrm{K}(\xi_1,\xi_2)\\ \mathrm{K}(\xi_2,\xi) & \mathrm{K}(\xi_2,\xi_1) & \mathrm{K}(\xi_2,\xi_2)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\xi+t & t+\xi_1 & t+\xi_2\\ \xi+\xi_1 & 2\xi_1 & \xi_2+\xi_1\\ \xi+\xi_2 & \xi_2+\xi_1 & 2\xi_2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\mathrm{K}(t,\xi) & \mathrm{K}(t,\xi_1) & \mathrm{K}(t,\xi_2) & \mathrm{K}(t,\xi_3)\\ \mathrm{K}(\xi_1,\xi) & \mathrm{K}(\xi_1,\xi_1) & \mathrm{K}(\xi_1,\xi_2) & \mathrm{K}(\xi_1,\xi_3)\\ \mathrm{K}(\xi_2,\xi) & \mathrm{K}(\xi_2,\xi_1) & \mathrm{K}(\xi_2,\xi_2) & \mathrm{K}(\xi_2,\xi_3)\\ \mathrm{K}(\xi_3,\xi) & \mathrm{K}(\xi_3,\xi_1) & \mathrm{K}(\xi_3,\xi_2) & \mathrm{K}(\xi_3,\xi_3)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\xi+t & t+\xi_1 & t+\xi_2 & t+\xi_3\\ \xi+\xi_1 & 2\xi_1 & \xi_2+\xi_1 & \xi_3+\xi_1\\ \xi+\xi_2 & \xi_2+\xi_1 & 2\xi_2 & \xi_3+\xi_2\\ \xi+\xi_3 & \xi_3+\xi_1 & \xi_3+\xi_2 & 2\xi_3\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathrm{K}(t,\xi) & \mathrm{K}(t,\xi_1) & \mathrm{K}(t,\xi_2) & \mathrm{K}(t,\xi_3) & \mathrm{K}(t,\xi_4) \\ \mathrm{K}(\xi_1,\xi) & \mathrm{K}(\xi_1,\xi_1) & \mathrm{K}(\xi_1,\xi_2) & \mathrm{K}(\xi_1,\xi_3) & \mathrm{K}(\xi_1,\xi_4) \\ \mathrm{K}(\xi_2,\xi) & \mathrm{K}(\xi_2,\xi_1) & \mathrm{K}(\xi_2,\xi_2) & \mathrm{K}(\xi_2,\xi_3) & \mathrm{K}(\xi_2,\xi_4) \\ \mathrm{K}(\xi_3,\xi) & \mathrm{K}(\xi_3,\xi_1) & \mathrm{K}(\xi_3,\xi_2) & \mathrm{K}(\xi_3,\xi_3) & \mathrm{K}(\xi_3,\xi_4) \\ \mathrm{K}(\xi_4,\xi) & \mathrm{K}(\xi_4,\xi_1) & \mathrm{K}(\xi_4,\xi_2) & \mathrm{K}(\xi_4,\xi_3) & \mathrm{K}(\xi_4,\xi_4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t\,\xi & \xi_1\,t & \xi_2\,t & \xi_3\,t & \xi_4\,t \\ \xi_1\,\xi & \xi_1^2 & \xi_1\,\xi_2 & \xi_1\,\xi_3 & \xi_1\,\xi_4 \\ \xi_2\,\xi & \xi_1\,\xi_2 & \xi_2^2 & \xi_2\,\xi_3 & \xi_2\,\xi_4 \\ \xi_3\,\xi & \xi_1\,\xi_3 & \xi_2\,\xi_3 & \xi_3^2 & \xi_3\,\xi_4 \\ \xi_4\,\xi & \xi_1\,\xi_4 & \xi_2\,\xi_4 & \xi_3\,\xi_4 & \xi_4^2 \end{bmatrix}$$

(11.5.9) 式に上記の結果を代入し、積分すると 3 行 3 列以上の行列式の積分結果は零となり、

$$\begin{aligned} \Delta(t,\xi) =& \cdots + \frac{\alpha^4}{24}\int_0^1\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \begin{bmatrix} \xi+t & t+\xi_1 & t+\xi_2 & t+\xi_3 & t+\xi_4 \\ \xi+\xi_1 & 2\,\xi_1 & \xi_2+\xi_1 & \xi_3+\xi_1 & \xi_4+\xi_1 \\ \xi+\xi_2 & \xi_2+\xi_1 & 2\,\xi_2 & \xi_3+\xi_2 & \xi_4+\xi_2 \\ \xi+\xi_3 & \xi_3+\xi_1 & \xi_3+\xi_2 & 2\,\xi_3 & \xi_4+\xi_3 \\ \xi+\xi_4 & \xi_4+\xi_1 & \xi_4+\xi_2 & \xi_4+\xi_3 & 2\,\xi_4 \end{bmatrix} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 d\xi_4 \\ & - \frac{\alpha^3}{6}\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \begin{bmatrix} \xi+t & t+\xi_1 & t+\xi_2 & t+\xi_3 \\ \xi+\xi_1 & 2\,\xi_1 & \xi_2+\xi_1 & \xi_3+\xi_1 \\ \xi+\xi_2 & \xi_2+\xi_1 & 2\,\xi_2 & \xi_3+\xi_2 \\ \xi+\xi_3 & \xi_3+\xi_1 & \xi_3+\xi_2 & 2\,\xi_3 \end{bmatrix} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \\ & + \frac{\alpha^2}{2}\int_0^1\int_0^1 \begin{bmatrix} \xi+t & t+\xi_1 & t+\xi_2 \\ \xi+\xi_1 & 2\,\xi_1 & \xi_2+\xi_1 \\ \xi+\xi_2 & \xi_2+\xi_1 & 2\,\xi_2 \end{bmatrix} d\xi_1 d\xi_2 \\ & - \alpha\int_0^1 \begin{bmatrix} \xi+t & t+\xi_1 \\ \xi+\xi_1 & 2\,\xi_1 \end{bmatrix} d\xi_1 + \mathrm{K}(t,\xi) \\ =& \frac{\alpha\,((6\,t-3)\,\xi-3\,t+2)}{6} + \xi + t \end{aligned} \tag{11.5.112}$$

(11.5.111) 式の $\Delta(\alpha)$ は、(11.5.11) 式から各行列式を求めると、

$$\mathrm{K}(\xi_1,\xi_1) = 2\,\xi_1$$

$$\begin{bmatrix} \mathrm{K}(\xi_1,\xi_1) & \mathrm{K}(\xi_1,\xi_2) \\ \mathrm{K}(\xi_2,\xi_1) & \mathrm{K}(\xi_2,\xi_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\,\xi_1 & \xi_2+\xi_1 \\ \xi_2+\xi_1 & 2\,\xi_2 \end{bmatrix} = 4\,\xi_1\,\xi_2 - (\xi_2+\xi_1)^2$$

$$\begin{bmatrix} \mathrm{K}(\xi_1,\xi_1) & \mathrm{K}(\xi_1,\xi_2) & \mathrm{K}(\xi_1,\xi_3) \\ \mathrm{K}(\xi_2,\xi_1) & \mathrm{K}(\xi_2,\xi_2) & \mathrm{K}(\xi_2,\xi_3) \\ \mathrm{K}(\xi_3,\xi_1) & \mathrm{K}(\xi_3,\xi_2) & \mathrm{K}(\xi_3,\xi_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\,\xi_1 & \xi_2+\xi_1 & \xi_3+\xi_1 \\ \xi_2+\xi_1 & 2\,\xi_2 & \xi_3+\xi_2 \\ \xi_3+\xi_1 & \xi_3+\xi_2 & 2\,\xi_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathrm{K}(\xi_1,\xi_1) & \mathrm{K}(\xi_1,\xi_2) & \mathrm{K}(\xi_1,\xi_3) & \mathrm{K}(\xi_1,\xi_4) \\ \mathrm{K}(\xi_2,\xi_1) & \mathrm{K}(\xi_2,\xi_2) & \mathrm{K}(\xi_2,\xi_3) & \mathrm{K}(\xi_2,\xi_4) \\ \mathrm{K}(\xi_3,\xi_1) & \mathrm{K}(\xi_3,\xi_2) & \mathrm{K}(\xi_3,\xi_3) & \mathrm{K}(\xi_3,\xi_4) \\ \mathrm{K}(\xi_4,\xi_1) & \mathrm{K}(\xi_4,\xi_2) & \mathrm{K}(\xi_4,\xi_3) & \mathrm{K}(\xi_4,\xi_4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\,\xi_1 & \xi_2+\xi_1 & \xi_3+\xi_1 & \xi_4+\xi_1 \\ \xi_2+\xi_1 & 2\,\xi_2 & \xi_3+\xi_2 & \xi_4+\xi_2 \\ \xi_3+\xi_1 & \xi_3+\xi_2 & 2\,\xi_3 & \xi_4+\xi_3 \\ \xi_4+\xi_1 & \xi_4+\xi_2 & \xi_4+\xi_3 & 2\,\xi_4 \end{bmatrix}$$

(11.5.11) 式に上記の結果を代入し、積分すると 3 行 3 列以上の行列式の積分結果は零となり、

$$\begin{aligned} \Delta(\alpha) =& \cdots + \frac{\alpha^4}{24}\int_0^1\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \begin{bmatrix} 2\,\xi_1 & \xi_2+\xi_1 & \xi_3+\xi_1 & \xi_4+\xi_1 \\ \xi_2+\xi_1 & 2\,\xi_2 & \xi_3+\xi_2 & \xi_4+\xi_2 \\ \xi_3+\xi_1 & \xi_3+\xi_2 & 2\,\xi_3 & \xi_4+\xi_3 \\ \xi_4+\xi_1 & \xi_4+\xi_2 & \xi_4+\xi_3 & 2\,\xi_4 \end{bmatrix} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 d\xi_4 \\ & - \frac{\alpha^3}{6}\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \begin{bmatrix} 2\,\xi_1 & \xi_2+\xi_1 & \xi_3+\xi_1 \\ \xi_2+\xi_1 & 2\,\xi_2 & \xi_3+\xi_2 \\ \xi_3+\xi_1 & \xi_3+\xi_2 & 2\,\xi_3 \end{bmatrix} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \\ & + \frac{\alpha^2}{2}\int_0^1\int_0^1 \begin{bmatrix} 2\,\xi_1 & \xi_2+\xi_1 \\ \xi_2+\xi_1 & 2\,\xi_2 \end{bmatrix} d\xi_1 d\xi_2 - \alpha\int_0^1 2\,\xi_1 d\xi_1 + 1 \\ =& -\frac{\alpha^2}{12} - \alpha + 1 \end{aligned} \tag{11.5.113}$$

(11.5.111) 式から、解が存在するのは (11.5.113) 式から、

$$-\frac{\alpha^2}{12} - \alpha + 1 = 0$$

(11.5.111) 式から、上式の解：$\alpha = -4\sqrt{3}-6, \alpha = 4\sqrt{3}-6$ のとき、解：$\mathrm{x}(t)$ は次式となる。ここで C は任意定数である。

$$\mathrm{x}(t) = \frac{\alpha\,((6\,t-3)\,C-3\,t+2)}{6} + C + t$$

11.6 フレドホルム型積分方程式の数値解法

11.6.1 フレドホルム型第二種積分方程式例 1

「11.5.15 フレドホルム型第二種積分方程式」で示されている下記の積分方程式を数値解法で解く。

$$\mathrm{x}(t)-\frac{1}{4}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}t\,y\,\mathrm{x}(y)\,dy=\sin(t)-\frac{t}{4} \tag{11.6.1}$$

```
kill(all);
assume(t>0);
IE1:x(t)-1/4*integrate(t*y*x(y),y,0,
 %pi/2)=sin(t)-t/4;
F1:f(t)=rhs(IE1);
F2:F[i]=subst([t=T[i]],rhs(%));
K1:k(t,y)=t*y;
K2:K[i,j]=T[i]*Y[j]/4;
IEI1:X[i]-sum(K[i,j]*X[j]*W,j,1,N)=F[i];
T1:T[i]=(i-1/2)*%pi/2/N;
Y1:Y[j]=(j-1/2)*%pi/2/N;
W1:W=%pi/2/N;
subst([K2],IEI1);
subst([F2],%);
subst([W1,T1,Y1],%);
subst([N=10],%);
EQ0:ev(%,sum);
EQ1:subst([i=1],EQ0);
EQ2:subst([i=2],EQ0);
EQ3:subst([i=3],EQ0);
EQ4:subst([i=4],EQ0);
EQ5:subst([i=5],EQ0);
EQ6:subst([i=6],EQ0);
EQ7:subst([i=7],EQ0);
EQ8:subst([i=8],EQ0);
EQ9:subst([i=9],EQ0);
EQA:subst([i=10],EQ0);
solve([EQ1,EQ2,EQ3,EQ4,EQ5,EQ6,EQ7,EQ8,
 EQ9,EQA],[X[1],X[2],X[3],X[4],X[5],
 X[6],X[7],X[8],X[9],X[10]])[1];
XX:float(%);
T2:subst([N=10],rhs(T1));
LX1:[[subst([i=1],T2),rhs(XX[1])],
 [subst([i=2],T2),rhs(XX[2])],
 [subst([i=3],T2),rhs(XX[3])],
 [subst([i=4],T2),rhs(XX[4])],
 [subst([i=5],T2),rhs(XX[5])],
 [subst([i=6],T2),rhs(XX[6])],
 [subst([i=7],T2),rhs(XX[7])],
 [subst([i=8],T2),rhs(XX[8])],
 [subst([i=9],T2),rhs(XX[9])],
 [subst([i=10],T2),rhs(XX[10])]];
subst([x(y)=sin(y),x(t)=sin(t)],IE1);
ev(%,integrate);
%-rhs(%);
plot2d([[discrete,LX1],sin(t)],
 [t,0,%pi/2],[style, points,[lines,4,2]],
 [y,0,1.2],[legend,"Numerical solution",
 "sin(t)"]);
```

(11.6.1) 式の積分を N 分割した矩形積分で置き換えると、下記の級数となる。

$$\begin{aligned}
&X_i-\left(\sum_{j=1}^{N}K_{i,j}\,X_j\right)W=F_i \quad (i=1\to N)\\
&\text{ここで、}\quad K_{i,j}=\frac{T_i\,Y_j}{4}\\
&F_i=\sin(T_i)-\frac{T_i}{4}\\
&T_i=\frac{\pi\,\left(i-\frac{1}{2}\right)}{2\,N}\\
&Y_j=\frac{\pi\,\left(j-\frac{1}{2}\right)}{2\,N}\\
&W=\frac{\pi}{2\,N}
\end{aligned} \tag{11.6.2}$$

上式を整理すると、

$$\begin{aligned}
X_i-&\frac{\pi^3\,\left(i-\frac{1}{2}\right)}{32\,N^3}\sum_{j=1}^{N}\left(j-\frac{1}{2}\right)\,X_j\\
&=\sin\left(\frac{\pi\,\left(i-\frac{1}{2}\right)}{2\,N}\right)-\frac{\pi\,\left(i-\frac{1}{2}\right)}{8\,N}\quad (i=1\to N)
\end{aligned} \tag{11.6.3}$$

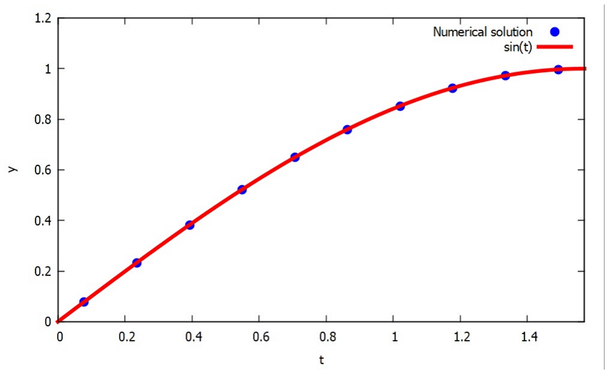
上式で $N=10$ として連立方程式を解き、$[T_i,X_i]$ を求めると、

$$[\frac{\pi}{40},0.078429250273473],[\frac{3\,\pi}{40},0.23335582749279],$$
$$[\frac{\pi}{8},0.38253420509323],[\frac{7\,\pi}{40},0.52228964653534],$$
$$[\frac{9\,\pi}{40},0.64917943924083],[\frac{11\,\pi}{40},0.76007766560194],$$
$$[\frac{13\,\pi}{40},0.85225217344725],[\frac{3\,\pi}{8},0.9234318506957],$$
$$[\frac{17\,\pi}{40},0.97186254767335],[\frac{19\,\pi}{40},0.99635027010006]$$

「11.5.15 フレドホルム型第二種積分方程式　例 6」で示されている解析解は、

$$\mathrm{x}\left(t\right)=\sin\left(t\right)$$

上記数値計算結果と解析結果を比較すると下図となる。



例題 11.6.2　フレドホルム型同次積分方程式　例 1

「11.5.18 フレドホルム型同次積分方程式　例 3」で示されている下記の積分方程式を数値解法で解く。

$$\mathrm{x}(t)-\alpha\int_0^1 (y+t)\,\mathrm{x}(y)\,dy=0 \tag{11.6.4}$$

```
kill(all);
assume(t>0);
IE1:x(t)-\alpha*integrate((t+y)*x(y),y,
 0,1)=0;
K1:k(t,y)=t+y;
K2:K[i,j]=\alpha*(T[i]+Y[j]);
IEI1:X[i]-sum(K[i,j]*X[j]*W,j,1,N)=0;
T1:T[i]=(i-1/2)/N;
Y1:Y[j]=(j-1/2)/N;
W1:W=1/N;
subst([K2],IEI1);
subst([W1,T1,Y1],%);
subst([N=7],%);
EQ0:ev(%,sum);
T2:subst([N=7],rhs(T1));
EQ1:expand(subst([i=1],EQ0));
EQ2:expand(subst([i=2],EQ0));
EQ3:expand(subst([i=3],EQ0));
EQ4:expand(subst([i=4],EQ0));
EQ5:expand(subst([i=5],EQ0));
EQ6:expand(subst([i=6],EQ0));
EQ7:expand(subst([i=7],EQ0));
solve([EQ1,EQ2,EQ3,EQ4,EQ5,EQ6,EQ7],
 [X[1],X[2],X[3],X[4],X[5],X[6],X[7]])[1];
```

(11.6.4) 式の積分を N 分割した矩形積分で置き換えると、下記の級数となる。

$$\begin{aligned} X_i-\left(\sum_{j=1}^{N}K_{i,j}\,X_j\right)W=0 \quad (i=1\to N)\\ \text{ここで、}\quad K_{i,j}=&\alpha\,(Y_j+T_i)\\ T_i=&\frac{i-\frac{1}{2}}{N}\\ Y_j=&\frac{j-\frac{1}{2}}{N}\\ W=&\frac{1}{N}\end{aligned} \tag{11.6.5}$$

上式を整理すると、

$$X_i-\frac{\alpha\sum_{j=1}^{N}X_j\left(\frac{j-\frac{1}{2}}{N}+\frac{i-\frac{1}{2}}{N}\right)}{N}=0 \quad (i=1\to N) \tag{11.6.6}$$

