

Maximaを使った電磁気学基礎演習ノート

溝口純敏

<http://www.mzplactice.com/>

令和4年4月 初版

目次

第 1 章	はじめに	6
第 2 章	静電場の性質	7
2.1	クーロンの法則	7
2.2	静電場	7
2.3	ガウスの法則	8
2.4	静電ポテンシャル (電位)	9
2.5	静電場と流れの場 (電気力線)	12
2.6	静電エネルギー	13
2.7	電気双極子	14
2.8	例題	16
2.8.1	三点電荷に作用する力	16
2.8.2	半径: R の球の中に体電荷密度: ρ を置いたときの静電場	17
2.8.3	半径: R の球の表面に面電荷密度: τ を置いたときの静電場	22
2.8.4	無限に長い直線上に線電荷密度: μ を置いたときの静電場	24
2.8.5	無限に長い円筒上に面電荷密度: τ を置いたときの静電場	26
2.8.6	無限に長い円柱内に体電荷密度: ρ を置いたときの静電場	29
2.8.7	無限に広い平板上に面電荷密度: τ を置いたときの静電場	30
2.8.8	厚さ: $2d$ の無限に広い平板内に体電荷密度: ρ を置いたときの静電場	32
2.8.9	一对の点電荷による電気双極子の静電場	33
2.8.10	4 個の点電荷による電気 4 極子の静電場	38
第 3 章	導体と静電場	44
3.1	導体内の静電場	44
3.2	境界値問題	44
3.3	電気容量	45
3.4	コンデンサー	47
3.5	例題	48
3.5.1	十分離れた二つの導体球の接続	48
3.5.2	無限に広い平らな導体近くにおいた点電荷	49
3.5.3	一様な電場の中に置かれた導球体	51
3.5.4	導体球の外に置いた点電荷	53
3.5.5	二つの導体球の電気容量係数	55
3.5.6	導体球と導体球殻の電気容量係数	57
3.5.7	平板のコンデンサーの電気容量	59
3.5.8	内球殻と外球殻のコンデンサーの電気容量	61
3.5.9	内円筒と外円筒のコンデンサーの電気容量	63
3.5.10	三枚の平行平板のコンデンサーの電気容量	64
第 4 章	定常電流	65
4.1	電流	65
4.2	オームの法則	65
4.3	導体中の電流分布	66

4.4	ジュールの法則	66
4.5	回路 (キルヒホッフの法則)	66
4.6	電気抵抗と電気容量	66
4.7	例題	67
4.7.1	内殻球電極と外殻球電極の間に電解質を充填した電極間の電気抵抗	67
4.7.2	内円筒電極と外円筒電極の間に電解質を充填した電極間の電気抵抗	68
4.7.3	電解質中に置いた二つの導体球電極間の電気抵抗	69
4.7.4	広く平らな導体と小さな導体球による電場	69
4.7.5	電気回路	70
第5章	静磁場	71
5.1	磁場	71
5.2	磁場中の電流	71
5.3	運動する荷電粒子に作用する力 (ローレンツ力)	71
5.4	電流が作る磁場 (ビオ・サバールの法則)	72
5.5	ベクトル・ポテンシャル	74
5.5.1	ベクトル・ポテンシャルと静電ポテンシャル	77
5.6	アンペールの法則	78
5.7	例題	80
5.7.1	直線回路による磁束密度	80
5.7.2	円形回路の中心線上の磁束密度	82
5.7.3	円形回路の遠方の磁束密度 (磁気双極子)	83
5.7.4	一様な磁束密度: B の中の円形回路に作用する力	85
5.7.5	電荷をもった円板の回転	86
5.7.6	共通の中心軸を持つ二つの円形回路に作用する力	87
5.7.7	サイクロトロン	88
5.7.8	サイクロイド	89
5.7.9	平行回路に作用する力	90
5.7.10	矩形回路による磁束密度	91
5.7.11	円筒面に沿って導線を密にまいたコイル (ソレノイド) による磁束密度	94
5.7.12	厚さ: $2d$ の無限に広い平板内に電流を流したときの磁束密度	95
5.7.13	無限に長い円柱内に軸方向に電流を流したときの磁束密度	97
第6章	電磁誘導	98
6.1	電荷の保存則	98
6.2	ファラデーの電磁誘導	99
6.3	アンペール・マクスウェルの法則	100
6.4	自己インダクタンスと磁場のエネルギー	101
6.5	相互インダクタンス	102
6.6	マクスウェル方程式	103
6.7	電磁場のエネルギー	103
6.8	電磁波	104
6.9	マクスウェルの応力テンソル	107
6.10	電磁場の運動量	110
6.11	電磁場のエネルギー保存	110
6.12	例題	111
6.12.1	直線移動する導体棒に生じる誘導起電力	111
6.12.2	回転する矩形回路に生じる誘導起電力	112
6.12.3	二つの長い中空円筒	113
6.12.4	ソレノイドコイルのインダクタンス	114

6.12.5 同一平面上の二つの円形回路の相互インダクタンス	116
6.12.6 共通の中心軸を持つ二つの円形回路の相互インダクタンス	117
6.12.7 細長い二本の平行な円柱の自己インダクタンス	118
6.12.8 コイルと抵抗の回路	119
6.12.9 コイル、コンデンサーと抵抗の回路 (交流起電力)	121
6.12.10 コイル、コンデンサーと抵抗の回路 (1)	123
6.12.11 コイル、コンデンサーと抵抗の回路 (2)	125
6.12.12 円盤コンデンサー放電時の極間の磁束密度と電磁波エネルギー	127
6.12.13 円形コンデンサーの極板移動時の磁束密度と電磁波エネルギー	129
6.12.14 正負の電荷を持つ二つの微小球を結んだときの周りの磁束密度	131
6.12.15 点電荷が z 軸上を移動するときの磁束密度	133
付録 A よく使う Maxima の関数	134
A.1 wxMaxima を使用した演習の進め方	134
A.2 宣言文	134
A.3 数式操作	135
A.4 行列	138
A.5 微分・積分	139
A.6 複素数	142
A.7 極限・級数	143
A.8 プログラム	144
A.9 その他	144
A.10 グラフ作成	145

第1章 はじめに

理工系で物理学を学ぶ初心者を対象に、Maxima(数式処理システム)を使った電磁気学基礎演習ノートを作成しました。電磁気学ではベクトル演算が多く使われており、Maximaを活用すると理解が容易ではと思いましたが、本書はあくまで演習ノートであるので、式の詳細な導出や証明、解説は行っていません。これらについては、参考文献などのすばらしい書籍等があるので、それらを参考にしてください。

物理学を学ぼうとしている人にとって、数学は道具であり、それをある程度、しっかり理解することを通して、物理の概念、本質の理解を深めていけると思います。数学の数式展開や証明に主眼をおく必要はありません。ここでまとめた電磁気学はベクトル解析の知識が不可欠で、Maxima(数式処理システム)の助けを借りると理解を深めるのが効率的ではないかと思い、本書をまとめました。

最近では、インターネットや電子辞書・電子書籍で多くの知識を容易に得ることができ、音声認識システムで、話したことを文章化できたり、翻訳できます。そして、これらが可能な携帯情報端末が一般に使用される時代となっています。また、人工知能を使った数式処理システムで因数分解、微分、積分、微分方程式など、多くの数式処理がパーソナルコンピューターで容易に可能になっています。フリーの数式処理ソフト:Maximaも公開され、多くの人がこれを使用していると思われます。

一方、近年、科学の進歩で、多くのことが明らかになり、分野も広がっており、変化が激しい世の中となっています。その中で、時間も限られる状況下でどのような深い知恵を習得すべきなのでしょう。前述したように、現在、携帯情報端末で多くの情報、知識を容易に得ることができます。また、将来は、人工知能の発達で、更に我々に対し多くの事柄を補佐してくれるでしょう。このような時代に備え、我々は何を身につけておくべきなのでしょう。私は高い問題解決能力を身につけることが大切ではないかと思っています。

問題解決能力を高めるには、できる限り多くのよい問題を解くことを経験し、物事の本質を理解するとともに、問題解決のプロセスを習得することが重要とされています¹⁷⁾。ここにMaximaを活用して、多くの例題を効率よく解き、物事の本質の理解を深め、経験を積む

ことができます。例えば、運動方程式の導出やその極座標系への変換では、手計算では気が遠くなるような作業であり、現実には本に書かれているようになるんですね、で終わってしまいます。しかし、Maximaなどの数式処理システムを用いれば、基本的な考え方をプログラムするだけで、後の大変な式の展開は計算機が実行してくれます。ここでは問題解決のプロセスを明らかにすることが要求され、効率よく問題解決能力を高める訓練が行えると思います。

本ノートは wxMaxima 13.04.2(Maxima-5.31.2) を使用してまとめました。これは会話形式で処理を実行でき、数式出力結果を Tex 出力・コピーができるとともに、グラフも出力・コピーできるので、大変便利です。また、これらを有効活用できる文書作成ソフト: \LaTeX 2 ϵ を使用し、本ノートをまとめました。

以下では Maxima の入力部分を枠で囲って表し、出力結果をその後に数式で示しています。また、小文字は関数、変数を、大文字は定数を表すのに統一して使っています。Maxima の偏微分の出力で、例えば本来、 $\frac{\partial}{\partial x}$ と記述されるべきが、 $\frac{d}{dx}$ と出力されます。ここでは Maxima の出力通りに記述しているので誤解の無いように願います。また、Maxima のプログラムに統一性を欠いたり、例題の選定・記述などで不十分なところもありますが、まずは、まとめた結果を早期に公表し、皆様に供することとしたので、ご容赦願います。

本ノートをまとめるにあたり、Maxima および \LaTeX 2 ϵ の開発や普及に携わられた方々に感謝いたします。

第2章 静電場の性質

2.1 クーロンの法則

二つの小さい球が帯電し、球間距離： r が球の大きさより十分大きいとする。小球の電荷： Q_1, Q_2 とすると、球間に作用する力： F は、

$$\vec{F} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{4\pi r^2} \frac{\vec{r}}{r} \quad (2.1.1)$$

ここで、 $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} C^2 \cdot N^{-1} \cdot m^{-2}$

多くの点電荷： $Q_1, Q_2 \dots Q_n$ が電荷： Q_0 に作用する力： F は、

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{Q_0 Q_i (\vec{r}_0 - \vec{r}_i)}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_i|^3} \quad (2.1.2)$$

2.2 静電場

単位正電荷に作用する力、電場の強さ： \vec{E} とすると、電荷： Q_1 を \vec{r}_1 に置いたとき、電場の強さ、静電場： \vec{E} は、

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 (\vec{r} - \vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} \quad (2.2.1)$$

\vec{r}_0 に置いた電荷： Q_0 に作用する力： \vec{F} は、

$$\vec{F} = Q_0 \vec{E}(\vec{r}_0) \quad (2.2.2)$$

多くの点電荷： $Q_1, Q_2 \dots Q_n$ による静電場： \vec{E} は、

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{Q_i (\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} \quad (2.2.3)$$

```
kill(all);
load("vect")$
depends([E,R],[x,y,z]);
MTE:matrix([E[x]],[E[y]],[E[z]]);
MTR:matrix([R[x]],[R[y]],[R[z]]);
MTR1:matrix([R1[x]],[R1[y]],[R1[z]]);
MTR-MTR1;
ABSR01:sqrt(%[1][1]^2+%[2][1]^2
+%[3][1]^2);
MTE=Q[1]/(4*pi*\epsilon[0])*(MTR-MTR1)
/ABSR01^3;
```

ここで \vec{E} , \vec{r} , \vec{r}_1 を下記とすると、

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}, \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_1 = \begin{pmatrix} R1_x \\ R1_y \\ R1_z \end{pmatrix}$$

上式を (2.2.3) 式に代入すると、

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{Q_1 (R_x - R1_x)}{4\epsilon_0 \pi ((R_z - R1_z)^2 + (R_y - R1_y)^2 + (R_x - R1_x)^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{Q_1 (R_y - R1_y)}{4\epsilon_0 \pi ((R_z - R1_z)^2 + (R_y - R1_y)^2 + (R_x - R1_x)^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{Q_1 (R_z - R1_z)}{4\epsilon_0 \pi ((R_z - R1_z)^2 + (R_y - R1_y)^2 + (R_x - R1_x)^2)^{\frac{3}{2}}} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

上記から、電荷の体積密度： $\rho(\vec{r}')$ が分布しているとき $\rho(\vec{r})$ における静電場： \vec{E} は、

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{V'} \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV' \quad (2.2.5)$$

2.3 ガウスの法則

原点に置いた電荷： Q_0 の中心から R の球面上の静電場： E_n は (2.2.1) 式から、

$$E_n = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_0}{R^2} \quad (2.3.1)$$

電荷を含み、原点を含む曲面の表面における上式の積分を考える。この積分は曲面の形によらないので、原点を中心とした球面を考えてもよい。上式の球面上すなわち、

$$\iint_S E_n dS = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_0}{R^2} \times 4\pi R^2 = \frac{Q_0}{\epsilon_0} \quad (2.3.2)$$

電荷が曲面の外部にある場合には、

$$\iint_S E_n dS = 0 \quad (2.3.3)$$

上式は下記のように記述できる。

$$\begin{aligned} & \iint_S \overrightarrow{E}(\vec{r}) \cdot \overrightarrow{n}(\vec{r}) dS \\ &= \begin{cases} \frac{Q_0}{\epsilon_0} & Q_0 \text{ が曲面：} S \text{ 内にあるとき} \\ 0 & Q_0 \text{ が曲面：} S \text{ 外にあるとき} \end{cases} \quad (2.3.4) \end{aligned}$$

2.4 静電ポテンシャル (電位)

静電場では一定の電場を維持するのにエネルギーを供給していないので、静電場での閉曲線: C に沿った下記の積分は零となる。

$$\int_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0 \quad (2.4.1)$$

下記のストークスの定理¹から、

$$\int_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot \vec{n} \, dS$$

上記から静電場において、

$$\nabla \times \vec{E} = \text{curl} \vec{E} = 0 \quad (2.4.2)$$

基準点: O から点: P とし、

$$\phi = - \int_O^P \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (2.4.3)$$

上式で得られる ϕ を静電ポテンシャルまたは電位と言う。

原点から \vec{r}_j にある電荷: Q_j による原点から \vec{r} の P の電場の強さ: \vec{E}_j は、(2.2.1) 式から、

$$\vec{E}_j = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_j \vec{R}_j}{R_j^3} \quad (2.4.4)$$

ここで、 $\vec{R}_j = \vec{r} - \vec{r}_j$, $R_j = |\vec{r} - \vec{r}_j|$

静電ポテンシャル: ϕ は (2.4.3) 式で無限遠を基準点とすると、

$$\phi = - \int_{\infty}^P \vec{E}_j \cdot d\vec{s} = \int_P^{\infty} \vec{E}_j \cdot d\vec{r}$$

$d\vec{r} = d\vec{R}_j$ であるから、

$$\begin{aligned} \phi &= \int_P^{\infty} \vec{E}_j \cdot d\vec{r} = \int_{R_j}^{\infty} \vec{E}_j \cdot d\vec{R}_j \\ &= \int_{R_j}^{\infty} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_j}{R_j^2} \cdot dR_j = \frac{Q_j}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{R_j} \right]_{R_j}^{\infty} \\ &= \frac{Q_j}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_j} \end{aligned}$$

以上から、

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_j}{|\vec{r} - \vec{r}_j|} \quad (2.4.5)$$

Q_1, Q_2, \dots, Q_n の電荷がある時、静電ポテンシャル: ϕ は、

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^n \frac{Q_j}{|\vec{r} - \vec{r}_j|} \quad (2.4.6)$$

電荷の体積密度: $\rho(\vec{r}')$ 、面積密度: $\sigma(\vec{r}')$ が分布している静電ポテンシャル: ϕ は、

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\iiint_{V'} \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' + \iint_{S'} \frac{\sigma(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dS' \right) \quad (2.4.7)$$

ϕ について、下記の関係がある。

$$d\phi = \frac{d\phi}{dx} dx + \frac{d\phi}{dy} dy + \frac{d\phi}{dz} dz$$

$$d\vec{r} = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k}$$

$$\text{grad} \phi = \frac{d\phi}{dx} \vec{i} + \frac{d\phi}{dy} \vec{j} + \frac{d\phi}{dz} \vec{k}$$

上式から、

$$d\phi = \text{grad} \phi \cdot d\vec{r} \quad (2.4.8)$$

上式と (2.4.3) 式から、

$$\text{grad} \phi \cdot d\vec{r} = -\vec{E} \cdot d\vec{r}$$

上式から ϕ と静電場: \vec{E} との関係式は、

$$\vec{E} = -\text{grad} \phi = - \left(\frac{d}{dx} \phi \right) \vec{i} - \left(\frac{d}{dy} \phi \right) \vec{j} - \left(\frac{d}{dz} \phi \right) \vec{k} \quad (2.4.9)$$

円柱座標系¹では、

$$\vec{E} = -\text{grad} \phi = - \left(\frac{d}{dr} \phi \right) \vec{e}_r - \left(\frac{1}{r} \frac{d}{d\theta} \phi \right) \vec{e}_\theta - \left(\frac{d}{dz} \phi \right) \vec{e}_z \quad (2.4.10)$$

極座標²では、

$$\vec{E} = -\text{grad} \phi = - \left(\frac{d}{dr} \phi \right) \vec{e}_r - \left(\frac{1}{r} \frac{d}{d\theta} \phi \right) \vec{e}_\theta - \left(\frac{d}{dz} \phi \right) \vec{e}_z \quad (2.4.11)$$

また、二点間: ($B \rightarrow A$) の積分経路として二つの C_1, C_2 を考える。積分経路: C_1 による静電ポテンシャル: ϕ は次式となり、 $C_1 - C_2$ は閉経路となるため、(2.4.1) 式から零となり、下記のように書き換えることができる。

$$\begin{aligned} \phi &= \int_{C_1} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1 - C_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} \\ &= 0 + \int_{C_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{C_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} \end{aligned}$$

上式から、静電ポテンシャル: ϕ は積分経路に依存しないことが示された。点: A の座標: (a, b, c) から点: B の座

¹溝口純敏: Maxima を使った物理数学基礎演習ノート、<http://www9.plala.or.jp/prac-maxima/> 第4章 ベクトルと行列、4.5.2 微分ベクトルの円柱座標系への変換

²溝口純敏: Maxima を使った物理数学基礎演習ノート、<http://www9.plala.or.jp/prac-maxima/> 第4章 ベクトルと行列、4.5.4 微分ベクトルの極座標系への変換

¹溝口純敏: Maxima を使った物理数学基礎演習ノート、<http://www9.plala.or.jp/prac-maxima/> 第4章 ベクトルと行列、4.4.3 ストークスの定理

標: (x, y, z) の積分経路で、経路: $(a, b, c) \rightarrow (x, b, c) \rightarrow (x, y, c) \rightarrow (x, y, z)$ とすると、

$$\phi = - \int_a^x E_x(x', b, c) dx' - \int_b^y E_y(x, y', c) dy' - \int_c^z E_z(x, y, z') dz'$$

上式を z で微分すると、

$$\frac{d\phi}{dz} = -E_z$$

同様にして、

$$\frac{d\phi}{dx} = -E_x, \quad \frac{d\phi}{dy} = -E_y$$

以上から (2.4.9) 式と同じ結果が得られた。

```
kill(all);
load("vect")$
R1:matrix([x],[y],[z]);
RD:matrix([xd],[yd],[zd]);
DR1:R1-RD;
DR2:DR1[1][1]^2+DR1[2][1]^2+DR1[3][1]^2;
PH1:1/(DR2)^(n/2);
grad(%);
express(%);
ev(%diff);
transpose(%);
subst([n=1],%);
```

(2.4.9) 式の一般的な下記の関係式について調べる。

$$\nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{rd}|^n} \quad (2.4.12)$$

ここで下記とする。

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \vec{rd} = \begin{pmatrix} xd \\ yd \\ zd \end{pmatrix}$$

(2.4.9) 式の被微分項は、

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{rd}|^n} = \frac{1}{\left((z-zd)^2 + (y-yd)^2 + (x-xd)^2 \right)^{\frac{n}{2}}}$$

上式の $grad$ は、

$$\begin{aligned} grad \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{rd}|^n} \right) &= \nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{rd}|^n} \\ &= \begin{pmatrix} -n(x-xd) \left((z-zd)^2 + (y-yd)^2 + (x-xd)^2 \right)^{-\frac{n}{2}-1} \\ -n(y-yd) \left((z-zd)^2 + (y-yd)^2 + (x-xd)^2 \right)^{-\frac{n}{2}-1} \\ -n \left((z-zd)^2 + (y-yd)^2 + (x-xd)^2 \right)^{-\frac{n}{2}-1} (z-zd) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.4.13)$$

上式をベクトル表記すると、

$$\begin{aligned} grad \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{rd}|^n} \right) &= \nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{rd}|^n} \\ &= -n \frac{\vec{r} - \vec{rd}}{|\vec{r} - \vec{rd}|^{n+2}} \end{aligned} \quad (2.4.14)$$

(2.4.13) 式で $n=1$ とすると、

$$\begin{aligned} grad \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{rd}|} \right) &= \nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{rd}|} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{x-xd}{\left((z-zd)^2 + (y-yd)^2 + (x-xd)^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \\ -\frac{y-yd}{\left((z-zd)^2 + (y-yd)^2 + (x-xd)^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \\ -\frac{z-zd}{\left((z-zd)^2 + (y-yd)^2 + (x-xd)^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.4.15)$$

上式をベクトル表記すると、下記となり、(2.4.9) 式と (2.4.4) 式の結果と一致する。

$$\begin{aligned} grad \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{rd}|} \right) &= \nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{rd}|} \\ &= -\frac{\vec{r} - \vec{rd}}{|\vec{r} - \vec{rd}|^3} \end{aligned} \quad (2.4.16)$$

(2.3.4) 式で電荷密度を $\rho(\vec{r})$ とし、体積分すると

$$\iint_S \overline{E(\vec{r})} \cdot \overline{n(\vec{r})} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho(\vec{r}) dV \quad (2.4.17)$$

ガウスの定理³から、

$$\iiint_V \nabla \cdot \vec{A} dV = \iiint_V div \vec{A} dV = \iint_S \vec{A} \cdot \vec{n} dS \quad (2.4.18)$$

(2.4.17) 式に上式のガウスの定理を適用すると、

$$\iint_S \overline{E(\vec{r})} \cdot \overline{n(\vec{r})} dS = \iiint_V div \overline{E(\vec{r})} dV \quad (2.4.19)$$

(2.4.17) 式、(2.4.19) 式から、

$$\iiint_V div \overline{E(\vec{r})} dV = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho(\vec{r}) dV$$

³溝口純敏: Maxima を使った物理数学基礎演習ノート、<http://www9.plala.or.jp/prac-maxima/> 第4章 ベクトルと行列、4.4.2 ガウスの定理

微分型のガウスの法則

上式から、微分型のガウスの法則は、

$$\nabla \cdot \vec{E} = \text{div} \vec{E} = \frac{d}{dz} E_z + \frac{d}{dy} E_y + \frac{d}{dx} E_x = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.4.20)$$

円柱座標系¹では、

$$\text{div} \vec{E} = \frac{d}{dz} E_z + \frac{d}{dr} E_r + \frac{d}{d\theta} E_\theta + \frac{E_r}{r} \quad (2.4.21)$$

極座標²では、

$$\text{div} \vec{E} = \frac{d}{dr} E_r + \frac{2E_r}{r} + \frac{d}{d\theta} E_\theta + \frac{E_\theta \cos(\theta)}{r \sin(\theta)} + \frac{d}{d\phi} E_\phi + \frac{E_\phi}{r \sin(\theta)} \quad (2.4.22)$$

ポアソンの方程式

上式に (2.4.9) 式を代入すると、下記のポアソンの方程式が得られる。

$$\text{div} \cdot \text{grad} \phi = \nabla^2 \phi = \frac{d^2}{dx^2} \phi + \frac{d^2}{dy^2} \phi + \frac{d^2}{dz^2} \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.4.23)$$

円柱座標系³では、

$$\nabla^2 \phi = \frac{d^2}{dz^2} \phi + \frac{d^2}{dr^2} \phi + \frac{d}{dr} \phi + \frac{d^2}{d\theta^2} \phi + \frac{d^2}{dr^2} \phi + \frac{d}{dr} \phi \quad (2.4.24)$$

極座標⁴では、

$$\nabla^2 \phi = \frac{d^2}{dr^2} \phi + \frac{\cos(\theta)}{r^2 \sin(\theta)} \left(\frac{d}{d\theta} \phi \right) + \frac{d^2}{dr^2} \phi + \frac{2}{r} \left(\frac{d}{dr} \phi \right) + \frac{d^2}{d\phi^2} \phi + \frac{d^2}{r^2 \sin(\theta)^2} \phi \quad (2.4.25)$$

¹溝口純敏：Maxima を使った物理数学基礎演習ノート、<http://www9.plala.or.jp/prac-maxima/> 第4章 ベクトルと行列、4.5.2 微分ベクトルの円柱座標系への変換

²溝口純敏：Maxima を使った物理数学基礎演習ノート、<http://www9.plala.or.jp/prac-maxima/> 第4章 ベクトルと行列、4.5.4 微分ベクトルの極座標系への変換

³溝口純敏：Maxima を使った物理数学基礎演習ノート、<http://www9.plala.or.jp/prac-maxima/> 第4章 ベクトルと行列、4.5.2 微分ベクトルの円柱座標系への変換

⁴溝口純敏：Maxima を使った物理数学基礎演習ノート、<http://www9.plala.or.jp/prac-maxima/> 第4章 ベクトルと行列、4.5.4 微分ベクトルの極座標系への変換

2.5 静電場と流れの場 (電気力線)

静電場の中で、ある位置の静電場の向きに動かしてできる曲線を電気力線という。

電気力線と静電ポテンシャル (電位) との関係について調べる。いま、等静電ポテンシャル上の近接した二場所: $\vec{r}, \vec{r} + d\vec{r}$ について、

$$\phi(x, y, z) = \phi(x + dx, y + dy, z + dz)$$

このとき、(2.4.8) 式、(2.4.9) 式から、

$$\begin{aligned} &\phi(x + dx, y + dy, z + dz) - \phi(x, y, z) \\ &= \frac{d\phi}{dx} dx + \frac{d\phi}{dy} dy + \frac{d\phi}{dz} dz \quad (2.5.1) \\ &= \text{grad } \phi \cdot d\vec{r} = -\vec{E} \cdot d\vec{r} = 0 \end{aligned}$$

上式は静電場のベクトル方向 (電気力線) は等静電ポテンシャル (電位) 面に垂直であることを示している。

流体力学における速度ポテンシャル: Φ と流速: V の関係は下記であり¹、(2.4.9) 式の静電ポテンシャル (電位) と静電場との関係と同じである。

$$\vec{V} = \text{grad } \Phi$$

三次元円柱座標で、 z 軸対称の場合には、速度ポテンシャル: Φ と流れ関数: Ψ の関係は次式となる²。

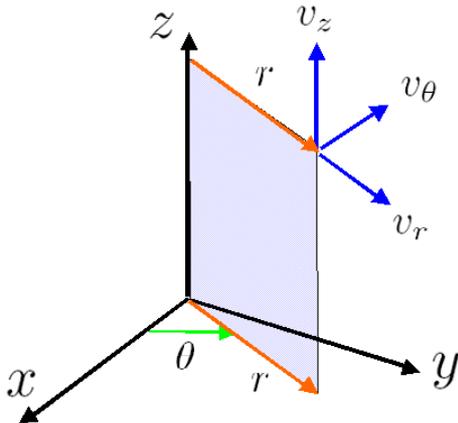


図 2.5.1: 円柱座標系

$$\frac{d}{dr} \Phi = -\frac{d}{dz} \Psi, \quad \frac{d}{dz} \Phi = \frac{d}{dr} \Psi \quad (2.5.2)$$

この速度ポテンシャル: Φ と流れ関数: Ψ の関係式を使えば、電気力線が得られる。

また、わき出しの速度ポテンシャルは、

$$\Phi = -\frac{m}{r}$$

¹溝口純敏: Maxima を使った流体力学基礎演習ノート、<http://www9.plala.or.jp/alcwitchery/> 2.9 速度ポテンシャル

²溝口純敏: Maxima を使った流体力学基礎演習ノート、<http://www9.plala.or.jp/alcwitchery/> 6.1.3 流れ関数の極座標・円柱座標表示 (2) 流れ関数の関係式の円柱座標表示

であり、点電荷の静電ポテンシャルと同じ形をしている。

```
kill(all);
R:matrix([r*cos(\theta)], [r*sin(\theta)],
[z]);
Z1:matrix([0], [0], [A]);
R1:R-Z1;
RR:R1.R1;
trigsimp(%);
R2:sqrt(%);
assume(r>0);
PH2:\phi=Q[1]/(4*pi*\epsilon[0])/R2;
diff(rhs(PH2), r, 1);
-%*r;
integrate(%, z);
PS1:\psi=factor(%);
```

(2.4.4) 式から、静電ポテンシャル: ϕ は、

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|}$$

ここで、円柱座標の $z = A$ の位置に点電荷: Q_1 を置いたとき、静電ポテンシャル: ϕ は、

$$\phi = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{(z-A)^2 + r^2}} \quad (2.5.3)$$

上式を (2.5.2) 式を用いて電気力線: ψ を求めると、

$$\psi = \frac{Q_1 (z-A)}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{(z-A)^2 + r^2}} \quad (2.5.4)$$

また、二次元の xy 座標では速度ポテンシャル: Φ と流れ関数: Ψ の関係は次式となる³。

$$\frac{d}{dx} \Phi = \frac{d}{dy} \Psi, \quad \frac{d}{dy} \Phi = -\frac{d}{dx} \Psi \quad (2.5.5)$$

³溝口純敏: Maxima を使った流体力学基礎演習ノート、<http://www9.plala.or.jp/alcwitchery/> 5.1.1 2次元速度ポテンシャルと流れ関数

2.6 静電エネルギー

二つの点電荷： Q_1 と Q_2 の静電エネルギーについて調べる。いま、点電荷： Q_1 が \vec{r}_1 に固定されているとして、点電荷： Q_2 に作用する外力は、 $Q_2 \vec{E}_1$ である。この外力と同じ大きさで逆向きの力で $\infty \rightarrow \vec{r}_2$ まで動かしたとき、仕事： W_{12} 、静電エネルギー： U_{12} は、

$$W_{12} = U_{12} = - \int_{\infty}^{\vec{r}_2} Q_2 \vec{E}_1 d\vec{r} \quad (2.4.9) \text{ 式から、}$$

$$W_{12} = U_{12} = \int_{\infty}^{\vec{r}_2} Q_2 \nabla \phi_1 d\vec{r} = Q_2 [\phi_1(\vec{r}_2) - \phi_1(\infty)] \quad (2.4.4) \text{ 式から、上式は、}$$

$$W_{12} = U_{12} = Q_2 \phi_1(\vec{r}_2) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \quad (2.6.1)$$

3 個の点電荷の静電エネルギー

(2.6.1) 式から、3 個の点電荷の静電エネルギーは、

$$U_{123} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_2 Q_3}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_3 Q_1}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|} \quad (2.6.2)$$

多数の点電荷の静電エネルギー

(2.6.1) 式から、 Q_i と Q_j の組み合わせでは、

$$W_{ij} = U_{ij} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i Q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$$

上式の $i = 1 \rightarrow n, j = 1 \rightarrow n$ の組み合わせを行うと、 $i = j$ は除かないといけないこと、 $i = 3, j = 4$ と $i = 4, j = 3$ は同じ結果になることから、全ての組み合わせ結果を $\frac{1}{2}$ にする必要がある。以上から、多数の点電荷の静電エネルギーは、

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i Q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \quad \text{ここで、} i \neq j \quad (2.6.3)$$

(2.4.6) 式から、

$$\phi_i(\vec{r}_i) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^n \frac{Q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \quad (2.6.4)$$

(2.6.3) 式に上式を代入すると、

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n Q_i \phi_i(\vec{r}_i) \quad (2.6.5)$$

連続的な電荷の静電エネルギー

(2.6.3) 式、(2.6.4) 式、(2.6.5) 式から電荷密度： $\rho(\vec{r})$ が連続的に分布している電荷の静電エネルギーは、

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \iiint_V \rho(\vec{r}) \phi(\vec{r}) dV \\ &= \frac{1}{2} \iiint_V \iiint_{V'} \frac{\rho(\vec{r}) \rho(\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|} dV' dV \end{aligned}$$

ここで、 $\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{V'} \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$ (2.6.6)

場に分布する静電エネルギー

(2.6.6) 式から静電エネルギーは、

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V \rho(\vec{r}) \phi(\vec{r}) dV \quad (2.6.7)$$

(2.4.20) 式から微分型のガウスの法則は、

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.6.8)$$

(2.6.7) 式に (2.6.8) 式を代入すると、

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \iiint_V \text{div} \vec{E} \phi(\vec{r}) dV \quad (2.6.9)$$

上式の $\text{div} \vec{E} \phi(\vec{r})$ は下記¹ から、

$$\text{div} (f \vec{A}) = f \text{div} (\vec{A}) + \text{grad} (f) \cdot \vec{A}$$

$$\text{div} \vec{E} \phi(\vec{r}) = \text{div} (\vec{E} \phi(\vec{r})) - \text{grad} \phi(\vec{r}) \cdot \vec{E}$$

(2.6.9) 式に上式を代入し、ガウスの定理：(2.4.18) 式から、

$$\begin{aligned} U &= \frac{\epsilon_0}{2} \iiint_V \text{div} (\vec{E} \phi(\vec{r})) dV \\ &\quad - \frac{\epsilon_0}{2} \iiint_V \text{grad} \phi(\vec{r}) \cdot \vec{E} dV \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} \iint_S \vec{E} \phi(\vec{r}) dS - \frac{\epsilon_0}{2} \iiint_V \text{grad} \phi(\vec{r}) \cdot \vec{E} dV \end{aligned} \quad (2.6.10)$$

$E \propto \frac{1}{r^2}, \phi \propto \frac{1}{r}$ であるから、 $E \phi \propto \frac{1}{r^3}$ で積分する面積： $S \propto r^2$ であるから、十分大きい r では上式の第一項は零となる。また、(2.4.9) 式から、

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \iiint_V (\vec{E})^2 dV \quad (2.6.11)$$

上式から、静電エネルギーの体積密度： u_e は、

$$u_e = \frac{\epsilon_0}{2} (\vec{E})^2 \quad (2.6.12)$$

¹溝口純敏：Maxima を使った物理数学基礎演習ノート、<http://www9.plala.or.jp/prac-maxima/> 第 4 章 ベクトルと行列、4.3.6 ∇ を使った演算

2.7 電気双極子

電荷： Q_1, Q_2, \dots, Q_n がお互い十分近い位置にある時の静電ポテンシャル： ϕ を求める。電荷： Q_j の位置： \vec{r}_j とすると \vec{r} における静電ポテンシャル： ϕ は (2.4.6) 式から、

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^n \frac{Q_j}{|\vec{r} - \vec{r}_j|} \quad (2.7.1)$$

電荷の中の一点： \vec{r}_0 とする。電荷： Q_1, Q_2, \dots, Q_n はお互い十分近い位置にあるので、

$$|\vec{r} - \vec{r}_0| \gg |\vec{r}_j - \vec{r}_0| \quad (2.7.2)$$

上記から、

$$\begin{aligned} |\vec{r} - \vec{r}_j| &= |(\vec{r} - \vec{r}_0) - (\vec{r}_j - \vec{r}_0)| \\ &= ((\vec{r} - \vec{r}_0) - (\vec{r}_j - \vec{r}_0)) \cdot ((\vec{r} - \vec{r}_0) - (\vec{r}_j - \vec{r}_0))^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(|\vec{r} - \vec{r}_0|^2 - 2(\vec{r} - \vec{r}_0)(\vec{r}_j - \vec{r}_0) + |\vec{r}_j - \vec{r}_0|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (2.7.3)$$

上式で $|\vec{r} - \vec{r}_0| \gg |\vec{r}_j - \vec{r}_0|$ から、

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_j|} &= \frac{1}{\left(|\vec{r} - \vec{r}_0|^2 - 2(\vec{r} - \vec{r}_0)(\vec{r}_j - \vec{r}_0) + |\vec{r}_j - \vec{r}_0|^2 \right)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} \frac{1}{\left(1 - \frac{2(\vec{r} - \vec{r}_0)(\vec{r}_j - \vec{r}_0)}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^2} + \frac{|\vec{r}_j - \vec{r}_0|^2}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^2} \right)^{\frac{1}{2}}} \\ &\approx \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} \frac{1}{\left(1 - \frac{2(\vec{r} - \vec{r}_0)(\vec{r}_j - \vec{r}_0)}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^2} \right)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned} \quad (2.7.4)$$

下記で $0 < x \ll 1$ として、Taylor 展開すると、

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} \approx 1 + \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} + \frac{5x^3}{16} + \dots$$

この関係から、

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_j|} &\approx \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} \frac{1}{\left(1 - \frac{2(\vec{r} - \vec{r}_0)(\vec{r}_j - \vec{r}_0)}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^2} \right)^{\frac{1}{2}}} \\ &\approx \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} \left(1 + \frac{(\vec{r} - \vec{r}_0)(\vec{r}_j - \vec{r}_0)}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^2} \right) \end{aligned}$$

(2.7.1) 式に上式を代入すると、

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} \sum_{j=1}^n Q_j \\ &\quad + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{r} - \vec{r}_0)}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} \sum_{j=1}^n Q_j (\vec{r}_j - \vec{r}_0) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} Q \\ &\quad + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{r} - \vec{r}_0)}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} \vec{p} \end{aligned}$$

ここで、 $Q = \sum_{j=1}^n Q_j$, $\vec{p} = \sum_{j=1}^n Q_j (\vec{r}_j - \vec{r}_0)$

$$(2.7.5)$$

$Q = \sum_{j=1}^n Q_j \neq 0$ の場合

いま、下記のように電荷の重心： \vec{r}_0 を選ぶと、

$$\vec{r}_0 = \frac{\sum_{j=1}^n Q_j \vec{r}_j}{Q} \quad (2.7.6)$$

(2.7.5) 式の \vec{p} の定義式に上式を代入すると $\vec{p} = 0$ となり、(2.7.5) 式から次式となり、電荷の重心に全ての電荷： Q がある場合の電場となる。

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} Q \quad (2.7.7)$$

ここで、 $Q = \sum_{j=1}^n Q_j$

$Q = \sum_{j=1}^n Q_j = 0$ の場合

$$\vec{p} = \sum_{j=1}^n Q_j (\vec{r}_j - \vec{r}_0) = \sum_{j=1}^n Q_j \vec{r}_j - \sum_{j=1}^n Q_j \vec{r}_0 = \sum_{j=1}^n Q_j \vec{r}_j \quad (2.7.8)$$

上式から、 \vec{p} は \vec{r}_0 に関係なく、 $\vec{r}_0 = 0$ とすることができ、静電ポテンシャル： ϕ は (2.7.5) 式から、

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{|\vec{r}|^3} \quad (2.7.9)$$

多くの点電荷： $Q_1, Q_2 \dots Q_n$ による静電場： \vec{E} は、(2.2.3) 式から、

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^n \frac{Q_j (\vec{r} - \vec{r}_j)}{|\vec{r} - \vec{r}_j|^3} \quad (2.7.10)$$

(2.7.4) 式から、

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_j|^3} \approx \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} \frac{1}{\left(1 - \frac{2(\vec{r} - \vec{r}_0)(\vec{r}_j - \vec{r}_0)}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \quad (2.7.11)$$

$0 < x \ll 1$ のとき、次式の Taylor 展開から、

$$\frac{1}{(1-2x)^{\frac{3}{2}}} \approx 1 + 3x + \frac{15x^2}{2} + \frac{35x^3}{2} + \frac{315x^4}{8} + \dots$$

(2.7.11) 式は、

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_j|^3} \approx \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} \left(1 + \frac{3(\vec{r} - \vec{r}_0)(\vec{r}_j - \vec{r}_0)}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^2}\right)$$

(2.7.10) 式に上式を代入すると、静電場： \vec{E} は、 $|\vec{r} - \vec{r}_0| \gg |\vec{r}_j - \vec{r}_0|$ であるから、

$$\begin{aligned} \vec{E} &\approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^n \frac{Q_j (\vec{r} - \vec{r}_j)}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} \left(1 + \frac{3(\vec{r} - \vec{r}_0)(\vec{r}_j - \vec{r}_0)}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^2}\right) \\ &\approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_0|^3} \sum_{j=1}^n Q_j ((\vec{r} - \vec{r}_0) - (\vec{r}_j - \vec{r}_0)) \left(1 + \frac{3(\vec{r} - \vec{r}_0)(\vec{r}_j - \vec{r}_0)}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^2}\right) \\ &\approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_0|^3} \left(\sum_{j=1}^n Q_j (\vec{r} - \vec{r}_0) - \sum_{j=1}^n Q_j (\vec{r}_j - \vec{r}_0) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^n Q_j (\vec{r} - \vec{r}_0) \frac{3(\vec{r} - \vec{r}_0)(\vec{r}_j - \vec{r}_0)}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^2} - \sum_{j=1}^n Q_j \frac{3(\vec{r} - \vec{r}_0)|\vec{r}_j - \vec{r}_0|^2}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^2} \right) \\ &\approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_0|^3} \left(\sum_{j=1}^n Q_j (\vec{r} - \vec{r}_0) - \sum_{j=1}^n Q_j (\vec{r}_j - \vec{r}_0) + \sum_{j=1}^n Q_j (\vec{r} - \vec{r}_0) \frac{3(\vec{r} - \vec{r}_0)(\vec{r}_j - \vec{r}_0)}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^2} \right) \end{aligned} \quad (2.7.12)$$

$Q = \sum_{j=1}^n Q_j \neq 0$ の場合

いま、 \vec{r}_0 を電荷の重心に選ぶと $\vec{p} = \sum_{j=1}^n Q_j (\vec{r}_j - \vec{r}_0) = 0$ となるので、 \vec{E} は次式となり、電荷の重心： \vec{r}_0 に全ての電荷を置いたときの静電場となる。

$$\vec{E} \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_0|^3} \sum_{j=1}^n Q_j (\vec{r} - \vec{r}_0) \quad (2.7.13)$$

$Q = \sum_{j=1}^n Q_j = 0$ の場合

$$\vec{E} \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_0|^3} \left(-\vec{p} + \frac{3(\vec{p}(\vec{r} - \vec{r}_0))(\vec{r} - \vec{r}_0)}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^2} \right) \quad (2.7.14)$$

また、 \vec{p} は \vec{r}_0 に関係なく、 $\vec{r}_0 = 0$ とすることができ、

$$\vec{E} \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}|^3} \left(-\vec{p} + \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r}) \vec{r}}{|\vec{r}|^2} \right) \quad (2.7.15)$$

2.8 例題

例題 2.8.1 三点電荷に作用する力

x 軸上の点 $A: x = -A$ に電荷: Q_A 、点 $B: x = A$ に電荷: Q_A を置き、点 $P: (x, y)$ に電荷: Q_P を置いたとき、電荷: Q_P に作用する力: \vec{F} を求める。

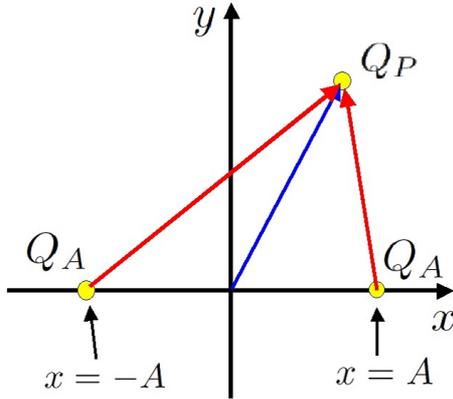


図 2.8.1: 三点電荷に作用する力

```
kill(all);
load("vect")$
MTP:matrix([x],[y],[0]);
MTA:matrix([-A],[0],[0]);
MTB:matrix([+A],[0],[0]);
RPA:MTP-MTA;
ABPA:sqrt(RPA[1][1]^2+RPA[2][1]^2
+RPA[3][1]^2);
RPB:MTP-MTB;
ABPB:sqrt(RPB[1][1]^2+RPB[2][1]^2
+RPB[3][1]^2);
E1:Q[A]*RPA/4/%pi/\epsilon[0]/ABPA^3
+Q[A]*RPB/4/%pi/\epsilon[0]/ABPB^3;
F1:E1*Q[P];
subst([x=0],%);
```

点: P, A, B は、

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{A} = \begin{pmatrix} -A \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} A \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ここで、

$$\vec{P} - \vec{A} = \begin{pmatrix} A+x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{P} - \vec{A}| = \sqrt{(A+x)^2 + y^2} \quad (2.8.1)$$

$$\vec{P} - \vec{B} = \begin{pmatrix} x-A \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{P} - \vec{B}| = \sqrt{(x-A)^2 + y^2}$$

電荷: Q_1 による電場の強さ、静電場: \vec{E} は (2.2.1) 式から、

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1(\vec{r} - \vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} \quad (2.8.2)$$

(2.8.2) 式に (2.8.1) 式を代入し、点: P の静電場: \vec{E} は、

$$\vec{E}(\vec{P}) = \begin{pmatrix} \frac{(A+x)Q_A}{4\pi\epsilon_0((A+x)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{(x-A)Q_A}{4\pi\epsilon_0((x-A)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{yQ_A}{4\pi\epsilon_0((A+x)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{yQ_A}{4\pi\epsilon_0((x-A)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.8.3)$$

静電場: \vec{E} の中の \vec{r}_0 に置いた電荷: Q_0 に作用する力: \vec{F} は (2.2.2) 式から、

$$\vec{F} = Q_0 \vec{E}(\vec{r}_0) \quad (2.8.4)$$

上式に (2.8.3) 式を代入し、点: P に置いた電荷: Q_P に作用する力: \vec{F} は、

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} \left(\frac{(A+x)Q_A}{4\pi\epsilon_0((A+x)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{(x-A)Q_A}{4\pi\epsilon_0((x-A)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \right) Q_P \\ \left(\frac{yQ_A}{4\pi\epsilon_0((A+x)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{yQ_A}{4\pi\epsilon_0((x-A)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \right) Q_P \\ 0 \end{pmatrix}$$

y 軸上に電荷: Q_P がある場合には、

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{yQ_A Q_P}{2\pi\epsilon_0(A^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

例題 2.8.2 半径： R の球の中に体電荷密度： ρ また、 ρ を置いたときの静電場

$$|\vec{r} - \vec{a}| = \sqrt{-2ar \cos(\theta) + r^2 + a^2} \quad (2.8.7)$$

静電場の公式

極座標： (r, θ, ψ) を用いて、静電場を求める中心からの位置： \vec{r} 、体電荷密度の位置： \vec{a} とすると、静電場： \vec{E} は (2.2.1) 式から次式で得られる。

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q(\vec{r} - \vec{a})}{|\vec{r} - \vec{a}|^3} \quad (2.8.5)$$

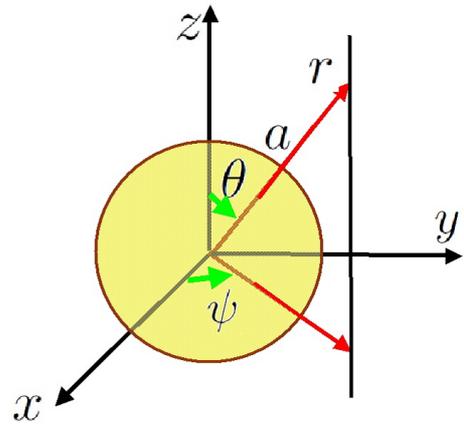


図 2.8.2: 球による静電場

体電荷密度： ρ として、静電場： \vec{E} は (2.8.5) 式に上式を代入し、積分すると、

$$\begin{aligned} E &= \int_{a=0}^R \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\psi=0}^{2\pi} \frac{a^2 \rho \sin(\theta) (\vec{r} - \vec{a})}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{a}|^3} d\psi d\theta da \\ &= \int_{a=0}^R \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\psi=0}^{2\pi} \begin{pmatrix} -\frac{a^3 \cos(\psi) \rho \sin(\theta)^2}{4\pi\epsilon_0 (-2ar \cos(\theta) + r^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \\ -\frac{a^3 \sin(\psi) \rho \sin(\theta)^2}{4\pi\epsilon_0 (-2ar \cos(\theta) + r^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{a^2 \rho (r - a \cos(\theta)) \sin(\theta)}{4\pi\epsilon_0 (-2ar \cos(\theta) + r^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \end{pmatrix} d\psi d\theta da \\ &= \int_{a=0}^R \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a^2 \left(\frac{r+a}{r^2 \sqrt{r^2 + 2ar + a^2}} + \frac{r-a}{r^2 \sqrt{r^2 - 2ar + a^2}} \right) \rho \end{pmatrix} da \end{aligned} \quad (2.8.8)$$

$r > R$ の場合、

$$\sqrt{r^2 + 2ar + a^2} = r + a, \quad \sqrt{r^2 - 2ar + a^2} = r - a$$

上式を (2.8.8) 式に代入すると、

$$E = \int_{a=0}^R \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{a^2 \rho}{\epsilon_0 r^2} \end{pmatrix} da = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} \end{pmatrix}$$

$r < R$ の場合、

$0 < a < r$ の範囲では、

$$\sqrt{r^2 + 2ar + a^2} = r + a, \quad \sqrt{r^2 - 2ar + a^2} = r - a$$

$r < a < R$ の範囲では、

$$\sqrt{r^2 + 2ar + a^2} = r + a, \quad \sqrt{r^2 - 2ar + a^2} = a - r$$

上式を (2.8.8) 式に代入すると、

```
kill(all);
load("vect")$
depends([\psi], [r]);
R0:matrix([0],[0],[r]);
assume(r>R);
assume(R>0);
assume(r>0);
assume(a>0);
R1:matrix([\cos(\psi)*sin(\theta)*a],
[sin(\psi)*sin(\theta)*a],
[\cos(\theta)*a]);
R01:R0-R1;
%[1][1]^2+%[2][1]^2+%[3][1]^2;
trigsimp(%);
ABR01:sqrt(%);
a^2*sin(\theta)*R01/ABR01^3*\rho/4/%pi
/\epsilon[0];
integrate(%,\psi,0,2*pi);
EDI1:integrate(%,\theta,0,%pi);
subst([sqrt(r^2+2*a*r+a^2)=r+a],EDI1);
subst([sqrt(r^2-2*a*r+a^2)=r-a],%);
factor(%);
E1:E=integrate(%,a,0,R);
subst([sqrt(r^2+2*a*r+a^2)=r+a],EDI1);
subst([sqrt(r^2-2*a*r+a^2)=r-a],%);
factor(%);
E21:integrate(%,a,0,r);
subst([sqrt(r^2+2*a*r+a^2)=r+a],EDI1);
subst([sqrt(r^2-2*a*r+a^2)=a-r],%);
factor(%);
E22:integrate(%,a,r,R);
E2:E=E21+E22;
```

\vec{r} を極座標の z 軸上に置くと、

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}, \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a \cos(\psi) \sin(\theta) \\ a \sin(\psi) \sin(\theta) \\ a \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (2.8.6)$$

$$E = \int_{a=0}^r \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{a^2 \rho}{\epsilon_0 r^2} \end{pmatrix} da + \int_{a=r}^R \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} da = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{r \rho}{3 \epsilon_0} \end{pmatrix}$$

上式から、

$$E = \begin{cases} \frac{\rho R^3}{3 \epsilon_0 r^2} & r > R \\ \frac{r \rho}{3 \epsilon_0} & r < R \end{cases} \quad (2.8.9)$$

ポテンシャルの公式

Q_j の電荷がある時、静電ポテンシャル： ϕ は (2.4.4) 式から、

$$\phi = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{Q}{|\vec{r} - \vec{a}|} \quad (2.8.10)$$

```

a^2*sin(\theta)/ABR01*\rho/4/%pi
/\epsilon[0];
integrate(%,\psi,0,2*pi);
PDI1:integrate(%,\theta,0,%pi);
subst([\sqrt(r^2+2*a*r+a^2)=r+a],PDI1);
subst([\sqrt(r^2-2*a*r+a^2)=r-a],%);
factor(%);
PH1:\phi=integrate(%,a,0,R);
subst([\sqrt(r^2+2*a*r+a^2)=r+a],PDI1);
subst([\sqrt(r^2-2*a*r+a^2)=r-a],%);
factor(%);
P21:integrate(%,a,0,r);
subst([\sqrt(r^2+2*a*r+a^2)=r+a],PDI1);
subst([\sqrt(r^2-2*a*r+a^2)=a-r],%);
factor(%);
P22:integrate(%,a,r,R);
\phi=P21+P22;
PH2:factor(%);

```

ϕ は、(2.8.10) 式に (2.8.7) 式を代入し、積分すると、

$$\begin{aligned} \phi &= \int_{a=0}^R \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\psi=0}^{2\pi} \frac{a^2 \rho \sin(\theta)}{4 \pi \epsilon_0 \sqrt{-2 a r \cos(\theta) + r^2 + a^2}} d\psi d\theta da \\ &= \int_{a=0}^R \frac{a^2}{2 \epsilon_0} \left(\frac{\sqrt{r^2 + 2 a r + a^2}}{a r} - \frac{\sqrt{r^2 - 2 a r + a^2}}{a r} \right) \rho da \end{aligned} \quad (2.8.11)$$

求める静電ポテンシャルの位置が $r > R$ のとき、
 $\sqrt{r^2 + 2 a r + a^2} = r + a$, $\sqrt{r^2 - 2 a r + a^2} = r - a$ であるから、

$$\phi = \int_{a=0}^R \frac{a^2 \left(\frac{r+a}{a r} - \frac{r-a}{a r} \right) \rho}{2 \epsilon_0} da = \int_{a=0}^R \frac{a^2 \rho}{\epsilon_0 r} da = \frac{\rho R^3}{3 \epsilon_0 r} \quad (2.8.12)$$

求める静電ポテンシャルの位置が $r < R$ のとき、

$$\begin{aligned} \phi &= \int_{a=0}^r \frac{a^2}{2 \epsilon_0} \left(\frac{\sqrt{r^2 + 2 a r + a^2}}{a r} - \frac{\sqrt{r^2 - 2 a r + a^2}}{a r} \right) \rho da \\ &\quad + \int_{a=r}^R \frac{a^2}{2 \epsilon_0} \left(\frac{\sqrt{r^2 + 2 a r + a^2}}{a r} - \frac{\sqrt{r^2 - 2 a r + a^2}}{a r} \right) \rho da \end{aligned} \quad (2.8.13)$$

上式の第一項では、 $0 < a < r$ で $\sqrt{r^2 + 2 a r + a^2} = r + a$, $\sqrt{r^2 - 2 a r + a^2} = r - a$ 、上式の第二項では、 $r < a < R$ で $\sqrt{r^2 + 2 a r + a^2} = r + a$, $\sqrt{r^2 - 2 a r + a^2} =$

$a - r$ であるから、

$$\begin{aligned}\phi &= \int_{a=0}^r \frac{a^2 \left(\frac{r+a}{ar} - \frac{r-a}{ar} \right) \rho}{2 \epsilon_0} da \\ &\quad + \int_{a=r}^R \frac{a^2 \left(\frac{r+a}{ar} - \frac{a-r}{ar} \right) \rho}{2 \epsilon_0} da \\ &= \int_{a=0}^r \frac{a^2 \rho}{\epsilon_0 r} da + \int_{a=r}^R \frac{a \rho}{\epsilon_0} da \\ &= \frac{\rho (3R^2 - r^2)}{6 \epsilon_0}\end{aligned}\quad (2.8.14)$$

以上から、

$$\phi = \begin{cases} \frac{\rho R^3}{3 \epsilon_0 r} & r > R \\ \frac{\rho (3R^2 - r^2)}{6 \epsilon_0} & r < R \end{cases}\quad (2.8.15)$$

(2.4.9) 式から ϕ と静電場: \vec{E} との関係式は、

$$\vec{E} = -\text{grad } \phi \quad (2.8.16)$$

ところで、下記であるから、

$$\text{grad}(\phi) = \begin{pmatrix} \frac{d}{dr} \phi \\ \frac{d}{d\theta} \phi \\ \frac{r}{r \sin(\theta)} \frac{d}{d\phi} \phi \end{pmatrix}$$

静電場: \vec{E}_n は (2.8.15) 式を r で微分して得られ、(2.8.9) 式と同じ結果が得られた。

$$E_n = \begin{cases} \frac{\rho R^3}{3 \epsilon_0 r^2} & r > R \\ \frac{\rho r}{3 \epsilon_0} & r < R \end{cases}\quad (2.8.17)$$

ガウスの法則

```
EN1:E[n]*4*pi*r^2=4*pi/3*epsilon[0]
*A^3*rho;
EN2:E[n]*4*pi*r^2=4*pi/3*epsilon[0]
*r^3*rho;
EN11:solve(EN1,E[n])[1];
EN21:solve(EN2,E[n])[1];
PH51:\phi=integrate(rhs(EN11),r,r,inf);
PH52:\phi=integrate(rhs(EN21),r,r,R)
+integrate(rhs(EN11),r,R,inf);
factor(%);
```

静電場: E は球の中心の点対称であるから、径: r 方向 E_n となっている。(2.3.4) 式から、

$$\begin{aligned}\iint_S E_n dS &= E_n \cdot 4\pi r^2 = \frac{4\pi R^3 \rho}{3 \epsilon_0} & r > R \\ \iint_S E_n dS &= E_n \cdot 4\pi r^2 = \frac{4\pi r^3 \rho}{3 \epsilon_0} & r < R\end{aligned}\quad (2.8.18)$$

上式から、

$$\begin{aligned}E_n &= \frac{\rho R^3}{3 \epsilon_0 r^2} & r > R \\ E_n &= \frac{r \rho}{3 \epsilon_0} & r < R\end{aligned}\quad (2.8.19)$$

静電ポテンシャル: ϕ は上式を $r \rightarrow \infty$ の積分で得られる。 $r > R$ の場合には、

$$\phi = \int_r^\infty E_n dr = \int_r^\infty \frac{\rho R^3}{3 \epsilon_0 r^2} dr = \frac{\rho R^3}{3 \epsilon_0 r} \quad (2.8.20)$$

$r < R$ の場合には、

$$\begin{aligned}\phi &= \int_r^R E_n dr + \int_R^\infty E_n dr \\ &= \int_r^R \frac{r \rho}{3 \epsilon_0} dr + \int_R^\infty \frac{\rho R^3}{3 \epsilon_0 r^2} dr = \frac{\rho (3R^2 - r^2)}{6 \epsilon_0}\end{aligned}\quad (2.8.21)$$

(2.8.14) 式と同じ結果が得られた。

ポアソンの方程式

```
DIF1: 'diff(\phi,r,2)+2*'diff(\phi,r,1)/r
      =-\rho/\epsilon[0];
ode2(%,\phi,r);
```

(2.4.23) 式のポアソンの方程式で $\nabla^2 \phi$ の極座標表記¹ を適用すると下記となる。

$$\nabla^2 \phi = \frac{d^2 \phi}{dr^2} + \frac{\cos(\theta)}{r^2 \sin(\theta)} \left(\frac{d}{d\theta} \phi \right) + \frac{d^2}{dr^2} \phi + \frac{2}{r} \left(\frac{d}{dr} \phi \right) + \frac{d^2}{dr^2} \phi \frac{1}{\sin^2(\theta)}$$

上式で点対称を考慮すると、ポアソンの方程式は、

$$\frac{2}{r} \left(\frac{d}{dr} \phi \right) + \frac{d^2}{dr^2} \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

上記の微分方程式を ode2 関数で解くと、

$$\phi = -\frac{r^2 \rho}{6 \epsilon_0} + \frac{\%k2}{r} + \frac{\%k1}{\epsilon_0}$$

(2.8.14) 式と同じ型の解が得られた。 $\%k1, \%k2$ は境界条件で与えられる。

```
kill(all);
load("vect")$
assume(r>0);
R:matrix([r*sin(\theta)*cos(\psi)],
         [r*sin(\theta)*sin(\psi)],
         [r*cos(\theta)]);
R.R;
trigsimp(%);
R2:sqrt(%);
P1:\phi=\phi[0]*R/R2;
ER1:E[r]=diff(rhs(P1),r,1);
R:matrix([r*cos(\theta)],
         [r*sin(\theta)], [z]);
R.R;
trigsimp(%);
R2:sqrt(%);
P1:\phi=\phi[0]*R/R2;
diff(rhs(P1),r,1);
-%*r;
PS1:\Psi=integrate(%,z);
P2:subst([R=1,\phi[0]=1,r=x,z=y],rhs(P1));
PS2:subst([R=1,\phi[0]=1,r=x,z=y],
          rhs(PS1));
```

等静電ポテンシャルと電気力線

三次元極座標では、静電ポテンシャル： ϕ と静電場： \vec{E} は、

$$\phi = \frac{\phi_0 R}{r}$$

$$E_r = \frac{\phi_0 R}{r^2}$$

三次元円柱座標では、静電ポテンシャル： ϕ は次式となり、(2.5.2) 式から ψ は、

$$\phi = \frac{\phi_0 R}{\sqrt{z^2 + r^2}}$$

$$\psi = \frac{\phi_0 z R}{\sqrt{z^2 + r^2}}$$

等静電ポテンシャルは、

```
#!/gnuplot
set xrange [-3:3]
set yrange [-3:3]
set isosamples 128,128
set contour base
set cntrparam levels incremental -3,0.1,3
unset key
unset surface
set view map
splot 1/sqrt(y**2+x**2)
# EOF
```

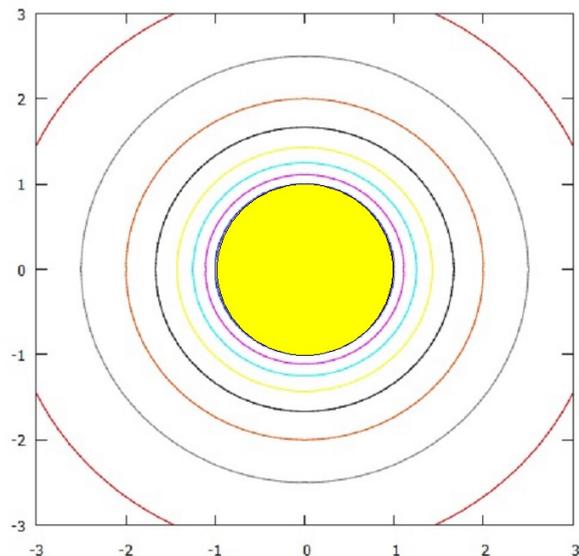


図 2.8.3: 等静電ポテンシャル $R = 1$

¹溝口純敏: Maxima を使った物理数学基礎演習ノート、
<http://www9.plala.or.jp/prac-maxima/> 第4章 ベクトルと行列、4.5.4 微分ベクトルの極座標系への変換

電気力線は、

```
#!/gnuplot
set xrange [-3:3]
set yrange [-3:3]
set isosamples 128,128
set contour base
set cntrparam levels incremental -3,0.1,3
unset key
unset surface
set view map
splot y/sqrt(y**2+x**2)
# EOF
```

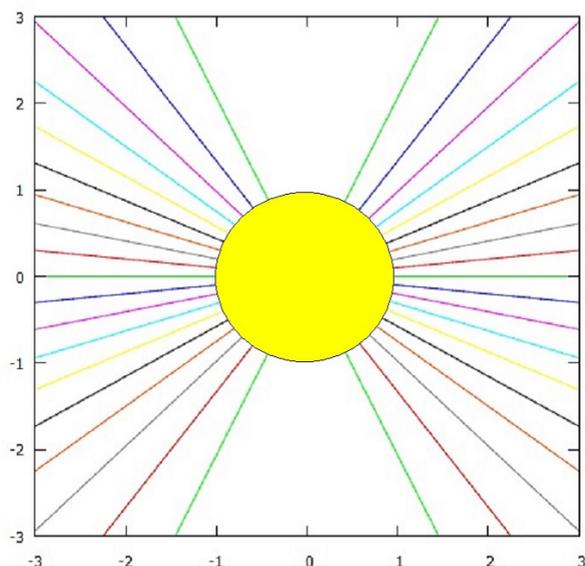


図 2.8.4: 電気力線 $R = 1$

静電エネルギー

```
Q=4*pi*R^3/3*rho;
RH1:solve(%,\rho)[1];
PH31:subst([\phi=\phi[r],R=r],PH1);
Q31:Q[r]=4*pi*r^2*rho*dr;
dU=rhs(PH31)*rhs(Q31);
U='integrate(rhs(%)/dr,r,0,R);
ev(%,integrate);
subst([RH1],%);
PH41:PH2;
U=1/2*'integrate(\rho*4*pi*r^2*rhs(PH41)
,r,0,R);
ev(%,integrate);
```