上式で $N=7$ として連立方程式を解き、X_i を求めると下記となり、解はない。

$$X_1=0,X_2=0,X_3=0,X_4=0,$$
$$X_5=0,X_6=0,X_7=0$$

```
C11:coeff(lhs(EQ1),X[1],1);
C12:coeff(lhs(EQ1),X[2],1);
C13:coeff(lhs(EQ1),X[3],1);
C14:coeff(lhs(EQ1),X[4],1);
C15:coeff(lhs(EQ1),X[5],1);
C16:coeff(lhs(EQ1),X[6],1);
C17:coeff(lhs(EQ1),X[7],1);
C21:coeff(lhs(EQ2),X[1],1);
C22:coeff(lhs(EQ2),X[2],1);
C23:coeff(lhs(EQ2),X[3],1);
C24:coeff(lhs(EQ2),X[4],1);
C25:coeff(lhs(EQ2),X[5],1);
C26:coeff(lhs(EQ2),X[6],1);
C27:coeff(lhs(EQ2),X[7],1);
C31:coeff(lhs(EQ3),X[1],1);
C32:coeff(lhs(EQ3),X[2],1);
C33:coeff(lhs(EQ3),X[3],1);
C34:coeff(lhs(EQ3),X[4],1);
C35:coeff(lhs(EQ3),X[5],1);
C36:coeff(lhs(EQ3),X[6],1);
C37:coeff(lhs(EQ3),X[7],1);
C41:coeff(lhs(EQ4),X[1],1);
C42:coeff(lhs(EQ4),X[2],1);
C43:coeff(lhs(EQ4),X[3],1);
C44:coeff(lhs(EQ4),X[4],1);
C45:coeff(lhs(EQ4),X[5],1);
C46:coeff(lhs(EQ4),X[6],1);
C47:coeff(lhs(EQ4),X[7],1);
C48:coeff(lhs(EQ4),X[8],1);
C49:coeff(lhs(EQ4),X[9],1);
C4A:coeff(lhs(EQ4),X[10],1);
C51:coeff(lhs(EQ5),X[1],1);
C52:coeff(lhs(EQ5),X[2],1);
C53:coeff(lhs(EQ5),X[3],1);
C54:coeff(lhs(EQ5),X[4],1);
C55:coeff(lhs(EQ5),X[5],1);
C56:coeff(lhs(EQ5),X[6],1);
C57:coeff(lhs(EQ5),X[7],1);
C61:coeff(lhs(EQ6),X[1],1);
C62:coeff(lhs(EQ6),X[2],1);
C63:coeff(lhs(EQ6),X[3],1);
C64:coeff(lhs(EQ6),X[4],1);
C65:coeff(lhs(EQ6),X[5],1);
C66:coeff(lhs(EQ6),X[6],1);
C67:coeff(lhs(EQ6),X[7],1);
```

```
C71:coeff(lhs(EQ7),X[1],1);
C72:coeff(lhs(EQ7),X[2],1);
C73:coeff(lhs(EQ7),X[3],1);
C74:coeff(lhs(EQ7),X[4],1);
C75:coeff(lhs(EQ7),X[5],1);
C76:coeff(lhs(EQ7),X[6],1);
C77:coeff(lhs(EQ7),X[7],1);
matrix([C11,C12,C13,C14,C15,C16,C17],
 [C21,C22,C23,C24,C25,C26,C27],
 [C31,C32,C33,C34,C35,C36,C37],
 [C41,C42,C43,C44,C45,C46,C47],
 [C51,C52,C53,C54,C55,C56,C57],
 [C61,C62,C63,C64,C65,C66,C67],
 [C71,C72,C73,C74,C75,C76,C77]);
determinant(%);
factor(%)=0;
AL1:solve(%,\alpha);
float(%);
AL11:AL1[1];
AL12:AL1[2];
```

(11.6.6) 式の連立方程式の係数行列式は、

$$\begin{bmatrix} 1-\frac{\alpha}{49} & -\frac{2\alpha}{49} & -\frac{3\alpha}{49} & -\frac{4\alpha}{49} & -\frac{5\alpha}{49} & -\frac{6\alpha}{49} & -\frac{\alpha}{7} \\ -\frac{2\alpha}{49} & 1-\frac{3\alpha}{49} & -\frac{4\alpha}{49} & -\frac{5\alpha}{49} & -\frac{6\alpha}{49} & -\frac{\alpha}{7} & -\frac{8\alpha}{49} \\ -\frac{3\alpha}{49} & -\frac{4\alpha}{49} & 1-\frac{5\alpha}{49} & -\frac{6\alpha}{49} & -\frac{\alpha}{7} & -\frac{8\alpha}{49} & -\frac{9\alpha}{49} \\ -\frac{4\alpha}{49} & -\frac{5\alpha}{49} & -\frac{6\alpha}{49} & 1-\frac{\alpha}{7} & -\frac{8\alpha}{49} & -\frac{9\alpha}{49} & -\frac{10\alpha}{49} \\ -\frac{5\alpha}{49} & -\frac{6\alpha}{49} & -\frac{\alpha}{7} & -\frac{8\alpha}{49} & 1-\frac{9\alpha}{49} & -\frac{10\alpha}{49} & -\frac{11\alpha}{49} \\ -\frac{6\alpha}{49} & -\frac{\alpha}{7} & -\frac{8\alpha}{49} & -\frac{9\alpha}{49} & -\frac{10\alpha}{49} & 1-\frac{11\alpha}{49} & -\frac{12\alpha}{49} \\ -\frac{\alpha}{7} & -\frac{8\alpha}{49} & -\frac{9\alpha}{49} & -\frac{10\alpha}{49} & -\frac{11\alpha}{49} & -\frac{12\alpha}{49} & 1-\frac{13\alpha}{49} \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{4\,\alpha^2+49\,\alpha-49}{49} = 0$$

上式から α を求めると下記となり、このとき解が存在する。

$$\alpha = -\frac{7\sqrt{65}+49}{8} = -13.17947552976123,$$

$$\alpha = \frac{7\sqrt{65}-49}{8} = 0.92947552976123$$

「11.5.18 フレドホルム型同次積分方程式」で示された α は下記で、ほぼ一致している。

$$\alpha = -4\sqrt{3}-6 = -12.92820323027551,$$

$$\alpha = 4\sqrt{3}-6 = 0.92820323027551$$

```
EQ11:subst([AL11],EQ1);
EQ21:subst([AL11],EQ2);
EQ31:subst([AL11],EQ3);
EQ41:subst([AL11],EQ4);
EQ51:subst([AL11],EQ5);
EQ61:subst([AL11],EQ6);
XA1:solve([EQ11,EQ21,EQ31,EQ41,EQ51,EQ61],
 [X[1],X[2],X[3],X[4],X[5],X[6]])[1];
XX:subst([X[7]=1],XA1);
XA21:XX[1];
X1:x(t)=(\alpha*((6*t-3)*C-3*t+2))/6+C+t;
X11:subst([AL11],X1);
subst([i=1,N=7],T1);
T11:t=rhs(%);
subst([T11],X11);
rhs(XA21)=rhs(%);
solve(%,C)[1];
subst([%],X11);
X2:rhs(%);
LX1:[[subst([i=1],T2),rhs(XX[1])],
 [subst([i=2],T2),rhs(XX[2])],
 [subst([i=3],T2),rhs(XX[3])],
 [subst([i=4],T2),rhs(XX[4])],
 [subst([i=5],T2),rhs(XX[5])],
 [subst([i=6],T2),rhs(XX[6])]];
plot2d([[discrete,LX1],X2],[t,0,1],
 [y,-2,2],[style, points,[lines,4,2]],
 [legend,"Numerical solution",
 "Analytic solution"]);
```

(11.6.6) 式の連立方程式に $\alpha = -\frac{7\sqrt{65}+49}{8}$ を代入し連立方程式を解くと、

$$\begin{aligned} X_1 &= -\frac{\left(3\sqrt{65}+13\right)\,X_7}{26}, X_2 = -\frac{\left(5\sqrt{65}+13\right)\,X_7}{52}, \\ X_3 &= -\frac{\sqrt{65}\,X_7}{13}, X_4 = -\frac{\left(3\sqrt{65}-13\right)\,X_7}{52}, \\ X_5 &= -\frac{\left(\sqrt{65}-13\right)\,X_7}{26}, \\ X_6 &= -\frac{\left(\sqrt{65}-39\right)\,X_7}{52} \end{aligned}$$

上式に $X_7=1$ を代入すると、

$$\begin{aligned} X_1 &= -\frac{3\sqrt{65}+13}{26}, X_2 = -\frac{5\sqrt{65}+13}{52}, \\ X_3 &= -\frac{\sqrt{65}}{13}, X_4 = -\frac{3\sqrt{65}-13}{52}, \\ X_5 &= -\frac{\sqrt{65}-13}{26}, X_6 = -\frac{\sqrt{65}-39}{52} \end{aligned} \tag{11.6.7}$$

「11.5.18 フレドホルム型同次積分方程式」の解は下

記で C は任意定数である。

$$\mathrm{x}\left(t\right)=\frac{\alpha\,\left(\left(6\,t-3\right)\,C-3\,t+2\right)}{6}+C+t \qquad (11.6.8)$$

上式に数値解法で得られた $\alpha=-\frac{7\,\sqrt{65}+49}{8}$ に対応する $\alpha=-4\,\sqrt{3}-6$ を代入すると、

$$\mathrm{x}\left(t\right)=\frac{\left(-4\,\sqrt{3}-6\right)\,\left(\left(6\,t-3\right)\,C-3\,t+2\right)}{6}+C+t \qquad (11.6.9)$$

上式と (11.6.7) 式の X_1 が同じとなるように $t=\frac{1}{14},X_1=-\frac{3\,\sqrt{65}+13}{26}$ を代入し、C を求めると、

$$C=-\frac{63\,\sqrt{65}-650\,\sqrt{3}-663}{104\,3^{\frac{5}{2}}+1950}$$

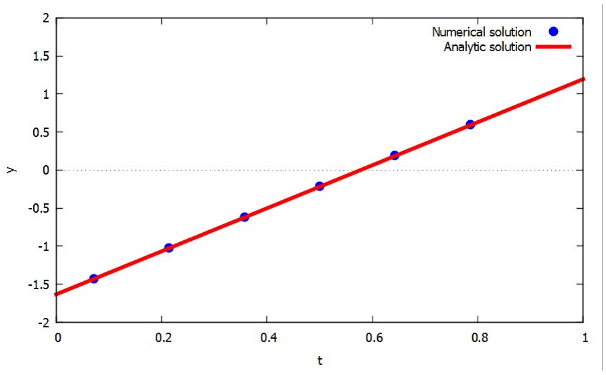
(11.6.9) 式に上式を代入すると、

$$\mathrm{x}\left(t\right)=\frac{\left(-4\,\sqrt{3}-6\right)\,\left(-\frac{\left(63\,\sqrt{65}-650\,\sqrt{3}-663\right)\,\left(6\,t-3\right)}{104\,3^{\frac{5}{2}}+1950}-3\,t+2\right)}{6}+t-\frac{63\,\sqrt{65}-650\,\sqrt{3}-663}{104\,3^{\frac{5}{2}}+1950} \qquad (11.6.10)$$

数値計算結果：$[T_i,X_i]$ は、

$$[\frac{1}{14},-\frac{3\,\sqrt{65}+13}{26}],[\frac{3}{14},-\frac{5\,\sqrt{65}+13}{52}],$$
$$[\frac{5}{14},-\frac{\sqrt{65}}{13}],[\frac{1}{2},-\frac{3\,\sqrt{65}-13}{52}],$$
$$[\frac{9}{14},-\frac{\sqrt{65}-13}{26}],[\frac{11}{14},-\frac{\sqrt{65}-39}{52}]$$

上記数値計算結果と解析結果：(11.6.10) 式を比較すると下図となる。



11.7 特異核を持つ積分方程式

積分方程式の核がその積分領域で無限大となるような場合を特異核を持つ積分方程式という。

11.7.1 アーベルの積分方程式

下記の積分方程式を解き、$\mathrm{x}(t)$ を求める。

$$\int_0^t \frac{\mathrm{x}(\xi)}{(t-\xi)^{\nu}} d\xi = \mathrm{f}(t) \qquad (11.7.1)$$

```
kill(all);
assume(t>0);
assume(\nu>0 and \nu<1);
IE1:integrate(x(\xi)/(t-\xi)^\nu,\xi,0,t)
 =f(t);
K1:k(t)=t^(-\nu);
IES1:K(s)*X(s)=F(s);
XS1:solve(IES1,X(s))[1];
KS1:K(s)=laplace(rhs(K1),t,s);
L1:L(rhs(K1))=rhs(KS1);
XS2:subst([KS1],XS1);
G1:\Gamma(1-\nu)*\Gamma(\nu)=%pi/
 sin(\nu*%pi);
G2:%/\Gamma(\nu);
XS21:subst([G2],XS2);
NU1:1-\nu=\mu;
NU11:solve(NU1,\nu)[1];
subst([NU11],L1);
NU2:subst([\mu=\nu],%);
G3:solve(NU2,\Gamma(\nu))[1];
subst([G3],XS21);
x(t)=sin(%pi*nu)/%pi*'diff('integrate(
 f(\xi)/((t-\xi)^(1-\nu)),\xi,0,t),t,1);
```

上式をラプラス変換すると、下記となる。

$$\begin{gathered}\mathrm{K}(s)\,\mathrm{X}(s) = \mathrm{F}(s) \\ \text{ここで、}\quad \mathcal{L}[\mathrm{f}(t)] = \mathrm{F}(s),\quad \mathcal{L}[\mathrm{x}(t)] = \mathrm{X}(s), \\ \mathcal{L}[\mathrm{k}(t)] = \mathrm{K}(s)\end{gathered} \qquad (11.7.2)$$

(11.7.1) 式から、$\mathrm{k}(t-\xi) \to \mathrm{k}(t)$ に置き換え、

$$\mathrm{k}(t) = \frac{1}{t^{\nu}}$$

上式をラプラス変換すると、

$$\mathrm{K}(s) = \mathcal{L}[\mathrm{k}(t)] = \mathcal{L}\left[\frac{1}{t^{\nu}}\right] = \Gamma(1-\nu)\, s^{\nu-1} \qquad (11.7.3)$$

(11.7.2) 式から、$\mathrm{X}(s)$ を求め、上式を代入すると、

$$\mathrm{X}(s) = \frac{\mathrm{F}(s)}{\mathrm{K}(s)} = \frac{s^{1-\nu}\,\mathrm{F}(s)}{\Gamma(1-\nu)} \qquad (11.7.4)$$

下記の関係式を

$$\Gamma(1-\nu)\,\Gamma(\nu) = \frac{\pi}{\sin(\pi\,\nu)}$$

(11.7.4) 式に代入すると、

$$\mathrm{X}(s) = \frac{\Gamma(\nu)\,\sin(\pi\,\nu)\, s^{1-\nu}\,\mathrm{F}(s)}{\pi} \qquad (11.7.5)$$

(11.7.3) 式から、

$$\mathcal{L}\left[t^{\nu-1}\right] = \frac{\Gamma(\nu)}{s^{\nu}}$$

(11.7.5) 式に上式を代入すると、

$$\mathrm{X}(s) = \frac{\sin(\pi\,\nu)\, s\,\mathrm{F}(s)\,\mathrm{L}\left(t^{\nu-1}\right)}{\pi}$$

上式をラプラス逆変換して、解：$\mathrm{x}(t)$ を求めると、

$$\mathrm{x}(t) = \frac{\sin(\pi\,\nu)}{\pi}\left(\frac{d}{d\,t}\int_0^t (t-\xi)^{\nu-1}\,\mathrm{f}(\xi)\,d\xi\right)$$

11.7.2 二次元薄翼理論（有限ヒルベルト変換）

翼理論で重要な下記の積分方程式を解き、$\mathrm{x}(t)$ を求める。

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{x}(\xi)}{\xi-t}d\xi=\mathrm{f}(t) \qquad (11.7.6)$$

ここでは下記の有限ヒルベルト変換を用いて解く [1]。

$$\mathrm{H}(t,\phi(\xi))=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\phi(\xi)}{\xi-t}d\xi \qquad (11.7.7)$$

$$\mathrm{H}\left(t,\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)$$

```
kill(all);
depends([\xi],[\tau]);
assume(t>-1 and t<1);
IE0:1/%pi*'integrate(x(\xi)/
 (\xi-t),\xi,-1,1)=f(t);
H1:H(t,\phi(\xi))=1/%pi*integrate(
 \phi(\xi)/(\xi-t),\xi,-1,1);
IR1:1/(\xi-t)*1/(sqrt(1-\xi^2));
IE1:I[1]=1/%pi*'integrate(IR1,\xi,-1,1);
XI1:\xi=(1-\tau^2)/(1+\tau^2);
diff(XI1,\tau,1);
DXI1:factor(%);
XI2:solve(XI1,\tau);
subst([\xi=-1],XI2);
subst([\xi=1],XI2);
subst([XI1],IR1)*rhs(DXI1);
IR2:factor(%);
I[1]=1/%pi*'integrate(IR2,\tau,minf,0);
IE12:I[1]=-1/%pi*'integrate(IR2/\tau
 *abs(\tau),\tau,0,inf);
A1:a=t+1;
B1:b=t-1;
AB1:A1*B1;
subst([t=1],AB1);
subst([t=-1],AB1);
subst([t=0],AB1);
subst([t=0.5],AB1);
subst([t=-0.5],AB1);
IE13:'integrate(1/(a*\tau^2+b),\tau)=1/2
 /sqrt(abs(a*b))*log(abs((b+\tau*
 sqrt(abs(a*b)))/((b-\tau*
 sqrt(abs(a*b))))))+C;
-IE13*2/%pi;
IE131:subst([A1,B1],%);
IE132:'limit(rhs(IE131),\tau,0);
ev(%,limit);
IE133:'limit(rhs(IE131),\tau,inf);
rhs(IE12)=IE133-IE132;
IE10:rhs(IE1)=0;
H10:H(t,1/sqrt(1-\xi^2))=0;
```

下記の有限ヒルベルト変換について検討する。

$$\mathrm{H}\left(t,\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)=I_1=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{(\xi-t)\,\sqrt{1-\xi^2}}d\xi \qquad (11.7.8)$$

ここで、上式に次式の変換を

$$\xi=\frac{1-\tau^2}{\tau^2+1}$$

行うと、

$$I_1=\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{0}\frac{\tau}{(t\,\tau^2+\tau^2+t-1)\,|\tau|}d\tau$$

積分の範囲を変更し、積分範囲から次式となる。

$$I_1=-\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{1}{t\,\tau^2+\tau^2+t-1}d\tau \qquad (11.7.9)$$

上式を次式で置き換えると、

$$a=t+1,\quad b=t-1 \qquad (11.7.10)$$

次式となり、

$$\int\frac{1}{a\,\tau^2+b}d\tau$$

$-1<t<1$ のときには、$a\,b=(t-1)\,(t+1)<0$ となるので、次式の公式 [1] が使用できる。

$$\int\frac{1}{a\,\tau^2+b}d\tau=C+\frac{\log\left(\frac{\left|\sqrt{|a|}\,\sqrt{|b|}\,\tau+b\right|}{\left|\sqrt{|a|}\,\sqrt{|b|}\,\tau-b\right|}\right)}{2\,\sqrt{|a|}\,\sqrt{|b|}} \qquad a\,b<0$$

上式から (11.7.9) 式は、

$$\begin{aligned}I_1=&-\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{1}{t\,\tau^2+\tau^2+t-1}d\tau\\ =&\frac{2}{\pi}\left(\lim_{\tau\to\infty}-C-\frac{\log\left(\frac{\left|\sqrt{1-t}\,\sqrt{t+1}\,\tau+t-1\right|}{\left|\sqrt{1-t}\,\sqrt{t+1}\,\tau-t+1\right|}\right)}{2\,\sqrt{1-t}\,\sqrt{t+1}}\right)\\ &-\frac{2}{\pi}\left(\lim_{\tau\to 0}-C-\frac{\log\left(\frac{\left|\sqrt{1-t}\,\sqrt{t+1}\,\tau+t-1\right|}{\left|\sqrt{1-t}\,\sqrt{t+1}\,\tau-t+1\right|}\right)}{2\,\sqrt{1-t}\,\sqrt{t+1}}\right)\\ =&0\end{aligned}$$

上式から、

$$\mathrm{H}\left(t,\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{(\xi-t)\,\sqrt{1-\xi^2}}d\xi=0 \qquad (11.7.11)$$

[1]近藤次郎：積分方程式とその応用 12) 7.4 翼理論の方程式、P.205

[1]森口 繁一、宇田川 久、一松 信：岩波数学公式 1 微分積分・平面曲線 28)、P.78

$\mathrm{H}\left(t, \sqrt{1-\xi^2}\right)$

```
IR2:1/(\xi-t)*(sqrt(1-\xi^2))/%pi;
IE2:I[2]='integrate(IR2,\xi,-1,1);
IR21:-(\xi+t)/(sqrt(1-\xi^2))/%pi;
IR22:-(t^2-1)/(\xi-t)/(sqrt(1-\xi^2))/%pi;
IR21+IR22-IR2;
factor(%);
I[2]='integrate(IR21,\xi,-1,1)
 +'integrate(IR22,\xi,-1,1);
IE21:I[2]='integrate(IR21,\xi,-1,1);
IE22:ev(%,integrate);
IE20:rhs(IE2)=rhs(%);
H20:H(t,sqrt(1-\xi^2))=rhs(IE20);
```

下記の有限ヒルベルト変換について検討する。

$$\mathrm{H}\left(t, \sqrt{1-\xi^2}\right) = I_2 = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi - t}d\xi \quad (11.7.12)$$

上式の被積分関数は次式のように置き換えられる。

$$\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\pi\,(\xi-t)} = \frac{-\xi-t}{\pi\sqrt{1-\xi^2}} + \frac{1-t^2}{\pi\,(\xi-t)\,\sqrt{1-\xi^2}}$$

上式の結果から、(11.7.12) 式は、

$$\begin{aligned} I_2 =& \frac{(1-t^2)}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{(\xi-t)\,\sqrt{1-\xi^2}}d\xi \\ &+ \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{-\xi-t}{\sqrt{1-\xi^2}}d\xi \end{aligned}$$

上式の右辺第 1 項は (11.7.11) 式から零となり、右辺第 2 項を積分すると、

$$I_2 = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{-\xi-t}{\sqrt{1-\xi^2}}d\xi = -t$$

以上をまとめると、

$$\mathrm{H}\left(t, \sqrt{1-\xi^2}\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi-t}d\xi = -t \quad (11.7.13)$$

$\mathrm{H}\left(t, \frac{\xi^n}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)$

```
IR3:\xi^n/(sqrt(1-\xi^2))/%pi;
IE3:B[n]='integrate(IR3,\xi,-1,1);
IE31:changevar (%, \xi-sin(\tau), \tau,
 \xi);
sqrt(1-sin(\tau))*sqrt(sin(\tau)+1);
%^2;
expand(%);
IE32:B[n]='integrate((sin(tau)^n),\tau,
 -%pi/2,%pi/2)/%pi;
subst([n=0],IE32);
ev(%,integrate);
subst([n=1],IE32);
ev(%,integrate);
subst([n=2],IE32);
ev(%,integrate);
subst([n=3],IE32);
ev(%,integrate);
subst([n=4],IE32);
ev(%,integrate);
subst([n=5],IE32);
ev(%,integrate);
subst([n=6],IE32);
ev(%,integrate);
subst([n=7],IE32);
ev(%,integrate);
subst([n=8],IE32);
ev(%,integrate);
IE33:B[n]=((n-1)!!)/(n!!);
```

次式の積分、

$$B_n = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\xi^n}{\sqrt{1-\xi^2}}d\xi \quad (11.7.14)$$

上式を $\xi = \sin(\tau)$ で置き換えると、

$$\begin{aligned} B_n =& \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(\tau)\,\sin(\tau)^n}{\sqrt{1-\sin(\tau)}\,\sqrt{\sin(\tau)+1}}d\tau \\ =& \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin(\tau)^n d\tau \end{aligned} \quad (11.7.15)$$

上式を n に値を入れて積分すると、

$$\begin{aligned} &B_0 = 1,\, B_1 = 0,\, B_2 = \frac{1}{2},\, B_3 = 0,\, B_4 = \frac{3}{8}, \\ &B_5 = 0,\, B_6 = \frac{5}{16},\, B_7 = 0,\, B_8 = \frac{35}{128} \end{aligned} \quad (11.7.16)$$

上式から、

$$\begin{aligned} B_n =& \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdots (n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdots n} = \frac{n-1!!}{n!!} \\ =& \frac{\mathrm{genfact}\left(n-1, \frac{n-1}{2}, 2\right)}{\mathrm{genfact}\left(n, \frac{n}{2}, 2\right)} && n：偶数 \\ B_n =& 0 && n：奇数 \end{aligned} \tag{11.7.17}$$

```
B10:subst([n=10],IE33);
B8:subst([n=8],IE33);
B6:subst([n=6],IE33);
B4:subst([n=4],IE33);
B2:subst([n=2],IE33);
IR4:\xi^n/(\xi-t)/sqrt(1-\xi^2);
IR41:sum(\xi^(i)*t^(n-1-i),i,0,n-1)
 /sqrt(1-\xi^2);
IR42:t^n/(\xi-t)/sqrt(1-\xi^2);
IR41+IR42;
subst([n=5],%);
ev(%,sum);
factor(%);
IR43:IR4=IR41+IR42;
IE4:I[4]=1/%pi*'integrate(IR4,\xi,-1,1);
1/%pi*'integrate(IR4,\xi,-1,1)=1/%pi
 *'integrate(IR41,\xi,-1,1)+1/%pi
 *'integrate(IR42,\xi,-1,1);
IE41:lhs(%)=first(rhs(%));
IE40:rhs(IE4)=sum(B[i]*t^(n-1-i),i,0,n-1);
H40:H(t,\xi^n/sqrt(1-\xi^2))=rhs(IE40);
```

下記の積分について、

$$I_4 = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\xi^n}{(\xi-t)\ \sqrt{1-\xi^2}}d\xi \tag{11.7.18}$$

上式の被積分関数を下記のように変形できる。

$$\begin{aligned} \frac{\xi^n}{(\xi-t)\ \sqrt{1-\xi^2}} =& \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}\sum_{i=0}^{n-1} t^{n-i-1}\,\xi^i \\ &+ \frac{t^n}{(\xi-t)\ \sqrt{1-\xi^2}} \end{aligned} \tag{11.7.19}$$

上式で $n=5$ とすると、下記の通り成り立っている。

$$\begin{aligned} &\frac{\sum_{i=0}^{4} t^{4-i}\,\xi^i}{\sqrt{1-\xi^2}} + \frac{t^5}{(\xi-t)\ \sqrt{1-\xi^2}} \\ &= \frac{t^5}{(\xi-t)\ \sqrt{1-\xi^2}} + \frac{\xi^4+t\,\xi^3+t^2\,\xi^2+t^3\,\xi+t^4}{\sqrt{1-\xi^2}} \\ &= \frac{\xi^5}{(\xi-t)\ \sqrt{1-\xi^2}} \end{aligned}$$

(11.7.18) 式に (11.7.19) 式の関係式を代入すると、

$$\begin{aligned} I_4 =& \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\xi^n}{(\xi-t)\ \sqrt{1-\xi^2}}d\xi \\ =& \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\sum_{i=0}^{n-1} t^{n-i-1}\,\xi^i}{\sqrt{1-\xi^2}}d\xi \\ &+ \frac{t^n}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{(\xi-t)\ \sqrt{1-\xi^2}}d\xi \end{aligned}$$

上式の右辺第２項は (11.7.11) 式から零となり、(11.7.14) 式を代入すると、

$$\begin{aligned} \mathrm{H}\left(t, \frac{\xi^n}{\sqrt{1-\xi^2}}\right) =& \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\xi^n}{(\xi-t)\ \sqrt{1-\xi^2}}d\xi \\ =& \sum_{i=0}^{n-1} B_i\,t^{n-i-1} \end{aligned} \tag{11.7.20}$$

$\mathrm{H}\left(t, \xi^n \sqrt{1-\xi^2}\right)$

```
IR5:\xi^n/(\xi-t)*sqrt(1-\xi^2);
IE5:I[5]=1/%pi*'integrate(IR5,\xi,-1,1);
IR51:\xi^n/(\xi-t)*(1)/sqrt(1-\xi^2);
IR52:\xi^n/(\xi-t)*(-\xi^2)/sqrt(1-\xi^2);
IR5=IR51+IR52;
I[5]=1/%pi*'integrate(IR51,\xi,-1,1)+1/
 %pi*'integrate(IR52,\xi,-1,1);
I[5]=rhs(IE40)-subst([n=n+2],rhs(IE40));
I[5]=(1-t^2)*rhs(IE40)-B[n+1]-B[n]*t;
IE50:rhs(IE5)=rhs(%);
H50:H(t,\xi^n*sqrt(1-\xi^2))=rhs(IE50);
```

下記の積分について、

$$I_5 = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{\xi^n \sqrt{1-\xi^2}}{\xi - t} d\xi \tag{11.7.21}$$

上式の被積分関数を下記のように変形できる。

$$\frac{\xi^n \sqrt{1-\xi^2}}{\xi - t} = \frac{\xi^n}{(\xi - t)\sqrt{1-\xi^2}} - \frac{\xi^{n+2}}{(\xi - t)\sqrt{1-\xi^2}}$$

(11.7.21) 式に上式の関係式と (11.7.20) 式を代入すると、

$$\begin{aligned} I_5 =& \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{\xi^n}{(\xi - t)\sqrt{1-\xi^2}} d\xi \\ & - \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{\xi^{n+2}}{(\xi - t)\sqrt{1-\xi^2}} d\xi \\ =& \left(\sum_{i=0}^{n-1} B_i\, t^{n-i-1}\right) - \sum_{i=0}^{n+1} B_i\, t^{n-i+1} \\ =& \left(1-t^2\right)\left(\sum_{i=0}^{n-1} B_i\, t^{n-i-1}\right) - B_n\, t - B_{n+1} \end{aligned}$$

上式から、

$$\begin{aligned} \mathrm{H}\left(t, \xi^n \sqrt{1-\xi^2}\right) =& \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{\xi^n \sqrt{1-\xi^2}}{\xi - t} d\xi \\ =& \left(1-t^2\right)\left(\sum_{i=0}^{n-1} B_i\, t^{n-i-1}\right) \\ & - B_n\, t - B_{n+1} \end{aligned} \tag{11.7.22}$$

$\mathrm{H}(t, \mathrm{x}(\xi)) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{x}(\xi)}{\xi - t} d\xi$

```
IR6:x(\xi)/(\xi-t);
IE6:I[6]=1/%pi*'integrate(IR6,\xi,-1,1);
X6:x(t)=-1/%pi*'integrate(1/(\xi-t)*
 sqrt(1-\xi^2)/sqrt(1-t^2)*
 \xi^n,\xi,-1,1)+C/sqrt(1-t^2);
X6*sqrt(1-t^2);
X61:expand(%);
lhs(%)=-H(t,\xi^n*sqrt(1-\xi^2))+C;
X62:subst([H50],%);
X63:subst([t=\xi],%);
X631:C+B[n+1];
X632:B[n]*\xi;
X633:rhs(X63)-X631-X632;
X64:lhs(X63)/sqrt(1-\xi^2)=
 X631/sqrt(1-\xi^2)+X632/sqrt(1-\xi^2)
 +X633/sqrt(1-\xi^2);
H(t,x(\xi))=H(t,X631/sqrt(1-\xi^2))
 +H(t,X632/sqrt(1-\xi^2))
 +H(t,X633/sqrt(1-\xi^2));
```

(11.7.6) 式の下記の積分について、

$$\mathrm{H}(t, \mathrm{x}(\xi)) = I_6 = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{x}(\xi)}{\xi - t} d\xi \tag{11.7.23}$$

$\mathrm{x}(t)$ を下記とするとき、上記積分結果を求める。

$$\mathrm{x}(t) = \frac{C}{\sqrt{1-t^2}} - \frac{1}{\pi\sqrt{1-t^2}}\int_{-1}^{1} \frac{\xi^n \sqrt{1-\xi^2}}{\xi - t} d\xi \tag{11.7.24}$$

上式を変形し、

$$\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{x}(t) = C - \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{\xi^n \sqrt{1-\xi^2}}{\xi - t} d\xi$$

(11.7.22) 式から、

$$\begin{aligned} \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{x}(t) =& C - \mathrm{H}\left(t, \xi^n \sqrt{1-\xi^2}\right) \\ =& C - \left(1-t^2\right)\left(\sum_{i=0}^{n-1} B_i\, t^{n-i-1}\right) \\ & + B_n\, t + B_{n+1} \end{aligned}$$

上式から $\mathrm{x}(\xi)$ を求めると、

$$\begin{aligned} \mathrm{x}(\xi) =& \frac{C + B_{n+1}}{\sqrt{1-\xi^2}} - \sqrt{1-\xi^2}\left(\sum_{i=0}^{n-1} B_i\, \xi^{n-i-1}\right) \\ & + \frac{B_n\, \xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \end{aligned}$$

上式から、$\mathrm{H}(t,\mathrm{x}(\xi))$ は、

$$\begin{aligned}\mathrm{H}(t,\mathrm{x}(\xi)) =&\mathrm{H}\left(t,\frac{C+B_{n+1}}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)\\&+\mathrm{H}\left(t,-\sqrt{1-\xi^2}\sum_{i=0}^{n-1}B_i\,\xi^{n-i-1}\right)\\&+\mathrm{H}\left(t,\frac{B_n\,\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)\end{aligned} \tag{11.7.25}$$

```
H61:H(t,X631/sqrt(1-\xi^2));
H62:H(t,X632/sqrt(1-\xi^2));
H63:H(t,X633/sqrt(1-\xi^2));
H61=(C+B[n+1])*H(t,X631/sqrt(1-\xi^2)/
 (C+B[n+1]));
H611:subst([H10],%);
subst([n=1],H40);
H62=B[n]*H(t,X632/sqrt(1-\xi^2)/B[n]);
subst([subst([n=1],H40)],%);
H621:ev(%,sum);
```

(11.7.25) 式の右辺第 1 項は (11.7.11) 式から、

$$\begin{aligned}\mathrm{H}\left(t,\frac{C+B_{n+1}}{\sqrt{1-\xi^2}}\right) =&\mathrm{H}\left(t,\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)(C+B_{n+1})\\=&0\end{aligned} \tag{11.7.26}$$

(11.7.25) 式の右辺第 3 項は (11.7.20) 式から、

$$\mathrm{H}\left(t,\frac{B_n\,\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)=B_n\,\mathrm{H}\left(t,\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)=B_0\,B_n \tag{11.7.27}$$

```
subst([n=8],H63);
%=ev(%,sum);
expand(%);
-B[0]*H(t,xi^7*sqrt(1-xi^2)
)-B[1]*H(t,xi^6*sqrt(1-xi^2)
)-B[2]*H(t,xi^5*sqrt(1-xi^2)
)-B[3]*H(t,xi^4*sqrt(1-xi^2)
)-B[4]*H(t,xi^3*sqrt(1-xi^2)
)-B[5]*H(t,xi^2*sqrt(1-xi^2)
)-B[6]*H(t,xi^1*sqrt(1-xi^2)
)-B[7]*H(t,xi^0*sqrt(1-xi^2)
);
subst([subst([n=7],H50)],%);
subst([subst([n=6],H50)],%);
subst([subst([n=5],H50)],%);
subst([subst([n=4],H50)],%);
subst([subst([n=3],H50)],%);
subst([subst([n=2],H50)],%);
subst([subst([n=1],H50)],%);
subst([H20],%);
ev(%,sum);
subst([B2,B4,B6,B8,B10],%);
subst([B[1]=0,B[3]=0,B[5]=0,B[7]=0,
 B[9]=0,B[0]=1],%);
H631:lhs(H63)=%;
subst([n=8],H621);
subst([B2,B4,B6,B8,B10],%);
subst([B[1]=0,B[3]=0,B[5]=0,B[7]=0,
 B[9]=0,B[0]=1],%);
H(t,x(\xi))=rhs(H631)+rhs(%);
H648:factor(%);
```

(11.7.25) 式の右辺第 2 項の $n=8$ の場合について、

$$\begin{aligned}\mathrm{H}\left(t,-\sqrt{1-\xi^2}\sum_{i=0}^{7}B_i\,\xi^{7-i}\right) =&\mathrm{H}\left(t,-\sqrt{1-\xi^2}\left(B_0\,\xi^7+B_1\,\xi^6+B_2\,\xi^5+B_3\,\xi^4+B_4\,\xi^3+B_5\,\xi^2+B_6\,\xi+B_7\right)\right)\\=&\mathrm{H}\Big(t,-B_0\,\xi^7\sqrt{1-\xi^2}-B_1\,\xi^6\sqrt{1-\xi^2}-B_2\,\xi^5\sqrt{1-\xi^2}-B_3\,\xi^4\sqrt{1-\xi^2}\\&-B_4\,\xi^3\sqrt{1-\xi^2}-B_5\,\xi^2\sqrt{1-\xi^2}-B_6\,\xi\sqrt{1-\xi^2}-B_7\sqrt{1-\xi^2}\Big)\\=&-B_0\,\mathrm{H}\left(t,\xi^7\sqrt{1-\xi^2}\right)-B_1\,\mathrm{H}\left(t,\xi^6\sqrt{1-\xi^2}\right)-B_2\,\mathrm{H}\left(t,\xi^5\sqrt{1-\xi^2}\right)\\&-B_3\,\mathrm{H}\left(t,\xi^4\sqrt{1-\xi^2}\right)-B_4\,\mathrm{H}\left(t,\xi^3\sqrt{1-\xi^2}\right)-B_5\,\mathrm{H}\left(t,\xi^2\sqrt{1-\xi^2}\right)\\&-B_6\,\mathrm{H}\left(t,\xi\sqrt{1-\xi^2}\right)-B_7\,\mathrm{H}\left(t,\sqrt{1-\xi^2}\right)\end{aligned}$$