体電荷密度： ρ とすると、半径： R の球全体の電荷： Q の関係式は、

$$Q = \frac{4\pi\rho R^3}{3}, \quad \rho = \frac{3Q}{4\pi R^3} \quad (2.8.22)$$

単独の電荷の静電エネルギー： U を求める (2.6.1) 式を使う。半径： r までの静電ポテンシャル： ϕ_r は (2.8.15) 式から、

$$\phi_r = \frac{r^2 \rho}{3\epsilon_0}$$

r における dr 部分の電荷は、

$$Q_r = 4\pi dr r^2 \rho \quad (2.8.23)$$

(2.6.1) 式に上式を代入し、半径 r の球と dr 部分の電荷による静電エネルギー： dU は、

$$dU = \frac{4\pi dr r^4 \rho^2}{3\epsilon_0}$$

上式を $r = 0 \rightarrow R$ の範囲で積分すると下記となる。また、(2.8.22) 式から、

$$U = \frac{4\pi}{3\epsilon_0} \int_0^R r^4 dr \rho^2 = \frac{4\pi\rho^2 R^5}{15\epsilon_0} = \frac{3Q^2}{20\pi\epsilon_0 R} \quad (2.8.24)$$

次に、連続的な電荷の静電エネルギー： U を求める (2.6.6) 式を使う。球内の静電ポテンシャルは (2.8.15) 式から、

$$\phi = \frac{\rho(3R^2 - r^2)}{6\epsilon_0}$$

r の dr 部分の電荷は (2.8.23) 式から得られるので、これらを (2.6.6) 式に代入すると、

$$U = \frac{\pi\rho^2}{3\epsilon_0} \int_0^R r^2 (3R^2 - r^2) dr = \frac{4\pi\rho^2 R^5}{15\epsilon_0}$$

(2.8.24) 式と同じ結果が得られた。

例題 2.8.3 半径: R の球の表面に面電荷密度: τ を置いたときの静電場

静電場の公式

極座標 (r, θ, ψ) を用いて、静電場を求める中心からの位置: \vec{r} 、表面に置いた電荷密度の位置: \vec{a} とすると、静電場: \vec{E} は (2.2.1) 式から次式で得られる。

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q(\vec{r} - \vec{a})}{|\vec{r} - \vec{a}|^3} \quad (2.8.25)$$

```
kill(all);
load("vect")$
depends([\psi],[r]);
R0:matrix([0],[0],[r]);
assume(r>R);
assume(R>0);
assume(r>0);
assume(a>0);
R1:matrix([cos(\psi)*sin(\theta)*R],
[sin(\psi)*sin(\theta)*R],
[cos(\theta)*R]);
R01:R0-R1;
%[1][1]^2+%[2][1]^2+%[3][1]^2;
trigsimp(%);
ABR01:sqrt(%);
```

```
R^2*sin(\theta)*R01/ABR01^3*\tau/4/%pi
/\epsilon[0];
integrate(%,\psi,0,2*\pi);
EDI1:integrate(%,\theta,0,%pi);
subst([sqrt(R^2+2*r*R+r^2)=r+R],EDI1);
subst([sqrt(R^2-2*r*R+r^2)=r-R],%);
factor(%);
E1:E=%;
Q1:Q=4*\pi*R^2*\tau;
Q2:solve(Q1,\tau)[1];
E1:subst([Q2],E1);
subst([sqrt(R^2+2*r*R+r^2)=r+R],EDI1);
subst([sqrt(R^2-2*r*R+r^2)=R-r],%);
E=%;
E2:subst([Q2],E1);
```

\vec{r} を極座標の z 軸上に置くと、

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}, \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} \cos(\psi) \sin(\theta) R \\ \sin(\psi) \sin(\theta) R \\ \cos(\theta) R \end{pmatrix} \quad (2.8.26)$$

また、

$$|\vec{r} - \vec{a}| = \sqrt{-2ar \cos(\theta) + r^2 + a^2} \quad (2.8.27)$$

表面に置いた電荷密度: τ として、静電場: \vec{E} は (2.8.25) 式に上式を代入し、積分し、

$$E = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\psi=0}^{2\pi} \frac{a^2 \rho \sin(\theta) (\vec{r} - \vec{a})}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{a}|^3} d\psi d\theta$$

$$= \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\psi=0}^{2\pi} \begin{pmatrix} -\frac{\cos(\psi) \tau \sin(\theta)^2 R^3}{4\pi\epsilon_0 (R^2 - 2r \cos(\theta) R + r^2)^{\frac{3}{2}}} \\ -\frac{\sin(\psi) \tau \sin(\theta)^2 R^3}{4\pi\epsilon_0 (R^2 - 2r \cos(\theta) R + r^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{\tau \sin(\theta) R^2 (r - \cos(\theta) R)}{4\pi\epsilon_0 (R^2 - 2r \cos(\theta) R + r^2)^{\frac{3}{2}}} \end{pmatrix} d\psi d\theta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau R^2 \left(\frac{R+r}{r^2 \sqrt{R^2 + 2rR + r^2}} - \frac{R-r}{r^2 \sqrt{R^2 - 2rR + r^2}} \right) \end{pmatrix} \quad (2.8.28)$$

いま、全ての電荷を Q とすると、

$$Q = 4\pi\tau R^2 \quad (2.8.29) \quad \sqrt{R^2 + 2rR + r^2} = r+R, \quad \sqrt{R^2 - 2rR + r^2} = R-r$$

$r > R$ の場合、

$$\sqrt{R^2 + 2rR + r^2} = r+R, \quad \sqrt{R^2 - 2rR + r^2} = r-R$$

上式を (2.8.28) 式に代入すると、

$$E = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\tau R^2}{\epsilon_0 r^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \end{pmatrix}$$

$r < R$ の場合、

上式を (2.8.28) 式に代入すると、

$$E = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

上式から、

$$E = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & r > R \\ 0 & r < R \end{cases} \quad (2.8.30)$$

ポテンシャルの公式

Q_j の電荷がある時、静電ポテンシャル： ϕ は (2.4.4) 式から、

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{|\vec{r} - \vec{a}|} \quad (2.8.31)$$

```
R^2*sin(\theta)/ABR01*\tau/4/%pi
/\epsilon[0];
integrate(%,\psi,0,2*%pi);
EDI1:integrate(%,\theta,0,%pi);
subst([sqrt(R^2+2*r*R+r^2)=r+R],EDI1);
subst([sqrt(R^2-2*r*R+r^2)=r-R],%);
factor(%);
\phi=%;
PH1:subst([Q2],%);
E=-diff(rhs(%,r,1);
```

ϕ は、(2.8.31) 式に (2.8.27) 式を代入し、積分すると、

$$\begin{aligned} \phi &= \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\psi=0}^{2\pi} \frac{\tau \sin(\theta) R^2}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 - 2r \cos(\theta) R + r^2}} d\psi d\theta \\ &= \frac{\tau R^2 \left(\frac{\sqrt{R^2+2rR+r^2}}{rR} - \frac{\sqrt{R^2-2rR+r^2}}{rR} \right)}{2\epsilon_0} \end{aligned} \quad (2.8.32)$$

求める静電ポテンシャルの位置が $r > R$ のとき上記から、

$$\phi = \frac{\tau R^2}{\epsilon_0 r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (2.8.33)$$

(2.4.9) 式から ϕ と静電場： \vec{E} との関係式は、

$$\vec{E} = -\text{grad } \phi \quad (2.8.34)$$

ところで、下記であるから、

$$\text{grad}(\phi) = \begin{pmatrix} \frac{d}{dr} \phi \\ \frac{d}{d\theta} \phi \\ \frac{d}{dr \sin(\theta)} \phi \end{pmatrix}$$

静電場： \vec{E}_n は (2.8.33) 式を r で微分して得られ、(2.8.30) 式と同じ結果が得られた。

$$E_n = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (2.8.35)$$

ガウスの法則

```
EN1:E[n]*4*%pi*r^2=4*%pi/\epsilon[0]*
R^2*\tau;
EN11:solve(EN1,E[n])[1];
EN2:subst([Q2],%);
PH51:\phi=integrate(rhs(EN2),r,r,inf);
```

電場： E は球の中心の点対称であるから、径： r 方向 E_n となっている。(2.3.4) 式から、

$$4\pi E_n r^2 = \frac{4\pi\tau R^2}{\epsilon_0} \quad r > R \quad (2.8.36)$$

上式から、

$$E_n = \frac{\tau R^2}{\epsilon_0 r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (2.8.37)$$

静電ポテンシャル： ϕ は上式を $r \rightarrow \infty$ の積分で得られる。 $r > R$ の場合には、

$$\phi = \int_r^{\infty} E_n dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (2.8.38)$$

(2.8.33) 式と同じ結果が得られた。

ポアソンの方程式

```
DIF1:'diff(\phi,r,2)+2*'diff(\phi,r,1)/r=
-\tau/\epsilon[0];
ode2(%,\phi,r);
```

(2.4.23) 式のポアソンの方程式で $\nabla^2 \phi$ の極座標表記¹ を適用すると下記となる。

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi &= \frac{d^2}{dr^2} \phi + \frac{\cos(\theta)}{r^2 \sin(\theta)} \left(\frac{d}{d\theta} \phi \right) + \frac{d^2}{dr^2} \phi \\ &+ \frac{2}{r} \left(\frac{d}{dr} \phi \right) + \frac{d^2}{r^2 \sin^2(\theta)} \phi \end{aligned}$$

上式で点対称を考慮すると、ポアソンの方程式は、

$$\frac{2}{r} \left(\frac{d}{dr} \phi \right) + \frac{d^2}{dr^2} \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

上記の微分方程式を ode2 関数で解くと、

$$\phi = -\frac{r^2 \rho}{6\epsilon_0} + \frac{\%k2}{r} + \frac{\%k1}{\epsilon_0}$$

(2.8.33) 式と同じ型の解が得られた。 $\%k1, \%k2$ は境界条件で与えられる。

¹溝口純敏：Maxima を使った物理数学基礎演習ノート、<http://www9.plala.or.jp/prac-maxima/> 第4章 ベクトルと行列、4.5.4 微分ベクトルの極座標系への変換

例題 2.8.4 無限に長い直線上に線電荷密度： μ を置いたときの静電場

静電場の公式

円柱座標 (r, θ, z) を用いて、静電場を求める中心からの位置： \vec{r} を x 軸におき、線密度の位置： \vec{a} を z 軸におくと、静電場： \vec{E} は (2.2.1) 式から次式で得られる。

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q(\vec{r} - \vec{z})}{|\vec{r} - \vec{z}|^3} \quad (2.8.39)$$

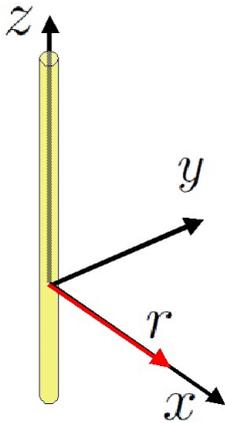


図 2.8.5: 無限に長い直線電荷による静電場

線密度： μ として、静電場： \vec{E} は (2.8.39) 式に上式を代入し、 $z = -A \rightarrow A$ の積分を行うと、

$$\begin{aligned} E &= \int_{z=-A}^A \frac{\mu(\vec{r} - \vec{z})}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{z}|^3} dz \\ &= \int_{z=-A}^A \begin{pmatrix} \frac{\mu r}{4\pi\epsilon_0 (z^2+r^2)^{\frac{3}{2}}} \\ 0 \\ -\frac{\mu z}{4\pi\epsilon_0 (z^2+r^2)^{\frac{3}{2}}} \end{pmatrix} dz \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\mu A}{2\pi\epsilon_0 r \sqrt{A^2+r^2}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

上式で $A \rightarrow \infty$ とすると、

$$E = \begin{pmatrix} \frac{\mu}{2\pi\epsilon_0 r} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.8.42)$$

```
kill(all);
load("vect")$
depends([z],[\theta]);
assume(r>0);
assume(R>r);
assume(A>0);
R0:matrix([r],[0],[0]);
Z1:matrix([0],[0],[z]);
VR1:R0-Z1;
ABR1:sqrt(VR1[1][1]^2+VR1[2][1]^2+
  VR1[3][1]^2);
DE1:1/4/%pi/\epsilon[0]*VR1/ABR1^3*\mu*dz;
E1:E=integrate(DE1/dz,z,-A,A);
factor(%);
E2:limit(%,A,inf);
```

\vec{r} を極座標の x 軸上に置くと、

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \quad (2.8.40)$$

また、

$$|\vec{r} - \vec{z}| = \sqrt{z^2 + r^2} \quad (2.8.41)$$

ポテンシャルの公式

Q_j の電荷がある時、電位差 ϕ は (2.4.4) 式から、

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{|\vec{r} - \vec{z}|} \quad (2.8.43)$$

```
DPH2:dz*\mu/4/%pi/\epsilon[0]/ABR1;
PH2:\phi=integrate(DPH2/dz,z,-A,A);
PH3:subst([r=R],%);
PH4:\phi=rhs(PH2)-rhs(PH3);
PH5:ev(%,integrate);
AS0:asinh(x)=log(x+sqrt(x^2+1));
AS1:subst([x=A/r],AS0);
AS2:subst([x=A/R],AS0);
subst([AS1,AS2],PH5);
logcontract(%);
limit(%,A,inf);
logcontract(%);
```

ϕ は、(2.8.43) 式に (2.8.41) 式を代入し、 $z = -A \rightarrow A$ の積分を行うと、

$$\phi = \int_{z=-A}^A \frac{\mu}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{z^2 + r^2}} dz \quad (2.8.44)$$

$$= \frac{\mu \operatorname{asinh}\left(\frac{A}{r}\right)}{2\pi\epsilon_0}$$

$r \ll R$ とし、 $r = R$ のとき ϕ が零になるように、上式を修正すると、

$$\phi = \frac{\mu \operatorname{asinh}\left(\frac{A}{r}\right)}{2\pi\epsilon_0} - \frac{\mu \operatorname{asinh}\left(\frac{A}{R}\right)}{2\pi\epsilon_0}$$

ところで、 $\operatorname{asinh}(x) = \log(\sqrt{x^2 + 1} + x)$ であるから、この関係式を上式に代入し、 $A \rightarrow \infty$ とすると、

$$\phi = \frac{\mu \log\left(\sqrt{\frac{A^2}{r^2} + 1} + \frac{A}{r}\right)}{2\pi\epsilon_0} - \frac{\mu \log\left(\frac{A}{R} + \sqrt{\frac{A^2}{R^2} + 1}\right)}{2\pi\epsilon_0}$$

$$= \frac{\mu \log\left(\frac{(\sqrt{A^2+r^2}+A)R}{r(\sqrt{R^2+A^2}+A)}\right)}{2\pi\epsilon_0}$$

$$= \frac{\mu(\log(R) - \log(r))}{2\pi\epsilon_0} \quad (2.8.45)$$

ガウスの法則

```
ER2:E[r]*2*pi*r*dz=\mu*dz/\epsilon[0];
ER21:solve(ER2,E[r])[1];
```

電場 E は線の軸対称であるから、 r 方向 E_r となっている。(2.3.4) 式から、

$$2\pi dz r E_r = \frac{dz \mu}{\epsilon_0}$$

上式から、

$$E_r = \frac{\mu}{2\pi\epsilon_0 r}$$

静電ポテンシャル ϕ は上式を $r \ll R$ の R で $r \rightarrow R$ の積分を行い、 $r = R$ で $\phi = 0$ となるようにすると、

$$\phi = \int_r^R E_r dr = \frac{\mu}{2\pi\epsilon_0} \int_r^R \frac{1}{r} dr = \frac{\mu(\log(R) - \log(r))}{2\pi\epsilon_0}$$

ポアソンの方程式

```
DIF1:'diff(\phi,r,2)+'diff(\phi,r,1)/r
=-\mu/\epsilon[0];
ode2(%,\phi,r);
```

(2.4.23) 式のポアソンの方程式で $\nabla^2 \phi$ の円柱座標表記¹を適用すると下記となる。

$$\nabla^2 \phi = \frac{d^2}{dz^2} \phi + \frac{d^2}{d\theta^2} \phi + \frac{d^2}{dr^2} \phi + \frac{d}{dr} \phi$$

上式で z 軸対称を考慮すると、ポアソンの方程式は、

$$\frac{d}{dr} \phi + \frac{d^2}{dr^2} \phi = -\frac{\mu}{\epsilon_0}$$

上記の微分方程式を ode2 関数で解くと、

$$\phi = \frac{\%k1 \log(r)}{\epsilon_0} - \frac{\mu r^2}{4\epsilon_0} + \%k2$$

(2.8.45) 式と同じ型の解が得られた。 $\%k1, \%k2$ は境界条件で与えられる。

¹溝口純敏: Maxima を使った物理数学基礎演習ノート、<http://www9.plala.or.jp/prac-maxima/> 第4章 ベクトルと行列、4.5.4 微分ベクトルの円柱座標系への変換

例題 2.8.5 無限に長い円筒上に面電荷密度： τ を置いたときの静電場

静電場の公式

円柱座標 (r, θ, z) を用いて、静電場を求める中心からの位置： \vec{r} を x 軸におき、半径： R の円筒の中心軸を z 軸におく。円筒面上の \vec{a} に面密度： τ の電荷を置いたときの \vec{r} の静電場を求める。静電場： \vec{E} は (2.2.1) 式から次式で得られる。

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q(\vec{r} - \vec{a})}{|\vec{r} - \vec{a}|^3} \quad (2.8.46)$$

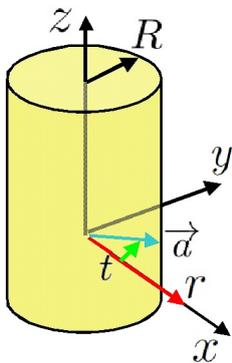


図 2.8.6: 無限に長い円筒上の電荷による静電場

```
kill(all);
load("vect")$
assume(r>0);
assume(R>0);
assume(A>0);
R0:matrix([r],[0],[0]);
Z1:matrix([R*cos(t)],[R*sin(t)],[z]);
VR1:R0-Z1;
VR1.VR1;
expand(%);
trigsimp(%);
ABR1:sqrt(%);
DE1:1/4/%pi/\epsilon[0]*VR1/ABR1^3*\tau
*dz*R*dt;
integrate(DE1/dz,z,-A,A);
limit(%A,inf);
DE2:factor(%);
DE21:DE2[1][1];
depends(t,s);
TN1:tan(s)=-r*sin(t)/(R-r*cos(t));
```

```
cos(s)^2=denom(rhs(TN1))^2/(num(rhs(TN1))
^2+denom(rhs(TN1))^2);
CS1:trigsimp(%);
DTN1:diff(TN1,s,1);
solve(,'diff(t,s,1))[1];
trigsimp(%);
factor(%);
subst([CS1],%);
trigsimp(%);
dt=rhs(%)*ds;
subst([%],DE21);
factor(%);
E1:E(r)=integrate(%/ds,s,0,2*pi);
\mu=2*pi*R*\tau;
solve(,\tau)[1];
subst([%],E1);
```

\vec{r} , \vec{a} を円柱座標で表すと。

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} \cos(t) R \\ \sin(t) R \\ z \end{pmatrix}$$

$\vec{r} - \vec{a}$ は上式から、

$$\vec{r} - \vec{a} = \begin{pmatrix} r - \cos(t) R \\ -\sin(t) R \\ -z \end{pmatrix}$$

円筒状の微小面積： $R dt dz$ の電荷： $dQ = \tau R dt dz$ となる。この電荷による静電場： $d\vec{E}$ は (2.8.46) 式から、

$$d\vec{E}(t, z) = \begin{pmatrix} \frac{dt dz \tau R (r - \cos(t) R)}{4\pi\epsilon_0 (R^2 - 2r \cos(t) R + z^2 + r^2)^{3/2}} \\ -\frac{dt dz \sin(t) \tau R^2}{4\pi\epsilon_0 (R^2 - 2r \cos(t) R + z^2 + r^2)^{3/2}} \\ -\frac{dt dz \tau z R}{4\pi\epsilon_0 (R^2 - 2r \cos(t) R + z^2 + r^2)^{3/2}} \end{pmatrix}$$

上式を z 方向に $-A \rightarrow A$ の範囲で積分し、 $A \rightarrow \infty$ とすると、

$$d\vec{E}(t) = \begin{pmatrix} -\frac{dt \tau R (\cos(t) R - r)}{2\pi\epsilon_0 (R^2 - 2r \cos(t) R + r^2)} \\ \frac{dt \sin(t) \tau R^2}{2\pi\epsilon_0 (R^2 - 2r \cos(t) R + r^2)} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$d\vec{E}(t)$ の y 成分は対称性により、 t で積分すると零となる。 $dE_x(t)$ の x 成分は、

$$dE_x(t) = -\frac{dt \tau R (\cos(t) R - r)}{2\pi\epsilon_0 (R^2 - 2r \cos(t) R + r^2)} \quad (2.8.47)$$

上式を積分し、

$$E_x(t) = \int_0^{2\pi} -\frac{\tau R (\cos(t) R - r)}{2\pi\epsilon_0 (R^2 - 2r \cos(t) R + r^2)} dt \quad (2.8.48)$$

$r > R$ のとき、下記の積分変数変換を行う。

$$\tan(s) = -\frac{r \sin(t)}{R - r \cos(t)} \quad (2.8.49)$$

上式から下記の関係が得られる。

$$\cos(s)^2 = \frac{(R - r \cos(t))^2}{(R - r \cos(t))^2 + r^2 \sin(t)^2} \quad (2.8.50)$$

(2.8.49) 式を s で微分し、 $\frac{d}{ds} t$ を求め、(2.8.50) 式を代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} t &= -\frac{(R - r \cos(t))^2}{r \cos(s)^2 (\cos(t) R - r)} \\ &= -\frac{R^2 - 2r \cos(t) R + r^2}{r \cos(t) R - r^2} \end{aligned}$$

上式から、 dt を求めると、

$$dt = -\frac{ds (R^2 - 2r \cos(t) R + r^2)}{r \cos(t) R - r^2}$$

(2.8.48) 式に上式を代入すると、

$$\begin{aligned} E_x(r) &= \int_0^{2\pi} \frac{\tau R (\cos(t) R - r)}{2\pi \epsilon_0 (r \cos(t) R - r^2)} ds \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{\tau R}{2\pi \epsilon_0 r} ds = \frac{\tau R}{\epsilon_0 r} \end{aligned} \quad (2.8.51)$$

z 方向の線電荷密度： μ とすると、

$$\mu = 2\pi \tau R$$

(2.8.51) 式に上式を代入すると、

$$E_x(r) = \frac{\mu}{2\pi \epsilon_0 r} \quad (2.8.52)$$

上式は、ガウスの法則から (2.8.42) 式と同じ結果となる。

```
DE31:(dt*\tau*R)/(2*pi*\epsilon[0]*r)*(1
-R*(R-cos(t)*r)/(R^2-2*r*cos(t)*R+r^2));
DE32:(dt*\tau*R)/(2*pi*\epsilon[0]*r)
+(dt*\tau*R)/(2*pi*\epsilon[0]*r)*(-R
*(R-cos(t)*r)/(R^2-2*r*cos(t)*R+r^2));
DE21-DE32;
factor(%);
DE321:first(DE32);
DE322:last(DE32);
E31:E[1](r)=integrate(DE321/dt,t,0,2*pi);
TN3:tan(s)=-R*sin(t)/(r-R*cos(t));
cos(s)^2=denom(rhs(TN3))^2/(num(rhs(TN3))
^2+denom(rhs(TN3))^2);
CS3:trigsimp(%);
DTN3:diff(TN3,s,1);
solve(,'diff(t,s,1))[1];
trigsimp(%);
factor(%);
subst([CS3],%);
trigsimp(%);
dt=rhs(%)*ds;
subst([%],DE322);
factor(%);
E32:E[2](r)=integrate(%/ds,s,0,2*pi);
E31+E32;
E33:E(r)=rhs(%);
E34:subst([r=R],DE21);
```

$r < R$ のとき、(2.8.47) 式を変形して、

$$\begin{aligned} dE_x(t) &= \frac{dt \tau R \left(1 - \frac{R(R-r \cos(t))}{R^2 - 2r \cos(t) R + r^2}\right)}{2\pi \epsilon_0 r} \\ &= \frac{dt \tau R}{2\pi \epsilon_0 r} \end{aligned} \quad (2.8.53)$$

$$- \frac{dt \tau R^2 (R - r \cos(t))}{2\pi \epsilon_0 r (R^2 - 2r \cos(t) R + r^2)}$$

(2.8.53) 式の右辺第一項を t で積分をして、

$$E_1(r) = \int_0^{2\pi} \frac{\tau R}{2\pi \epsilon_0 r} dt = \frac{\tau R}{\epsilon_0 r} \quad (2.8.54)$$

(2.8.53) 式の右辺第二項を t で積分をして、

$$E_2(r) = \int_0^{2\pi} -\frac{\tau R^2 (R - r \cos(t))}{2\pi \epsilon_0 r (R^2 - 2r \cos(t) R + r^2)} dt \quad (2.8.55)$$

下記の積分変数変換を行う。

$$\tan(s) = -\frac{\sin(t) R}{r - \cos(t) R} \quad (2.8.56)$$

上式から下記の関係が得られる。

$$\cos(s)^2 = \frac{(r - \cos(t) R)^2}{(r - \cos(t) R)^2 + \sin(t)^2 R^2} \quad (2.8.57)$$

(2.8.56) 式を s で微分し、 $\frac{d}{ds} t$ を求め、(2.8.57) 式をポテンシャルの公式
代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} t &= \frac{(\cos(t) R - r)^2}{\cos(s)^2 R (R - r \cos(t))} \\ &= \frac{R^2 - 2r \cos(t) R + r^2}{R^2 - r \cos(t) R} \end{aligned}$$

上式から、 dt を求めると、

$$dt = \frac{ds (R^2 - 2r \cos(t) R + r^2)}{R^2 - r \cos(t) R}$$

(2.8.55) 式に上式を代入すると、

$$\begin{aligned} E_2(r) &= \int_0^{2\pi} -\frac{\tau R^2 (R - r \cos(t))}{2\pi \epsilon_0 r (R^2 - r \cos(t) R)} ds \\ &= \int_0^{2\pi} -\frac{\tau R}{2\pi \epsilon_0 r} ds \\ &= -\frac{\tau R}{\epsilon_0 r} \end{aligned} \quad (2.8.58)$$

(2.8.54) 式と (2.8.58) 式から、

$$E_x(r) = E_2(r) + E_1(r) = 0 \quad (2.8.59)$$

$r = R$ のとき、(2.8.47) 式に $r = R$ を代入し、

$$\begin{aligned} E_x(r) &= \int_0^{2\pi} -\frac{\tau R (\cos(t) R - R)}{2\pi \epsilon_0 (2R^2 - 2\cos(t) R^2)} dt \\ &= \frac{\tau}{2\epsilon_0} \end{aligned} \quad (2.8.60)$$

以上をまとめると、

$$E_x(r) = \begin{cases} \frac{\tau R}{\epsilon_0 r} & r > R \\ \frac{\tau}{2\epsilon_0} & r = R \\ 0 & r < R \end{cases} \quad (2.8.61)$$

```
E4:E(r)=integrate(%/dt,t,0,2*pi);
E41:subst([MU1],%);
PH1:\phi='integrate(rhs(E1),r,r,R);
ev(% ,integrate);
```

静電ポテンシャル： ϕ は次式：(2.4.3) 式で定義され、
基準点を R とすると、 $r > R$ のときには、(2.8.51) 式
から、

$$\phi = -\frac{\tau R}{\epsilon_0} \int_R^r \frac{1}{r} dr = -\frac{\tau R (\log(r) - \log(R))}{\epsilon_0}$$

ガウスの法則

(2.3.4) 式から、 $r < R$ では、

$$E_x(r) = 0$$

$r > R$ では、

$$E_x(r) 2\pi r L = \frac{\tau 2\pi R L}{\epsilon_0}$$

上式から、

$$E_x(r) = \frac{\tau R}{\epsilon_0 r}$$

例題 2.8.6 無限に長い円柱内に体電荷密度： ρ を置いたときの静電場

円柱内に体電荷密度： ρ を置いたときの静電場は前節の「無限に長い円筒上に面電荷密度： τ を置いたときの静電場」の結果を r 方向に積分して得られる。

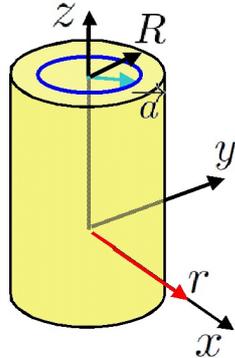


図 2.8.7: 無限に長い円筒内の電荷による静電場

上式を積分して静電ポテンシャル： ϕ を求めると、

$$\phi = -\frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \int_R^r \frac{1}{r} dr = -\frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} (\log(r) - \log(R)) \quad (2.8.65)$$

```

assume(r<R);
subst([\tau=\rho,R=a],rhs(E4));
E6:E(r)=integrate(%,a,0,r);
PH6:\phi='integrate(rhs(E6),r,r,R);
ev(%,integrate);
factor(%)
assume(r>R);
subst([\tau=\rho,R=a],rhs(E1));
E5:E(r)=integrate(%,a,0,R);
PH5:\phi='integrate(rhs(E5),r,r,R);
ev(%,integrate);

```

$r < R$ のとき、(2.8.61) 式から、 $r = a$ における静電場： $E(a)$ は、

$$E(a) = \frac{\rho}{2\epsilon_0}$$

上式を $a = 0 \rightarrow r$ の範囲で積分して、

$$E(r) = \int_0^r \frac{\rho}{2\epsilon_0} dr = \frac{r\rho}{2\epsilon_0} \quad (2.8.62)$$

上式を積分して静電ポテンシャル： ϕ を求めると、

$$\phi = -\frac{\rho}{2\epsilon_0} \int_R^r r dr = -\frac{\rho}{2\epsilon_0} \left(\frac{r^2}{2} - \frac{R^2}{2} \right) \quad (2.8.63)$$

$r > R$ のとき、(2.8.61) 式から、 $r = a$ における電荷による円柱外の r における静電場： $E(a)$ は、

$$E(a) = \frac{a\rho}{\epsilon_0 r}$$

上式を $a = 0 \rightarrow R$ の範囲で積分して、

$$E(r) = \int_0^R \frac{a\rho}{\epsilon_0 r} da = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r} \quad (2.8.64)$$

例題 2.8.7 無限に広い平板上に面電荷密度： τ を置いたときの静電場

静電場の公式

xyz 座標を用いて、静電場を求める中心から z 軸上の位置： \vec{r} 、面密度の位置は xy 平面上： \vec{a} とすると、静電場： \vec{E} は (2.2.1) 式から次式で得られる。

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q(\vec{r} - \vec{a})}{|\vec{r} - \vec{a}|^3} \quad (2.8.66)$$

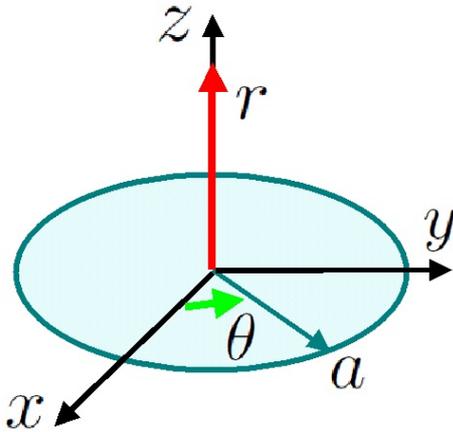


図 2.8.8: 無限に広い平板上の電荷による静電場

\vec{r} , \vec{a} を円柱座標系で表すと、

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}, \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a \cos(\theta) \\ a \sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.8.67)$$

また、

$$|\vec{r} - \vec{a}| = \sqrt{r^2 + a^2} \quad (2.8.68)$$

線密度： τ として、静電場： \vec{E} は (2.8.66) 式に上式を代入し、 $a = 0 \rightarrow R$ の積分を行うと、

$$\begin{aligned} E &= \int_{a=0}^R \int_{\theta=0}^{2\pi} \begin{pmatrix} -\frac{a^2 \tau \cos(\theta)}{4\pi\epsilon_0 (r^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} \\ -\frac{a^2 \tau \sin(\theta)}{4\pi\epsilon_0 (r^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{a r \tau}{4\pi\epsilon_0 (r^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} \end{pmatrix} d\theta da \\ &= \int_{a=0}^R \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{2\pi a r \tau}{\sqrt{r^2+a^2} (4\pi\epsilon_0 r^2 + 4\pi\epsilon_0 a^2)} \end{pmatrix} da \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\pi r \tau \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{\sqrt{R^2+r^2}}{4\pi\epsilon_0 R^2 + 4\pi\epsilon_0 r^2} \right) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

上式で $R \rightarrow \infty$ とすると、

$$E = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\tau}{2\epsilon_0} \end{pmatrix} \quad (2.8.69)$$

```
kill(all);
load("vect")$
assume(r>0);
assume(a>0);
R0:matrix([0],[0],[r]);
Z1:matrix([a*cos(\theta)],
[a*sin(\theta)],[0]);
VR1:R0-Z1;
ABR1:sqrt(VR1[1][1]^2+VR1[2][1]^2
+VR1[3][1]^2);
assume(R>0);
Z1:matrix([a*cos(\theta)],
[a*sin(\theta)],[0]);
VR1:R0-Z1;
ABR1:sqrt(VR1[1][1]^2+VR1[2][1]^2
+VR1[3][1]^2);
DE1:a*1/4/%pi/\epsilon[0]*VR1/(ABR1^3)
*\tau*d\theta*da;
trigsimp(%);
integrate(%/d\theta,\theta,0,2*pi);
integrate(%/da,a,0,R);
E2:E=limit(% ,R,inf);
```

ポテンシャルの公式

Q の電荷がある時、静電ポテンシャル： ϕ は (2.4.4) 式から、

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{|\vec{r} - \vec{a}|} \quad (2.8.70)$$

```
DE1:a*1/4/%pi/\epsilon[0]/ABR1*\tau
*d\theta*da;
trigsimp(%);
integrate(%/d\theta,\theta,0,2*pi);
integrate(%/da,a,0,R);
\phi=(tau*(sqrt(R^2-r))/2*epsilon[0]);
expand(%);
PH2:\phi=integrate(rhs(E2)[3][1],r,r,R);
expand(%);
```

ϕ は、(2.8.70) 式に (2.8.68) 式を代入し、 $a = 0 \rightarrow R$ の積分を行うと、

$$\begin{aligned} \phi &= \int_{a=0}^R \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{a\tau}{4\pi\epsilon_0\sqrt{r^2+a^2}} d\theta da \\ &= \int_{a=0}^R \frac{a\tau}{2\epsilon_0\sqrt{r^2+a^2}} da \\ &= \frac{\tau(\sqrt{R^2+r^2}-r)}{2\epsilon_0} \end{aligned} \quad (2.8.71)$$

$R \gg r$ で $r = R$ のとき ϕ が零になるように、上式を修正すると、

$$\phi = \frac{\tau R}{2\epsilon_0} - \frac{r\tau}{2\epsilon_0} \quad (2.8.72)$$

ガウスの法則

```
ER2:E[r]*2*S=\tau*S/\epsilon[0];
ER21:solve(ER2,E[r])[1];
```

電場： E は線の xy 面で対称であるから、 r 方向 E_n となっている。(2.3.4) 式から、

$$2E_r S = \frac{\tau S}{\epsilon_0}$$

上式から、

$$E_r = \frac{\tau}{2\epsilon_0}$$

ポアソンの方程式

```
DIF1:'diff(\phi,r,2)=-\tau/\epsilon[0];
ode2(%,\phi,r);
```

上式で対称性を考慮すると、ポアソンの方程式は、

$$\frac{d^2}{dr^2} \phi = -\frac{\tau}{\epsilon_0}$$

上記の微分方程式を ode2 関数で解くと、

$$\phi = -\frac{r^2\tau}{2\epsilon_0} + \%k2r + \%k1$$

(2.8.72) 式と同じ型の解が得られた。 $\%k1, \%k2$ は境界条件で与えられる。

例題 2.8.8 厚さ： $2d$ の無限に広い平板内に
体電荷密度： ρ を置いたときの静電場

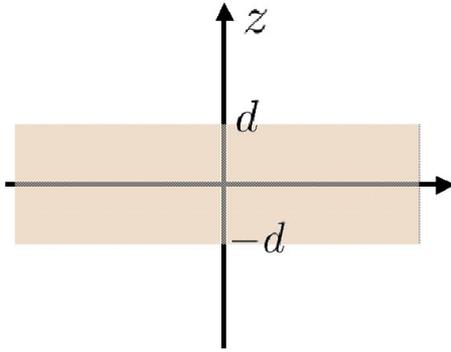


図 2.8.9: 厚さ： $2d$ の無限に広い平板内の電荷による静電場

$|z| > d$ のとき、(2.8.69) 式を $z = -d \rightarrow d$ の範囲を積分すると、

$$z > d \text{ のとき、 } E_z = \int_{-d}^d \frac{\rho}{2\epsilon_0} = \frac{\rho d}{\epsilon_0}$$

$$z < -d \text{ のとき、 } E_z = \int_{-d}^d -\frac{\rho}{2\epsilon_0} = -\frac{\rho d}{\epsilon_0}$$

$|z| > d$ のとき、(2.8.69) 式を $z = -z \rightarrow z$ の範囲を積分すると、

$$|z| < d \text{ のとき、 } E_z = \int_{-z}^z \frac{\rho}{2\epsilon_0} = \frac{\rho z}{\epsilon_0}$$

微分型のガウスの法則

(2.4.20) 式から、微分型のガウスの法則は、

$$\nabla \cdot \vec{E} = \text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.8.73)$$

上式を円柱座標を用いて表す¹と、

$$\text{div}(\vec{E}) = \frac{d}{dz} E_z + \frac{d}{dr} E_r + \frac{1}{r} \frac{d}{d\theta} E_\theta + \frac{d}{dr} E_r + \frac{E_r}{r} \quad (2.8.74)$$

z 軸回りに対称であるから、上式は、

$$\text{div}(\vec{E}) = \frac{d}{dz} E_z \quad (2.8.75)$$

$$|z| < d \text{ のとき、 } \frac{d}{dz} E_z = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

上式から、原点対象を考慮して、

$$|z| < d \text{ のとき、 } E_z = \frac{\rho z}{\epsilon_0}$$

¹溝口純敏：Maxima を使った物理数学基礎演習ノート、
<http://www9.plala.or.jp/prac-maxima/> 第4章 ベクトルと行列、4.5.2 微分ベクトルの円柱座標系への変換

例題 2.8.9 一対の点電荷による電気双極子の静電場

円柱座標系の z 軸上に微小距離: 2δ だけ離れた電荷: $Q_1, -Q_1$ の静電場: \vec{E} を求め、 $\delta \rightarrow 0$ の電気双極子の静電場、静電ポテンシャルを求める。

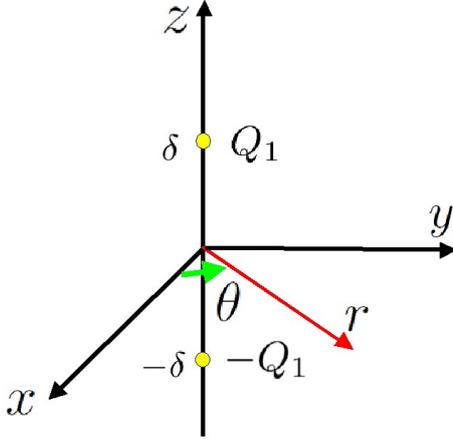


図 2.8.10: 一対の電荷による静電場

```
kill(all);
load("vect")$
depends([E,R],[r,\theta,z]);
MTE:matrix([E[r]],[E[y]],[E[z]]);
MTR:matrix([r*cos(\theta)],
[r*sin(\theta)], [z]);
MTR1:matrix([0],[0],[\delta]);
MTR2:matrix([0],[0],[-\delta]);
MTR-MTR1;
sqrt(%[1][1]^2+%[2][1]^2+%[3][1]^2);
ABSR01:trigsimp(%);
MTR-MTR2;
sqrt(%[1][1]^2+%[2][1]^2+%[3][1]^2);
ABSR02:trigsimp(%);
MTE1:Q[1]/(4*\pi*\epsilon[0])*(MTR-MTR1)
/ABSR01^3;
MTE2:-Q[1]/(4*\pi*\epsilon[0])*(MTR-MTR2)
/ABSR02^3;
E1:MTE=MTE1+MTE2;
MTE11:taylor(MTE1,\delta,0,1);
MTE21:taylor(MTE2,\delta,0,1);
E2:MTE=MTE11+MTE21;
factor(%);
```

```
E21:MTE=subst([\delta=p/Q[1]],rhs(%));
PH1:Q[1]/(4*\pi*\epsilon[0])/ABSR01;
PH2:-Q[1]/(4*\pi*\epsilon[0])/ABSR02;
PH3:\phi=PH1+PH2;
PH11:taylor(PH1,\delta,0,1);
PH21:taylor(PH2,\delta,0,1);
\phi=PH11+PH21;
PH4:factor(%);
PH5:subst([\delta=p/Q[1]],PH4);
```

ここで \vec{E} を、 $\vec{r}, \vec{r}_1, \vec{r}_2$ を円柱座標で表し、下記とすると、

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} r \cos(\theta) \\ r \sin(\theta) \\ z \end{pmatrix} \quad (2.8.76)$$

$$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \delta \end{pmatrix} \quad \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\delta \end{pmatrix}$$

(2.2.1) 式から静電場: \vec{E} は、

$$\overline{E(\vec{r})} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1(\vec{r} - \vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3}$$

上式から一対の電荷: $Q_1, -Q_1$ による静電場: \vec{E} は、

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} \frac{Q_1 r \cos(\theta)}{4\epsilon_0 \pi (z^2 - 2\delta z + r^2 + \delta^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{Q_1 r \sin(\theta)}{4\epsilon_0 \pi (z^2 - 2\delta z + r^2 + \delta^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{Q_1 (z - \delta)}{4\epsilon_0 \pi (z^2 - 2\delta z + r^2 + \delta^2)^{\frac{3}{2}}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{Q_1 r \cos(\theta)}{4\epsilon_0 \pi (z^2 + 2\delta z + r^2 + \delta^2)^{\frac{3}{2}}} \\ -\frac{Q_1 r \sin(\theta)}{4\epsilon_0 \pi (z^2 + 2\delta z + r^2 + \delta^2)^{\frac{3}{2}}} \\ -\frac{Q_1 (z + \delta)}{4\epsilon_0 \pi (z^2 + 2\delta z + r^2 + \delta^2)^{\frac{3}{2}}} \end{pmatrix} \quad (2.8.77)$$

上式で、 δ が十分小さいとし、 δ で Taylor 展開し、一次項までを記述すると、

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3Q_1 \delta r \cos(\theta) z}{2\epsilon_0 \pi (z^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{3Q_1 \delta r \sin(\theta) z}{2\epsilon_0 \pi (z^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{Q_1 \delta (2z^2 - r^2)}{2\epsilon_0 \pi (z^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} \end{pmatrix}$$

上式で、いま、 $\delta \rightarrow 0$ としたとき、 $Q_1 \delta \rightarrow p$ とすると、電気双極子の静電場が得られ、

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3pr \cos(\theta) z}{2\epsilon_0 \pi (z^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{3pr \sin(\theta) z}{2\epsilon_0 \pi (z^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{p(2z^2 - r^2)}{2\epsilon_0 \pi (z^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} \end{pmatrix} \quad (2.8.78)$$

Q_j の電荷がある時、静電ポテンシャル: ϕ は (2.4.4) 式から次式となり、(2.8.76) 式を代入し、

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_j}{|\vec{r} - \vec{z}|} = \frac{Q_1}{4\epsilon_0 \pi \sqrt{z^2 - 2\delta z + r^2 + \delta^2}} \quad (2.8.79)$$

一対の電荷による静電ポテンシャルは上式から、

$$\phi = \frac{Q_1}{4\epsilon_0\pi\sqrt{z^2 - 2\delta z + r^2 + \delta^2}} - \frac{Q_1}{4\epsilon_0\pi\sqrt{z^2 + 2\delta z + r^2 + \delta^2}} \quad (2.8.80)$$

上式で、 δ が十分小さいとし、 δ で Taylor 展開し、一次項までを記述すると、

$$\phi = \frac{Q_1 \delta z}{2\epsilon_0\pi(z^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}$$

上式で、いま、 $\delta \rightarrow 0$ としたとき、 $Q_1 \delta \rightarrow p$ とすると、電気双極子の静電ポテンシャルが得られ、

$$\phi = \frac{pz}{2\epsilon_0\pi(z^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (2.8.81)$$

$\delta = 1$ の時の一対の点電荷による静電場

$\delta = 1$ の時の一対の電荷による静電場の大きさと向きおよび静電ポテンシャルを求める。

```
BX1:subst([z=y,r=x,\theta=0,Q[1]=1,
\epsilon[0]=1,\pi=1,\delta=1],
rhs(E1)[1][1]);
BY1:subst([z=y,r=x,\theta=0,Q[1]=1,
\epsilon[0]=1,\pi=1,\delta=1],
rhs(E1)[3][1]);
BX2:subst([z=y,r=x,\theta=0,p=2/3*pi,
\epsilon[0]=1],rhs(E21)[1][1]);
BY2:subst([z=y,r=x,\theta=0,p=2/3*pi,
\epsilon[0]=1],rhs(E21)[3][1]);
```

(2.8.77) 式で $\theta = 0$, $Q_1 = 4\pi$, ϵ_0 として、 $\delta = 1$ の時の一対の電荷による静電場を求める。

```
#!/gnuplot
c=0.5
pot(x,y)=x*y
Bx(x,y)=x/(4*(y**2-2*y+x**2+1)**(3/2))
-x/(4*(y**2+2*y+x**2+1)**(3/2));
By(x,y)=(y-1)/(4*(y**2-2*y+x**2+1)**(3/2))
-(y+1)/(4*(y**2+2*y+x**2+1)**(3/2))
set xrange [-3:3]; set yrange[-3:3]
set isosamples 32; set samples 32
set table "potential.dat"
splot pot(x,y)
unset table
plot "potential.dat" using 1:2:(c*Bx($1,
$2)):(c*By($1,$2)) with vector notitle
# EOF
```

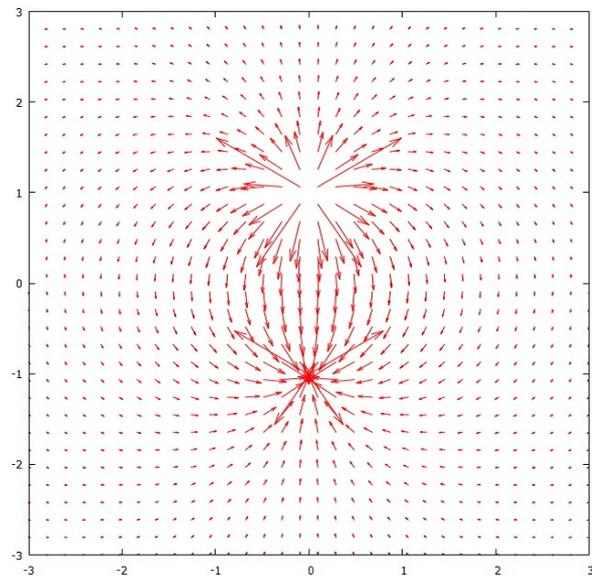


図 2.8.11: $\delta = 1$ の時の一対の点電荷による静電場

$\delta = 1$ の時の一対の点電荷による等静電ポテンシャル

```

assume(r>0);
diff(rhs(PH3),r,1);
-%*r;
integrate(%,z);
\psi=factor(%);
PS3:expand(%);
diff(rhs(PH5),r,1);
-%*r;
integrate(%,z);
PS5:\psi=factor(%);
PH31:subst([z=y,r=x,Q[1]=4*pi*\epsilon[0],
\delta=1],rhs(PH3));
subst([z=y,r=x,Q[1]=4*pi*\epsilon[0],
\delta=1],rhs(PS3));
PS31:expand(%);
PH51:subst([z=y,r=x,p=2*pi*\epsilon[0]],
rhs(PH5));
PS51:subst([z=y,r=x,p=2*pi*\epsilon[0]],
rhs(PS5));
subst([z=y,r=x,Q[1]=4*pi*\epsilon[0],
\delta=0.01],rhs(PS3));
PS52:expand(%);

```

静電ポテンシャルは (2.8.80) 式から、

$$\phi = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0\sqrt{z^2 - 2\delta z + r^2 + \delta^2}} - \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0\sqrt{z^2 + 2\delta z + r^2 + \delta^2}} \quad (2.8.82)$$

$\delta = 1, Q_1 = 4\pi, \epsilon_0$ を代入し、図示すると、

```

#!/gnuplot
set xrange [-3:3]
set yrange [-3:3]
set isosamples 128,128
set contour base
set cntrparam levels incremental -3,0.1,3
unset key
unset surface
set view map
splot 1/sqrt(y**2-2*y+x**2+1)-1/sqrt(y**2
+2*y+x**2+1)
# EOF

```

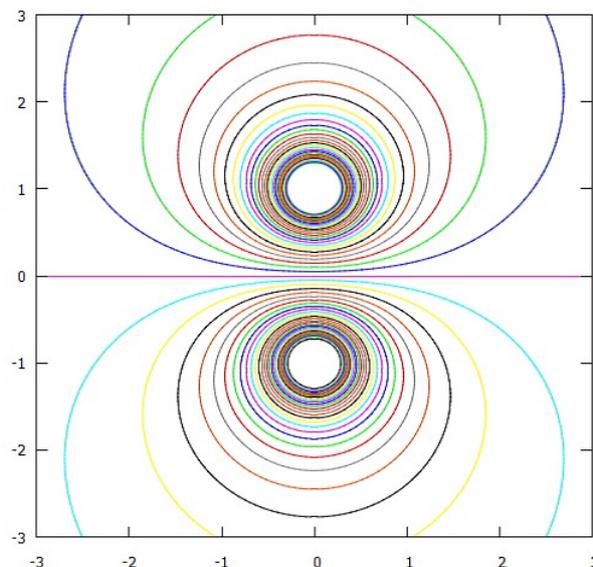


図 2.8.12: $\delta = 1$ の時の一対の点電荷による等静電ポテンシャル

$\delta = 1$ の時の一対の点電荷による電子力線

ここで、電気力線： ψ は (2.8.82) 式に (2.5.2) 式を適用し、次式を得る。

$$\psi = -\frac{Q_1 z}{4\pi\epsilon_0\sqrt{z^2+2\delta z+r^2+\delta^2}} - \frac{Q_1\delta}{4\pi\epsilon_0\sqrt{z^2+2\delta z+r^2+\delta^2}} + \frac{Q_1 z}{4\pi\epsilon_0\sqrt{z^2-2\delta z+r^2+\delta^2}} - \frac{Q_1\delta}{4\pi\epsilon_0\sqrt{z^2-2\delta z+r^2+\delta^2}} \quad (2.8.83)$$

$\delta = 1, Q_1 = 4\pi, \epsilon_0$ を代入し、図示すると、

```
#!/gnuplot
set xrange [-3:3]
set yrange [-3:3]
set isosamples 128,128
set contour base
set cntrparam levels incremental -30,
0.05,30
unset key
unset surface
set view map
splot -y/sqrt(y**2+2*y+x**2+1)
-1/sqrt(y**2+2*y+x**2+1)
+y/sqrt(y**2-2*y+x**2+1)
-1/sqrt(y**2-2*y+x**2+1)
# EOF
```

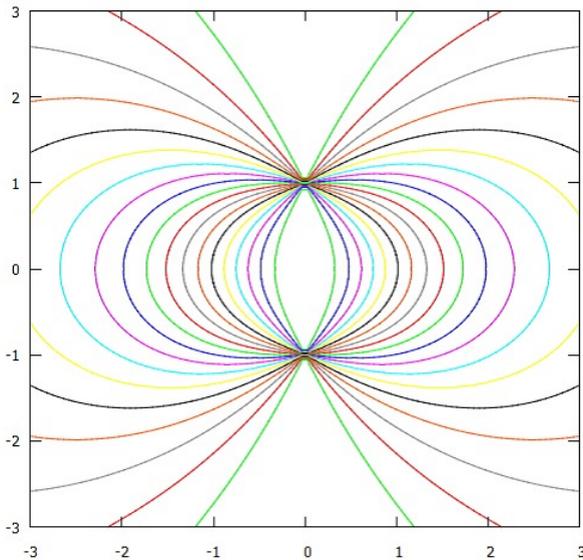


図 2.8.13: $\delta = 1$ の時の一対の点電荷による電力線

電気双極子の静電場

電気双極子の静電場の大きさとおよび静電ポテンシャルを求める。(2.8.78) 式で $\theta = 0, p = 2\epsilon_0\pi$ として、電気双極子の静電場を求める。

```
#!/gnuplot
c=0.01
pot(x,y)=x*y
Bx(x,y)=(3*x*y)/(2*(y**2+x**2)**(5/2));
By(x,y)=(2*y**2-x**2)/(2*(y**2+x**2)**(5/2))
set xrange [-1:1]; set yrange[-1:1]
set isosamples 32; set samples 32
set table "potential.dat"
splot pot(x,y)
unset table
plot "potential.dat" using 1:2:(c*Bx($1,
$2)):(c*By($1,$2)) with vector notitle
# EOF
```

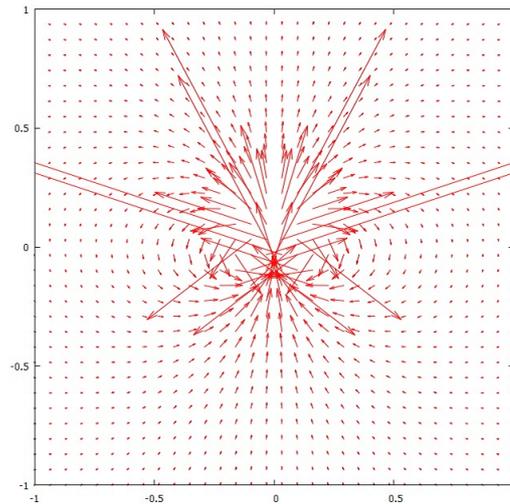


図 2.8.14: 電気双極子の静電場

電気双極子の等静電ポテンシャル

(2.8.81) 式で $p = 2\pi, \epsilon_0$ として、電気双極子の等静電ポテンシャルを求める。

```
#!/gnuplot
set xrange [-1:1]
set yrange [-1:1]
set isosamples 128,128
set contour base
set cntrparam levels incremental -3,0.1,3
unset key
unset surface
set view map
splot y/(y**2+x**2)**(3/2)
# EOF
```

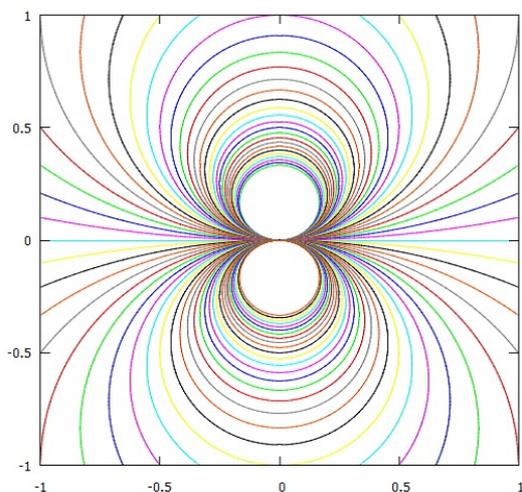


図 2.8.15: 電気双極子の等静電ポテンシャル

電気双極子の電気力線

(2.8.81) 式に (2.5.2) 式の方法を適用して得られた電気力線は良い結果が得られないので、(2.8.83) 式で δ に小さな値を代入することで求めた。 $\delta = 0.01, Q_1 = 4\pi, \epsilon_0$ として、電気双極子の静電場を求める。

```
#!/gnuplot
set xrange [-1:1]
set yrange [-1:1]
set isosamples 128,128
set contour base
set cntrparam levels incremental -3,0.005,3
unset key
unset surface
set view map
splot -y/sqrt(y**2+0.02*y+x**2+1.0*10**-4)
-0.01/sqrt(y**2+0.02*y+x**2+1.0*10**-4)
+y/sqrt(y**2-0.02*y+x**2+1.0*10**-4)
-0.01/sqrt(y**2-0.02*y+x**2+1.0*10**-4)
# EOF
```

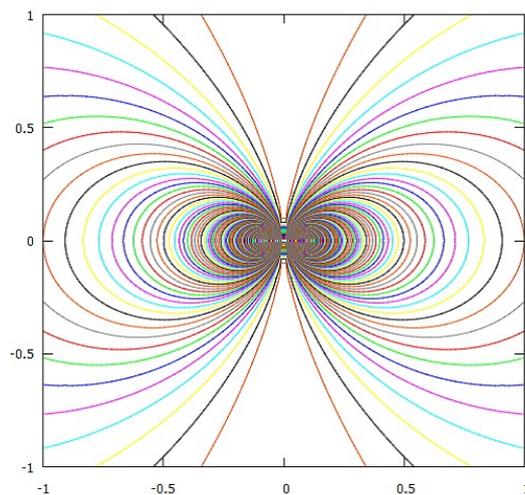


図 2.8.16: 電気双極子の電力線

例題 2.8.10 4 個の点電荷による電気 4 極子の静電場

x, y 軸面上に微小距離: δ で、 δ, δ に電荷: Q_1 を、 $\delta, -\delta$ に電荷: $-Q_1$ を、 $-\delta, -\delta$ に電荷: Q_1 を、 $-\delta, \delta$ に電荷: $-Q_1$ を置いた静電場: \vec{E} を求め、 $\delta \rightarrow 0$ の電気双極子の静電場、静電ポテンシャルを求める。

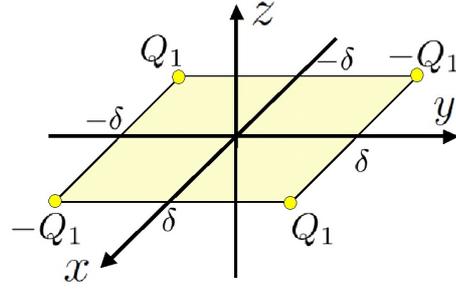


図 2.8.17: 電気 4 極子

ここで \vec{E} を、 $\vec{r}, \vec{r}_1, \vec{r}_2$ を円柱座標で表し、下記とすると、

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \vec{r}_1 = \begin{pmatrix} \delta \\ \delta \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.8.84)$$

$$\vec{r}_2 = \begin{pmatrix} -\delta \\ \delta \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{r}_3 = \begin{pmatrix} -\delta \\ -\delta \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{r}_4 = \begin{pmatrix} \delta \\ -\delta \\ 0 \end{pmatrix}$$

(2.2.1) 式から静電場: \vec{E} は、

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1(\vec{r} - \vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3}$$

上式から 4 個の点電荷の静電場: \vec{E} は、

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} \frac{Q_1(x-\delta)}{4\epsilon_0\pi(z^2+(y-\delta)^2+(x-\delta)^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{Q_1(y-\delta)}{4\epsilon_0\pi(z^2+(y-\delta)^2+(x-\delta)^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{Q_1 z}{4\epsilon_0\pi(z^2+(y-\delta)^2+(x-\delta)^2)^{\frac{3}{2}}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{Q_1(x+\delta)}{4\epsilon_0\pi(z^2+(y-\delta)^2+(x+\delta)^2)^{\frac{3}{2}}} \\ -\frac{Q_1(y-\delta)}{4\epsilon_0\pi(z^2+(y-\delta)^2+(x+\delta)^2)^{\frac{3}{2}}} \\ -\frac{Q_1 z}{4\epsilon_0\pi(z^2+(y-\delta)^2+(x+\delta)^2)^{\frac{3}{2}}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{Q_1(x+\delta)}{4\epsilon_0\pi(z^2+(y+\delta)^2+(x+\delta)^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{Q_1(y+\delta)}{4\epsilon_0\pi(z^2+(y+\delta)^2+(x+\delta)^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{Q_1 z}{4\epsilon_0\pi(z^2+(y+\delta)^2+(x+\delta)^2)^{\frac{3}{2}}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{Q_1(x-\delta)}{4\epsilon_0\pi(z^2+(y+\delta)^2+(x-\delta)^2)^{\frac{3}{2}}} \\ -\frac{Q_1(y+\delta)}{4\epsilon_0\pi(z^2+(y+\delta)^2+(x-\delta)^2)^{\frac{3}{2}}} \\ -\frac{Q_1 z}{4\epsilon_0\pi(z^2+(y+\delta)^2+(x-\delta)^2)^{\frac{3}{2}}} \end{pmatrix} \quad (2.8.85)$$

上式で、 δ が十分小さいとし、 δ で Taylor 展開し、一次項までを記述すると、

$$\begin{pmatrix} E_r \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + \dots \\ 0 + \dots \\ 0 + \dots \end{pmatrix}$$

```
kill(all);
load("vect")$
depends([E,R],[x,y,z]);
MTE:matrix([E[r]],[E[y]],[E[z]]);
MTR:matrix([x],[y],[z]);
MTR1:matrix([\delta],[\delta],[0]);
MTR2:matrix([-\delta],[\delta],[0]);
MTR3:matrix([-\delta],[-\delta],[0]);
MTR4:matrix([\delta],[-\delta],[0]);
MTR-MTR1;
ABSR01:sqrt(%[1][1]^2+%[2][1]^2
+%[3][1]^2);
MTR-MTR2;
ABSR02:sqrt(%[1][1]^2+%[2][1]^2
+%[3][1]^2);
MTR-MTR3;
ABSR03:sqrt(%[1][1]^2+%[2][1]^2
+%[3][1]^2);
MTR-MTR4;
ABSR04:sqrt(%[1][1]^2+%[2][1]^2
+%[3][1]^2);
MTE1:Q[1]/(4*\pi*\epsilon[0])*(MTR-MTR1)
/ABSR01^3;
MTE2:-Q[1]/(4*\pi*\epsilon[0])*(MTR-MTR2)
/ABSR02^3;
MTE3:Q[1]/(4*\pi*\epsilon[0])*(MTR-MTR3)
/ABSR03^3;
MTE4:-Q[1]/(4*\pi*\epsilon[0])*(MTR-MTR4)
/ABSR04^3;
E1:MTE=MTE1+MTE2+MTE3+MTE4;
MTE11:taylor(MTE1,\delta,0,1);
MTE21:taylor(MTE2,\delta,0,1);
MTE31:taylor(MTE3,\delta,0,1);
MTE41:taylor(MTE4,\delta,0,1);
E2:MTE=MTE11+MTE21+MTE31+MTE41;
MTE11:taylor(MTE1,\delta,0,2);
MTE21:taylor(MTE2,\delta,0,2);
MTE31:taylor(MTE3,\delta,0,2);
MTE41:taylor(MTE4,\delta,0,2);
MTE=MTE11+MTE21+MTE31+MTE41;
E2:factor(%);
E21:MTE=subst([\delta^2=p/Q[1]],rhs(%));
```

(2.8.85) 式を δ で Taylor 展開し、二次項までを記述すると、

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3Q_1\delta^2 y(z^2+y^2-4x^2)}{\epsilon_0\pi(z^2+y^2+x^2)^{\frac{7}{2}}} \\ -\frac{3Q_1\delta^2 x(z^2-4y^2+x^2)}{\epsilon_0\pi(z^2+y^2+x^2)^{\frac{7}{2}}} \\ \frac{15Q_1\delta^2 xyz}{\epsilon_0\pi(z^2+y^2+x^2)^{\frac{7}{2}}} \end{pmatrix}$$

上式で、いま、 $\delta \rightarrow 0$ としたとき、 $Q_1\delta^2 \rightarrow p$ とすると、電気4極子の静電場が得られ、

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3py(z^2+y^2-4x^2)}{\epsilon_0\pi(z^2+y^2+x^2)^{\frac{7}{2}}} \\ -\frac{3px(z^2-4y^2+x^2)}{\epsilon_0\pi(z^2+y^2+x^2)^{\frac{7}{2}}} \\ \frac{15pxyz}{\epsilon_0\pi(z^2+y^2+x^2)^{\frac{7}{2}}} \end{pmatrix} \quad (2.8.86)$$

```
MPH1:Q[1]/(4*\pi*\epsilonpsilon[0])/ABSR01;
MPH2:-Q[1]/(4*\pi*\epsilonpsilon[0])/ABSR02;
MPH3:Q[1]/(4*\pi*\epsilonpsilon[0])/ABSR03;
MPH4:-Q[1]/(4*\pi*\epsilonpsilon[0])/ABSR04;
PH1:\phi=MPH1+MPH2+MPH3+MPH4;
assume(\delta>0);
assume(x>\delta);
subst([z=0],MPH1);
diff(%,x,1);
integrate(%,y);
MPS1:factor(%) ;
subst([z=0],MPH2);
diff(%,x,1);
integrate(%,y);
MPS2:factor(%) ;
subst([z=0],MPH3);
diff(%,x,1);
integrate(%,y);
MPS3:factor(%) ;
subst([z=0],MPH4);
diff(%,x,1);
integrate(%,y);
MPS4:factor(%) ;
PS1:\psi=MPS1+MPS2+MPS3+MPS4;
PH12:subst([Q[1]=4*\pi*\epsilonpsilon[0],
\delta=1,z=0],rhs(PH1));
PS12:subst([Q[1]=4*\pi*\epsilonpsilon[0],
\delta=1,z=0],rhs(PS1));
```