上式に (11.7.13) 式、(11.7.20) 式を代入し、更に (11.7.16) 式を代入し、

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}\left(t,-\sqrt{1-\xi^2}\sum_{i=0}^{7}B_i\,\xi^{7-i}\right)=&-B_6\left(\left(1-t^2\right)\left(\sum_{i=0}^{0}\frac{B_i}{t^i}\right)-B_1\,t-B_2\right)\\
&-B_0\left(\left(1-t^2\right)\left(\sum_{i=0}^{6}B_i\,t^{6-i}\right)-B_7\,t-B_8\right)\\
&-B_1\left(\left(1-t^2\right)\left(\sum_{i=0}^{5}B_i\,t^{5-i}\right)-B_6\,t-B_7\right)\\
&-B_2\left(\left(1-t^2\right)\left(\sum_{i=0}^{4}B_i\,t^{4-i}\right)-B_5\,t-B_6\right)\\
&-B_3\left(\left(1-t^2\right)\left(\sum_{i=0}^{3}B_i\,t^{3-i}\right)-B_4\,t-B_5\right)\\
&-B_4\left(\left(1-t^2\right)\left(\sum_{i=0}^{2}B_i\,t^{2-i}\right)-B_3\,t-B_4\right)\\
&-B_5\left(\left(1-t^2\right)\left(\sum_{i=0}^{1}B_i\,t^{1-i}\right)-B_2\,t-B_3\right)\\
&+B_7\,t\\
=&-\left(1-t^2\right)\left(t^6+\frac{t^4}{2}+\frac{3\,t^2}{8}+\frac{5}{16}\right)-\frac{\left(1-t^2\right)\left(t^4+\frac{t^2}{2}+\frac{3}{8}\right)-\frac{5}{16}}{2}\\
&-\frac{3\left(\left(1-t^2\right)\left(t^2+\frac{1}{2}\right)-\frac{3}{8}\right)}{8}-\frac{5\left(\frac{1}{2}-t^2\right)}{16}+\frac{35}{128}
\end{aligned}\tag{11.7.28}$$

(11.7.27) 式の $n=8$ の場合について、

$$\mathrm{H}\left(t,\frac{B_8\,\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)=B_0\,B_8=\frac{35}{128}\tag{11.7.29}$$

(11.7.25) 式に (11.7.26) 式、(11.7.28) 式、(11.7.29) 式を代入すると、

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}\left(t,\mathrm{x}\left(\xi\right)\right)=&-\left(1-t^2\right)\left(t^6+\frac{t^4}{2}+\frac{3\,t^2}{8}+\frac{5}{16}\right)-\frac{\left(1-t^2\right)\left(t^4+\frac{t^2}{2}+\frac{3}{8}\right)-\frac{5}{16}}{2}\\
&-\frac{3\left(\left(1-t^2\right)\left(t^2+\frac{1}{2}\right)-\frac{3}{8}\right)}{8}-\frac{5\left(\frac{1}{2}-t^2\right)}{16}+\frac{35}{64}\\
=&t^8
\end{aligned}\tag{11.7.30}$$

```
subst([n=7],H63);
%=ev(%,sum);
expand(%);
-B[0]*H(t,xi^6*sqrt(1-xi^2)
)-B[1]*H(t,xi^5*sqrt(1-xi^2)
)-B[2]*H(t,xi^4*sqrt(1-xi^2)
)-B[3]*H(t,xi^3*sqrt(1-xi^2)
)-B[4]*H(t,xi^2*sqrt(1-xi^2)
)-B[5]*H(t,xi^1*sqrt(1-xi^2)
)-B[6]*H(t,xi^0*sqrt(1-xi^2)
);
subst([subst([n=6],H50)],%);
subst([subst([n=5],H50)],%);
subst([subst([n=4],H50)],%);
subst([subst([n=3],H50)],%);
subst([subst([n=2],H50)],%);
subst([subst([n=1],H50)],%);
subst([H20],%);
ev(%,sum);
subst([B2,B4,B6,B8,B10],%);
subst([B[1]=0,B[3]=0,B[5]=0,B[7]=0,
 B[9]=0,B[0]=1],%);
H631:lhs(H63)=%;
subst([n=7],H621);
subst([B2,B4,B6,B8,B10],%);
subst([B[1]=0,B[3]=0,B[5]=0,B[7]=0,
 B[9]=0,B[0]=1],%);
H(t,x(\xi))=rhs(H631)+rhs(%);
H647:factor(%);
```

(11.7.25) 式の $n=7$ の場合について、同様の結果が得られ、

$$\mathrm{H}\left(t,\mathrm{x}\left(\xi\right)\right)=t^{7} \tag{11.7.31}$$

```
X7:subst([n=0],X6);
subst([IE20*%pi],%);
H71:H(t,x(\xi))=C*H(t,1/sqrt(1-\xi^2))
 +H(t,\xi/sqrt(1-\xi^2));
subst([n=1],H40);
ev(%,sum);
subst([%],H71);
subst([H10],%);
subst([B[0]=1],%);
H60:H(t,x(\xi))=t^n;
IE60:rhs(IE6)=rhs(H60);
X6;
IE80:subst([t^n=f(t)],IE60);
X8:subst([\xi^n=f(\xi)],X6);
```

(11.7.25) 式の $n=0$ の場合について、(11.7.24) 式に $n=0$ を代入し、(11.7.13) 式から、

$$\begin{aligned}\mathrm{x}\left(t\right)=&\frac{C}{\sqrt{1-t^{2}}}-\frac{1}{\pi\sqrt{1-t^{2}}}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-\xi^{2}}}{\xi-t}d\xi\\=&\frac{C}{\sqrt{1-t^{2}}}+\frac{t}{\sqrt{1-t^{2}}}\end{aligned} \tag{11.7.32}$$

上式から $\mathrm{H}\left(t,\mathrm{x}\left(\xi\right)\right)$ は、

$$\mathrm{H}\left(t,\mathrm{x}\left(\xi\right)\right)=\mathrm{H}\left(t,\frac{1}{\sqrt{1-\xi^{2}}}\right)C+\mathrm{H}\left(t,\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^{2}}}\right) \tag{11.7.33}$$

ここで、

$$\mathrm{H}\left(t,\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^{2}}}\right)=\sum_{i=0}^{0}\frac{B_{i}}{t^{i}}=B_{0}=1$$

(11.7.11) 式から、

$$\mathrm{H}\left(t,\frac{1}{\sqrt{1-\xi^{2}}}\right)=0$$

上記から (11.7.33) 式は、

$$\mathrm{H}\left(t,\mathrm{x}\left(\xi\right)\right)=1=t^{0}$$

以上の結果から一般的に、

$$\mathrm{H}\left(t,\mathrm{x}\left(\xi\right)\right)=t^{n} \tag{11.7.34}$$

以上をまとめると、$\mathrm{x}\left(t\right)$ を (11.7.24) 式とすると、(11.7.23) 式は、

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{x}\left(\xi\right)}{\xi-t}d\xi=t^{n} \tag{11.7.35}$$

また、上式の解：$\mathrm{x}\left(t\right)$ は下記：(11.7.24) 式で得られることを示している。

$$\mathrm{x}\left(t\right)=\frac{C}{\sqrt{1-t^{2}}}-\frac{1}{\pi\sqrt{1-t^{2}}}\int_{-1}^{1}\frac{\xi^{n}\sqrt{1-\xi^{2}}}{\xi-t}d\xi \tag{11.7.36}$$

確認

以上の結果から次式の積分方程式の解は、

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{x}(\xi)}{\xi-t}d\xi=\mathrm{f}(t) \tag{11.7.37}$$

次となることが予想される。

$$\mathrm{x}(t)=\frac{C}{\sqrt{1-t^2}}-\frac{1}{\pi\sqrt{1-t^2}}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-\xi^2}\,\mathrm{f}(\xi)}{\xi-t}d\xi \tag{11.7.38}$$

```
F1:f(t)=sum(A[m]*t^m,m,0,8);
F2:subst([t=\xi],%);
X8;
X8*sqrt(1-t^2);
expand(%);
lhs(%)=C-H(t,sqrt(1-\xi^2)*f(\xi));
subst([F2],%);
lhs(%)=C-A[8]*H(t,xi^8*sqrt(1-xi^2))
 -A[7]*H(t,xi^7*sqrt(1-xi^2))
 -A[6]*H(t,xi^6*sqrt(1-xi^2))
 -A[5]*H(t,xi^5*sqrt(1-xi^2))
 -A[4]*H(t,xi^4*sqrt(1-xi^2))
 -A[3]*H(t,xi^3*sqrt(1-xi^2))
 -A[2]*H(t,xi^2*sqrt(1-xi^2))
 -A[1]*H(t,xi^1*sqrt(1-xi^2))
 -A[0]*H(t,xi^0*sqrt(1-xi^2));
subst([subst([n=8],H50)],%);
subst([subst([n=7],H50)],%);
subst([subst([n=6],H50)],%);
subst([subst([n=5],H50)],%);
subst([subst([n=4],H50)],%);
subst([subst([n=3],H50)],%);
subst([subst([n=2],H50)],%);
subst([subst([n=1],H50)],%);
subst([H20],%);
ev(%,sum);
subst([B2,B4,B6,B8,B10],%);
subst([B[1]=0,B[3]=0,B[5]=0,B[7]=0,
 B[9]=0,B[0]=1],%);
```

```
X81:expand(%);
CX0:coeff(rhs(X81),t,0);
CX1:coeff(rhs(X81),t,1);
CX2:coeff(rhs(X81),t,2);
CX3:coeff(rhs(X81),t,3);
CX4:coeff(rhs(X81),t,4);
CX5:coeff(rhs(X81),t,5);
CX6:coeff(rhs(X81),t,6);
CX7:coeff(rhs(X81),t,7);
CX8:coeff(rhs(X81),t,8);
CX9:coeff(rhs(X81),t,9);
H(t,x(\xi))=CX0*H(t,1/sqrt(1-\xi^2))
 +CX1*H(t,\xi^1/sqrt(1-\xi^2))
 +CX2*H(t,\xi^2/sqrt(1-\xi^2))
 +CX3*H(t,\xi^3/sqrt(1-\xi^2))
 +CX4*H(t,\xi^4/sqrt(1-\xi^2))
 +CX5*H(t,\xi^5/sqrt(1-\xi^2))
 +CX6*H(t,\xi^6/sqrt(1-\xi^2))
 +CX7*H(t,\xi^7/sqrt(1-\xi^2))
 +CX8*H(t,\xi^8/sqrt(1-\xi^2))
 +CX9*H(t,\xi^9/sqrt(1-\xi^2));
subst([subst([n=9],H40)],%);
subst([subst([n=8],H40)],%);
subst([subst([n=7],H40)],%);
subst([subst([n=6],H40)],%);
subst([subst([n=5],H40)],%);
subst([subst([n=4],H40)],%);
subst([subst([n=3],H40)],%);
subst([subst([n=2],H40)],%);
subst([subst([n=1],H40)],%);
subst([H10],%);
ev(%,sum);
subst([B2,B4,B6,B8,B10],%);
subst([B[1]=0,B[3]=0,B[5]=0,B[7]=0,
 B[9]=0,B[0]=1],%);
expand(%);
```

$\mathrm{f}(t)$ が次式のように級数展開できるとし、ここでは $n=8$ として解析する。

$$\mathrm{f}(t)=A_8\,t^8+A_7\,t^7+A_6\,t^6+A_5\,t^5+A_4\,t^4+A_3\,t^3+A_2\,t^2+A_1\,t+A_0 \tag{11.7.39}$$

(11.7.38) 式を変形し、上式を代入すると、

$$\begin{aligned}\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{x}(t)=&C-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-\xi^2}\,\mathrm{f}(\xi)}{\xi-t}d\xi=C-\mathrm{H}\left(t,\sqrt{1-\xi^2}\,\mathrm{f}(\xi)\right)\\=&C-\mathrm{H}\left(t,\sqrt{1-\xi^2}\,\left(A_8\,\xi^8+A_7\,\xi^7+A_6\,\xi^6+A_5\,\xi^5+A_4\,\xi^4+A_3\,\xi^3+A_2\,\xi^2+A_1\,\xi+A_0\right)\right)\end{aligned}$$

上式を展開し、有限ヒルベルト変換：$\mathrm{H}\left(t, \xi^n \sqrt{1-\xi^2}\right)$ で表し、(11.7.22) 式を代入すると、

$$\begin{aligned}
\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{x}(t) =& C - A_8\,\mathrm{H}\left(t, \xi^8 \sqrt{1-\xi^2}\right) - A_7\,\mathrm{H}\left(t, \xi^7 \sqrt{1-\xi^2}\right) - A_6\,\mathrm{H}\left(t, \xi^6 \sqrt{1-\xi^2}\right) \\
&- A_5\,\mathrm{H}\left(t, \xi^5 \sqrt{1-\xi^2}\right) - A_4\,\mathrm{H}\left(t, \xi^4 \sqrt{1-\xi^2}\right) - A_3\,\mathrm{H}\left(t, \xi^3 \sqrt{1-\xi^2}\right) \\
&- A_2\,\mathrm{H}\left(t, \xi^2 \sqrt{1-\xi^2}\right) - A_1\,\mathrm{H}\left(t, \xi \sqrt{1-\xi^2}\right) - A_0\,\mathrm{H}\left(t, \sqrt{1-\xi^2}\right) \\
=& C - A_1 \left(\left(1-t^2\right)\left(\sum_{i=0}^{0} \frac{B_i}{t^i}\right) - B_1\,t - B_2\right) - A_8 \left(\left(1-t^2\right)\left(\sum_{i=0}^{7} B_i\,t^{7-i}\right) - B_8\,t - B_9\right) \\
&- A_7 \left(\left(1-t^2\right)\left(\sum_{i=0}^{6} B_i\,t^{6-i}\right) - B_7\,t - B_8\right) - A_6 \left(\left(1-t^2\right)\left(\sum_{i=0}^{5} B_i\,t^{5-i}\right) - B_6\,t - B_7\right) \\
&- A_5 \left(\left(1-t^2\right)\left(\sum_{i=0}^{4} B_i\,t^{4-i}\right) - B_5\,t - B_6\right) - A_4 \left(\left(1-t^2\right)\left(\sum_{i=0}^{3} B_i\,t^{3-i}\right) - B_4\,t - B_5\right) \\
&- A_3 \left(\left(1-t^2\right)\left(\sum_{i=0}^{2} B_i\,t^{2-i}\right) - B_3\,t - B_4\right) - A_2 \left(\left(1-t^2\right)\left(\sum_{i=0}^{1} B_i\,t^{1-i}\right) - B_2\,t - B_3\right) + A_0\,t \\
=& \left(C - \frac{5\,A_7}{128} - \frac{A_5}{16} - \frac{A_3}{8} - \frac{A_1}{2}\right) + \left(-\frac{5\,A_8}{128} - \frac{A_6}{16} - \frac{A_4}{8} - \frac{A_2}{2} + A_0\right)\,t \\
&+ \left(-\frac{A_7}{16} - \frac{A_5}{8} - \frac{A_3}{2} + A_1\right)\,t^2 + \left(-\frac{A_8}{16} - \frac{A_6}{8} - \frac{A_4}{2} + A_2\right)\,t^3 + \left(-\frac{A_7}{8} - \frac{A_5}{2} + A_3\right)\,t^4 \\
&+ \left(-\frac{A_8}{8} - \frac{A_6}{2} + A_4\right)\,t^5 + \left(A_5 - \frac{A_7}{2}\right)\,t^6 + \left(A_6 - \frac{A_8}{2}\right)\,t^7 + \left(A_7\right)\,t^8 + \left(A_8\right)\,t^9
\end{aligned}$$

上式から $\mathrm{x}(\xi)$ を求め、$\mathrm{H}(t, \mathrm{x}(\xi))$ に代入し、(11.7.22) 式を代入すると、

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}(t, \mathrm{x}(\xi)) =& \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{x}(\xi)}{\xi - t} d\xi \\
=& \mathrm{H}\left(t, \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)\left(C - \frac{5\,A_7}{128} - \frac{A_5}{16} - \frac{A_3}{8} - \frac{A_1}{2}\right) + A_8\,\mathrm{H}\left(t, \frac{\xi^9}{\sqrt{1-\xi^2}}\right) + A_7\,\mathrm{H}\left(t, \frac{\xi^8}{\sqrt{1-\xi^2}}\right) \\
&+ \left(A_6 - \frac{A_8}{2}\right)\mathrm{H}\left(t, \frac{\xi^7}{\sqrt{1-\xi^2}}\right) + \left(A_5 - \frac{A_7}{2}\right)\mathrm{H}\left(t, \frac{\xi^6}{\sqrt{1-\xi^2}}\right) \\
&+ \left(-\frac{A_8}{8} - \frac{A_6}{2} + A_4\right)\mathrm{H}\left(t, \frac{\xi^5}{\sqrt{1-\xi^2}}\right) + \left(-\frac{A_7}{8} - \frac{A_5}{2} + A_3\right)\mathrm{H}\left(t, \frac{\xi^4}{\sqrt{1-\xi^2}}\right) \\
&+ \left(-\frac{A_8}{16} - \frac{A_6}{8} - \frac{A_4}{2} + A_2\right)\mathrm{H}\left(t, \frac{\xi^3}{\sqrt{1-\xi^2}}\right) + \left(-\frac{A_7}{16} - \frac{A_5}{8} - \frac{A_3}{2} + A_1\right)\mathrm{H}\left(t, \frac{\xi^2}{\sqrt{1-\xi^2}}\right) \\
&+ \left(-\frac{5\,A_8}{128} - \frac{A_6}{16} - \frac{A_4}{8} - \frac{A_2}{2} + A_0\right)\mathrm{H}\left(t, \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right) \\
=& \left(-\frac{5\,A_8}{128} - \frac{A_6}{16} - \frac{A_4}{8} - \frac{A_2}{2} + A_0\right)\left(\sum_{i=0}^{0} \frac{B_i}{t^i}\right) + A_8\left(\sum_{i=0}^{8} B_i\,t^{8-i}\right) + A_7\left(\sum_{i=0}^{7} B_i\,t^{7-i}\right) \\
&+ \left(A_6 - \frac{A_8}{2}\right)\left(\sum_{i=0}^{6} B_i\,t^{6-i}\right) + \left(A_5 - \frac{A_7}{2}\right)\left(\sum_{i=0}^{5} B_i\,t^{5-i}\right) + \left(-\frac{A_8}{8} - \frac{A_6}{2} + A_4\right)\left(\sum_{i=0}^{4} B_i\,t^{4-i}\right) \\
&+ \left(-\frac{A_7}{8} - \frac{A_5}{2} + A_3\right)\left(\sum_{i=0}^{3} B_i\,t^{3-i}\right) + \left(-\frac{A_8}{16} - \frac{A_6}{8} - \frac{A_4}{2} + A_2\right)\left(\sum_{i=0}^{2} B_i\,t^{2-i}\right) \\
&+ \left(-\frac{A_7}{16} - \frac{A_5}{8} - \frac{A_3}{2} + A_1\right)\sum_{i=0}^{1} B_i\,t^{1-i} \\
=& A_8\,t^8 + A_7\,t^7 + A_6\,t^6 + A_5\,t^5 + A_4\,t^4 + A_3\,t^3 + A_2\,t^2 + A_1\,t + A_0 = \mathrm{f}(t)
\end{aligned}$$

(11.7.37) 式が成り立ち、この解が (11.7.38) 式となることが明らかになった。

```
F1:f(t)=sum(A[m]*t^m,m,0,7);
F2:subst([t=\xi],%);
X8;
X8*sqrt(1-t^2);
expand(%);
lhs(%)=C-H(t,sqrt(1-\xi^2)*f(\xi));
subst([F2],%);
lhs(%)=C-A[7]*H(t,xi^7*sqrt(1-xi^2))
 -A[6]*H(t,xi^6*sqrt(1-xi^2))
 -A[5]*H(t,xi^5*sqrt(1-xi^2))
 -A[4]*H(t,xi^4*sqrt(1-xi^2))
 -A[3]*H(t,xi^3*sqrt(1-xi^2))
 -A[2]*H(t,xi^2*sqrt(1-xi^2))
 -A[1]*H(t,xi^1*sqrt(1-xi^2))
 -A[0]*H(t,xi^0*sqrt(1-xi^2));
subst([subst([n=8],H50)],%);
subst([subst([n=7],H50)],%);
subst([subst([n=6],H50)],%);
subst([subst([n=5],H50)],%);
subst([subst([n=4],H50)],%);
subst([subst([n=3],H50)],%);
subst([subst([n=2],H50)],%);
subst([subst([n=1],H50)],%);
subst([H20],%);
ev(%,sum);
subst([B2,B4,B6,B8,B10],%);
subst([B[1]=0,B[3]=0,B[5]=0,B[7]=0,
 B[9]=0,B[0]=1],%);
X81:expand(%);
CX0:coeff(rhs(X81),t,0);
CX1:coeff(rhs(X81),t,1);
CX2:coeff(rhs(X81),t,2);
CX3:coeff(rhs(X81),t,3);
CX4:coeff(rhs(X81),t,4);
CX5:coeff(rhs(X81),t,5);
CX6:coeff(rhs(X81),t,6);
CX7:coeff(rhs(X81),t,7);
CX8:coeff(rhs(X81),t,8);
CX9:coeff(rhs(X81),t,9);
H(t,x(\xi))=CX0*H(t,1/sqrt(1-\xi^2))
 +CX1*H(t,\xi^1/sqrt(1-\xi^2))
 +CX2*H(t,\xi^2/sqrt(1-\xi^2))
 +CX3*H(t,\xi^3/sqrt(1-\xi^2))
 +CX4*H(t,\xi^4/sqrt(1-\xi^2))
 +CX5*H(t,\xi^5/sqrt(1-\xi^2))
 +CX6*H(t,xi^6/sqrt(1-\xi^2))
 +CX7*H(t,\xi^7/sqrt(1-\xi^2))
 +CX8*H(t,\xi^8/sqrt(1-\xi^2));
```

```
subst([subst([n=9],H40)],%);
subst([subst([n=8],H40)],%);
subst([subst([n=7],H40)],%);
subst([subst([n=6],H40)],%);
subst([subst([n=5],H40)],%);
subst([subst([n=4],H40)],%);
subst([subst([n=3],H40)],%);
subst([subst([n=2],H40)],%);
subst([subst([n=1],H40)],%);
subst([H10],%);
ev(%,sum);
subst([B2,B4,B6,B8,B10],%);
subst([B[1]=0,B[3]=0,B[5]=0,B[7]=0,
 B[9]=0,B[0]=1],%);
expand(%);
```

$\mathrm{f}(t)$ が $n=7$ として級数展開できるとした場合も、上記と同じ結論が得られた。

解の変形

```
XI1:sqrt(1-\xi^2)/sqrt(1-t^2);
XI11:lhs(XI1)=sqrt(1-\xi)*sqrt(1+\xi)
 /sqrt(1-t)/sqrt(1+t);
NXI11:num(rhs(XI11));
DXI11:denom(rhs(XI11));
NXI21:NXI11*sqrt(1+t)*sqrt(1+\xi);
DXI22:DXI11*sqrt(1+t)*sqrt(1+\xi);
NXI31:NXI21/(1+\xi);
DXI32:DXI22/(t+1);
XI41:NXI31/DXI32;
XI42:(1+\xi)/(t+1);
XI43:(1+(\xi-t)/(1+t));
factor(XI42-XI43);
XI5:XI1=XI41*XI43;
factor(%);
sqrt(1-\xi^2)=rhs(XI5)*sqrt(1-t^2);
subst([%],X8);
```

```
x(t)=C/sqrt(1-t^2)-(sqrt(t+1)*integrate(
 (sqrt(1-xi)*((xi-t)/(t+1))*f(xi))/
 (sqrt(xi+1)*(xi-t)),xi,-1,1))/(%pi*
 sqrt(1-t))-(sqrt(t+1)*integrate((
 sqrt(1-xi)*(+1)*f(xi))/(sqrt(xi+1)
 *(xi-t)),xi,-1,1))/(%pi*sqrt(1-t));
X9:lhs(%)=rhs(%)-last(rhs(%));
XI6:lhs(XI5)=(sqrt(1-t)*sqrt(1+\xi)*(1-
 (\xi-t)/(1-t)))/(sqrt(1+t)*sqrt(1-\xi));
factor(%);
sqrt(1-\xi^2)=rhs(XI6)*sqrt(1-t^2);
subst([%],X8);
x(t)=C/sqrt(1-t^2)-(sqrt(1-t)*integrate((
 sqrt(xi+1)*(1)*f(xi))/(sqrt(1-xi)*(xi-t)
 ),xi,-1,1))/(%pi*sqrt(t+1))-(sqrt(1-t)*
 integrate((sqrt(xi+1)*(-(xi-t)/(1-t))*
 f(xi))/(sqrt(1-xi)*(xi-t)),xi,-1,1))/
 (%pi*sqrt(t+1));
X91:lhs(%)=first(rhs(%))+last(rhs(%));
```

積分方程式の解は上記から下記で得られる。

$$\mathrm{x}(t) = \frac{C}{\sqrt{1-t^2}} - \frac{1}{\pi\sqrt{1-t^2}} \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-\xi^2}\,\mathrm{f}(\xi)}{\xi - t} d\xi \tag{11.7.40}$$

ここで次式の置き換えを行う。

$$\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{\sqrt{1-\xi}\sqrt{\xi+1}}{\sqrt{1-t}\sqrt{t+1}} = \frac{\sqrt{t+1}\sqrt{1-\xi}\,(\xi+1)}{\sqrt{1-t}\,(t+1)\,\sqrt{\xi+1}} = \frac{\sqrt{t+1}\sqrt{1-\xi}\left(\frac{\xi-t}{t+1}+1\right)}{\sqrt{1-t}\sqrt{\xi+1}}$$

(11.7.40) 式に上式を代入すると、

$$\begin{aligned}
\mathrm{x}(t) =& \frac{C}{\sqrt{1-t^2}} - \frac{\sqrt{t+1}}{\pi\sqrt{1-t}} \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-\xi}\left(\frac{\xi-t}{t+1}+1\right)\mathrm{f}(\xi)}{\sqrt{\xi+1}\,(\xi-t)} d\xi \\
=& \frac{C}{\sqrt{1-t^2}} - \frac{\sqrt{t+1}}{\pi\sqrt{1-t}} \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-\xi}\,\mathrm{f}(\xi)}{\sqrt{\xi+1}\,(\xi-t)} d\xi - \frac{1}{\pi\sqrt{1-t}\sqrt{t+1}} \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-\xi}\,\mathrm{f}(\xi)}{\sqrt{\xi+1}} d\xi
\end{aligned}$$

上式の右辺第 3 項の積分は定数となるため、右辺第 1 項と統合でき、

$$\mathrm{x}(t) = \frac{C}{\sqrt{1-t^2}} - \frac{\sqrt{t+1}}{\pi\sqrt{1-t}} \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-\xi}\,\mathrm{f}(\xi)}{\sqrt{\xi+1}\,(\xi-t)} d\xi \tag{11.7.41}$$

また、ここで次式の置き換えを行う。

$$\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{\sqrt{1-t}\sqrt{\xi+1}\left(1-\frac{\xi-t}{1-t}\right)}{\sqrt{t+1}\sqrt{1-\xi}}$$

(11.7.40) 式に上式を代入すると、

$$\begin{aligned}
\mathrm{x}(t) =& \frac{C}{\sqrt{1-t^2}} - \frac{\sqrt{1-t}}{\pi\sqrt{t+1}} \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{\xi+1}\left(1-\frac{\xi-t}{1-t}\right)\mathrm{f}(\xi)}{\sqrt{1-\xi}\,(\xi-t)} d\xi \\
=& \frac{C}{\sqrt{1-t^2}} - \frac{1}{\pi\sqrt{1-t}\sqrt{t+1}} \int_{-1}^{1} \frac{(t-\xi)\sqrt{\xi+1}\,\mathrm{f}(\xi)}{\sqrt{1-\xi}\,(\xi-t)} d\xi - \frac{\sqrt{1-t}}{\pi\sqrt{t+1}} \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{\xi+1}\,\mathrm{f}(\xi)}{\sqrt{1-\xi}\,(\xi-t)} d\xi
\end{aligned}$$

上式の右辺第 2 項の積分は定数となるため、右辺第 1 項と統合でき、

$$\mathrm{x}(t) = \frac{C}{\sqrt{1-t^2}} - \frac{\sqrt{1-t}}{\pi\sqrt{t+1}} \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{\xi+1}\,\mathrm{f}(\xi)}{\sqrt{1-\xi}\,(\xi-t)} d\xi \tag{11.7.42}$$

11.7.3　二次元薄翼理論（フーリエ級数）

翼理論で重要な下記の積分方程式を解き、$\mathrm{x}\left(t\right)$ を求める。

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{x}\left(\xi\right)}{\xi-t}d\xi=\mathrm{f}\left(t\right) \tag{11.7.43}$$

ここではフーリエ級数と積分公式を用いて解く。

```
kill(all);
IE1:1/%pi*'integrate(x(\xi)/(\xi-t),\xi,
 -1,1)=f(t);
T1:\xi=-cos(\eta);
T2:t=-cos(\tau);
T11:solve(T1,\eta)[1];
T21:solve(T2,\tau)[1];
changevar(lhs(IE1),lhs(T1)-rhs(T1),\eta,
 \xi);
%=rhs(IE1);
IE2:subst([T2],%);
X1:sin(\eta)*x(-cos(\eta))=sum(A[n]*
 cos(n*\eta),n,0,inf);
sin(\eta)*x(-cos(\eta))=A[0]+sum(A[n]*
 cos(n*\eta),n,1,inf);
X2:%-last(rhs(%));
subst([X1],IE2);
-sum(A[n]*'integrate(cos(\eta*n)/
 (cos(\eta)-cos(\tau)),\eta,0,%pi),
 n,0,inf)/%pi=f(-cos(\tau));
'integrate(cos(\eta*n)/(cos(\eta)
 -cos(\tau)),\eta,0,%pi)=
 %pi*sin(n*\tau)/sin(\tau);
-sum(A[n]*%pi*sin(n*tau)/sin(\tau)/%pi,n,
 0,inf)=f(-cos(\tau));
%*sin(\tau);
%*sin(\tau)/(cos(\tau)-cos(\eta));
'integrate(lhs(%),\tau,0,%pi)=
 'integrate(rhs(%),\tau,0,%pi);
-sum(A[n]*'integrate((sin(tau)
 *sin(n*tau))/(cos(tau)-cos(eta)),
 tau,0,%pi),n,1,inf)=rhs(%);
'integrate((sin(\tau)*sin(n*\tau))/
 (cos(\tau)-cos(\eta)),\tau,0,%pi)
 =-%pi*cos(n*\eta);
-sum(A[n]*(-%pi*cos(n*\eta)),n,1,inf)=
 'integrate((sin(tau)^2*f(-cos(tau)))
 /(cos(tau)-cos(eta)),tau,0,%pi);
```

```
IE3:%pi*lhs(X2)=rhs(%);
changevar(rhs(IE3),lhs(T2)-rhs(T2),t,
 \tau);
expand(lhs(IE3))=%;
%-last(lhs(%));
%/%pi/sin(\eta);
expand(%);
subst([T11],%);
subst([t=a,\xi=t,a=\xi],%);
```

(11.7.43) 式を次式を用いて変数変換する。

$$\xi=-\cos\left(\eta\right),\quad t=-\cos\left(\tau\right) \tag{11.7.44}$$

変数変換した結果は、

$$-\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{\sin\left(\eta\right)\,\mathrm{x}\left(-\cos\left(\eta\right)\right)}{\cos\left(\eta\right)-\cos\left(\tau\right)}d\eta=\mathrm{f}\left(-\cos\left(\tau\right)\right) \tag{11.7.45}$$

左辺の被積分関数の分子部分を次式のようにフーリエ級数で表す。

$$\begin{aligned}\sin\left(\eta\right)\,\mathrm{x}\left(-\cos\left(\eta\right)\right)&=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\cos\left(\eta\,n\right)\\&=\left(\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\left(\eta\,n\right)\right)+A_0\end{aligned} \tag{11.7.46}$$

(11.7.45) 式に上式を代入し、

$$-\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{\sum_{n=0}^{\infty}A_n\cos\left(\eta\,n\right)}{\cos\left(\eta\right)-\cos\left(\tau\right)}d\eta=\mathrm{f}\left(-\cos\left(\tau\right)\right)$$

積分と和の順序を変え、

$$-\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}A_n\int_{0}^{\pi}\frac{\cos\left(\eta\,n\right)}{\cos\left(\eta\right)-\cos\left(\tau\right)}d\eta=\mathrm{f}\left(-\cos\left(\tau\right)\right) \tag{11.7.47}$$

次式の積分公式 [1]：

$$\int_{0}^{\pi}\frac{\cos\left(\eta\,n\right)}{\cos\left(\eta\right)-\cos\left(\tau\right)}d\eta=\frac{\pi\sin\left(n\,\tau\right)}{\sin\left(\tau\right)}\quad n=0\cdot1\cdot2\cdots \tag{11.7.48}$$

(11.7.47) 式に上式を代入し、両辺に $\sin\left(\tau\right)$ を掛けると、

$$-\sum_{n=0}^{\infty}A_n\sin\left(n\,\tau\right)=\sin\left(\tau\right)\,\mathrm{f}\left(-\cos\left(\tau\right)\right)$$

更に両辺に $\frac{\sin(\tau)}{\cos(\tau)-\cos(\eta)}$ を掛けると、

$$-\frac{\sin\left(\tau\right)\sum_{n=0}^{\infty}A_n\sin\left(n\,\tau\right)}{\cos\left(\tau\right)-\cos\left(\eta\right)}=\frac{\sin\left(\tau\right)^2\mathrm{f}\left(-\cos\left(\tau\right)\right)}{\cos\left(\tau\right)-\cos\left(\eta\right)}$$

上式を τ で $0\to\pi$ の積分を行うと、

$$\begin{aligned}&-\int_{0}^{\pi}\frac{\sin\left(\tau\right)\sum_{n=0}^{\infty}A_n\sin\left(n\,\tau\right)}{\cos\left(\tau\right)-\cos\left(\eta\right)}d\tau\\&\qquad=\int_{0}^{\pi}\frac{\sin\left(\tau\right)^2\mathrm{f}\left(-\cos\left(\tau\right)\right)}{\cos\left(\tau\right)-\cos\left(\eta\right)}d\tau\end{aligned}$$

[1]森口　繁一、宇田川　久、一松　信：岩波数学公式 1　微分積分・平面曲線 28)、P.248

積分と和の順序を変え、

$$-\sum_{n=1}^{\infty}A_n\int_0^{\pi}\frac{\sin(\tau)\,\sin(n\,\tau)}{\cos(\tau)-\cos(\eta)}d\tau = \int_0^{\pi}\frac{\sin(\tau)^2\,\mathrm{f}(-\cos(\tau))}{\cos(\tau)-\cos(\eta)}d\tau \tag{11.7.49}$$

次式の積分公式 (後に示す)：

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin(\tau)\,\sin(n\,\tau)}{\cos(\tau)-\cos(\eta)}d\tau = -\pi\cos(\eta\,n)\quad n=1\cdot 2\cdot 3\cdots \tag{11.7.50}$$

(11.7.49) 式に上式を代入し、

$$\pi\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos(n\,\eta) = \int_0^{\pi}\frac{\sin(\tau)^2\,\mathrm{f}(-\cos(\tau))}{\cos(\tau)-\cos(\eta)}d\tau$$

上式で $n=1\cdot 2\cdot 3\cdots$ に対応して、上式に (11.7.46) 式を代入し、

$$\pi\,(\sin(\eta)\,\mathrm{x}(-\cos(\eta))-A_0) = \int_0^{\pi}\frac{\sin(\tau)^2\,\mathrm{f}(-\cos(\tau))}{\cos(\tau)-\cos(\eta)}d\tau$$

上式に (11.7.44) 式の $t=-\cos(\tau)$ で逆変換すると、

$$\pi\sin(\eta)\,\mathrm{x}(-\cos(\eta))-\pi\,A_0 = -\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-t}\,\sqrt{t+1}\,\mathrm{f}(t)}{t+\cos(\eta)}dt$$

上式の左辺第 2 項を右辺に移項すると、

$$\pi\sin(\eta)\,\mathrm{x}(-\cos(\eta)) = \pi\,A_0-\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-t}\,\sqrt{t+1}\,\mathrm{f}(t)}{t+\cos(\eta)}dt$$

上式を $\sin(\eta)$ で割ると、

$$\mathrm{x}(-\cos(\eta)) = \frac{A_0}{\sin(\eta)}-\frac{\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-t}\,\sqrt{t+1}\,\mathrm{f}(t)}{t+\cos(\eta)}dt}{\pi\sin(\eta)}$$

上式に (11.7.44) 式の $\xi=-\cos(\eta)$ で逆変換すると、

$$\mathrm{x}(\xi) = \frac{A_0}{\sqrt{1-\xi^2}}-\frac{1}{\pi\sqrt{1-\xi^2}}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-t}\,\sqrt{t+1}\,\mathrm{f}(t)}{t-\xi}dt$$