Q_j の電荷がある時、静電ポテンシャル： ϕ は (2.4.4) 式から、

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_j}{|\vec{r} - \vec{z}|}$$

上式に (2.8.84) 式を代入し、

$$\begin{aligned} \phi = & \frac{Q_1}{4\epsilon_0\pi\sqrt{z^2+(y+\delta)^2+(x+\delta)^2}} \\ & - \frac{Q_1}{4\epsilon_0\pi\sqrt{z^2+(y+\delta)^2+(x-\delta)^2}} \\ & - \frac{Q_1}{4\epsilon_0\pi\sqrt{z^2+(y-\delta)^2+(x+\delta)^2}} \\ & + \frac{Q_1}{4\epsilon_0\pi\sqrt{z^2+(y-\delta)^2+(x-\delta)^2}} \end{aligned} \quad (2.8.87)$$

上式の電気力線を求めるのし、(2.5.2) 式は円柱座標で z 軸対称の場合で、適用できない。そこで二次元の xy 座標の (2.5.5) 式も適用できないが、 $z=0$ とし、近似的に xy 座標の (2.5.5) 式を適用できるとして、電気力線： ψ を求めると、

$$\begin{aligned} \psi = & -\frac{Q_1(y+\delta)}{4\epsilon_0\pi(x+\delta)\sqrt{y^2+2\delta y+x^2+2\delta x+2\delta^2}} \\ & + \frac{Q_1(y+\delta)}{4\epsilon_0\pi(x-\delta)\sqrt{y^2+2\delta y+x^2-2\delta x+2\delta^2}} \\ & + \frac{Q_1(y-\delta)}{4\epsilon_0\pi(x+\delta)\sqrt{y^2-2\delta y+x^2+2\delta x+2\delta^2}} \\ & - \frac{Q_1(y-\delta)}{4\epsilon_0\pi(x-\delta)\sqrt{y^2-2\delta y+x^2-2\delta x+2\delta^2}} \end{aligned} \quad (2.8.88)$$

```

MPH11:taylor(MPH1,\delta,0,1);
MPH21:taylor(MPH2,\delta,0,1);
MPH31:taylor(MPH3,\delta,0,1);
MPH41:taylor(MPH4,\delta,0,1);
\phi=MPH11+MPH21+MPH3+MPH4;
PH2:factor(%);
MPH11:taylor(MPH1,\delta,0,2);
MPH21:taylor(MPH2,\delta,0,2);
MPH31:taylor(MPH3,\delta,0,1);
MPH41:taylor(MPH4,\delta,0,2);
\phi=MPH11+MPH21+MPH3+MPH4;
factor(%);
PH21:\phi=subst([\delta^2=p/Q[1]],rhs(%));
PH22:subst([p=\pi*\epsilonpsilon[0],z=0],
  rhs(PH21));
diff(%,x,1);
integrate(%,y);
PS22:factor(%);
PS23:subst([Q[1]=4*\pi*\epsilonpsilon[0],
  \delta=0.01],PS11);
E11:subst([Q[1]=4*\pi*\epsilonpsilon[0],
  \delta=1,z=0],rhs(E1));
B[x](x,y)=E11[1][1];
B[y](x,y)=E11[2][1];
E22:subst([p=\pi*\epsilonpsilon[0],z=0],
  rhs(E21));
B[x](x,y)=E22[1][1];
B[y](x,y)=E22[2][1];

```

(2.8.87) 式で、 δ が十分小さいとし、 δ で Taylor 展開し、一次項までを記述すると、

$$\phi = 0 + \dots$$

(2.8.87) 式で、 δ で Taylor 展開し、二次項までを記述すると、

$$\phi = \frac{3Q_1\delta^2xy}{\epsilon_0\pi(z^2+y^2+x^2)^{\frac{5}{2}}}$$

上式で、いま、 $\delta \rightarrow 0$ としたとき、 $Q_1\delta^2 \rightarrow p$ とすると、電気4極子の静電ポテンシャルが得られ、

$$\phi = \frac{3pxy}{\epsilon_0\pi(z^2+y^2+x^2)^{\frac{5}{2}}} \quad (2.8.89)$$

$z = 0$ として、近似的に xy 座標の (2.5.5) 式を適用できるとして、電気力線 ψ を求めると、

$$\psi = -\frac{y^2 - 2x^2}{(y^2 + x^2)^{\frac{5}{2}}} \quad (2.8.90)$$

4 個の点電荷の静電場

(2.8.85) 式で $Q_1 = 4\epsilon_0\pi$, $z = 0$, $\delta = 1$ として、4 個の電荷の静電場の大きさと向き求める。

```

#!/gnuplot
c=0.2
pot(x,y)=x*y
Bx(x,y)=(x+1)/((y+1)**2+(x+1)**2)**(3/2)
-(x-1)/((y+1)**2+(x-1)**2)**(3/2)-(x+1)
/((y-1)**2+(x+1)**2)**(3/2)+(x-1)/((y-1)
**2+(x-1)**2)**(3/2); By(x,y)=(y+1)/
((y+1)**2+(x+1)**2)**(3/2)
-(y+1)/((y+1)**2+(x-1)**2)**(3/2)
-(y-1)/((y-1)**2+(x+1)**2)**(3/2)
+(y-1)/((y-1)**2+(x-1)**2)**(3/2)
set xrange [-3:3]; set yrange[-3:3]
set isosamples 128; set samples 128
set table "potential.dat"
splot pot(x,y)
unset table
plot "potential.dat" using 1:2:(c*Bx($1,
$2):(c*By($1,$2)) with vector notitle
# EOF

```

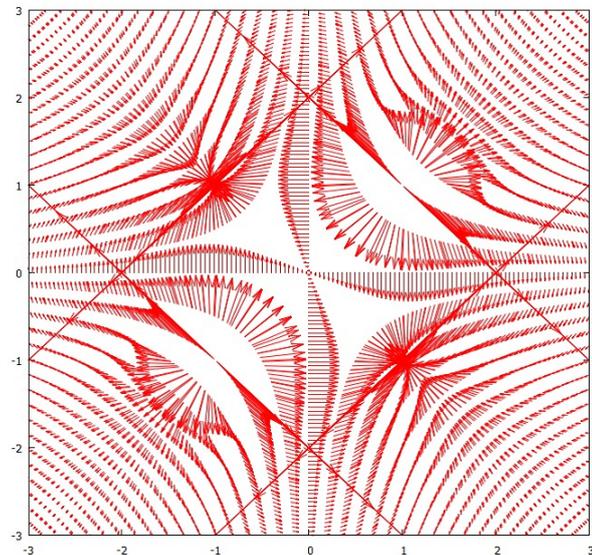


図 2.8.18: 4 個の点電荷による静電場

4 個の点電荷による静電ポテンシャル

(2.8.87) 式で $Q_1 = 4\epsilon_0\pi$, $z = 0$, $\delta = 1$ として、4 個の点電荷の静電ポテンシャルを求める。

```
#!/gnuplot
set xrange [-3:3]
set yrange [-3:3]
set isosamples 128,128
set contour base
set cntrparam levels incremental -50,
0.05,50
unset key
unset surface
set view map
splot 1/sqrt((y+1)**2+(x+1)**2)-1/sqrt(
(y+1)**2+(x-1)**2)-1/sqrt((y-1)**2+
(x+1)**2)+1/sqrt((y-1)**2+(x-1)**2)
# EOF
```

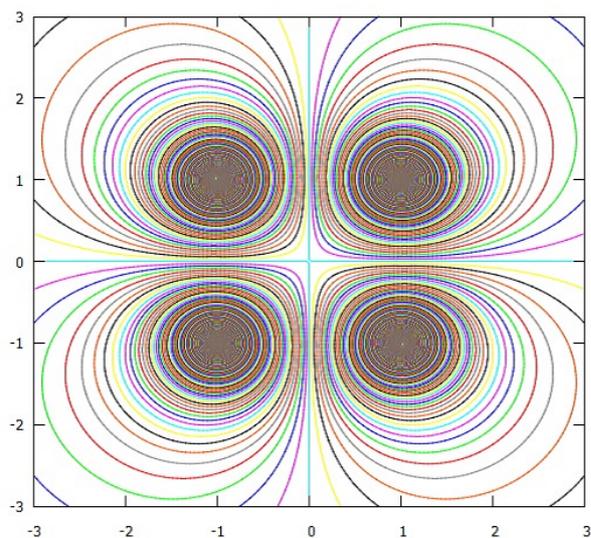


図 2.8.19: 4 個の点電荷による静電ポテンシャル

4 個の点電荷による電気力線

(2.8.88) 式で $Q_1 = 4\epsilon_0\pi$, $z = 0$, $\delta = 1$ として、4 個の点電荷の電気力線を求める。

```
#!/gnuplot
set xrange [-3:3]
set yrange [-3:3]
set isosamples 256,256
set contour base
set cntrparam levels incremental -50,
0.1,50
unset key
unset surface
set view map
splot -(y+1)/((x+1)*sqrt(y**2+2*y+x**2+2
*x+2))+ (y+1)/((x-1)*sqrt(y**2+2*y+x**2
-2*x+2))+ (y-1)/((x+1)*sqrt(y**2-2*y
+x**2+2*x+2))- (y-1)/((x-1)*sqrt(y**2
-2*y+x**2-2*x+2))
# EOF
```

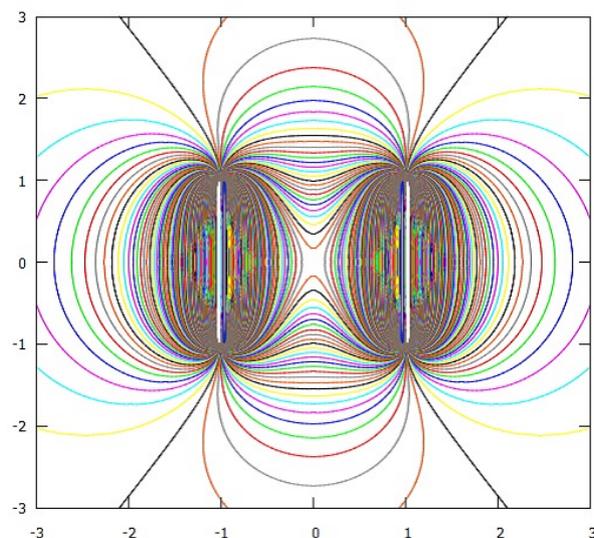


図 2.8.20: 4 個の点電荷による電子力線

電気4極子による静電場

(2.8.86) 式で $p = \epsilon_0 \pi, z = 0$ として、電気4極子による静電場の向きと大きさを求める。

```
#!/gnuplot
c=0.0002
pot(x,y)=x*y
Bx(x,y)=-(3*y*(y**2-4*x**2))/(y**2+x**2)
**(7/2); By(x,y)=-(3*x*(x**2-4*y**2))
/(y**2+x**2)**(7/2)
set xrange [-1:1]; set yrange[-1:1]
set isosamples 32; set samples 32
set table "potential.dat"
splot pot(x,y)
unset table
plot "potential.dat" using 1:2:(c*Bx($1,
$2)):(c*By($1,$2)) with vector notitle
# EOF
```

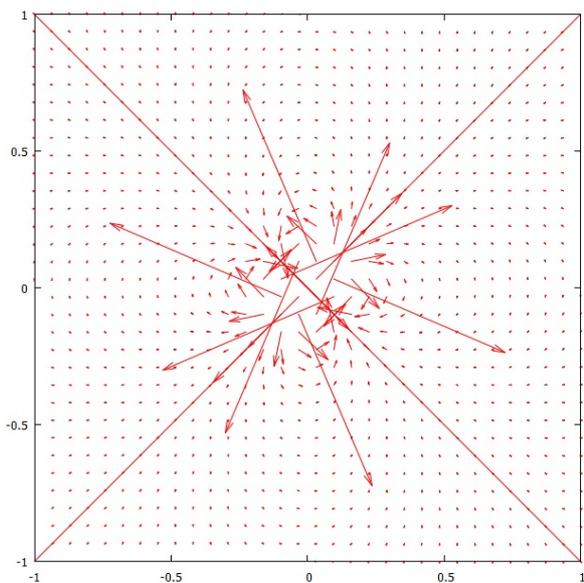


図 2.8.21: 電気4極子による静電場

電気4極子による静電ポテンシャル

(2.8.89) 式で $p = \epsilon_0 \pi, z = 0$ として、電気4極子による静電ポテンシャルを求める。

```
#!/gnuplot
set xrange [-1:1]
set yrange [-1:1]
set isosamples 128,128
set contour base
set cntrparam levels incremental
-50,0.5,50
unset key
unset surface
set view map
splot (3*x*y)/(y**2+x**2)**(5/2)
# EOF
```

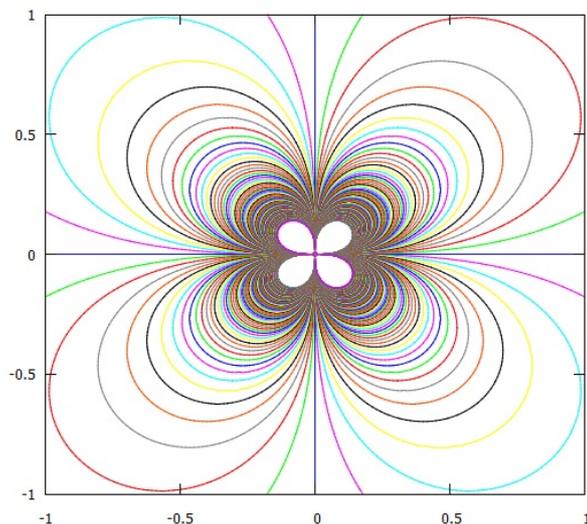


図 2.8.22: 電気4極子による静電ポテンシャル

電気 4 極子による電子力線

(2.8.90) 式で $p = \epsilon_0 \pi, z = 0$ として、電気 4 極子による電子力線を求める。

```
#!/gnuplot
set xrange [-1:1]
set yrange [-1:1]
set isosamples 128,128
set contour base
set cntrparam levels incremental
-50,0.5,50
unset key
unset surface
set view map
splot (3*x*y)/(y**2+x**2)**(5/2)
# EOF
```

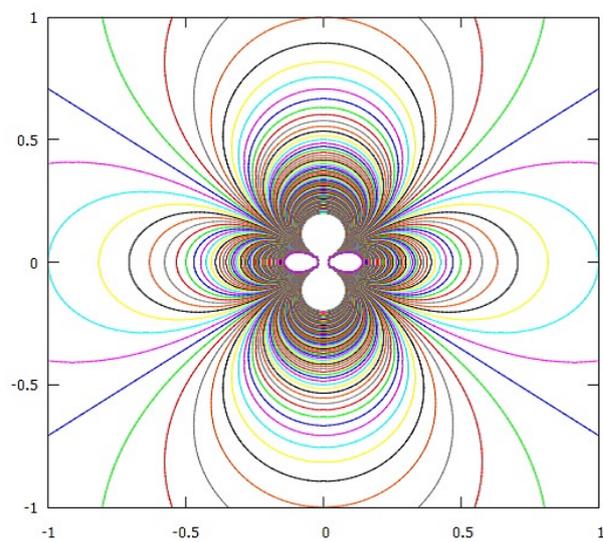


図 2.8.23: 電気 4 極子による電子力線

第3章 導体と静電場

3.1 導体内の静電場

導体が帯電したり、静電場の中に置かれた場合、その内側の静電場がどうなるか調べる。

- (1) 静電場： $\vec{E} = 0$ 電荷の分布や電場が時間的に変化しない最終状態では、静電場： $\vec{E} = 0$ である。もし、零でないなら電子が電場により力を受け、動き出し、電荷分布が変化する。この変化が無くなるまで続き、最終的には静電場： $\vec{E} = 0$ となる。
- (2) 電荷密度： $\rho = 0$ (2.4.20)式の下記の微分型のガウスの法則で、上記から $\vec{E} = 0$ あるから、電荷密度： ρ も零となる。

$$\nabla \cdot \vec{E} = \text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

- (3) 静電ポテンシャル： $\phi = \text{一定}$ (2.4.9)式の下記の静電ポテンシャル： ϕ と静電場： \vec{E} との関係で、 $\vec{E} = 0$ であるから、静電ポテンシャル： ϕ は一定値となる。

$$\vec{E} = -\text{grad} \phi$$

- (4) 導体表面の電荷 導体が帯電した時には、上記、電荷密度： $\rho = 0$ から内部に電荷がないので、電荷は導体表面に分布する。導体内部では静電ポテンシャル： $\phi = \text{一定}$ であるから、導体の表面は等静電ポテンシャル(等電位)になる。(2.5.1)式から静電場のベクトル方向(電気力線)は導体表面に垂直であることを示している。導体の表面に(2.3.4)式のガウスの法則から、表面の電荷密度： τ と静電場： E の関係は次式となる。

$$E = \frac{\tau}{\epsilon_0} \quad (3.1.1)$$

3.2 境界値問題

導体のまわりの電場を求める場合、導体の表面が等静電ポテンシャル(電位)であるから、この条件のもとで、導体の外の領域をポアソンの方程式を解いて、静電場を求める境界値問題となる。

3.3 電気容量

いま、半径： R の導体球に電荷： Q を与えたとき、その表面に電荷が分布するので、(2.8.33)式から、導体球表面の静電ポテンシャル(電位)： ϕ は下記となり、静電ポテンシャル(電位)： ϕ は電荷： Q に比例する。導体球が大きければ、大きな電荷： Q を与えても、静電ポテンシャル(電位)： ϕ の高まりは小さく、電荷： Q の容量が増える。

$$\phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \quad (3.3.1)$$

導体の静電ポテンシャルが、境界条件のもとで、ラプラスの方程式を解いて得られるので、線型な静電ポテンシャル(電位)： ϕ と電荷： Q の関係となる。ゆえに、一般的な導体に蓄えられる電荷と静電ポテンシャル(電位)の関係は比例関係になる。そこで、電荷： Q と静電ポテンシャル(電位)： ϕ の関係は電気容量： C を用いて、

$$Q = C\phi \quad (3.3.2)$$

半径： R の導体球では(3.3.1)式から、

$$C = 4\pi\epsilon_0 R$$

導体に蓄えられるエネルギー

導体に電荷： Q を与えたとき、その表面に電荷が分布するので、導体に蓄えられた静電エネルギーは、連続的な電荷の静電エネルギーの(2.6.6)式となり、導体が一つのときの静電エネルギーは、

$$U = \frac{1}{2}Q\phi$$

上式を(3.3.2)式の電気容量で表すと、

$$U = \frac{1}{2}Q\phi = \frac{1}{2}C\phi^2 = \frac{1}{2C}Q^2 \quad (3.3.3)$$

導体系の電気容量係数

n 個の孤立した導体に電荷： Q_1, Q_2, \dots, Q_n を与えたとき、各導体の静電ポテンシャル(電位)： $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ 、電気容量係数： $C_{11}, C_{12}, \dots, C_{nn}$ とすると、(3.3.2)式から、

$$\begin{aligned} Q_1 &= C_{11}\phi_1 + C_{12}\phi_2 + \dots + C_{1n}\phi_n \\ Q_2 &= C_{21}\phi_1 + C_{22}\phi_2 + \dots + C_{2n}\phi_n \\ &\dots\dots\dots \\ Q_n &= C_{n1}\phi_1 + C_{n2}\phi_2 + \dots + C_{nn}\phi_n \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

電気容量係数では、 $C_{ij} = C_{ji}$ の関係がある。

```
kill(all);
MC1:matrix([C[11],C[12],C[13]], [C[21],
C[22],C[23]], [C[31],C[32],C[33]]);
MP1:matrix([P[11],P[12],P[13]], [P[21],
P[22],P[23]], [P[31],P[32],P[33]]);
MQ1:matrix([Q[1]], [Q[2]], [Q[3]]);
MPH1:matrix([\phi[1]], [\phi[2]],
[\phi[3]]);
MQ2:MQ1=MC1.MPH1;
MCI1:invert(MC1);
MPH2:MPH1=MCI1.MQ1;
MPH3:MPH1=MP1.MQ1;
MP2:MP1=MCI1;
U1:U=MQ1.MPH1;
DMQ1:matrix([dQ[1]], [dQ[2]], [dQ[3]]);
DU1:dU=DMQ1.MPH1;
DU2:dU='diff(U,Q[1],1)*dQ[1]+'diff(U,
Q[2],1)*dQ[2]+'diff(U,Q[3],1)*dQ[3];
PH41:\phi[i]='diff(U,Q[i],1);
PH42:\phi[i]=Q[3]*P[i3]+Q[2]*P[i2]
+Q[1]*P[i1];
rhs(PH41)=rhs(PH42);
'diff(lhs(%),Q[2],1)=diff(rhs(%),Q[2],1);
subst([Q[2]=Q[j]],lhs(%))=subst([P[i2]=
P[ij]],rhs(%));
MC1.MCI1;
factor(%);
MCI1.MC1;
factor(%);
```

$n = 3$ の場合について、 $C_{ij} = C_{ji}$ の関係を証明する。行列： C, P を下記とし、行列： P は行列： C の逆行列とすると、

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix}$$

$$P = C^{-1} = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{pmatrix}$$

上式から (3.3.4) 式は、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \phi_3 C_{13} + \phi_2 C_{12} + \phi_1 C_{11} \\ \phi_3 C_{23} + \phi_2 C_{22} + \phi_1 C_{21} \\ \phi_3 C_{33} + \phi_2 C_{32} + \phi_1 C_{31} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 は、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} Q_3 P_{13} + Q_2 P_{12} + Q_1 P_{11} \\ Q_3 P_{23} + Q_2 P_{22} + Q_1 P_{21} \\ Q_3 P_{33} + Q_2 P_{32} + Q_1 P_{31} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

導体に蓄えられるエネルギー： U は、

$$U = \phi_3 Q_3 + \phi_2 Q_2 + \phi_1 Q_1 \quad (3.3.7)$$

dQ_1, dQ_2, dQ_3 だけ電荷を増やしたときのエネルギー増加： dU は、

$$dU = \phi_3 dQ_3 + \phi_2 dQ_2 + \phi_1 dQ_1 \quad (3.3.8)$$

(3.3.7) 式から U の全微分は、

$$\begin{aligned} dU &= dQ_3 \left(\frac{d}{dQ_3} U \right) + dQ_2 \left(\frac{d}{dQ_2} U \right) \\ &\quad + dQ_1 \left(\frac{d}{dQ_1} U \right) \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

(3.3.8) 式と (3.3.9) 式を比較して、一般的に、

$$\phi_i = \frac{d}{dQ_i} U \quad i = 1 \rightarrow 3 \quad (3.3.10)$$

ところで、 ϕ_i は (3.3.6) 式から、

$$\phi_i = Q_3 P_{i3} + Q_2 P_{i2} + Q_1 P_{i1} \quad (3.3.11)$$

(3.3.10) 式、(3.3.11) 式から、これらの右辺は等しいので、

$$\frac{d}{dQ_i} U = Q_3 P_{i3} + Q_2 P_{i2} + Q_1 P_{i1}$$

上式を Q_2 で微分すると、

$$\frac{d^2}{dQ_i dQ_2} U = P_{i2}$$

2 を一般化して j とすると、

$$\frac{d^2}{dQ_i dQ_j} U = P_{ij}$$

i と j を入れ替えると、

$$\frac{d^2}{dQ_j dQ_i} U = P_{ji}$$

上記二式の左辺の偏微分は i と j を入れ替えても変わらないから、

$$P_{ij} = P_{ji}$$

これより、行列： P は対称行列である。行列： P は行列： C の逆行列であり、行列： E を単位行列とすると、

$$CP = E \quad (3.3.12)$$

上式の転置行列は、単位行列： E の転置行列は単位行列であるから、

$$(CP)^T = E^T = E$$

行列： P は対称行列であるから、 $P^T = P$ となり、

$$(CP)^T = P^T C^T = P C^T = E$$

(3.3.12) 式と上式から、 $C = C^T$ となり、 C は対称行列であり、 $C_{ij} = C_{ji}$ となる。

3.4 コンデンサー

二つの導体をそれぞれ Q , $-Q$ の電荷を与え、近づけると各導体の電荷は相手の静電ポテンシャルを低く抑える働きをするので、導体の静電ポテンシャル（電位）を低く、多くの電荷を蓄えることができる。この装置がコンデンサーである。

コンデンサーに電荷を与えたときの静電エネルギー： U は、(3.3.3) 式から、

$$U = \frac{\phi_1 Q}{2} - \frac{\phi_2 Q}{2} = \frac{\Delta \phi Q}{2} = \frac{\Delta \phi^2 C}{2} = \frac{Q^2}{2C} \quad (3.4.4)$$

```
kill(all);
Q1:Q[1]=C[11]*\phi[1]+C[12]*\phi[2];
Q2:Q[2]=C[21]*\phi[1]+C[22]*\phi[2];
solve([Q1,Q2],[\phi[1],\phi[2]])[1];
subst([Q[1]=Q,Q[2]=-Q],%);
factor(%);
%[1]-%[2];
factor(%);
\Delta*\phi=rhs(%);
solve(%,Q)[1];
C=rhs%/(\Delta*\phi);
Q3:Q=C*\Delta*\phi;
D3:solve(%,\Delta)[1];
```

二つの導体の場合、(3.3.4) 式で $n = 2$ として、

$$\begin{aligned} Q_1 &= \phi_2 C_{12} + \phi_1 C_{11} \\ Q_2 &= \phi_2 C_{22} + \phi_1 C_{21} \end{aligned} \quad (3.4.1)$$

上式で、 $Q_1 = Q$, $Q_2 = -Q$ として、 ϕ_1 , ϕ_2 を求めると、

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \frac{(C_{22} + C_{12}) Q}{C_{11} C_{22} - C_{12} C_{21}} \\ \phi_2 &= -\frac{(C_{21} + C_{11}) Q}{C_{11} C_{22} - C_{12} C_{21}} \end{aligned} \quad (3.4.2)$$

上式の差をとると、

$$\phi_1 - \phi_2 = \Delta \phi = \frac{(C_{22} + C_{21} + C_{12} + C_{11}) Q}{C_{11} C_{22} - C_{12} C_{21}}$$

上式から Q を求めると、

$$Q = \frac{(C_{11} C_{22} - C_{12} C_{21}) \Delta \phi}{C_{22} + C_{21} + C_{12} + C_{11}}$$

静電ポテンシャルと電位の関係式は次式とし、 C をこのコンデンサーの電気容量とする。

$$Q = \Delta \phi C \quad (3.4.3)$$

上式からコンデンサーの電気容量： C は、

$$C = \frac{C_{11} C_{22} - C_{12} C_{21}}{C_{22} + C_{21} + C_{12} + C_{11}}$$

```
U1:U=1/2*Q*\phi[1]-1/2*Q*\phi[2];
U2:U=1/2*Q*\Delta*\phi;
subst([Q3],U2);
subst([D3],U2);
```

3.5 例題

例題 3.5.1 十分離れた二つの導体球の接続

十分離れた半径: R_A, R_B の導体球があり、それぞれ Q_A, Q_B の電荷を有している。この導体球を細い導線で接続したとき、それぞれの静電場を求める。

```
kill(all);
PH1:\phi=Q/(4*pi*epsilon[0]*r);
E1:E[n]=Q/(4*pi*epsilon[0]*r^2);
PHA1:subst([\phi=\phi[A],Q=Q[A],r=R[A]],
PH1);
EA1:subst([E[n]=E[A],Q=Q[A],r=R[A]],E1);
PHB1:subst([\phi=\phi[B],Q=Q[B],r=R[B]],
PH1);
EB1:subst([E[n]=E[B],Q=Q[B],r=R[B]],E1);
PHA2:subst([\phi=\phi[a],Q=Q[a],r=R[A]],
PH1);
PHB2:subst([\phi=\phi[b],Q=Q[b],r=R[B]],
PH1);
PH3:\phi[a]=\phi[b];
Q3:Q[A]+Q[B]=Q[a]+Q[b];
Q31:subst([PHA2,PHB2],PH3);
solve([Q3,Q31],[Q[a],Q[b]])[1];
Q4:factor(%);
EA2:E[a]=rhs(Q4[1])/((4*pi*epsilon[0]
*R[A]^2));
EB2:E[b]=rhs(Q4[2])/((4*pi*epsilon[0]
*R[B]^2));
EA2/EB2;
```

導体球に電荷を与えたとき、その表面に電荷が分布するので、(2.8.33) 式、(2.8.35) 式から、導体球: A について、導体球鏡面の静電ポテンシャル: ϕ_A 、静電場: E_A は、

$$\phi_A = \frac{Q_A}{4\pi\epsilon_0 R_A}, \quad E_A = \frac{Q_A}{4\pi\epsilon_0 R_A^2}$$

導体球: B について、導体球表面の静電ポテンシャル: ϕ_B 、静電場: E_B は、

$$\phi_B = \frac{Q_B}{4\pi\epsilon_0 R_B}, \quad E_B = \frac{Q_B}{4\pi\epsilon_0 R_B^2}$$

導体球を細い導線で接続したときの導体球の電荷を Q_a, Q_b とすると、導体球表面の静電ポテンシャル: ϕ_a, ϕ_b は、

$$\phi_a = \frac{Q_a}{4\pi\epsilon_0 R_A}, \quad \phi_b = \frac{Q_b}{4\pi\epsilon_0 R_B}$$

導体球を細い導線で接続すると、静電ポテンシャル(電位)は等しく、総電荷量は変化しないので、

$$\phi_a = \phi_b, \quad Q_B + Q_A = Q_b + Q_a$$

上式を解いて、 Q_a, Q_b を求めると、

$$Q_a = \frac{R_A(Q_B + Q_A)}{R_B + R_A}, \quad Q_b = \frac{(Q_B + Q_A)R_B}{R_B + R_A}$$

上式から、接続後の導体球表面の静電場は、

$$E_a = \frac{Q_B + Q_A}{4\pi\epsilon_0 R_A(R_B + R_A)}$$

$$E_b = \frac{Q_B + Q_A}{4\pi\epsilon_0 R_B(R_B + R_A)}$$

その比は、

$$\frac{E_a}{E_b} = \frac{R_B}{R_A}$$

例題 3.5.2 無限に広い平らな導体近くにおいた点電荷

無限に広い平らな導体近くにおいた点電荷の電場は、導体表面に対し、鏡像位置に逆の電荷を置くことで、再現できる。

```
kill(all);
load("vect")$
assume(r>0);
R:matrix([r*cos(\theta)], [r*sin(\theta)],
[z-A]);
R.R;
trigsimp(%);
R2:sqrt(%);
P1:\phi=Q/R2/(4*pi*\epsilon[0]);
R:matrix([r*cos(\theta)], [r*sin(\theta)],
[z+A]);
R.R;
trigsimp(%);
R2:sqrt(%);
P2:\phi=-Q/R2/(4*pi*\epsilon[0]);
PH3:\phi=rhs(P1)+rhs(P2);
subst([z=0],%);
assume(A>0);
assume(B>0);
ER1:E[r]=-diff(rhs(PH3),r,1);
EZ1:E[z]=-diff(rhs(PH3),z,1);
subst([z=0],ER1);
lhs(EZ1)=subst([z=0],rhs(EZ1));
TU1:\tau=rhs(%)*\epsilon[0];
q='integrate(rhs(%)*2*pi*r,r,0,B);
ev(% ,integrate);
q=limit(rhs(%),B,inf);
```

円柱座標系の z 軸上に $z = A$ に電荷 Q 、 $z = -A$ に鏡像の電荷 $-Q$ を置いたときの静電ポテンシャルを求める。(2.8.80) 式から静電ポテンシャルは、

$$\phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{A^2 - 2zA + z^2 + r^2}} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{A^2 + 2zA + z^2 + r^2}} \quad (3.5.1)$$

上式で $z = 0$ とすると、

$$\phi = 0$$

となり、 $z = 0$ の面が導体面になっている。静電場は

(2.8.79) 式から

$$E_r = \frac{rQ}{4\pi\epsilon_0(A^2 - 2zA + z^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{rQ}{4\pi\epsilon_0(A^2 + 2zA + z^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (3.5.2)$$

$$E_z = \frac{(2z - 2A)Q}{8\pi\epsilon_0(A^2 - 2zA + z^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{(2A + 2z)Q}{8\pi\epsilon_0(A^2 + 2zA + z^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}$$

導体面 $z = 0$ では、

$$E_r = 0$$

$$E_z = -\frac{AQ}{2\pi\epsilon_0(A^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}$$

導体面における電荷密度 τ は (3.1.1) 式から、

$$\tau = -\frac{AQ}{2\pi(A^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}$$

上式を $r = 0 \rightarrow B$ で積分すると、

$$q = \int_0^B \tau 2\pi r dr = -A \int_0^B \frac{r}{(A^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} dr Q$$

$$= -A \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{\sqrt{B^2 + A^2}} \right) Q$$

$B \rightarrow \infty$ とすると点電荷 Q と一致する。

$$q = -Q$$

点電荷に作用する力

```
EZ2:E[z]=-diff(rhs(P2),z,1);
subst([r=0,z=A],%);
F=Q*rhs(%);
F1:subst([A=a],%);
W1:W='integrate(rhs(F1),a,A,inf);
ev(% ,integrate);
```

点電荷における静電場は、(3.5.1) 式の右辺第二項から、 $r = 0, z = A$ として、

$$E_A = -\frac{Q}{16\pi\epsilon_0 A^2}$$

点電荷に作用する力は (2.2.2) 式から、

$$F = QE_A = -\frac{Q^2}{16\pi\epsilon_0 A^2}$$

点電荷を平らな導体から引き離すのに要する仕事は、上式を $a = A \rightarrow \infty$ で積分すると、

$$W = -\frac{Q^2}{16\pi\epsilon_0} \int_A^\infty \frac{1}{a^2} da = -\frac{Q^2}{16\pi\epsilon_0 A}$$

静電エネルギー

```
U=-Q^2/(4*pi*\epsilon[0]*(2*A));
U=rhs(%)/2;
```

二点電荷における静電エネルギーは(2.6.1)式から、

$$U = -\frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 A}$$

無限に広い平らな導体近くにおいた点電荷における静電エネルギーは、上記の $\frac{1}{2}$ であるから、

$$U = -\frac{Q^2}{16\pi\epsilon_0 A}$$

電力線

```
diff(rhs(PH3),r,1);
-%*r;
PS3:\psi=integrate(%,z);
factor(%);
PS31:expand(%);
PLPH1:subst([Q=4*pi,A=1,\epsilon[0]=1],
rhs(PH3));
PLPS1:subst([Q=4*pi,A=1,\epsilon[0]=1],
rhs(PS31));
PLPH2:subst([r=x,z=y],PLPH1); z = A
PLPS2:subst([r=x,z=y],PLPS1);
```

電気力線： ψ は(3.5.1)式に(2.5.2)式を適用し、次式を得る。

$$\begin{aligned} \psi = & -\frac{AQ}{4\pi\epsilon_0\sqrt{A^2+2zA+z^2+r^2}} \\ & -\frac{zQ}{4\pi\epsilon_0\sqrt{A^2+2zA+z^2+r^2}} \\ & -\frac{AQ}{4\pi\epsilon_0\sqrt{A^2-2zA+z^2+r^2}} \\ & +\frac{zQ}{4\pi\epsilon_0\sqrt{A^2-2zA+z^2+r^2}} \end{aligned} \quad (3.5.3)$$

上式に $A=1, Q_1=4\pi, \epsilon_0$ を代入し、図示すると、

```
#!/gnuplot
set xrange [-1.5:1.5]
set yrange [-0.5:1.5]
set isosamples 1280,1280
set contour base
set cntrparam levels incremental -3,0.1,3
unset key
unset surface
set view map
splot -y/sqrt(y**2+2*y+x**2+1)-1/sqrt(
y**2+2*y+x**2+1)+y/sqrt(y**2-2*y+x**2
+1)-1/sqrt(y**2-2*y+x**2+1)
# EOF
```

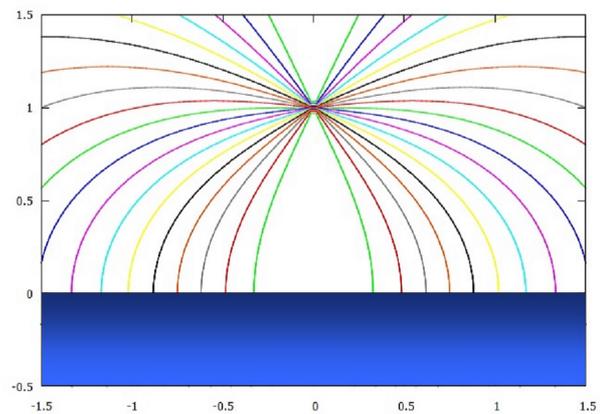


図 3.5.1: 無限に広い平らな導体近くにおいた点電荷の電気力線

例題 3.5.3 一様な電場の中に置かれた導球体

z 方向に一様な静電場: E の中に、半径: R の導球体を置いたとき、まわりに生じる静電場を求める。

```
kill(all);
load("vect")$
assume(r>0);
EO:matrix([0],[0],[E]);
RO:matrix([r*cos(\theta)],[r*sin(\theta)
],[z]);
R1:matrix([0],[0],[\delta]);
R2:matrix([0],[0],[-\delta]);
PH1:\phi=-E0.R0;
R0-R1;
%.;
trigsimp(%);
sqrt(%);
PH2:\phi=Q/(%)/(4*pi*\epsilon[0]);
R0-R2;
%.;
trigsimp(%);
sqrt(%);
PH3:\phi=-Q/(%)/(4*pi*\epsilon[0]);
\phi=rhs(PH2)+rhs(PH3);
taylor(rhs(%),\delta,0,3);
first(%);
PH4:\phi=factor(%);
assume(R>0);
PH5:\phi=rhs(PH1)+rhs(PH4);
subst([z^2=R^2-r^2],%);
rhs(%)=0;
Q1:solve(%,Q)[1];
PH51:subst([%],PH5);
PH6:\phi=rhs(PH1)+rhs(PH2)+rhs(PH3);
PH61:subst([Q1],%);
taylor(rhs(%),\delta,0,3);
PH62:expand(%);
PH63:factor(first(%));
PH64:factor(PH62-PH63);
PH65:\phi=PH63+PH64;
PH65-PH51;
diff(rhs(PH61),z,1);
%*r;
\psi=integrate(%,r);
factor(%);
PS51:expand(%);
```

```
PLPH1:subst([E=1,R=1,r=x,z=y],rhs(PH51));
PLPH2:subst([E=1,R=1,\delta=0.01,r=x,
z=y],rhs(PH61));
PLPS1:subst([E=1,R=1,\delta=0.01,r=x,
z=y],rhs(PS51));
```

流体力学における一様流中の球まわりの流れ¹を参考にして、この静電場は一様な静電場と電気双極子の静電場の組み合わせで表すことができる。

z 方向の一様な静電場: E の静電ポテンシャルは、

$$\phi = -zE \quad (3.5.4)$$

Q の一対電荷による静電ポテンシャルは、(2.8.80) 式から、

$$\phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{z^2-2\delta z+r^2+\delta^2}} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{z^2+2\delta z+r^2+\delta^2}} \quad (3.5.5)$$

上式で、 δ が十分小さいとし、 δ で Taylor 展開し、一次項までを記述すると、電気双極子の静電ポテンシャルは、

$$\phi = \frac{\delta z Q}{2\pi\epsilon_0(z^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}$$

上式に z 方向の一様な静電場を加えて、

$$\phi = \frac{\delta z Q}{2\pi\epsilon_0(z^2+r^2)^{\frac{3}{2}}} - zE \quad (3.5.6)$$

導球の表面では $\phi = 0$ であるから、上式に $z^2+r^2 = R^2$ を代入し、

$$\phi = \frac{\delta z Q}{2\pi\epsilon_0 R^3} - zE = 0$$

上式から、 Q を求めると、

$$Q = \frac{2\pi\epsilon_0 E R^3}{\delta} \quad (3.5.7)$$

(3.5.6) 式に上式を代入し、求める静電ポテンシャルが得られた。

$$\phi = \frac{z E R^3}{(z^2+r^2)^{\frac{3}{2}}} - zE \quad (3.5.8)$$

「2.8.9 一対の点電荷による電気双極子の静電場」で電気双極子の (3.5.8) 式に (2.5.2) 式の方法を適用して得られた電気力線は良い結果が得られない。そこで一対電荷による静電ポテンシャル: (3.5.5) 式に一様な静電場: (3.5.4) 式を加えて、

$$\phi = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{z^2+2\delta z+r^2+\delta^2}} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{z^2-2\delta z+r^2+\delta^2}} - zE \quad (3.5.9)$$

¹溝口純敏: Maxima を使った流体力学基礎演習ノート、<http://www9.plala.or.jp/alcwitchery/> 第6章 3次元完全流体 例題 6.2.5 一様流中の球 (二重わき出しによる)

上式に (3.5.7) 式を代入し、

$$\phi = -\frac{ER^3}{2\delta\sqrt{z^2+2\delta z+r^2+\delta^2}} + \frac{ER^3}{2\delta\sqrt{z^2-2\delta z+r^2+\delta^2}} - zE \quad (3.5.10)$$

上式に (2.5.2) 式の方法を適用して電気力線: ψ をもとめると、

$$\psi = -\frac{zER^3}{2\delta\sqrt{z^2+2\delta z+r^2+\delta^2}} - \frac{ER^3}{2\sqrt{z^2+2\delta z+r^2+\delta^2}} + \frac{zER^3}{2\delta\sqrt{z^2-2\delta z+r^2+\delta^2}} - \frac{ER^3}{2\sqrt{z^2-2\delta z+r^2+\delta^2}} - \frac{r^2 E}{2} \quad (3.5.11)$$

(3.5.8) 式に $E = 1, R = 1$ を代入し、静電場を図示すると、

```
#!/gnuplot
set xrange [-3:3]
set yrange [-3:3]
set isosamples 128,128
set contour base
set cntrparam levels incremental -3,0.1,3
unset key
unset surface
set view map
plot y/(y**2+x**2)**(3/2)-y
# EOF
```

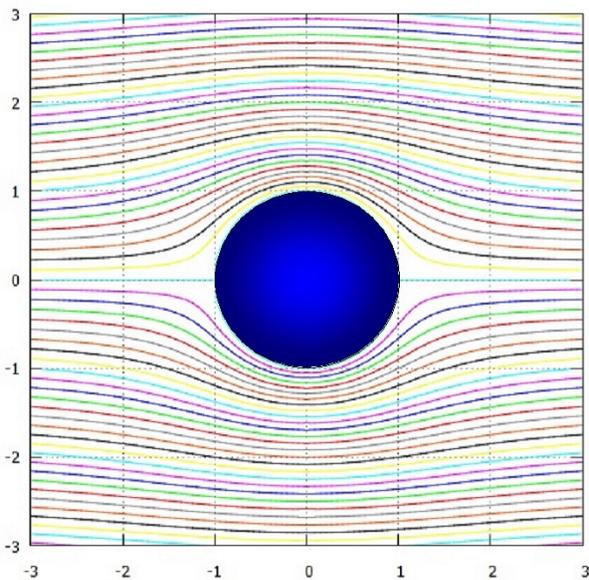


図 3.5.2: 一様な電場の中に置かれた導球体の等静電ポテンシャル

(3.5.11) 式に $E = 1, R = 1$ を代入し、電気力線を図示すると、

```
#!/gnuplot
set xrange [-3:3]
set yrange [-3:3]
set isosamples 128,128
set contour base
set cntrparam levels incremental -3,0.1,3
unset key
unset surface
set view map
plot -(50.0*y)/sqrt(y**2+0.02*y+x**2+1.0*10**-4)-1/(2*sqrt(y**2+0.02*y+x**2+1.0*10**-4))+(50.0*y)/sqrt(y**2-0.02*y+x**2+1.0*10**-4)-1/(2*sqrt(y**2-0.02*y+x**2+1.0*10**-4))-x**2/2
# EOF
```

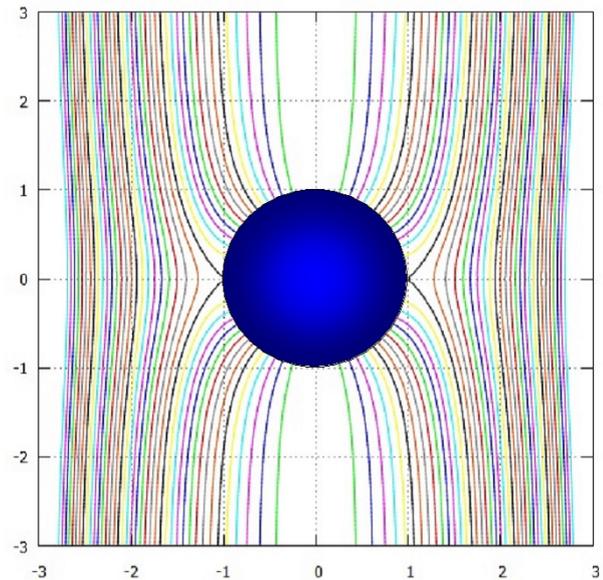


図 3.5.3: 一様な電場の中に置かれた導球体の電気力線

例題 3.5.4 導体球の外に置いた点電荷

半径： R の導体球の中心を円柱座標系の原点に置き、 z 軸上の $z = A$ ($A > R$) の位置に点電荷： Q_A を置いたときの電場について調べる。

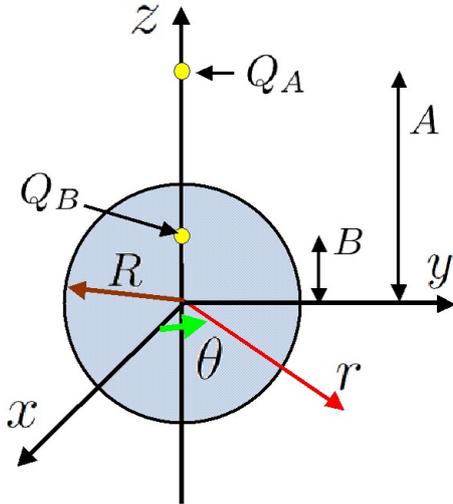


図 3.5.4: 導体球の外に置いた点電荷

```
kill(all);
load("vect")$
assume(r>0);
R1:matrix([r*cos(\theta)], [r*sin(\theta)
], [z]);
RA:matrix([0], [0], [A]);
RB:matrix([0], [0], [B]);
RA1:R1-RA;
RB1:R1-RB;
sqrt(RA1.RA1);
ABRA1:trigsimp(%);
sqrt(RB1.RB1);
ABRB1:trigsimp(%);
PH1:\phi=1/(4*pi*\epsilon[0])*(Q[A]/
ABRA1+Q[B]/ABRB1);
assume(A>0);
assume(R>0);
R/B=A/R;
B2:solve(%,B)[1];
QB2:Q[B]=-Q[A]*R/A;
PH2:subst([QB2,B2],PH1);
z^2+r^2=R^2;
solve(%,r^2)[1];
subst([%],PH2);
factor(%);
```

```
diff(rhs(PH2),r,1);
-%*r;
integrate(%,z);
factor(%);
PS2:\psi=expand(%);
subst([Q[A]=4*pi*\epsilon[0],R=1,A=2],
rhs(PH2));
expand(%);
subst([r=x,z=y],%);
subst([Q[A]=4*pi*\epsilon[0],R=1,A=2],
rhs(PS2));
expand(%);
subst([r=x,z=y],%);
```

導体球の内部で z 軸上の $z = B$ ($B < R$) の位置に点電荷： Q_B を置き、境界条件を満足させる。この時の静電ポテンシャルは、

$$\phi = \frac{Q_B}{4\pi\epsilon_0\sqrt{B^2 - 2zB + z^2 + r^2}} + \frac{Q_A}{4\pi\epsilon_0\sqrt{A^2 - 2zA + z^2 + r^2}} \quad (3.5.12)$$

Kervin の球定理¹から、導体球の内部の置く位置： B 、点電荷強さ： Q_B は下記となる。

$$B = \frac{R^2}{A}, \quad Q_B = -\frac{Q_A R}{A}$$

(3.5.12) 式に上式を代入し、

$$\phi = \frac{Q_A}{4\pi\epsilon_0\sqrt{A^2 - 2zA + z^2 + r^2}} - \frac{Q_A R}{4\pi\epsilon_0 A \sqrt{\frac{R^4}{A^2} - \frac{2zR^2}{A} + z^2 + r^2}} \quad (3.5.13)$$

導体球の表面を表す次式：

$$z^2 + r^2 = R^2$$

を (3.5.13) 式に代入すると、下記となり、導体球表面で静電ポテンシャルが零となる。

$$\phi = 0$$

(3.5.13) 式に (2.5.2) 式の方法を適用して電気力線： ψ をもとめると、

$$\psi = \frac{Q_A R^3}{4\pi\epsilon_0 A \sqrt{R^4 - 2zAR^2 + z^2 A^2 + r^2 A^2}} - \frac{z Q_A R}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^4 - 2zAR^2 + z^2 A^2 + r^2 A^2}} - \frac{A Q_A}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{A^2 - 2zA + z^2 + r^2}} + \frac{z Q_A}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{A^2 - 2zA + z^2 + r^2}} \quad (3.5.14)$$

¹溝口純敏：Maxima を使った流体力学基礎演習ノート、<http://www9.plala.or.jp/alcwitchery/> 第6章 3次元完全流体 6.1.10 Kervin の球定理 (速度ポテンシャル)

(3.5.13) 式に $Q_A = 4\pi\epsilon_0$, $R = 1$, $A = 2$ を代入し、静電場を図示すると、

```
#!/gnuplot
set xrange [-3:3]
set yrange [-2:4]
set isosamples 128,128
set contour base
set cntrparam levels incremental -5,0.02,5
unset key
unset surface
set view map
splot -1/(2*sqrt(y**2-y+x**2+1/4))+1/
sqrt(y**2-4*y+x**2+4)
# EOF
```

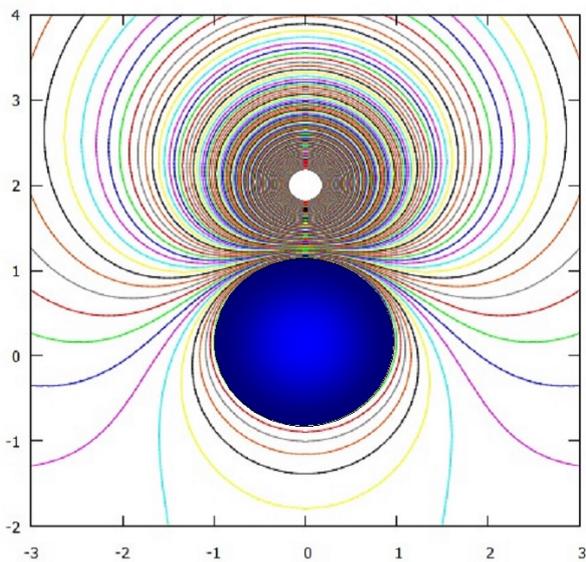


図 3.5.5: 導体球の外に置いた点電荷の等静電ポテンシャル

(3.5.14) 式に $Q_A = 4\pi\epsilon_0$, $R = 1$, $A = 2$ を代入し、電磁力線を図示すると、

```
#!/gnuplot
set xrange [-3:3]
set yrange [-2:4]
set isosamples 128,128
set contour base
set cntrparam levels incremental -5,0.02,5
unset key
unset surface
set view map
splot -y/sqrt(4*y**2-4*y+4*x**2+1)+1/(2*
sqrt(4*y**2-4*y+4*x**2+1))+y/sqrt(y**2
-4*y+x**2+4)-2/sqrt(y**2-4*y+x**2+4)
# EOF
```

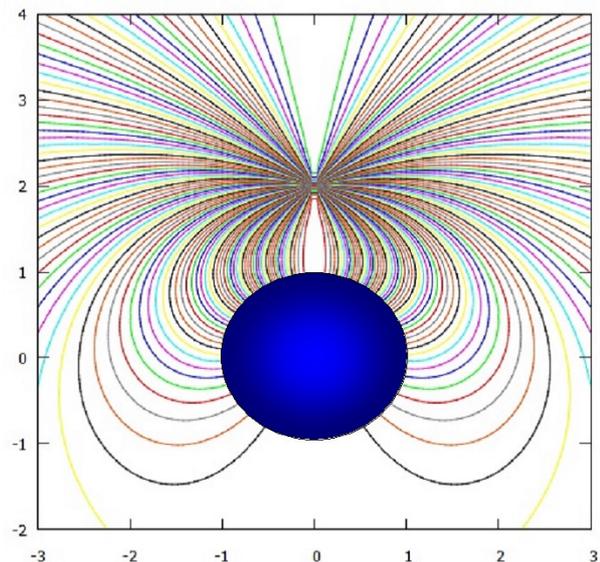


図 3.5.6: 導体球の外に置いた点電荷の電磁力線

例題 3.5.5 二つの導体球の電気容量係数

半径: R_A, R_B の導体球: A, B に電荷: Q_A, Q_B を与える。導体球: A, B の中心間距離: d とする。ここで $d \gg R_A, R_B$ とする。

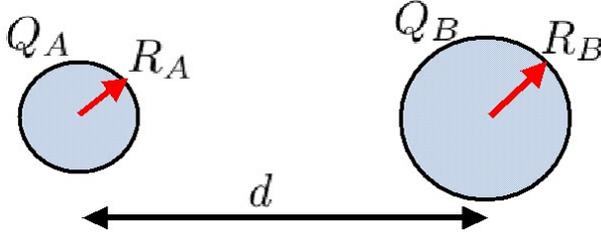


図 3.5.7: 二つの導体球の電気容量係数と電気容量

```
kill(all);
PH1:\phi[A]=1/(4*pi*epsilon[0])*(Q[A]
/R[A]+Q[B]/d);
PH2:\phi[B]=1/(4*pi*epsilon[0])*(Q[B]
/R[B]+Q[A]/d);
solve([PH1,PH2],[Q[A],Q[B]]);
expand(%);
QAB1:%[1];
QAB1[1];
QAB1[2];
QA1:Q[A]=C[AA]*\phi[A]+C[AB]*\phi[B];
QB1:Q[B]=C[BA]*\phi[A]+C[BB]*\phi[B];
C1:C[AA]=coeff(rhs(QAB1[1]),\phi[A]);
C2:C[AB]=coeff(rhs(QAB1[1]),\phi[B]);
C3:C[BA]=coeff(rhs(QAB1[2]),\phi[A]);
C4:C[BB]=coeff(rhs(QAB1[2]),\phi[B]);
C2-C3;
```

導体球に電荷を与えたとき、その表面に電荷が分布するので、(2.8.33) 式から、導体球: A による導体球: A 表面の静電ポテンシャルと $d \gg R_A, R_B$ から導体球: B を点電荷として求めた静電ポテンシャルの和から ϕ_A は、

$$\phi_A = \frac{\frac{Q_B}{d} + \frac{Q_A}{R_A}}{4\pi\epsilon_0} \quad (3.5.15)$$

同様に、導体球: B 表面の静電ポテンシャル: ϕ_B は、

$$\phi_B = \frac{\frac{Q_B}{R_B} + \frac{Q_A}{d}}{4\pi\epsilon_0} \quad (3.5.16)$$

(3.5.15) 式、(3.5.16) 式から Q_A, Q_B を求めると、

$$Q_A = \frac{4\pi\epsilon_0 d R_A \phi_B R_B}{R_A R_B - d^2} - \frac{4\pi\epsilon_0 d^2 \phi_A R_A}{R_A R_B - d^2}$$

$$Q_B = \frac{4\pi\epsilon_0 d \phi_A R_A R_B}{R_A R_B - d^2} - \frac{4\pi\epsilon_0 d^2 \phi_B R_B}{R_A R_B - d^2}$$

上式を電気容量係数で表すと、

$$\begin{aligned} Q_A &= C_{AB} \phi_B + \phi_A C_{AA} \\ Q_B &= \phi_B C_{BB} + \phi_A C_{BA} \end{aligned} \quad (3.5.17)$$

以上から、電気容量係数は下記となり、 $C_{AB} = C_{BA}$ である。

$$\begin{aligned} C_{AA} &= -\frac{4\pi\epsilon_0 d^2 R_A}{R_A R_B - d^2} \\ C_{AB} &= \frac{4\pi\epsilon_0 d R_A R_B}{R_A R_B - d^2} \\ C_{BA} &= \frac{4\pi\epsilon_0 d R_A R_B}{R_A R_B - d^2} \\ C_{BB} &= -\frac{4\pi\epsilon_0 d^2 R_B}{R_A R_B - d^2} \end{aligned}$$

静電ポテンシャル

```
solve([QA1,QB1],[\phi[A],\phi[B]]);
expand(%);
subst([C[BA]=C[AB]],%);
PHAB1:%[1];
PHAB1[1];
PHA1:factor(%);
PHAB1[2];
PHB1:factor(%);
U1:U=1/2*(Q[A]*\phi[A]+Q[B]*\phi[B]);
subst([PHAB1[1],PHAB1[2]],U1);
U2:factor(%);
```

(3.5.17) 式から、 ϕ_A, ϕ_B を求めると、

$$\begin{aligned} \phi_A &= \frac{Q_A C_{BB} - C_{AB} Q_B}{C_{AA} C_{BB} - C_{AB}^2} \\ \phi_B &= \frac{C_{AA} Q_B - Q_A C_{AB}}{C_{AA} C_{BB} - C_{AB}^2} \end{aligned} \quad (3.5.18)$$

(2.6.5) 式から、静電ポテンシャル: U は、

$$\begin{aligned} U &= \frac{\phi_B Q_B + \phi_A Q_A}{2} \\ &= \frac{Q_A^2 C_{BB} + C_{AA} Q_B^2 - 2 Q_A C_{AB} Q_B}{2 (C_{AA} C_{BB} - C_{AB}^2)} \end{aligned} \quad (3.5.19)$$

電気容量

```

subst([Q[A]=Q,Q[B]=-Q],PHA1);
PHA2:factor(%);
subst([Q[A]=Q,Q[B]=-Q],PHB1);
PHB2:factor(%);
\Delta*\phi=rhs(PHA2)-rhs(PHB2);
factor(%);
C=Q/rhs(%);
subst([C[BA]=C[AB]],%);
subst([Q[A]=Q,Q[B]=-Q],PH1);
PH11:expand(%);
subst([Q[A]=Q,Q[B]=-Q],PH2);
PH21:expand(%);
\Delta*\phi=rhs(PH11)-rhs(PH21);
factor(%);
C=Q/rhs(%);

```

導体球： A, B に電荷： $Q, -Q$ を与え、電気容量を求める。(3.5.18) 式に $Q_A = Q, Q_B = -Q$ を代入すると、

$$\phi_A = \frac{(C_{BB} + C_{AB}) Q}{C_{AA} C_{BB} - C_{AB}^2}$$

$$\phi_B = -\frac{(C_{AB} + C_{AA}) Q}{C_{AA} C_{BB} - C_{AB}^2}$$

上式から、

$$\Delta\phi = \phi_A - \phi_B = \frac{(C_{BB} + 2C_{AB} + C_{AA}) Q}{C_{AA} C_{BB} - C_{AB}^2}$$

(3.4.3) 式から電気容量： C は、

$$C = \frac{\Delta\phi}{Q} = \frac{C_{AA} C_{BB} - C_{AB}^2}{C_{BB} + 2C_{AB} + C_{AA}}$$

また、(3.5.15) 式、(3.5.16) 式 $Q_A = Q, Q_B = -Q$ を代入して、電気容量を求める。

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= \phi_A - \phi_B \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_B} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_A} - \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 d} \\ &= -\frac{(2R_A R_B - dR_B - dR_A) Q}{4\pi\epsilon_0 d R_A R_B} \end{aligned}$$

(3.4.3) 式から電気容量： C は、

$$C = \frac{\Delta\phi}{Q} = -\frac{4\pi\epsilon_0 d R_A R_B}{2R_A R_B - dR_B - dR_A}$$

例題 3.5.6 導体球と導体球殻の電気容量係数

中心が一致した半径: R_1 の導体球: A に電荷: Q_A を与え、内径: R_2 、外径: R_3 する。導体球殻: B に電荷: Q_B を与え、同じ中心を持つとする。ここで $R_1 < R_2 < R_3$ とする。

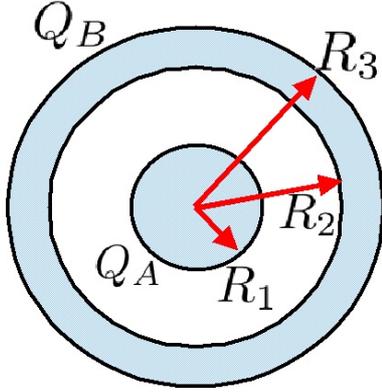


図 3.5.8: 導体球と導体球殻の電気容量係数

```
kill(all);
E1:E[AB]=Q[A]/(4*pi*epsilon[0]*r^2);
E2:E[C]=(Q[A]+Q[B])/(4*pi*epsilon[0]*r^2);
assume(R[0]>0);
assume(R[3]>0);
assume(R[2]>0);
assume(R[1]>0);
assume(R[0]>R[3]);
assume(R[2]>R[1]);
\phi[B]='integrate(rhs(E2),r,R[3],R[0]);
ev(%,integrate);
PH2:limit(%,R[0],inf);
\phi[B]-\phi[A]='-integrate(rhs(E1),r,
R[1],R[2]);
PH1:ev(%,integrate);
solve([PH1,PH2],[Q[A],Q[B]])[1];
QAB1:expand(%);
QA1:QAB1[1];
QB1:QAB1[2];
C[AA]=coeff(rhs(QA1),\phi[A]);
C[AB]=coeff(rhs(QA1),\phi[B]);
C[BA]=coeff(rhs(QB1),\phi[A]);
C[BB]=coeff(rhs(QB1),\phi[B]);
factor(%);
```

(2.8.30) 式から $R_1 < r < R_2$ のとき、導体球殻: B の内部では静電場は零となり、導体球: A による静電場と

なり、

$$E_{AB} = \frac{Q_A}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (3.5.20)$$

$r > R_3$ のとき、導体球殻: B と導体球: A による静電場となり、

$$E_C = \frac{Q_B + Q_A}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (3.5.21)$$

(2.8.33) 式から導体球殻: B の外表面: R_3 における静電ポテンシャル: ϕ_B は、

$$\phi_B = \frac{Q_B + Q_A}{4\pi\epsilon_0 R_3} \quad (3.5.22)$$

導体の表面の静電ポテンシャルは同じであるから、導体球殻: B の内表面: R_2 における静電ポテンシャルも ϕ_B である。導体球: A の表面: R_1 における静電ポテンシャルを ϕ_A とすると、 $\phi_B - \phi_A$ は $R_1 < r < R_2$ 間の静電場: (3.5.20) 式を積分すればよい。

$$\begin{aligned} \phi_B - \phi_A &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r^2} dr Q_A \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) Q_A \end{aligned} \quad (3.5.23)$$

(3.5.22) 式と (3.5.23) 式から Q_A, Q_B を求めると、

$$\begin{aligned} Q_A &= \frac{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2 \phi_A}{R_2 - R_1} - \frac{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2 \phi_B}{R_2 - R_1} \\ Q_B &= \frac{4\pi\epsilon_0 R_2 R_3 \phi_B}{R_2 - R_1} - \frac{4\pi\epsilon_0 R_1 R_3 \phi_B}{R_2 - R_1} \\ &\quad + \frac{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2 \phi_B}{R_2 - R_1} - \frac{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2 \phi_A}{R_2 - R_1} \end{aligned} \quad (3.5.24)$$

以上から、電気容量係数は下記となり、 $C_{AB} = C_{BA}$ である。

$$\begin{aligned} C_{AA} &= \frac{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1} \\ C_{AB} &= -\frac{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1} \\ C_{BA} &= -\frac{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1} \\ C_{BB} &= \frac{4\pi\epsilon_0 (R_2 R_3 - R_1 R_3 + R_1 R_2)}{R_2 - R_1} \end{aligned} \quad (3.5.25)$$

```

\Delta*\phi=-rhs(PH1);
subst([Q[A]=Q],%);
C=Q/rhs(%);
C1:factor(%);
U=Q^2/2/C;
subst([C1],%);
E3:subst([Q[A]=Q],E1);
u[e]=\epsilon[0]/2*E[AB]^2;
subst([E3],%);
U='integrate(rhs(%)*4*pi*r^2,r,R[1],R[2]);
ev(%,integrate);
factor(%);

```

電気容量

導体球、導体球殻： A, B に電荷： $Q, -Q$ を与え、電気容量を求める。(3.5.23) 式に $Q_A = Q$ を代入すると、

$$\Delta\phi = \phi_B - \phi_A = \frac{\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) Q}{4\pi\epsilon_0}$$

電気容量は (3.4.3) 式に上式を代入し、

$$C = \frac{\Delta\phi}{Q} = \frac{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

静電エネルギー

静電エネルギー： U は、(3.4.4) 式に上式を代入し、

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{(R_2 - R_1) Q^2}{8\pi\epsilon_0 R_1 R_2} \quad (3.5.26)$$

また、 AB 間の静電場は (3.5.20) 式から、

$$E_{AB} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

静電エネルギーの体積密度： u_e は、

$$u_e = \frac{\epsilon_0 E_{AB}^2}{2} = \frac{Q^2}{32\pi^2\epsilon_0 r^4}$$

静電エネルギーは上式を積分して、(3.5.26) 式と同じ結果が得られた。

$$\begin{aligned}
 U &= \int_{R_1}^{R_2} u_e 4\pi r^2 dr = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r^2} dr \\
 &= \frac{(R_2 - R_1) Q^2}{8\pi\epsilon_0 R_1 R_2} \quad (3.5.27)
 \end{aligned}$$