上式に $\xi\to t,\ t\to\xi$ に置き換えると、下記となり、前節の (11.7.40) 式と一致する。

$$\mathrm{x}(t) = \frac{A_0}{\sqrt{1-t^2}}-\frac{1}{\pi\sqrt{1-t^2}}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-\xi}\,\sqrt{\xi+1}\,\mathrm{f}(\xi)}{\xi-t}d\xi$$

```
kill(all);
assume(\tau>0);
assume(\eta>0);
IC1:'integrate(cos(\eta*n)/(cos(\eta)
 -cos(\tau)),\eta,0,%pi)=%pi*
 sin(n*\tau)/sin(\tau);
IC2:%pi*sin(n*\tau)/sin(\tau);
DIS1:(sin(\tau)*sin(n*\tau))/(cos(\tau)
 -cos(\eta));
IS2:'integrate(DIS1,\tau,0,%pi);
DIS2:denom(DIS1);
DIS3:num(DIS1);
trigrat(DIS3);
%/DIS2;
DIS4:expand(%);
DIS41:factor(first(DIS4));
DIS42:factor(last(DIS4));
'integrate(DIS41,\tau,0,%pi);
IS41:subst([n=n-1],IC2)/2;
'integrate(DIS42,\tau,0,%pi);
IS42:-subst([n=n+1],IC2)/2;
IS41+IS42;
trigrat(%);
IS2=%;
```

下記：(11.7.50) 式の積分公式の証明

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin(\tau)\,\sin(n\,\tau)}{\cos(\tau)-\cos(\eta)}d\tau$$

上式の被積分関数は次のように変形できる。

$$\frac{\sin(\tau)\,\sin(n\,\tau)}{\cos(\tau)-\cos(\eta)} = \frac{\cos(n\,\tau-\tau)}{2\cos(\tau)-2\cos(\eta)}-\frac{\cos(n\,\tau+\tau)}{2\cos(\tau)-2\cos(\eta)}$$

上式を積分し、(11.7.48) 式の積分公式を適用し、整理すると、

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\frac{\sin(\tau)\,\sin(n\,\tau)}{\cos(\tau)-\cos(\eta)}d\tau &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{\cos((n-1)\,\tau)}{\cos(\tau)-\cos(\eta)}d\tau\\ &\quad-\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{\cos((n+1)\,\tau)}{\cos(\tau)-\cos(\eta)}d\tau\\ &= \frac{\pi\sin((n-1)\,\tau)}{2\sin(\tau)}-\frac{\pi\sin((n+1)\,\tau)}{2\sin(\tau)}\\ &= -\pi\cos(n\,\tau)\end{aligned}$$

以上から、$n=0$ では適用できないので、

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin(\tau)\,\sin(n\,\tau)}{\cos(\tau)-\cos(\eta)}d\tau = -\pi\cos(n\,\tau)\quad n=1\cdot 2\cdot 3\cdots$$

11.7.4　三次元翼　揚力線理論（フーリエ級数）

三次元翼の簡便法として揚力線理論がある [1]。一様流速：U の中に y 軸上に置かれた、迎角：α、翼の長さ：$2B$ の翼が左右 に細長く、断面まわりの流れは二次元の翼理論が 適用できるとする。各翼断面の渦循環：$\Gamma(y)$ は翼断面ご とに異なり、翼で発生した渦は後方に一様流に沿って流れるものとする。このとき後方に流れた渦の誘導速度により翼面に下方の downwash：$\mathrm{w}(y)$ が生じる。翼断面の渦循環：$\Gamma(y)$ とすると、後方に流れた渦循環：$-\frac{d}{d\,y}\,\Gamma\,(y)$ となる。後方に流れた渦循環による翼面上の downwash：$\mathrm{w}(y)$ は次式となる。

ここでは迎角：α は翼形状で与えられているので、下記の積分方程式を解き、$\Gamma\,(s)$ を求める。

$$\mathrm{w}\,(y)=-\frac{1}{4\,\pi}\int_{-B}^{B}\frac{\frac{d}{d\,s}\,\Gamma\,(s)}{s-y}ds \qquad (11.7.51)$$
$$\text{ここで、}\quad \mathrm{w}\,(y)=\alpha\,(y)\,U$$

このとき、翼に作用する揚力：L、downwash による抗力：D は次式となる。

$$L=\rho\int_{-B}^{B}\Gamma\,(s)\,ds\,U \qquad (11.7.52)$$

$$D=\rho\int_{-B}^{B}\mathrm{w}\,(s)\,\Gamma\,(s)\,ds \qquad (11.7.53)$$

```
kill(all);
assume(B>0);
depends([y],[\theta]);
depends([s],[t]);
IE1:w(y)=-1/(4*%pi)*'integrate('diff(
 \Gamma(s),s,1)/(s-y),s,-B,B);
W1:w(y)=\alpha(y)*U;
Y1:y=B*cos(\theta);
S1:s=B*cos(t);
diff(S1,t,1);
DG2:'diff(\Gamma(s),s,1)='diff(\Gamma(t),
 t,1)/rhs(%);
DG21:subst([S1],DG2);
changevar (rhs(IE1),lhs(S1)-rhs(S1),t,s);
subst([DG21],%);
factor(subst([Y1],%));
IE2:w(\theta)=%;
G1:\Gamma(t)=sum(A[n]*sin(n*t),n,1,inf);
DG1:'diff(lhs(G1),t,1)=diff(rhs(G1),t,1);
subst([DG1],IE2);
```

```
IE21:w(\theta)=sum(-'integrate(n*A[n]*
 cos(n*t)/(cos(theta)-cos(t)),t,0,%pi)/
 (4*%pi*B),n,1,inf);
'integrate(cos(n*t)/(cos(theta)-cos(t)),
 t,0,%pi)=-%pi*sin(n*\theta)/sin(\theta);
IE3:subst([%],IE21);
W2:w(\theta)=\alpha(\theta)*U;
subst([W2],IE3);
%*denom(rhs(%));
L1:L=\rho*U*'integrate(\Gamma(s),s,-B,B);
L11:L=-\rho*U*'integrate(\Gamma(t)*
 (-sin(t)*B),t,0,%pi);
L12:subst([G1],L11);
subst([inf=5],L12);
ev(%,sum);
ev(%,integrate);
D1:D=\rho*'integrate(\Gamma(s)*w(s),s,
 -B,B);
D11:D=-\rho*'integrate(\Gamma(\theta)*
 w(\theta)*(-sin(\theta)*B),\theta,0,%pi);
G2:subst([inf=N,t=\theta],G1);
IE4:subst([n=m,inf=M],IE3);
subst([G2,IE4],D11);
subst([N=5,M=5],%);
ev(%,sum);
ev(%,integrate);
D=sum(\rho*%pi/8*A[n]^2*n,n,1,inf);
```

下記の変数変換を行う。

$$y=\cos\,(\theta)\;B,\;s=\cos\,(t)\;B,\;\frac{d}{d\,t}\,s=-\sin\,(t)\;B \qquad (11.7.54)$$

また、変数変換から下記の関係がある。

$$\frac{d}{d\,s}\,\Gamma\,(s)=\frac{d}{d\,(\cos\,(t)\;B)}\,\Gamma\,(\cos\,(t)\;B)=-\frac{\frac{d}{d\,t}\,\Gamma\,(t)}{\sin\,(t)\;B}$$

(11.7.51) 式を changevar 関数を使って (11.7.54) 式の変数変換を行うと次式となり、上式を代入すると、

$$\begin{aligned}\mathrm{w}\,(\theta)&=-\frac{B}{4\,\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{\sin\,(t)\,\left(\frac{d}{d\,(\cos(t)\,B)}\,\Gamma\,(\cos\,(t)\;B)\right)}{\cos\,(t)\;B-y}dt\\&=-\frac{1}{4\,\pi\,B}\int_{0}^{\pi}\frac{\frac{d}{d\,t}\,\Gamma\,(t)}{\cos\,(\theta)-\cos\,(t)}dt\end{aligned} \qquad (11.7.55)$$

断面の渦循環分布：$\Gamma(y)$ は端部で零となるので、下記のフーリエ変換で表現できる。

$$\Gamma\,(t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\,(n\,t) \qquad (11.7.56)$$

上式を t で微分すると、

$$\frac{d}{d\,t}\,\Gamma\,(t)=\sum_{n=1}^{\infty}n\,A_n\cos\,(n\,t)$$

---
[1]「溝口純敏：Maxima を使った流体力学基礎演習ノート　7.2. 3次元翼 7.2.2 揚力線」、http://http://www9.plala.or.jp/alcwitchery/

(11.7.51) 式に上式を代入し、級数和と積分の順序を変えると、

$$\begin{aligned}\mathrm{w}\,(\theta) &= -\frac{1}{4\,\pi\,B}\int_0^{\pi}\frac{\sum_{n=1}^{\infty} n\,A_n\cos\,(n\,t)}{\cos\,(\theta)-\cos\,(t)}dt\\ &= -\frac{1}{4\,\pi\,B}\sum_{n=1}^{\infty} n\,A_n\int_0^{\pi}\frac{\cos\,(n\,t)}{\cos\,(\theta)-\cos\,(t)}dt\end{aligned} \tag{11.7.57}$$

(11.7.48) 式の積分公式から、

$$\int_0^{\pi}\frac{\cos\,(\eta\,n)}{\cos\,(\eta)-\cos\,(\tau)}d\eta = \frac{\pi\sin\,(n\,\tau)}{\sin\,(\tau)} \quad n=0\cdot 1\cdot 2\cdots \tag{11.7.58}$$

(11.7.57) 式に上式を代入し、

$$\mathrm{w}\,(\theta) = \alpha\,(\theta)\;U = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} n\,A_n\sin\,(n\,\theta)}{4\sin\,(\theta)\;B}$$

上式から次式が得られる。左辺が与えられると、フーリエ変換から A_n が得られる。

$$4\,\alpha\,(\theta)\;\sin\,(\theta)\;B\,U = \sum_{n=1}^{\infty} n\,A_n\sin\,(n\,\theta)$$

A_n が得られたので、翼に作用する揚力:L は、(11.7.52) 式を変数変換し、(11.7.56) 式を代入し、$n=5$ を仮に代入し、積分を実行すると、

$$\begin{aligned}L =&\rho\int_{-B}^{B}\Gamma\,(s)\,ds\,U\\ =&\rho\int_0^{\pi}\Gamma\,(t)\;\sin\,(t)\,dt\,B\,U\\ =&\rho\int_0^{\pi}\sin\,(t)\;\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\,(n\,t)\,dt\,B\,U\\ =&\rho\int_0^{\pi}\sin\,(t)\;\Big(\cdots+A_5\sin\,(5\,t)+A_4\sin\,(4\,t)\\ &\qquad +A_3\sin\,(3\,t)+A_2\sin\,(2\,t)+A_1\sin\,(t)\Big)dt\,B\,U\\ =&\frac{\pi\,A_1\,\rho\,B\,U}{2}\end{aligned}$$

downwash による抗力：D は (11.7.53) 式を変数変換し、(11.7.56) 式、(11.7.57) 式を代入し、$n=5$ を仮に代入し、積分を実行すると、

$$\begin{aligned}D =&\rho\int_{-B}^{B}\mathrm{w}\,(s)\;\Gamma\,(s)\,ds\\ =&\rho\int_0^{\pi}\mathrm{w}\,(\theta)\;\Gamma\,(\theta)\;\sin\,(\theta)\,d\theta\,B\\ =&\frac{\rho}{4}\int_0^{\pi}\left(\sum_{m=1}^{\infty} m\,A_m\sin\,(m\,\theta)\right)\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\,(n\,\theta)\,d\theta\\ =&\frac{\rho}{4}\int_0^{\pi}\Big(\cdots+A_5\sin\,(5\,\theta)+A_4\sin\,(4\,\theta)\\ &\qquad +A_3\sin\,(3\,\theta)+A_2\sin\,(2\,\theta)+A_1\sin\,(\theta)\Big)\\ &\qquad \times\Big(\cdots+5\,A_5\sin\,(5\,\theta)+4\,A_4\sin\,(4\,\theta)\\ &\qquad +3\,A_3\sin\,(3\,\theta)+2\,A_2\sin\,(2\,\theta)+A_1\sin\,(\theta)\Big)d\theta\\ =&\frac{\rho}{8}\left(\cdots+5\,\pi\,A_5^2+4\,\pi\,A_4^2+3\,\pi\,A_3^2+2\,\pi\,A_2^2+\pi\,A_1^2\right)\\ =&\frac{\pi\rho}{8}\left(\sum_{n=1}^{\infty} n\,A_n^2\right)\end{aligned}$$

付 録 A　よく使う Maxima の関数

演習問題を解くに当たり、Maxima を使った進め方とここでよく使う Maxima の関数の使用例の簡単な説明を以下に示す。詳細な説明は Maxima の解説書を参考願う。

A.1　wxMaxima を使用した演習の進め方

wxMaxima を使用して、入力、出力を会話形式で実行できる。しかし、トライアンドエラー的に一歩一歩進めていくので、入力結果を残しておいた方が便利である。まず、wxMaxima の設定を確認する。wxMaxima の編集→設定で、「Enter でセルを評価する」にチェックを入れる。ワードパッドやメモ帳などのテキストエディターで Maxima の実行テキストを作成しておき、この評価させたい部分をコピーし、wxMaxima に貼り付け、Enter で評価、実行できる。これを繰り返し、意図した結果となっているか確認しながら、作業を進めていくのがよいと思います。

また、最初の行には必ず、*kill*(*all*); を入力し、これまでの設定を解除しておく。ファイル内のリストの区切りはセミコロン　;　であるので、必ず記述の最後に　;　をつける。記述が長く、2 行にまたがってもよいが、必ず記述の最後につける。

リスト、TEX 出力

wxMaxima の数式出力結果を左クリックで網掛けし、右クリックで「コピー」を選択すると、wxMaxima の実行テキストが得られ、テキストエディターに貼り付けすることができる。

また、wxMaxima の数式出力結果を左クリックで網掛けし、右クリックで「Latex としてコピー」を選択すると、Latex の実行テキストが得られる。Texworks などの Latex エディターに貼り付けすることができ、数式を綺麗に出力できる文書作成フリーソフト：$\LaTeX\,2_\varepsilon$ の数式記述として使える。

A.2　宣言文

関数定義：depends([f,g],[x,y])

f, gy が変数:x, y の関数であることを宣言する。現状の関数定義の確認:*dependencies*;、定義の削除:$remove(f, y)$; が他にある

```
kill(all);
depends ([f, g], x);
depends ([r, s], [u, v]);
depends (u, t);
dependencies;
diff (r*s, u);
diff (r*s, t);
remove (r, dependency);
diff (r.s, t);
```

出力結果：

$$done$$

$$[\mathrm{f}(x), \mathrm{g}(x)]$$

$$[\mathrm{r}(u,v), \mathrm{s}(u,v)]$$

$$[\mathrm{u}(t)]$$

$$[\mathrm{f}(x), \mathrm{g}(x), \mathrm{r}(u,v), \mathrm{s}(u,v), \mathrm{u}(t)]$$

$$r\left(\frac{d}{d\,u}\,s\right)+\left(\frac{d}{d\,u}\,r\right)\,s$$

$$r\left(\frac{d}{d\,u}\,s\right)\left(\frac{d}{d\,t}\,u\right)+\left(\frac{d}{d\,u}\,r\right)\,s\left(\frac{d}{d\,t}\,u\right)$$

$$done$$

$$r.\left(\frac{d}{d\,u}\,s\right)\left(\frac{d}{d\,t}\,u\right)$$

変数宣言：declare(x,A)

変数：x に整数や実数などの属性：A を宣言する。

```
declare(i,integer);
declare(x,real);
declare(z,complex);
```

仮定：assume(A)

変数の正負などの仮定を宣言する。現状の仮定の確認：$facts();$、仮定の削除：$forget(A);$ が他にある。

```
assume(A>0);
assume(B>=2);
assume(C<1 and C>0);
facts();
forget(A>0);
```

出力結果：

A.3 数式操作

数式の定義：X:A=B

数式：$A = B$ を X として、入力、定義する。以降、X で $A = B$ を呼び出せる。

```
X:x(t)=r(t)*cos(p(t));
Y:y(t)=r(t)*sin(p(t));
```

出力結果：

$$x(t) = r(t)\ cos(p(t))$$

$$y(t) = r(t)\ sin(p(t))$$

右辺抽出：rhs(X)

式の右辺を抽出する。そして、XR として入力、定義する。

```
X:x(t)=r(t)*cos(p(t));
XR:rhs(X);
```

出力結果：

$$x(t) = r(t)\ cos(p(t)) \rightarrow r(t)\ cos(p(t))$$

左辺抽出：lhs(X)

式の左辺を抽出する。

```
X:x(t)=r(t)*cos(p(t));
lhs(X);
```

出力結果：

$$x(t) = r(t)\ cos(p(t)) \rightarrow x(t)$$

置換：subst(B,A,EQ)

数式：EQ の中に含まれる A を→ B に置き換える。

```
X:x(t)=r(t)*cos(p(t));
subst(L,r(t),X);
```

出力結果：

$$x(t) = r(t)\ cos(p(t)) \rightarrow x(t) = cos(p(t))\ L$$

置換：subst([A=B],EQ)

数式：EQ の中に含まれる A を→ B に置き換える。

```
X:x(t)=r(t)*cos(p(t));
subst([r(t)=L],X);
```

出力結果：

$$x(t) = r(t)\ cos(p(t)) \rightarrow x(t) = cos(p(t))\ L$$

因数分解：factor(EQ)

式 EQ を因数分解する。

```
EQ:2*x^2+x-6;
factor(EQ);
```

出力結果：

$$2\,x^2+x-6 \to (x+2)\;(2\,x-3)$$

展開：expand(EQ)

式 EQ の和の積を展開し、積の和にする。

```
EQ1:(x+2)*(2*x-3);
expand(EQ1);
```

出力結果：

$$(x+2)\;(2\,x-3) \to 2\,x^2+x-6$$

有理式の簡素化：ratsimp(EQ)

展開、通分、約分で簡易化する

```
EQ2:x/(x^2+x);
ratsimp(EQ2);
```

出力結果：

$$\frac{x}{x^2+x} \to \frac{1}{x+1}$$

有理式の簡素化：partfrac(EQ,x)

x で簡易化する

```
EQ:(2*x+3)*(A*x-2)*(x+B);
EQ1:expand(%);
partfrac(EQ1,x);
factor(EQ1);
```

出力結果：

$$(2\,x+3)\;(x\,A-2)\;(B+x) \to$$

$$2\,x^2\,A\,B+3\,x\,A\,B-4\,x\,B-6\,B+2\,x^3\,A+3\,x^2\,A$$
$$-4\,x^2-6\,x$$

$partfrac(EQ1,x);$ の結果

$$x\,((3\,A-4)\;B-6)+x^2\;(2\,A\,B+3\,A-4)$$
$$-6\,B+2\,x^3\,A$$

$factor(EQ1);$ の結果

$$(2\,x+3)\;(x\,A-2)\;(B+x)$$

三角関数の簡素化：trigsimp(EQ)

三角関数が含まれる式を $sin(x)^2+cos(x)^2=1$ と $cosh(x)^2-sinh(x)^2=1$ を使って簡素化する。行列の積を参照。

三角関数の簡素化：trigreduce(EQ)

三角関数の積を倍角公式などを使って簡素化する。

```
EQ1:sin(A)*cos(B);
trigreduce(EQ1);
```

出力結果：

$$sin\,(A)\;cos\,(B) \to \frac{sin\,(B+A)}{2}-\frac{sin\,(B-A)}{2}$$

三角関数の簡素化：trigexpand(EQ)

三角関数が含まれる式を倍角公式などを使って展開する。

```
EQ2:sin(A*x+y);
trigexpand(EQ2);
```

出力結果：

$$sin\,(x\,A+y) \to cos\,(y)\;sin\,(x\,A)+sin\,(y)\;cos\,(x\,A)$$

三角関数の簡略化準線形形式：trigrat(EQ)

三角関数の式の標準的な簡略化準線形形式を与える。

```
E0:sin(3*a)/sin(a+%pi/3);
E0=trigrat(E0);
E1:(1-%e^(%i*\theta))/(1+%e^(%i*\theta));
E2:E1=trigrat(E1);
```

出力結果：

$$\frac{\sin\,(3\,a)}{\sin\left(a+\frac{\pi}{3}\right)}=\sqrt{3}\sin\,(2\,a)+\cos\,(2\,a)-1$$

$$\frac{1-e^{i\,\theta}}{e^{i\,\theta}+1}=-\frac{i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

対数関数の簡素化：logcontact(EQ)

対数関数を含む式の簡易化をする。

```
EQ:2*log(x)+2*log(y);
logcontract(EQ);
```

出力結果：

$$2\,log\,(y)+2\,log\,(x) \to log\left(x^2\,y^2\right)$$

指数、対数の簡素化：radcan(EQ)

指数、対数のを含む式の簡易化をする。

```
(log(x+x^2)-log(x))^a/log(1+x)^(a/2);
radcan(%);
((%e^x-1)/(1+%e^(x/2)));
radcan(%);
```

出力結果：

$$\frac{\left(\log\left(x^2+x\right)-\log\left(x\right)\right)^a}{\log\left(x+1\right)^{\frac{a}{2}}} \to \log\left(x+1\right)^{\frac{a}{2}}$$

$$\frac{e^x-1}{e^{\frac{x}{2}}+1} \to e^{\frac{x}{2}}-1$$

係数：coeff(EQ,X,N)

式 EQ の X の N 乗の係数を抽出する。

```
EQ:2*x^2+x-6;
coeff(EQ,x,2);
```

出力結果：

$$2\,x^2+x-6 \to 2$$

最初の項：first(EQ)

式 EQ の最初の項を抽出する。

```
EQ:2*x^2+x-6;
first(EQ);
```

出力結果：

$$2\,x^2+x-6 \to 2\,x^2$$

最後の項：last(EQ)

式 EQ の最後の項を抽出する。

```
EQ:2*x^2+x-6;
last(EQ);
```

出力結果：

$$2\,x^2+x-6 \to -6$$

項の削除：rest(EQ,N)

式 EQ の最初から N 個成分を除いた項を出力する。ここで、N を負とすると、最後から N 個成分を除いた項を出力する。

```
EQ:2*x^2+x-6;
rest(EQ,2);
```

出力結果：

$$2\,x^2+x-6 \to -6$$

分子：num(EQ)

式 EQ の分子を出力する。

```
EQ:x/(x^2+x);
num(EQ);
```

出力結果：

$$\frac{x}{x^2+x} \to x$$

分母：denom(EQ)

式 EQ の分母を出力する。

```
EQ:x/(x^2+x);
denom(EQ);
```

出力結果：

$$\frac{x}{x^2+x} \to x^2+x$$

方程式を解く：solve([EQ1,EQ2],[x,y])

式 $EQ1, EQ2$ を x, y について解く。結果は行列表示で出力される。

```
EQ:2*x^2+x-6=0;
solve(EQ,x);
```

出力結果：

$$2\,x^2+x-6=0$$

$$[x=\frac{3}{2}, x=-2]$$

```
EQ1:2*x+y=4;
EQ2:x+3*y=7;
ANS:solve([EQ1,EQ2],[x,y]);
ANS[1][1];
ANS[1][2];
```

出力結果：

$$y+2\,x=4$$

$$3\,y+x=7$$

$$[[x=1, y=2]]$$

$$x=1$$

$$y=2$$

A.4 行列

行列の定義：matrix([A,B],[C,D])

行列を入力、定義する。

```
XY:matrix([A,B],[C,D]);
```

出力結果：

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

運動を行列で表現するときには、下記のように列行列で表現した方が、変数変換行列の表現、演算表現で教科書に近い表現となり、理解しやすい。

```
kill(all);
X:x(t)=r(t)*cos(p(t));
Y:y(t)=r(t)*sin(p(t));
XY:matrix([ rhs(X)],[ rhs(Y) ]);
VXY:diff(XY,t);
AXY:diff(VXY,t);
TR:matrix([cos(p(t)), sin(p(t))],
          [ -sin(p(t)),cos(p(t))]);
VRP:trigsimp(TR.VXY);
v[r](t)=VRP[1,1];
v[p](t)=VRP[2,1];
ARP:trigsimp(TR.AXY);
a[r](t)=ARP[1,1];
a[p](t)=ARP[2,1];
EQR:M*ARP[1,1]=F[r];
EQP:M*ARP[2,1]=F[p];
```

要素の抽出：M[N][M]

N 行、M 列目の要素を抽出する。

```
XY:matrix([A,B],[C,D]);
XY[2][1];
```

出力結果：

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

$$\to C$$

行列の積：A.B

行列：A と行列：B の積を求める。

```
M1:matrix([A,B],[C,D]);
M2:matrix([E,F],[G,H]);
M1.M2;
```

出力結果：

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} B\,G + A\,E & B\,H + A\,F \\ D\,G + C\,E & D\,H + C\,F \end{bmatrix}$$

転置行列：transpose(M)

行列：M の転置行列を求める。

```
M1:matrix([A,B],[C,D]);
M2:matrix([A],[B]);
transpose(M1);
transpose(M2);
```

出力結果：

$$\begin{bmatrix} A & C \\ B & D \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}$$

運動エネルギーを求めるとき、各速度成分の二乗和が必要となる。速度の行列表現の転置行列と元行列の積から容易に求まる。

```
T:1/2*M*trigsimp(transpose(VXY).VXY);
```

行列式：determinant(M)

行列：M の行列式を求める。

```
M:matrix([2*D^2+2, D^2],[D^2,D^2+1]);
determinant(M);
```

出力結果：

$$\begin{bmatrix} 2\,D^2 + 2 & D^2 \\ D^2 & D^2 + 1 \end{bmatrix}$$

$$\to \left(D^2 + 1\right)\,\left(2\,D^2 + 2\right) - D^4$$

行列の作成：genmatrix(a,M,N)

定義された h の行列を作成する。

```
h[i,j]:=1/(i+j);
genmatrix(h,4,4);
```

出力結果：

$$h_{i,j} := \frac{1}{i+j}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

条件文が入った定義された a の行列を作成する。

```
AJK:1/(j+k);
a[m,n]:=block([b],
if m=4 then if n=4 then b:1 else b:0
else b:subst([k=n,j=m],AJK), return(b));
genmatrix(a,4,4);
```

出力結果：

$$\frac{1}{k+j}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

逆行列の計算：invert(a)

定義された a の逆行列を計算する。

```
h[i,j]:=1/(i+j);
genmatrix(h,4,4);
invert(%);
```

出力結果：

$$h_{i,j} := \frac{1}{i+j}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 200 & -1200 & 2100 & -1120 \\ -1200 & 8100 & -15120 & 8400 \\ 2100 & -15120 & 29400 & -16800 \\ -1120 & 8400 & -16800 & 9800 \end{pmatrix}$$

A.5　微分・積分

微分：diff(EX,x,N)

EX を微分変数：x で N 階微分を行う。N を省略すれば、1 階微分をする。

```
EX:x^3;
diff(EX,x,1);
diff(EX,x,2);
```

出力結果：

$$x^3 \rightarrow$$

$$3\,x^2$$

$$6\,x$$

```
X:x(t)=r(t)*cos(p(t));
diff(X,t,1);
```

$$x(t) = r(t)\ cos(p(t)) \rightarrow$$

$$\frac{d}{d\,t}\,x(t) = cos(p(t))\left(\frac{d}{d\,t}\,r(t)\right) - r(t)\ sin(p(t))\left(\frac{d}{d\,t}\,p(t)\right)$$

積分：integrate(EX,x,A,B)

EX を積分変数：x で、A から B の積分を行う。、A、B を省略すれば、不定積分となる。

```
EX:x^2;
integrate(EX,x,0,2);
integrate(EX,x);
```

$$x^2 \rightarrow$$

$$\frac{8}{3}$$

$$\frac{x^3}{3}$$

```
EX:y(x)^2;
integrate(EX,x);
integrate(EX,y(x));
```

$$y(x)^2 \rightarrow$$

$$\int y(x)^2 dx$$

$$\frac{y(x)^3}{3}$$

積分における変数変換：changevar(EX,EQ,B,A)

積分記述：EX を式：$EQ=0$ の関係を使って、変数：A から変数：B に変換する。

```
EX:'integrate(%e^(sqrt(a*y)),y,0,4);
EQ:y-z^2/a=0;
changevar(EX,lhs(EQ),z,y);
```

$$\int_0^4 e^{\sqrt{a\,y}}dy$$

$$y-\frac{z^2}{a}=0$$

$$-\frac{2\int_{-2\sqrt{a}}^{0} z\,e^{|z|}dz}{a}$$

微分方程式を解く：desolve([EQ1,EQ2],[f1(x),f2(x)])

連立微分方程式：$EQ1$、$EQ2$、で従属変数：$f1(x)$、$f2(x)$ を解く。初期条件は下記のようにして、従属変数の初期条件における値を定義する。連立微分方程式の場合、解は行列表示となる。詳細の解説は「3.1.1 *desolve* 関数」、24 頁に示す。

```
EQ1:diff(y(x),x,2)+2*y(x)+z(x)=0;
EQ2:y(x)+diff(z(x),x,2)+2*z(x)=0;
atvalue(y(x),x=0,1);
atvalue(diff(y(x),x,1),x=0,0);
atvalue(z(x),x=0,2);
atvalue(diff(z(x),x,1),x=0,0);
desolve([EQ1,EQ2],[y(x),z(x)]);
```

$$\frac{d^2}{d\,x^2}\,y\left(x\right)+z\left(x\right)+2\,y\left(x\right)=0$$

$$\frac{d^2}{d\,x^2}\,z\left(x\right)+2\,z\left(x\right)+y\left(x\right)=0$$

$$[y\left(x\right)=\frac{3\cos\left(\sqrt{3}\,x\right)}{2}-\frac{\cos\left(x\right)}{2}$$

$$,z\left(x\right)=\frac{3\cos\left(\sqrt{3}\,x\right)}{2}+\frac{\cos\left(x\right)}{2}]$$

微分方程式を解く：ode2(EQ,f(x),x)

2 階以下の微分方程式：EQ で従属変数：$f(x)$、独立変数：x を解く。境界条件は下記のように、関数：ode2 を実行後に、関数：ic1,ic2,bc2 を使用して定義する。詳細の解説は「3.1.2 *ode*2 関数」、24 頁に示す。

一階微分方程式の場合

```
kill(all);
EQ: diff(y(x),x,1)=-(x-C)/y(x);
ANS:ode2(EQ,y(x),x);
ANS1:ic1(ANS,x=0,y(x)=1);
```

下記に出力結果を示す。$y\left(x\right)$ の関数形で解は得られるが、境界条件を ic1 で求めた結果は満足ではない。

$$\frac{d}{d\,x}\,y\left(x\right)=\frac{C-x}{y\left(x\right)}$$

$$\frac{y\left(x\right)^2}{2}=\frac{2\,x\,C-x^2}{2}+\%c$$

$$\frac{y\left(x\right)^2}{2}=\frac{2\,x\,C-x^2+y\left(0\right)^2}{2}$$

```
kill(all);
depends(y,x);
EQ: diff(y,x,1)=-(x-C)/y;
ANS:ode2(EQ,y,x);
ANS1:ic1(ANS,x=0,y=1);
```

下記に depends を使った関数形の出力結果を示す。境界条件を ic1 で求めた結果は満足できる。

$$[\mathrm{y}\left(x\right)]$$

$$\frac{d}{d\,x}\,y=\frac{C-x}{y}$$

$$\frac{y^2}{2}=\frac{2\,x\,C-x^2}{2}+\%c$$

$$\frac{y^2}{2}=\frac{2\,x\,C-x^2+1}{2}$$

二階微分方程式の場合

```
kill(all);
EQ:x^2*diff(y(x),x,2)+x*diff(y(x),x,1)
   -4*y(x)=0;
ANS:ode2(EQ,y(x),x);
ANS1:ic2(ANS,x=1,y(x)=1,diff(y(x),x,1)=0);
ANS2:bc2(ANS,x=1,y(x)=0,x=2,y(x)=1);
```

下記に出力結果を示す。$y\left(x\right)$ の関数形で解は得られるが、境界条件を ic2,bc2 で求めた結果は満足ではない。

$$x^2\,\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,y\left(x\right)\right)+x\,\left(\frac{d}{d\,x}\,y\left(x\right)\right)-4\,y\left(x\right)=0$$

$$y\left(x\right)=\%k1\,x^2+\frac{\%k2}{x^2}$$

$$y(x) = \frac{y(1)\,x^2}{2} + \frac{y(1)}{2\,x^2}$$

$$y(x) = \frac{16\,y(1) - 4\,y(2)}{15\,x^2} - \frac{(y(1) - 4\,y(2))\,x^2}{15}$$

```
kill(all);
depends(y,x);
EQ:x^2*diff(y,x,2)+x*diff(y,x,1)
  -4*y=0;
ANS:ode2(EQ,y,x);
ANS1:ic2(ANS,x=1,y=1,diff(y,x,1)=0);
ANS2:bc2(ANS,x=1,y=0,x=2,y=1);
```

下記に depends を使った関数形の出力結果を示す。境界条件を ic2,bc2 で求めた結果は満足できる。

$$[\mathrm{y}(x)]$$

$$x^2\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,y\right) + x\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right) - 4\,y = 0$$

$$y = \%k1\,x^2 + \frac{\%k2}{x^2}$$

$$y = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2\,x^2}$$

$$y = \frac{4\,x^2}{15} - \frac{4}{15\,x^2}$$

微分方程式の数値解：$rk([EQ1, EQ2], [x, y], [X0, Y0], [t, T0, T1, DT])$

ルンゲ・クッタ法で微分方程式を数値解析する。左辺が 1 階微分の形で微分方程式を表現する。右辺を $EQ1$、$EQ2$ で表し、左辺の従属変数を x、y とする。それぞれの、初期値を $X0$、$Y0$ とし、独立変数を t とする。独立変数の $T0$ から $T1$ まで、DT 間隔で数値解析する。ここで独立変数は $x(t)$ の形は扱えない。実行する前に、ルンゲ・クッタ法のプログラムをロードする必要があるので、$load("dynamics");$ を入力する。

$$\frac{d}{d\,t}\,x = -4\,y^2 - x^2 + 4$$

$$\frac{d}{d\,t}\,y = y^2 - x^2 + 1$$

の場合、

```
EQ1:'diff(x,t)=4-x^2-4*y^2;
EQ2:'diff(y,t)=y^2-x^2+1;
load("dynamics");
sol:rk([rhs(EQ1),rhs(EQ2)],[x,y],
  [-1.25,0.75],[t,0,4,0.02]);
```

入っている出力は、リストの形式で出力されるので、下記の例に示すように sol に結果を入れ、必要な項目を $list12$ に入れなおす。そして、下記の図形関数：$plot2d$ などで見ることができる。

$$\frac{d^2}{d\,t^2}\,x = -sin(x)$$

の場合、下記の 1 階連立微分方程式に置き換えて解く。

$$\frac{d}{d\,t}\,x = y$$

$$\frac{d}{d\,t}\,y = -sin(x)$$

```
kill(all);
EQ1:'diff(x,t,2)=-sin(x);
Tmax:3;
dT:0.03;
Nplot:fix(Tmax/dT);
load("dynamics");
P[0]:%pi/9;
sol:rk([y,rhs(EQ1)],[x,y],[P[0],0],
  [t,0,Tmax,dT]);
list12:[[sol[1][1],sol[1][2]]];
for J:2 thru Nplot do(list12:append(list12,
  [[sol[J][1],sol[J][2]]]));
plot2d([discrete,list12]);
```

A.6　複素数

複素変数宣言：declare(z,complex)

z が複素変数であることを宣言する。

```
declare(z,complex);
```

実部：realpart(z)

複素数:z の実部を出力する。

```
kill(all);
declare(z,complex);
Z1:z=x[1]+%i*y[1];
realpart(rhs(Z1));
```

$$z = i\,y_1 + x_1 \rightarrow x_1$$

虚部：imagpart(z)

複素数:z の虚部を出力する。

```
kill(all);
declare(z,complex);
Z1:z=x[1]+%i*y[1];
imagpart(rhs(Z1));
```

$$z = i\,y_1 + x_1 \rightarrow y_1$$

複素共役：conjugate(z)

複素数:z の複素共役を出力する。

```
kill(all);
declare(z,complex);
Z1:z=x[1]+%i*y[1];
conjugate(rhs(Z1))
```

$$z = i\,y_1 + x_1 \rightarrow x_1 - i\,y_1$$

極座標表示：polarform(z)

複素数:z を極座標表示で出力する。

```
kill(all);
declare(z,complex);
Z1:z=x[1]+%i*y[1];
polarform(rhs(Z1));
```

$$z = i\,y_1 + x_1 \rightarrow \sqrt{y_1^2 + x_1^2}\, e^{i\,\mathrm{atan2}(y_1,x_1)}$$

xy 座標表示：rectform(z)

複素数:z を極座標表示で出力する。

```
kill(all);
declare(z,complex);
Z1:z=r*%e^(%i*\theta);
rectform(rhs(Z1));
```

$$z = r\,e^{i\,\theta} \rightarrow i\,r\sin(\theta) + r\cos(\theta)$$

留数：residue(EQ,z,z[0])

式：EQ、変数：z で、z_0 における留数を求める。

```
kill(all);
declare(z,complex);
residue (z/(z^2+a^2), z, a*%i);
residue (sin(a*z)/z^4, z, 0);
```

$$\frac{1}{2}$$

$$-\frac{a^3}{6}$$

A.7 極限・級数

極限：limit(EQ,x,A,dir)