例題 3.5.7 平板のコンデンサーの電気容量

薄い導体平板の面積： S 、間隔： D の平行平板のコンデンサーの電気容量： C を求める。

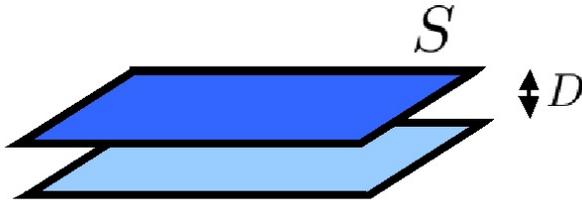


図 3.5.9: 平板のコンデンサーの電気容量

```
kill(all);
E1:E[0]=\tau/\epsilon[0];
Q1:Q=\tau*S;
TU1:solve(Q1,\tau)[1];
E3:subst([%],E1);
DPH1:\Delta*\phi=E[0]*D;
DPH2:solve(DPH1,\phi)[1];
Q=C*(\Delta*\phi);
subst([Q1,DPH2,E1],%);
C1:solve(%,C)[1];
U=Q^2/2/C;
U1:subst([C1],%);
```

表面の電荷密度： τ 、静電場： E とすると、(3.1.1)式から、

$$E_0 = \frac{\tau}{\epsilon_0} \quad (3.5.28)$$

平板に $Q, -Q$ の電荷を与えると、

$$Q = \tau S \quad (3.5.29)$$

平板間の静電ポテンシャル (電荷) 差： $\Delta\phi$ は、

$$\Delta\phi = E_0 D \quad (3.5.30)$$

静電ポテンシャルと電位の関係式は (3.4.3) 式で、コンデンサーの電気容量 C とする。

$$Q = \Delta\phi C \quad (3.5.31)$$

以上からコンデンサーの電気容量 C は、

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{D}$$

コンデンサーに電荷を与えたときの静電エネルギー： U は、(3.3.3) 式から、

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{DQ^2}{2\epsilon_0 S}$$

上式に (3.5.29) 式、(3.5.28) 式を代入すると、

$$U = \frac{DQ^2}{2\epsilon_0 S} = \frac{D\tau^2 S}{2\epsilon_0} = \frac{\epsilon_0 E_0^2 D S}{2} \quad (3.5.32)$$

dS は平板間の体積であるから、静電エネルギーの体積密度： u_e は下記となり、(2.6.12) 式の結果と一致している。

$$u_e = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2}$$

極板に作用する力 (静電エネルギーから求める)

```
U+dU=subst([D=D+dD],rhs(U1));
%-U1;
DU1:factor(%);
dU=F*dD;
subst([DU1],%);
solve(%,F)[1];
```

極板に電池で電位： $\Delta\phi$ をかけ、電荷： Q をためたのち、電池を外し、極板を dD だけ移動する。この時の静電エネルギーは (3.5.29) 式から、

$$U + dU = \frac{(dD + D) Q^2}{2\epsilon_0 S}$$

上式から、静電エネルギーの増加量： dU は、

$$dU = \frac{dD Q^2}{2\epsilon_0 S}$$

極板に作用する力： F がなす仕事量は、エネルギーの増加量に等しいから、

$$dU = dD F$$

以上から、極板に作用する力： F は、

$$F = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 S} \quad (3.5.33)$$

極板に作用する力 (クーロンの法則から求める)

```
Q2:\tau=\rho*d;
Q3:solve(Q2,\rho)[1];
Q4:solve(E1,\tau)[1];
E2:E(x)=\rho/\epsilon[0]*x-E[0];
F/S='integrate(\rho*E(x),x,0,d);
subst([E2],%);
ev(%,integrate);
subst([Q3],%);
subst([Q4],%);
subst([E3],%);
```

導体である極板に電荷が分布するとき、導体表面に分布する。そこで、表面から非常に浅い d の深さに均等に電荷が分布し、 d より深い導体内面では $E = 0$ とする。電荷の体積密度： ρ 、表面密度： τ とすると、

$$\tau = \rho d, \quad \rho = \frac{\tau}{d}$$

導体表面の静電場： E_0 とすると、

$$\tau = \epsilon_0 E_0$$

表面を $x = 0$ として、深さ方向に x をとると、静電場： $E(x)$ の分布は、 $x = 0$ で静電場は E_0 、 $x = d$ で静電場は $E(d) = 0$ であるから、

$$E(x) = \frac{\rho x}{\epsilon_0} - E_0$$

クーロンの法則：(2.2.2) 式から、単位面積当たりの極板に働く力： $\frac{F}{S}$ は下記となり、(3.5.33) 式と同じ結果となる。

$$\begin{aligned} \frac{F}{S} &= \rho \int_0^d E(x) dx = \rho \int_0^d \left(\frac{\rho x}{\epsilon_0} - E_0 \right) dx \\ &= -\frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} = -\frac{Q^2}{2\epsilon_0 S^2} \end{aligned} \quad (3.5.34)$$

電位を一定として極板を移動させたときの力

```
DPH5:\Delta*\phi=E[0]*(D+dD);
E5:solve(%,E[0])[1];
TU2:\tau=E[0]*\epsilon[0];
TU3:subst([E5],%);
Q5:Q=\tau*S;
Q6:subst([TU3],Q5);
C=Q/\Delta/\phi;
subst([Q6],%);
C+dC=taylor(rhs(%,dD,0,2);
dC=rhs(%) - first(rhs(%));
DC5:dC=first(rhs(%));
dU=1/2*dC*(\Delta*\phi)^2;
subst([DC5],%);
DU5:subst([DPH2,E1,TU1],%);
dU=F*dD;
subst([DU5],%);
solve(%,F)[1];
```

極板に電池で電位： $\Delta\phi$ をかけ、電荷： Q をためたのち、電池を接続したまま、極板の電位を変えないで極板を dD だけ移動させると、(3.5.30) 式から、

$$\Delta\phi = E_0 (dD + D)$$

このとき、静電場： E_0 は、

$$E_0 = \frac{\Delta\phi}{dD + D}$$

上式から表面の電荷も密度： τ は、

$$\tau = \epsilon_0 E_0 = \frac{\epsilon_0 \Delta\phi}{dD + D}$$

上式から電荷： Q は、

$$Q = \tau S = \frac{\epsilon_0 \Delta\phi S}{dD + D}$$

上式から電気容量： C は、

$$C = \frac{Q}{\Delta\phi} = \frac{\epsilon_0 S}{dD + D}$$

極板を dD だけ移動させることによる電気容量変化： dC は、上式を Taylor 展開して dD の一次項を残し、

$$dC = -\frac{\epsilon_0 dD S}{D^2}$$

極板を dD だけ移動させることによる静電エネルギー変化： dU は、

$$dU = \frac{(\Delta\phi)^2 dC}{2} = -\frac{\epsilon_0 (\Delta\phi)^2 dD S}{2D^2} \quad (3.5.35)$$

ここで、 $\Delta\phi$ は一定であるから、極板を移動させる前の下記の関係式を使って、

$$\Delta\phi = E_0 D, \quad E_0 = \frac{\tau}{\epsilon_0}, \quad \tau = \frac{Q}{S}$$

静電エネルギー変化： dU を求めると、

$$dU = -\frac{dD Q^2}{2\epsilon_0 S}$$

極板に作用する力： F がなす仕事量は、エネルギーの増加量に等しいから、

$$dU = dD F$$

以上から、極板に作用する力： F は下記となり、電荷： Q をためたのち、電池を外して、極板を移動させたときと比べ、力の大きさは同じであるが、向きは逆になっている。

$$F = -\frac{Q^2}{2\epsilon_0 S}$$

例題 3.5.8 内球殻と外球殻のコンデンサーの電気容量

中心が一致した半径： R_1 の内球殻と半径： R_2 の外球殻にそれぞれ Q , $-Q$ の電荷を与えたとする。このコンデンサーの電気容量： C を求める。

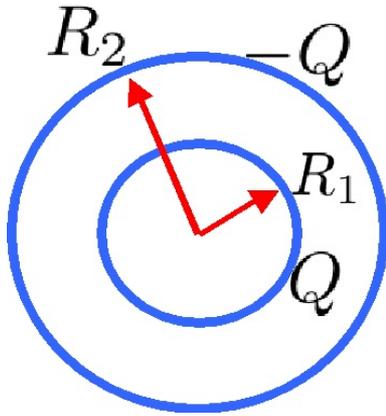


図 3.5.10: 内球殻と外球殻のコンデンサーの電気容量

```
kill(all);
assume(R[1]>0);
assume(R[2]>0);
assume(R[2]>R[1]);
E1:=Q/(4*pi*epsilon[0]*r^2);
D1:\Delta*\phi='integrate(rhs(E1),r,R[1],
R[2]);
D2:ev(%,integrate);
C1:=Q/(\Delta*\phi);
lhs(C1)=rhs(C1)/rhs(D2)*(\Delta*\phi);
C2:factor(%)
U=1/2*C*Q^2;
subst([C2],%);
factor(%)
```

(2.8.30) 式から $R_1 < r < R_2$ のとき、球殻内部の静電場： E は、

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (3.5.36)$$

$R_1 \rightarrow R_2$ 間の静電ポテンシャル (電位) 差： $\Delta\phi$ は、(2.8.30) 式から

$$\Delta\phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

静電ポテンシャルと電位の関係式は (3.4.3) 式から、コンデンサーの電気容量 C は、

$$C = \frac{Q}{\Delta\phi} = \frac{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

コンデンサーの静電エネルギー： U は、

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{(R_2 - R_1) Q^2}{8\pi\epsilon_0 R_1 R_2}$$

```
UE1:u[e](r)=1/2*epsilon[0]*E^2;
UE2:subst([E1],%);
U='integrate(u[e](r)*4*pi*r^2,r,R[1],
R[2]);
subst([UE2],%);
ev(%,integrate);
factor(%)
```

静電エネルギーの体積密度： $u_e(r)$ は (2.6.12) 式から次式となり、(3.5.36) 式を代入すると、

$$u_e(r) = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} = \frac{Q^2}{32\pi^2\epsilon_0 r^4}$$

上式を積分し、静電エネルギーを求めると、

$$U = 4\pi \int_{R_1}^{R_2} r^2 u_e(r) dr = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r^2} dr = \frac{(R_2 - R_1) Q^2}{8\pi\epsilon_0 R_1 R_2}$$

```

Q3:Q=Q[1]+Q[2];
PH2:\phi[2]=Q[2]/(4*pi*epsilon[0]*R[2]);
E3:subst([Q=Q[1]],E1);
\phi[2]-\phi[1]='integrate(rhs(E3),r,R[1],
R[2]);
ev(%,integrate);
PH1:subst([\phi[1]=0],%);
Q32:solve(PH2,Q[2])[1];
Q31:solve(PH1,Q[1])[1];
C=Q/\phi[2];
subst([Q3,Q31,Q32],%);
factor(%);

```

内球殻が接地された場合を考える。外球殻に Q の電荷を与えたとする。このとき外球殻の内面に Q_1 、外面に Q_2 が分布するとする。このとき内球殻の外面の外面に Q_1 が誘導される。 Q と Q_1, Q_2 の関係式は、

$$Q = Q_2 + Q_1 \quad (3.5.37)$$

外球殻の静電ポテンシャル： ϕ_2 と外球殻の外面の Q_2 の関係は (2.8.33) 式から、

$$\phi_2 = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} \quad (3.5.38)$$

(2.8.30) 式から $R_1 < r < R_2$ のとき、静電場： E は、

$$E = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

上式から内球殻と外球殻の静電ポテンシャルの差： $\phi_2 - \phi_1$ は、

$$\phi_2 - \phi_1 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r^2} dr = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

内球殻が接地されると $\phi_1 = 0$ であるから、

$$\phi_2 = \frac{Q_1 \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)}{4\pi\epsilon_0} \quad (3.5.39)$$

(3.5.38) 式、(3.5.39) 式から、 Q_1, Q_2 を求めると、

$$Q_2 = 4\pi\epsilon_0 \phi_2 R_2, \quad Q_1 = \frac{4\pi\epsilon_0 R_1 \phi_2 R_2}{R_2 - R_1}$$

(3.4.3) 式から、コンデンサーの電気容量 C は下記となり、これに (3.5.37) 式、上式を代入すると、

$$C = \frac{Q}{\phi_2} = \frac{4\pi\epsilon_0 R_2^2}{R_2 - R_1}$$

例題 3.5.9 内円筒と外円筒のコンデンサーの電気容量

中心が一致した長さ: L の半径: R_1 の内円筒と半径: R_2 の外円筒にそれぞれ Q , $-Q$ の電荷を与えたとする。このコンデンサーの電気容量: C を求める。

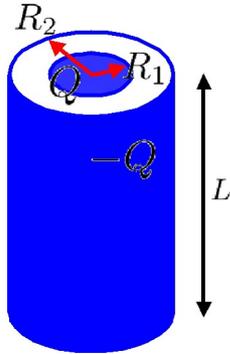


図 3.5.11: 内円筒と外円筒のコンデンサーの電気容量

```
kill(all);
assume(R[1]>0);
assume(R[2]>0);
assume(R[2]>R[1]);
E1:E=\mu/(2*\pi*\epsilon[0]*r);
\Delta*\phi='integrate(rhs(E1),r,R[1],
R[2]);
D1:ev(%,integrate);
D2:solve(D1,\phi)[1];
C=\mu*L/(\Delta*\phi);
C1:lhs(%)=rhs(%) / rhs(D1)*(\Delta*\phi);
```

外円筒の内側の静電場は零であり、内円筒の静電場は (2.8.52) 式から、電荷: Q の線密度: μ とすると、

$$E = \frac{\mu}{2\pi\epsilon_0 r} \quad (3.5.40)$$

内円筒と外円筒間の静電ポテンシャル (電位) 差: $\Delta\phi$ は、(2.8.30) 式から

$$\Delta\phi = \frac{\mu}{2\pi\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r} dr = \frac{(\log(R_2) - \log(R_1)) \mu}{2\pi\epsilon_0} \quad (3.5.41)$$

(3.4.3) 式から、コンデンサーの電気容量 C は、

$$C = \frac{\mu L}{\Delta\phi} = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\log(R_2) - \log(R_1)} \quad (3.5.42)$$

```
U=(\Delta*\phi)^2*C/2;
subst([D2,C1],%);
u[e](r)=1/2*\epsilon[0]*E^2;
UE1:subst([E1],%);
U=integrate(u[e](r)*2*\pi*r*L,r,R[1],
R[2]);
subst([UE1],%);
ev(%,integrate);
```

コンデンサーの静電エネルギー: U は、

$$U = \frac{(\Delta\phi)^2 C}{2} = \frac{(\log(R_2) - \log(R_1)) \mu^2 L}{4\pi\epsilon_0}$$

静電エネルギーの体積密度: $u_e(r)$ は (2.6.12) 式から次式となり、(3.5.40) 式を代入すると、

$$u_e(r) = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} = \frac{\mu^2}{8\pi^2 \epsilon_0 r^2}$$

上式を積分し、静電エネルギーを求めると、

$$U = 2\pi \int_{R_1}^{R_2} r u_e(r) dr L = \frac{\mu^2 L}{4\pi\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r} dr \\ = \frac{(\log(R_2) - \log(R_1)) \mu^2 L}{4\pi\epsilon_0}$$

例題 3.5.10 三枚の平行平板のコンデンサーの電気容量

三枚の平行薄い導体平板： A, B, C の面積： S 、間隔： d_1, d_2 のコンデンサーで、外部の導体板を接続し、内部の導体板に電荷： Q を与えたとき、導体間の電場、電荷密度を求める。

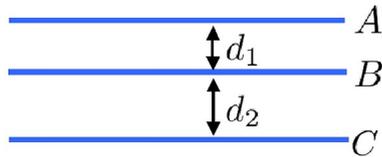


図 3.5.12: 三枚の平行平板のコンデンサー

```
kill(all);
E1:E=\tau/\epsilon[0];
E11:E[1]=\tau[1]/\epsilon[0];
E12:E[2]=\tau[2]/\epsilon[0];
PH1:\phi=E[1]*d[1];
PH2:\phi=E[2]*d[2];
Q1:Q=\tau[1]*S+\tau[2]*S;
solve([E11,E12,PH1,PH2,Q1],[\tau[1],
\tau[2],E[1],E[2],\phi])[1];
```

表面の電荷密度： τ 、静電場： E とすると、(3.1.1) 式から、

$$E = \frac{\tau}{\epsilon_0}$$

AB 間の静電場： E_1 、 BC 間の静電場： E_2 は、導体板： B の A 側の電荷密度： τ_1 、導体板： B の C 側の電荷密度： τ_2 とすると、

$$E_1 = \frac{\tau_1}{\epsilon_0}, \quad E_2 = \frac{\tau_2}{\epsilon_0}$$

A と C を接続すると A と C の電位差はなくなるので、 AB 間の静電ポテンシャル (電位)、 BC 間の静電ポテンシャル (電位) は同じになり、 ϕ とすると、

$$\phi = d_1 E_1, \quad \phi = d_2 E_2$$

導体板： B の A 側、導体板： B の C 側の電荷総量は Q であるから、

$$Q = \tau_2 S + \tau_1 S$$

上式を解いて、

$$\tau_1 = \frac{d_2 Q}{d_2 S + d_1 S}, \quad \tau_2 = \frac{d_1 Q}{d_2 S + d_1 S}$$

$$E_1 = \frac{d_2 Q}{\epsilon_0 (d_2 S + d_1 S)}, \quad E_2 = \frac{d_1 Q}{\epsilon_0 (d_2 S + d_1 S)}$$

$$\phi = \frac{d_1 d_2 Q}{\epsilon_0 (d_2 S + d_1 S)}$$

第4章 定常電流

4.1 電流

電流密度： \vec{i}

電流は自由に動ける電導電子(自由電子)の流れで、電子一個の電荷： $-e$ 、単位体積あたりの電導電子の数： n_e 、電子の移動速度： \vec{v} とすると、電流密度： \vec{i} は、

$$\vec{i} = -en_e \vec{v} \quad (4.1.1)$$

定常電流の保存則

ある閉曲面： S で囲まれた体積： V に流入する電流の総和は流出する電流の総和に等しい。閉曲面の法線ベクトル： \vec{n} とし、閉曲面： S を通過する電流総和を電流密度： \vec{i} で表すと、

$$\iint_S \vec{i} \cdot \vec{n} dS = 0 \quad (4.1.2)$$

上式に(2.4.18)式のガウスの定理を適用すると、

$$\iint_S \vec{i} \cdot \vec{n} dS = \iiint_V \nabla \cdot \vec{i} dV = 0$$

以上から、

$$\nabla \cdot \vec{i} = 0 \quad (4.1.3)$$

4.2 オームの法則

電気抵抗： R を流れる電流： I は電圧： $V = \phi_A - \phi_B$ (ここで $\phi_A > \phi_B$)に比例する。この関係は、

$$I = \frac{\phi_A - \phi_B}{R} = \frac{V}{R} \quad (4.2.1)$$

電気抵抗： R は長さ： L に比例し、断面積： S に反比例し、抵抗率： ρ とすると、

$$R = \rho \frac{L}{S} \quad (4.2.2)$$

(4.2.1)式と(4.2.2)式から、電気伝導度： $\sigma = \frac{1}{\rho}$ とし、 $L \rightarrow 0$ とすると $\frac{\phi_A - \phi_B}{L} \rightarrow -\frac{d}{dx} \phi$ となるので、

$$\frac{I}{S} = \frac{\phi_A - \phi_B}{RS} = \sigma \frac{\phi_A - \phi_B}{L} = -\sigma \frac{d}{dx} \phi$$

上式から、電流密度： i_x は(2.4.9)式から、

$$i_x = -\sigma \frac{d}{dx} \phi = \sigma E_x$$

以上から、

$$\vec{i} = -\sigma \nabla \phi = \sigma \vec{E} \quad (4.2.3)$$

4.3 導体中の電流分布

無限に広い電気伝導率： σ の導体の中に、電気伝導率が十分大きい電極： A, B を置く。定常電流： I が流れたとき、まわりに電場： E が生じる。 $A \rightarrow B$ に流れる電流： I は電極： A のまわりを囲む面： S の下記の積分を行うことで得られる。

$$\iint_S \vec{i} \cdot \vec{n} dS = I$$

(4.2.3) 式から、上式と電場： E の関係は、

$$\iint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{1}{\sigma} \iint_S \vec{i} \cdot \vec{n} dS = \frac{I}{\sigma} \quad (4.3.1)$$

一方、上記の電極： A, B を真空中に置き、電荷： $Q, -Q$ を与える。電極： A のまわりを囲む面： S の電場： E' の積分は、ガウスの法則： $(2.3.4)$ 式から、

$$\iint_S \vec{E}' \cdot \vec{n} dS = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (4.3.2)$$

(4.3.1) 式、(4.3.2) 式から、 $\frac{I}{\sigma} \leftrightarrow \frac{Q}{\epsilon_0}$ と対応させると、面： S の電場： \vec{E} と電場： \vec{E}' の面積分は等しくなる。電極： B のまわりを囲む面： S の電場の積分も同様である。また、電極： A, B を共に囲む面： S の電場の積分は、いずれも零である。

以上から、 \vec{E} と \vec{E}' は同じ方程式を満足し、 A, B 上で、それぞれ等電位とすると、同じ境界条件となるので、 \vec{E} と \vec{E}' は同じ電場となる。

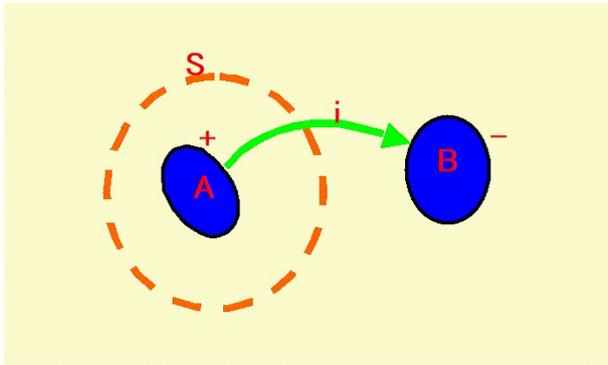


図 4.3.1: 導体中の電流分布

4.4 ジュールの法則

電子は電場から $-e \vec{E}$ の力を受けながら、時間： dt の間に $\vec{v} dt$ だけ移動する。これによる仕事： dw は、

$$dw = -e \vec{E} \cdot \vec{v} dt$$

この仕事は熱エネルギーに変換されるので、単位時間、単位体積中で発生する熱： w は、上式と(4.1.1)式から、

$$w = n_e \frac{dw}{dt} = -n_e e \vec{E} \cdot \vec{v} = \vec{E} \cdot \vec{i} \quad (4.4.1)$$

上式に(4.2.3)式を代入すると、

$$w = \sigma |\vec{E}|^2 = \frac{1}{\sigma} |\vec{i}|^2 \quad (4.4.2)$$

4.5 回路(キルヒホッフの法則)

- (1) 電気回路の任意の一点に流入する電流 I_i の和は零である。ここで、任意の一点に流入する電流を正、流出する電流を負とする。

$$\sum_i I_i = 0 \quad (4.5.1)$$

- (2) 任意の閉じた電流回路ループ内で、その網目の電流： I_j と抵抗： R_j の積：電位降下の和は、その回路ループ内の起電力： ϕ_i の和に等しい。

$$\sum_i \phi_i = \sum_j R_j I_j \quad (4.5.2)$$

4.6 電気抵抗と電気容量

「4.3 導体中の電流分布」に示した電極： A, B を電気伝導率： σ の導体の中に置いたときと電極を真空中に置いたときの関係は、(4.3.1)式と(4.3.2)式から、

$$\frac{I}{\sigma} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

(3.4.3) 式と(4.2.1)式から、

$$Q = \Delta \phi C, \quad I = \frac{\Delta \phi}{R}$$

上式から、電気抵抗： R と電気容量： C の関係式は、

$$RC = \frac{\epsilon_0}{\sigma} \quad (4.6.1)$$

4.7 例題

例題 4.7.1 内殻球電極と外殻球電極の間に電解質を充填した電極間の電気抵抗

中心が一致した半径： R_A の内球殻： A の電極と半径： R_B の外球殻： B の電極の間に電気伝導率： σ の電解質を充填した電極間の電気抵抗： R を求める。

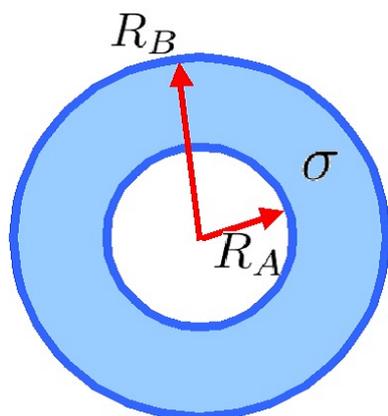


図 4.7.1: 内球殻電極と外球殻電極の電気抵抗

上式から電流密度： $i(r)$ は、

$$i(r) = \frac{I}{4\pi r^2}$$

半径： r における電場： $E(r)$ は (4.2.3) 式から、

$$E(r) = \frac{i(r)}{\sigma}$$

電極： AB 間の電位差は (2.4.9) 式から、

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= \int_{R_A}^{R_B} E(r) dr = \frac{1}{\sigma} \int_{R_A}^{R_B} i(r) dr \\ &= \frac{I}{4\pi\sigma} \int_{R_A}^{R_B} \frac{1}{r^2} dr = \frac{I}{4\pi\sigma} \left(\frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_B} \right) \end{aligned}$$

電気抵抗： R は (4.2.1) 式と上式から

$$R = \frac{\Delta\phi}{I} = \frac{R_B - R_A}{4\pi\sigma R_A R_B}$$

上記で発生する単位時間当たりの発生ジュール熱： w は (4.4.2) 式から、

$$\begin{aligned} w &= \frac{4\pi}{\sigma} \int_{R_A}^{R_B} r^2 i(r)^2 dr = \frac{I^2}{4\pi\sigma} \int_{R_A}^{R_B} \frac{1}{r^2} dr \\ &= \frac{I^2}{4\pi\sigma} \left(\frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_B} \right) \end{aligned}$$

```
kill(all);
assume(R[A]>0);
assume(R[B]>0);
assume(R[B]>R[A]);
I1:I=4*pi*r^2*i(r);
I2:solve(I1,i(r))[1];
I3:i(r)=sigma*E(r);
E1:solve(I3,E(r))[1];
DPH1:\Delta*phi='integrate(E(r),r,R[A],
R[B]);
subst([E1],DPH1);
subst([I2],%);
DPH2:ev(%,integrate);
DPH3:solve(DPH2,\phi)[1];
R1:R=\Delta*phi/I;
subst([DPH3],R1);
w='integrate(i(r)^2/sigma*4*pi*r^2,r,
R[A],R[B]);
subst([I2],%);
ev(%,integrate);
```

半径： r における電流密度： $i(r)$ とすると、全電流： I は、

$$I = 4\pi r^2 i(r)$$

例題 4.7.2 内円筒電極と外円筒電極の間に電解質を充填した電極間の電気抵抗

中心が一致した長さ: L の半径: R_A の内円筒: A の電極と半径: R_B の外円筒: B の電極の間に電気伝導率: σ の電解質を充填した電極間の電気抵抗: R を求める。

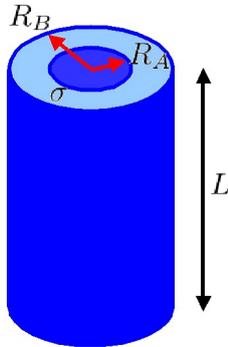


図 4.7.2: 内円筒電極と外円筒電極の電気抵抗

```
kill(all);
assume(R[A]>0);
assume(R[B]>0);
assume(R[B]>R[A]);
I1:I=2*%pi*r*L*i(r);
I2:solve(I1,i(r))[1];
I3:i(r)=\sigma*E(r);
E1:solve(I3,E(r))[1];
DPH1:\Delta*\phi='integrate(E(r),r,R[A],
R[B]);
subst([E1],DPH1);
subst([I2],%);
DPH2:ev(%,integrate);
DPH3:solve(DPH2,\phi)[1];
R1:R=\Delta*\phi/I;
subst([DPH3],R1);
w='integrate(i(r)^2/\sigma*2*%pi*r*L,r,
R[A],R[B]);
subst([I2],%);
ev(%,integrate);
ev(%,integrate);
```

半径: r における電流密度: $i(r)$ とすると、全電流: I は、

$$I = 2\pi r i(r) L$$

上式から電流密度: $i(r)$ は、

$$i(r) = \frac{I}{2\pi r L}$$

半径: r における電場: $E(r)$ は (4.2.3) 式から、

$$E(r) = \frac{i(r)}{\sigma}$$

電極: AB 間の電位差は (2.4.9) 式から、

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= \int_{R_A}^{R_B} E(r) dr = \frac{1}{\sigma} \int_{R_A}^{R_B} i(r) dr \\ &= \frac{I}{2\pi\sigma L} \int_{R_A}^{R_B} \frac{1}{r} dr = \frac{(\log(R_B) - \log(R_A)) I}{2\pi\sigma L} \end{aligned}$$

電気抵抗: R は (4.2.1) 式と上式から

$$R = \frac{\Delta\phi}{I} = \frac{\log(R_B) - \log(R_A)}{2\pi\sigma L}$$

上記で発生する単位時間当たりの発生ジュール熱: w は (4.4.2) 式から、

$$\begin{aligned} w &= \frac{2\pi L}{\sigma} \int_{R_A}^{R_B} r i(r)^2 dr = \frac{I^2}{2\pi\sigma L} \int_{R_A}^{R_B} \frac{1}{r} dr \\ &= \frac{(\log(R_B) - \log(R_A)) I^2}{2\pi\sigma L} \end{aligned}$$

例題 4.7.3 電解質中に置いた二つの導体球電極間の電気抵抗

無限に広い電気伝導率： σ の電解質中に二つの半径： A の導体球の電極を間隔： d だけ離して置いたときの電極間の電気抵抗： R を求める。ここで $d \gg A$ とする。

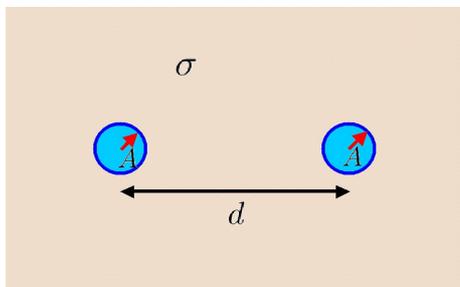


図 4.7.3: 二つの導体球電極間の電気抵抗

```
kill(all);
PH1:\phi[A]=1/(4*pi*epsilon[0])*(Q/a-Q/d);
PH2:\phi[B]=1/(4*pi*epsilon[0])*(-Q/a+Q/d);
PH1-PH2;
PH3:solve(,\phi[A])[1];
C=Q/(\phi[A]-\phi[B]);
subst([PH3],%);
C1:factor(%);
R1:R*C=epsilon[0]/sigma;
solve(%,R)[1];
subst([C1],%);
```

二つの導体球電極： A, B の表面の静電ポテンシャル（電位）は (3.5.15) 式、(3.5.16) 式で電荷： $Q_A \rightarrow Q, Q_B \rightarrow -Q$ 、導体球半径： $R_A \rightarrow A, R_B \rightarrow A$ の置き換えをおこなって、

$$\phi_A = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 d}, \quad \phi_B = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 d}$$

二つの導体球電極の電位差は、

$$\phi_A - \phi_B = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{d} + \frac{1}{a} - \frac{1}{d} \right) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{d} \right)$$

二つの導体球電極の電気容量： C は、

$$C = \frac{Q}{\phi_A - \phi_B} = \frac{2\pi\epsilon_0 a d}{d - a}$$

(4.6.1) 式から電気容量： C と電気抵抗： R の関係は、

$$CR = \frac{\epsilon_0}{\sigma}$$

上式より、電気抵抗： R は、

$$R = \frac{\epsilon_0}{\sigma C} = \frac{d - a}{2\pi a d \sigma}$$

例題 4.7.4 広く平らな導体と小さな導体球による電場

無限に広い電気伝導率： σ の電解質中に無限に薄くて広い平板の導体と半径： A の導体球が間隔： d だけ離して置いたとき電場： E を求める。ここで $d \gg A$ とする。

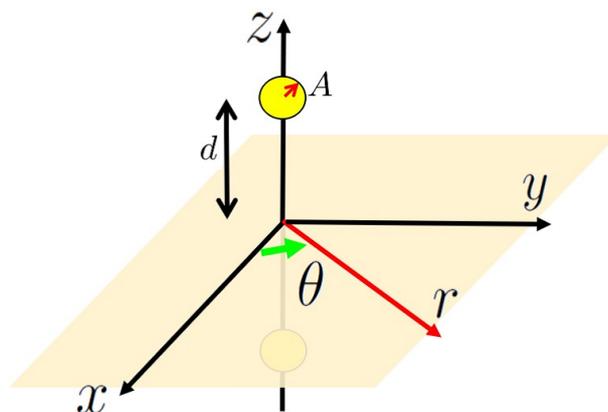


図 4.7.4: 広く平らな導体と小さな導体球による電場

薄くて広い平板の導体では、電流は面に平行に流れる。また、 xy 平面上で $E_z = 0$ となる。 $d \gg A$ とすると、これと同じ境界条件のものは、「例題 2.8.9 一對の点電荷による電気双極子の静電場」で、一對の電荷： $Q_1, -Q_1$ による静電場： \vec{E} は (2.8.77) 式から、

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} \frac{Q_1 r \cos(\theta)}{4\epsilon_0 \pi (z^2 - 2dz + r^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{Q_1 r \sin(\theta)}{4\epsilon_0 \pi (z^2 - 2dz + r^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{Q_1 (z-d)}{4\epsilon_0 \pi (z^2 - 2dz + r^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{Q_1 r \cos(\theta)}{4\epsilon_0 \pi (z^2 + 2dz + r^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} \\ -\frac{Q_1 r \sin(\theta)}{4\epsilon_0 \pi (z^2 + 2dz + r^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} \\ -\frac{Q_1 (z+d)}{4\epsilon_0 \pi (z^2 + 2dz + r^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} \end{pmatrix}$$

境界条件が同じとき、「4.3 導体中の電流分布」から、 $\frac{I}{\sigma} \leftrightarrow \frac{Q}{\epsilon_0}$ と対応させることができる。以上から、上式をこれで置き換えて、

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} \frac{I r \cos(\theta)}{4\sigma \pi (z^2 - 2dz + r^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{I r \sin(\theta)}{4\sigma \pi (z^2 - 2dz + r^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{I (z-d)}{4\sigma \pi (z^2 - 2dz + r^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{I r \cos(\theta)}{4\sigma \pi (z^2 + 2dz + r^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} \\ -\frac{I r \sin(\theta)}{4\sigma \pi (z^2 + 2dz + r^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} \\ -\frac{I (z+d)}{4\sigma \pi (z^2 + 2dz + r^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} \end{pmatrix}$$

例題 4.7.5 電気回路

下記の抵抗： R_j 、起電力： ϕ_0 、内部抵抗： R_0 の電気回路の電流： I_j を求める。

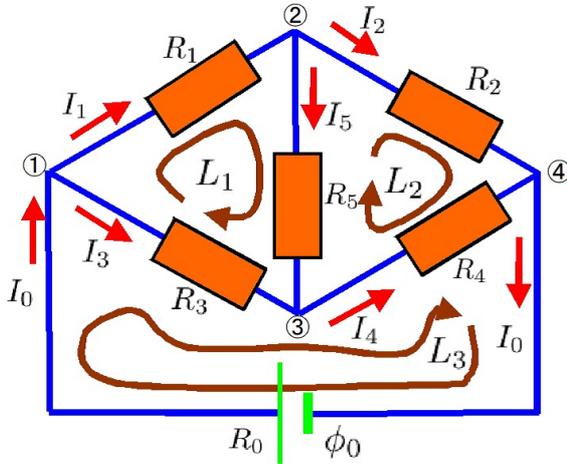


図 4.7.5: 電気回路

```
kill(all);
RP1:I[1]*R[1]+I[5]*R[5]-I[3]*R[3]=0;
RP2:I[2]*R[2]-I[5]*R[5]-I[4]*R[4]=0;
RP3:I[3]*R[3]+I[4]*R[4]+I[0]*R[0]=\phi[0];
I1:I[0]-I[1]-I[3]=0;
I2:I[1]-I[2]-I[5]=0;
I3:I[3]+I[5]-I[4]=0;
I4:I[2]+I[4]-I[0]=0;
```

```
SRP1:solve([RP1,RP2,RP3,I1,I2,I3],[I[0],
I[1],I[2],I[3],I[4],I[5]]);
SRP1:factor(%);
SRP1[1][1];
SRP1[1][2];
SRP1[1][3];
SRP1[1][4];
SRP1[1][5];
SRP1[1][6];
```

電流回路ループ： L_1 の電位降下は、

$$I_5 R_5 - I_3 R_3 + I_1 R_1 = 0$$

電流回路ループ： L_2 の電位降下は、

$$-I_5 R_5 - I_4 R_4 + I_2 R_2 = 0$$

電流回路ループ： L_3 の電位降下は、

$$I_4 R_4 + I_3 R_3 + I_0 R_0 = \phi_0$$

点： $\textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3}, \textcircled{4}$ における電流の流出入は、

$$-I_3 - I_1 + I_0 = 0, \quad -I_5 - I_2 + I_1 = 0$$

$$I_5 - I_4 + I_3 = 0, \quad I_4 + I_2 - I_0 = 0$$

上記の式を連立方程式で解いて I_j を求める。 $R_0 \neq 0$ のときは記述が長くなるので省略し、 $R_0 = 0$ の場合の I_j を下記に示す。

$$I_0 = \frac{\phi_0 (R_4 R_5 + R_3 R_5 + R_2 R_5 + R_1 R_5 + R_3 R_4 + R_1 R_4 + R_2 R_3 + R_1 R_2)}{R_2 R_4 R_5 + R_1 R_4 R_5 + R_2 R_3 R_5 + R_1 R_3 R_5 + R_2 R_3 R_4 + R_1 R_3 R_4 + R_1 R_2 R_4 + R_1 R_2 R_3}$$

$$I_1 = \frac{\phi_0 (R_4 R_5 + R_3 R_5 + R_3 R_4 + R_2 R_3)}{R_2 R_4 R_5 + R_1 R_4 R_5 + R_2 R_3 R_5 + R_1 R_3 R_5 + R_2 R_3 R_4 + R_1 R_3 R_4 + R_1 R_2 R_4 + R_1 R_2 R_3}$$

$$I_2 = \frac{\phi_0 (R_4 R_5 + R_3 R_5 + R_3 R_4 + R_1 R_4)}{R_2 R_4 R_5 + R_1 R_4 R_5 + R_2 R_3 R_5 + R_1 R_3 R_5 + R_2 R_3 R_4 + R_1 R_3 R_4 + R_1 R_2 R_4 + R_1 R_2 R_3}$$

$$I_3 = \frac{\phi_0 (R_2 R_5 + R_1 R_5 + R_1 R_4 + R_1 R_2)}{R_2 R_4 R_5 + R_1 R_4 R_5 + R_2 R_3 R_5 + R_1 R_3 R_5 + R_2 R_3 R_4 + R_1 R_3 R_4 + R_1 R_2 R_4 + R_1 R_2 R_3}$$

$$I_4 = \frac{\phi_0 (R_2 R_5 + R_1 R_5 + R_2 R_3 + R_1 R_2)}{R_2 R_4 R_5 + R_1 R_4 R_5 + R_2 R_3 R_5 + R_1 R_3 R_5 + R_2 R_3 R_4 + R_1 R_3 R_4 + R_1 R_2 R_4 + R_1 R_2 R_3}$$

$$I_5 = -\frac{\phi_0 (R_1 R_4 - R_2 R_3)}{R_2 R_4 R_5 + R_1 R_4 R_5 + R_2 R_3 R_5 + R_1 R_3 R_5 + R_2 R_3 R_4 + R_1 R_3 R_4 + R_1 R_2 R_4 + R_1 R_2 R_3}$$

第5章 静磁場

5.1 磁場

磁石にはN極とS極があり、N極には正の磁荷があり、S極には負の磁荷がある。同符号同士では排斥力が働き、異符号では引力が働く。距離： R 隔てた磁荷： q_m, q_n の間で作用する力： F は、

$$F \propto \frac{q_m q_n}{R^2}$$

磁石を細かく切っても、N極、S極に分かれるのでなく、小さなNS極を持った磁石となる。磁石を紙の上に置き、砂鉄を撒いて紙に振動を与えると磁力線があらわれる。磁場も電場と同じように、磁力線のベクトルで表現できる。

5.2 磁場中の電流

電線に流れる電流： I 、電流の向きの単位ベクトル： \vec{t} 、磁場のベクトル： \vec{B} とし、電線： ds に作用する力： ΔF は、フレミングの左手の法則から、

$$\Delta \vec{F} = I (\vec{t} \times \vec{B}) ds \quad (5.2.1)$$

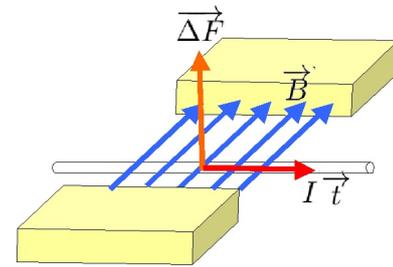


図 5.2.1: 磁場中の電流に作用する力

5.3 運動する荷電粒子に作用する力 (ローレンツ力)

磁場： \vec{B} の中を電荷： q を持った粒子が速度： \vec{v} で移動しているとき、粒子に作用する力： \vec{F} は、(5.2.1) 式から、

$$\vec{F} = q (\vec{v} \times \vec{B}) \quad (5.3.1)$$

また、この電荷が静電場： \vec{E} の中にいるとき、(2.2.2) 式から、

$$\vec{F} = q \vec{E} \quad (5.3.2)$$

以上から、磁場： \vec{B} 、電場： \vec{E} の中を電荷： q を持った粒子が速度： \vec{v} で移動しているとき、粒子に作用する力： \vec{F} は、

$$\vec{F} = q \vec{E} + q (\vec{v} \times \vec{B}) \quad (5.3.3)$$

5.4 電流が作る磁場 (ビオ・サバールの法則)

二本の平行な無限に長い直線の電線に電流： I_1, I_2 を流すと、電線間に作用する力： F は、

$$F = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{r} \quad (5.4.1)$$

これを基に無限に長い直線の電線に電流： I を流したとき、 r だけ離れた位置における磁場の強さ (磁束密度)： B は、

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r} \quad (5.4.2)$$

直線の微小部分に分割し、磁場はこの磁場の合わさったものと考え、下図に示す微小部分： ds による原点： O から r だけ離れた点の磁場の強さ (磁束密度)： ΔB は、

$$\Delta B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\sin(\alpha)}{R^2} I ds \quad (5.4.3)$$

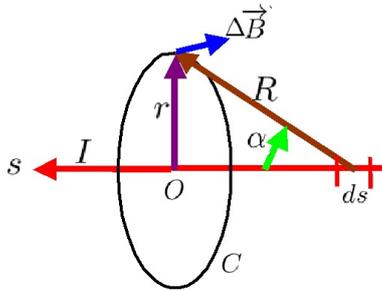


図 5.4.1: 電流が作る磁場

```
kill(all);
DB1:\Delta*B=\mu[0]/4/%pi*I*sin(\alpha)
/R^2*ds;
subst([sin(\alpha)=r/R],%);
DB2:subst([R=sqrt(s^2+r^2)],%);
assume(A>0);
B='integrate(rhs(DB2)/ds,s,-A,A);
ev(%,integrate);
factor(%,);
limit(%,A,inf);
```

(5.4.3) 式に下記の関係式を代入し、

$$\sin(\alpha) = \frac{r}{R}, \quad R = \sqrt{s^2 + r^2}$$

(5.4.3) 式は、

$$\Delta B = \frac{\mu_0 \sin(\alpha) ds I}{4\pi R^2} = \frac{\mu_0 ds r I}{4\pi (s^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}$$

上式を $s = -A \rightarrow A$ の積分を行うと、

$$B = \frac{\mu_0 r I}{4\pi} \int_{-A}^A \frac{1}{(s^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} ds = \frac{\mu_0 A I}{2\pi r \sqrt{A^2 + r^2}}$$

上式で $A \rightarrow \infty$ とすると、下記となり、(5.4.2) 式と同じ結果となった。

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

(5.4.3) 式をベクトル表記するために、 s の電流の位置を \vec{r}' 、求める磁場の位置を \vec{r} 、電流の向きに単位ベクトル： \vec{t} とすると、

$$\begin{aligned} R &= |\vec{r} - \vec{r}'| \\ |\vec{t} \times (\vec{r} - \vec{r}')| &= |\vec{r} - \vec{r}'| |\vec{t}| \sin(\alpha) \\ &= |\vec{r} - \vec{r}'| \sin(\alpha) \end{aligned}$$

上式を使って、(5.4.3) 式をベクトル表記すると、

$$\Delta \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \vec{t} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} ds \quad (5.4.4)$$

電流が細い電線： C を流れている場合には、上式を C に沿って積分し、

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \frac{\vec{t} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} ds \quad (5.4.5)$$

電流が電流密度： $i(\vec{r}')$ で広がりを持つ場合には下記となる。ここで V' は r' による体積分を表す。

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{i(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV' \quad (5.4.6)$$

```
kill(all);
load("vect")$
I1:R1:matrix([i[x]],[i[y]],[i[z]]);
R1:matrix([x],[y],[z]);
RD:matrix([a],[b],[c]);
DR1:R1-RD;
IDRM1:col(adjoint(transpose(addcol(I1,
DR1,matrix([1],[1],[1]))),3);
DR2:DR1[1][1]^2+DR1[2][1]^2+DR1[3][1]^2;
PH1:1/(DR2)^(1/2);
B1:IDRM1*PH1;
transpose(%,);
div(%,[1]);
express(%,);
ev(%,diff);
factor(%,);
```

$\text{div} \vec{B}(\vec{r})$ について調べる。

$$\text{div} \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V'} \text{div} \left(\frac{i(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) dV'$$

上式の被積分関数について調べる。ここで下記とすると、

$$\overrightarrow{i(\vec{r}')} = \begin{pmatrix} i_x \\ i_y \\ i_z \end{pmatrix}, \quad \vec{r}' = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \vec{r}' = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$\text{div} \overrightarrow{B(\vec{r})}$ の被積分関数は、上式を代入すると、

$$\begin{aligned} & \text{div} \left(\frac{\overrightarrow{i(\vec{r}')} \times (\vec{r}' - \vec{r}')}{|\vec{r}' - \vec{r}'|^3} \right) \\ &= \text{div} \left(\frac{\begin{pmatrix} i_y(z-c) - (y-b)i_z \\ \sqrt{(z-c)^2 + (y-b)^2 + (x-a)^2} \\ (x-a)i_z - i_x(z-c) \\ \sqrt{(z-c)^2 + (y-b)^2 + (x-a)^2} \\ i_x(y-b) - (x-a)i_y \\ \sqrt{(z-c)^2 + (y-b)^2 + (x-a)^2} \end{pmatrix}}{\sqrt{(z-c)^2 + (y-b)^2 + (x-a)^2}} \right) \\ &= \frac{d}{dx} \frac{i_y(z-c) - (y-b)i_z}{\sqrt{(z-c)^2 + (y-b)^2 + (x-a)^2}} \\ &\quad + \frac{d}{dy} \frac{(x-a)i_z - i_x(z-c)}{\sqrt{(z-c)^2 + (y-b)^2 + (x-a)^2}} \\ &\quad + \frac{d}{dz} \frac{i_x(y-b) - (x-a)i_y}{\sqrt{(z-c)^2 + (y-b)^2 + (x-a)^2}} \\ &= - \frac{(x-a)(i_y(z-c) - (y-b)i_z)}{\left((z-c)^2 + (y-b)^2 + (x-a)^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \\ &\quad - \frac{(y-b)((x-a)i_z - i_x(z-c))}{\left((z-c)^2 + (y-b)^2 + (x-a)^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \\ &\quad - \frac{(i_x(y-b) - (x-a)i_y)(z-c)}{\left((z-c)^2 + (y-b)^2 + (x-a)^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

以上から、

$$\text{div} \overrightarrow{B(\vec{r})} = 0 \quad (5.4.7)$$

下記のガウスの定理¹から、

$$\iiint_V \nabla \cdot \vec{A} dV = \iiint_V \text{div} \vec{A} dV = \iint_S \vec{A} \cdot \vec{n} dS \quad (5.4.8)$$

上式を (5.4.7) 式に適用すると、

$$\iint_S \overrightarrow{B(\vec{r})} \cdot \vec{n}(\vec{r}) dS = 0 \quad (5.4.9)$$

¹溝口純敏: Maxima を使った物理数学基礎演習ノート、
http://www9.plala.or.jp/prac-maxima/ 第4章 ベクトルと行列、4.4.2 ガウスの定理

5.5 ベクトル・ポテンシャル

(5.4.5) 式で使用されている次式について調べる。

$$\frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (5.5.1)$$

```
kill(all);
load("vect")$
R1:matrix([x],[y],[z]);
RD:matrix([a],[b],[c]);
DR1:R1-RD;
DR2:DR1[1][1]^2+DR1[2][1]^2+DR1[3][1]^2;
PH1:1/(DR2)^(1/2);
grad(PH1);
GD1:express(%);
ev(%diff);
GD11:transpose(%);
```

\vec{r}, \vec{r}' を下記とすると、

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \vec{r}' = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} & \nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ &= \text{grad} \left(\frac{1}{\sqrt{(z-c)^2 + (y-b)^2 + (x-a)^2}} \right) \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{x-a}{((z-c)^2 + (y-b)^2 + (x-a)^2)^{\frac{3}{2}}} \\ -\frac{y-b}{((z-c)^2 + (y-b)^2 + (x-a)^2)^{\frac{3}{2}}} \\ -\frac{z-c}{((z-c)^2 + (y-b)^2 + (x-a)^2)^{\frac{3}{2}}} \end{pmatrix} = -\frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \end{aligned} \quad (5.5.2)$$

(5.4.5) 式に上式を代入すると、

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{i(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV' \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V'} i(\vec{r}') \times \left(\nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dV' \end{aligned} \quad (5.5.3)$$

上式の被積分関数で、下記の関係式²を用いて、

$$\nabla \times (\vec{A} f) = -\vec{A} \times (\nabla f) + f (\nabla \times \vec{A})$$

(5.5.3) 式の被積分関数は、

$$\begin{aligned} & -i(\vec{r}') \times \left(\nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \\ &= \nabla \times \left(\frac{i(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) - \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} (\nabla \times i(\vec{r}')) \end{aligned}$$

上式の右辺第二項： $\nabla \times i(\vec{r}')$ で、 $i(\vec{r}')$ は a, b, c の関数で x, y, z の関数でないので、 $\nabla \times i(\vec{r}') = 0$ となり、上式は、

$$-i(\vec{r}') \times \left(\nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = \nabla \times \left(\frac{i(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \quad (5.5.4)$$

(5.5.3) 式に上式を代入して、

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V'} \nabla \times \left(\frac{i(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dV' \\ &= \nabla \times \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{i(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \end{aligned} \quad (5.5.5)$$

いま、下記の $\vec{A}(\vec{r})$ をベクトル・ポテンシャルと定義する。

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{i(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \quad (5.5.6)$$

$$\Delta \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (5.5.7)$$

電流が細い電線を通るときには、 $\vec{A}(\vec{r})$ は次のように定義できる。

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_C \frac{I t(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} ds' \quad (5.5.8)$$

このとき、(5.5.5) 式から、

$$\vec{B}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{A}(\vec{r}) \quad (5.5.9)$$

²溝口純敏：Maxima を使った物理数学基礎演習ノート、
http://www9.plala.or.jp/prac-maxima/ 第4章 ベクトルと行列、4.3.6 ∇ を使った演算

$\nabla \cdot \overrightarrow{A}(\overrightarrow{r})$ について調べる。(5.5.6) 式から、ここで ∇ は x, y, z による微分を表す。 \overrightarrow{r}' は a, b, c の関数であるから、

$$\nabla \cdot \overrightarrow{A}(\overrightarrow{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V'} i(\overrightarrow{r}') \nabla \frac{1}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}'|} dV' \quad (5.5.10)$$

```
RGDA1:matrix(['diff(PH1,a,1)], ['diff(PH1,
b,1)], ['diff(PH1,c,1)']);
GD21:ev(% ,diff);
GD11+GD21;
```

いま、 $\frac{1}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}'|}$ を a, b, c で微分する。ここで ∇' を a, b, c による微分を表す。

$$\begin{aligned} \nabla' \frac{1}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}'|} &= \begin{pmatrix} \frac{d}{da} \frac{1}{\sqrt{(z-c)^2 + (y-b)^2 + (x-a)^2}} \\ \frac{d}{db} \frac{1}{\sqrt{(z-c)^2 + (y-b)^2 + (x-a)^2}} \\ \frac{d}{dc} \frac{1}{\sqrt{(z-c)^2 + (y-b)^2 + (x-a)^2}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{x-a}{((z-c)^2 + (y-b)^2 + (x-a)^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{y-b}{((z-c)^2 + (y-b)^2 + (x-a)^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{z-c}{((z-c)^2 + (y-b)^2 + (x-a)^2)^{\frac{3}{2}}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(5.5.2) 式と上式を比較すると、

$$\nabla \frac{1}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}'|} = -\nabla' \frac{1}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}'|}$$

(5.5.10) 式に上式の関係式を代入すると、

$$\nabla \cdot \overrightarrow{A}(\overrightarrow{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V'} i(\overrightarrow{r}') \nabla' \frac{1}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}'|} dV' \quad (5.5.11)$$

また、

$$\begin{aligned} \nabla' \frac{i(\overrightarrow{r}')}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}'|} &= \frac{1}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}'|} \nabla' (i(\overrightarrow{r}')) \\ &\quad + i(\overrightarrow{r}') \nabla' \frac{1}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}'|} \end{aligned}$$

(5.5.11) 式に上式の関係式を代入すると、

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \overrightarrow{A}(\overrightarrow{r}) &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V'} \nabla' \frac{i(\overrightarrow{r}')}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}'|} dV' \\ &\quad + \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{1}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}'|} \nabla' (i(\overrightarrow{r}')) dV' \end{aligned} \quad (5.5.12)$$

定常電流の保存則：(4.1.3) 式から $\nabla \cdot \overrightarrow{i} = 0$ となり、上式の右辺第二項は零となる。上式右辺の第一項はガウスの定理：(5.4.8) 式から体積分を面積分に変えると、

$$\nabla \cdot \overrightarrow{A}(\overrightarrow{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{S'} \frac{i(\overrightarrow{r}')}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}'|} \cdot \overrightarrow{n}(\overrightarrow{r}') dS'$$

ここで、積分する閉曲面を十分大きくすると $i(\overrightarrow{r}')$ はすべて積分閉曲面の内部に含めることができるため、この積分は零となる。以上から、

$$\nabla \cdot \overrightarrow{A}(\overrightarrow{r}) = 0 \quad (5.5.13)$$

$\nabla \times \overrightarrow{B}(\overrightarrow{r})$ について調べる。これを (5.5.9) 式から、ベクトル・ポテンシャル： $\overrightarrow{A}(\overrightarrow{r})$ で表すと、

$$\nabla \times \overrightarrow{B}(\overrightarrow{r}) = \nabla \times (\nabla \times \overrightarrow{A}(\overrightarrow{r})) \quad (5.5.14)$$

上式で、下記の関係式¹を用いて、

$$\nabla \times (\nabla \times \overrightarrow{A}) = \nabla (\nabla \cdot \overrightarrow{A}) - \nabla^2 \overrightarrow{A}$$

上式と (5.5.13) 式から、(5.5.14) 式は下記となり、(5.5.6) 式を代入し、

$$\begin{aligned} \nabla \times \overrightarrow{B}(\overrightarrow{r}) &= -\nabla^2 \overrightarrow{A}(\overrightarrow{r}) \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V'} i(\overrightarrow{r}') \nabla^2 \frac{1}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}'|} dV' \end{aligned} \quad (5.5.15)$$

ところで、静電ポテンシャル： ϕ と電荷密度： $\rho(\overrightarrow{r})$ の関係は、(2.4.7) 式、(2.4.23) 式から、

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho(\overrightarrow{r}')}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}'|} dV \quad (5.5.16)$$

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \rho(\overrightarrow{r}') \nabla^2 \frac{1}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}'|} dV = -\frac{\rho(\overrightarrow{r}')}{\epsilon_0} \quad (5.5.17)$$

上式から、 $\nabla^2 \frac{1}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}'|}$ がデルタ関数： $-\delta(\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}')$ の役割を果たしている。このことを (5.5.15) 式に適用すると、

$$\begin{aligned} \nabla \times \overrightarrow{B}(\overrightarrow{r}) &= -\nabla^2 \overrightarrow{A}(\overrightarrow{r}) \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V'} i(\overrightarrow{r}') \nabla^2 \frac{1}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}'|} dV' \\ &= \mu_0 i(\overrightarrow{r}') \end{aligned} \quad (5.5.18)$$

(5.5.15) 式にガウスの定理：(5.4.8) 式を適用し、体積分を面積分に変えると、

$$\begin{aligned} \nabla \times \overrightarrow{B}(\overrightarrow{r}) &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V'} \nabla^2 \frac{i(\overrightarrow{r}')}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}'|} dV' \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V'} i(\overrightarrow{r}') \operatorname{div} \operatorname{grad} \frac{1}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}'|} dV' \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{S'} i(\overrightarrow{r}') \operatorname{grad} \frac{1}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}'|} \cdot \overrightarrow{n}(\overrightarrow{r}') dS' \end{aligned} \quad (5.5.19)$$

上式の面積分として、 $i(\overrightarrow{r}')$ を含む中心が \overrightarrow{r}' 、半径： R の小さな球とすると、 $\frac{1}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}'|} \rightarrow \frac{1}{r}$ と置き換えることができ、

$$\operatorname{grad} \frac{1}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}'|} = \operatorname{grad} \frac{1}{r} = \frac{d}{dr} \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2}$$

(5.5.19) 式に上式を代入すると、下記から (5.5.18) 式と同じ結果が得られる。

$$\begin{aligned} \nabla \times \overrightarrow{B}(\overrightarrow{r}) &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{S'} i(\overrightarrow{r}') \operatorname{grad} \frac{1}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}'|} \cdot \overrightarrow{n}(\overrightarrow{r}') dS' \\ &= \frac{\mu_0 i(\overrightarrow{r}')}{4\pi} \iint_{r'=R} \frac{1}{r^2} dS' \\ &= \frac{\mu_0 i(\overrightarrow{r}')}{4\pi R^2} 4\pi R^2 = \mu_0 i(\overrightarrow{r}') \end{aligned} \quad (5.5.20)$$

¹溝口純敏：Maxima を使った物理数学基礎演習ノート、<http://www9.plala.or.jp/prac-maxima/> 第4章 ベクトルと行列、4.3.6 ∇ を使った演算

5.5.1 ベクトル・ポテンシャルと静電ポテンシャル

ベクトル・ポテンシャル: $\overrightarrow{A}(\overrightarrow{r})$ の微分方程式は (5.5.19) 式から、

$$\nabla^2 \overrightarrow{A}(\overrightarrow{r}) = -\mu_0 \overrightarrow{i}(\overrightarrow{r}') \quad (5.5.21)$$

ベクトル・ポテンシャル: $\overrightarrow{A}(\overrightarrow{r})$ は (5.5.6) 式から、

$$\overrightarrow{A}(\overrightarrow{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{\overrightarrow{i}(\overrightarrow{r}')}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}'|} dV' \quad (5.5.22)$$

ベクトル・ポテンシャルの x 軸方向の微分方程式は (5.5.21) 式から、

$$\nabla^2 A_x(\overrightarrow{r}) = -\mu_0 i_x(\overrightarrow{r}') \quad (5.5.23)$$

一方、静電ポテンシャル: ϕ では、下記のポアソンの方程式: (2.4.23) 式から、

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (5.5.24)$$

境界条件が同じであれば、 $A_x \leftrightarrow \phi$ 、 $\mu_0 i_x \leftrightarrow \frac{\rho}{\epsilon_0}$ と対応している。(5.5.24) 式の解は下記の (2.4.7) 式の静電ポテンシャル: ϕ となる。

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho(\overrightarrow{r}')}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}'|} dV \quad (5.5.25)$$

上式に $A_x \leftrightarrow \phi$ 、 $\mu_0 i_x \leftrightarrow \frac{\rho}{\epsilon_0}$ の対応を当てはめれば、ベクトル・ポテンシャルの x 軸方向の解が得られる。

$$A_x(\overrightarrow{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{i_x(\overrightarrow{r}')}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}'|} dV' \quad (5.5.26)$$

他の座標軸についても同様に得ることができ、(5.5.22) 式のベクトル・ポテンシャル: $\overrightarrow{A}(\overrightarrow{r})$ が得られる。

5.6 アンペールの法則

磁力の電荷におけるわき出しのようなものではなく、正負の磁荷が対になるので、(5.4.7)式から、

$$\operatorname{div} \vec{B}(\vec{r}) = 0 \quad (5.6.1)$$

また、(5.4.9)式から、

$$\iint_S \vec{B}(\vec{r}) \cdot \vec{n}(\vec{r}) dS = 0 \quad (5.6.2)$$

(5.4.2)式を変形し、図5.4.1に示す電流： I を取り巻く円形の経路： C とすると、

$$B \cdot 2\pi r = \int_C \vec{B}(\vec{r}) \cdot \vec{t}(\vec{r}) ds = \mu_0 I \quad (5.6.3)$$

任意に選んだ経路： C が電流の流れている回路から離れ、電流： I を取り巻かない場合には、電流が流れている回路は磁気双極子に近似でき、静電場における電気双極子による静電場と変わらないので、(2.4.1)式から、

$$\int_C \vec{B}(\vec{r}) \cdot \vec{t}(\vec{r}) ds = 0 \quad (5.6.4)$$

これを具体的に確かめる。

```
kill(all);
load("vect")$
assume(x>0);
assume(y>0);
assume(z>0);
assume(L>0);
R1:matrix([R*cos(\theta)],
  [R*sin(\theta)], [0]);
RD1:matrix([\delta], [0], [s]);
T1:matrix([0], [0], [1]);
DR1:R1-RD1;
IDRM1:col(adjoint(transpose(addcol(T1,
  DR1,matrix([1], [1], [1])))),3);
DR2:sqrt(DR1[1][1]^2+DR1[2][1]^2
  +DR1[3][1]^2);
DB1:\mu[0]/4/\pi*I*IDRM1/DR2^(3);
'integrate(DB1,s,-L,L);
B1:B=ev(%,integrate);
B2:factor(%)
limit(%,L,inf);
factor(%)
B3:trigsimp(%)
```

経路： C として、 xy 平面上で、半径： R 、中心が原点の円とする。 $x = \delta, y = 0$ を通り、 z 軸に平行な無限に長い電線に電流： I を流す。このとき、 s の電流の位置を \vec{r}' 、求める磁場の位置を \vec{r} 、電流の向きの単位ベクトル： \vec{t} とすると、

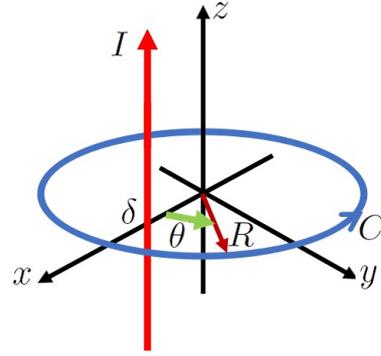


図 5.6.1: アンペールの法則

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) R \\ \sin(\theta) R \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}' = \begin{pmatrix} \delta \\ 0 \\ s \end{pmatrix}, \quad \vec{t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(5.4.5)式に上記の式を代入し、 $s = -L \rightarrow L$ の範囲で積分し、 $L \rightarrow \infty$ とすると、円の経路： C 上の磁場： \vec{B} が得られる。

$$\vec{B}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} -\frac{\mu_0 \sin(\theta) I R}{2\pi R^2 - 4\pi \delta \cos(\theta) R + 2\pi \delta^2} \\ \frac{\mu_0 \cos(\theta) I R - \mu_0 \delta I}{2\pi R^2 - 4\pi \delta \cos(\theta) R + 2\pi \delta^2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.6.5)$$

```
T3:matrix([-sin(\theta)], [cos(\theta)],
  [0]);
BT3:rhs(B3).T3;
subst([\delta=0],BT3);
integrate(%*R,\theta,0,2*\pi);
subst([\delta=0.5*R],BT3);
integrate(%*R,\theta,0,2*\pi);
subst([\delta=1.5*R],BT3);
integrate(%*R,\theta,0,2*\pi);
subst([\delta=2*R],BT3);
integrate(%*R,\theta,0,2*\pi);
```

経路： C 上では、 $\vec{t}(\vec{r})$ は、

$$\vec{t}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}$$

(5.6.5)式と上式から、

$$\begin{aligned} & \int_C \vec{B}(\vec{r}) \cdot \vec{t}(\vec{r}) ds \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\cos(\theta) (\mu_0 \cos(\theta) I R - \mu_0 \delta I)}{2\pi R^2 - 4\pi \delta \cos(\theta) R + 2\pi \delta^2} \right. \\ & \quad \left. + \frac{\mu_0 \sin(\theta)^2 I R}{2\pi R^2 - 4\pi \delta \cos(\theta) R + 2\pi \delta^2} \right) R d\theta \end{aligned} \quad (5.6.6)$$

電流が経路： C 内を通過する場合、(5.6.6)式に $\delta = 0$ 、 $\delta = 0.5R$ を代入すると、共に、

$$\int_C \overrightarrow{B}(\overrightarrow{r}) \cdot \overrightarrow{t}(\overrightarrow{r}) ds = \mu_0 I$$

電流が経路： C 内を通過しない場合、(5.6.6)式に $\delta = 1.5R$ 、 $\delta = 2R$ を代入すると、共に、

$$\int_C \overrightarrow{B}(\overrightarrow{r}) \cdot \overrightarrow{t}(\overrightarrow{r}) ds = 0$$

上記から、(5.6.3)式、(5.6.4)式が確かめられた。

経路： C を分割して、電流のまわりを含む C_1 と含まない C_2 に分けると、

$$\begin{aligned} & \int_C \overrightarrow{B}(\overrightarrow{r}) \cdot \overrightarrow{t}(\overrightarrow{r}) ds \\ &= \int_{C_1} \overrightarrow{B}(\overrightarrow{r}) \cdot \overrightarrow{t}(\overrightarrow{r}) ds + \int_{C_2} \overrightarrow{B}(\overrightarrow{r}) \cdot \overrightarrow{t}(\overrightarrow{r}) ds \\ &= \mu_0 I \end{aligned}$$

ここで、 $\int_{C_2} \overrightarrow{B}(\overrightarrow{r}) \cdot \overrightarrow{t}(\overrightarrow{r}) ds = 0$ であるから、

$$\int_{C_1} \overrightarrow{B}(\overrightarrow{r}) \cdot \overrightarrow{t}(\overrightarrow{r}) ds = \mu_0 I$$

これから、積分経路、電流回路によらないで、次式が成り立ち、経路： C を貫く多くの電流回路： I_i についても成り立つから、

$$\int_C \overrightarrow{B}(\overrightarrow{r}) \cdot \overrightarrow{t}(\overrightarrow{r}) ds = \mu_0 \sum_i I_i \quad (5.6.7)$$

上式を電流密度： $i(\overrightarrow{r}')$ で表すと、

$$\int_C \overrightarrow{B}(\overrightarrow{r}) \cdot \overrightarrow{t}(\overrightarrow{r}) ds = \mu_0 \iint_S i(\overrightarrow{r}') \cdot \overrightarrow{n}(\overrightarrow{r}') dS \quad (5.6.8)$$

下記のストークスの定理¹から、

$$\int_C \overrightarrow{A} \cdot d\overrightarrow{r} = \iint_S (\nabla \times \overrightarrow{A}) \cdot \overrightarrow{n} dS \quad (5.6.9)$$

(5.6.8)式に上式を適用し、

$$\begin{aligned} & \int_C \overrightarrow{B}(\overrightarrow{r}) \cdot \overrightarrow{t}(\overrightarrow{r}) ds \\ &= \iint_S (\nabla \times \overrightarrow{B}(\overrightarrow{r})) \cdot \overrightarrow{n}(\overrightarrow{r}') dS \\ &= \mu_0 \iint_S i(\overrightarrow{r}') \cdot \overrightarrow{n}(\overrightarrow{r}') dS \end{aligned} \quad (5.6.10)$$

上式から、次式が得られ、(5.5.18)式、(5.5.20)式と同じ結果が得られた。

$$\nabla \times \overrightarrow{B}(\overrightarrow{r}) = \mu_0 i(\overrightarrow{r}') \quad (5.6.11)$$

¹溝口純敏：Maxima を使った物理数学基礎演習ノート、<http://www9.plala.or.jp/prac-maxima/> 第4章 ベクトルと行列、4.4.3 ストークスの定理

5.7 例題

例題 5.7.1 直線回路による磁束密度

z 軸上の直線回路に定常電流: I を流したときの x, y における磁束密度: B を求める。

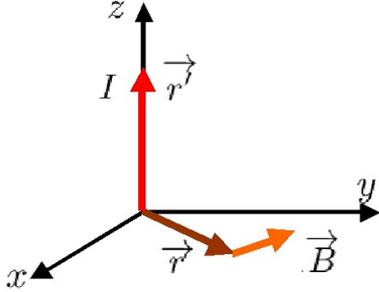


図 5.7.1: 直線回路による磁束密度

```
kill(all);
load("vect")$
assume(x>0);
assume(y>0);
assume(z>0);
assume(L>0);
R1:matrix([x],[y],[z]);
RD1:matrix([0],[0],[s]);
T1:matrix([0],[0],[1]);
DR1:R1-RD1;
IDRM1:col(adjoint(transpose(addcol(T1,
  DR1,matrix([1],[1],[1])))),3);
DR2:sqrt(DR1[1][1]^2+DR1[2][1]^2
  +DR1[3][1]^2);
DB1:\mu[0]/4/%pi*I*IDRM1/DR2^(3);
'integrate(DB1,s,-L,L);
B1:B=ev(%,integrate);
B2:factor(%)
limit(%,L,inf);
factor(%)
```

ビオ・サバールの法則の (5.4.4) 式から、

$$\Delta \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \vec{t} \times (\vec{r} - \vec{r}^j)}{|\vec{r} - \vec{r}^j|^3} ds \quad (5.7.1)$$

ここで、

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \vec{r}^j = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ s \end{pmatrix}, \quad \vec{t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r} - \vec{r}^j = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z - s \end{pmatrix}$$

$$\vec{t} \times (\vec{r} - \vec{r}^j) = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{r} - \vec{r}^j| = \sqrt{(z-s)^2 + y^2 + x^2}$$

(5.7.1) 式に上記の関係式を代入すると、

$$\Delta \vec{B} = \begin{pmatrix} -\frac{\mu_0 y I}{4\pi((z-s)^2 + y^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{\mu_0 x I}{4\pi((z-s)^2 + y^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \\ 0 \end{pmatrix} ds$$

上式を z 軸上を s について積分し、 $L \rightarrow \infty$ とすると、

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \int_{-L}^L \begin{pmatrix} -\frac{\mu_0 y I}{4\pi((z-s)^2 + y^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{\mu_0 x I}{4\pi((z-s)^2 + y^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \\ 0 \end{pmatrix} ds \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{\mu_0 y I}{2\pi(y^2 + x^2)} \\ \frac{\mu_0 x I}{2\pi(y^2 + x^2)} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{at } L \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (5.7.2)$$

```

assume(z>0);
assume(L>0);
DA1:\mu[0]/4/%pi*I*T1/DR2;
'integrate(DA1,s,-L,L);
ev(%,integrate);
AS0:factor(%);
transpose(%);
curl(%[1]);
express(%);
ev(%,diff);
transpose(%);
limit(%,L,inf);
factor(%);

```

ベクトル・ポテンシャルの (5.5.7) 式から、

$$\overrightarrow{\Delta A(\vec{r})} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i(\vec{r}^j)}{|\vec{r} - \vec{r}^j|} \quad (5.7.3)$$

ここで、上式に $\vec{r}, \vec{r}^j, \vec{e}^j$ の関係式を代入すると、

$$\overrightarrow{\Delta A(\vec{r})} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\mu_0 I}{4\pi \sqrt{(z-s)^2 + y^2 + x^2}} \end{pmatrix}$$

(5.5.8) 式から、上式を電流: I の z 軸上、 $s = -L \rightarrow L$ の範囲で積分し、 $L \rightarrow \infty$ とすると、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A(\vec{r})} &= \int_{-L}^L \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\mu_0 I}{4\pi \sqrt{(z-s)^2 + y^2 + x^2}} \end{pmatrix} ds \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\mu_0 I \left(\operatorname{asinh}\left(\frac{L+z}{\sqrt{y^2+x^2}}\right) + \operatorname{asinh}\left(\frac{L-z}{\sqrt{y^2+x^2}}\right) \right)}{4\pi} \end{pmatrix} \quad \text{at } L \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (5.7.4)$$

(5.5.9) 式から、上式の curl から磁束密度: B が得られ、(5.7.2) 式と同じ結果が得られた。

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \nabla \times \overrightarrow{A(\vec{r})} \\ &= \begin{pmatrix} \mu_0 I \left(-\frac{y(L+z)}{(y^2+x^2)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{(L+z)^2}{y^2+x^2} + 1}} - \frac{y(L-z)}{(y^2+x^2)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{(L-z)^2}{y^2+x^2} + 1}} \right) \\ \mu_0 I \left(-\frac{x(L+z)}{(y^2+x^2)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{(L+z)^2}{y^2+x^2} + 1}} - \frac{x(L-z)}{(y^2+x^2)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{(L-z)^2}{y^2+x^2} + 1}} \right) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{\mu_0 y I}{2\pi(y^2+x^2)} \\ \frac{\mu_0 x I}{2\pi(y^2+x^2)} \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.7.5)$$

例題 5.7.2 円形回路の中心線上の磁束密度

xy 平面上の半径： A の円形回路に定常電流： I を流したとき、円の中心を通り回路面に垂直な z 軸上における磁束密度： B を求める。

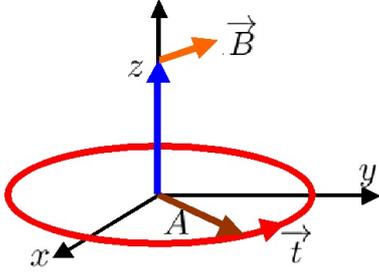


図 5.7.2: 円形回路の中心線上の磁束密度

```
kill(all);
load("vect")$
R1:matrix([0],[0],[z]);
RD1:matrix([A*cos(\theta)],
[A*sin(\theta)],[0]);
T1:matrix([-sin(\theta)],[cos(\theta)],
[0]);
DR1:R1-RD1;
IDRM1:col(adjoint(transpose(addcol(T1,
DR1,matrix([1],[1],[1]))),3);
sqrt(DR1[1][1]^2+DR1[2][1]^2+DR1[3][1]^2);
DR2:trigsimp(%);
\mu[0]/4/%pi*I*IDRM1/DR2^(3);
DB1:trigsimp(%);
'integrate(DB1*A,\theta,0,2*pi);
B1:B=ev(%,integrate);
B2:factor(%);
assume(C>0);
'integrate(rhs(B2)[3][1],z,-C,C);
ev(%,integrate);
limit(%,C,inf);
```

(5.4.4) 式から、円形回路の微小回路： ds による磁場の強さ (磁束密度)： $\Delta \vec{B}$ は、

$$\Delta \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \vec{t} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} ds \quad (5.7.6)$$

ここで、

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}, \quad \vec{r}' = \begin{pmatrix} \cos(\theta) A \\ \sin(\theta) A \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{t} = \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r} - \vec{r}' = \begin{pmatrix} -\cos(\theta) A \\ -\sin(\theta) A \\ z \end{pmatrix}$$

$$\vec{t} \times (\vec{r} - \vec{r}') = \begin{pmatrix} \cos(\theta) z \\ \sin(\theta) z \\ \sin(\theta)^2 A + \cos(\theta)^2 A \end{pmatrix}$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{A^2 + z^2}$$

(5.7.6) 式に上記の関係式を代入すると、

$$\Delta \vec{B} = \begin{pmatrix} \frac{\mu_0 \cos(\theta) I z}{\sqrt{z^2 + A^2} (4\pi z^2 + 4\pi A^2)} \\ \frac{\mu_0 \sin(\theta) I z}{\sqrt{z^2 + A^2} (4\pi z^2 + 4\pi A^2)} \\ \frac{\mu_0 A I}{\sqrt{z^2 + A^2} (4\pi z^2 + 4\pi A^2)} \end{pmatrix} ds$$

上式で円周上の積分を行うと、

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \frac{\mu_0 \cos(\theta) A I z}{\sqrt{z^2 + A^2} (4\pi z^2 + 4\pi A^2)} \\ \frac{\mu_0 \sin(\theta) A I z}{\sqrt{z^2 + A^2} (4\pi z^2 + 4\pi A^2)} \\ \frac{\mu_0 A^2 I}{\sqrt{z^2 + A^2} (4\pi z^2 + 4\pi A^2)} \end{pmatrix} d\theta \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\mu_0 A^2 I}{2(z^2 + A^2)^{\frac{3}{2}}} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.7.7)$$

アンペールの法則の (5.6.7) 式から、

$$\int_C \overrightarrow{B}(\vec{r}) \cdot \overrightarrow{t}(\vec{r}) ds = \mu_0 \sum_i I_i$$

上式に (5.7.7) 式を代入し、 z 軸上の $z = -C \rightarrow C$ で積分し、 $C \rightarrow \infty$ とすると下記となり、アンペールの法則が立証された。

$$\begin{aligned} \lim_{C \rightarrow \infty} \frac{\mu_0 A^2 I}{2} \int_{-C}^C \frac{1}{(z^2 + A^2)^{\frac{3}{2}}} dz \\ = \lim_{C \rightarrow \infty} \frac{\mu_0 A^2 C \sqrt{C^2 + A^2} I}{A^2 C^2 + A^4} = \mu_0 I \end{aligned} \quad (5.7.8)$$

例題 5.7.3 円形回路の遠方の磁束密度 (磁気双極子)

図 5.7.2 と同じ座標系で、 xy 平面上の半径： A の円形回路に定常電流： I を流したとき、回路より十分離れた点： x, y, z における磁束密度： B を求める。

```
kill(all);
load("vect")$
R1:matrix([x],[y],[z]);
RD1:matrix([A*cos(\theta)],
[A*sin(\theta)],[0]);
T1:matrix([-sin(\theta)],[cos(\theta)],
[0]);
DR1:R1-RD1;
IDRM1:col(adjoint(transpose(addcol(T1,
DR1,matrix([1],[1],[1])))),3);
DR2:sqrt(DR1[1][1]^2+DR1[2][1]^2
+DR1[3][1]^2);
DR21:1/%^3;
taylor(%,A,0,3);
subst([A^2=0,A^3=0],%);
DR3:factor(%);
DB1:\mu[0]/4/%pi*I*IDRM1*DR3;
'integrate(DB1*A,\theta,0,2*%pi);
B1:B=ev(%,integrate);
B2:factor(%);
```

ビオ・サバールの法則の (5.4.4) 式から、

$$\Delta \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \vec{t} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} ds \quad (5.7.9)$$

(5.7.9) 式に上記の関係式を代入すると、

$$\Delta \vec{B} = \left(\begin{array}{c} \frac{\mu_0 \cos(\theta) z (3 \sin(\theta) y A + 3 \cos(\theta) x A + z^2 + y^2 + x^2) I}{4 \pi (z^2 + y^2 + x^2)^{\frac{5}{2}}} \\ \frac{\mu_0 \sin(\theta) z (3 \sin(\theta) y A + 3 \cos(\theta) x A + z^2 + y^2 + x^2) I}{4 \pi (z^2 + y^2 + x^2)^{\frac{5}{2}}} \\ \frac{\mu_0 (3 \sin(\theta) y A + 3 \cos(\theta) x A + z^2 + y^2 + x^2) (-\sin(\theta) (y - \sin(\theta) A) - \cos(\theta) (x - \cos(\theta) A)) I}{4 \pi (z^2 + y^2 + x^2)^{\frac{5}{2}}} \end{array} \right)$$

上式を円周上について積分を行うと、

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \int_0^{2\pi} \left(\begin{array}{c} \frac{\mu_0 \cos(\theta) z A (3 \sin(\theta) y A + 3 \cos(\theta) x A + z^2 + y^2 + x^2) I}{4 \pi (z^2 + y^2 + x^2)^{\frac{5}{2}}} \\ \frac{\mu_0 \sin(\theta) z A (3 \sin(\theta) y A + 3 \cos(\theta) x A + z^2 + y^2 + x^2) I}{4 \pi (z^2 + y^2 + x^2)^{\frac{5}{2}}} \\ \frac{\mu_0 A (3 \sin(\theta) y A + 3 \cos(\theta) x A + z^2 + y^2 + x^2) (-\sin(\theta) (y - \sin(\theta) A) - \cos(\theta) (x - \cos(\theta) A)) I}{4 \pi (z^2 + y^2 + x^2)^{\frac{5}{2}}} \end{array} \right) d\theta \\ &= \left(\begin{array}{c} \frac{3 \mu_0 x z A^2 I}{4 (z^2 + y^2 + x^2)^{\frac{5}{2}}} \\ \frac{3 \mu_0 y z A^2 I}{4 (z^2 + y^2 + x^2)^{\frac{5}{2}}} \\ \frac{\mu_0 (2 z^2 - y^2 - x^2) A^2 I}{4 (z^2 + y^2 + x^2)^{\frac{5}{2}}} \end{array} \right) \end{aligned} \quad (5.7.10)$$

ここで、

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \vec{r}' = \begin{pmatrix} \cos(\theta) A \\ \sin(\theta) A \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{t} = \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r} - \vec{r}' = \begin{pmatrix} x - \cos(\theta) A \\ y - \sin(\theta) A \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \vec{t} \times (\vec{r} - \vec{r}') &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) z \\ \sin(\theta) z \\ -\sin(\theta) (y - \sin(\theta) A) - \cos(\theta) (x - \cos(\theta) A) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) z \\ \sin(\theta) z \\ -\sin(\theta) (y - \sin(\theta) A) - \cos(\theta) (x - \cos(\theta) A) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{(y - \sin(\theta) A)^2 + (x - \cos(\theta) A)^2 + z^2}$$

$x, y, z \gg A$ とすると、次式の Taylor 展開で A の一乗項までを残すと、

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\left((y - \sin(\theta) A)^2 + (x - \cos(\theta) A)^2 + z^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \\ &\approx \frac{3 \sin(\theta) y A + 3 \cos(\theta) x A + z^2 + y^2 + x^2}{(z^2 + y^2 + x^2)^{\frac{5}{2}}} \end{aligned}$$

```

1/DR2;
taylor(%,A,0,3);
subst([A^2=0,A^3=0],%);
DR31:factor(%);
DA1:\mu[0]/4/%pi*I*T1*DR31;
'integrate(%*A,\theta,0,2*%pi);
A1:ev(%,integrate);
curl(transpose(A1)[1]);
express(%);
ev(%,diff);
B3:B=transpose(%);
B4:factor(%);
B2-B4;
factor(%);
assume(r>0);
N1:matrix([0],[0],[1]);
B5:subst([A^2=S/%pi,z^2=r^2-x^2-y^2],B3);
B6:B=-\mu[0]*I*S/(4*%pi*r^3)*(N1
-3*(N1.R1)*R1/r^2);

```

```

B5-B6;
factor(%);
subst([z^2=r^2-x^2-y^2],%);

```

次に、ベクトル・ポテンシャルを用いて磁束密度： \vec{B} を求める。ベクトル・ポテンシャルの (5.5.7) 式から、

$$\Delta \overrightarrow{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (5.7.11)$$

$x, y, z \gg A$ とすると、次式の Taylor 展開で A の一乗項までを残すと、

$$\frac{1}{\sqrt{(y - \sin(\theta) A)^2 + (x - \cos(\theta) A)^2 + z^2}} \approx \frac{\sin(\theta) y A + \cos(\theta) x A + z^2 + y^2 + x^2}{(z^2 + y^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

ここで、(5.7.11) 式に上式と $\vec{r}, \vec{r}', \vec{t}$ の関係式を代入すると、

$$\Delta \overrightarrow{A}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} -\frac{\mu_0 \sin(\theta) (\sin(\theta) y A + \cos(\theta) x A + z^2 + y^2 + x^2) I}{4\pi (z^2 + y^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{\mu_0 \cos(\theta) (\sin(\theta) y A + \cos(\theta) x A + z^2 + y^2 + x^2) I}{4\pi (z^2 + y^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

上式を円周上について積分を行うと、

$$\overrightarrow{A}(\vec{r}) = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\frac{\mu_0 \sin(\theta) A (\sin(\theta) y A + \cos(\theta) x A + z^2 + y^2 + x^2) I}{4\pi (z^2 + y^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{\mu_0 \cos(\theta) A (\sin(\theta) y A + \cos(\theta) x A + z^2 + y^2 + x^2) I}{4\pi (z^2 + y^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \\ 0 \end{pmatrix} d\theta = \begin{pmatrix} -\frac{\mu_0 y A^2 I}{4(z^2 + y^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{\mu_0 x A^2 I}{4(z^2 + y^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

上式の curl から磁束密度： B は下記となり、(5.7.10) 式と同じ結果となる。

$$\vec{B} = \nabla \times \overrightarrow{A}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \frac{3\mu_0 x z A^2 I}{4(z^2 + y^2 + x^2)^{\frac{5}{2}}} \\ \frac{3\mu_0 y z A^2 I}{4(z^2 + y^2 + x^2)^{\frac{5}{2}}} \\ \frac{\mu_0 A^2 I}{2(z^2 + y^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3\mu_0 y^2 A^2 I}{4(z^2 + y^2 + x^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{3\mu_0 x^2 A^2 I}{4(z^2 + y^2 + x^2)^{\frac{5}{2}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3\mu_0 x z A^2 I}{4(z^2 + y^2 + x^2)^{\frac{5}{2}}} \\ \frac{3\mu_0 y z A^2 I}{4(z^2 + y^2 + x^2)^{\frac{5}{2}}} \\ \frac{\mu_0 (2z^2 - y^2 - x^2) A^2 I}{4(z^2 + y^2 + x^2)^{\frac{5}{2}}} \end{pmatrix} \quad (5.7.12)$$

下記として、

$$S = \pi A^2, \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(5.7.12) 式をベクトル表記すると、

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} \frac{3\mu_0 x z I S}{4\pi r^5} \\ \frac{3\mu_0 y z I S}{4\pi r^5} \\ -\frac{\mu_0 (1 - \frac{3z^2}{r^2}) I S}{4\pi r^3} \end{pmatrix} = -\frac{\mu_0 I S}{4\pi r^3} \left(\vec{n} - \frac{3(\vec{n} \cdot \vec{r})}{r^2} \vec{r} \right) \quad (5.7.13)$$

例題 5.7.4 一様な磁束密度： B 中の円形回路に作用する力

xz 平面内の一様な磁束密度： B 中の xy 平面上の半径： A の円形回路に定常電流： I を流したときの円回路に作用する力を求める。

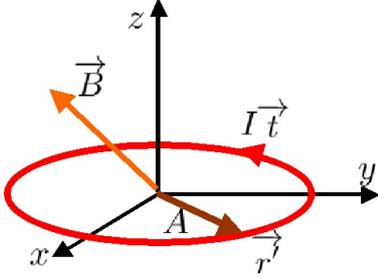


図 5.7.3: 一様な磁束密度： B 中の円形回路に作用する力

```
kill(all);
load("vect")$
B1:matrix([B[x]], [0], [B[z]]);
R1:matrix([A*cos(\theta)],
[A*sin(\theta)], [0]);
T1:matrix([-sin(\theta)], [cos(\theta)],
[0]);
DF1:col(adjoint(transpose(addcol(T1,B1,
matrix([1], [1], [1])))),3);
DF2:dF=I*DF1*A*d*\theta;
'integrate(rhs(DF2)/d/\theta,\theta,
0,2*pi);
F1:F=ev(%,integrate);
DN1:dN=col(adjoint(transpose(addcol(R1,
rhs(DF2),matrix([1], [1], [1])))),3);
'integrate(rhs(DN1)/d/\theta,\theta,
0,2*pi);
N1:N=ev(%,integrate);
```

電線に流れる電流： I 、電流の向きの単位ベクトル： \vec{t} 、磁場のベクトル： \vec{B} とし、電線： ds に作用する力： ΔF は (5.2.1) 式から、

$$\Delta \vec{F} = I (\vec{t} \times \vec{B}) ds \quad (5.7.14)$$

ここで、

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} B_x \\ 0 \\ B_z \end{pmatrix}, \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) A \\ \sin(\theta) A \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{t} = \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{t} \times \vec{B} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) B_z \\ \sin(\theta) B_z \\ -\cos(\theta) B_x \end{pmatrix}$$

(5.7.14) 式に上記の関係式を代入すると、

$$\Delta \vec{F} = \begin{pmatrix} d\theta \cos(\theta) B_z A I \\ d\theta \sin(\theta) B_z A I \\ -d\theta \cos(\theta) B_x A I \end{pmatrix}$$

上式を積分し、円形回路に作用する力： F は、

$$\vec{F} = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos(\theta) B_z A I \\ \sin(\theta) B_z A I \\ -\cos(\theta) B_x A I \end{pmatrix} d\theta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ΔF による原点まわりのモーメント： ΔN は、

$$\Delta \vec{N} = \vec{r} \times \Delta \vec{F} = \begin{pmatrix} -d\theta \cos(\theta) \sin(\theta) B_x A^2 I \\ d\theta \cos(\theta)^2 B_x A^2 I \\ 0 \end{pmatrix}$$

上式を積分し、原点まわりのモーメント： \vec{N} は、

$$\vec{N} = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\cos(\theta) \sin(\theta) B_x A^2 I \\ \cos(\theta)^2 B_x A^2 I \\ 0 \end{pmatrix} d\theta = \begin{pmatrix} 0 \\ \pi B_x A^2 I \\ 0 \end{pmatrix}$$

例題 5.7.5 電荷をもった円板の回転

xy 平面上の半径: A の円板に面密度: σ の電荷が一樣に分布している。円板が角速度: ω で回転した時の中心線上の磁束密度: B を求める。

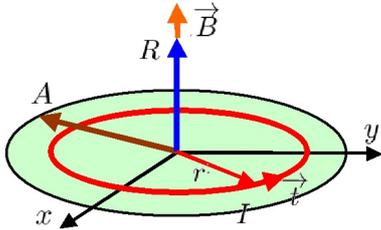


図 5.7.4: 電荷をもった円板の回転

上式を $r = 0 \rightarrow A$ で積分すると、 z 軸上の R における磁束密度: B は、

$$B = \frac{\mu_0 \omega \sigma}{2} \int_0^A \frac{r^3}{(R^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} dr$$

$$= \frac{\mu_0 \omega \sigma}{2} \left(\frac{2R^2 + A^2}{\sqrt{R^2 + A^2}} - 2R \right)$$

```
kill(all);
load("vect")$
assume(R>0);
assume(A>0);
B1:B=(\mu[0]*A^2*I)/(2*(R^2+A^2)^(3/2));
Q1:Q=2*\pi*r*dr*\sigma;
V1:V=r*\omega;
I1:I=Q/V/(2*\pi*r);
I2:subst([V1,Q1],I1);
B2:dB=subst([A=r,I2],rhs(B1));
B='integrate(rhs(B2)/dr,r,0,A);
B3:ev(%,integrate);
dI=rhs(I1);
subst([V1,Q1],%);
I='integrate(rhs(%)/dr,r,0,A);
ev(%,integrate);
```

「5.7.2 円形回路の中心線上の磁束密度」から、半径: A の円形回路に定常電流: I を流したときの z 軸上の R における磁束密度: B は (5.7.7) 式で $z \rightarrow R$ として、

$$B = \frac{\mu_0 A^2 I}{2(R^2 + A^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (5.7.15)$$

円板上の半径: r 、幅: dr における電荷量: Q は、

$$Q = 2\pi dr r \sigma$$

円板上の半径: r の速度: V は、

$$V = \omega r$$

円板上の半径: r 、幅: dr における電流: I は、

$$I = \frac{QV}{2\pi r} = dr \omega r \sigma$$

(5.7.15) 式に円板上の半径: r の上記の関係式を代入し、

$$\Delta B = \frac{\mu_0 dr \omega r^3 \sigma}{2(R^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}$$

例題 5.7.6 共通の中心軸を持つ二つの円形回路に作用する力

共通の中心軸を持ち、中心間距離： R の二つの円形回路： C_1, C_2 、半径： A_1, A_2 に定常電流： I_1, I_2 を流したときの円形回路間に作用する力： \vec{F} を求める。ここで、 $R \gg A_1, A_2$ とする。

```
kill(all);
load("vect")$
T1:matrix([-sin(\phi)], [cos(\phi)], [0]);
B1:B=matrix([(3*mu[0]*x*z*A^2*I)/(4*(z^2+y^2+x^2)^(5/2))], [(3*mu[0]*y*z*A^2*I)/(4*(z^2+y^2+x^2)^(5/2))], [(mu[0]*(2*z^2-y^2-x^2)*A^2*I)/(4*(z^2+y^2+x^2)^(5/2))]);
B2:subst([z=R,A=A[1],I=I[1],x=A[2]*cos(\phi),y=A[2]*sin(\phi)],%);
col(adjoint(transpose(addcol(T1,rhs(%),matrix([1],[1],[1]))),3);
dF=I[2]*%*A[2]*d*\phi;
trigsimp(%);
```

```
F='integrate(rhs(%)/d/\phi,\phi,0,2*\pi);
ev(% ,integrate);
factor(%);
```

円形回路の遠方の磁束密度： \vec{B} は、「5.7.3 円形回路の遠方の磁束密度」、(5.7.10) 式から、

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} \frac{3\mu_0 x z A^2 I}{4(z^2+y^2+x^2)^{\frac{5}{2}}} \\ \frac{3\mu_0 y z A^2 I}{4(z^2+y^2+x^2)^{\frac{5}{2}}} \\ \frac{\mu_0(2z^2-y^2-x^2)A^2 I}{4(z^2+y^2+x^2)^{\frac{5}{2}}} \end{pmatrix}$$

円形回路： C_1 により円形回路： C_2 上の角度： ϕ における磁束密度： \vec{B}_2 は、上式に $A = A_1, I = I_1, z = R, x = A_2 \cos(\phi), y = A_2 \sin(\phi)$ を代入し、

$$\vec{B}_2 = \begin{pmatrix} \frac{3\mu_0 A_1^2 I_1 A_2 \cos(\phi) R}{4(R^2+A_2^2 \sin^2(\phi)+A_2^2 \cos^2(\phi))^{\frac{5}{2}}} \\ \frac{3\mu_0 A_1^2 I_1 A_2 \sin(\phi) R}{4(R^2+A_2^2 \sin^2(\phi)+A_2^2 \cos^2(\phi))^{\frac{5}{2}}} \\ \frac{\mu_0 A_1^2 I_1 (2R^2-A_2^2 \sin^2(\phi)-A_2^2 \cos^2(\phi))}{4(R^2+A_2^2 \sin^2(\phi)+A_2^2 \cos^2(\phi))^{\frac{5}{2}}} \end{pmatrix}$$

円形回路： C_2 の接線方向： \vec{t} は、

$$\vec{t} = \begin{pmatrix} -\sin(\phi) \\ \cos(\phi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

円形回路： C_2 の要素： $A_2 d\phi$ に作用する力： $\Delta \vec{F}$ は、

$$\begin{aligned} \Delta \vec{F} &= I_2 \vec{t} \times \vec{B}_2 A_2 d\phi \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2\mu_0 A_1^2 I_1 A_2 I_2 d\phi \cos(\phi) R^2 - \mu_0 A_1^2 I_1 A_2^3 I_2 d\phi \cos(\phi)}{\sqrt{R^2+A_2^2}(4R^4+8A_2^2 R^2+4A_2^4)} \\ \frac{2\mu_0 A_1^2 I_1 A_2 I_2 d\phi \sin(\phi) R^2 - \mu_0 A_1^2 I_1 A_2^3 I_2 d\phi \sin(\phi)}{\sqrt{R^2+A_2^2}(4R^4+8A_2^2 R^2+4A_2^4)} \\ -\frac{3\mu_0 A_1^2 I_1 A_2^2 I_2 d\phi R \sqrt{R^2+A_2^2}}{4R^6+12A_2^2 R^4+12A_2^4 R^2+4A_2^6} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

上式を積分し、円形回路に作用する力： \vec{F} は、

$$\vec{F} = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \frac{2\mu_0 A_1^2 I_1 A_2 I_2 d\phi \cos(\phi) R^2 - \mu_0 A_1^2 I_1 A_2^3 I_2 d\phi \cos(\phi)}{\sqrt{R^2+A_2^2}(4R^4+8A_2^2 R^2+4A_2^4)} \\ \frac{2\mu_0 A_1^2 I_1 A_2 I_2 d\phi \sin(\phi) R^2 - \mu_0 A_1^2 I_1 A_2^3 I_2 d\phi \sin(\phi)}{\sqrt{R^2+A_2^2}(4R^4+8A_2^2 R^2+4A_2^4)} \\ -\frac{3\mu_0 A_1^2 I_1 A_2^2 I_2 R \sqrt{R^2+A_2^2}}{4R^6+12A_2^2 R^4+12A_2^4 R^2+4A_2^6} \end{pmatrix} d\phi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{3\pi\mu_0 A_1^2 I_1 A_2^2 I_2 R}{2(R^2+A_2^2)^{\frac{5}{2}}} \end{pmatrix}$$

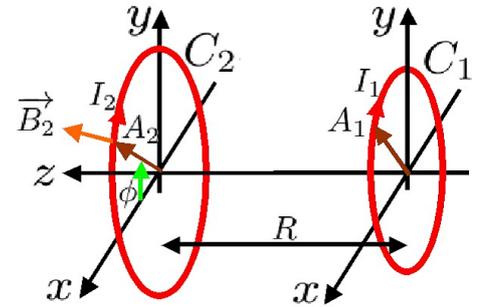


図 5.7.5: 二つの円形回路に作用する力

例題 5.7.7 サイクロトロン

磁束密度： \vec{B} の磁場の中に、それに垂直な面内に電荷： Q 、質量： M の粒子を速度： V_0 で打ち出す。このときの粒子の運動を求める。

```
kill(all);
load("vect")$
assume(M>0);
assume(B>0);
assume(Q>0);
assume(V[0]>0);
B1:matrix([0],[0],[B]);
V1:matrix([diff(x(t),t,1)],
          [diff(y(t),t,1)],[0]);
F1:Q*col(adjoint(transpose(addcol(V1,B1,
matrix([1],[1],[1])))),3);
EQX1:M*diff(x(t),t,2)=F1[1][1];
EQY1:M*diff(y(t),t,2)=F1[2][1];
atvalue(x(t),t=0,0);
atvalue(y(t),t=0,0);
atvalue(diff(x(t),t,1),t=0,0);
atvalue(diff(y(t),t,1),t=0,V[0]);
XY1:desolve([EQX1,EQY1],[x(t),y(t)]);
X1:XY1[1];
Y1:XY1[2];
X2:-X1+first(rhs(X1));
X2^2+Y1^2;
lhs(%)=trigsimp(rhs(%));
R=sqrt(rhs(%));
\omega=BQ/M;
```

一様な磁束密度： \vec{B} を z 軸方向とすると、粒子運動は xy 平面となり、粒子の位置： $x(t), y(t)$ とすると、磁束密度： \vec{B} と粒子速度： \vec{v} は、

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt}x(t) \\ \frac{d}{dt}y(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

粒子に作用する力： \vec{F} は (5.3.1) 式から、

$$\vec{F} = Q \left(\vec{v} \times \vec{B} \right) = \begin{pmatrix} \left(\frac{d}{dt}y(t) \right) BQ \\ - \left(\frac{d}{dt}x(t) \right) BQ \\ 0 \end{pmatrix}$$

上式から粒子の運動方程式は、

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2}{dt^2}x(t) \right) M &= \left(\frac{d}{dt}y(t) \right) BQ \\ \left(\frac{d^2}{dt^2}y(t) \right) M &= - \left(\frac{d}{dt}x(t) \right) BQ \end{aligned}$$

上記微分方程式を $t=0$ で $x(t)=0, y(t)=0, \frac{d}{dt}x(t)=0, \frac{d}{dt}y(t)=V_0$ の初期条件で解くと、

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{V_0 M}{BQ} - \frac{V_0 M \cos\left(\frac{tBQ}{M}\right)}{BQ} \\ y(t) &= \frac{V_0 M \sin\left(\frac{tBQ}{M}\right)}{BQ} \end{aligned}$$

上式を変形し、

$$\left(\frac{V_0 M}{BQ} - x(t) \right)^2 + y(t)^2 = \frac{V_0^2 M^2}{B^2 Q^2}$$

上記から、粒子は円運動をし、その半径： R 、円周波数： ω は、

$$R = \frac{V_0 M}{BQ}, \quad \omega = \frac{BQ}{M}$$

例題 5.7.8 サイクロイド

一様な電場： \vec{E} が y 軸方向、磁束密度： \vec{B} が z 軸方向に作用している中に電荷： Q 、質量： M の粒子を置いたときの粒子の運動を求める。ここで粒子は $t=0$ で静止していたとする。

```
kill(all);
load("vect")$
assume(M>0);
assume(B>0);
assume(Q>0);
assume(E>0);
E1:matrix([0],[E],[0]);
B1:matrix([0],[0],[B]);
V1:matrix([diff(x(t),t,1)],[diff(y(t),t,1)],[diff(z(t),t,1)]);
F1:Q*E1;
F2:Q*col(adjoint(transpose(addcol(V1,B1,matrix([1],[1],[1])))),3);
EQX1:M*diff(x(t),t,2)=F1[1][1]+F2[1][1];
EQY1:M*diff(y(t),t,2)=F1[2][1]+F2[2][1];
atvalue(x(t),t=0,0);
atvalue(y(t),t=0,0);
atvalue(diff(x(t),t,1),t=0,0);
atvalue(diff(y(t),t,1),t=0,0);
XY1:desolve([EQX1,EQY1],[x(t),y(t)]);
XY2:subst([E=1,B=1,Q=1,M=1],XY1);
plot2d([parametric,rhs(XY2[1]),rhs(XY2[2])],[t,0,20],[nticks,200],[style,[lines,5,2]],[xlabel,"x"],[ylabel,"y"]);
```

粒子の位置： $x(t), y(t), z(t)$ とすると、電場： \vec{E} 、磁束密度： \vec{B} と粒子速度： \vec{v} は、

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ E \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt}x(t) \\ \frac{d}{dt}y(t) \\ \frac{d}{dt}z(t) \end{pmatrix}$$

粒子に作用する力： \vec{F} は (5.3.3) 式から、

$$\begin{aligned} \vec{F} &= Q\vec{E} + Q(\vec{v} \times \vec{B}) \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ EQ \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \left(\frac{d}{dt}y(t)\right)BQ \\ -\left(\frac{d}{dt}x(t)\right)BQ \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

上式から、粒子の運動は xy 平面となり、運動方程式は、

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2}{dt^2}x(t)\right)M &= \left(\frac{d}{dt}y(t)\right)BQ \\ \left(\frac{d^2}{dt^2}y(t)\right)M &= EQ - \left(\frac{d}{dt}x(t)\right)BQ \end{aligned}$$

上記微分方程式を $t=0$ で $x(t)=0, y(t)=0, \frac{d}{dt}x(t)=0, \frac{d}{dt}y(t)=0$ の初期条件で解くと、

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{tE}{B} - \frac{EM \sin\left(\frac{tBQ}{M}\right)}{B^2Q} \\ y(t) &= \frac{EM}{B^2Q} - \frac{EM \cos\left(\frac{tBQ}{M}\right)}{B^2Q} \end{aligned}$$

上記結果を図示すると、

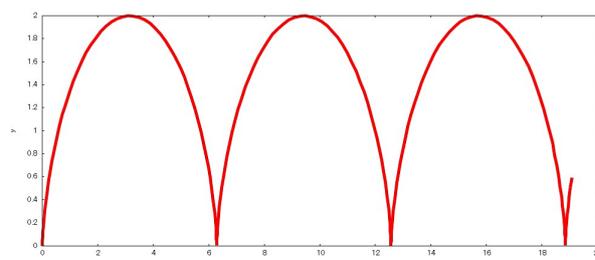


図 5.7.6: 粒子の運動

例題 5.7.9 平行回路に作用する力

長さ: L の二本の直線回路: C_1, C_2 が A の間隔で平行に置かれ、電流: I_1, I_2 を流したとき、回路間に作用する力を求める。

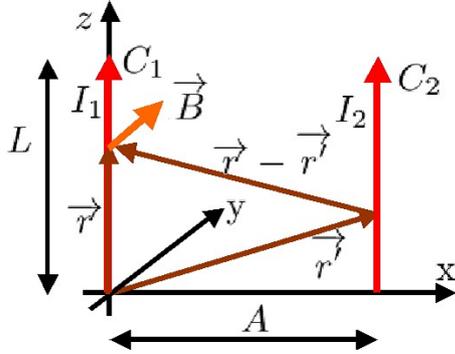


図 5.7.7: 平行回路に作用する力

```
kill(all);
load("vect")$
assume(A>0);
assume(L>0);
R1:matrix([0],[0],[r]);
RD1:matrix([A],[0],[z]);
T1:matrix([0],[0],[1]);
DR1:R1-RD1;
IDRM1:col(adjoint(transpose(addcol(T1,
DR1,matrix([1],[1],[1])))),3);
DR2:sqrt(DR1[1][1]^2+DR1[2][1]^2
+DR1[3][1]^2);
DB1:\mu[0]/4/%pi*I[2]*IDRM1/DR2^(3);
'integrate(DB1,z,0,L);
B1:B(r)=ev(%,integrate);
col(adjoint(transpose(addcol(T1,rhs(B1),
matrix([1],[1],[1])))),3);
F='integrate(%*I[1],r,0,L);
ev(%,integrate);
F1:factor(%);
subst([A^2=0,L=L+A],F1);
%/L;
```

回路: C_1 上の点: \vec{r}' 、回路: C_2 上の点: \vec{r} とする。

$$\vec{r}' = \begin{pmatrix} A \\ 0 \\ z \end{pmatrix}, \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}, \quad \vec{t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r} - \vec{r}' = \begin{pmatrix} -A \\ 0 \\ r-z \end{pmatrix}$$

(5.4.4) 式から、電流: $I ds$ による磁束密度: $\Delta \vec{B}$ は、

$$\Delta \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \vec{t} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} ds \quad (5.7.16)$$

ここで、上記の関係式から、

$$\vec{t} \times (\vec{r} - \vec{r}') = \begin{pmatrix} 0 \\ -A \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{A^2 + (r-z)^2}$$

(5.7.16) 式に上記の関係式を代入し、回路: C_2 の dz による回路: C_1 上の \vec{r} における磁束密度: $\Delta \vec{B}$ は、

$$\Delta \vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\mu_0 I_2 A}{4\pi (A^2 + (r-z)^2)^{\frac{3}{2}}} \\ 0 \end{pmatrix} dz$$

上式を積分し、回路: C_2 による回路: C_1 上の \vec{r} における磁束密度: \vec{B} は、

$$\vec{B} = \int_0^L \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\mu_0 I_2 A}{4\pi (A^2 + (r-z)^2)^{\frac{3}{2}}} \\ 0 \end{pmatrix} dz = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\mu_0 I_2 A \left(\frac{(L-r)\sqrt{L^2-2rL+A^2+r^2}}{A^2 L^2-2rA^2 L+A^4+r^2 A^2} + \frac{r}{A^2 \sqrt{A^2+r^2}} \right)}{4\pi} \\ 0 \end{pmatrix}$$

(5.2.1) 式から、回路: C_1 に作用する力: \vec{F} は下記となり、 x 軸方向、即ち、お互い引き合う力となる。

$$\begin{aligned} \vec{F} &= I_1 \int_0^L \vec{t} \times \vec{B} dr \\ &= \int_0^L \begin{pmatrix} \frac{\mu_0 I_1 I_2 A \left(\frac{(L-r)\sqrt{L^2-2rL+A^2+r^2}}{A^2 L^2-2rA^2 L+A^4+r^2 A^2} + \frac{r}{A^2 \sqrt{A^2+r^2}} \right)}{4\pi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dr \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\mu_0 I_1 I_2 (\sqrt{L^2+A^2}-A)}{2\pi A} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

いま、回路の長さ: L が間隔: A に比べ、十分長いとき: $L \gg A$ には、

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\mu_0 I_1 I_2 L}{2\pi A} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

単位長さ当たりの作用力は、

$$\frac{\vec{F}}{L} = \begin{pmatrix} \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi A} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

例題 5.7.10 矩形回路による磁束密度

xy 平面上に矩形の回路: $ABCD$ をおき、電流: I を流したとき、中心線上: z 軸上の点の磁束密度: \vec{B} を求める。矩形の辺の長さ: $AB, CD = 2A$, $BC, DA = 2B$ とする。

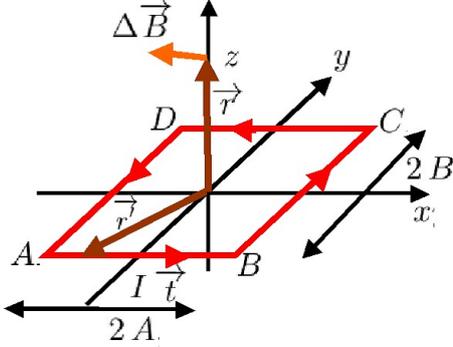


図 5.7.8: 矩形回路による磁束密度

```
kill(all);
load("vect")$
assume(A>0);
assume(B>0);
R1:matrix([0],[0],[z]);
RD1:matrix([x],[-B],[0]);
T1:matrix([1],[0],[0]);
DR1:R1-RD1;
IDRM1:col(adjoint(transpose(addcol(T1,
  DR1,matrix([1],[1],[1])))),3);
DR12:sqrt(DR1[1][1]^2+DR1[2][1]^2
+DR1[3][1]^2);
DB1:\mu[0]/4/%pi*I*IDRM1/DR12^(3);
'integrate(DB1,x,-A,A);
B1:B[1]=ev(%,integrate);
B1:factor(%)
RD3:matrix([x],[B],[0]);
T3:matrix([-1],[0],[0]);
DR3:R1-RD3;
IDRM3:col(adjoint(transpose(addcol(T3,
  DR3,matrix([1],[1],[1])))),3);
DR31:sqrt(DR3[1][1]^2+DR3[2][1]^2
+DR3[3][1]^2);
DB3:\mu[0]/4/%pi*I*IDRM3/DR31^(3);
'integrate(DB3,x,-A,A);
B[3]=ev(%,integrate);
B3:factor(%)
```

辺: AB について、

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}, \quad \vec{r}^j = \begin{pmatrix} x \\ -B \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r} - \vec{r}^j = \begin{pmatrix} -x \\ B \\ z \end{pmatrix}$$

$$\vec{t} \times (\vec{r} - \vec{r}^j) = \begin{pmatrix} 0 \\ -z \\ B \end{pmatrix}$$

$$|\vec{r} - \vec{r}^j| = \sqrt{B^2 + z^2 + x^2}$$

(5.4.4) 式から、電流: $I ds$ による磁束密度: $\Delta \vec{B}$ は、

$$\Delta \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \vec{t} \times (\vec{r} - \vec{r}^j)}{|\vec{r} - \vec{r}^j|^3} ds \quad (5.7.17)$$

上式に上記関係式を代入し、 $x = -A \rightarrow A$ 間の積分を行うと、辺: AB による磁束密度: \vec{B}_1 は、

$$\begin{aligned} \vec{B}_1 &= \int_{-A}^A \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\mu_0 z I}{4\pi (B^2 + z^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{\mu_0 B I}{4\pi (B^2 + z^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \end{pmatrix} dx \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\mu_0 z A I}{2\pi (B^2 + z^2) \sqrt{B^2 + A^2 + z^2}} \\ \frac{\mu_0 A B I}{2\pi (B^2 + z^2) \sqrt{B^2 + A^2 + z^2}} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.7.18)$$

辺: CD について、

$$\vec{r}^j = \begin{pmatrix} x \\ B \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{t} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{r} - \vec{r}^j = \begin{pmatrix} -x \\ -B \\ z \end{pmatrix}$$

$$\vec{t} \times (\vec{r} - \vec{r}^j) = \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ B \end{pmatrix}$$

$$|\vec{r} - \vec{r}^j| = \sqrt{B^2 + z^2 + x^2}$$

(5.7.17) 式に上記関係式を代入し、 $x = -A \rightarrow A$ 間の積分を行うと、辺: CD による磁束密度: \vec{B}_3 は、

$$\begin{aligned} \vec{B}_3 &= \int_{-A}^A \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\mu_0 z I}{4\pi (B^2 + z^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{\mu_0 B I}{4\pi (B^2 + z^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \end{pmatrix} dx \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\mu_0 z A I}{2\pi (B^2 + z^2) \sqrt{B^2 + A^2 + z^2}} \\ \frac{\mu_0 A B I}{2\pi (B^2 + z^2) \sqrt{B^2 + A^2 + z^2}} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.7.19)$$

```

RD2:matrix([A],[y],[0]);
T2:matrix([0],[1],[0]);
DR2:R1-RD2;
IDRM2:col(adjoint(transpose(addcol(T2,
DR2,matrix([1],[1],[1])))),3);
DR22:sqrt(DR2[1][1]^2+DR2[2][1]^2
+DR2[3][1]^2);
DB2:\mu[0]/4/%pi*I*IDRM2/DR22^(3);
'integrate(DB2,y,-B,B);
B[2]=ev(%,integrate);
B2:factor(%);
RD4:matrix([-A],[y],[0]);
T4:matrix([0],[-1],[0]);
DR4:R1-RD4;
IDRM4:col(adjoint(transpose(addcol(T4,
DR4,matrix([1],[1],[1])))),3);
DR42:sqrt(DR4[1][1]^2+DR4[2][1]^2
+DR4[3][1]^2);
DB4:\mu[0]/4/%pi*I*IDRM4/DR42^(3);
'integrate(DB4,y,-B,B);
B[4]=ev(%,integrate);
B4:factor(%);
B5:B1+B2+B3+B4;
B6:factor(%);

```

辺: BC について、

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} A \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{r} - \vec{r}' = \begin{pmatrix} -A \\ -y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\vec{t} \times (\vec{r} - \vec{r}') = \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ A \end{pmatrix}$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{A^2 + z^2 + y^2}$$

(5.7.17) 式に上記関係式を代入し、 $y = -A \rightarrow A$ 間の積分を行うと、辺: CD による磁束密度: \vec{B}_3 は、

$$\begin{aligned} \vec{B}_2 &= \int_{-B}^B \begin{pmatrix} \frac{\mu_0 z I}{4\pi(A^2+z^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \\ 0 \\ \frac{\mu_0 A I}{4\pi(A^2+z^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \end{pmatrix} dy \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\mu_0 z B I}{2\pi(A^2+z^2)\sqrt{B^2+A^2+z^2}} \\ 0 \\ \frac{\mu_0 A B I}{2\pi(A^2+z^2)\sqrt{B^2+A^2+z^2}} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.7.20)$$

辺: DA について、

$$\vec{r}' = \begin{pmatrix} -A \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{t}' = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{r} - \vec{r}' = \begin{pmatrix} A \\ -y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\vec{t}' \times (\vec{r} - \vec{r}') = \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ A \end{pmatrix}$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{A^2 + z^2 + y^2}$$

(5.7.17) 式に上記関係式を代入し、 $y = -A \rightarrow A$ 間の積分を行うと、辺: CD による磁束密度: \vec{B}_3 は、

$$\begin{aligned} \vec{B}_4 &= \int_{-B}^B \begin{pmatrix} -\frac{\mu_0 z I}{4\pi(A^2+z^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \\ 0 \\ \frac{\mu_0 A I}{4\pi(A^2+z^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \end{pmatrix} dy \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{\mu_0 z B I}{2\pi(A^2+z^2)\sqrt{B^2+A^2+z^2}} \\ 0 \\ \frac{\mu_0 A B I}{2\pi(A^2+z^2)\sqrt{B^2+A^2+z^2}} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.7.21)$$

(5.7.18) 式、(5.7.19) 式、(5.7.20) 式、(5.7.21) 式を足し合わせて、

$$\begin{aligned} \vec{B}_4 + \vec{B}_3 + \vec{B}_2 + \vec{B}_1 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\mu_0 A B I}{\pi(B^2+z^2)\sqrt{B^2+A^2+z^2}} + \frac{\mu_0 A B I}{\pi(A^2+z^2)\sqrt{B^2+A^2+z^2}} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.7.22)$$

```

assume(asin(A/sqrt(B^2+A^2))>0);
assume(asin(B/sqrt(B^2+A^2))>0);
assume(2*asin(B/sqrt(B^2+A^2))-%pi<0);
assume(2*asin(A/sqrt(B^2+A^2))-%pi<0);
'integrate(first(rhs(B5)[3][1])*2,z,0,
inf);
changevar(%,z-B*tan(\theta),\theta,z);
trigsimp(%);
subst([abs(cos(theta))=(cos(theta))],%);
changevar(%,sin(\phi)-A*sin(\theta)/
sqrt(A^2+B^2),\phi,\theta);
(2*\mu[0]*'integrate(cos(phi)/(sqrt((1
-sin(phi))*(sin(phi)+1))),phi,0,asin(A
/sqrt(B^2+A^2)))*I)/%pi;
trigsimp(%);

```

```

subst([abs(cos(theta))=(cos(theta))],%);
II1:ev(%,integrate);
'integrate(last(rhs(B5)[3][1])*2,z,0,inf);
changevar(%,z-A*tan(\theta),\theta,z);
trigsimp(%)
subst([abs(cos(theta))=(cos(theta))],%);
changevar(%,sin(\phi)-B*sin(\theta)/
sqrt(A^2+B^2),\phi,\theta);

```

```

(2*mu[0]*'integrate(cos(phi)/(sqrt((1
-sin(phi))*(sin(phi)+1))),phi,0,asin(B/
sqrt(B^2+A^2))*I)/%pi;
trigsimp(%)
subst([abs(cos(theta))=(cos(theta))],%);
II2:ev(%,integrate);
II1+II2;
factor(%)

```

下記のアンペールの法則：(5.6.7) 式について調べる。

$$\int_C \overrightarrow{B}(\overrightarrow{r}) \cdot t(\overrightarrow{r}) ds = \mu_0 \sum_i I_i \quad (5.7.23)$$

(5.7.20) 式、(5.7.21) 式から、 $\overrightarrow{B}_4 + \overrightarrow{B}_2$ を z 軸上で $z = -\infty \rightarrow \infty$ の積分をおこなうと、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overrightarrow{B}_4 + \overrightarrow{B}_2 dz = \frac{2\mu_0 A B I}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{(B^2 + z^2) \sqrt{B^2 + A^2 + z^2}} dz$$

$z = \tan(\theta)$ B の変数変換を `changevar` 関数を使って行くと、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overrightarrow{B}_4 + \overrightarrow{B}_2 dz = \frac{2\mu_0 A I}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec(\theta)^2}{(\tan(\theta)^2 + 1) \sqrt{(\tan(\theta)^2 + 1) B^2 + A^2}} d\theta = \frac{2\mu_0 A I}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(\theta)}{\sqrt{B^2 + \cos(\theta)^2 A^2}} d\theta$$

更に、 $\sin(\phi) = \frac{\sin(\theta) A}{\sqrt{B^2 + A^2}}$ の変数変換を `changevar` 関数を使って行くと、

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \overrightarrow{B}_4 + \overrightarrow{B}_2 dz &= \frac{2\mu_0 I}{\pi} \int_0^{\text{asin}\left(\frac{A}{\sqrt{B^2 + A^2}}\right)} \frac{\cos(\phi)}{\sqrt{1 - \sin(\phi)} \sqrt{\sin(\phi) + 1}} d\phi = \frac{2\mu_0 I}{\pi} \int_0^{\text{asin}\left(\frac{A}{\sqrt{B^2 + A^2}}\right)} \frac{\cos(\phi)}{|\cos(\phi)|} d\phi \\ &= \frac{2\mu_0 I}{\pi} \text{asin}\left(\frac{A}{\sqrt{B^2 + A^2}}\right) \end{aligned} \quad (5.7.24)$$

(5.7.18) 式、(5.7.19) 式から、 $\overrightarrow{B}_3 + \overrightarrow{B}_1$ を z 軸上で $z = -\infty \rightarrow \infty$ の積分をおこなうと、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overrightarrow{B}_3 + \overrightarrow{B}_1 dz = \frac{2\mu_0 A B I}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{(A^2 + z^2) \sqrt{B^2 + A^2 + z^2}} dz$$

$z = \tan(\theta)$ A の変数変換を `changevar` 関数を使って行くと、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overrightarrow{B}_3 + \overrightarrow{B}_1 dz = \frac{2\mu_0 B I}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec(\theta)^2}{(\tan(\theta)^2 + 1) \sqrt{B^2 + (\tan(\theta)^2 + 1) A^2}} d\theta = \frac{2\mu_0 B I}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(\theta)}{\sqrt{\cos(\theta)^2 B^2 + A^2}} d\theta$$

更に、 $\sin(\phi) = \frac{\sin(\theta) B}{\sqrt{B^2 + A^2}}$ の変数変換を `changevar` 関数を使って行くと、

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \overrightarrow{B}_3 + \overrightarrow{B}_1 dz &= \frac{2\mu_0 I}{\pi} \int_0^{\text{asin}\left(\frac{B}{\sqrt{B^2 + A^2}}\right)} \frac{\cos(\phi)}{\sqrt{1 - \sin(\phi)} \sqrt{\sin(\phi) + 1}} d\phi = \frac{2\mu_0 I}{\pi} \int_0^{\text{asin}\left(\frac{B}{\sqrt{B^2 + A^2}}\right)} \frac{\cos(\phi)}{|\cos(\phi)|} d\phi \\ &= \frac{2\mu_0 I}{\pi} \text{asin}\left(\frac{B}{\sqrt{B^2 + A^2}}\right) \end{aligned} \quad (5.7.25)$$

(5.7.24) 式、(5.7.25) 式から、下記となり、 $\text{asin}\left(\frac{B}{\sqrt{B^2 + A^2}}\right) + \text{asin}\left(\frac{A}{\sqrt{B^2 + A^2}}\right) = \frac{\pi}{2}$ であるから、アンペールの法則が立証された。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overrightarrow{B}_4 + \overrightarrow{B}_3 + \overrightarrow{B}_2 + \overrightarrow{B}_1 dz = \frac{2\mu_0 I}{\pi} \left(\text{asin}\left(\frac{B}{\sqrt{B^2 + A^2}}\right) + \text{asin}\left(\frac{A}{\sqrt{B^2 + A^2}}\right) \right) = \mu_0 I$$

例題 5.7.11 円筒面に沿って導線を密にまいたコイル (ソレノイド) による磁束密度

xy 平面上の半径: A の長さ: L 、半径: A の円筒面に導線を N 回巻き、導線に電流: I を流したときの円筒の中心線上の磁束密度: B を求める。

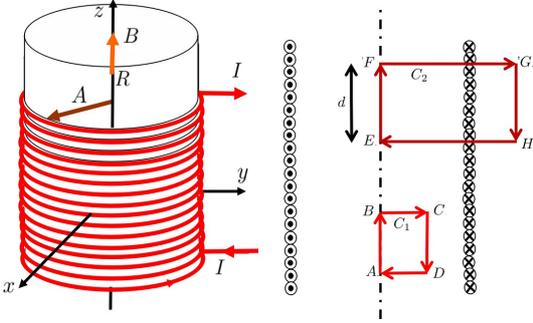


図 5.7.9: ソレノイド

```
kill(all);
assume(A>0);
B1:B=(mu[0]*A^2*I[0])/(2*(z^2+A^2)^(3/2));
N1:n=N/L;
I1:I[0]=n*I*ds;
R1:z=R-s;
B2:dB=subst([I1,R1],rhs(B1));
B='integrate(rhs(B2)/ds,s,-L/2,L/2);
B3:ev(%,integrate);
B4:B3/(mu[0]*n*A^2*I)*2;
B41:factor(first(rhs(B4)));
B42:factor(last(rhs(B4)));
B43:B=(mu[0]*n*A^2*I)/2*(B41+B42);
B30:B[0]=subst([R=0],rhs(B43));
lhs(%)=taylor(rhs(%),A,0,3);
B31:B[E]=subst([R=L/2],rhs(B43));
lhs(%)=taylor(rhs(%),A,0,3);
B30/B31;
lhs(%)=taylor(rhs(%),A,0,3);
```

「5.7.2 円形回路の中心線上の磁束密度」(5.7.7) 式から中心線上の磁束密度の z 軸方向は、

$$B = \frac{\mu_0 I_0 A^2}{2(A^2 + z^2)^{3/2}}$$

中心線上の $z = R$ の磁束密度: B を求める。長さ: L 、巻き数 N 回とすると、微小幅: ds に流れる電流: I_0 は下記となる。 s にある回路が R に与える磁束密度 ΔB は上式に次式を代入することにより

$$I_0 = ds n I, \quad n = \frac{N}{L}, \quad z = R - s$$

磁束密度 ΔB は、

$$\Delta B = \frac{\mu_0 ds n A^2 I}{2 \left((R - s)^2 + A^2 \right)^{3/2}}$$

上式を $s = -\frac{L}{2} \rightarrow \frac{L}{2}$ の範囲で積分すると、

$$\begin{aligned} B &= \frac{\mu_0 A^2 I N}{2L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{1}{\left((R - s)^2 + A^2 \right)^{3/2}} ds \\ &= \frac{\mu_0 n A^2 I}{2} \left(\frac{2R + L}{A^2 \sqrt{4R^2 + 4LR + L^2 + 4A^2}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{2R - L}{A^2 \sqrt{4R^2 - 4LR + L^2 + 4A^2}} \right) \end{aligned} \quad (5.7.26)$$

(5.7.26) 式に $R = 0$ を代入すると中央部の磁束密度: B_0 は下記となり、 $L \gg A$ の時は、

$$B_0 = \frac{\mu_0 n I L}{\sqrt{L^2 + 4A^2}} \approx \mu_0 n I \quad (5.7.27)$$

(5.7.26) 式に $R = \frac{L}{2}$ を代入すると端部の磁束密度: B_E は下記となり、 $L \gg A$ の時は、

$$B_E = \frac{\mu_0 n I L}{\sqrt{4L^2 + 4A^2}} \approx \frac{\mu_0 n I}{2} \quad (5.7.28)$$

上式の比をとると下記となり、 $L \gg A$ のとき、端部の磁束密度: B_E は中央部の磁束密度: B_0 の $\frac{1}{2}$ となる。

$$\frac{B_0}{B_E} = \frac{\sqrt{4L^2 + 4A^2}}{\sqrt{L^2 + 4A^2}} \approx 2$$

ソレノイド内の矩形 $ABCD$ の経路: C_1 とソレノイド内から巻き線: nd を囲む矩形 $EFGH$ の経路: C_2 について、調べる。磁束密度: B の経路: C_1 の線積分について、アンペールの法則から、電流を囲まないで零となる。

$$\begin{aligned} \int_{C_1} \vec{B} \cdot d\vec{r} &= \int_{AB} B_0 dz + \int_{BC} B_{BC} dy \\ &\quad + \int_{CD} B_{CD} dz + \int_{DA} B_{DA} dy = 0 \end{aligned}$$

上式右辺第二項と右辺第四項の和は零となるので、 $B_0 = B_{CD}$ となり、ソレノイド内の磁束密度はすべて B_0 となる。磁束密度: B の経路: C_2 の線積分について、アンペールの法則から、電流を囲むので、

$$\begin{aligned} \int_{C_2} \vec{B} \cdot d\vec{r} &= \int_{EF} B_0 dz + \int_{FG} B_{FG} dy \\ &\quad + \int_{GH} B_{GH} dz + \int_{HE} B_{HE} dy = \mu_0 n d I \\ &= B_0 d - B_{GH} d = \mu_0 n d I - B_{GH} d = \mu_0 n d I \end{aligned}$$

上式から $B_{GH} = 0$ となり、ソレノイドの外部の磁束密度: B は零となる。

例題 5.7.12 厚さ： $2d$ の無限に広い平板内に電流を流したときの磁束密度

xy 平面に厚さ： $2d$ の無限に広い平板内に、 x 軸方向に電流を流したときの磁束密度： \vec{B} を求める。

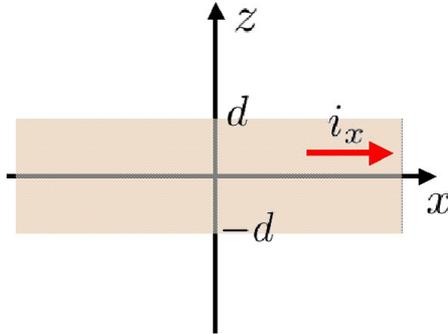


図 5.7.10: 厚さ： $2d$ の無限に広い平板内に電流を流したときの磁束密度

```
kill(all);
load("vect")$
E2:\rho*z/\epsilon[0];
PH2:-integrate(E2,z)+C[2];
subst([z=0],PH2)=0;
solve(% ,C[2])[1];
PH21:\phi=subst(% ,PH2);
E1:\rho*d/\epsilon[0];
PH1:-integrate(E1,z)+C[1];
subst([z=d],PH21);
subst([z=d],PH1)=rhs(%);
solve(% ,C[1])[1];
PH11:\phi=subst(% ,PH1);
E3:-\rho*d/\epsilon[0];
PH3:-integrate(E3,z)+C[3];
subst([z=-d],PH21);
subst([z=-d],PH3)=rhs(%);
solve(% ,C[3])[1];
PH31:\phi=subst(% ,PH3);
AX1:A[x]=subst([\rho=\mu[0]*i[x]*
\epsilon[0]],rhs(PH11));
AX2:A[x]=subst([\rho=\mu[0]*i[x]*
\epsilon[0]],rhs(PH21));
AX3:A[x]=subst([\rho=\mu[0]*i[x]*
\epsilon[0]],rhs(PH31));
```

```
A1:matrix([rhs(AX1)], [0], [0]);
A2:matrix([rhs(AX2)], [0], [0]);
A3:matrix([rhs(AX3)], [0], [0]);
curl(transpose(A1)[1]);
express(%);
ev(% ,diff);
B1:B=transpose(%);
curl(transpose(A2)[1]);
express(%);
ev(% ,diff);
B2:B=transpose(%);
curl(transpose(A3)[1]);
express(%);
ev(% ,diff);
B3:B=transpose(%);
```