変数 x を方向:dir から A に接近する場合、式：EQ の極限を計算する。dir としては、$plus$ か $minus$ を入力する。A に接近した場合、値が分かれない場合は、dir は入力しなくてよい。ここでプラス無限大は inf、マイナス無限大は $minf$ である。

$$x\left(t\right)=\frac{U0}{C}-\frac{e^{-t\,C}\,U0}{C}$$

$$Xmax=\frac{U0}{C}$$

```
kill(all);
XX:x(t)=U0/C-(%e^(-t*C)*U0)/C;
Xmax=limit(rhs(XX),t,inf);
```

$$x\left(t\right)=\frac{U0}{C}-\frac{e^{-t\,C}\,U0}{C}$$

$$Xmax=\frac{U0}{C}$$

級数展開：taylor(EX,x,A,N)

式 EX を A のまわりで、変数：x の Taylor 級数を N 乗まで求める。

```
taylor(sin(x),x,0,7);
```

$$sin(x)\rightarrow x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\frac{x^7}{5040}+...$$

級数和：sum(EX,n,n1,n2)

式 EX を変数：n の $n1$ から $n2$ までの級数和を求める。

```
HH:h=h[0]+2*sum(h[0]*E^(2*n),n,1,inf);
h=h[0]+2*sum(h[0]*E^(2*n),n,1,4);
```

$$h=2\,h_0\,\left(\sum_{n=1}^{\infty}E^{2\,n}\right)+h_0$$

$$h=2\,\left(h_0\,E^8+h_0\,E^6+h_0\,E^4+h_0\,E^2\right)+h_0$$

級数和の簡素化：simpsum

上部で定義されている級数和を、true にすることで簡素化する。結果が得られたら、false にする。

```
assume(E>0, E<1);
HH:h[0]+2*sum(h[0]*E^(2*n),n,1,inf);
HH, simpsum;
sum(1/n^2,n,1,inf);
sum(1/n^2,n,1,inf), simpsum;
sum (1/3^i, i, 1, inf);
%,simpsum;
```

$$2\,h_0\,\left(\sum_{n=1}^{\infty}E^{2\,n}\right)+h_0\rightarrow\frac{2\,h_0\,E^2}{1-E^2}+h_0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\rightarrow\frac{\pi^2}{6}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{3^i}\rightarrow\frac{1}{2}$$

級数積：product(EX,n,n1,n2)

式 EX を変数：n の $n1$ から $n2$ までの級数積を求める。

```
kill(all);
product(k,k,1,n);
```

$$\prod_{k=1}^{n}k$$

級数積の簡素化：simpproduct

定義されている級数積を、簡素化する。

```
kill(all);
product (k,k,1,n), simpproduct;
```

$$n!$$

A.8　プログラム

反復：for N:k step l thru m do(A);

A を N が k から m まで i ステップ毎に反復実行する。A で複数の処理をする場合は , で区切る。

条件分岐：if B then C else D;

条件式：B が真なら C を実行し、虚なら D を実行する。条件式として、$N=1, N>0$ などである。

```
kill(all);
for J:1 thru 10 do(
if J=1 then listUU20:[[1,2]]
 else listUU20:append(listUU20,
 [[2*J-1,2*J]]));
listUU20;
```

リストのファイル出力、読み込み：write_data,　read_list

計算結果などのリストデータを外部メディアにファイル出力し、外部メディアにファイル出力したリストを読み込む。

```
kill(all);
listUU:[[1,11],[2,22],[3,33]];
write_data(listUU,"M:\listUU20.cvs");
list:read_list("M:\listUU20.cvs");
for J:1 thru 100 do(
if J=1 then listUU20:[[list[1],list[2]]]
 else listUU20:append(listUU20,
 [[list[2*J-1],list[2*J]]]));
listUU20;
```

リストデータ:listUU を作成する。

$$[[1,11],[2,22],[3,33]]$$

外部メディアにファイル：M:listUU20.cvs の名前で、出力する。
外部メディアにファイル：M:listUU20.cvs をリストとして読み込む。読み込んだ結果は下記、

$$[1,11,2,22,3,33]$$

連続したデータリストとなっているので、振り分け作業を行い、元の形にする。

$$[[1,11],[2,22],[3,33]]$$

A.9　その他

第一種完全楕円積分関数：elliptic_kc(m)

下記の第一種完全楕円積分関数を求める。

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-m\,sin\,(x)^2}}dx$$

第一種ベッセル関数：bessel_j(n,x)

次数：n で変数：x の第一種ベッセル関数を求める。

第二種ベッセル関数：bessel_y(n,x)

次数：n で変数：x の第二種ベッセル関数を求める。

第一種変形ベッセル関数：bessel_i(n,x)

次数:n で変数:x の第一種変形ベッセル関数を求める。

第二種変形ベッセル関数：bessel_k(n,x)

次数:n で変数:x の第二種変形ベッセル関数を求める。

根を得る：find_root(Fn,x,a,b)

根を数値解析で得る。関数：Fn を与え、変数：x が a〜b の範囲で $FN=0$ の根を求める。

```
kill(all);
find_root(bessel_j(1,x),x,2,4);
```

$bessel_j(1,x)$ の根を x が 2 から 4 の範囲で求める。

定数：π：%pi

定数：自然対数の底：%e

定数：虚数：%i

定数：正の無限大：inf

定数：負の無限大：minf

浮動小数点で近似値：float(EQ)

A.10　グラフ作成

二次元グラフ：plot2d([EX1,EX2],[range],[op])

二次元のグラフを作成する。$EX1$、$EX2$ に数式や点列の指定、$range$ に横軸の計算レンジ、op に縦軸に指定などのオプションを指定する。

(1) 数式を与えて

数式と x の計算レンジを与えたグラフの作成をする。

```
plot2d (x^3+2, [x, -3, 3]);
```

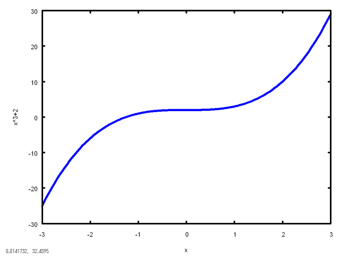


図 A.10.1: 数式を与えて

(2) 数式を与えて軌跡

x、y の変数：t の数式を与え、$x-y$ 面上のグラフの作成をする。$nticks$ で分割点数を与える。

```
plot2d ([parametric,2*cos(t),10*sin(t),
   [t,-5,5],[nticks,80]]);
```

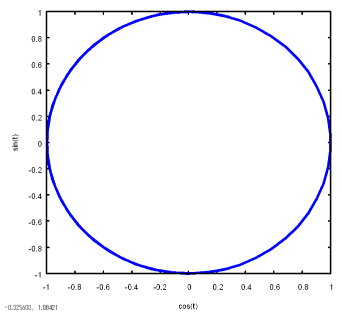


図 A.10.2: 数式を与えて軌跡

(3) 点列を与えて

x、y の点列の行列を与え、グラフの作成をする。

```
xy:[[-2,30],[-1,20],[0,10],[1,-10],
 [2,-20]];
plot2d([discrete,xy]);
```

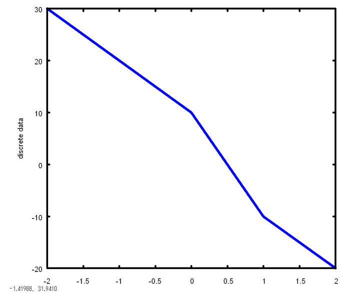


図 A.10.3: 点列を与えて

(4) 複数の数式を与えて

数式と x の計算レンジを与えたグラフの作成をする。

```
plot2d ([-10*x,2*x^2-2,x^3+2],[x,-3, 3]);
```

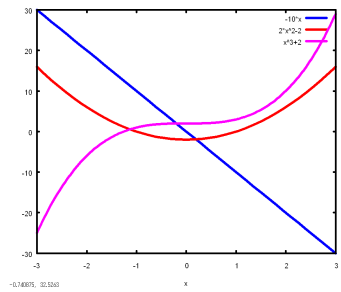


図 A.10.4: 複数の数式を与えて

(5) 複数のグラフの合成

数式と x の計算レンジを与えたグラフの作成をする。

```
plot2d ([x^3+2,[parametric,2*cos(t),
  10*sin(t),[t,-5,5],[nticks,80]],
  [discrete,xy]],
  [x,-3,3]);
```

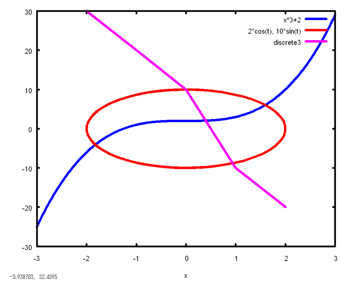


図 A.10.5: 複数のグラフの合成

(6) オプション

線の種類を指定

$[style, [lines, l1, l2]]$

l1：線の太さ、l2：線の色を指定する。lines：線で描くが、これを points、linespoints、dots と指定することもできる。

```
plot2d([x,2*x,-x,-2*x],[x,-10,10],
 [y,-10,10],[nticks,5],[style,[lines,8,1],
 [points,4,2],[linespoints,2,3],
 [dots,8,4]]);
```

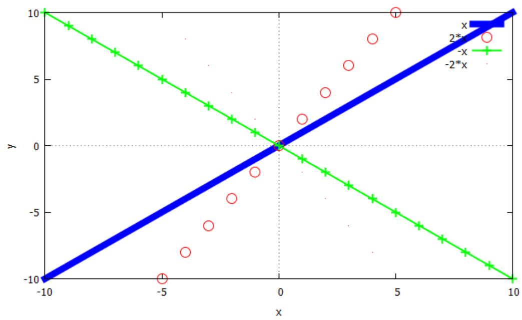


図 A.10.6: 線の種類

線のコメント

```
plot2d([x,2*x,-x,-2*x],[x,-10,10],
 [y,-10,10],[legend, "A","B","C","D"]);
```

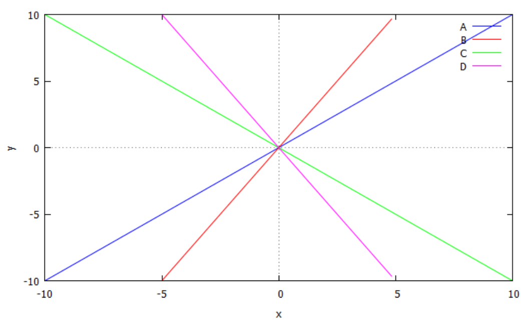


図 A.10.7: 線にコメント

縦軸、横軸のコメント

```
plot2d (x^3+2,[x,-3,3],[y,-40,50],
     [xlabel, "X axis"],[ylabel, "Y axis"]);
```

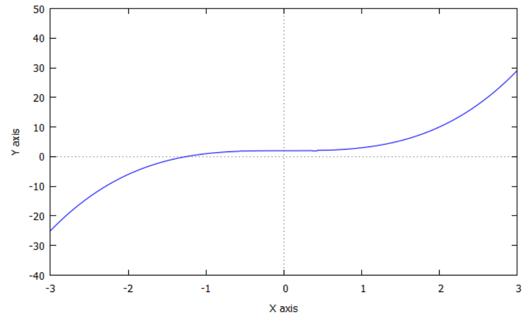


図 A.10.8: 縦軸、横軸コメント

対数軸

```
plot2d(%e^x,[x,-100,100],[logy]);
plot2d(log(x),[x,0.1,100],[logx]);
```

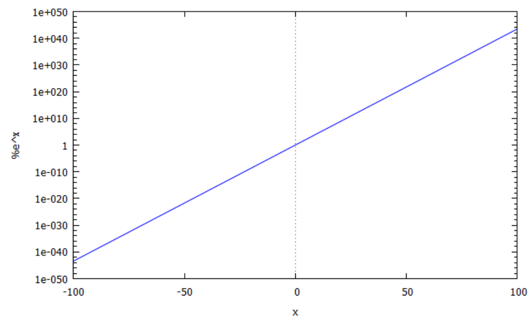


図 A.10.9: y 軸対数軸

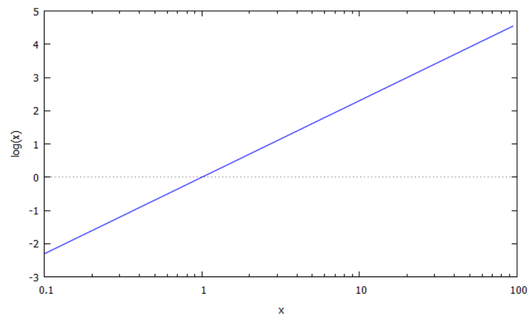


図 A.10.10: x 軸対数軸

三次元グラフ：plot3d(EX1,[x range],[y range])

三次元のグラフを作成する。$EX1$ に数式の指定、$xrange$ に横軸の計算レンジ、$yrange$ に縦軸の計算レンジの指定などのオプションを指定する。

数式と x, y の計算レンジを与えたグラフの作成をする。

```
plot3d (2^(-u^2+v^2),[u,-3,3],[v,-2,2]);
```

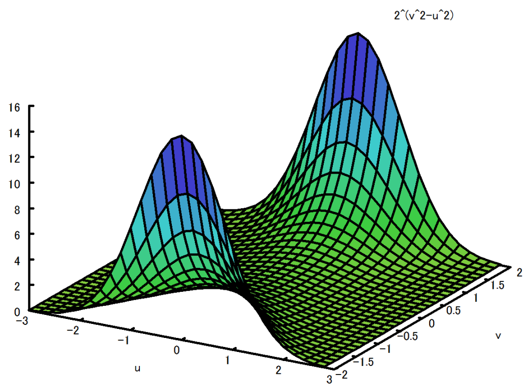


図 A.10.11: 三次元グラフ

円柱座標三次元グラフ：

円柱座標三次元グラフを作成する。

```
plot3d(r^2,[r,0,1],[\theta,0,2*%pi],
 [grid,20,50],[transform_xy,polar_to_xy]);
```

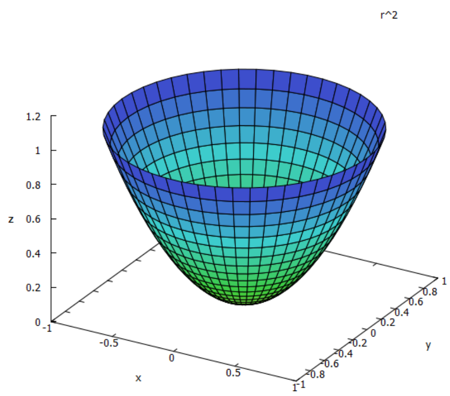


図 A.10.12: 円柱座標三次元グラフ

等高線グラフ (gnuplot による)

等高線グラフを gnuplot で作成する。

set xrange [X1:X2]　x range
set xrange [Y1:Y2]　y range
set isosamples NX,NY　x,y 軸の分割点数
set cntrparam levels incremental Z1,dz,Z2　z 軸の初期値、増分、終値
splot EX　数式

```
#!/gnuplot
set xrange [-3:3]
set yrange [-3:3]
set isosamples 150,150
set contour base
set cntrparam levels incremental -3,0.2,4
unset key
unset surface
set view map
splot (7*log(y**2+x**2))/(2*pi)
 -y/(y**2+x**2)+y
#    EOF
```

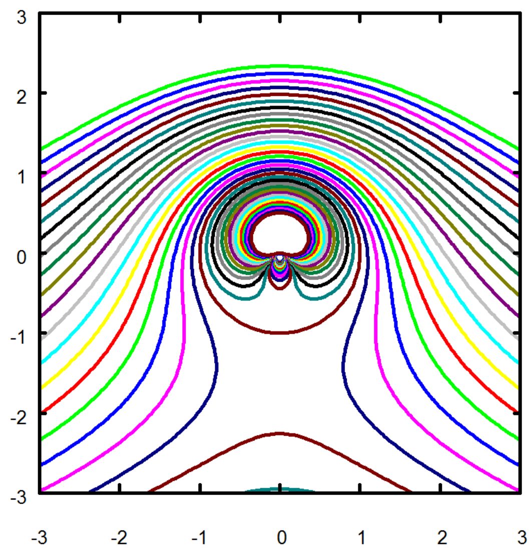


図 A.10.13: 等高線グラフ

参考文献

1) Maxima の公式ホームページ、http://maxima.sourceforge.net/

2) 横田博史：はじめての Maxima、工学社 2005

3) 竹内 薫：はじめての数式処理ソフト CD-ROM 付、(ブル-バックス) (新書) 2007

4) 中川義行：Maxima 入門ノート 1.2.1 、http://www.eonet.ne.jp/ kyo-ju/maxima.pdf

5) Maxima 5.36.1 Manual、http://maxima.osdn.jp/maxima.html

6) Maxima 普及委員会、http://www.cymric.jp/maxima/top.html

7) 奥村晴彦：[改訂第 6 版]$\LaTeX 2_\varepsilon$ 美文書作成入門、技術評論社 2013

8) Robert L. Zimmerman, Fredrick I. Olness： Mathematica for Physics, 訳：武藤　覚、小泉　悟、ピアソン・エデュケーション　1999

9) 近藤次郎：積分方程式、培風館 1954

10) 犬井鉄郎：偏微分方程式としの応用、コロナ社 1957

11) 高橋健人：物理数学、培風館 1958

12) 近藤次郎：積分方程式とその応用､、コロナ社 1959

13) 城　憲三：応用数学解析、養賢堂 1964

14) 鬼頭史城：変分法と最適化問題、ダイアモンド社 1969

15) 赤池弘次、中川東一郎：ダイナミックシステムの統計的解析と制御、サイエンス社　1971

16) 後藤健一、山本邦夫、神吉　健：詳解物理応用数学演習、共立出版　1979

17) 和達三樹：物理のための数学（物理入門コース　10)、岩波書店 1983

18) 小野寺　嘉孝：物理のための応用数学、裳華房 1988

19) 尾崎　統、北川源四郎：時系列解析の方法、朝倉書店 1998

20) 一石　賢：道具としての物理数学、日本実業出版 2002

21) 塚田　捷：物理数学 2 （基礎物理学シリーズ)、朝倉書店 2003

22) 福山秀敏、小形正男：物理数学 1 （基礎物理学シリーズ)、朝倉書店 2003

23) 二宮正夫、並木雅俊、杉山忠男：物理のための数学入門（講談社基礎物理学シリーズ)、講談社 2009

24) Roel Snieder, 南條光章（訳)：独習独解　物理で使う数学ー完全版ー、共立出版 2012

25) ダニエル・フライシュ、河辺哲次（訳)：物理のためのベクトルとテンソル、朝倉書店　2013

26) 石井俊全：一般相対性理論を一歩一歩数式で理解する、ベレ出版　2017

27) ＦＮの高校物理　数学　曲面上の幾何学　http://fnorio.com

28) 森口　繁一、宇田川　久、一松　信：岩波数学公式 1　微分積分・平面曲線、岩波書店　2003

29) 森口　繁一、宇田川　久、一松　信：岩波数学公式 2　級数・フーリエ解析、岩波書店　1998

30) 森口　繁一、宇田川　久、一松　信：岩波数学公式 3　特殊函数、岩波書店　2002

31) G. ポリア、柿内賢信訳：いかにして問題を解くか、丸善出版　1954

32) 溝口純敏：Maxima を使った流体力学基礎演習ノート 、http://www9.plala.or.jp/alcwitchery/