「2.8.8 厚さ： $2d$ の無限に広い平板内に体電荷密度： ρ を置いたときの静電場」で求めた静電場： E を用いて、磁束密度： \vec{B} を求める。

2.8.8 節の結果から、

$$z > d \text{ のとき、 } E_z = \frac{\rho d}{\epsilon_0}$$

$$z < -d \text{ のとき、 } E_z = -\frac{\rho d}{\epsilon_0}$$

$$|z| < d \text{ のとき、 } E_z = \frac{\rho z}{\epsilon_0}$$

上式を z 軸方向に積分して、静電ポテンシャル： ϕ を求める。 $z = 0$ で $\phi = 0$ とすると、

$$|z| < d \text{ のとき、 } \phi = -\frac{\rho z^2}{2\epsilon_0}$$

$z = \pm d$ のとき $|z| < d$ の ϕ の結果とつながるようにすると、

$$z > d \text{ のとき、 } \phi = \frac{d^2 \rho}{2\epsilon_0} - \frac{d \rho z}{\epsilon_0}$$

$$z < -d \text{ のとき、 } \phi = \frac{d \rho z}{\epsilon_0} + \frac{d^2 \rho}{2\epsilon_0}$$

「5.5.1 ベクトル・ポテンシャルと静電ポテンシャル」の結果から、上式で得られた結果に $A_x \leftrightarrow \phi$ 、 $\mu_0 i_x \leftrightarrow \frac{\rho}{\epsilon_0}$ の対応を当てはめれば、ベクトル・ポテンシャルの x 軸方向の解： A_x が得られるので、

$$z > d \text{ のとき、 } A_x = \frac{\mu_0 d^2 i_x}{2} - \mu_0 d i_x z$$

$$|z| < d \text{ のとき、 } A_x = -\frac{\mu_0 i_x z^2}{2}$$

$$z < -d \text{ のとき、 } A_x = \mu_0 d i_x z + \frac{\mu_0 d^2 i_x}{2}$$

$i_y = 0, i_z = 0$ なので、 $A_y = 0, A_x = 0$ となり、ベクトル・ポテンシャル： \vec{A} は、

$$z > d \text{ のとき、 } \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\mu_0 d^2 i_x}{2} - \mu_0 d i_x z \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|z| < d \text{ のとき、 } \vec{A} = \begin{pmatrix} -\frac{\mu_0 i_x z^2}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$z < -d \text{ のとき、 } \vec{A} = \begin{pmatrix} \mu_0 d i_x z + \frac{\mu_0 d^2 i_x}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

磁束密度： \vec{B} は、

$$z > d \text{ のとき、 } \vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\mu_0 d i_x \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|z| < d \text{ のとき、 } \vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\mu_0 i_x z \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$z < -d \text{ のとき、 } \vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mu_0 d i_x \\ 0 \end{pmatrix}$$

例題 5.7.13 無限に長い円柱内に軸方向に電流を流したときの磁束密度

z 軸方向に無限に長い円柱内に z 軸方向に電流を流したときの磁束密度: \vec{B} を求める。

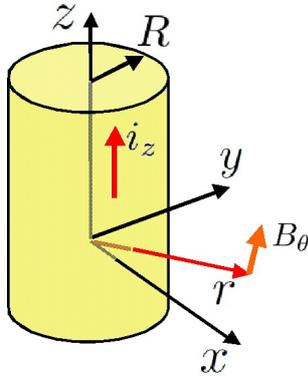


図 5.7.11: 無限に長い円筒内の電荷による磁束密度

```
kill(all);
load("vect")$
PH1:\phi=-\rho/2/\epsilon[0]*(r^2/2
-R^2/2);
PH2:\phi=-\rho/2/\epsilon[0]*R^2*
(log(r)-log(R));
A1:A[z]=subst([\rho=\mu[0]*i[z]*
\epsilon[0]],rhs(PH1));
A2:A[z]=subst([\rho=\mu[0]*i[z]*
\epsilon[0]],rhs(PH2));
B1:B[\theta]=diff(-rhs(A1),r,1);
B2:B[\theta]=diff(-rhs(A2),r,1);
```

「2.8.6 無限に長い円柱内に体電荷密度: ρ を置いたときの静電場」の結果から、静電ポテンシャル: ϕ は、 $r < R$ のとき、(2.8.63) 式から、

$$\phi = -\frac{\rho \left(\frac{r^2}{2} - \frac{R^2}{2} \right)}{2\epsilon_0}$$

$r > R$ のとき、(2.8.64) 式から、

$$\phi = -\frac{\rho R^2 (\log(r) - \log(R))}{2\epsilon_0}$$

「5.5.1 ベクトル・ポテンシャルと静電ポテンシャル」の結果から、上式で得られた結果に $A_z \leftrightarrow \phi$, $\mu_0 i_z \leftrightarrow \frac{\rho}{\epsilon_0}$ の対応を当てはめれば、ベクトル・ポテンシャルの z 軸方向の解: A_z が得られるので、

$r < R$ のとき、

$$A_z = -\frac{\mu_0 i_z \left(\frac{r^2}{2} - \frac{R^2}{2} \right)}{2} \quad (5.7.29)$$

$r > R$ のとき、

$$A_z = -\frac{\mu_0 i_z R^2 (\log(r) - \log(R))}{2} \quad (5.7.30)$$

(5.5.6) 式から、円柱座標系で、 $i_r = 0$, $i_\theta = 0$ なので、 $A_r = 0$, $A_\theta = 0$ となり、円柱座標系の $\text{curl}(\vec{A})$ は下記の関係式¹を用いて、

$$\nabla \times \vec{A} = \text{curl}(\vec{A}) = \begin{pmatrix} -\frac{r \left(\frac{d}{dz} A_\theta \right) - \frac{d}{d\theta} A_z}{r} \\ \frac{d}{dz} A_r - \frac{d}{dr} A_z \\ \frac{r \left(\frac{d}{dr} A_\theta \right) + A_\theta - \frac{d}{d\theta} A_r}{r} \end{pmatrix}$$

$A_r = 0$, $A_\theta = 0$ で、 A_z は r のみの関数であるから、上式から B_θ の項のみが残り、 $I = \pi R^2 i_z$ であるから、 $r < R$ のとき、(5.7.29) 式から、

$$B_\theta = -\frac{d}{dr} A_z = \frac{\mu_0 r i_z}{2} = \frac{\mu_0 r I}{2\pi R^2} \quad (5.7.31)$$

$r > R$ のとき、(5.7.30) 式から、

$$B_\theta = -\frac{d}{dr} A_z = \frac{\mu_0 i_z R^2}{2r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (5.7.32)$$

¹溝口純敏: Maxima を使った物理数学基礎演習ノート、<http://www9.plala.or.jp/prac-maxima/> 第4章 ベクトルと行列、4.5.2 微分ベクトルの円柱座標系への変換

第6章 電磁誘導

6.1 電荷の保存則

閉曲面： S で囲まれた領域： V を考える。電流密度： $\vec{i}(\vec{r}, t)$ の下記の面積分は積分内部の電荷の全体量： Q の単位時間あたりの電荷の減少量を表している。

$$-\frac{d}{dt} Q = \iint_S \vec{i}(\vec{r}, t) \cdot \vec{n}(\vec{r}) dS \quad (6.1.1)$$

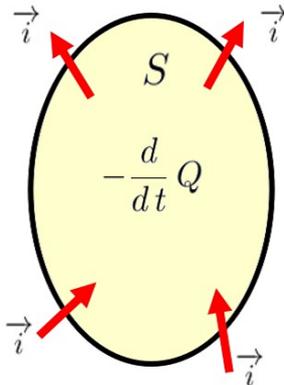


図 6.1.1: 電荷の保存則

また、内部の電荷密度： $\rho(\vec{r}, t)$ の体積分は内部の電荷の全体量： Q を示しており、この単位時間あたり変化は、

$$\frac{d}{dt} Q = \frac{d}{dt} \iiint_V \rho(\vec{r}, t) dV \quad (6.1.2)$$

上式から、

$$-\frac{d}{dt} \iiint_V \rho(\vec{r}, t) dV = \iint_S \vec{i}(\vec{r}, t) \cdot \vec{n}(\vec{r}) dS$$

上式右辺に、下記のガウスの定理¹

$$\iiint_V \nabla \cdot \vec{A} dV = \iiint_V \text{div } \vec{A} dV = \iint_S \vec{A} \cdot \vec{n} dS \quad (6.1.3)$$

上式を適用すると、

$$\iiint_V \frac{d}{dt} \rho(\vec{r}, t) + \nabla \cdot \vec{i}(\vec{r}, t) dV = 0$$

上式から、微分型電荷の保存則は、

$$\frac{d}{dt} \rho(\vec{r}, t) + \nabla \cdot \vec{i}(\vec{r}, t) = 0 \quad (6.1.4)$$

¹溝口純敏：Maxima を使った物理数学基礎演習ノート、
<http://www9.plala.or.jp/prac-maxima/> 第4章 ベクトルと行列、4.4.2 ガウスの定理

6.2 ファラデーの電磁誘導

閉じた回路： C を縁とする任意の面： S を貫く磁場： $\overrightarrow{B}(\overrightarrow{r}, t)$ の面積分を磁束： Φ という。

$$\Phi = \iint_S \overrightarrow{B}(\overrightarrow{r}, t) \cdot \overrightarrow{n} \, dS \quad (6.2.1)$$

磁場はわき出しを持たないので、ある領域： V を囲む面： S_0 で下記が成り立つ。

$$\iint_{S_0} \overrightarrow{B}(\overrightarrow{r}, t) \cdot \overrightarrow{n} \, dS = 0 \quad (6.2.2)$$

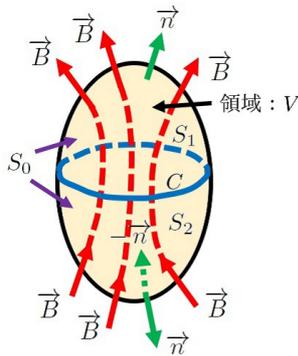


図 6.2.1: 磁束

領域： V を閉曲線： C で分割し、一方の面を S_1 、他方の面を S_2 とする。上式より、

$$\iint_{S_1} \overrightarrow{B}(\overrightarrow{r}, t) \cdot \overrightarrow{n} \, dS + \iint_{S_2} \overrightarrow{B}(\overrightarrow{r}, t) \cdot \overrightarrow{n} \, dS = 0$$

\overrightarrow{n} は面： S_0 に対して外向きであるが、閉曲線： C に対して同じ向きとすると、面： S_1 で \overrightarrow{n} を正の向きとすると、面： S_2 では $-\overrightarrow{n}$ が正となるので、上式を $-\overrightarrow{n} = \overrightarrow{n}$ で置き換え、

$$\iint_{S_1} \overrightarrow{B}(\overrightarrow{r}, t) \cdot \overrightarrow{n} \, dS = \iint_{S_2} \overrightarrow{B}(\overrightarrow{r}, t) \cdot \overrightarrow{n} \, dS$$

上記から、閉曲線： C を外縁とするどのような面の積分を行っても、同じとなる。

磁束の変化に伴って生じる起動力： ϕ_{em} は、閉曲線： C を貫く磁束の変化によって生じる。

$$\phi_{em} = -\frac{d}{dt} \Phi \quad (6.2.3)$$

電場： $\overrightarrow{E}(\overrightarrow{r}, t)$ と起動力： ϕ_{em} の関係は、

$$\phi_{em} = \int_C \overrightarrow{E}(\overrightarrow{r}, t) \cdot d\overrightarrow{r} \quad (6.2.4)$$

(6.2.1) 式、(6.2.3) 式、(6.2.4) 式から、

$$\int_C \overrightarrow{E}(\overrightarrow{r}, t) \cdot d\overrightarrow{r} = -\frac{d}{dt} \iint_S \overrightarrow{B}(\overrightarrow{r}, t) \cdot \overrightarrow{n} \, dS \quad (6.2.5)$$

下記のストークスの定理¹ から、

$$\int_C \overrightarrow{A} \cdot d\overrightarrow{r} = \iint_S (\nabla \times \overrightarrow{A}) \cdot \overrightarrow{n} \, dS \quad (6.2.6)$$

$$\iint_S (\nabla \times \overrightarrow{E}(\overrightarrow{r}, t)) \cdot \overrightarrow{n} \, dS = -\frac{d}{dt} \iint_S \overrightarrow{B}(\overrightarrow{r}, t) \cdot \overrightarrow{n} \, dS$$

上式からファラデーの電磁誘導の法則が得られた。

$$\nabla \times \overrightarrow{E}(\overrightarrow{r}, t) = -\frac{d}{dt} \overrightarrow{B}(\overrightarrow{r}, t) \quad (6.2.7)$$

¹溝口純敏：Maxima を使った物理数学基礎演習ノート、<http://www9.plala.or.jp/prac-maxima/> 第4章 ベクトルと行列、4.4.3 ストークスの定理

6.3 アンペールマクスウェルの法則

時間依存性がない場合の関係式で、静電場の場合は、(2.4.2) 式から、

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad (6.3.1)$$

(2.4.20) 式から、

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (6.3.2)$$

静磁場の場合は、(5.4.7) 式から、

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}) = 0 \quad (6.3.3)$$

(5.6.11) 式から、

$$\nabla \times \vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 i(\vec{r}) \quad (6.3.4)$$

(6.3.2) 式は電荷が消滅することはないので時間依存性がある場合でも成り立つ。また、(6.3.3) 式は、磁場は電荷のようにわき出しのようなものはないので時間依存性がある場合でも成り立つ。

(6.3.1) 式の時間依存性のある場合は、ファラデーの電磁誘導の法則：(6.2.7) 式から、

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{d}{dt} \vec{B}(\vec{r}, t) \quad (6.3.5)$$

(6.3.4) 式の時間依存性のある場合は、電荷の保存則：(6.1.4) 式から、

$$\frac{d}{dt} \rho(\vec{r}, t) + \nabla \cdot i(\vec{r}, t) = 0 \quad (6.3.6)$$

上式から、(6.3.4) 式の div を求めると、

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{B}(\vec{r})) = \mu_0 \nabla \cdot i(\vec{r}) \quad (6.3.7)$$

下記の関係式¹ を用いて、

$$\nabla (\nabla \times \vec{A}) = 0$$

(6.3.7) 式の左辺は零となるが、右辺は (6.3.6) 式から零ではなく、矛盾が生じる。そこで時間依存性に対応できるように (6.3.4) 式に $\vec{G}(\vec{r}, t)$ を付加して次式とする。

$$\nabla \times \vec{B}(\vec{r}, t) = \mu_0 i(\vec{r}, t) + \vec{G}(\vec{r}, t) \quad (6.3.8)$$

上式の div を求めると、左辺は零となり、

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{B}(\vec{r}, t)) = 0 = \mu_0 \nabla \cdot i(\vec{r}, t) + \nabla \cdot \vec{G}(\vec{r}, t)$$

上式に (6.3.6) 式の電荷の保存則を代入すると、

$$0 = -\mu_0 \frac{d}{dt} \rho(\vec{r}, t) + \nabla \cdot \vec{G}(\vec{r}, t)$$

上式に (6.3.2) 式を代入すると、

$$0 = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} (\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}, t)) + \nabla \cdot \vec{G}(\vec{r}, t)$$

上式を変形し、

$$0 = \nabla \cdot \left(-\mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \vec{E}(\vec{r}, t) + \vec{G}(\vec{r}, t) \right)$$

以上から、 $\vec{G}(\vec{r}, t)$ は下記と仮定できる。

$$\vec{G}(\vec{r}, t) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \vec{E}(\vec{r}, t)$$

(6.3.8) 式に上式を代入し、

$$\nabla \times \vec{B}(\vec{r}, t) = \mu_0 i(\vec{r}, t) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \vec{E}(\vec{r}, t) \quad (6.3.9)$$

上式を閉曲線： C を外縁とする面： S の面積分を行って、

$$\begin{aligned} \iint_S \nabla \times \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot \vec{n} dS \\ = \iint_S \left(\mu_0 i(\vec{r}, t) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \vec{E}(\vec{r}, t) \right) \cdot \vec{n} dS \end{aligned} \quad (6.3.10)$$

(6.2.6) 式のストークスの定理から、

$$\int_C \vec{A} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot \vec{n} dS$$

(6.3.10) 式は、

$$\begin{aligned} \int_C \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{r} \\ = \iint_S \left(\mu_0 i(\vec{r}, t) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \vec{E}(\vec{r}, t) \right) \cdot \vec{n} dS \end{aligned} \quad (6.3.11)$$

いま、下図に示す面積： S のコンデンサーの電荷： $\pm Q$ がたまっている。閉曲線： C を外縁とし回路を内包する面： S_1 、閉曲線： C を外縁とし、コンデンサーの正極を囲む面： S_2 とする。スイッチをいれると電流： $I(t)$ が流れる。

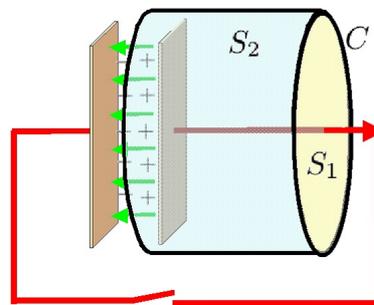


図 6.3.1: コンデンサーの放電

スイッチを入れると電流： $I(t)$ が流れ、

$$I(t) = -\frac{d}{dt} Q(t) \quad (6.3.12)$$

¹溝口純敏：Maxima を使った物理数学基礎演習ノート、
http://www9.plala.or.jp/prac-maxima/ 第4章 ベクトルと行列、4.3.6 ∇ を使った演算

コンデンサーの極板間の電場： $E(t)$ は、

$$E(t) = -\frac{Q(t)}{\epsilon_0 S} \quad (6.3.13)$$

(6.3.11) 式で回路を内包する面： S_1 の面積分はアンペールの法則：(5.6.8) 式に対応している。(6.3.11) 式の右辺第一項は、

$$\mu_0 \overrightarrow{i(\vec{r}, t)} = \mu_0 I(t)$$

回路を内包していない面： S_2 の面積分は、電流が流れる回路が面： S_2 を貫通していないので、時間依存性がある場合にはアンペールの法則に矛盾が生じる。しかし、(6.3.11) 式の右辺第二項は、(6.3.13) 式、(6.3.12) 式を代入すると、

$$\mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} E(t) S = -\mu_0 \frac{d}{dt} Q(t) = \mu_0 I(t)$$

以上から、面： S_1 の面積分、面： S_2 の面積分でも同じ結果が得られ、(6.3.11) 式が正しい結論となっていることが示された。よって、アンペール-マクスウェルの法則は、

$$\nabla \times \overrightarrow{B(\vec{r}, t)} = \mu_0 \overrightarrow{i(\vec{r}, t)} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \overrightarrow{E(\vec{r}, t)} \quad (6.3.14)$$

$$\begin{aligned} & \int_C \overrightarrow{B(\vec{r}, t)} \cdot d\vec{r} \\ &= \iint_S \left(\mu_0 \overrightarrow{i(\vec{r}, t)} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \overrightarrow{E(\vec{r}, t)} \right) \cdot \vec{n} dS \end{aligned} \quad (6.3.15)$$

上式の $\epsilon_0 \frac{d}{dt} \overrightarrow{E(\vec{r}, t)}$ を変位電流 (電束電流) という。

6.4 自己インダクタンスと磁場のエネルギー

閉じた回路に流れる電流が時間変化すると、回路を貫く磁束も時間変化するので、誘導起電力が生じる。これを自己誘導という。回路に流れる電流がつくる磁場は電流： I に比例する。これから磁場： $\overrightarrow{B(\vec{r}, t)}$ の面積分の磁束： Φ (6.2.1) 式も電流 I に比例する。比例係数： L とすると、

$$\Phi = LI \quad (6.4.1)$$

L を回路の自己インダクタンスという。磁束の変化に伴って生じる起電力： ϕ_{em} (6.2.3) 式に上式を代入すると、

$$\phi_{em}(t) = -\frac{d}{dt} \Phi = -L \frac{d}{dt} I(t) \quad (6.4.2)$$

起電力がなす仕事： w は、 $t=0$ のとき $I(t)=0$ とすると、

$$\begin{aligned} w &= \int_0^t \phi_{em}(t') I(t') dt' = \int_0^t L \left(\frac{d}{dt'} I(t') \right) I(t') dt' \\ &= \frac{1}{2} L I^2 \end{aligned} \quad (6.4.3)$$

単位長さ当たりの巻き数： n 、断線積： S 、長さ： l の十分長いソレノイドの磁束密度： B は (5.7.27) 式から、

$$B = \mu_0 n I \quad (6.4.4)$$

コイル一巻きの磁束： Φ は (6.2.1) 式から、

$$\Phi = \iint_S \overrightarrow{B(\vec{r}, t)} \cdot \vec{n} dS = \mu_0 n I S \quad (6.4.5)$$

コイルの巻き数は nl であるから、全体の磁束： Φ は、

$$\Phi = \mu_0 n I S \cdot nl = \mu_0 n^2 I S l \quad (6.4.6)$$

以上から自己インダクタンス： L は、(6.4.1) 式から、

$$L = \mu_0 n^2 S l \quad (6.4.7)$$

このとき仕事： w は、(6.4.3) 式に (6.4.3) 式から I を求めた結果を代入し、

$$w = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 S l \left(\frac{B}{\mu_0 n} \right)^2 = \frac{1}{2 \mu_0} S l B^2 \quad (6.4.8)$$

単位体積当たりの磁場のエネルギーは上式を体積： $S l$ で割り、

$$u_m = \frac{1}{2 \mu_0} B^2 \quad (6.4.9)$$

6.5 相互インダクタンス

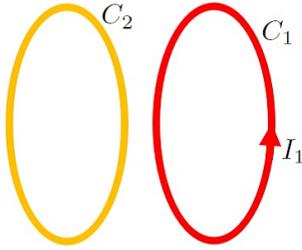


図 6.5.1: 相互インダクタンス

二つの閉じた回路： C_1, C_2 が互いに近い距離にある時、回路： C_1 に電流： I_1 を流すと、その周りに I_1 に比例した磁場が生じ、回路： C_2 を貫く磁束： Φ_2 は I_1 に比例する。比例係数を L_{21} とすると、

$$\Phi_2 = L_{21} I_1 \quad (6.5.1)$$

回路： C_2 に生じる起電力： ϕ_{em2} は、

$$\phi_{em2}(t) = -\frac{d}{dt} \Phi_2 = -L_{21} \frac{d}{dt} I_1(t) \quad (6.5.2)$$

同様に、回路： C_2 に電流： I_2 を流すと、回路： C_1 を貫く磁束： Φ_1 は I_2 に比例する。比例係数を L_{12} とすると、

$$\Phi_1 = L_{12} I_2 \quad (6.5.3)$$

回路： 1 に生じる起電力： ϕ_{em1} は、

$$\phi_{em1}(t) = -\frac{d}{dt} \Phi_1 = -L_{12} \frac{d}{dt} I_2(t) \quad (6.5.4)$$

電流： I が細い回路： C を流れるときには、ベクトル・ポテンシャル： $\overrightarrow{A}(\overrightarrow{r})$ は (5.5.8) 式から、回路の位置ベクトル： \overrightarrow{r}' 、回路の接線ベクトル： $\overrightarrow{t}(\overrightarrow{r}')$ 、求めるベクトル・ポテンシャルの位置ベクトル： \overrightarrow{r} とすると、

$$\overrightarrow{A}(\overrightarrow{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_C \frac{I \overrightarrow{t}(\overrightarrow{r}')}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}'|} ds' \quad (6.5.5)$$

磁束密度： $\overrightarrow{B}(\overrightarrow{r})$ は、(5.5.9) 式から、

$$\overrightarrow{B}(\overrightarrow{r}) = \nabla \times \overrightarrow{A}(\overrightarrow{r}) \quad (6.5.6)$$

磁束： Φ は、(6.2.1) 式から次式となり、上式を代入し、ストークスの定理： $(6.2.6)$ 式から、

$$\begin{aligned} \Phi &= \iint_S \overrightarrow{B}(\overrightarrow{r}, t) \cdot \overrightarrow{n} dS \\ &= \iint_S (\nabla \times \overrightarrow{A}(\overrightarrow{r})) \cdot \overrightarrow{n} dS \\ &= \int_C \overrightarrow{A}(\overrightarrow{r}) \cdot \overrightarrow{t}(\overrightarrow{r}) ds \end{aligned} \quad (6.5.7)$$

いま、電流： I_1 が細い回路： C_1 を流れるときには、回路： C_2 上のベクトル・ポテンシャル： $\overrightarrow{A}(\overrightarrow{r}_2)$ は、(6.5.5) 式から

$$\overrightarrow{A}(\overrightarrow{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{C_1} \frac{I_1 \overrightarrow{t}(\overrightarrow{r}_1)}{|\overrightarrow{r}_2 - \overrightarrow{r}_1|} ds \quad (6.5.8)$$

回路： C_2 の磁束： Φ_2 は、(6.5.7) 式に上式を代入し、

$$\begin{aligned} \Phi_2 &= \int_{C_2} \overrightarrow{A}(\overrightarrow{r}_2) \cdot \overrightarrow{t}(\overrightarrow{r}_2) ds_2 \\ &= \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \int_{C_2} \int_{C_1} \frac{\overrightarrow{t}(\overrightarrow{r}_1) \cdot \overrightarrow{t}(\overrightarrow{r}_2)}{|\overrightarrow{r}_2 - \overrightarrow{r}_1|} ds_1 ds_2 \end{aligned} \quad (6.5.9)$$

相互インダクタンス： L_{21} は (6.5.1) 式と上式から、

$$L_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{C_2} \int_{C_1} \frac{\overrightarrow{t}(\overrightarrow{r}_1) \cdot \overrightarrow{t}(\overrightarrow{r}_2)}{|\overrightarrow{r}_2 - \overrightarrow{r}_1|} ds_1 ds_2 \quad (6.5.10)$$

上式で 1 と 2 を変えても変わらないので、相互インダクタンスの相反定理が成り立つ。

$$L_{21} = L_{12} \quad (6.5.11)$$

自己インダクタンス： L_1 は (6.5.10) 式から、 $\overrightarrow{r}_2 \rightarrow \overrightarrow{r}_1'$ と置き換えることにより得られる。

$$L_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{C_1'} \int_{C_1} \frac{\overrightarrow{t}(\overrightarrow{r}_1') \cdot \overrightarrow{t}(\overrightarrow{r}_1)}{|\overrightarrow{r}_1' - \overrightarrow{r}_1|} ds_1 ds_1' \quad (6.5.12)$$

6.6 マクスウェル方程式

マクスウェル方程式は次の4つの方程式から成り立っている。

ガウスの法則 (電荷の存在)

(2.4.20) 式から、

$$\nabla \cdot \overrightarrow{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r}, t) \quad (6.6.1)$$

磁荷の不存在

(5.4.7) 式から、

$$\nabla \cdot \overrightarrow{B}(\vec{r}, t) = 0 \quad (6.6.2)$$

ファラデーの電磁誘導の法則

(6.2.7) 式から、

$$\nabla \times \overrightarrow{E}(\vec{r}, t) = -\frac{d}{dt} \overrightarrow{B}(\vec{r}, t) \quad (6.6.3)$$

アンペール-マクスウェルの法則

(6.3.14) 式から、

$$\nabla \times \overrightarrow{B}(\vec{r}, t) = \mu_0 \overrightarrow{i}(\vec{r}, t) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \overrightarrow{E}(\vec{r}, t) \quad (6.6.4)$$

6.7 電磁場のエネルギー

$\frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot (\overrightarrow{E}(\vec{r}, t) \times \overrightarrow{B}(\vec{r}, t))$ について調べる。
下記の関係式¹を用いて、

$$\nabla \cdot (\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}) = \overrightarrow{B} \cdot (\nabla \times \overrightarrow{A}) - \overrightarrow{A} \cdot (\nabla \times \overrightarrow{B})$$

上式から、

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot (\overrightarrow{E}(\vec{r}, t) \times \overrightarrow{B}(\vec{r}, t)) &= \frac{1}{\mu_0} \overrightarrow{B}(\vec{r}, t) \cdot (\nabla \times \overrightarrow{E}(\vec{r}, t)) \\ &\quad - \frac{1}{\mu_0} \overrightarrow{E}(\vec{r}, t) \cdot (\nabla \times \overrightarrow{B}(\vec{r}, t)) \end{aligned} \quad (6.7.1)$$

上式に (6.6.3) 式、(6.6.4) 式を代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot (\overrightarrow{E}(\vec{r}, t) \times \overrightarrow{B}(\vec{r}, t)) &= \frac{1}{\mu_0} \overrightarrow{B}(\vec{r}, t) \cdot \left(-\frac{d}{dt} \overrightarrow{B}(\vec{r}, t) \right) \\ &\quad - \overrightarrow{E}(\vec{r}, t) \cdot \left(\epsilon_0 \frac{d}{dt} \overrightarrow{E}(\vec{r}, t) \right) - \overrightarrow{E}(\vec{r}, t) \cdot \overrightarrow{i}(\vec{r}, t) \\ &= -\frac{d}{dt} \left(\frac{\epsilon_0}{2} \overrightarrow{E}(\vec{r}, t)^2 + \frac{1}{2\mu_0} \overrightarrow{B}(\vec{r}, t)^2 \right) \\ &\quad - \overrightarrow{E}(\vec{r}, t) \cdot \overrightarrow{i}(\vec{r}, t) \end{aligned} \quad (6.7.2)$$

上式右辺第一項は (2.6.12) 式、(6.4.9) 式から、次式で u とし、電磁場のエネルギーで、それぞれ電場のエネルギー密度と磁場のエネルギー密度である。

$$u = \frac{\epsilon_0}{2} \overrightarrow{E}(\vec{r}, t)^2 + \frac{1}{2\mu_0} \overrightarrow{B}(\vec{r}, t)^2 \quad (6.7.3)$$

ここで左辺の下記をポインティングベクトル: $\overrightarrow{S}(\vec{r}, t)$ という。

$$\overrightarrow{S}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\mu_0} (\overrightarrow{E}(\vec{r}, t) \times \overrightarrow{B}(\vec{r}, t)) \quad (6.7.4)$$

(6.7.2) 式の左辺の閉曲面の体積分すると、ガウスの定理¹から、

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot (\overrightarrow{E}(\vec{r}, t) \times \overrightarrow{B}(\vec{r}, t)) dV &= \iiint_V \nabla \cdot \overrightarrow{S}(\vec{r}, t) dV \\ &= \iint_S \overrightarrow{S}(\vec{r}, t) \cdot \overrightarrow{n}(\vec{r}) dS \end{aligned} \quad (6.7.5)$$

上式右辺は閉曲面の表面から出て行くポインティングベクトルの総和を表している。

(6.7.2) 式に (6.7.3) 式、(6.7.4) 式を代入すると、

$$\frac{d}{dt} u + \nabla \cdot \overrightarrow{S}(\vec{r}, t) = -\overrightarrow{E}(\vec{r}, t) \cdot \overrightarrow{i}(\vec{r}, t) \quad (6.7.6)$$

¹溝口純敏: Maxima を使った物理数学基礎演習ノート、<http://www9.plala.or.jp/prac-maxima/> 第4章 ベクトルと行列、4.3.6 ∇ を使った演算

¹溝口純敏: Maxima を使った物理数学基礎演習ノート、<http://www9.plala.or.jp/prac-maxima/> 第4章 ベクトルと行列、4.4.2 ガウスの定理

ここで電流がない場合には $\overrightarrow{i}(\vec{r}, t) = 0$ である。(6.7.6) 式の左辺は第一項は電磁場のエネルギーの時間変化、左辺は第二項の電磁場のエネルギーの流出エネルギーを表している。ポインティングベクトルは電磁波が運ぶエネルギーで、その方向は $\vec{E} \times \vec{B}$ で表せるベクトル積の方向である。

ここで電流がある場合には $\overrightarrow{E}(\vec{r}, t) \cdot \overrightarrow{i}(\vec{r}, t)$ はジュール熱に相当するエネルギーの損出が現れる。

6.8 電磁波

電磁場のエネルギーの伝播について調べる。下図に示すように、ある空間の一点で瞬間的に電流： \vec{i} が流れたとする。これを取り囲むように磁場： B_0 が発生する。この電磁誘導により電場： E_1 が発生する。実電流は流れないが誘起された電場： E_1 変化により、磁場： B_1 が誘起される。このように \vec{E} と \vec{B} がお互いを誘起し、空間を伝播していく。

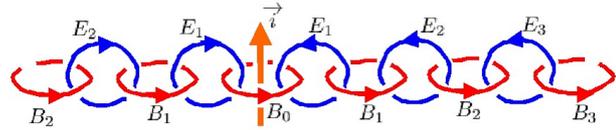


図 6.8.1: 電磁波の伝播

ここで電磁波の波動の式を求める。ファラデーの電磁誘導の法則：(6.2.7) 式の両辺の curl をとると、

$$\nabla \times (\nabla \times \overrightarrow{E}(\vec{r}, t)) = -\nabla \times \left(\frac{d}{dt} \overrightarrow{B}(\vec{r}, t) \right) \quad (6.8.1)$$

(6.8.1) 式の左辺は、下記の関係式¹を用いて、

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \quad (6.8.2)$$

下記となり、(6.6.1) 式を代入すると、

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \overrightarrow{E}(\vec{r}, t)) &= \nabla (\nabla \cdot \overrightarrow{E}(\vec{r}, t)) - \nabla^2 \overrightarrow{E}(\vec{r}, t) \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} \nabla \rho(\vec{r}, t) - \nabla^2 \overrightarrow{E}(\vec{r}, t) \end{aligned} \quad (6.8.3)$$

(6.8.1) 式の右辺に (6.6.4) 式を代入すると、

$$\begin{aligned} -\nabla \times \left(\frac{d}{dt} \overrightarrow{B}(\vec{r}, t) \right) &= -\frac{d}{dt} (\nabla \times \overrightarrow{B}(\vec{r}, t)) \\ &= -\frac{d}{dt} \left(\mu_0 \overrightarrow{i}(\vec{r}, t) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \overrightarrow{E}(\vec{r}, t) \right) \\ &= -\mu_0 \frac{d}{dt} \overrightarrow{i}(\vec{r}, t) - \mu_0 \epsilon_0 \frac{d^2}{dt^2} \overrightarrow{E}(\vec{r}, t) \end{aligned} \quad (6.8.4)$$

(6.8.3) 式、(6.8.4) 式の右辺を等置して、

$$\begin{aligned} \frac{1}{\epsilon_0} \nabla \rho(\vec{r}, t) - \nabla^2 \overrightarrow{E}(\vec{r}, t) &= -\mu_0 \frac{d}{dt} \overrightarrow{i}(\vec{r}, t) - \mu_0 \epsilon_0 \frac{d^2}{dt^2} \overrightarrow{E}(\vec{r}, t) \end{aligned} \quad (6.8.5)$$

上式を整理して、

$$\begin{aligned} \left(\nabla^2 - \mu_0 \epsilon_0 \frac{d^2}{dt^2} \right) \overrightarrow{E}(\vec{r}, t) &= \frac{1}{\epsilon_0} \nabla \rho(\vec{r}, t) + \mu_0 \frac{d}{dt} \overrightarrow{i}(\vec{r}, t) \end{aligned} \quad (6.8.6)$$

¹溝口純敏：Maxima を使った物理数学基礎演習ノート、<http://www9.plala.or.jp/prac-maxima/> 第4章 ベクトルと行列、4.3.6 ∇ を使った演算

次に、アンペール-マクスウェルの法則：(6.6.4) 式の両辺の curl をとると、

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \overrightarrow{B}(\vec{r}, t)) \\ = \mu_0 \nabla \times \overrightarrow{i}(\vec{r}, t) + \mu_0 \epsilon_0 \nabla \times \frac{d}{dt} \overrightarrow{E}(\vec{r}, t) \end{aligned} \quad (6.8.7)$$

(6.8.7) 式の左辺は (6.8.2) 式を用いると、下記となり、(6.6.2) 式を代入すると、

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \overrightarrow{B}(\vec{r}, t)) &= \nabla (\nabla \cdot \overrightarrow{B}(\vec{r}, t)) - \nabla^2 \overrightarrow{B}(\vec{r}, t) \\ &= -\nabla^2 \overrightarrow{B}(\vec{r}, t) \end{aligned} \quad (6.8.8)$$

(6.8.7) 式の右辺に (6.6.3) 式を代入し、

$$\begin{aligned} \mu_0 \nabla \times \overrightarrow{i}(\vec{r}, t) + \mu_0 \epsilon_0 \nabla \times \frac{d}{dt} \overrightarrow{E}(\vec{r}, t) \\ = \mu_0 \nabla \times \overrightarrow{i}(\vec{r}, t) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} (\nabla \times \overrightarrow{E}(\vec{r}, t)) \\ = \mu_0 \nabla \times \overrightarrow{i}(\vec{r}, t) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d^2}{dt^2} \overrightarrow{B}(\vec{r}, t) \end{aligned} \quad (6.8.9)$$

(6.8.8) 式、(6.8.9) 式の右辺を等置して、

$$-\nabla^2 \overrightarrow{B}(\vec{r}, t) = \mu_0 \nabla \times \overrightarrow{i}(\vec{r}, t) - \mu_0 \epsilon_0 \frac{d^2}{dt^2} \overrightarrow{B}(\vec{r}, t)$$

上式を整理して、

$$\left(\nabla^2 - \mu_0 \epsilon_0 \frac{d^2}{dt^2} \right) \overrightarrow{B}(\vec{r}, t) = -\mu_0 \nabla \times \overrightarrow{i}(\vec{r}, t) \quad (6.8.10)$$

真空中で、電荷がなく、電流が流れないとすると、 $\rho(\vec{r}, t) = 0$, $\overrightarrow{i}(\vec{r}, t) = 0$ であるから、(6.8.6) 式、(6.8.10) 式は、

$$\left(\nabla^2 - \mu_0 \epsilon_0 \frac{d^2}{dt^2} \right) \overrightarrow{E}(\vec{r}, t) = 0 \quad (6.8.11)$$

$$\left(\nabla^2 - \mu_0 \epsilon_0 \frac{d^2}{dt^2} \right) \overrightarrow{B}(\vec{r}, t) = 0 \quad (6.8.12)$$

電磁波が運ぶエネルギーの方向は $\overrightarrow{E} \times \overrightarrow{B}$ で表せるベクトル積の方向である。(6.8.11) 式、(6.8.12) 式は波動方程式である。

平面波

一方向に伝わる場合には、一次元波動方程式¹ となり、ダランベールの解から、(6.8.11) 式の解は下記の形となる。ここでエネルギーの進行方向を x 軸方向とする

と、その直角方向の \overrightarrow{E} を z 軸方向とする。

$$E_z = F(tc + x) + F(x - tc)$$

ここで、位相速度： $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$

$$\begin{cases} \epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-2} \\ \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N} \cdot \text{A}^{-2} \\ c = 2.9979 \times 10^8 \text{ m/s} \end{cases} \quad (6.8.13)$$

上式は、速さ： c で x 軸負方向に $F(tc + x)$ が進行し、速さ： c で x 軸正方向に $F(x - tc)$ が進行する波が合わさった波形となる。

(6.8.11) 式を変数分離法で解くと下記となり、さらに変形すると (6.8.13) 式の形となっている。

$$\begin{aligned} E_z &= \%d1 \sin(ktC + kx) + \%d2 \cos(ktC + kx) \\ &\quad + \%d3 \sin(ktC - kx) + \%d4 \cos(ktC - kx) \\ &= \%d1 \sin(ktC + kx) + \%d2 \cos(ktC + kx) \\ &\quad + \%d3 \sin(ktC - kx) + \%d4 \cos(ktC - kx) \end{aligned} \quad (6.8.14)$$

そこで、 \overrightarrow{E} として、振幅： E_0 、波長： λ 、波数： $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ 、位相速度： $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$ で、振幅が z 軸方向に振れる正弦波で、 x 軸方向に進行する波とすると下記となる。

$$\overrightarrow{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E_0 \sin(k(x - ct)) \end{pmatrix} \quad (6.8.15)$$

```
kill(all);
load("vect")$
E1:matrix([0],[0],[E[0]*sin(k*(x-t*c))]);
transpose(E1);
curl(%[1]);
express(%);
ev(%,diff);
transpose(%);
-integrate(%,t);
ev(%,integrate);
```

(6.6.3) 式に (6.8.15) 式を代入すると、

$$\begin{aligned} \nabla \times \overrightarrow{E}(\vec{r}, t) &= \begin{pmatrix} 0 \\ -E_0 k \cos(k(x - ct)) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{d}{dt} \overrightarrow{B}(\vec{r}, t) \end{aligned} \quad (6.8.16)$$

上式を t で積分して、 $\overrightarrow{B}(\vec{r}, t)$ を求めると、

$$\overrightarrow{B}(\vec{r}, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{E_0 \sin(k(x - ct))}{c} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.8.17)$$

¹溝口純敏：Maxima を使った物理数学基礎演習ノート、<http://www9.plala.or.jp/prac-maxima/> 第10章 偏微分方程式、10.8 一次元波動方程式

上式から、 \vec{E} は z 軸方向の横波で x 軸方向に伝搬する。 \vec{B} は $-y$ 軸方向の横波で x 軸方向に伝搬する。

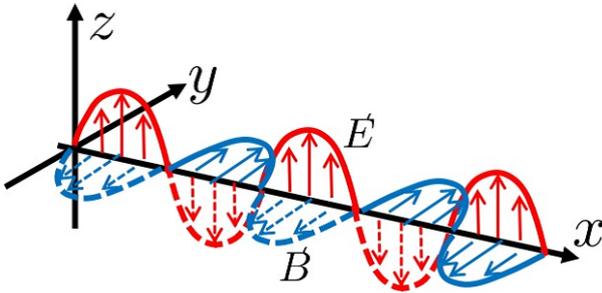


図 6.8.2: 電磁波の伝播

(2.6.12) 式、(6.8.15) 式から、単位体積当たりの静電エネルギー: u_e は、

$$u_e = \frac{\epsilon_0}{2} (\vec{E})^2 = \frac{\epsilon_0}{2} E_0^2 \quad (6.8.18)$$

(6.4.9) 式、(6.8.17) 式から、単位体積当たりの磁場のエネルギー: u_B は、

$$u_m = \frac{1}{2\mu_0} (\vec{B})^2 = \frac{1}{2\mu_0} \frac{E_0^2}{c^2} = \frac{\epsilon_0}{2} E_0^2 \quad (6.8.19)$$

(6.8.18) 式と (6.8.19) 式は等しく、電場と磁場の間でエネルギーが等配分されている。

球面波

無限空間の場合には極座標で記述したほうが現実的である。(6.8.11) 式の ∇^2 は極座標では下記¹となる。

$$\begin{aligned} \nabla^2 A = & \frac{d^2}{dr^2} A + \frac{\cos(\theta)}{r^2 \sin(\theta)} \left(\frac{d}{d\theta} A \right) + \frac{d^2}{d\theta^2} A \\ & + \frac{2}{r} \left(\frac{d}{dr} A \right) + \frac{d^2}{r^2 \sin^2(\theta)} A \end{aligned}$$

上式で原点対象であるとする、

$$\nabla^2 A = \frac{d^2}{dr^2} A + \frac{2}{r} \left(\frac{d}{dr} A \right)$$

(6.8.11) 式に上式を代入すると、

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{d^2}{dt^2} \right) \overrightarrow{E}(\vec{r}, t) = 0 \quad (6.8.20)$$

原点対象の極座標三次元波動方程式の解²は変数分離法で解くと次式の形となる。

$$\begin{aligned} E = & \frac{1}{\sqrt{r}} \text{bessel.j} \left(\frac{1}{2}, rK \right) \\ & \times (\%k1 \sin(tcK) + \%k2 \cos(tcK)) \end{aligned}$$

bessel 関数で rK が十分大きいときには、次式で近似³できる。

$$\begin{aligned} \text{bessel.j}(N, rK) \approx & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi} \sqrt{r} \sqrt{K}} \\ & \times \left(B_n(rK) \sin \left(\frac{\pi(2N+1)}{4} - rK \right) \right. \\ & \left. + A_n(rK) \cos \left(\frac{\pi(2N+1)}{4} - rK \right) \right) \end{aligned}$$

すなわち、原点から十分離れたときには、

$$\begin{aligned} E \approx & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi} r \sqrt{K}} \\ & \times (A_n(rK) \sin(rK) + B_n(rK) \cos(rK)) \\ & \times (\%k1 \sin(tcK) + \%k2 \cos(tcK)) \end{aligned}$$

上式は、(6.8.14) 式から (6.8.13) 式の形となっており、 r : 半径方向の外方向と内方向の波があり、振幅は $\frac{1}{r}$ に比例する。

¹溝口純敏: Maxima を使った物理数学基礎演習ノート、<http://www9.plala.or.jp/prac-maxima/> 第4章 ベクトルと行列、4.5.4 微分ベクトルの極座標系への変換

²溝口純敏: Maxima を使った物理数学基礎演習ノート、<http://www9.plala.or.jp/prac-maxima/> 第10章 偏微分方程式、10.10.2 極座標における三次元波動方程式(球波面)

³森口 繁一、宇田川 久、一松 信: 岩波数学公式3 特殊関数、岩波書店 2002 Bessel 関数 P.153

6.9 マクスウェルの応力テンソル

電荷の間に作用する力は、遠く離れたところから作用するのではなく、弾性体のように、その周辺の空間の変化から力を受けていると考えられる。この空間に作用する応力は弾性体の場合の応力テンソルと同様に電磁場の応力テンソルについて検討する。

電荷に作用する力：ローレンツ力は (5.3.3) 式から、

$$\vec{F} = q\vec{E} + q(\vec{v} \times \vec{B}) \quad (6.9.1)$$

ここで電荷がある空間に分布する場合を検討するため、 q , \vec{v} を \vec{E} , \vec{B} を用いて表す。マクスウェルの方程式の (6.6.1) 式、(6.6.4) 式は、

$$\rho(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} \quad (6.9.2)$$

$$q\vec{v} = \vec{i} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} - \epsilon_0 \frac{d}{dt} \vec{E} \quad (6.9.3)$$

(6.9.1) 式に (6.9.2) 式、(6.9.3) 式を代入すると、

$$\begin{aligned} \vec{F} = & \epsilon_0 \vec{E} (\nabla \cdot \vec{E}) - \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \times (\nabla \times \vec{B}) \\ & + \epsilon_0 \vec{B} \times \frac{d}{dt} \vec{E} \end{aligned} \quad (6.9.4)$$

上式の \vec{E} 項と \vec{B} 項の形を合わせるため、マクスウェルの方程式の (6.6.2) 式に $\frac{1}{\mu_0} \vec{B}$ を掛け、(6.6.3) 式に $\epsilon_0 \vec{E}$ のベクトル積を掛け、整理すると、

$$\frac{1}{\mu_0} \vec{B} (\nabla \cdot \vec{B}) = 0 \quad (6.9.5)$$

$$-\epsilon_0 \vec{E} \times (\nabla \times \vec{E}) - \epsilon_0 \vec{E} \times \frac{d}{dt} \vec{B} = 0 \quad (6.9.6)$$

(6.9.5) 式、(6.9.6) 式は零であるから、(6.9.4) 式にこれらを足してもよいので、(6.9.4) 式は、

$$\begin{aligned} \vec{F} = & \epsilon_0 \vec{E} (\nabla \cdot \vec{E}) - \epsilon_0 \vec{E} \times (\nabla \times \vec{E}) \\ & + \frac{1}{\mu_0} \vec{B} (\nabla \cdot \vec{B}) - \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \times (\nabla \times \vec{B}) \\ & + \epsilon_0 \vec{B} \times \frac{d}{dt} \vec{E} - \epsilon_0 \vec{E} \times \frac{d}{dt} \vec{B} \\ = & \epsilon_0 \vec{E} (\nabla \cdot \vec{E}) - \epsilon_0 \vec{E} \times (\nabla \times \vec{E}) \\ & + \frac{1}{\mu_0} \vec{B} (\nabla \cdot \vec{B}) - \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \times (\nabla \times \vec{B}) \\ & - \epsilon_0 \frac{d}{dt} (\vec{E} \times \vec{B}) \end{aligned} \quad (6.9.7)$$

上式の右辺第一項、第二項はクーロン力、右辺第三項、第四項はアンペール力、右辺第五項は運動量の流れの時間微分を表している。

x 方向の力： F_x について、下記の \vec{T}_x のベクトルを考え、

$$\vec{T}_x = \begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \end{pmatrix}$$

F_x を下記で表すと、ガウスの定理：(6.1.3) 式から、

$$\begin{aligned} F_x = & \iiint_V \nabla \cdot \vec{T}_x dV = \iint_S \vec{T}_x \cdot \vec{n} dS \\ = & \iint_S T_{xx} dydz + T_{xy} dzdx + T_{xz} dxdy \end{aligned}$$

上式から \vec{T}_x は弾性力学における空間に分布した応力分布と同じ応力分布を表している。

(6.9.7) 式の右辺第一項、第二項の \vec{E} に関連した \vec{T}_x を求める。(6.9.7) 式の右辺第一項、第二項の \vec{E} による力 \vec{F}_E は、

$$\vec{F}_E = \epsilon_0 \vec{E} (\nabla \cdot \vec{E}) - \epsilon_0 \vec{E} \times (\nabla \times \vec{E}) \quad (6.9.8)$$

```
kill(all);
load("vect")$
depends([E,B],[x,y,z]);
E1:matrix([E[x]],[E[y]],[E[z]]);
div(transpose(E1)[1]);
express(%);
EDV1:\epsilon[0]*E1*%;
curl(transpose(E1)[1]);
express(%);
transpose(%);
ERT1:\epsilon[0]*col(adjoint(transpose(
  addcol(E1,%,matrix([1],[1],[1]))),3);
EDV1-ERT1;
EXYZ1:factor(%);
EX1:EXYZ1[1][1];
```

\vec{E} として下記とする。

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

(6.9.8) 式に上式を代入すると、

$$\begin{aligned}\vec{F}_E &= \epsilon_0 \vec{E} (\nabla \cdot \vec{E}) - \epsilon_0 \vec{E} \times (\nabla \times \vec{E}) \\ &= \begin{pmatrix} \epsilon_0 \left(E_x \left(\frac{d}{dz} E_z \right) - E_z \left(\frac{d}{dx} E_x \right) + \left(\frac{d}{dz} E_x \right) E_z + E_x \left(\frac{d}{dy} E_y \right) - E_y \left(\frac{d}{dx} E_x \right) + \left(\frac{d}{dy} E_x \right) E_y + E_x \left(\frac{d}{dx} E_x \right) \right) \\ \epsilon_0 \left(E_y \left(\frac{d}{dz} E_z \right) - E_z \left(\frac{d}{dy} E_z \right) + \left(\frac{d}{dz} E_y \right) E_z + E_y \left(\frac{d}{dy} E_y \right) + E_x \left(\frac{d}{dx} E_y \right) + \left(\frac{d}{dx} E_x \right) E_y - E_x \left(\frac{d}{dy} E_x \right) \right) \\ \epsilon_0 \left(E_z \left(\frac{d}{dz} E_z \right) + E_y \left(\frac{d}{dy} E_z \right) + E_x \left(\frac{d}{dx} E_z \right) + \left(\frac{d}{dy} E_y \right) E_z + \left(\frac{d}{dx} E_x \right) E_z - E_y \left(\frac{d}{dz} E_y \right) - E_x \left(\frac{d}{dz} E_x \right) \right) \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (6.9.9)$$

上式の div をとると、(6.9.9) 式の二行目と一致する。

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{T}_y &= \epsilon_0 \left(E_y \left(\frac{d}{dz} E_z \right) - E_z \left(\frac{d}{dy} E_z \right) \right. \\ &\quad + \left(\frac{d}{dz} E_y \right) E_z + E_y \left(\frac{d}{dy} E_y \right) \\ &\quad + E_x \left(\frac{d}{dx} E_y \right) + \left(\frac{d}{dx} E_x \right) E_y \\ &\quad \left. - E_x \left(\frac{d}{dy} E_x \right) \right)\end{aligned}\quad (6.9.13)$$

```
TX1:matrix([T[xx],T[xy],T[xz]]);
TX11:\epsilon[0]*matrix([E[x]^2-(E1.E1)
/2,E[x]*E[y],E[x]*E[z]]);
div(TX11[1]);
TX2:express(%);
ev(%,diff);
TX21:factor(%);
EXYZ1[1][1]-TX21;
factor(%);
```

\vec{T}_x を下記とすると、

$$\begin{aligned}\vec{T}_x &= \begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \epsilon_0 \left(E_x^2 - \frac{E_z^2 + E_y^2 + E_x^2}{2} \right) & \epsilon_0 E_x E_y & \epsilon_0 E_x E_z \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (6.9.10)$$

上式の div をとると、(6.9.9) 式の一行目と一致する。

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{T}_x &= \epsilon_0 \left(E_x \left(\frac{d}{dz} E_z \right) - E_z \left(\frac{d}{dx} E_x \right) \right. \\ &\quad + \left(\frac{d}{dz} E_x \right) E_z + E_x \left(\frac{d}{dy} E_y \right) \\ &\quad - E_y \left(\frac{d}{dx} E_y \right) + \left(\frac{d}{dy} E_x \right) E_y \\ &\quad \left. + E_x \left(\frac{d}{dx} E_x \right) \right)\end{aligned}\quad (6.9.11)$$

```
TZ1:matrix([T[zx],T[zy],T[zz]]);
TZ11:\epsilon[0]*matrix([E[x]*E[z],E[y]
*E[z],E[z]^2-(E1.E1)/2]);
div(TZ11[1]);
TZ2:express(%);
ev(%,diff);
TZ21:factor(%);
EXYZ1[3][1]-TZ21;
factor(%);
```

z 軸方向の力について、 \vec{T}_z を下記とすると、

$$\begin{aligned}\vec{T}_z &= \begin{pmatrix} T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \epsilon_0 E_x E_z & \epsilon_0 E_y E_z & \epsilon_0 \left(E_z^2 - \frac{E_z^2 + E_y^2 + E_x^2}{2} \right) \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (6.9.14)$$

上式の div をとると、(6.9.9) 式の三行目と一致する。

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{T}_z &= \epsilon_0 \left(E_z \left(\frac{d}{dz} E_z \right) + E_y \left(\frac{d}{dy} E_z \right) \right. \\ &\quad + E_x \left(\frac{d}{dx} E_z \right) + \left(\frac{d}{dy} E_y \right) E_z \\ &\quad + \left(\frac{d}{dx} E_x \right) E_z - E_y \left(\frac{d}{dz} E_y \right) \\ &\quad \left. - E_x \left(\frac{d}{dz} E_x \right) \right)\end{aligned}\quad (6.9.15)$$

```
TY1:matrix([T[yx],T[yy],T[yz]]);
TY11:\epsilon[0]*matrix([E[x]*E[y],E[y]
^2-(E1.E1)/2,E[y]*E[z]]);
div(TY11[1]);
TY2:express(%);
ev(%,diff);
TY21:factor(%);
EXYZ1[2][1]-TY21;
factor(%);
```

y 軸方向の力について、 \vec{T}_y を下記とすると、

$$\begin{aligned}\vec{T}_y &= \begin{pmatrix} T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \epsilon_0 E_x E_y & \epsilon_0 \left(E_y^2 - \frac{E_z^2 + E_y^2 + E_x^2}{2} \right) & \epsilon_0 E_y E_z \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (6.9.12)$$

```
TEXYZ1:matrix(TX1[1],TY1[1],TZ1[1]);
TEXYZ11:matrix(TX11[1],TY11[1],TZ11[1]);
TBXYZ11:subst([\epsilon[0]=1/\mu[0],E=B],%);
TXYZ11:TEXYZ11+TBXYZ11;
```

(6.9.10) 式、(6.9.12) 式、(6.9.14) 式をまとめ、テンソルの形に記述すると、下記の電場の応力テンソル： T_E は、

$$T_E = \begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_0 \left(E_x^2 - \frac{E_z^2 + E_y^2 + E_x^2}{2} \right) & \epsilon_0 E_x E_y & \epsilon_0 E_x E_z \\ \epsilon_0 E_x E_y & \epsilon_0 \left(E_y^2 - \frac{E_z^2 + E_y^2 + E_x^2}{2} \right) & \epsilon_0 E_y E_z \\ \epsilon_0 E_x E_z & \epsilon_0 E_y E_z & \epsilon_0 \left(E_z^2 - \frac{E_z^2 + E_y^2 + E_x^2}{2} \right) \end{pmatrix} \quad (6.9.16)$$

(6.9.7) 式から、電場： \vec{E} と磁場： \vec{B} は同じ形をしているため、 $\epsilon_0 \rightarrow \frac{1}{\mu_0}$, $E \rightarrow B$ の置き換えを行うことにより磁場の応力テンソル： T_B は次式で得られる。

$$T_B = \begin{pmatrix} \frac{B_x^2 - \frac{B_z^2 + B_y^2 + B_x^2}{2}}{\mu_0} & \frac{B_x B_y}{\mu_0} & \frac{B_x B_z}{\mu_0} \\ \frac{B_x B_y}{\mu_0} & \frac{B_y^2 - \frac{B_z^2 + B_y^2 + B_x^2}{2}}{\mu_0} & \frac{B_y B_z}{\mu_0} \\ \frac{B_x B_z}{\mu_0} & \frac{B_y B_z}{\mu_0} & \frac{B_z^2 - \frac{B_z^2 + B_y^2 + B_x^2}{2}}{\mu_0} \end{pmatrix} \quad (6.9.17)$$

以上から電場： \vec{E} と磁場： \vec{B} が存在するときの応力テンソルは上記二式の和から、

$$T = T_E + T_B = \begin{pmatrix} \epsilon_0 \left(E_x^2 - \frac{E_z^2 + E_y^2 + E_x^2}{2} \right) + \frac{B_x^2 - \frac{B_z^2 + B_y^2 + B_x^2}{2}}{\mu_0} & \epsilon_0 E_x E_y + \frac{B_x B_y}{\mu_0} & \epsilon_0 E_x E_z + \frac{B_x B_z}{\mu_0} \\ \epsilon_0 E_x E_y + \frac{B_x B_y}{\mu_0} & \epsilon_0 \left(E_y^2 - \frac{E_z^2 + E_y^2 + E_x^2}{2} \right) + \frac{B_y^2 - \frac{B_z^2 + B_y^2 + B_x^2}{2}}{\mu_0} & \epsilon_0 E_y E_z + \frac{B_y B_z}{\mu_0} \\ \epsilon_0 E_x E_z + \frac{B_x B_z}{\mu_0} & \epsilon_0 E_y E_z + \frac{B_y B_z}{\mu_0} & \epsilon_0 \left(E_z^2 - \frac{E_z^2 + E_y^2 + E_x^2}{2} \right) + \frac{B_z^2 - \frac{B_z^2 + B_y^2 + B_x^2}{2}}{\mu_0} \end{pmatrix} \quad (6.9.18)$$

以上から、(6.9.7) 式は上記応力テンソル： T を用いると、

$$\vec{F} = -\epsilon_0 \frac{d}{dt} (\vec{E} \times \vec{B}) + \nabla \cdot T \quad (6.9.19)$$

```
A:TEXYZ11;
A.transpose(A)=transpose(A).A;
eigenvectors(A);
n : length(A);
B : eigenvectors(A);
C : zeromatrix(n, n);
B1:transpose(B[2][1][1]);
B2:transpose(B[2][2][1]);
B3:transpose(B[2][2][2]);
Q:addcol(B1,B2,B3);
m : length(Q);
```

```
B : transpose(Q);
n : length(B);
C : gramscmidt(B);
D : zeromatrix(n, m);
for i:1 thru n do
(D[i] : unitvector(C[i]));
P:transpose(D);
P1:ratsimp(invert(P));
P1.A.P;
ratsimp(%);
factor(%);
```

電場の応力テンソル： T_E の主応力は対角化¹のプログラムを活用して、下記の結果が得られる。これは電場： \vec{E} の方向に正の力、それと直角な方向に負の力が働いていることを示している。

$$T_E = \begin{pmatrix} \frac{\epsilon_0 (E_z^2 + E_y^2 + E_x^2)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\epsilon_0 (E_z^2 + E_y^2 + E_x^2)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\epsilon_0 (E_z^2 + E_y^2 + E_x^2)}{2} \end{pmatrix}$$

¹溝口純敏：Maxima を使った物理数学基礎演習ノート、<http://www9.plala.or.jp/prac-maxima/> 第4章 ベクトルと行列、4.2.6 対称行列の対角化

6.10 電磁場の運動量

質量： m 、電荷： q の粒子に作用するローレンツ力は(6.9.1)式から、粒子の運動方程式は、粒子速度： \vec{v} 、電場： \vec{E} と磁場： \vec{B} とすると、

$$\frac{d}{dt} m \vec{v} = q \vec{E} + q (\vec{v} \times \vec{B}) \quad (6.10.1)$$

ある領域の中では、

$$\sum_i \frac{d}{dt} m_i \vec{v}_i = \int q \vec{E} + q (\vec{v} \times \vec{B}) dV \quad (6.10.2)$$

上式を(6.9.18)式の応力テンソル： T を用いて表すと、

$$\sum_i \frac{d}{dt} m_i \vec{v}_i + \frac{d}{dt} \int \epsilon_0 (\vec{E} \times \vec{B}) dV = \int \nabla \cdot T dV \quad (6.10.3)$$

上式をガウスの定理を用いて変形すると、

$$\sum_i \frac{d}{dt} m_i \vec{v}_i + \frac{d}{dt} \int \epsilon_0 (\vec{E} \times \vec{B}) dV = \int T \cdot \vec{n} dS \quad (6.10.4)$$

上式の左辺第一項は全粒子の運動量、左辺第二項は電磁場の運動量、右辺項は境界面に作用した外力を表す。

6.11 電磁場のエネルギー保存

質量： m 、電荷： q の粒子に作用するローレンツ力は(6.9.1)式に粒子速度： \vec{v} を掛けると、単位時間当たりの仕事となり、

$$\vec{F} \cdot \vec{v} = q \vec{v} \cdot \vec{E} + q \vec{v} \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) \quad (6.11.1)$$

上式右辺第二項で、 \vec{v} と $\vec{v} \times \vec{B}$ は直交しているため、右辺第二項は零である。また、 \vec{i} ：電流とすると、 $q \vec{v} = \vec{i}$ である。以上から、上式は、

$$\vec{F} \cdot \vec{v} = \vec{i} \cdot \vec{E} \quad (6.11.2)$$

アンペールマクスウェルの法則：(6.3.14)式から、

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{i} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \vec{E} \quad (6.11.3)$$

上式から \vec{i} を求めると、

$$\vec{i} = \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \vec{B}) - \epsilon_0 \frac{d}{dt} \vec{E} \quad (6.11.4)$$

(6.11.2)式に上式を代入すると、

$$\vec{E} \cdot \vec{i} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{B}) - \epsilon_0 \vec{E} \cdot \left(\frac{d}{dt} \vec{E} \right) \quad (6.11.5)$$

下記の関係式¹を用いて、

$$\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B})$$

(6.11.5)式の右辺第一項は、

$$\vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{B}) = \nabla \cdot (\vec{B} \times \vec{E}) + \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{E})$$

(6.11.5)式に上式を代入すると、

$$\vec{E} \cdot \vec{i} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot (\vec{B} \times \vec{E}) + \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{E}) - \epsilon_0 \vec{E} \cdot \left(\frac{d}{dt} \vec{E} \right) \quad (6.11.6)$$

ファラデーの電磁誘導の法則：(6.2.7)式から、

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t) = - \frac{d}{dt} \vec{B}(\vec{r}, t) \quad (6.11.7)$$

(6.11.6)式に上式を代入すると、

$$\vec{E} \cdot \vec{i} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot (\vec{B} \times \vec{E}) - \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot \left(\frac{d}{dt} \vec{B} \right) - \epsilon_0 \vec{E} \cdot \left(\frac{d}{dt} \vec{E} \right) \quad (6.11.8)$$

上式を変形し

$$\vec{E} \cdot \vec{i} = - \frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) - \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\mu_0} \frac{1}{2} (\vec{B})^2 + \epsilon_0 \frac{1}{2} (\vec{E})^2 \right) \quad (6.11.9)$$

上式が電磁場のエネルギー保存の式である。右辺第一項は(6.7.4)式からポインティングベクトルで、第二項は(2.6.12)式、(6.4.9)式から、電場のエネルギー密度と磁場のエネルギー密度の変化である。

¹溝口純敏：Maxima を使った物理数学基礎演習ノート、<http://www9.plala.or.jp/prac-maxima/> 第4章 ベクトルと行列、4.3.6 ∇ を使った演算

6.12 例題

例題 6.12.1 直線移動する導体棒に生じる誘導起電力

平行な二本の導体棒：AC、BD を x 軸方向、 xy 平面上置き、導体棒の間隔： A とする。導体棒：PQ を y 軸方向に置き、 A と B を抵抗： R で結び、回路：ABQP を作る。この回路面に垂直な z 軸方向に一樣な磁場： \vec{B} を与え、導体棒：PQ を一定速度： v で x 軸方向に移動させる。

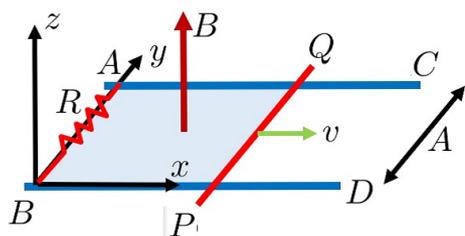


図 6.12.1: 回転する矩形回路に生じる誘導起電力

```
kill(all);
depends ([\Phi, I], t);
PH1:\Phi=B*(S[0]+A*v*t);
diff(PH1,t,1);
PH2:\phi[em]=-rhs(%);
I1:I=-(rhs(PH2))/R;
J1:J=I^2*R;
subst([I1],%);
F1:F=B*I*A;
F2:subst([I1],%);
W2:w=F*v;
subst([F2],%);
```

回路：ABQP を貫く磁束： Φ は、

$$\Phi = (tvA + S_0)B$$

(6.2.3) 式から起電力： ϕ_{em} は、

$$\phi_{em} = -\frac{d}{dt}\Phi = -vAB$$

回路：ABQP に流れる電流： I は、

$$I = \frac{vAB}{R}$$

ジュール熱： J は、

$$J = I^2R = \frac{v^2A^2B^2}{R}$$

導体棒：PQ に作用する力： F は、

$$F = ABI = \frac{vA^2B^2}{R}$$

仕事： w は、

$$w = vF = \frac{v^2A^2B^2}{R}$$

上記から、ジュール熱： J と仕事： w は一致している。

例題 6.12.2 回転する矩形回路に生じる誘導起電力

面積： S の矩形の回路： $ABCD$ を x 軸方向の一様な磁束密度： \vec{B} の中に置き、回路を磁場に垂直な y 軸の周りに角速度： ω で回転させたとき、回路に生じる起電力を求める。回転軸に平行な AB, CD の長さを A 、他の辺： BC, DA の長さを $2r$ 、回路面積： S とする。

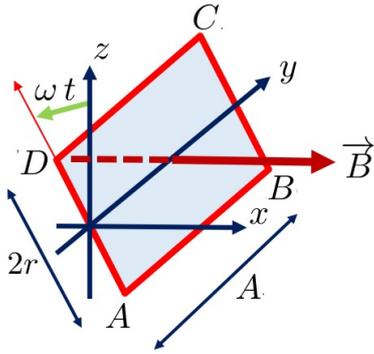


図 6.12.2: 回転する矩形回路に生じる誘導起電力

```
kill(all);
load("vect")$
depends([\Phi,I], t);
assume(\omega>0);
PH1:\Phi=B*S*cos(\omega*t);
diff(PH1,t,1);
PH2:\phi[em]=-rhs(%);
B1:matrix([B],[0],[0]);
V1:matrix([-r*\omega*cos(\omega*t)],[0],
[-r*\omega*sin(\omega*t)]);
V2:matrix([r*\omega*cos(\omega*t)],[0],
[r*\omega*sin(\omega*t)]);
FB1:col(adjoint(transpose(addcol(V1,B1,
matrix([1],[1],[1])))),3);
FB2:col(adjoint(transpose(addcol(V2,B1,
matrix([1],[1],[1])))),3);
F1:F[1]=-e*FB1;
F2:F[2]=-e*FB2;
F1+F2;
\phi[CD]=rhs(F1)[2][1]*A/(-e);
\phi[AB]=rhs(F2)[2][1]*A/(-e);
\phi[em]=rhs(%)*2;
PH3:subst([A=S/(2*r)],%);
PH2-PH3;
```

回路を貫く磁束： Φ は、

$$\Phi = \cos(\omega t) B S \quad (6.12.1)$$

(6.2.3) 式から起電力： ϕ_{em} は、

$$\phi_{em} = -\frac{d}{dt} \Phi = \omega \sin(\omega t) B S \quad (6.12.2)$$

回路内の電子に作用する力から起電力を求める。辺： BC 、辺： DA による回路内の電子に作用する力は相殺されるので零となる。磁束密度： \vec{B} 、辺： CD の速度： v_{CD} 、辺： AB の速度： v_{AB} とすると、

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} B \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_{CD} = \begin{pmatrix} -\omega r \cos(\omega t) \\ 0 \\ -\omega r \sin(\omega t) \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_{AB} = \begin{pmatrix} \omega r \cos(\omega t) \\ 0 \\ \omega r \sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

導線内の電子(電荷： $-e$)に作用する力： F は(5.3.1)式から、

$$F_{CD} = (-e) \vec{v}_{CD} \times \vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ e \omega r \sin(\omega t) B \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$F_{AB} = (-e) \vec{v}_{AB} \times \vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ -e \omega r \sin(\omega t) B \\ 0 \end{pmatrix}$$

各辺の起電力は、(6.2.4)式、(5.3.2)式から、

$$\phi_{CD} = \frac{F_{CD} A}{-e} = -\omega r \sin(\omega t) A B$$

$$\phi_{AB} = \frac{F_{AB} A}{-e} = \omega r \sin(\omega t) A B$$

辺： CD の起電力は CD 方向、辺： AB の起電力は AB 方向だから、回路全体の起電力： ϕ_{em} は下記となり、(6.12.2)式と一致する。

$$\phi_{em} = 2 \omega r \sin(\omega t) A B = \omega \sin(\omega t) B S \quad (6.12.3)$$

```
I1:I(t)=\phi[em]/R;
T1:T=2*\pi/\omega;
R*I(t)^2;
subst([I1,PH2],%);
W1:w='integrate(%,t,0,T);
subst([T1],%);
ev(%,integrate);
subst([\pi=\omega*T/2],%);
```

```

I2:matrix([0],[I(t)],[0]);
F3:col(adjoint(transpose(addcol(I2,B1,
matrix([1],[1],[1]))),3);
N3:N=-F3[3][1]*A*r*2*sin(\omega*t);
subst([I1,PH2],%);
subst([A=S/(2*r)],%);
W2:w='\integrate(rhs(%)*\omega,t,0,T);
subst([T1],%);
ev(%,integrate);
subst([\%pi=\omega*T/2],%);

```

回路の抵抗： R としたとき、発生するジュール熱と回路を角速度： ω で回転するに要する仕事の関係を調べる。回路に流れる電流： $I(t)$ 、ジュール熱： J は、

$$I(t) = \frac{\phi_{em}}{R}, \quad J = I(t)^2 R \quad (6.12.4)$$

回路の回転周期 T は、 $T = \frac{2\pi}{\omega}$ で、一回転させたときのジュール熱： J は、(6.12.2) 式から、

$$\begin{aligned}
J &= \int_0^T I(t)^2 R dt = \frac{\omega^2}{R} \int_0^T \sin(\omega t)^2 dt B^2 S^2 \\
&= \frac{\omega^2 \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin(\omega t)^2 dt B^2 S^2}{R} = \frac{\pi \omega B^2 S^2}{R} \\
&= \frac{\omega^2 B^2 S^2 T}{2R}
\end{aligned} \quad (6.12.5)$$

辺： AB に流れる電流： $I(t)$ 、単位長さに作用する力： ΔF は(5.2.1)式から、

$$\vec{I}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ I(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Delta F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -I(t) B \end{pmatrix}$$

辺： AB 、 CD によるモーメント： N は、(6.12.3)式、(6.12.4)式から、

$$\begin{aligned}
N &= 2r I(t) \sin(\omega t) AB = \frac{2\omega r \sin(\omega t)^2 AB^2 S}{R} \\
&= \frac{\omega \sin(\omega t)^2 B^2 S^2}{R}
\end{aligned} \quad (6.12.6)$$

一回転させたときのモーメント： N による仕事： w は、

$$\begin{aligned}
w &= \int_0^T N \omega dt = \frac{\omega^2}{R} \int_0^T \sin(\omega t)^2 dt B^2 S^2 \\
&= \frac{\omega^2}{R} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin(\omega t)^2 dt B^2 S^2 = \frac{\pi \omega B^2 S^2}{R} \quad (6.12.7) \\
&= \frac{\omega^2 B^2 S^2 T}{2R}
\end{aligned}$$

ジュール熱： J による(6.12.5)式と仕事： w による上式の結果は一致している。

例題 6.12.3 二つの長い中空円筒

中心軸を一致させた半径： A 、 B の二つの長い中空円筒に同じ強さの電流： I を軸方向に互いに逆方向に流したときの磁束密度： B と自己インダクタンス自己インダクタンス： L を求める。ここで $A < B$ とする。

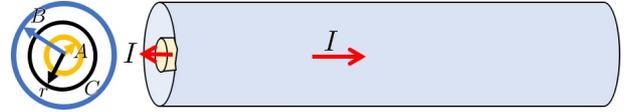


図 6.12.3: 二つの長い中空円筒

```

kill(all);
assume(A>0);
assume(B>0);
assume(B>A);
B1:B(r)*2*\%pi*r=\mu[0]*I;
B2:solve(%,B(r))[1];
PH1:\Phi='integrate(B(r)*l,r,A,B);
subst([B2],%);
ev(%,integrate);
L=rhs(%)/I;

```

アンペールの法則： $(5.6.8)$ 式から、

$$\int_C \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{s} = \mu_0 \iint_S \vec{i}(\vec{r}') \cdot \vec{n}(\vec{r}') dS \quad (6.12.8)$$

内側の円筒内： $r < A$ では、磁束密度： $B(r)$ は中心軸対象で、上式の線積分： C を貫く電流は $I = 0$ であるから磁束密度： $B(r) = 0$ となる。また、外側の円筒外： $r > B$ では、磁束密度： $B(r)$ は中心軸対象で、上式の線積分： C を貫く電流は $I = 0$ であるから磁束密度： $B(r) = 0$ となる。内側の円筒と外側の円筒 $A < r < B$ の間で、磁束密度： $B(r)$ は中心軸対象で、内側の円筒を囲む半径： r の円を上記の線積分： C とし、 C 上の磁束密度： $B(r)$ とすると、上式から、

$$2\pi r B(r) = \mu_0 I$$

上式から、 $A < r < B$ では磁束密度： $B(r)$ は、

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

磁束： Φ は上式を $A < r < B$ で積分し、

$$\begin{aligned}
\Phi &= l \int_A^B B(r) dr = \frac{\mu_0 l I}{2\pi} \int_A^B \frac{1}{r} dr \\
&= \frac{\mu_0 l I}{2\pi} (\log(B) - \log(A))
\end{aligned}$$

上式から自己インダクタンス： L は、

$$L = \frac{\mu_0 l (\log(B) - \log(A))}{2\pi}$$

例題 6.12.4 ソレノイドコイルのインダクタンス

二つのソレノイドコイル：1、2を重ね、コイル2はコイル1の外側に巻かれている。コイルはそれぞれ単位長さ当たりの巻き数： n_1, n_2 、長さ： l_1, l_2 、断面積： S_1, S_2 とする。ここで、 $l_1 > l_2$ 、断面積： $S_1 < S_2$ とする。

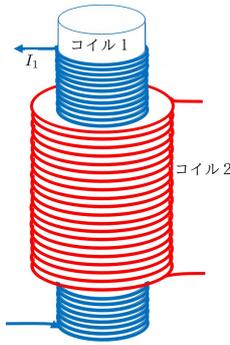


図 6.12.4: 二つのソレノイドコイル

```
kill(all);
B1:B=\mu[0]*n[1]*I[1];
PH1:\Phi[1]=n[1]*l[1]*B*S[1];
subst([B1],%);
L1:L[1]=rhs(%)/I[1];
PH2:\Phi[2]=n[2]*l[2]*B*S[1];
subst([B1],%);
M1:M=rhs(%)/I[1];
PH5:\phi[1]=L[1]*'diff(I[1],t,1);
PH51:solve(PH5,'diff(I[1],t,1))[1];
PH6:\phi[em2]=-M*'diff(I[1],t,1);
subst([PH51],%);
subst([M1,L1],%);
```

コイル1に電流： I_1 を流したとき、コイル1内に生じる磁束密度： B は、

$$B = \mu_0 n_1 I_1$$

コイル1を貫く磁束： Φ_1 は、一巻きで $S_1 B$ であるから、巻き回数： $l_1 n_1$ 倍して、

$$\Phi_1 = l_1 n_1 S_1 B = \mu_0 l_1 n_1^2 I_1 S_1$$

上式から、自己インダクタンス： L_1 は、

$$L_1 = \mu_0 l_1 n_1^2 S_1$$

コイル2を貫く磁束： Φ_2 は、

$$\Phi_2 = S_1 l_2 n_2 B = \mu_0 n_1 I_1 S_1 l_2 n_2$$

上式から、相互インダクタンス： M は、

$$M = \mu_0 n_1 S_1 l_2 n_2$$

コイル1に電流： I_1 を流すには、誘導起電力に見合う電位： ϕ_1 を掛ける必要がある。

$$\phi_1 = L_1 \left(\frac{d}{dt} I_1 \right)$$

上式から、

$$\frac{d}{dt} I_1 = \frac{\phi_1}{L_1}$$

コイル2に生じる起電力： ϕ_{em2} は下記となり、コイルの巻き数比となる。

$$\phi_{em2} = - \left(\frac{d}{dt} I_1 \right) M = - \frac{\phi_1 M}{L_1} = - \frac{\phi_1 l_2 n_2}{l_1 n_1}$$

```
PH7:\phi[1](t)=L[1]*diff(I[1](t),t,1)
+M*diff(I[2](t),t,1);
PH8:\phi[2](t)=L[2]*diff(I[2](t),t,1)
+M*diff(I[1](t),t,1);
DU1:dU=\phi[1](t)*I[1](t)+\phi[2](t)
*I[2](t);
subst([PH7,PH8],DU1);
DU2:expand(%);
U1:U='integrate(rhs(DU1),t,0,T);
U1:U='integrate(rhs(DU2),t,0,T);
I1:I[1](t)*I[2](t)*M;
DI1:diff(I1,t,1);
I2:L[2]*I[2](t)^2/2;
DI2:diff(I2,t,1);
I3:L[1]*I[1](t)^2/2;
DI3:diff(I3,t,1);
DI4:DI1+DI2+DI3;
DI4-rhs(DU2);
I4:I1+I2+I3;
U=subst([t=T],I4);
```

コイル1に $I_1(t)$ 、コイル2に $I_2(t)$ の電流を流したとき、コイルには電流変化を妨げる起電力が働く。このためこの起電力に相当する電位差を余分にかける必要がある。このことからコイル1の電位差： ϕ_1 、コイル2の電位差： ϕ_2 は、

$$\phi_1(t) = \left(\frac{d}{dt} I_2(t) \right) M + L_1 \left(\frac{d}{dt} I_1(t) \right)$$

$$\phi_2(t) = \left(\frac{d}{dt} I_1(t) \right) M + L_2 \left(\frac{d}{dt} I_2(t) \right)$$

これに伴うエネルギー： U は下記となり、上式を代入すると、

$$\begin{aligned} U &= \int_0^T \phi_2(t) I_2(t) + \phi_1(t) I_1(t) dt \\ &= \int_0^T I_1(t) \left(\frac{d}{dt} I_2(t) \right) M + I_2(t) \left(\frac{d}{dt} I_1(t) \right) M \\ &\quad + L_2 I_2(t) \left(\frac{d}{dt} I_2(t) \right) + L_1 I_1(t) \left(\frac{d}{dt} I_1(t) \right) dt \end{aligned}$$

下記の関係から、

$$\begin{aligned} \int I_1(t) \left(\frac{d}{dt} I_2(t) \right) M + I_2(t) \left(\frac{d}{dt} I_1(t) \right) M dt &= I_1(t) I_2(t) M \\ \int L_2 I_2(t) \left(\frac{d}{dt} I_2(t) \right) dt &= \frac{L_2 I_2(t)^2}{2} \\ \int L_1 I_1(t) \left(\frac{d}{dt} I_1(t) \right) dt &= \frac{L_1 I_1(t)^2}{2} \end{aligned}$$

初期： $t = 0$ に $I_1(0) = 0$, $I_2(0) = 0$ とすると、エネルギー： U は、

$$U = \frac{L_2 I_2(T)^2}{2} + M I_1(T) I_2(T) + \frac{L_1 I_1(T)^2}{2}$$

例題 6.12.5 同一平面上の二つの円形回路の相互インダクタンス

二つの円形回路が xy 平面上にあり、中心は z 軸上にある。外側の回路1の半径: A_1 、内側の回路2の半径: A_2 とし、 $A_1 \gg A_2$ とする。この二つの円形回路の相互インダクタンスを求める。

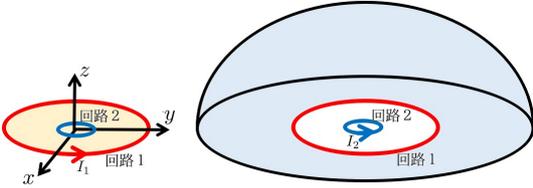


図 6.12.5: 同一平面上の二つの円形回路

```
kill(all);
assume(A>0);
assume(A[1]>0);
B[1]=matrix([0],[0],[(mu[0]*A^2*I)/(2
*(A^2+z^2)^(3/2))]);
B1:subst([z=0,A=A[1],I=I[1]],%);
PH2:\Phi[2]=rhs(B1)[3][1]*%pi*A[2]^2;
L21:L[21]=rhs(%)/I[1];
B[2]=matrix([(3*mu[0]*x*z*I*S)/(4*%pi
*r^5)],[(3*mu[0]*y*z*I*S)/(4*%pi*r^5)],
[-(mu[0]*(1-(3*z^2)/r^2)*I*S)/(4*%pi
*r^3)]);
B2:subst([z=0,I=I[2],S=%pi*A[2]^2],%);
PH1:\Phi[1]='integrate(rhs(B2)[3][1]*2
*%pi*r,r,A[1],inf);
ev(%integrate);
L12:L[12]=-rhs(%)/I[2];
L21-L12;
```

回路1に電流: I_1 を流したとき、 $A_1 \gg A_2$ であるから、回路2の内部の磁束密度は中心の磁束密度で近似してもよい。回路1による中心の磁束密度: B_1 は (5.7.7) 式から、 $z = 0$ として、

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\mu_0 I_1}{2 A_1} \end{pmatrix}$$

上式から回路2を貫く磁束: Φ_2 は、

$$\Phi_2 \approx \pi A_2^2 B_1 = \frac{\pi \mu_0 I_1 A_2^2}{2 A_1}$$

上式から、相互インダクタンスは、

$$L_{21} = \frac{\pi \mu_0 A_2^2}{2 A_1} \quad (6.12.9)$$

回路2に電流: I_2 を流したとき、回路1の内部の磁束密度は複雑で求めることができない。そこで回路1の外側の十分大きな半球面の積分を行う。 $A_1 \gg A_2$ であるから、回路2から十分離れた位置の磁束密度: B_2 は (5.7.12) 式から、 $z = 0$ として、

$$B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{\mu_0 A_2^2 I_2}{4 r^3} \end{pmatrix}$$

上式から回路1の外側の十分大きな半球面を貫く磁束: Φ_1 は、

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= - \int_{A_1}^{\infty} \frac{\mu_0 A_2^2 I_2}{4 r^3} 2 \pi r dr = - \frac{\pi \mu_0 A_2^2 I_2}{2} \int_{A_1}^{\infty} \frac{1}{r^2} dr \\ &= - \frac{\pi \mu_0 A_2^2 I_2}{2 A_1} \end{aligned}$$

上式から、相互インダクタンスは、

$$L_{12} = \frac{\pi \mu_0 A_2^2}{2 A_1} \quad (6.12.10)$$

(6.12.9) 式、(6.12.10) 式から、 $L_{12} = L_{21}$ である。

例題 6.12.6 共通の中心軸を持つ二つの円形回路の相互インダクタンス

図 5.7.5 に示す、共通の中心軸を持ち、中心間距離： R の二つの円形回路： C_1, C_2 、半径： A_1, A_2 の円形回路の相互インダクタンスを求める。ここで、 $R \gg A_1, A_2$ とする。

```
kill(all);
load("vect")$
assume(A[1]>0);
assume(A[2]>0);
assume(R>0);
N1:matrix([0],[0],[1]);
B=matrix([(3*mu[0]*x*z*A^2*I)/(4*(z^2
+y^2+x^2)^(5/2))],[ (3*mu[0]*y*z*A^2*I)
/(4*(z^2+y^2+x^2)^(5/2))],[ (mu[0]*
(2*z^2-y^2-x^2)*A^2*I)/(4*(z^2+y^2
+x^2)^(5/2))]);
B1:B=rhs(%).N1;
subst([z=R,x^2=r^2-y^2,A=A[1],I=I[1]],B1);
PH2:\Phi[2]='integrate(rhs(%)*2*pi*r,r,
0,A[2]);
ev(%,integrate);
PH21:factor(%);
PH22:subst([R^2=R^2-A[2]^2],%);
L21:L[21]=rhs(%)/I[1];
subst([z=-R,x^2=r^2-y^2,A=A[2],I=I[2]],
B1);
PH3:\Phi[1]='integrate(rhs(%)*2*pi*r,r,
0,A[1]);
ev(%,integrate);
PH31:factor(%);
PH32:subst([R^2=R^2-A[1]^2],%);
L12:L[12]=rhs(%)/I[2];
L12-L21;
```

回路： C_1 から十分離れた位置の磁束密度： B は (5.7.12) 式から、

$$B = \begin{pmatrix} \frac{3\mu_0 x z A^2 I}{4(z^2+y^2+x^2)^{\frac{5}{2}}} \\ \frac{3\mu_0 y z A^2 I}{4(z^2+y^2+x^2)^{\frac{5}{2}}} \\ \frac{\mu_0 (2z^2-y^2-x^2) A^2 I}{4(z^2+y^2+x^2)^{\frac{5}{2}}} \end{pmatrix} \quad (6.12.11)$$

回路： C_1 に電流： I_1 を流したとき、回路： C_2 面における磁束密度： B は、上式に $z = R, r^2 = x^2 + y^2, A = A_1, I = I_1$ とすると、

$$B = \frac{\mu_0 A_1^2 I_1 (2R^2 - r^2)}{4(R^2 + r^2)^{\frac{5}{2}}}$$

上式を積分して磁束： Φ_2 を求めると、

$$\begin{aligned} \Phi_2 &= \frac{\pi \mu_0 A_1^2 I_1}{2} \int_0^{A_2} \frac{r (2R^2 - r^2)}{(R^2 + r^2)^{\frac{5}{2}}} dr \\ &= \frac{\pi \mu_0 A_1^2 I_1 A_2^2}{2(R^2 + A_2^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

$R \gg A_2$ であるから、

$$\Phi_2 \approx \frac{\pi \mu_0 A_1^2 I_1 A_2^2}{2R^3}$$

上式から相互インダクタンスは、

$$L_{21} = \frac{\pi \mu_0 A_1^2 A_2^2}{2R^3} \quad (6.12.12)$$

同様に、回路： C_2 に電流： I_2 を流したとき、回路： C_1 面における磁束密度： B は、(6.12.11) 式に $z = -R, r^2 = x^2 + y^2, A = A_2, I = I_2$ とすると、

$$B = \frac{\mu_0 A_2^2 I_2 (2R^2 - r^2)}{4(R^2 + r^2)^{\frac{5}{2}}}$$

上式を積分して磁束： Φ_1 を求めると、

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \frac{\pi \mu_0 A_2^2 I_2}{2} \int_0^{A_1} \frac{r (2R^2 - r^2)}{(R^2 + r^2)^{\frac{5}{2}}} dr \\ &= \frac{\pi \mu_0 A_1^2 A_2^2 I_2}{2(R^2 + A_1^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

$R \gg A_1$ であるから、

$$\Phi_1 = \frac{\pi \mu_0 A_1^2 A_2^2 I_2}{2R^3}$$

上式から相互インダクタンスは、

$$L_{12} = \frac{\pi \mu_0 A_1^2 A_2^2}{2R^3} \quad (6.12.13)$$

(6.12.12) 式、(6.12.13) 式から、 $L_{12} = L_{21}$ である。

例題 6.12.7 細長い二本の平行な円柱の自己インダクタンス

半径： R の非常に細長い、長さ： l の二本の円柱の導体： A, B を xy 平面上に置き、それを間隔： A で y 軸方向に平行に置き、その端部は接続されている。この非常に細長い矩形回路の自己インダクタンス： L を求める。ここで、 $R \ll A$ とする。

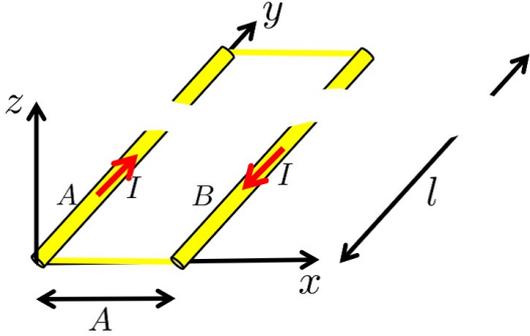


図 6.12.6: 細長い二本の平行な円柱

磁束： Φ は、上式の回路内の積分結果として得られ、

$$\begin{aligned}\Phi &= -l \int_R^{A-R} B(x) dx \\ &= -l \int_R^{A-R} \left(-\frac{\mu_0 I}{2\pi(A-x)} - \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \right) dx \\ &= -\frac{\mu_0 l I (\log(R) - \log(A-R))}{\pi}\end{aligned}$$

上式から、単位長さ当たりの自己インダクタンスは、

$$L = -\frac{\mu_0 (\log(R) - \log(A-R))}{\pi} \approx \frac{\mu_0}{\pi} \log\left(\frac{A}{R}\right)$$

```
kill(all);
assume(A>R);
assume(A>2*R);
assume(R>0);
B1:B(r)=-\mu[0]*I/(2*\pi*r);
B2:B(r)=-\mu[0]*I/(2*\pi*(A-r));
B3:B(r)=rhs(B1)+rhs(B2);
PH1:\Phi='integrate(-B(r)*l,r,R,A-R);
subst([B3],%);
ev(%,integrate);
factor(%);
L=rhs(%) / I / l;
```

導体： A を y 軸上に置き、 y 軸の正方向に電流： I を流し、導体： B を $x = A$ で y 軸に平行に置き、 y 軸の負方向に電流： I を流す。導体： A による回路内 xy 平面上の磁束密度： B は、(5.7.32) 式から、

$$B(x) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi x}$$

導体： B による回路内 xy 平面上の磁束密度： B は

$$B(x) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi(A-x)}$$

上記の和から、回路内 xy 平面上の磁束密度： B は

$$B(x) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi(A-x)} - \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$$

例題 6.12.8 コイルと抵抗の回路

自己インダクタンス： L 、抵抗： R 、起電力： ϕ の電池とスイッチ： S の下記の回路で、初期にスイッチ： S を A に接続する。ある瞬間にスイッチ： S を B に接続する。この時の電流： $I(t)$ と仕事、ジュール熱の関係を調べる。

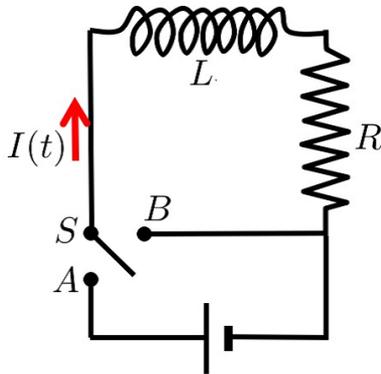


図 6.12.7: コイルと抵抗の回路

```
kill(all);
PH1:\phi-L*diff(I(t),t,1)-R*I(t)=0;
I1:ode2(PH1,I(t),t);
subst([t=0],rhs(I1)=0);
C1:solve(%,%c)[1];
subst([C1],I1);
I2:expand(%);
subst([\phi=1,R=1,L=1],rhs(I2));
plot2d(%,[t,0,10],[style,[lines,5,1]]);
assume(T>0);
W1:w='integrate(\phi*I(t),t,0,T);
subst([I2],W1);
ev(%,'integrate);
W2:expand(%);
PH2:solve(W2,\phi^2)[1];
J1:J='integrate(R*I(t)^2,t,0,T);
subst([I2],J1);
ev(%,'integrate);
factor(%);
J2:expand(%);
I3:subst([t=T],I2);
PH3:solve(%,\phi)[1];
J2-W2;
subst([PH3],%);
factor(%);
```

スイッチ： S を A に接続したときの回路ループの電圧降下は、

$$-I(t)R - \left(\frac{d}{dt}I(t)\right)L + \phi = 0$$

上式を ode2 関数で解くと、

$$I(t) = e^{-\frac{tR}{L}} \left(\frac{\phi e^{\frac{tR}{L}}}{R} + \%c \right) \quad (6.12.14)$$

初期値として、 $t = 0$ で $I(0) = 0$ であるから、

$$\frac{\phi}{R} + \%c = 0$$

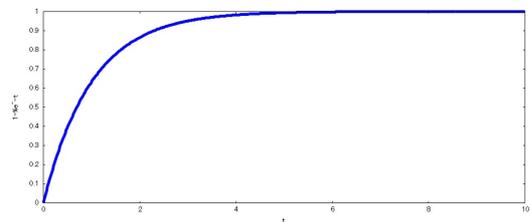
$\%c$ は、

$$\%c = -\frac{\phi}{R}$$

(6.12.14) 式に上式を代入すると、

$$I(t) = \frac{\phi}{R} - \frac{\phi e^{-\frac{tR}{L}}}{R} \quad (6.12.15)$$

$\phi = 1, R = 1, L = 1, T = 10$ として、上式を図示すると、

図 6.12.8: スイッチ： S を A に接続したときの電流

回路全体の仕事： $w = \phi I$ を $t = T$ までを求め、(6.12.15) 式を代入すると、

$$w = \phi \int_0^T I(t) dt = \phi \int_0^T \left(\frac{\phi}{R} - \frac{\phi e^{-\frac{tR}{L}}}{R} \right) dt \quad (6.12.16)$$

$$= \frac{\phi^2 L e^{-\frac{RT}{L}}}{R^2} + \frac{\phi^2 T}{R} - \frac{\phi^2 L}{R^2}$$

$$\phi^2 = \frac{w R^2 e^{\frac{RT}{L}}}{(RT - L) e^{\frac{RT}{L}} + L}$$

抵抗： R によるジュール熱は RI^2 で、 $t = T$ までに発生したジュール熱： J は、

$$J = \int_0^T I(t)^2 dt R = R \int_0^T \left(\frac{\phi}{R} - \frac{\phi e^{-\frac{tR}{L}}}{R} \right)^2 dt \quad (6.12.17)$$

$$= \frac{2\phi^2 L e^{-\frac{RT}{L}}}{R^2} - \frac{\phi^2 L e^{-\frac{2RT}{L}}}{2R^2} + \frac{\phi^2 T}{R} - \frac{3\phi^2 L}{2R^2}$$

(6.12.15) 式に $t = T$ を代入し、

$$I(T) = \frac{\phi}{R} - \frac{\phi e^{-\frac{RT}{L}}}{R} \quad (6.12.18)$$

上式から ϕ を求めると、

$$\phi = \frac{R e^{\frac{RT}{L}} I(T)}{e^{\frac{RT}{L}} - 1} \quad (6.12.19)$$

回路全体の仕事： w から抵抗： R によるジュール熱を引くと下記となり、(6.12.19) 式を代入すると下記となり、これは (6.4.3) 式からコイルにためられた磁場エネルギーに等しい。

$$w - J = -\frac{\phi^2 L e^{-\frac{RT}{L}}}{R^2} + \frac{\phi^2 L e^{-\frac{2RT}{L}}}{2R^2} + \frac{\phi^2 L}{2R^2} = \frac{LI(T)^2}{2} \quad (6.12.20)$$

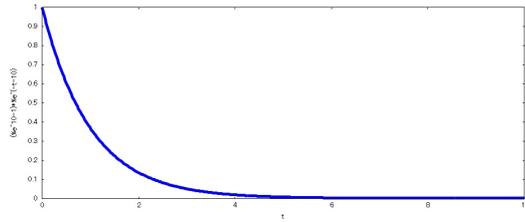


図 6.12.9: スイッチ： S を A から B に接続したときの電流

```
PH5:-L*diff(I(t),t,1)-R*I(t)=0;
I5:ode2(PH5,I(t),t);
subst([t=0],rhs(I5)=rhs(I3));
C5:solve(%,%c)[1];
I6:subst([C5],I5);
subst([\phi=1,R=1,L=1,T=10],rhs(I6));
plot2d(%,[t,0,10],[style,[lines,5,1]]);
assume(L>0);
assume(R>0);
PH6:solve(I6,\phi)[1];
J5:J='integrate(R*I(t)^2,t,0,\inf);
subst([I6],%);
ev(%,'integrate);
subst([PH3],%);
factor(%);
```

スイッチ： S を A から B に接続したときの回路ループの電圧降下は、

$$-I(t)R - \left(\frac{d}{dt}I(t)\right)L = 0$$

上式を上式を ode2 関数で解くと、

$$I(t) = \%c e^{-\frac{t}{L}} \quad (6.12.21)$$

初期値として、スイッチ： S を A から B に接続したときの電流：(6.12.18) 式を代入し、

$$\%c = \frac{\phi}{R} - \frac{\phi e^{-\frac{RT}{L}}}{R}$$

(6.12.21) 式に上式を代入すると、

$$I(t) = \frac{\left(\phi e^{\frac{RT}{L}} - \phi\right) e^{-\frac{RT}{L} - \frac{t}{L}}}{R} \quad (6.12.22)$$

上式から ϕ を求めると、

$$\phi = -\frac{I(t) R e^{\frac{t}{L}}}{e^{-\frac{RT}{L}} - 1} \quad (6.12.23)$$

抵抗： R により $t = 0 \rightarrow \infty$ までに発生したジュール

熱： J は下記となり、(6.12.22) 式を代入すると、

$$J = \int_0^{\infty} RI(t)^2 dt = \frac{\left(\phi e^{\frac{RT}{L}} - \phi\right)^2}{R} \int_0^{\infty} e^{2\left(-\frac{RT}{L} - \frac{t}{L}\right)} dt = \frac{L e^{-\frac{2RT}{L}} \left(\phi e^{\frac{RT}{L}} - \phi\right)^2}{2R^2} = \frac{L e^{-\frac{2RT}{L}} \left(\frac{R e^{\frac{2RT}{L}} I(T)}{e^{\frac{RT}{L}} - 1} - \frac{R e^{\frac{RT}{L}} I(T)}{e^{\frac{RT}{L}} - 1}\right)^2}{2R^2} = \frac{LI(T)^2}{2} \quad (6.12.24)$$

上式は (6.12.20) 式と同じであり、初期にコイルに蓄えられた磁場エネルギーが放出された。

例題 6.12.9 コイル、コンデンサーと抵抗の回路 (交流起電力)

自己インダクタンス: L 、電気容量: C 、抵抗: R 、交流起電力: ϕ の下記の回路の電流: $I(t)$ について調べる。

```
kill(all);
assume(C*R^2>4*L);
assume(C>0);
assume(T>0);
assume(\omega>0);
PH1:L*diff(I(t),t,1)+R*I(t)+Q(t)/C=\phi;
I1:I(t)=diff(Q(t),t,1);
assume(\phi[0]>0);
PH2:\phi=\phi[0]*cos(\omega*t);
subst([I1],PH1);
subst([PH2],%);
ode2(%,Q(t),t);
subst(%,I1);
ev(%,diff);
lhs(%)=last(rhs(%));
factor(%);
I2:expand(%);
COS1:coeff(rhs(I2),cos(\omega*t));
SIN1:coeff(rhs(I2),sin(\omega*t));
```

```
COS1^2+SIN1^2;
AM1:factor(%);
AM11:sqrt(num(AM1)/(\omega^2*C^2));
denom(AM1)/(\omega^2*C^2);
expand(%);
R^2+(\omega*L-1/\omega/C)^2;
AM21:sqrt(%);
AM3:I[0]=AM11/AM21;
SIN1/COS1;
I21:num(rhs(I2))/(%i*\omega*C);
(denom(rhs(I2))/(%i*\omega*C));
I22:expand(%);
AM4:polarform(1/I22);
X1:R/sqrt(R^2+(\omega*L-1/(\omega*C))^2);
Y1:(\omega*L-1/(\omega*C))/sqrt(R^2+(\omega*L-1/(\omega*C))^2);
TN1:tan(\theta)=Y1/X1;
cos(\theta)=X1/sqrt(X1^2+Y1^2);
CS10:factor(%);
CS1:cos(\theta)=(R)/sqrt(R^2+(\omega*L-1/(\omega*C))^2);
I3:I(t)=I[0]*cos(\omega*t-\theta);
\omega*L-1/(\omega*C)=0;
OM1:solve(%,\omega)[2];
```

回路に流れる電流: $I(t)$ 、コンデンサーに蓄えられる電荷: $Q(t)$ 、交流起電力: ϕ とすると、回路ループの電圧降下は、

$$I(t)R + \left(\frac{d}{dt}I(t)\right)L + \frac{Q(t)}{C} = \phi \quad (6.12.25)$$

ここで、

$$I(t) = \frac{d}{dt}Q(t), \quad \phi = \phi_0 \cos(\omega t) \quad (6.12.26)$$

(6.12.25) 式に上式を代入すると、

$$\left(\frac{d}{dt}Q(t)\right)R + \left(\frac{d^2}{dt^2}Q(t)\right)L + \frac{Q(t)}{C} = \phi_0 \cos(\omega t)$$

上式を ode2 関数で解くと、

$$Q(t) = \%k1 e^{\frac{t\left(\sqrt{\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{CL} - \frac{R}{L}}\right)}{2}} + \%k2 e^{\frac{t\left(-\sqrt{\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{CL} - \frac{R}{L}}\right)}{2}} + \frac{16\phi_0\omega\sin(\omega t)C^2L^6R - 16\phi_0\omega^2\cos(\omega t)C^2L^7 + 16\phi_0\cos(\omega t)CL^6}{(8\omega^2C^2L^6 - 8CL^5 + L^2(8\omega^2C^2L^4 + 8CL^3))R^2 + 16\omega^4C^2L^8 - 32\omega^2CL^7 + 16L^6}$$

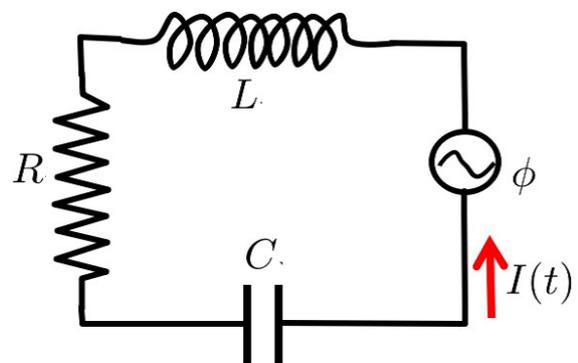


図 6.12.10: コイル、コンデンサーと抵抗の回路 (交流起電力)

上式を時間： t で微分して、電流： $I(t)$ を求めると、

$$I(t) = \frac{\%k1 \left(\sqrt{\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{CL} - \frac{R}{L}} \right) e^{\frac{t \left(\sqrt{\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{CL} - \frac{R}{L}} \right)}{2}}}{2} + \frac{\%k2 \left(-\sqrt{\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{CL} - \frac{R}{L}} \right) e^{\frac{t \left(-\sqrt{\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{CL} - \frac{R}{L}} \right)}{2}}}{2}$$

$$+ \frac{16 \phi_0 \omega^2 \cos(\omega t) C^2 L^6 R + 16 \phi_0 \omega^3 \sin(\omega t) C^2 L^7 - 16 \phi_0 \omega \sin(\omega t) C L^6}{(8 \omega^2 C^2 L^6 - 8 C L^5 + L^2 (8 \omega^2 C^2 L^4 + 8 C L^3)) R^2 + 16 \omega^4 C^2 L^8 - 32 \omega^2 C L^7 + 16 L^6}$$

上式右辺の第一項と第二項は時間がたつと零になるため、右辺第三項が定常解となる。右辺第三項を整理すると、

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t - \theta) \quad (6.12.27)$$

ここで、

$$I_0 = \frac{\phi_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}$$

$$\tan(\theta) = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \quad (6.12.28)$$

$$\cos(\theta) = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}$$

交流起電力： ϕ の円周波数： ω が下記るとき、電流の変動振幅が最大となる。

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{C} \sqrt{L}}$$

```
2*%pi=\omega*T;
T1:solve(%,T)[1];
dw=\phi*I(t);
subst([PH2,I3],%);
w='integrate(rhs(%,t,0,T)/T;
ev(%,integrate);
subst([T1],%);
factor(%) ;
subst([CS1,AM3],%);
factor(%) ;
w=(\phi[0]^2*R)/(2*(R^2+(\omega*L
-1/(\omega*C))^2));
```

この回路での仕事の平均を求める。交流起電力の周期： T は、

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

仕事は $w = \phi I(t)$ で与えられるので、この回路での仕事の平均： w は、

$$w = \frac{1}{T} \int_0^T \phi I(t) dt$$

上式に (6.12.26) 式、(6.12.27) 式、(6.12.28) 式を代入すると、

$$w = \frac{\phi_0 I_0}{T} \int_0^T \cos(\omega t) \cos(\theta - \omega t) dt$$

$$= \frac{\phi_0 I_0}{T} \left(\frac{\sin(2\omega T - \theta) + 2\omega \cos(\theta) T}{4\omega} + \frac{\sin(\theta)}{4\omega} \right)$$

$$= \frac{\phi_0 I_0 \omega}{2\pi} \left(\frac{\sin(\theta)}{4\omega} + \frac{4\pi \cos(\theta) - \sin(\theta)}{4\omega} \right)$$

$$= \frac{\phi_0 I_0 \cos(\theta)}{2}$$

$$= \frac{\phi_0^2 R}{2 \left(R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 \right)}$$

例題 6.12.10 コイル、コンデンサーと抵抗の回路 (1)

自己インダクタンス： L 、電気容量： C 、抵抗： R 、起電力： ϕ の電池とスイッチ： S の下記の回路で、初期にスイッチ： S を A に接続する。ある瞬間にスイッチ： S を B に接続する。この時の電流： $I(t)$ と仕事、ジュール熱の関係を調べる。

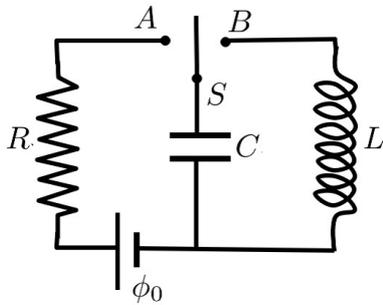


図 6.12.11: コイル、コンデンサーと抵抗の回路 (1)

```
kill(all);
assume(L>0);
assume(C>0);
PH1:R*I(t)+Q(t)/C=\phi[0];
I1:I(t)=diff(Q(t),t,1);
subst([I1],PH1);
Q1:ode2(% ,Q(t),t);
subst([Q(t)=0,t=0],Q1);
solve(% ,%c)[1];
subst(% ,Q1);
Q2:expand(%);
subst([Q2],I1);
I2:ev(% ,diff);
Q21:subst([t=T],Q2);
PHT:solve(Q21,\phi[0])[1];
subst([C=1,R=1,\phi[0]=1],I2);
plot2d(rhs(%),[t,0,10],[style,
[lines,5,1]]);
dw=\phi[0]*I(t);
subst([I2],%);
w='integrate(rhs(%),t,0,T);
W1:ev(% ,integrate);
dJ=R*I(t)^2;
subst([I2],%);
J='integrate(rhs(%),t,0,T);
J1:ev(% ,integrate);
```

```
W1-J1;
expand(%);
subst([PHT],%);
factor(%);
```

回路に流れる電流： $I(t)$ 、コンデンサーに蓄えられる電荷： $Q(t)$ 、起電力： ϕ とし、スイッチ： S を A に接続したときの回路ループの電圧降下は、

$$I(t)R + \frac{Q(t)}{C} = \phi_0 \quad (6.12.29)$$

ここで、

$$I(t) = \frac{d}{dt} Q(t) \quad (6.12.30)$$

(6.12.29) 式に (6.12.30) 式を代入すると、

$$\left(\frac{d}{dt} Q(t)\right) R + \frac{Q(t)}{C} = \phi_0$$

上式を ode2 関数で解くと、

$$Q(t) = e^{-\frac{t}{CR}} \left(\phi_0 C e^{\frac{t}{CR}} + \%c \right) \quad (6.12.31)$$

上式の初期値として、 $t=0$ でコンデンサーに蓄えられる電荷： $Q(0)=0$ とすると、上式は、

$$Q(t) = \phi_0 C - \phi_0 C e^{-\frac{t}{CR}} \quad (6.12.32)$$

(6.12.30) 式から、上式を時間： t で微分し、電流： $I(t)$ は、

$$I(t) = \frac{\phi_0 e^{-\frac{t}{CR}}}{R} \quad (6.12.33)$$

$C=1$ 、 $R=1$ 、 $\phi_0=1$ 、 $T=10$ として上式を図示すると、

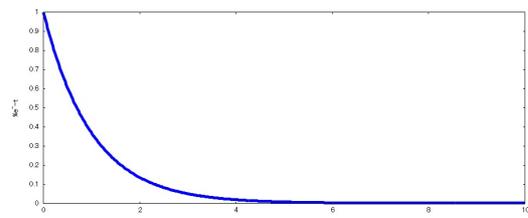


図 6.12.12: スイッチ： S を A に接続したときの電流： $I(t)$

(6.12.30) 式から、時間： T のときの電荷： $Q(T)$ は、

$$Q(T) = \phi_0 C - \phi_0 C e^{-\frac{T}{CR}}, \quad \phi_0 = \frac{e^{\frac{T}{CR}} Q(T)}{C e^{\frac{T}{CR}} - C} \quad (6.12.34)$$

回路全体の仕事： $w = \phi I$ を $t = T$ までを求め、(6.12.33) 式を代入すると、

$$w = \int_0^T \phi_0 I(t) dt = \frac{\phi_0^2}{R} \int_0^T e^{-\frac{t}{CR}} dt \quad (6.12.35)$$

$$= \frac{\phi_0^2 \left(CR - CR e^{-\frac{T}{CR}} \right)}{R}$$

抵抗： R によるジュール熱は RI^2 で、 $t=T$ までに発生したジュール熱： J は、(6.12.33)式を代入すると、

$$J = \int_0^T I(t)^2 R dt = \frac{\phi_0^2}{R} \int_0^T e^{-\frac{2t}{CR}} dt$$

$$= \frac{\phi_0^2 \left(\frac{CR}{2} - \frac{CR e^{-\frac{2T}{CR}}}{2} \right)}{R} \quad (6.12.36)$$

回路全体の仕事： w から抵抗： R によるジュール熱を引くと下記となり、(6.12.34)式を代入すると下記となり、これはコンデンサーにためられた静電エネルギーに等しい。

$$w - J = \frac{\phi_0^2 (CR - CR e^{-\frac{T}{CR}})}{R}$$

$$= \frac{\phi_0^2 \left(\frac{CR}{2} - \frac{CR e^{-\frac{2T}{CR}}}{2} \right)}{R} \quad (6.12.37)$$

$$= \frac{Q(T)^2}{2C}$$

```
PH5:L*diff(I(t),t,1)+Q(t)/C=0;
subst([I1],PH5);
Q5:ode2(%,Q(t),t);
Q6:subst([Q(t)=Q(T),t=0],%);
solve(%,%k2)[1];
Q7:subst(%,%k1=0),Q5);
subst(%,I1);
I7:ev(%,diff);
I8:subst([Q21],%);
subst([C=1,R=1,\phi[0]=1,L=1,T=10],I8);
plot2d(rhs(%),[t,0,10],[style,
[lines,5,1]]);
U[C]=Q(t)^2/2/C;
UC1:subst([Q7],%);
U[L]=L*I(t)^2/2;
UL1:subst([I7],%);
UC1+UL1;
trigsimp(%)
```

スイッチ： S を A から B に接続したときの回路ループの電圧降下は、

$$\left(\frac{d}{dt} I(t) \right) L + \frac{Q(t)}{C} = 0$$

上式に(6.12.30)式を代入すると、

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} Q(t) \right) L + \frac{Q(t)}{C} = 0$$

上式を上式をode2関数で解くと、

$$Q(t) = \%k1 \sin\left(\frac{t}{\sqrt{C} \sqrt{L}}\right) + \%k2 \cos\left(\frac{t}{\sqrt{C} \sqrt{L}}\right)$$

初期値として、スイッチ： S を A から B に接続したときの電荷： $Q(T)$ を代入し、

$$\%k1 = 0, \quad \%k2 = Q(T)$$

上式から、

$$Q(t) = \cos\left(\frac{t}{\sqrt{C} \sqrt{L}}\right) Q(T) \quad (6.12.38)$$

(6.12.30)式から、上式を時間： t で微分し、電流： $I(t)$ は下記となり、さらに(6.12.34)式を代入すると。

$$I(t) = -\frac{\sin\left(\frac{t}{\sqrt{C} \sqrt{L}}\right) Q(T)}{\sqrt{C} \sqrt{L}}$$

$$= -\frac{\sin\left(\frac{t}{\sqrt{C} \sqrt{L}}\right) (\phi_0 C - \phi_0 C e^{-\frac{T}{CR}})}{\sqrt{C} \sqrt{L}} \quad (6.12.39)$$

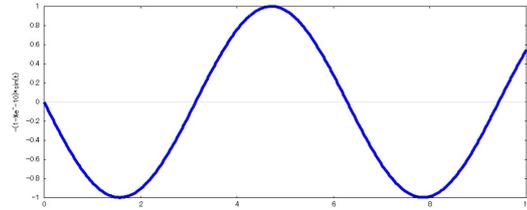


図 6.12.13: スイッチ： S を B に接続したときの電流： $I(t)$

コンデンサーにためられた静電エネルギー： U_C は(6.12.38)式から、

$$U_C = \frac{Q(t)^2}{2C} = \frac{\cos\left(\frac{t}{\sqrt{C} \sqrt{L}}\right)^2 Q(T)^2}{2C}$$

コイルにためられた磁場エネルギー： U_L は(6.12.39)式から、

$$U_L = \frac{I(t)^2 L}{2} = \frac{\sin\left(\frac{t}{\sqrt{C} \sqrt{L}}\right)^2 Q(T)^2}{2C}$$

コンデンサーにためられた静電エネルギー： U_C とコイルにためられた磁場エネルギー： U_L の和は下記となり、初期にコンデンサーにためられた静電エネルギーに等しい。

$$U_L + U_C = \frac{\sin\left(\frac{t}{\sqrt{C} \sqrt{L}}\right)^2 Q(T)^2}{2C}$$

$$+ \frac{\cos\left(\frac{t}{\sqrt{C} \sqrt{L}}\right)^2 Q(T)^2}{2C}$$

$$= \frac{Q(T)^2}{2C}$$

例題 6.12.11 コイル、コンデンサーと抵抗の回路 (2)

自己インダクタンス: L 、電気容量: C 、抵抗: R とスイッチ: S の下記の回路で、初期にスイッチ: S を接続する。ある瞬間にスイッチ: S を B に接続する。この時の静電容量: $Q(t)$ と電流: $I(t)$ を調べる。

```
kill(all);
forget(C*R^2<4*L);
assume(C*R^2>4*L);
assume(C>0);
PH1:L*dif(I(t),t,1)+R*I(t)+Q(t)/C=0;
I1:I(t)=dif(Q(t),t,1);
subst([I1],PH1);
```

```
Q1:ode2(%,Q(t),t);
Q2:ic2(Q1,t=0,Q(t)=Q[0],dif(Q(t),t,1)=0);
partfrac(%,Q(0));
subst([Q2],I1);
I2:ev(%,dif);
partfrac(%,Q(0));
subst([L=1,C=2,R=2,Q(0)=1],Q2);
plot2d(rhs(%),[t,0,30],[style,
[lines,5,1]]);
subst([L=1,C=2,R=2,Q(0)=1],I2);
plot2d(rhs(%),[t,0,30],[style,
[lines,5,1]]);
```

回路に流れる電流: $I(t)$ 、コンデンサーに蓄えられる電荷: $Q(t)$ 、起電力: ϕ とし、スイッチ: S を A に接続したときの回路ループの電圧降下は、

$$I(t)R + \left(\frac{d}{dt}I(t)\right)L + \frac{Q(t)}{C} = 0 \quad (6.12.40)$$

ここで、

$$I(t) = \frac{d}{dt}Q(t) \quad (6.12.41)$$

(6.12.40) 式に (6.12.41) 式を代入すると、

$$\left(\frac{d}{dt}Q(t)\right)R + \left(\frac{d^2}{dt^2}Q(t)\right)L + \frac{Q(t)}{C} = 0 \quad (6.12.42)$$

$CR^2 > 4L$ のとき、上式を ode2 関数で解くと、

$$Q(t) = \%k1 e^{\frac{t\left(\sqrt{\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{CL}} - \frac{R}{L}\right)}{2}} + \%k2 e^{\frac{t\left(-\sqrt{\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{CL}} - \frac{R}{L}\right)}{2}}$$

初期条件として、 $t=0$ で $Q(0)=0$ 、 $I(0)\frac{d}{dt}Q(t)=0$ とし、上式は、

$$Q(t) = \frac{Q(0)\left(L\sqrt{\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{CL}} + R\right)e^{\frac{t\left(\sqrt{\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{CL}} - \frac{R}{L}\right)}{2}}}{2L\sqrt{\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{CL}}} + \frac{Q(0)\left(L\sqrt{\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{CL}} - R\right)e^{\frac{t\left(-\sqrt{\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{CL}} - \frac{R}{L}\right)}{2}}}{2L\sqrt{\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{CL}}}$$

(6.12.41) 式に上式を代入すると、

$$I(t) = \frac{Q(0)\left(\left(L^2\left(\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{CL}\right) - R^2\right)e^{\frac{t\left(\sqrt{\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{CL}} - \frac{R}{L}\right)}{2}} + \left(R^2 - L^2\left(\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{CL}\right)\right)e^{\frac{t\left(-\sqrt{\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{CL}} - \frac{R}{L}\right)}{2}}\right)}{4L^2\sqrt{\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{CL}}}$$

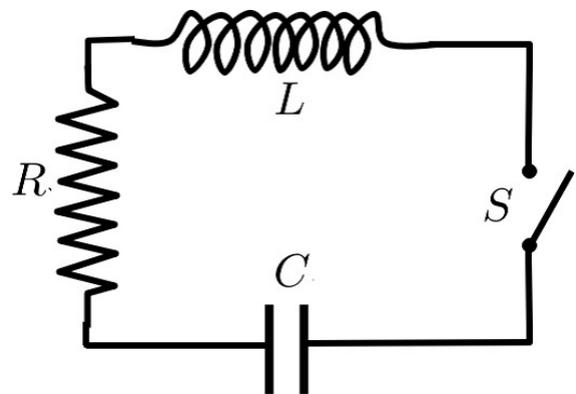


図 6.12.14: コイル、コンデンサーと抵抗の回路 (2)

上記の結果に $L = 1, C = 2, R = 2, Q(0) = 1$ を代入し、図示すると、

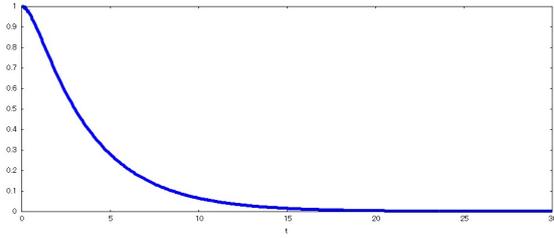


図 6.12.15: $CR^2 > 4L$ のときの静電容量 : $Q(t)$

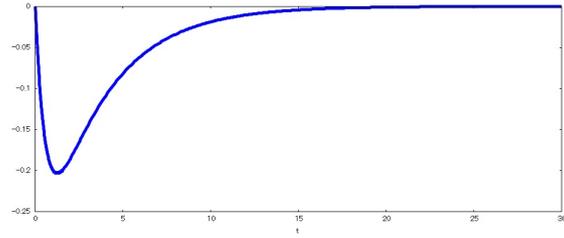


図 6.12.16: $CR^2 > 4L$ のときの電流 : $I(t)$

```
forget(C*R^2>4*L);
assume(C*R^2<4*L);
PH1:L*dif(I(t),t,1)+R*I(t)+Q(t)/C=0;
I1:I(t)=dif(Q(t),t,1);
subst([I1],PH1);
Q1:ode2(%,Q(t),t);
Q2:ic2(Q1,t=0,Q(t)=Q[0],dif(Q(t),t,1)=0);
partfrac(%,Q(0));
subst([Q2],I1);
```

```
I2:ev(%,diff);
partfrac(%,Q(0));
subst([L=1,C=0.5,R=1,Q(0)=1],Q2);
plot2d(rhs(%),[t,0,10],[style,
[lines,5,1]]);
subst([L=1,C=0.5,R=1,Q(0)=1],I2);
plot2d(rhs(%),[t,0,10],[style,
[lines,5,1]]);
```

$CR^2 < 4L$ のとき、(6.12.42) 式を ode2 関数で解くと、

$$Q(t) = e^{-\frac{tR}{2L}} \left(\%k1 \sin \left(\frac{t \sqrt{\frac{4}{CL} - \frac{R^2}{L^2}}}{2} \right) + \%k2 \cos \left(\frac{t \sqrt{\frac{4}{CL} - \frac{R^2}{L^2}}}{2} \right) \right)$$

初期条件として、 $t = 0$ で $Q(0) = 0, I(0) = \frac{d}{dt} Q(t) = 0$ として、上式は、

$$Q(t) = e^{-\frac{tR}{2L}} \left(\frac{Q(0) R \sin \left(\frac{t \sqrt{\frac{4}{CL} - \frac{R^2}{L^2}}}{2} \right)}{L \sqrt{\frac{4}{CL} - \frac{R^2}{L^2}}} + Q(0) \cos \left(\frac{t \sqrt{\frac{4}{CL} - \frac{R^2}{L^2}}}{2} \right) \right)$$

(6.12.41) 式に上式を代入すると、

$$I(t) = - \frac{Q(0) \left(L^2 \left(\frac{4}{CL} - \frac{R^2}{L^2} \right) + R^2 \right) e^{-\frac{tR}{2L}} \sin \left(\frac{t \sqrt{\frac{4}{CL} - \frac{R^2}{L^2}}}{2} \right)}{2 L^2 \sqrt{\frac{4}{CL} - \frac{R^2}{L^2}}}$$

上記の結果に $L = 1, C = 0.5, R = 1, Q(0) = 1$ を代入し、図示すると、

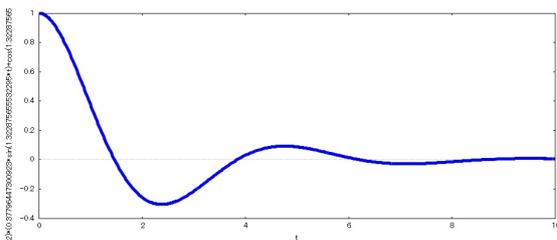


図 6.12.17: $CR^2 < 4L$ のときの静電容量 : $Q(t)$

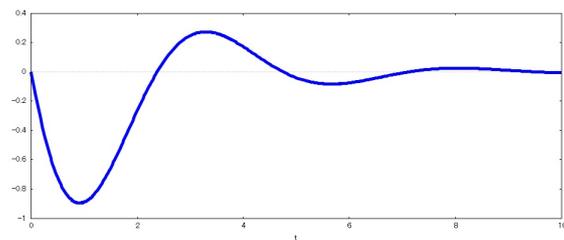


図 6.12.18: $CR^2 < 4L$ のときの電流 : $I(t)$

例題 6.12.12 円盤コンデンサー放電時の極間の磁束密度と電磁波エネルギー

半径： A の円盤状の平行コンデンサー、間隔： d を xy 平面上に置く。上面の円盤に Q 、下面の円盤に $-Q$ を充電し、極板間をつないで放電した時のコンデンサー極間に生じる磁束密度： B を求める。

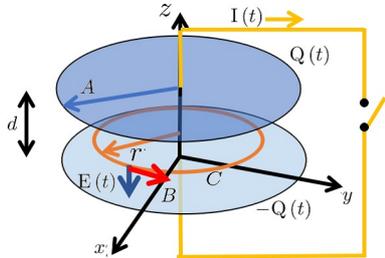


図 6.12.19: 磁束密度と電磁波エネルギー

```
kill(all);
load("vect")$
E1:E(t)=\tau/\epsilon[0];
VE1:matrix([0],[0],[-E(t)]);
SG1:\tau=Q(t)/(\pi*A^2);
E2:subst([SG1],E1);
DI1:i[d](t)=\epsilon[0]*diff(E(t),t,1);
subst([E1,SG1],DI1);
DI2:ev(%diff);
IR1:I[r](t)=i[d](t)*\pi*r^2;
IR2:subst([DI2],IR1);
B1:B(r,t)*2*\pi*r=\mu[0]*I[r](t);
VB1:matrix([-B(r,t)*sin(\theta)],
[B(r,t)*cos(\theta)], [0]);
subst([IR2],B1);
B2:solve(%B(r,t))[1];
```

表面の電荷密度： τ 、静電場： E とすると、(3.1.1) 式から下記となる。 E は z 軸の負方向であるから $\vec{E}(t)$ は、

$$E = \frac{\tau}{\epsilon_0}, \quad \vec{E}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -E(t) \end{pmatrix} \quad (6.12.43)$$

電荷密度： τ と電荷： Q の関係は、

$$\tau = \frac{Q(t)}{\pi A^2}$$

上式から、

$$E(t) = \frac{Q(t)}{\pi \epsilon_0 A^2} \quad (6.12.44)$$

アンペールマクスウェルの法則：(6.3.15) 式から、

$$\int_C \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{r} = \iint_S \left(\mu_0 \vec{i}(\vec{r}, t) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \vec{E}(\vec{r}, t) \right) \cdot \vec{n} dS \quad (6.12.45)$$

上式の変位電流 (電束電流)： $i_d(t) = \epsilon_0 \frac{d}{dt} \vec{E}(\vec{r}, t)$ を求めると、

$$i_d(t) = \epsilon_0 \left(\frac{d}{dt} E(t) \right) = \frac{d}{dt} \frac{Q(t)}{\pi A^2}$$

(6.12.45) 式を半径： r の円で適用すると、変位電流： $i_d(t)$ の積分： $I_r(t)$ は、

$$I_r(t) = \pi r^2 i_d(t) = \frac{r^2}{A^2} \left(\frac{d}{dt} Q(t) \right)$$

(6.12.45) 式を適用すると、

$$2\pi r B(r, t) = \frac{\mu_0 r^2}{A^2} \left(\frac{d}{dt} Q(t) \right)$$

上式から下記となる。ここで電流は z 軸の上方に流れるから、「例題 5.7.1 直線回路による磁束密度」(5.7.2) 式からベクトル表記すると、

$$B(r, t) = \frac{\mu_0 r}{2\pi A^2} \left(\frac{d}{dt} Q(t) \right),$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \begin{pmatrix} -B(r, t) \sin(\theta) \\ B(r, t) \cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.12.46)$$

```
IDRM1:col(adjoint(transpose(addcol(VE1,
VB1,matrix([1],[1],[1]))),3);
S1:S(r,t)=1/\mu[0]*%;
subst([E2,B2,I2],%);
subst([r=A],%);
S2:lhs(%)=rhs(%) [1] [1]/cos(\theta);
%*2*\pi*A*d;
'integrate(lhs(%),t,0,inf)='integrate(
rhs(%),t,0,inf);
lhs(%)=(d*Q(0)^2)/(2*\pi*\epsilon[0]*A^2);
lhs(%)=(d*integrate('diff(Q(t)^2,t,1),
t,0,inf))/(2*\pi*\epsilon[0]*A^2);
lhs(%)=d*Q(0)^2/(2*\pi*\epsilon[0]*A^2);
'diff(Q(t)^2,t,1)=diff(Q(t)^2,t,1);
U=d*Q^2/(2*\epsilon[0]*S);
subst([S=%\pi*A^2],%);
```

ポインティングベクトル： $\overrightarrow{S}(\vec{r}, t)$ は (6.7.4) 式から次式となる。

$$\overrightarrow{S}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\mu_0} \left(\overrightarrow{E}(\vec{r}, t) \times \overrightarrow{B}(\vec{r}, t) \right) \quad (6.12.47)$$

上式に (6.12.43) 式、(6.12.44) 式、(6.12.46) 式を代入し、

$$S(r, t) = \begin{pmatrix} \frac{B(r, t) E(t) \cos(\theta)}{\mu_0} \\ \frac{B(r, t) E(t) \sin(\theta)}{\mu_0} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{r Q(t) \left(\frac{d}{dt} Q(t) \right) \cos(\theta)}{2 \pi^2 \epsilon_0 A^4} \\ \frac{r Q(t) \left(\frac{d}{dt} Q(t) \right) \sin(\theta)}{2 \pi^2 \epsilon_0 A^4} \\ 0 \end{pmatrix}$$

上式からポインティングベクトル： $\overrightarrow{S}(\vec{r}, t)$ は半径外向きに向いている。この絶対値は、

$$S(A, t) = \frac{Q(t) \left(\frac{d}{dt} Q(t) \right)}{2 \pi^2 \epsilon_0 A^3}$$

円盤コンデンサーの外縁から出ていくポインティングベクトルは、上式に外縁面積： $2 \pi A d$ を掛け、

$$2 \pi d A S(A, t) = \frac{d Q(t) \left(\frac{d}{dt} Q(t) \right)}{\pi \epsilon_0 A^2}$$

放電が完了するまでポインティングベクトル：電磁波が運ぶエネルギー： U は、上式を $t = 0 \rightarrow \infty$ で積分し、

$$U = 2 \pi d A \int_0^\infty S(A, t) dt = \frac{d}{\pi \epsilon_0 A^2} \int_0^\infty Q(t) \left(\frac{d}{dt} Q(t) \right) dt$$

ここで下記から、

$$\frac{d}{dt} Q(t)^2 = 2 Q(t) \left(\frac{d}{dt} Q(t) \right)$$

上式の積分で $Q(\infty) = 0$ として、

$$U = 2 \pi d A \int_0^\infty S(A, t) dt = \frac{Q(0)^2 d}{2 \pi \epsilon_0 A^2}$$

(3.5.32) 式から平板のコンデンサーの蓄えられるエネルギーは下記で、初期に蓄えられたエネルギーであり、放電により運ばれた上記の電磁波エネルギー： U と等しい。

$$U = \frac{d Q^2}{2 \epsilon_0 S} = \frac{d Q^2}{2 \pi \epsilon_0 A^2}$$

例題 6.12.13 円形コンデンサーの極板移動時の磁束密度と電磁波エネルギー

半径： A の円盤状の平行コンデンサーを xy 平面上に置き、間隔： $z(t)$ とする。極間に起電力： ϕ をかけ、極板をゆっくり広げるとき、極板間に生じる磁束密度と電磁波エネルギーを求める。

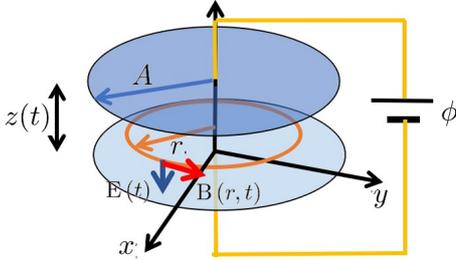


図 6.12.20: 円形コンデンサーの極板移動時

```
kill(all);
load("vect")$
assume(dz[1]>0);
assume(z[1]>0);
E1:E(t)=\phi/z(t);
VE1:matrix([0],[0],[-E(t)]);
VE2:subst([E1],VE1);
DI1:i[d](t)=\epsilonpsilon[0]*diff(VE2,t,1);
ev(%,diff);
DI1:lhs(%)=rhs(%) [3] [1];
IR1:I[r](t)=i[d](t)*%pi*r^2;
IR2:subst([DI1],IR1);
B1:B(r,t)*2*%pi*r=\mu[0]*I[r](t);
subst([IR2],B1);
B2:solve(%,B(r,t)) [1];
VB1:matrix([-B(r,t)*sin(\theta)], [B(r,t)
*cos(\theta)], [0]);
IDRM1:col(adjoint(transpose(addcol(VE2,
VB1,matrix([1],[1],[1])))),3);
S1:S(r,t)=1/\mu[0]*%;
subst([B2],%);
subst([r=A],%);
S2:lhs(%)=rhs(%) [1] [1]/cos(\theta);
%*2*%pi*A*z(t);
SI1:'integrate(lhs(%),t,t[1],t[1]+dt[1])
='integrate(rhs(%),t,t[1],t[1]+dt[1]);
subst([t[1]=z[1],dt[1]=dz[1]],%);
lhs(%)=%pi*\epsilonpsilon[0]*\phi^2*'integrate(
1/z^2,z,z[1],z[1]+dz[1])*A^2;
ev(%,integrate);
dU=taylor(rhs(%),dz[1],0,3);
dU=first(rhs(%));
```

電位差： ϕ の極板間に生じる電場： $E(t)$ は下記となる。電場の向きは z 軸の負方向となるから、

$$E(t) = \frac{\phi}{z(t)}$$

電場： $E(t)$ の向きは z 軸の負方向となるから、

$$\vec{E}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -E(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{\phi}{z(t)} \end{pmatrix} \quad (6.12.48)$$

上式から、変位電流 (電束電流)： $i_d(t) = \epsilon_0 \frac{d}{dt} \vec{E}(\vec{r}, t)$ を求めると、

$$i_d(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\epsilon_0 \phi \left(\frac{d}{dt} z(t)\right)}{z(t)^2} \end{pmatrix}$$

極板をゆっくり広げるとき、 $\frac{d}{dt} z(t) > 0$ から変位電流 (電束電流)： $i_d(t)$ の向きは z 軸の正方向となる。この絶対値は、

$$i_d(t) = \frac{\epsilon_0 \phi \left(\frac{d}{dt} z(t)\right)}{z(t)^2}$$

(6.12.45) 式を半径： r の円で適用すると、変位電流： $i_d(t)$ の積分： $I_r(t)$ は、

$$I_r(t) = \pi r^2 i_d(t) = \frac{\pi \epsilon_0 \phi r^2 \left(\frac{d}{dt} z(t)\right)}{z(t)^2}$$

(6.12.45) 式を適用すると、

$$2\pi r B(r, t) = \mu_0 I_r(t) = \frac{\pi \epsilon_0 \mu_0 \phi r^2 \left(\frac{d}{dt} z(t)\right)}{z(t)^2}$$

上式から $B(r, t)$ は、

$$B(r, t) = \frac{\epsilon_0 \mu_0 \phi r \left(\frac{d}{dt} z(t)\right)}{2 z(t)^2} \quad (6.12.49)$$

ここで電流は z 軸の上方に流れるから、「例題 5.7.1 直線回路による磁束密度」(5.7.2) 式からベクトル表記すると、

$$\vec{B}(r, t) = \begin{pmatrix} -B(r, t) \sin(\theta) \\ B(r, t) \cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.12.50)$$

ポインティングベクトル： $\vec{S}(\vec{r}, t)$ は (6.7.4) 式から次式となる。

$$\begin{aligned} \vec{S}(\vec{r}, t) &= \frac{1}{\mu_0} \left(\vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{B}(\vec{r}, t) \right) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\phi B(r, t) \cos(\theta)}{\mu_0 z(t)} \\ \frac{\phi B(r, t) \sin(\theta)}{\mu_0 z(t)} \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\epsilon_0 \phi^2 r \left(\frac{d}{dt} z(t)\right) \cos(\theta)}{2 z(t)^3} \\ \frac{\epsilon_0 \phi^2 r \left(\frac{d}{dt} z(t)\right) \sin(\theta)}{2 z(t)^3} \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6.12.51)$$

上式からポインティングベクトル： $\overrightarrow{S}(\vec{r}, t)$ は半径外方向に向いている。円盤コンデンサーの外縁： $r = A$ のポインティングベクトルの絶対値は、

$$S(A, t) = \frac{\epsilon_0 \phi^2 \left(\frac{d}{dt} z(t) \right) A}{2z(t)^3}$$

円盤コンデンサーの外縁から出ていくポインティングベクトルは、上式に外縁面積： $2\pi A z(t)$ を掛け、

$$2\pi z(t) A S(A, t) = \frac{\pi \epsilon_0 \phi^2 \left(\frac{d}{dt} z(t) \right) A^2}{z(t)^2}$$

微小時間： dt_1 の間に外縁から出ていく電磁場エネルギー： dU は下記となる。

$$dU = 2\pi A \int_{t_1}^{t_1+dt_1} z(t) S(A, t) dt = \pi \epsilon_0 \phi^2 \int_{t_1}^{t_1+dt_1} \frac{\frac{d}{dt} z(t)}{z(t)^2} dt A^2$$

また、下記の関係式から、

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{z(t)^2} = -\frac{2 \left(\frac{d}{dt} z(t) \right)}{z(t)^3}$$

dU の右辺は z の関数として、積分範囲は $z_1 \rightarrow z_1 + dz_1$ となり、

$$dU = \pi \epsilon_0 \phi^2 A^2 \int_{z_1}^{z_1+dz_1} \frac{1}{z^2} dz = \pi \epsilon_0 \left(\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_1 + dz_1} \right) \phi^2 A^2$$

$z_1 \gg dz_1$ であるから、Taylor 展開の 1 次項までを表示すると、

$$dU = \frac{\pi \epsilon_0 dz_1 \phi^2 A^2}{z_1^2}$$

「3.5.7 平板のコンデンサーの電気容量」の極板を dD だけ移動させることによる静電エネルギー変化： dU ：
(3.5.35) 式と同じ結果となっている。

例題 6.12.14 正負の電荷を持つ二つの微小球を結んだときの周りの磁束密度

z 軸上の S_1, S_2 に電荷: $Q(t), -Q(t)$ を持つ微小球を細い導線で結んだとき、電流: $I(t)$ が流れる。このとき xy 軸平面上の磁束密度: B を求める。

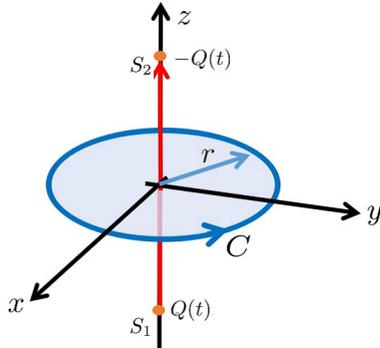


図 6.12.21: 正負の電荷を持つ二つの微小球を結んだときの周りの磁束密度

```
kill(all);
load("vect")$
assume(r>0);
assume(S[2]>S[1]);
assume(S[1]<0);
assume(S[2]>0);
assume(I>0);
assume(mu[0]>0);
R1:matrix([r*cos(theta)],
[r*sin(theta)], [0]);
RD1:matrix([0], [0], [s]);
T1:matrix([0], [0], [1]);
DR1:R1-RD1;
IDRM1:col(adjoint(transpose(addcol(T1,
DR1,matrix([1], [1], [1])))),3);
DR2:sqrt(DR1[1][1]^2+DR1[2][1]^2
+DR1[3][1]^2);
DB1:\Delta*B=\mu[0]/4/pi*I*IDRM1/DR2^(3);
trigsimp(%);
factor(%);
lhs(%)=sqrt( rhs(%) [1] [1]^2
+rhs(%) [2] [1]^2 +rhs(%) [3] [1]^2 );
trigsimp(%);
factor(%);
B1:B='integrate(rhs(%),s,S[1],S[2]);
ev(%,integrate);
B2:expand(%);
B21:factor(first(rhs(B2)));
B22:factor(last(rhs(B2)));
```

```
B23:B=B21+B22;
subst([S[1]=-S[2]],%);
lhs(%)=limit(rhs(%),S[2],inf);
```

z 軸上の S_1, S_2 間に電流: I を流したとき、 xy 軸平面上の磁束密度: B を求める。 $z = s$ における磁束密度: $\Delta \vec{B}$ は、ビオ・サバルの法則: (5.4.4) 式から次式となる。ここで、 s の電流の位置を \vec{r}^j 、求める磁場の位置を \vec{r} 、電流の向きの単位ベクトル: \vec{t} とすると、

$$\Delta \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \vec{t} \times (\vec{r} - \vec{r}^j)}{|\vec{r} - \vec{r}^j|^3} ds \quad (6.12.52)$$

ここで、

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r \cos(\theta) \\ r \sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}^j = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ s \end{pmatrix}, \quad \vec{t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (6.12.53)$$

(6.12.52) 式に上式を代入すると、

$$\Delta B = \begin{pmatrix} -\frac{\mu_0 r \sin(\theta) I}{4\pi (s^2+r^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{\mu_0 r \cos(\theta) I}{4\pi (s^2+r^2)^{\frac{3}{2}}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

上式の絶対値は、

$$\Delta B = \frac{\mu_0 r I}{4\pi \sqrt{s^6 + 3r^2 s^4 + 3r^4 s^2 + r^6}}$$

上式を $s = S_1 \rightarrow S_2$ で積分すると、

$$B = \frac{\mu_0 r I}{4\pi} \int_{S_1}^{S_2} \frac{1}{\sqrt{s^6 + 3r^2 s^4 + 3r^4 s^2 + r^6}} ds \\ = \frac{\mu_0 S_2 I}{4\pi r \sqrt{r^2 + S_2^2}} - \frac{\mu_0 S_1 I}{4\pi r \sqrt{r^2 + S_1^2}} \quad (6.12.54)$$

```
E1:E=Q/(4*pi*epsilon[0])*DR1/DR2^3;
trigsimp(%);
E2:factor(%);
EZ2:E[z]=rhs(E2)[3][1];
EZ21:subst([Q=Q(t),s=S[1]],EZ2);
EZ22:subst([Q=-Q(t),s=S[2]],EZ2);
EZ3:E[z](t)=rhs(EZ21)+rhs(EZ22);
I1:I(t)=-diff(Q(t),t,1);
I11:diff(Q(t),t,1)=-I(t);
ID1:i[zd](t,r)=epsilon[0]*diff(E[z](t),
t,1);
subst([EZ3],%);
ev(%,diff);
ID2:subst([I11],%);
I3:I(t)+'integrate(i[zd](t,r)*2*pi*r,r,
0,r);
```

```

subst([ID2],%);
ev(%integrate);
B=%*\mu[0]/(2*%pi*r);
B3:expand(%);
subst([I=I(t)],B23);
%-B3;

```

(2.2.1) 式から静電場： \vec{E} は、

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (6.12.55)$$

上式に (6.12.53) 式に代入すると、

$$E = \begin{pmatrix} \frac{r \cos(\theta) Q}{4\pi\epsilon_0 (s^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{r \sin(\theta) Q}{4\pi\epsilon_0 (s^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} \\ -\frac{s Q}{4\pi\epsilon_0 (s^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} \end{pmatrix}$$

上式の z 軸成分は、

$$E_z = -\frac{s Q}{4\pi\epsilon_0 (s^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\begin{aligned} I' &= \int_0^r 2\pi r i_{zd}(t, r) dr + I(t) = 2\pi\epsilon_0 \int_0^r r \left(\frac{S_1 I(t)}{4\pi\epsilon_0 (r^2 + S_1^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{S_2 I(t)}{4\pi\epsilon_0 (r^2 + S_2^2)^{\frac{3}{2}}} \right) dr + I(t) \\ &= I(t) - \frac{\sqrt{r^2 + S_2^2} (2I(t) \sqrt{r^2 + S_1^2} + S_1 I(t)) - S_2 I(t) \sqrt{r^2 + S_1^2}}{2\sqrt{r^2 + S_1^2} \sqrt{r^2 + S_2^2}} \\ &= I(t) + \frac{S_2 I(t)}{2\sqrt{r^2 + S_2^2}} - \frac{S_1 I(t)}{2\sqrt{r^2 + S_1^2}} - I(t) = \frac{S_2 I(t)}{2\sqrt{r^2 + S_2^2}} - \frac{S_1 I(t)}{2\sqrt{r^2 + S_1^2}} \end{aligned} \quad (6.12.58)$$

(6.12.45) 式の左辺の線積分は明らかに、 $B \cdot 2\pi r$ である。以上から磁束密度： B は、

$$B = \frac{\mu_0 S_2 I(t)}{4\pi r \sqrt{r^2 + S_2^2}} - \frac{\mu_0 S_1 I(t)}{4\pi r \sqrt{r^2 + S_1^2}} \quad (6.12.59)$$

```

forget(S[1]<0);
assume(S[1]>0);
I3:'integrate(i[zd](t,r)*2*%pi*r,r,0,r);
subst([ID2],%);
ev(%integrate);
B=%*\mu[0]/(2*%pi*r);
B3:expand(%);
subst([I=I(t)],B23);
%-B3;

```

$0 < S_1 < S_2$ のとき、(6.12.45) 式の右辺の面積分： I' を xy 平面の半径： r で行う。このとき $s = S_1 \rightarrow S_2$ の導線を貫通していないので次式となり、(6.12.57) 式を

S_1 に $Q(t)$ 、 S_2 に $-Q(t)$ の電荷を置いたときの静電場： \vec{E} の z 軸成分は、

$$E_z(t) = \frac{S_2 Q(t)}{4\pi\epsilon_0 (r^2 + S_2^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{S_1 Q(t)}{4\pi\epsilon_0 (r^2 + S_1^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (6.12.56)$$

上式から (6.12.45) 式のアンペール・マクスウェルの法則の変位電流 (電束電流)： $i_d(t) = \epsilon_0 \frac{d}{dt} \vec{E}(\vec{r}, t)$ を求める。(6.12.56) 式と $\frac{d}{dt} Q(t) = -I(t)$ を代入すると、

$$\begin{aligned} i_{zd}(t, r) &= \epsilon_0 \left(\frac{d}{dt} E_z(t) \right) \\ &= \epsilon_0 \left(\frac{S_2 \left(\frac{d}{dt} Q(t) \right)}{4\pi\epsilon_0 (r^2 + S_2^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{S_1 \left(\frac{d}{dt} Q(t) \right)}{4\pi\epsilon_0 (r^2 + S_1^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \\ &= \epsilon_0 \left(\frac{S_1 I(t)}{4\pi\epsilon_0 (r^2 + S_1^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{S_2 I(t)}{4\pi\epsilon_0 (r^2 + S_2^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \end{aligned} \quad (6.12.57)$$

$S_1 < 0, S_2 > 0$ のとき、(6.12.45) 式の右辺の面積分： I' を xy 平面の半径： r で行う。このとき $s = S_1 \rightarrow S_2$ の導線を貫通しているため次式となり、(6.12.57) 式を代入し、積分すると、

代入し、

$$\begin{aligned} I' &= 2\pi \int_0^r r i_{zd}(t, r) dr \\ &= 2\pi\epsilon_0 \int_0^r r \left(\frac{S_1 I(t)}{4\pi\epsilon_0 (r^2 + S_1^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{S_2 I(t)}{4\pi\epsilon_0 (r^2 + S_2^2)^{\frac{3}{2}}} \right) dr \\ &= \frac{S_2 I(t)}{2\sqrt{r^2 + S_2^2}} - \frac{S_1 I(t)}{2\sqrt{r^2 + S_1^2}} \end{aligned} \quad (6.12.60)$$

(6.12.45) 式の左辺の線積分は明らかに、 $B \cdot 2\pi r$ である。以上から磁束密度： B は、

$$B = \frac{\mu_0 S_2 I(t)}{4\pi r \sqrt{r^2 + S_2^2}} - \frac{\mu_0 S_1 I(t)}{4\pi R \sqrt{r^2 + S_1^2}} \quad (6.12.61)$$

ビオ・サバールの法則から求めた (6.12.54) 式とアンペール・マクスウェルの法則から求めた (6.12.59) 式、(6.12.61) 式は一致している。

例題 6.12.15 点電荷が z 軸上を移動するときの磁束密度

点電荷: Q が z 軸上を原点から速度: v で移動するときの位置: (x, y, z) の磁束密度: B を求める。ここで移動速度 v は十分小さいものとする。

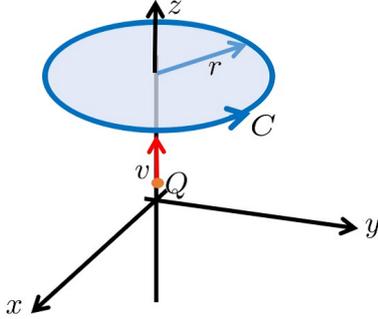


図 6.12.22: 点電荷が z 軸上を移動するときの磁束密度

```
kill(all);
load("vect")$
assume(r>0);
assume(R>0);
assume(\mu[0]>0);
R1:matrix([r*cos(\theta)],
[r*sin(\theta)], [z]);
RD1:matrix([0], [0], [v*t]);
DR1:R1-RD1;
DR2:sqrt(DR1[1][1]^2+DR1[2][1]^2
+DR1[3][1]^2);
E1:E(t)=Q/(4*pi*epsilon[0])*DR1/DR2^3;
trigsimp(%);
E2:factor(%);
E3:E[z](t)=rhs(%)[3][1];
IZD1:i[zd](t,r)=\epsilon[0]*diff(E[z](t),
t,1);
subst([E3], IZD1);
IZD2:ev(%,diff);
I3:'integrate(i[zd](t,r)*2*pi*r,r,0,r);
subst([IZD2], %);
ev(%,integrate);
factor(%);
B=%*\mu[0]/(2*pi*r);
```

ここで下記とする。

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r \cos(\theta) \\ r \sin(\theta) \\ z \end{pmatrix}, \quad \vec{r}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ tv \end{pmatrix} \quad (6.12.62)$$

静電場: \vec{E} は (6.12.55) 式に上式を代入すると、

$$\mathbf{E}(t) = \begin{pmatrix} \frac{r \cos(\theta) Q}{4\pi\epsilon_0 (z^2 - 2tvz + t^2v^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{r \sin(\theta) Q}{4\pi\epsilon_0 (z^2 - 2tvz + t^2v^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{(z-tv) Q}{4\pi\epsilon_0 (z^2 - 2tvz + t^2v^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} \end{pmatrix}$$

上式の z 軸成分は、

$$E_z(t) = \frac{(z-tv) Q}{4\pi\epsilon_0 (z^2 - 2tvz + t^2v^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (6.12.63)$$

上式から (6.12.45) 式のアンペール-マクスウェルの法則の変位電流 (電束電流): $i_d(t) = \epsilon_0 \frac{d}{dt} E(\vec{r}, t)$ を求める。(6.12.63) 式を代入すると、

$$\begin{aligned} i_{zd}(t, r) &= \epsilon_0 \left(\frac{d}{dt} E_z(t) \right) \\ &= \epsilon_0 \left(-\frac{vQ}{4\pi\epsilon_0 (z^2 - 2tvz + t^2v^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{3(z-tv)(2tv^2 - 2vz)Q}{8\pi\epsilon_0 (z^2 - 2tvz + t^2v^2 + r^2)^{\frac{5}{2}}} \right) \end{aligned} \quad (6.12.64)$$

(6.12.45) 式の右辺の面積分: I' を半径: r で行う。(6.12.64) 式を代入し、

$$\begin{aligned} I' &= 2\pi \int_0^r r i_{zd}(t, r) dr \\ &= \frac{vQr^2}{2(r^2 + z^2 - 2tvz + t^2v^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \quad (6.12.65)$$

(6.12.45) 式の左辺の線積分は明らかに、 $B \cdot 2\pi r$ である。以上から磁束密度: B は、

$$B = \frac{\mu_0 v Q r}{4\pi (r^2 + z^2 - 2tvz + t^2v^2)^{\frac{3}{2}}}$$

付録 A よく使う Maxima の関数

演習問題を解くに当たり、Maxima を使った進め方とここでよく使う Maxima の関数の使用例の簡単な説明を以下に示す。詳細な説明は Maxima の解説書を参考願う。

A.1 wxMaxima を使用した演習の進め方

wxMaxima を使用して、入力、出力を会話形式で実行できる。しかし、トライアンドエラー的に一步一步進めていくので、入力結果を残しておいた方が便利である。まず、wxMaxima の設定を確認する。wxMaxima の編集→設定で、「Enter でセルを評価する」にチェックを入れる。ワードパッドやメモ帳などのテキストエディターで Maxima の実行テキストを作成しておき、この評価させたい部分をコピーし、wxMaxima に貼り付け、Enter で評価、実行できる。これを繰り返し、意図した結果となっているか確認しながら、作業を進めていくのがよいと思います。

また、最初の行には必ず、`kill(all);` を入力し、これまでの設定を解除しておく。ファイル内のリストの区切りはセミコロン ; であるので、必ず記述の最後に ; をつける。記述が長く、2 行にまたがってもよいが、必ず記述の最後につける。

リスト、TEX 出力

wxMaxima の数式出力結果を左クリックで網掛けし、右クリックで「コピー」を選択すると、wxMaxima の実行テキストが得られ、テキストエディターに貼り付けすることができる。

また、wxMaxima の数式出力結果を左クリックで網掛けし、右クリックで「Latex としてコピー」を選択すると、Latex の実行テキストが得られる。Texworks などの Latex エディターに貼り付けすることができ、数式を綺麗に出力できる文書作成フリーソフト： $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X} 2_{\epsilon}$ の数式記述として使える。

A.2 宣言文

関数定義：`depends([f,g],[x,y])`

f, g が変数 x, y の関数であることを宣言する。現状の関数定義の確認：`dependencies;`、定義の削除：`remove(f, y);` が他にある

```
kill(all);
depends ([f, g], x);
depends ([r, s], [u, v]);
depends (u, t);
dependencies;
diff (r*s, u);
diff (r*s, t);
remove (r, dependency);
diff (r.s, t);
```

出力結果：

```
done
[f(x), g(x)]
[r(u, v), s(u, v)]
[u(t)]
[f(x), g(x), r(u, v), s(u, v), u(t)]
r (d/d u s) + (d/d u r) s
r (d/d u s) (d/d t u) + (d/d u r) s (d/d t u)
done
r. (d/d u s) (d/d t u)
```

変数宣言：`declare(x,A)`

変数 x に整数や実数などの属性 A を宣言する。

```
declare(i, integer);
declare(x, real);
declare(z, complex);
```

仮定 : assume(A)

変数の正負などの仮定を宣言する。現状の仮定の確認 : `facts()`; 仮定の削除 : `forget(A)`; が他にある。

```
assume(A>0);
assume(B>=2);
assume(C<1 and C>0);
facts();
forget(A>0);
```

出力結果 :

A.3 数式操作**数式の定義 : X:A=B**

数式 : $A = B$ を X として、入力、定義する。以降、 X で $A = B$ を呼び出せる。

```
X:x(t)=r(t)*cos(p(t));
Y:y(t)=r(t)*sin(p(t));
```

出力結果 :

$$x(t) = r(t) \cos(p(t))$$

$$y(t) = r(t) \sin(p(t))$$

右辺抽出 : rhs(X)

式の右辺を抽出する。そして、 XR として入力、定義する。

```
X:x(t)=r(t)*cos(p(t));
XR:rhs(X);
```

出力結果 :

$$x(t) = r(t) \cos(p(t)) \rightarrow r(t) \cos(p(t))$$

左辺抽出 : lhs(X)

式の左辺を抽出する。

```
X:x(t)=r(t)*cos(p(t));
lhs(X);
```

出力結果 :

$$x(t) = r(t) \cos(p(t)) \rightarrow x(t)$$

置換 : subst(B,A,EQ)

数式 : EQ の中に含まれる A を $\rightarrow B$ に置き換える。

```
X:x(t)=r(t)*cos(p(t));
subst(L,r(t),X);
```

出力結果 :

$$x(t) = r(t) \cos(p(t)) \rightarrow x(t) = \cos(p(t)) L$$

置換 : subst([A=B],EQ)

数式 : EQ の中に含まれる A を $\rightarrow B$ に置き換える。

```
X:x(t)=r(t)*cos(p(t));
subst([r(t)=L],X);
```

出力結果 :

$$x(t) = r(t) \cos(p(t)) \rightarrow x(t) = \cos(p(t)) L$$

因数分解 : factor(EQ)

式 EQ を因数分解する。

```
EQ:2*x^2+x-6;
factor(EQ);
```

出力結果 :

$$2x^2 + x - 6 \rightarrow (x + 2)(2x - 3)$$

展開 : expand(EQ)

式 EQ の和の積を展開し、積の和にする。

```
EQ1:(x+2)*(2*x-3);
expand(EQ1);
```

出力結果 :

$$(x + 2)(2x - 3) \rightarrow 2x^2 + x - 6$$

有理式の簡素化 : ratsimp(EQ)

展開、通分、約分で簡易化する

```
EQ2:x/(x^2+x);
ratsimp(EQ2);
```

出力結果 :

$$\frac{x}{x^2 + x} \rightarrow \frac{1}{x + 1}$$

有理式の簡素化 : partfrac(EQ,x)

x で簡易化する

```
EQ:(2*x+3)*(A*x-2)*(x+B);
EQ1:expand(%);
partfrac(EQ1,x);
factor(EQ1);
```

出力結果 :

$$(2x + 3)(xA - 2)(B + x) \rightarrow$$

$$2x^2 AB + 3x AB - 4xB - 6B + 2x^3 A + 3x^2 A - 4x^2 - 6x$$

$partfrac(EQ1, x)$; の結果

$$x((3A - 4)B - 6) + x^2(2AB + 3A - 4) - 6B + 2x^3 A$$

$factor(EQ1)$; の結果

$$(2x + 3)(xA - 2)(B + x)$$

三角関数の簡素化 : trigsimp(EQ)

三角関数が含まれる式を $\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$ と $\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 = 1$ を使って簡素化する。行列の積を参照。

三角関数の簡素化 : trigreduce(EQ)

三角関数の積を倍角公式などを使って簡素化する。

```
EQ1:sin(A)*cos(B);
trigreduce(EQ1);
```

出力結果 :

$$\sin(A) \cos(B) \rightarrow \frac{\sin(B + A)}{2} - \frac{\sin(B - A)}{2}$$

三角関数の簡素化 :**trigexpand(EQ)**

三角関数が含まれる式を倍角公式などを使って展開する。

```
EQ2:sin(A*x+y);
trigexpand(EQ2);
```

出力結果 :

$$\sin(xA + y) \rightarrow \cos(y) \sin(xA) + \sin(y) \cos(xA)$$

三角関数の簡略化準線形形式 : trigrat(EQ)

三角関数の式の標準的な簡略化準線形形式を与える。

```
E0:sin(3*a)/sin(a+%pi/3);
E0=trigrat(E0);
E1:(1-%e^(%i*\theta))/(1+%e^(%i*\theta));
E2:E1=trigrat(E1);
```

出力結果 :

$$\frac{\sin(3a)}{\sin(a + \frac{\pi}{3})} = \sqrt{3} \sin(2a) + \cos(2a) - 1$$

$$\frac{1 - e^{i\theta}}{e^{i\theta} + 1} = -\frac{i \sin(\frac{\theta}{2})}{\cos(\frac{\theta}{2})}$$

対数関数の簡素化 : logcontract(EQ)

対数関数を含む式の簡易化をする。

```
EQ:2*log(x)+2*log(y);
logcontract(EQ);
```

出力結果 :

$$2 \log(y) + 2 \log(x) \rightarrow \log(x^2 y^2)$$

指数、対数の簡素化 : radcan(EQ)

指数、対数のを含む式の簡易化をする。

```
(log(x+x^2)-log(x))^a/log(1+x)^(a/2);
radcan(%);
((%e^x-1)/(1+%e^(x/2)));
radcan(%);
```

出力結果 :

$$\frac{(\log(x^2+x) - \log(x))^a}{\log(x+1)^{\frac{a}{2}}} \rightarrow \log(x+1)^{\frac{a}{2}}$$

$$\frac{e^x - 1}{e^{\frac{x}{2}} + 1} \rightarrow e^{\frac{x}{2}} - 1$$

係数 : `coeff(EQ,X,N)`式 EQ の X の N 乗の係数を抽出する。

```
EQ:2*x^2+x-6;
coeff(EQ,x,2);
```

出力結果 :

$$2x^2 + x - 6 \rightarrow 2$$

最初の項 : `first(EQ)`式 EQ の最初の項を抽出する。

```
EQ:2*x^2+x-6;
first(EQ);
```

出力結果 :

$$2x^2 + x - 6 \rightarrow 2x^2$$

最後の項 : `last(EQ)`式 EQ の最後の項を抽出する。

```
EQ:2*x^2+x-6;
last(EQ);
```

出力結果 :

$$2x^2 + x - 6 \rightarrow -6$$

項の削除 : `rest(EQ,N)`

式 EQ の最初から N 個成分を除いた項を出力する。ここで、 N を負とすると、最後から N 個成分を除いた項を出力する。

```
EQ:2*x^2+x-6;
rest(EQ,2);
```

出力結果 :

$$2x^2 + x - 6 \rightarrow -6$$

分子 : `num(EQ)`式 EQ の分子を出力する。

```
EQ:x/(x^2+x);
num(EQ);
```

出力結果 :

$$\frac{x}{x^2+x} \rightarrow x$$

分母 : `denom(EQ)`式 EQ の分母を出力する。

```
EQ:x/(x^2+x);
denom(EQ);
```

出力結果 :

$$\frac{x}{x^2+x} \rightarrow x^2+x$$

方程式を解く :

`solve([EQ1,EQ2],[x,y])`

式 $EQ1, EQ2$ を x, y について解く。結果は行列表示で出力される。

```
EQ:2*x^2+x-6=0;
solve(EQ,x);
```

出力結果 :

$$2x^2 + x - 6 = 0$$

$$\left[x = \frac{3}{2}, x = -2 \right]$$

```
EQ1:2*x+y=4;
EQ2:x+3*y=7;
ANS:solve([EQ1,EQ2],[x,y]);
ANS[1][1];
ANS[1][2];
```

出力結果 :

$$y + 2x = 4$$

$$3y + x = 7$$

$$[[x = 1, y = 2]]$$

$$x = 1$$

$$y = 2$$

A.4 行列

行列の定義：`matrix([A,B],[C,D])`

行列を入力、定義する。

```
XY:matrix([A,B],[C,D]);
```

出力結果：

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

運動を行列で表現するときには、下記のように列行列で表現した方が、変数変換行列の表現、演算表現で教科書に近い表現となり、理解しやすい。

```
kill(all);
X:x(t)=r(t)*cos(p(t));
Y:y(t)=r(t)*sin(p(t));
XY:matrix([ rhs(X)],[ rhs(Y) ]);
VXY:diff(XY,t);
AXY:diff(VXY,t);
TR:matrix([cos(p(t)), sin(p(t))],
           [-sin(p(t)),cos(p(t))]);
VRP:trigsimp(TR.VXY);
v[r](t)=VRP[1,1];
v[p](t)=VRP[2,1];
ARP:trigsimp(TR.AXY);
a[r](t)=ARP[1,1];
a[p](t)=ARP[2,1];
EQR:M*ARP[1,1]=F[r];
EQP:M*ARP[2,1]=F[p];
```

要素の抽出：`M[N][M]`

N 行、 M 列目の要素を抽出する。

```
XY:matrix([A,B],[C,D]);
```

```
XY[2][1];
```

出力結果：

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \rightarrow C$$

行列の積：`A.B`

行列： A と行列： B の積を求める。

```
M1:matrix([A,B],[C,D]);
```

```
M2:matrix([E,F],[G,H]);
```

```
M1.M2;
```

出力結果：

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} BG+AE & BH+AF \\ DG+CE & DH+CF \end{bmatrix}$$

転置行列：`transpose(M)`

行列： M の転置行列を求める。

```
M1:matrix([A,B],[C,D]);
```

```
M2:matrix([A],[B]);
```

```
transpose(M1);
```

```
transpose(M2);
```

出力結果：

$$\begin{bmatrix} A & C \\ B & D \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}$$

運動エネルギーを求めるとき、各速度成分の二乗和が必要となる。速度の行列表現の転置行列と元行列の積から容易に求まる。

```
T:1/2*M*trigsimp(transpose(VXY).VXY);
```

行列式：`determinant(M)`

行列： M の行列式を求める。

```
M:matrix([2*D^2+2, D^2],[D^2,D^2+1]);
```

```
determinant(M);
```

出力結果：

$$\begin{bmatrix} 2D^2+2 & D^2 \\ D^2 & D^2+1 \end{bmatrix} \rightarrow (D^2+1)(2D^2+2) - D^4$$

行列の作成：`genmatrix(a,M,N)`

定義された h の行列を作成する。

```
h[i,j]:=1/(i+j);
```

```
genmatrix(h,4,4);
```

出力結果：

$$h_{i,j} := \frac{1}{i+j}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

条件文が入った定義された a の行列を作成する。

```
AJK:1/(j+k);
a[m,n]:=block([b],
if m=4 then if n=4 then b:1 else b:0
else b:subst([k=n,j=m],AJK), return(b));
genmatrix(a,4,4);
```

出力結果：

$$\frac{1}{k+j} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

逆行列の計算：`invert(a)`

定義された a の逆行列を計算する。

```
h[i,j]:=1/(i+j);
genmatrix(h,4,4);
invert(%);
```

出力結果：

$$h_{i,j} := \frac{1}{i+j} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 200 & -1200 & 2100 & -1120 \\ -1200 & 8100 & -15120 & 8400 \\ 2100 & -15120 & 29400 & -16800 \\ -1120 & 8400 & -16800 & 9800 \end{pmatrix}$$

A.5 微分・積分

微分：`diff(EX,x,N)`

EX を微分変数： x で N 階微分を行う。 N を省略すれば、1 階微分をする。

```
EX:x^3;
diff(EX,x,1);
diff(EX,x,2);
```

出力結果：

$$x^3 \rightarrow 3x^2 \rightarrow 6x$$

```
X:x(t)=r(t)*cos(p(t));
diff(X,t,1);
```

$$x(t) = r(t) \cos(p(t)) \rightarrow$$

$$\frac{d}{dt} x(t) = \cos(p(t)) \left(\frac{d}{dt} r(t) \right) - r(t) \sin(p(t)) \left(\frac{d}{dt} p(t) \right)$$

積分：`integrate(EX,x,A,B)`

EX を積分変数： x で、 A から B の積分を行う。、 A 、 B を省略すれば、不定積分となる。

```
EX:x^2;
integrate(EX,x,0,2);
integrate(EX,x);
```

$$x^2 \rightarrow \frac{8}{3} \rightarrow \frac{x^3}{3}$$

```
EX:y(x)^2;
integrate(EX,x);
integrate(EX,y(x));
```

$$y(x)^2 \rightarrow \int y(x)^2 dx \rightarrow \frac{y(x)^3}{3}$$

積分における変数変換 :

changevar(EQ, B, A)

積分記述 : EQ を式 : $EQ = 0$ の関係を使って、変数 : A から変数 : B に変換する。

```
EX: 'integrate(%e^(sqrt(a*y)), y, 0, 4);
EQ: y-z^2/a=0;
changevar(EQ, lhs(EQ), z, y);
```

$$\int_0^4 e^{\sqrt{a}y} dy$$

$$y - \frac{z^2}{a} = 0$$

$$\frac{2 \int_{-2\sqrt{a}}^0 z e^{|z|} dz}{a}$$

微分方程式を解く :

desolve([EQ1, EQ2], [f1(x), f2(x)])

連立微分方程式 : $EQ1$ 、 $EQ2$ 、で従属変数 : $f1(x)$ 、 $f2(x)$ を解く。初期条件は下記のようにして、従属変数の初期条件における値を定義する。連立微分方程式の場合、解は行列表示となる。

```
EQ1: diff(y(x), x, 2) + 2*y(x) + z(x) = 0;
EQ2: y(x) + diff(z(x), x, 2) + 2*z(x) = 0;
atvalue(y(x), x=0, 1);
atvalue(diff(y(x), x, 1), x=0, 0);
atvalue(z(x), x=0, 2);
atvalue(diff(z(x), x, 1), x=0, 0);
desolve([EQ1, EQ2], [y(x), z(x)]);
```

$$\frac{d^2}{dx^2} y(x) + z(x) + 2y(x) = 0$$

$$\frac{d^2}{dx^2} z(x) + 2z(x) + y(x) = 0$$

$$y(x) = \frac{3 \cos(\sqrt{3}x)}{2} - \frac{\cos(x)}{2}$$

$$z(x) = \frac{3 \cos(\sqrt{3}x)}{2} + \frac{\cos(x)}{2}$$

微分方程式を解く : **ode2(EQ, f(x), x)**

2階以下の微分方程式 : EQ で従属変数 : $f(x)$ 、独立変数 : x を解く。境界条件は下記のように、関数 : $ode2$ を実行後に、関数 : $ic1, ic2, bc2$ を使用して定義する。

一階微分方程式の場合

```
kill(all);
EQ: diff(y(x), x, 1) = -(x-C)/y(x);
ANS: ode2(EQ, y(x), x);
ANS1: ic1(ANS, x=0, y(x)=1);
```

下記に出力結果を示す。 $y(x)$ の関数形で解は得られるが、境界条件を $ic1$ で求めた結果は満足ではない。

$$\frac{d}{dx} y(x) = \frac{C-x}{y(x)}$$

$$\frac{y(x)^2}{2} = \frac{2xC - x^2}{2} + \%c$$

$$\frac{y(x)^2}{2} = \frac{2xC - x^2 + y(0)^2}{2}$$

```
kill(all);
depends(y, x);
EQ: diff(y, x, 1) = -(x-C)/y;
ANS: ode2(EQ, y, x);
ANS1: ic1(ANS, x=0, y=1);
```

下記に $depends$ を使った関数形の出力結果を示す。境界条件を $ic1$ で求めた結果は満足できる。

$[y(x)]$

$$\frac{d}{dx} y = \frac{C-x}{y}$$

$$\frac{y^2}{2} = \frac{2xC - x^2}{2} + \%c$$

$$\frac{y^2}{2} = \frac{2xC - x^2 + 1}{2}$$

二階微分方程式の場合

```
kill(all);
EQ: x^2*diff(y(x), x, 2) + x*diff(y(x), x, 1)
- 4*y(x) = 0;
ANS: ode2(EQ, y(x), x);
ANS1: ic2(ANS, x=1, y(x)=1, diff(y(x), x, 1)=0);
ANS2: bc2(ANS, x=1, y(x)=0, x=2, y(x)=1);
```

下記に出力結果を示す。 $y(x)$ の関数形で解は得られるが、境界条件を $ic2, bc2$ で求めた結果は満足ではない。

$$x^2 \left(\frac{d^2}{dx^2} y(x) \right) + x \left(\frac{d}{dx} y(x) \right) - 4y(x) = 0$$

$$y(x) = \%k1 x^2 + \frac{\%k2}{x^2}$$

$$y(x) = \frac{y(1) x^2}{2} + \frac{y(1)}{2x^2}$$

$$y(x) = \frac{16y(1) - 4y(2)}{15x^2} - \frac{(y(1) - 4y(2))x^2}{15}$$

```
kill(all);
depends(y,x);
EQ:x^2*diff(y,x,2)+x*diff(y,x,1)
-4*y=0;
ANS:ode2(EQ,y,x);
ANS1:ic2(ANS,x=1,y=1,diff(y,x,1)=0);
ANS2:bc2(ANS,x=1,y=0,x=2,y=1);
```

下記に depends を使った関数形の出力結果を示す。境界条件を ic2,bc2 で求めた結果は満足できる。

$$[y(x)]$$

$$x^2 \left(\frac{d^2}{dx^2} y \right) + x \left(\frac{d}{dx} y \right) - 4y = 0$$

$$y = \%k1 x^2 + \frac{\%k2}{x^2}$$

$$y = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2x^2}$$

$$y = \frac{4x^2}{15} - \frac{4}{15x^2}$$

微分方程式の数値解: `rk([EQ1, EQ2], [x, y], [X0, Y0], [t, T0, T1, DT])`

ルンゲ・クッタ法で微分方程式を数値解析する。左辺が1階微分の形で微分方程式を表現する。右辺を `EQ1`、`EQ2` で表し、左辺の従属変数を x 、 y とする。それぞれの、初期値を $X0$ 、 $Y0$ とし、独立変数を t とする。独立変数の $T0$ から $T1$ まで、 DT 間隔で数値解析する。ここで独立変数は $x(t)$ の形は扱えない。実行する前に、ルンゲ・クッタ法のプログラムをロードする必要があるので、`load("dynamics");` を入力する。

$$\frac{d}{dt} x = -4y^2 - x^2 + 4$$

$$\frac{d}{dt} y = y^2 - x^2 + 1$$

の場合、

```
EQ1:'diff(x,t)=4-x^2-4*y^2;
EQ2:'diff(y,t)=y^2-x^2+1;
load("dynamics");
sol:rk([rhs(EQ1),rhs(EQ2)], [x,y],
[-1.25,0.75], [t,0,4,0.02]);
```

入っている出力は、リストの形式で出力されるので、下記の例に示すように `sol` に結果を入れ、必要な項目を `list12` に入れなおす。そして、下記の図形関数: `plot2d` などで見ることができる。

$$\frac{d^2}{dt^2} x = -\sin(x)$$

の場合、下記の1階連立微分方程式に置き換えて解く。

$$\frac{d}{dt} x = y$$

$$\frac{d}{dt} y = -\sin(x)$$

```
kill(all);
EQ1:'diff(x,t,2)=-sin(x);
Tmax:3;
dT:0.03;
Nplot:fix(Tmax/dT);
load("dynamics");
P[0]:%pi/9;
sol:rk([y,rhs(EQ1)], [x,y], [P[0],0],
[t,0,Tmax,dT]);
list12:[[sol[1][1],sol[1][2]]];
for J:2 thru Nplot do(list12:append(list12,
[sol[J][1],sol[J][2]]));
plot2d([discrete,list12]);
```

A.6 複素数

複素変数宣言 : `declare(z,complex)`

z が複素変数であることを宣言する。

```
declare(z,complex);
```

実部 : `realpart(z)`

複素数: z の実部を出力する。

```
kill(all);
declare(z,complex);
Z1:z=x[1]+%i*y[1];
realpart(rhs(Z1));
```

$$z = iy_1 + x_1 \rightarrow x_1$$

虚部 : `imagpart(z)`

複素数: z の虚部を出力する。

```
kill(all);
declare(z,complex);
Z1:z=x[1]+%i*y[1];
imagpart(rhs(Z1));
```

$$z = iy_1 + x_1 \rightarrow y_1$$

複素共役 : `conjugate(z)`

複素数: z の複素共役を出力する。

```
kill(all);
declare(z,complex);
Z1:z=x[1]+%i*y[1];
conjugate(rhs(Z1))
```

$$z = iy_1 + x_1 \rightarrow x_1 - iy_1$$

極座標表示 : `polarform(z)`

複素数: z を極座標表示で出力する。

```
kill(all);
declare(z,complex);
Z1:z=x[1]+%i*y[1];
polarform(rhs(Z1));
```

$$z = iy_1 + x_1 \rightarrow \sqrt{y_1^2 + x_1^2} e^{i \operatorname{atan2}(y_1, x_1)}$$

xy 座標表示 : `rectform(z)`

複素数: z を極座標表示で出力する。

```
kill(all);
declare(z,complex);
Z1:z=r*%e^(%i*\theta);
rectform(rhs(Z1));
```

$$z = r e^{i\theta} \rightarrow ir \sin(\theta) + r \cos(\theta)$$

留数 : `residue(EQ,z,z[0])`

式 : EQ 、変数 : z で、 z_0 における留数を求める。

```
kill(all);
declare(z,complex);
residue (z/(z^2+a^2), z, a%i);
residue (sin(a*z)/z^4, z, 0);
```

$$\frac{1}{2}$$

$$-\frac{a^3}{6}$$

A.7 極限・級数

極限 : `limit(EQ,x,A,dir)`

変数 x を方向 dir から A に接近する場合、式 EQ の極限を計算する。 dir としては、 $plus$ か $minus$ を入力する。 A に接近した場合、値が分らない場合は、 dir は入力しなくてよい。ここでプラス無限大は inf 、マイナス無限大は $minf$ である。

$$x(t) = \frac{U0}{C} - \frac{e^{-tC} U0}{C}$$

$$Xmax = \frac{U0}{C}$$

```
kill(all);
XX:x(t)=U0/C-(%e^(-t*C)*U0)/C;
Xmax=limit(rhs(XX),t,inf);
```

$$x(t) = \frac{U0}{C} - \frac{e^{-tC} U0}{C}$$

$$Xmax = \frac{U0}{C}$$

級数展開 : `taylor(EX,x,A,N)`

式 EX を A のまわりで、変数 x の Taylor 級数を N 乗まで求める。

```
taylor(sin(x),x,0,7);
```

$$\sin(x) \rightarrow x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \dots$$

級数和 : `sum(EX,n,n1,n2)`

式 EX を変数 n の $n1$ から $n2$ までの級数和を求める。

```
HH:h=h[0]+2*sum(h[0]*E^(2*n),n,1,inf);
h=h[0]+2*sum(h[0]*E^(2*n),n,1,4);
```

$$h = 2h_0 \left(\sum_{n=1}^{\infty} E^{2n} \right) + h_0$$

$$h = 2(h_0 E^8 + h_0 E^6 + h_0 E^4 + h_0 E^2) + h_0$$

級数和の簡素化 : `simpsum`

上部で定義されている級数和を、true にすることで簡素化する。結果が得られたら、false にする。

```
assume(E>0, E<1);
HH:h[0]+2*sum(h[0]*E^(2*n),n,1,inf);
HH, simpsum;
sum(1/n^2,n,1,inf);
sum(1/n^2,n,1,inf), simpsum;
sum(1/3^i,i,1,inf);
%,simpsum;
```

$$2h_0 \left(\sum_{n=1}^{\infty} E^{2n} \right) + h_0 \rightarrow \frac{2h_0 E^2}{1-E^2} + h_0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \rightarrow \frac{\pi^2}{6}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{3^i} \rightarrow \frac{1}{2}$$

級数積 : `product(EX,n,n1,n2)`

式 EX を変数 n の $n1$ から $n2$ までの級数積を求める。

```
kill(all);
product(k,k,1,n);
```

$$\prod_{k=1}^n k$$

級数積の簡素化 : `simpproduct`

定義されている級数積を、簡素化する。

```
kill(all);
product(k,k,1,n), simpproduct;
```

$$n!$$

A.8 プログラム

反復 : **for** N:k **step** l **thru** m **do**(A);

A を N が k から m まで i ステップ毎に反復実行する。
A で複数の処理をする場合は、で区切る。

条件分岐 : **if** B **then** C **else** D;

条件式 : B が真なら C を実行し、虚なら D を実行する。
条件式として、 $N = 1, N > 0$ などである。

```
kill(all);
for J:1 thru 10 do(
if J=1 then listUU20:[[1,2]]
else listUU20:append(listUU20,
[[2*J-1,2*J]]);
listUU20;
```

リストのファイル出力、読み込み :

write_data, **read_list**

計算結果などのリストデータを外部メディアにファイル出力し、外部メディアにファイル出力したリストを読み込む。

```
kill(all);
listUU:[[1,11],[2,22],[3,33]];
write_data(listUU,"M:\listUU20.cvs");
list:read_list("M:\listUU20.cvs");
for J:1 thru 100 do(
if J=1 then listUU20:[[list[1],list[2]]]
else listUU20:append(listUU20,
[[list[2*J-1],list[2*J]]]);
listUU20;
```

リストデータ: listUU を作成する。

`[[1, 11], [2, 22], [3, 33]]`

外部メディアにファイル : M:listUU20.cvs の名前で、出力する。

外部メディアにファイル : M:listUU20.cvs をリストとして読み込む。読み込んだ結果は下記、

`[1, 11, 2, 22, 3, 33]`

連続したデータリストとなっているので、振り分け作業を行い、元の形にする。

`[[1, 11], [2, 22], [3, 33]]`

A.9 その他

第一種完全楕円積分関数 : **elliptic_kc**(m)

下記の第一種完全楕円積分関数を求める。

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - m \sin(x)^2}} dx$$

第一種ベッセル関数 : **bessel_j**(n,x)

次数 : n で変数 : x の第一種ベッセル関数を求める。

第二種ベッセル関数 : **bessel_y**(n,x)

次数 : n で変数 : x の第二種ベッセル関数を求める。

第一種変形ベッセル関数 : **bessel_i**(n,x)

次数 : n で変数 : x の第一種変形ベッセル関数を求める。

第二種変形ベッセル関数 : **bessel_k**(n,x)

次数 : n で変数 : x の第二種変形ベッセル関数を求める。

根を得る : **find_root**(Fn,x,a,b)

根を数値解析で得る。関数 : Fn を与え、変数 : x が $a \sim b$ の範囲で $FN = 0$ の根を求める。

```
kill(all);
find_root(bessel_j(1,x),x,2,4);
```

$bessel_j(1, x)$ の根を x が 2 から 4 の範囲で求める。

定数 : π : %pi

定数 : 自然対数の底 : %e

定数 : 虚数 : %i

定数 : 正の無限大 : inf

定数 : 負の無限大 : minf

浮動小数点で近似値 : **float**(EQ)

A.10 グラフ作成

二次元グラフ：

`plot2d([EX1,EX2],[range],[op])`

二次元のグラフを作成する。*EX1*、*EX2*に数式や点列の指定、*range*に横軸の計算レンジ、*op*に縦軸に指定などのオプションを指定する。

(1) 数式を与えて

数式と x の計算レンジを与えたグラフの作成をする。

```
plot2d (x^3+2, [x, -3, 3]);
```

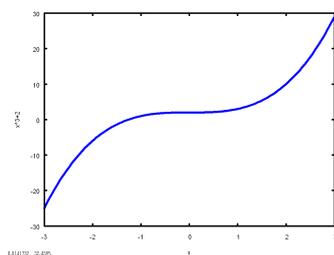


図 A.10.1: 数式を与えて

(2) 数式を与えて軌跡

x 、 y の変数： t の数式を与え、 $x-y$ 面上のグラフの作成をする。*nticks*で分割点数を与える。

```
plot2d ([parametric,2*cos(t),10*sin(t),
[t,-5,5],[nticks,80]]);
```

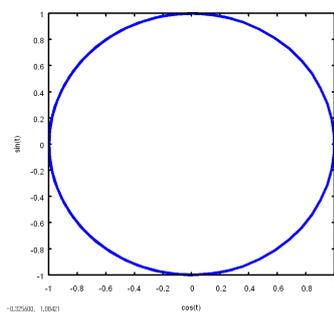


図 A.10.2: 数式を与えて軌跡

(3) 点列を与えて

x 、 y の点列の行列を与え、グラフの作成をする。

```
xy: [[-2,30],[1,-20],[0,10],[1,-10],
[2,-20]];
plot2d([discrete,xy]);
```

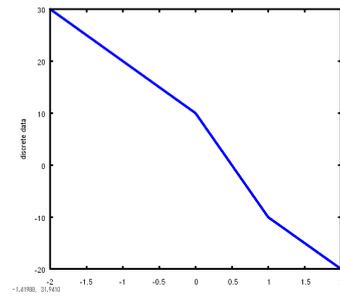


図 A.10.3: 点列を与えて

(4) 複数の数式を与えて

数式と x の計算レンジを与えたグラフの作成をする。

```
plot2d ([-10*x,2*x^2-2,x^3+2],[x,-3,3]);
```

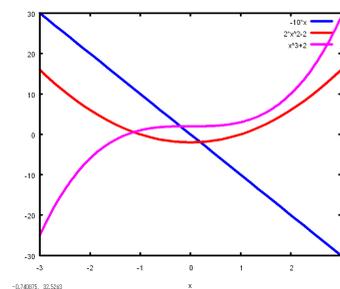


図 A.10.4: 複数の数式を与えて

(5) 複数のグラフの合成

数式と x の計算レンジを与えたグラフの作成をする。

```
plot2d ([x^3+2,[parametric,2*cos(t),
10*sin(t),[t,-5,5],[nticks,80]],
[discrete,xy],
[x,-3,3]]);
```

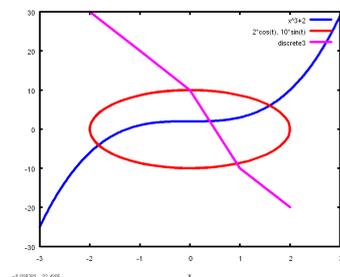


図 A.10.5: 複数のグラフの合成

(6) オプション

線の種類を指定

```
[style, [lines, l1, l2]]
```

l1 : 線の太さ, l2 : 線の色を指定する。lines : 線で描くが、これを points、linespoints、dots と指定することもできる。

```
plot2d([x, 2*x, -x, -2*x], [x, -10, 10],
[y, -10, 10], [nticks, 5], [style, [lines, 8, 1],
[points, 4, 2], [linespoints, 2, 3],
[dots, 8, 4]]);
```

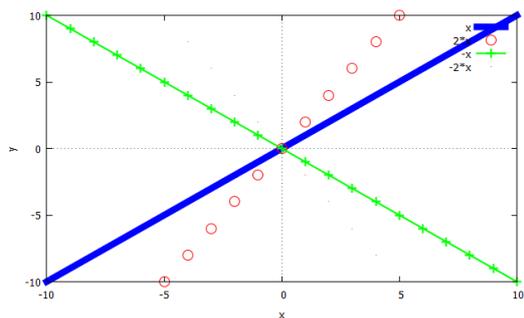


図 A.10.6: 線の種類

線のコメント

```
plot2d([x, 2*x, -x, -2*x], [x, -10, 10],
[y, -10, 10], [legend, "A", "B", "C", "D"]);
```

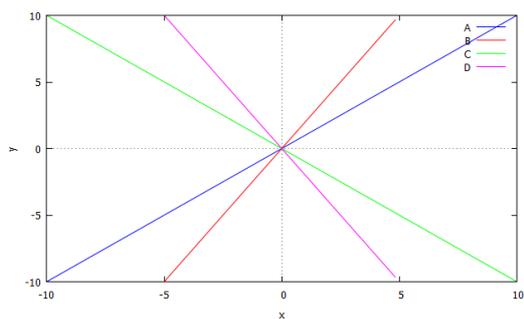


図 A.10.7: 線にコメント

縦軸、横軸のコメント

```
plot2d(x^3+2, [x, -3, 3], [y, -40, 50],
[xlabel, "X axis"], [ylabel, "Y axis"]);
```

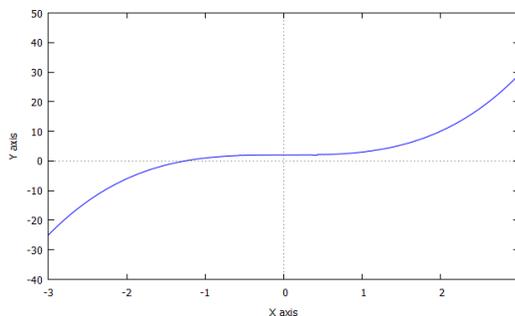


図 A.10.8: 縦軸、横軸コメント

対数軸

```
plot2d(%e^x, [x, -100, 100], [logy]);
plot2d(log(x), [x, 0.1, 100], [logx]);
```

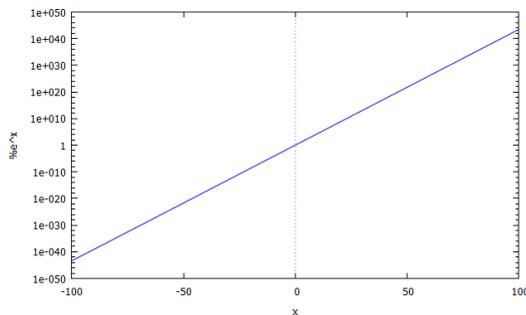


図 A.10.9: y 軸対数軸

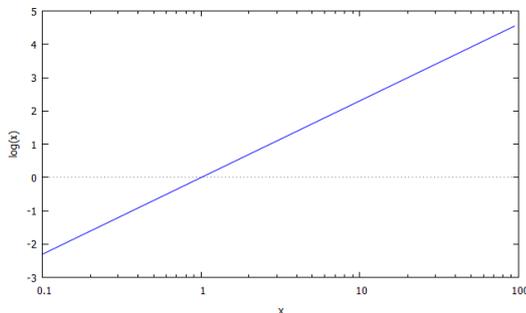


図 A.10.10: x 軸対数軸

三次元グラフ：

`plot3d(EX1,[x range],[y range])`

三次元のグラフを作成する。*EX1*に数式の指定、*xrange*に横軸の計算レンジ、*yrange*に縦軸の計算レンジの指定などのオプションを指定する。

数式と x, y の計算レンジを与えたグラフの作成をする。

```
plot3d (2^(-u^2+v^2), [u, -3, 3], [v, -2, 2]);
```

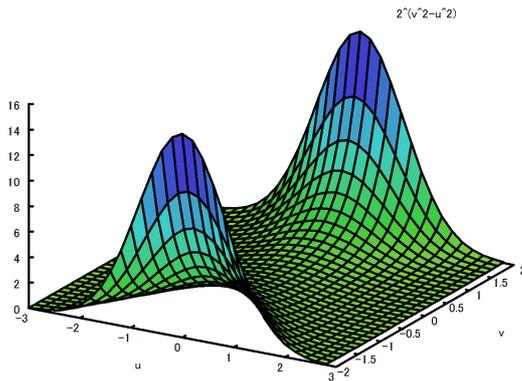


図 A.10.11: 三次元グラフ

円柱座標三次元グラフ：

円柱座標三次元グラフを作成する。

```
plot3d(r^2, [r, 0, 1], [\theta, 0, 2*pi],
[grid, 20, 50], [transform_xy, polar_to_xy]);
```

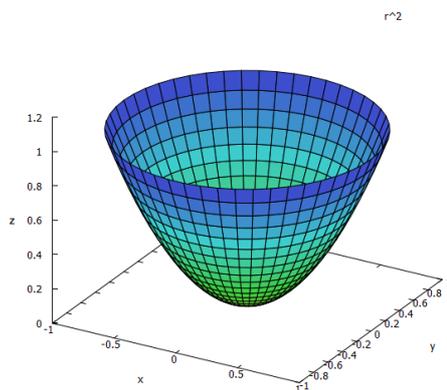


図 A.10.12: 円柱座標三次元グラフ

等高線グラフ (gnuplot による)

等高線グラフを gnuplot で作成する。

```
set xrange [X1:X2] x range
set yrange [Y1:Y2] y range
set isosamples NX,NY x,y 軸の分割点数
set cntrparam levels incremental Z1,dz,Z2 z 軸の初期値、増分、終値
splot EX 数式
```

```
#!/gnuplot
set xrange [-3:3]
set yrange [-3:3]
set isosamples 150,150
set contour base
set cntrparam levels incremental -3,0.2,4
unset key
unset surface
set view map
splot (7*log(y**2+x**2))/(2*pi)
-y/(y**2+x**2)+y
# EOF
```

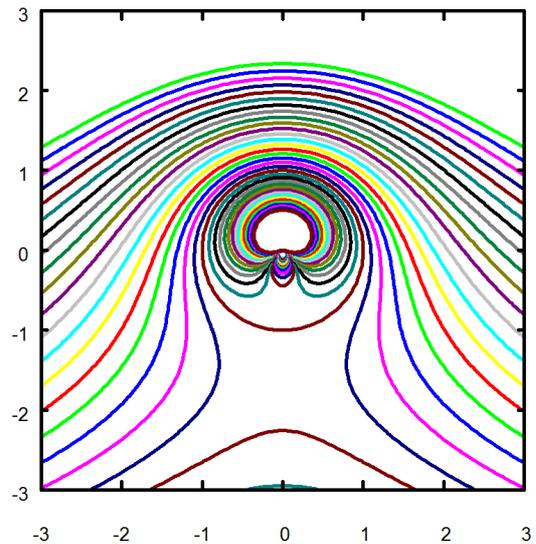


図 A.10.13: 等高線グラフ

参考文献

- 1) Maxima の公式ホームページ、<http://maxima.sourceforge.net/>
- 2) 横田博史：はじめての Maxima、工学社 2005
- 3) 竹内 薫：はじめての数式処理ソフト CD-ROM 付、(ブルー-ボックス) (新書) 2007
- 4) 中川義行：Maxima 入門ノート 1.2.1、<http://www.eonet.ne.jp/~kyo-ju/maxima.pdf>
- 5) 横田博史：Maxima 簡易マニュアル、<http://www.bekkoame.ne.jp/~ponpoko/Math/books/ManualBook.pdf>
- 6) Maxima 普及委員会、<http://www.cymric.jp/maxima/top.html>
- 7) Profesional Maxima、<http://www.muskmelon.jp/maxima/pro-maxima-20080303.pdf>
- 8) 奥村晴彦：[改訂第 3 版]L^AT_EX 2_ε 美文書作成入門、技術評論社 2004
- 9) Robert L. Zimmerman, Fredrick I. Olness：Mathematica for Physics, 訳：武藤 覚、小泉 悟、ピアソン・エデュケーション 1999
- 10) 長岡洋介：電磁気学 物理入門コース 3、岩波書店 1982
- 11) 長岡洋介：電磁気学 物理入門コース 4、岩波書店 1983
- 12) 長岡洋介、丹慶勝市：例解 電磁気学演習 物理入門コース/演習 3、岩波書店 1990
- 13) 横山順一：電磁気学 講談社基礎物理学シリーズ 4、講談社 2009
- 14) 清水忠雄：電磁気学 基礎物理学シリーズ 9、朝倉書店 2009
- 15) 清水忠雄：電磁気学 基礎物理学シリーズ 10、朝倉書店 2009
- 16) 岸野正剛：納得しながら電磁気学、朝倉書店 2014
- 17) G. ポリア、柿内賢信訳：いかにして問題を解くか、丸善出版 1954
- 18) 溝口純敏：Maxima を使った物理数学基礎演習ノート、<http://www9.plala.or.jp/prac-maxima/>